Г. ТРЕДЕР

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

GRAVITATIONSTHEORIE UND ÄQUIVALENZPRINZIP

LORENTZ-GRUPPE, EINSTEIN-GRUPPE UND RAUMSTRUKTUR

HERAUSGEGEBEN VON
PROF. DR. HABIL. H.-J. TREDER

BEITRÄGE VON

Dr. H.-H. v. Borzeszkowski,
Dr. U. Kasper, Dr. E. Kreisel,
Dr. D.-E. Liebscher, Prof. Dr. H.-J. Treder

AKADEMIE-VERLAG-BERLIN 1971

Г.-Ю. ТРЕДЕР

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

ГРУППА ЛОРЕНЦА, ГРУППА ЭЙНШТЕЙНА И СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА

(При участии Х-Х ф. Божешковского, У. Каспера, Э. Крайзеля, Д.-Э. Либшера

ПЕРЕВОД С НЕМ. А. Н. БОГОЛЮБОВА
ПОД РЕД. ПРОФЕССОРА Д. Д. ИВАНЕНКО

МОСКВА АТОМИЗДАТ 1973

УДК 53.02

Тредер Г.-Ю. Теория гравитации и принцип эквивалентности. Пер. с нем. Под ред. проф. Д. Д. Иваненко. М., Атомиздат, 1973, с. 168.

В монографии (ГДР, 1971) проф. Тредера — известного немецкого ученого, занимающегося проблемами гравитации, дан тщательный анализ принципа эквивалентности, положенного Эйнштейном в основу созданной им теории гравитации — общей теории относительности. Аксиоматика общей теории относительности еще не создана, однако исследования автора очень актуальны. Это монография по одному из фундаментальных вопросов современной теории гравитации. В ней всесторонне анализируются понятие, значимость и динамика развития принципа эквивалентности в гравитации. Хорошо освещены и прослеживаются связи принципа эквивалентности с другими проблемами гравитации, дано хорошее изложение истории вопроса и возникновения различных теорий гравитации.

Рис. 3. Библиография—113.

$Т \frac{0237-006}{034(01)-73} 6-73$

Ганс-Юрген Тредер

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ И ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Редактор **В. Г. Лапчинский**
Художественный редактор **А. Т. Кирьянов**
Переплет художника **А. И. Шаварда**
Технический редактор **Н. А. Власова**
Корректор **Л. С. Тимохова**

Сдано в набор 19/IV 1973 г. Подписано к печати 18/X 1973 г. Формат 84×108 1/32. Бумага типографская № 1. Усл. печ. л. 8,82. Уч.-изд. л. 8,6. Тираж 7000 экз. Цена 86 коп. Зак. изд. 71334. Зак. тип. 344.

Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5.

Ярославский полиграфкомбинат «Союзполиграфпрома» при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Ярославль, ул. Свободы, 97.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Коперниканский юбилейный год побуждает к размышлениям в широком плане и естественным образом ставит вопрос о том, насколько совершенна физическая картина мира: достаточно ли средств квантовой механики и теории относительности (специальной и общей — СТО и ОТО) для объяснения всех основных фактов, касающихся элементарных частиц, ядер и атомов, на одном полюсе, и различных звездных объектов, галактик и эволюции всей известной Вселенной — на другом? Достаточны ли сейчас какие-то относительно «спокойные» обобщения существующих теорий или необходимы радикальные изменения концепций для объяснения, в частности, самого факта существования элементарных частиц, для понимания источников огромных энергий квазаров и взрывов галактик, для полного понимания предсказываемого коллапса массивных звезд и самого взрыва Вселенной, не говоря уже о довзрывной ее истории? Короче говоря, стоим ли мы накануне перехода (или скачка?) к новой картине мира, третьей после коперник-галилей-ньютоновской картины и после нынешней квантово-релятивистской картины мира?

При обсуждении всех этих вопросов одно из центральных мест занимает проблема гравитации, базисом понимания которой является созданная Эйнштейном в 1915 г. общая теория относительности (ОТО), связывающая гравитацию с искривлением пространства — времени, вызываемым всеми формами материи. Подтверждение трех основных предсказаний ОТО (сдвиг перигелия Меркурия, красное смещение спектральных линий и отклонение света в поле тяготения) сделали ее общепризнанной. В последнее время сюда добавились интерпретация на базе ОТО расширения Вселенной, подтверждение запаздывания времени радиосигнала, отраженного от планеты в поле Солнца, и открытие предсказанного моделью горячей Вселенной реликтового излучения. Вместе с тем не было обнаружено ни одного противоречия предсказаний ОТО данным опыта.

Несмотря на все это, ввиду недостаточной точности ряда подтверждений (всего несколько процентов, например, для отклонения света), не сравнимой с прецизионными данными атомной физики с их точностью, достигающей единиц 8—9-го знаков и, вместе с тем, благодаря наличию ряда важных невыясненных пунктов ОТО, к которым относятся проблема энергии гравитационного поля, проблема коллапса массивных звезд и Большого взрыва Вселенной, а также вопросы квантования гравитации, в последние годы предпринято более глубокое обсуждение принципов ОТО и поставлены новые эксперименты с целью новой, более точной ее проверки. Указанные обстоятельства стимулируют построение теорий гравитации, обобщающих в тех или иных направлениях эйнштейновскую ОТО, и побуждают вновь проанализировать прежние варианты теории гравитации.

Мы являемся свидетелями огромного интереса к проблемам гравитации, обязанного как выросшим возможностям эксперимента (лабораторного, спутникового, астрономического), так и потребностями построения более совершенной картины мира, что привело в последние годы к созыву многочисленных конференций, симпозиумов, высших гравитационных школ, созданию новых журналов, значительному росту публикаций — научных, учебных, философских, исторических и популярных.

Книга авторитетного немецкого гравитациониста Ганса-Юргена Тредера, члена Академии наук ГДР и директора Института космических исследований в Потсдаме, посвящена анализу двух основных положений ОТО — принципа эквивалентности и принципа относительности. Различные аспекты принципа эквивалентности рассматриваются Тредером прежде всего в историческом плане, в свете дискуссии Эйнштейна с Абрагамом в годы, предшествовавшие окончательному установлению ОТО, достигнутому с таким трудом, после ряда колебаний и отходов. Как известно, дискуссия вокруг роли принципа эквивалентности возникала и в более позднее время, вплоть до наших дней, причем некоторые, немногие авторы даже говорили о ненужности или незначительности роли этого принципа. В этой связи напомним замечание Инфельда, долгое время работавшего с Эйнштейном, что сам автор ОТО всегда придавал принципу эквивалентности первостепенное значение.

В согласии с подавляющим большинством гравитационистов, в том числе авторами недавних книг и обзоров (Меллер, Дикке, Торн и др.), Тредер подчеркивает значение принципа эквивалентности и различает пять ступеней его уточнения или абстрагирования от признания равенства инертной и тяжелой масс через закон движения по геодезической и закон сохранения для тензора материи до «слабого» принципа эквивалентности (Сл.ПЭ), выражающегося в локальной выполнимости СТО для негравитационных полей, и, наконец, «сильного» принципа эквивалентности (СПЭ), согласно которому гравитационное поле тождественно метрике.

Тредер предлагает классифицировать теории гравитации по степени выполнимости принципа эквивалентности и рассматривает в книге кроме эйнштейновской ОТО, где выполняется СПЭ, также скалярно-тензорную теорию (СТТ) Иордана — Бранса— Дикке, в которой СПЭ нарушается ввиду наличия добавочного скалярного неметрического гравитационного поля; в теории Хойла — Нарликара, рассматриваемой в книге, СПЭ нарушается, а Сл.ПЭ удовлетворяется только частично; биметрическая гравидинамика Розена удовлетворяет только слабому принципу эквивалентности.

Отметим несколько отличные формулировки этих вопросов в работах активной группы американских авторов (Уилер — Мизнер — Торн, Вилл, Ни и др.), также придающих большое значение принципу эквивалентности. Отправным пунктом здесь является «принцип универсальности свободного падения» (Галилей!), выражающийся в независимости мировой линии пробного тела от его внутренней структуры и состава. Действительно, опыты Этвеша и их последующие уточнения доказали независимость гравитационного ускорения от природы тел лабораторных размеров. Это утверждение совпадает с формулировкой «слабого принципа эквивалентности» Дикке (1964 г.) и принципом равенства пассивной гравитационной и инертной масс Бонди (1957 г.). В этой связи обсуждается также «предположение Шиффа», согласно которому всякая полная (в известном смысле) теория гравитации, включающая универсальность свободного падения, неизбежно содержит эйнштейновский принцип эквивалентности, который утверждает, что все негравитационные законы физики одинаковы в каждой локальной свободно падающей системе. Под сильным принципом эквивалентности имеются в виду правила перехода от минковской к римановой метрике с заменой обычных производных ковариантными для законов физики в системах, отличных от свободно падающих (Вилл 1972 г.)

Для пояснения приведем высказывания широко цитируемой статьи из сборника Л. Виттена «Гравитация», авторы которой (Бертотти, Брилл, Кротков) приводят обычную формулировку слабого принципа эквивалентности, подтверждаемого опытами Этвеша: траектория пробной частицы, движущейся только под действием гравитационного поля, зависит лишь от ее начального положения и скорости, но не зависит от массы и природы частицы. С другой стороны, формулировки сильного принципа эквивалентности несколько различаются у тех или иных авторов, поскольку, например, в только что указанной статье для выполнения сильного принципа эквивалентности требуются два добавочных предположения, сводящихся, коротко говоря, к следующему: 1) существование локальных инерциальных систем отсчета (эквивалентных с точностью до лоренцевых преобразований), в которых физические законы принимают форму СТО и которой они обладали бы в отсутствие тяготения. Иными словами, все эффекты гравитации (кроме «приливных») исчезают в свободно падающей системе; 2) космологическое допущение, утверждающее сохранение специальной релятивистской формы законов и постоянство безразмерных констант теории во всей Вселенной; тем самым утверждается невозможность определения геометрических свойств Вселенной при помощи локальных экспериментов (отсюда, в частности, видно, что СТТ, допускающая переменность гравитационной константы, нарушает СПЭ, который соблюдается в ОТО).

Ряд замечаний Тредера относится к пониманию общего принципа относительности, являющегося, по его мнению, другим краеугольным камнем теории, по поводу чего опять-таки продолжаются дискуссии. В этой связи укажем на повторные предложения о различных наименованиях самой теории Эйнштейна: наряду с исторически укоренившимся термином — общая теория относительности (ОТО), как противопоставление — в ряде отношений — специальной теории относительности (СТО), возникли названия: геометродинамика (Уилер; хотя этот термин следует скорее отнести не к стандартной ОТО, а к ее трактовке в духе Райнича); хроногеометрия (В. А. Фок, возражающий против наличия «общей» относительности в ОТО); гравидинамика (Б. де Витт, Д. Д. Иваненко; наряду с «гравистатикой»);

Тредер применяет варианты: гравидинамика и геохронометрия. Все эти термины имеют разумный смысл, отражая ту или иную сторону крайне богатого содержания теории, которая, вероятно, всегда сохранит данное самим автором наименование ОТО, также обладающее определенным физическим смыслом.

В книге Тредера делается затем ударение на важном понятии системы отсчета и в качестве наиболее подходящего математического формализма применяются тетрады. Во второй части книги тетрадный формализм используется для построения новой теории гравитации, существенно отличной от ОТО и приводящей к ряду важных следствий типа ослабления или «самопоглощения» гравитации в массивных объектах и тем самым к отсутствию коллапса, предсказываемому в ОТО для массивных звездных объектов, согласно наиболее общепринятым воззрениям.

Мы говорим везде о книге Тредера, хотя она составлена при участии группы его сотрудников: Х.-Х. Божешковского, У. Каспера, Э. Крайзеля, Д.-Э. Либшера. Для читателей книги следует сделать предупреждение, что, будучи написана во многом в ясной, доступной широкому кругу физиков, математиков, астрономов, философов форме, книга Тредера, конечно, предполагает знакомство с основами ОТО. Нет сомнений, что авторам удалось затронуть в первой части книги ряд самых фундаментальных положений гравидинамики и провести их вдумчивый анализ.

Предлагаемая новая теория гравитации Тредера, всесторонняя разработка которой предпринята в его группе в последние годы, представляет интерес с разных точек зрения, будучи любопытной по своей простоте и своеобразному применению тетрад.

Как мы неоднократно подчеркивали, мы считаем применение тетрад не только полезным в ряде случаев, но сугубо принципиальным и необходимым, в частности, для описания взаимодействия электронов, протонов и других фермионов с гравитацией (Фок—Иваненко, 1929 г.). Отсюда возникает мысль взять более примитивные тетрадные, а не метрические компоненты за основу и произвести соответственную формулировку ОТО с добавлением тех или иных дополнительных условий, или даже попытаться, например, в духе Тредера, выйти за рамки ОТО и ее ближайших вариантов.

В дальнейшем тетрады оказались необходимыми для описания систем отсчета, как подчеркнули советские авторы (В. И. Родичев, А. Е. Левашов, О. С. Иваницкая, книгу которой цитирует Тредер). При помощи тетрад выяснялся ряд сторон трудной проблемы энергии в ОТО (Меллер, Б. Н. Фролов, И. М. Дозморов). Так или иначе, предпринятая при нашем участии тетрадная «ревизия» и обобщение ОТО уже привели к интересным результатам.

Что касается коллапса, затронутого в книге, мы не будем останавливаться на этой особой проблеме, отметив лишь ряд интересных новых следствий в этом направлении, к которым приводит скалярно-тензорная теория. По мнению Уилера, космологический и астрономический коллапс является чуть ли не самой важной проблемой всей истории физики; во всяком случае, ее глубокий анализ требует привлечения особых математических средств (топология) для трактовки сингулярностей, затем обсуждения разнообразных астрофизических пунктов, а также многочисленных разделов квантовой физики атомных ядер и элементарных частиц. Не исключено, что здесь мы находимся на пороге, за которым могут потерять смысл обычные основные физические категории реальности: непрерывное пространство — время, квантовый мир элементарных частиц, основное состояние — вакуум, «обычное» гравитационное поле, относительно простая картина расширяющейся Вселенной.

В связи с тем, что в последнее время начались попытки классификации множества предложенных теорий гравитации, из которых в книге Тредера рассмотрено только ограниченное число, целесообразно дать краткий каталог всех основных вариантов, указав место среди них собственной теории Тредера, а также сообщить данные о новых экспериментах. Этим вопросам посвящается послесловие к данной книге.

ПРОФЕССОР Д. Д. ИВАНЕНКО

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последнее пятилетие был достигнут значительный прогресс в понимании математической структуры теории тяготения Эйнштейна (включая ее модификации и обобщения). Одновременно происходило дальнейшее изучение всех возможных физических следствий общей теории относительности, а применение ее к широкому классу проблем астрофизики привело к рождению новой научной дисциплины — общерелятивистской астрофизики. Однако постепенно было осознано, что само философское и физическое обоснование теории Эйнштейна, несмотря на всеобщее ее признание, все еще до конца не выяснено. Снова обострились те же проблемы, которые еще в 1911—1912 гг., в период построения общей теории относительности, находились в центре известной дискуссии Эйнштейна с Абрагамом. При исследовании ряда частных задач релятивистской теории тяготения возникла необходимость более глубокого анализа двух фундаментальных принципов теории — принципа относительности и принципа эквивалентности. Именно эта новая фаза обсуждения основ релятивистской теории и вызвала появление различных модификаций и обобщений теории Эйнштейна. Ни одна из этих теорий не является чем-то принципиально новым по сравнению с теорией Эйнштейна; они отличаются от первоначальной теории Эйнштейна, а также одна от другой лишь различным пониманием предложенных самим Эйнштейном фундаментальных принципов.

Обобщая релятивистскую теорию, исследователи руководствуются высказываниями ее автора, что математическая формулировка общей теории относительности является первым, но далеко не единственным и не последним шагом на пути создания адекватной теории тяготения, пространства и времени. А это значит, что вновь возросший интерес к обсуждению фундаментальных принципов релятивистской физики — явление вполне закономерное и необходимое. Широкий круг проблем, возникших при исследовании релятивистского гравитационного коллапса, показывает, что взаимодействие материи и гравитации при высоких плотностях и больших значениях масс в рамках стандартной общей теории относительности описывается некорректно.

Предметом настоящей книги является обсуждение физического смысла и математической формулировки различных подходов к толкованию двух фундаментальных идей Эйнштейна — принципа общей ковариантности и принципа относительности. В книге излагаются основы различных модифицированных теорий тяготения и производится их сравнение со стандартным аппаратом и основными следствиями общей теории относительности.

Во второй части книги обсуждается тетрадная теория гравитации, являющаяся попыткой написать релятивистскую программу Эйнштейна на новом языке, а именно вместо метрики (центрального понятия стандартной общей теории относительности) вводится в качестве основы теории понятие о системе отсчета, т. е. сделана попытка реализовать ту программу, которая была высказана Эйнштейном в дискуссии с Абрагамом. Этот новый подход к гравитации, который мы назовем теорией систем отсчета, приводит к принципиально новой, потенциалоподобной связи материи с гравитацией, к возможности решения ряда трудных физических проблем и, в частности, проблемы гравитационного коллапса.

ГАНС-ЮРГЕН ТРЕДЕР

ВВЕДЕНИЕ

У теории гравитационного поля нет такой богатой экспериментальной основы, как у теорий других полей. Причина этого — чрезвычайно малая интенсивность гравитационного взаимодействия. Непосредственные экспериментальные результаты получены пока лишь для слабого гравитационного поля. И только в Большом Космосе реализуются сильные гравитационные поля, но исследовать их можно лишь косвенно, изучая влияние сильной гравитации на движение и структуру космических объектов. Поэтому в теории гравитационного взаимодействия решающее значение приобретают фундаментальные принципы, истинность и всеобщность которых следуют из хорошо подтвержденных экспериментально теорий других волновых полей. В основание теории гравитационного поля положены принцип относительности и принцип эквивалентности тяжелой и инертной масс; первый из них можно считать несомненным вследствие хорошего экспериментального подтверждения специальной теории относительности, второй основан на твердо установленном факте, что все тела падают в поле сил тяжести (в вакууме) с одинаковой скоростью. Оказывается, что если принцип эквивалентности справедлив, то частный принцип относительности нужно обобщить, так как из эквивалентности тяжелой и инертной масс следует отсутствие вообще какой бы то ни было глобальной инерциальной системы. Оба эти принципа широко обсуждаются в литературе с разных точек зрения, вследствие чего и возникает различная интерпретация их физического содержания. Особое значение для теории гравитации приобретает обобщенный принцип относительности, степень понимания которого, по-видимому, зависит от глубины анализа принципа эквивалентности.

Целью настоящей книги является изложение и сопоставление различных формулировок принципа эквивалентности. На основании этого анализа выясняется важная роль систем отсчета в римановом пространстве, а в части В книги дается их точная математическая теория. Изложение начинается с утверждения, что принципы относительности и эквивалентности являются достаточной физической основой для построения теории гравитационного поля, а сформулированная на этих принципах общая теория относительности Эйнштейна является, по сути дела, теорией метрических свойств реального пространства — времени. Далее следует обсуждение, достаточно ли для описания гравитационного поля знание только метрики q_{ik}, или же необходимо введение других геометрических величин, как это делают, например, авторы скалярно-тензорных, биметрических и тетрадных теорий. Особое внимание обращается на то, чтобы показать, как именно различные толкования двух фундаментальных принципов связываются с той или иной модификацией теории Эйнштейна, и что последняя, как мы увидим, основана на их жесткой формулировке.

Сравнение модифицированных теорий, являющихся, по сути дела, расширенным изложением той или иной интерпретации принципов относительности и эквивалентности, позволяет глубже понять природу самих принципов и выявить те их характерные свойства, которые могут быть экспериментально проверены, что, в свою очередь, дает возможность выбрать из существующих вариантов единственно правильный.

Ясно, что полного описания гравитационного поля можно достигнуть, лишь изучая его взаимодействие с другими материальными полями. В книге показано, что чистая гравитационная динамика (движение материальных тел во внешнем гравитационном поле) может быть построена с одинаковым успехом во всех вариантах теорий гравитации, основанных на слабом принципе эквивалентности. Существенные расхождения между ними и теорией Эйнштейна начинаются лишь при описании обратного действия материи на гравитационное поле. Принципиальный характер расхождений заключается не в том, что аналитическая запись уравнений гравитационного поля в разных вариантах теории различна, а в том, что сама идея связи материи и гравитации понимается по-разному, что приводит к обобщению понятия константы гравитационного взаимодействия.

Хорошо известно, что учет взаимодействия гравитации и спинорных полей требует усложнения математического аппарата общей теории относительности путем введения формализма тетрад или метрических спинтензоров. Но в рамках теории Эйнштейна этот аппарат физически обесценивается, особенно если учесть, что спинорная структура пространства — времени ненаблюдаема. В рамках же тетрадных теорий или в теории систем отсчета этот аппарат приобретает совершенно иной смысл (см. гл. 3 и 5).

В части А книги рассмотрены только наиболее известные и характерные модификации теории Эйнштейна и оценены их преимущества и недостатки. Речь идет лишь о тех теориях, которые в той или иной степени основаны на принципе эквивалентности. Подчеркивается различие подходов к описанию нелинейных свойств гравитационного поля, поскольку лишь в этом приближении выявляются принципиальные различия теорий (приближение слабого, линейного гравитационного поля во всех теориях приводит к одинаковым результатам).

В гл. 1 рассматриваются те свойства гравитационного поля, которые должны быть включены в любую теорию гравитации, если теория претендует на экспериментальное обоснование. Имеется в виду, что любая теория гравитации должна содержать принцип эквивалентности тяжелой и инертной масс, а в нерелятивистском пределе — переходить в теорию тяготения Ньютона. Кроме того, любая из этих теорий должна приводить к правильным значениям отклонения света и смещения перигелия Меркурия. Во втором параграфе показывается, как в вытекающей из принципа эквивалентности концепции о римановой геометрии пространства — времени осуществляется принцип лоренц-инвариантности. Обсуждаются также различные подходы к толкованию физического смысла общего принципа относительности.

В гл. 2 излагаются наиболее известные скалярно-тензорные теории Иордана — Дикке и Хойла — Нарликара (излагается и скалярная теория Нордстрема, хотя она и стоит несколько особняком). В теории Иордана—Дикке нарушается сильный принцип эквивалентности, а в теории Хойла — Нарликара даже слабый принцип выполняется лишь частично.

Теорию Нордстрема, как не содержащую отклонения света в гравитационном поле, можно считать опровергнутой. Против других теорий говорит то, что следующие из них значения для отклонения света и смещения перигелия меньше эйнштейновских. Но, с другой стороны, учет магнитного поля звезды приводит в рамках этих теорий к смещению перигелия даже большему, чем у Эйнштейна. Тут же приводится утверждение Фрейндлиха о том, что и отклонение света в действительности большее, чем это следует из теории Эйнштейна.

В гл. 3 рассматриваются биметрический формализм Розена — Колера и тетрадные теории Меллера, Пеллегрини и Плебаньского. Отличие их от теории Эйнштейна заключается, с одной стороны, во введении дополнительной, плоской метрики для полного описания геометрии метрического пространства, а с другой стороны, — в использовании римановой геометрии с абсолютным параллелизмом, заданным с помощью поля тетрад. В теориях Розена — Колера и Меллера справедлив слабый принцип эквивалентности; обе они приводят к правильным значениям для отклонения света, красного смещения и смещения перигелия. В теории Пеллегрини и Плебаньского слабый принцип эквивалентности удовлетворяется лишь потому, что исчезает несимметричная часть тензора энергии — импульса фермиевских полей. В этом случае функция Лагранжа для фермиевских полей является истинным скаляром относительно лоренцевых преобразований тетрад, т. е. зависит только от метрики g_{ik}. Во всех названных теориях существует возможность определить не зависящие от времени величины, которые отождествляются затем с энергией и импульсом.

В части Б книги изложена разработанная Тредером в 1967 г. теория систем отсчета, являющаяся логическим завершением анализа физического содержания принципов эквивалентности и относительности. Показано, что теория систем отсчета основана на идеях Эйнштейна о значении и содержании общей теории относительности, высказанных им в дискуссии с Абрагамом. Подчеркнута также основная особенность теории систем отсчета — потенциалоподобная связь гравитационного и материального полей.

В гл. 4 изложена конструктивная интерпретация общего принципа относительности как обобщенная лоренц-ковариантность физических систем на языке тетрад — математической формулировки систем отсчета. Затем показана корреляция такой интерпретации с эйнштейновским принципом общей ковариантности относительно координатных преобразований. Приведено лоренц-общековариантное исчисление (т. е. исчисление, не зависящее от конкретной системы отсчета), и на таком языке сформулирована с помощью принципа эквивалентности гравидинамика материальных полей. В теории Тредера действие гравитационного поля сводится к такому нарушению обобщенной лоренцевой ковариантности, при котором уравнения поля выделяют особый класс инерциальных систем, не реализующихся в пространстве Минковского, но существующих в римановой геометрии и определяющих ее метрику g_{ik}.

В гл. 5 дан анализ следствий теории Тредера. В случае слабых полей результаты теории Тредера и ОТО Эйнштейна совпадают. Различия появляются при рассмотрении сверхплотных и сверхмассивных распределений материи. Они обусловлены описанием геометрии пространства на уровне «корня квадратного» из метрики и потенциалоподобной связью гравитации и материи. Эти особенности теории систем отсчета и позволяют решить некоторые трудные физические проблемы и проблему гравитационного коллапса в том числе.

ЧАСТЬ А

СИЛЬНЫЙ И СЛАБЫЙ ПРИНЦИПЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Глава 1

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ГРАВИТАЦИОННОЙ ТЕОРИИ

§ 1. РОЛЬ ПРИНЦИПА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Ньютон сформулировал первую гравитационную теорию, установив закон гравитационного взаимодействия двух тел:

$$\mathbf{K} = -\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{mMG}{r^2}. \tag{1.1}$$

Этот закон является одновременно уравнением гравитационного поля и, с учетом аксиом Ньютона, уравнением движения

$$\Delta\Phi = 4\pi\rho G; \quad \mathbf{K} = -m \operatorname{grad}\Phi; \quad \Phi = -\frac{M}{r} G. \tag{1.2}$$

Таким образом, уравнение (1.1) дает возможность объяснения и расчета движения небесных тел. Одним из наиболее ярких подтверждений теории Ньютона явилось открытие планеты Нептун, орбита которой была предвычислена по возмущениям орбиты Урана. В ньютоновской небесной механике оставалось лишь одно небольшое расхождение с наблюдениями: в смещении перигелия Меркурия, которое составляет 5724 угловые секунды в столетие, 43 угловые секунды оказывались необъяснимыми.

Однако отказаться от теории Ньютона заставило не это, а другое, гораздо более важное обстоятельство: в уравнение (1.2) не входит время, а это значит, что гравитационное взаимодействие распространяется мгновенно, с бесконечной скоростью. Ньютоновская теория инвариантна, следовательно, только относительно преобразований Галилея, но не инвариантна относительно преобразований Лоренца. В рамках теории Ньютона можно синхронизировать любые часы с помощью гравитационного воздействия на них и тем самым установить абсолютное время. Но это значит, что существует некоторая выделенная инерциальная система, это противоречит кинематике специальной теории относительности (СТО). Однако экспериментально обнаруженные отклонение света и дополнительное смещение перигелия указывают на справедливость принципа относительности, т. е. теория гравитации тоже должна быть лоренц-инвариантной.

Ключом к созданию релятивистской теории тяготения является принцип эквивалентности. Сначала изложим его, не прибегая к излишней точности, а сводку основных представлений и формулировок этого принципа дадим в конце параграфа.

Масса тела в уравнении Ньютона

$$m_T \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{k} = -m_S \operatorname{grad} \Phi \tag{1.3}$$

играет двойную роль. С одной стороны, она является мерой инертного сопротивления движению (m_T), а с другой, — гравитационным зарядом (m_S), мерой связи гравитационного поля $\Phi(m_S)$ с состоянием движения. Генерация же самого гравитационного поля материальным телом — это уже третья функция массы, которая, однако, здесь несущественна, так как приобретает физический смысл лишь в уравнениях поля, а не в уравнениях движения (ср. с гл. 5). Однако тот факт, что все тела падают с одной и той же скоростью, если на них не действует никакая сила, кроме силы тяжести, означает существование строгой пропорциональности между тяжелой и инертной массами, независимо от их физического состояния. Этот факт возводится в ранг фундаментального принципа и кладется в основу всех релятивистских теорий гравитации.

Независимость гравитационного заряда от физического состояния тела уже в наше время была доказана Р. Дикке и др. с погрешностью 10^{-10} [29]. Таким образом, принцип эквивалентности можно считать доказанным по крайней мере в макромире. Р. Дикке и сотрудники пошли дальше, попытавшись выяснить связь принципа эквивалентности с отдельными видами фундаментальных взаимодействий. Оказалось, что сильное и умеренно сильное взаимодействия не нарушают принцип эквивалентности. Точность электромагнитных измерений лежит прямо на границе допустимых точностей, а слабое и гравитационное взаимодействия, вполне возможно, его и нарушают. Будем рассматривать смещение частоты света в гравитационном поле как подтверждение принципа эквивалентности для фотонов, т. е. для электромагнитного взаимодействия. Равная инертной, тяжелая масса фотона равна $m = h\nu c^{-2}$. Тогда из теоремы о сохранении энергии в классической механике следует

$$h\nu + \frac{h\nu}{c^2}\Phi = \text{const}, \tag{1.4}$$

что и дает значение смещения частоты фотона в зависимости от гравитационного потенциала. Это смещение было обнаружено даже в земных условиях Паундом и Ребка с погрешностью 10^{-2}, для чего были использованы узкие линии безотдачного γ-излучения в эффекте Мёссбауэра [28]. Эффект отклонения света появляется при движении фотонов вблизи поверхности Солнца. Этот эффект был обнаружен практически сразу же после его предсказания теорией Эйнштейна, однако погрешность измерений отклонения света невысока и не достигает 10 % (ср. с § 3).

Нужно сказать, однако, что ни смещение частоты, ни отклонение света не являются следствием равенства $m_T = m_S$, так как понятия тяжелой и инертной масс — нерелятивистские. Не следует ожидать, что их можно непосредственно применять и в случае частиц, движущихся со световой скоростью. В общей теории относительности (ОТО) смещение частоты света объясняется в рамках хронометрии пространства — времени, а отклонение света (теория Ньютона дает для него неверные значения) вычисляется без использования термина «тяжелая масса». В статическом гравитационном поле кинетическая энергия постоянна, а потенциальная энергия в гравитационном поле в релятивистских теориях отсутствует:

$$g_{0k}\frac{dx^k}{d\lambda} = \text{const}, \quad p_0 = \text{const}.$$

К тому же полученное значение отклонения света зависит от используемых уравнений поля, поскольку уравнения поля описывают именно релятивистскую часть взаимодействия света с гравитацией. Тем самым отклонение света является дополнительным требованием на уравнения поля, а не подтверждением принципа эквивалентности.

Равенство тяжелой и инертной масс приводит к тому, что, наблюдая за движением материальной точки в заданной координатной системе, невозможно указать причину ускорения точки, т. е. невозможно различить гравитационное и инертное ускорения. Но эта неразличимость только локальная, хотя и ее уже достаточно для локального описания гравитационных сил средствами, пригодными для описания инерционных сил в ускоренных системах отсчета, а именно с помощью метрики, отличной от метрики пространства Минковского. Линейный элемент пространства Минковского

$$ds^2 = \eta_{ik}\, dx^i\, dx^k = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad (1.5)$$

характеризует, следовательно, пространство без гравитации, а координаты $(xyzt)$ образуют инерциальную систему. Для гравитационного поля линейный элемент имеет более общий вид:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k. \qquad (1.6)$$

Тензор g_{ik} характеризует потенциал гравитационного поля, а производные от него — поле сил. В каждой точке пространства можно так подобрать координатную систему, чтобы выполнялось условие

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \frac{1}{2}\, g_{ik,\,rs}\left(x^r - x^r_P\right)\left(x^s - x^s_P\right) + O_3. \qquad (1.7)$$

Это и есть формулировка принципа эквивалентности. Уравнение (1.7)описывает поле в некоторой локальной инерциальной системе отсчета в отсутствие всяких сил. Точку P можно интерпретировать как центр тяжести свободно падающего ящика в некоторый момент времени. Если же ввести глобальную координатную систему (1.5), то все пространство будет свободно от гравитационных сил; и все силы, возникающие при этом в других координатных системах, будут силами инерции. Это значит, что в глобальном смысле различие между тяжелой и инертной массами существует*.

Эти рассуждения показывают, что принцип эквивалентности тяжелой и инертной масс в случае риманова пространства нужно переформулировать. Это возможно главным образом потому, что в каждой точке риманова пространства можно ввести локально координаты Минковского, а следовательно, и локальную инерциальную систему.

---

* Если для описания гравитационного поля кроме g_{ik} используются и другие величины, то можно установить их различие и в локальном смысле.

Но любая точка в системе без сил движется по прямой, инвариантное свойство которой — автопараллельность или экстремальность. Это свойство должно сохраниться и для точки, движущейся без сил в произвольной координатной системе. Заметим, что экстремальность — простейшее свойство, поскольку оно относится только к метрике:

$$\int ds = \int \sqrt{g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \cdot \frac{dx^k}{d\lambda}}\, d\lambda \text{ extremal} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d}{ds}\left(g_{ik} \frac{dx^k}{ds}\right) - \frac{1}{2} g_{kl,\, i} \frac{dx^k}{ds} \cdot \frac{dx^l}{ds} = 0; \; u_{i;\, k} u^k = 0.$$

В то же время автопараллельность требует определения переноса от точки к точке. Если такой перенос не будет метрическим, то требования автопараллельности и экстремальности приведут к различным кривым. Релятивистский подход к принципу эквивалентности приводит к так называемому постулату геодезических: свободные от действия сил точечные массы движутся в римановом пространстве с определенной метрикой по геодезическим линиям, а параллельный перенос в пространстве должен быть сформулирован особо. Это требование подсказывается тем обстоятельством, что тензор энергии — импульса удовлетворяет условию

$$T^{ik}_{\ \ ;\, k} = T^{ik}_{\ \ ,\, k} + \Gamma^{i}_{lk} T^{lk} + \Gamma^{k}_{lk} T^{il} = 0. \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) тоже является формулировкой принципа эквивалентности. Но ни одна из этих двух формулировок принципа эквивалентности не дает никаких динамических условий на g_{ik}. Уравнение (1.8) означает, что теорема о сохранении энергии — импульса в СТО будет локально справедлива и в ОТО. Но в СТО эта теорема следует из уравнений поля. Поэтому нужно принять, что локально все релятивистские волновые уравнения справедливы и в ОТО. Запись этих уравнений в системе координат (1.7) приводит к их общей ковариантности (см. гл. 4).

Ковариантная запись волновых уравнений — это все, чего можно достигнуть на основании предыдущих рассуждений по обобщению принципа эквивалентности. Сформулированный таким образом принцип эквивалентности можно было бы назвать слабым принципом эквивалентности (см. дополнение).

Эйнштейновская теория гравитации сформулирована на основе сильного принципа эквивалентности, а именно: в свободно падающей лаборатории, т. е. в системе отсчета с метрикой (1.7) в точке наблюдения, исчезают все гравитационные эффекты. Это значит, что гравитационное поле входит только в метрику, а кривизна пространства не учитывается локально в канонических уравнениях негравитационных полей. Однако такое сильное утверждение экспериментально не доказано. Более того, при описании спинорных полей фундаментальным понятием оказывается не метрика, а система отсчета.

Если гравитационное поле описывать только с помощью метрики и если потребовать общей ковариантности полевого уравнения второго порядка (чтобы в пределе приходить к теории Ньютона), то общее уравнение гравитационного поля можно записать в виде

$$A\left(R^{ik}-\frac{1}{2}Rg^{ik}\right)+Bg^{ik}R+Cg^{ik}=DT^{ik}+Eg^{ik}T.$$

Учитывая требование $(BR+ET)=\text{const}$, приходим к уравнению Эйнштейна с λ-членом:

$$R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R+\lambda g^{ik}=-\varkappa T^{ik}. \qquad (1.9)$$

Из общего уравнения можно получить также и теорию Нордстрема (см. § 4):

$$R=\frac{k}{6}T;\quad g_{ik}=\Phi^2\eta_{ik}.$$

Уравнения Эйнштейна с λ-членом можно вывести из вариационного принципа, но только в случае $\lambda=0$ можно получить для замкнутой системы $g_{ik}\to\eta_{ik}$ на бесконечности. Уравнения (1.9) с $\lambda=0$ называют собственно уравнениями Эйнштейна*.

Эйнштейновская теория гравитации с удивительной точностью объяснила смещение перигелия Меркурия и предсказала отклонение света в гравитационном поле:

---

* Космологическая константа λ вовсе не означает какую-либо массу покоя частицы — кванта гравитационного поля, как это имеет место, например, в уравнении Клейна — Гордона. Это видно уже из того, что в отсутствие гравитации имеем не $g_{ik}=0$, а $g_{ik}=\eta_{ik}$.

	Эксперимент	Теория	
Смещение перигелия Меркурия	42,9	43,03	угловые секунды в столетие
Отклонение света	$1'',45 \div 2'',20$	$1'',75$	(вблизи солнечного диска)

Эти чрезвычайно малые несовпадения теоретических и экспериментальных данных устанавливают предельно высокий барьер для всех других теорий тяготения, которые претендуют на уточнение эйнштейновской теории (см. также § 3).

Существенным преимуществом теории Эйнштейна является то, что уравнения (1.8) следуют из уравнений гравитационного поля автоматически; для этого достаточно вычислить тождество Бьянки. Из ковариантности теории следует существование только одного дифференциального выражения второго порядка, линейного относительно вторых производных от g_{ik} и являющегося локальным обобщением волнового оператора. Это выражение — тензор Эйнштейна $E^{ik} = R^{ik} - (1/2)g^{ik}R$. Ковариантное уравнение поля второго порядка, имеющее характер волнового уравнения, должно иметь вид $E^{ik} = -\varkappa T^{ik}$. По аналогии с теорией Ньютона следует ожидать, что T^{ik} — обобщение гравитационной массы, т. е. T^{ik} должен быть тензором энергии — импульса материи. Но так как из тождества Бьянки следует $E^{ik}_{;k} = 0$, то из $E^{ik} = -\varkappa T^{ik}$ следует $T^{ik}_{;k} = 0$, если $\varkappa = \text{const}$.

Ковариантность уравнений Эйнштейна допускает произвольные преобразования $g_{ik}(x^l)$, образующие обобщенную калибровочную группу координатных преобразований. Принцип ковариантности и динамическое уравнение в теории Эйнштейна связаны так же, как в макроскопической теории электромагнитизма Максвелла связаны закон сохранения электрического заряда и калибровочная инвариантность 4-потенциала, с той только разницей, что из динамического уравнения Эйнштейна следуют и уравнения движения источников гравитационного поля, а из закона сохранения заряда в электродинамике уравнение для 4-тока не вытекает. В теории Эйнштейна уравнения поля уже содержат полную информацию о движении пробных частиц и сингулярностей, а следовательно, и о произвольном распределении материи, если задана ее внутренняя структура.

Так как динамическое уравнение есть просто одна из формулировок слабого принципа эквивалентности, то оно должно содержаться во всех вариантах гравитационных теорий, даже в тех случаях, если оно и не вытекает из уравнений поля. Здесь нужно позаботиться лишь о том, чтобы общая ковариантность теории, т. е. калибровочная инвариантность гравитационного потенциала, не накладывала на T^{ik} дополнительных условий.

А теперь сопоставим различные степени обобщения и различные формулировки принципа эквивалентности. Для этого рассмотрим мысленный эксперимент с бесконечно малым невращающимся свободно падающим лифтом. Результаты этого мысленного эксперимента будем постепенно обобщать, и на каждом этапе обобщения будем оценивать меру их физической общности. Из равенства тяжелой и инертной масс следует, что гравитационное ускорение пробной частицы относительно лифта в его центре тяжести равно нулю. Это утверждение проверено экспериментально Этвешем и Дикке, и его можно считать справедливым и в более общей ситуации, т. е. для всех материальных полей.

Если траектория материальной точки в системе отсчета лифта — прямая, т. е. геодезическая, то она должна оставаться геодезической в любой координатной системе. Это значит, что принцип (или постулат) геодезических есть не более чем ковариантная формулировка условия $m_T = m_S$. Это условие можно немедленно обобщить на частицы с нулевой массой покоя, хотя само понятие массы принадлежит ньютоновской механике и его нельзя непосредственно перенести на частицы, движущиеся со световой скоростью.

Описание гравитационного поля в терминах неевклидовой геометрии указывает лишь на глобальное отличие сил инерции от гравитационных; локально они эквивалентны, т. е. каждой геодезической можно подобрать такую координатную систему, в которой метрика будет иметь вид $g_{ik} = \eta_{ik} + O_2$. Примером такой координатной системы является система касательных единичных векторов вдоль геодезической падающего лифта.

Используя принцип геодезических, следует всегда помнить, что пробными могут быть только бесструктурные частицы. Например, частицы со спином движутся уже не по геодезическим, так как они реагируют на тензор кривизны [25].

Принцип геодезических можно развить и для непрерывно распределенной материи. Для пыли, т. е. для невзаимодействующих точечных масс, тензор материи имеет простой вид:

$$T^{ik} = \mu_0 u^i u^k.$$

Из закона сохранения массы $(\mu_0 u^i)_{;\,i} = 0$ получаем сразу

$$u^i_{;\,k} u^k = 0 \rightarrow T^{ik}_{;\,k} = 0.$$

В пространстве Минковского исчезает обычная дивергенция $T^{ik}_{,\,k}$, а ковариантная запись этого утверждения суть $T^{ik}_{;\,k} = 0$. Таким образом, динамическое уравнение справедливо и для непрерывной материи.

Но от ковариантной записи сохранения тензора энергии — импульса непрерывной материи нельзя непосредственно перейти к уравнениям поля. Анализ проблемы Райнича (из структуры тензора энергии — импульса вывести структуру уравнений поля) указывает на следующий возможный путь дальнейшего обобщения динамического уравнения. Независимо от внешнего гравитационного поля, уравнения всех волновых полей в системе отсчета бесконечно малого свободно падающего лифта всегда имеют канонический вид (т. е. в уравнения входят только первые производные). Тогда уравнения поля в общем случае неевклидова пространства легко получить, заменяя обычные производные их ковариантными обобщениями. Грубо говоря, СТО справедлива для всех волновых полей только локально.

Такое обобщение принципа эквивалентности не содержит пока никакой принципиально новой физической информации. Однако в теории Эйнштейна принцип эквивалентности обобщается еще раз: в свободно падающей системе отсчета не зависят от внешнего гравитационного поля и гравитационные эффекты. Другими словами, кроме метрики Минковского, в этой системе нет других величин, обязанных гравитационным полям. Гравитация описывается только с помощью 10 независимых компонент метрического тензора.

Система отсчета (см. § 12) h_i^A, применение которой станет ясным при выводе уравнения спинорных полей, одновременно с $g_{ik} = \eta_{ik} + O_2$ должна тоже принять вид $h_i^A = \delta_i^A + O_2$.

Принцип эквивалентности, лежащий в основе ОТО, называется сильным. Он нарушается в том случае, если для описания гравитационного поля, помимо метрики, используются другие величины (скалярное поле в скалярно-тензорных теориях и поле тетрад в тетрадных теориях); тогда число независимых переменных в соответствующих теориях возрастает.

Подведем итог нашим рассуждениям и рассмотрим последовательность все более жестких формулировок принципа эквивалентности.

I. Инертная масса равна пассивной тяжелой массе. Нерелятивистское приближение.

II. Точечная частица, находящаяся во внешнем гравитационном поле, движется по геодезической. Метрика пространства полностью определяется внешним гравитационным полем.

III. Тензор материи подчиняется динамическому уравнению. Это с необходимостью следует из формулировки II для пыли, а в предельном случае СТО является просто законом сохранения энергии — импульса. (Феноменологический предельный случай для формулировки IV.)

IV. СТО локально справедлива для всех волновых полей, кроме гравитационного (слабый принцип эквивалентности). Уравнения полей в присутствии гравитации получаются из канонической их формы в СТО заменой обычных производных ковариантными.

V. Метрика адекватно описывает гравитационное поле (сильный принцип эквивалентности). В системе отсчета свободно падающего лифта исчезают все гравитационные эффекты.

§ 2. ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА И ОБЩИЙ ПРИНЦИП КОВАРИАНТНОСТИ

Теперь нам предстоит выяснить, как реализуется лоренц-инвариантность в римановой геометрии, необходимость которой вытекает из принципа эквивалентности. В пространстве Минковского (СТО) три группы преобразований — группа координатных преобразований, группа преобразований систем отсчета и группа движений — совпадают. В римановой геометрии их нужно различать.

Если в пространстве Минковского координатные преобразования всегда ограничены условием инвариантности метрики (1.5), то в римановой геометрии этого условия нет. Это ограничение на координатные преобразования в СТО приводит к редукции общей группы преобразований к группе Лоренца. Расширение группы допустимых координатных преобразований при переходе от пространства Минковского к пространству Римана возможно чисто формальным образом, даже несмотря на то, что глобальная метрика (1.5) может существовать только в пространстве без гравитации. Более того, при подходящих координатных условиях даже в римановой геометрии можно ограничиваться преобразованиями Лоренца; например, это возможно в гармонических координатах. Следовательно, обобщение координат — не решающий момент при переходе от СТО к ОТО.

Принципиальное различие геометрий Минковского и Римана заключается в подходе к понятию системы отсчета. Система отсчета — это поле 4-реперов, обеспечивающих связь тензорных величин и наблюдаемых скалярных величин. В каждой точке пространства задается система четырех ортонормированных векторов, образующая базис касательного векторного пространства. Измеримые скалярные величины тогда являются проекциями соответствующих тензоров на этот репер (см. гл. 4).

Физический смысл времениподобного вектора репера — изображение часов в определенном состоянии движения. Компонента некоторого интервала, соответствующая направлению времениподобного вектора, дает значение разности хода времени, измеряемой этими часами. Пусть дан контрвариантный базис h^i_A $(A = 0,1,2,3)$, тогда ковариантный базис h^B_k можно получить из условия

$$h^A_k\, h^k_B = \delta^A_B \rightarrow h^A_i\, h^k_A = \delta^k_i. \qquad (1.10)$$

Произвольный вектор в базисе h^i_A имеет компоненты

$$p^k = p^A\, h^k_A$$

или

$$p^A = p^k\, h^A_k.$$

Если базис ортонормирован, то

$$g_{ik}\, h^i_A\, h^k_B = \eta_{AB}; \quad h^i_A = \eta_{AB}\, g^{ik}\, h^B_k, \qquad (1.11)$$

где h_{AB} — тензор Минковского, и локальная аффинная инвариантность базиса (1.10) сводится к локальной лоренцевой инвариантности. Однако репер этим еще не установлен, так как уравнения (1.11) инвариантны относительно локальных, т. е. зависящих от места, преобразований Лоренца

$$\overline{h}_i^A = \omega_B^A(x)\, h_i^B; \quad \eta_{AB}\, \omega_C^A\, \omega_D^B = \eta_{CD}. \tag{1.12}$$

Те свойства пространства, которые определяются лишь метрикой g_{ik}, при таком преобразовании остаются неизменными. Однако введение преобразований (1.12) придает риманову пространству принципиально новое свойство — дальний, или абсолютный, параллелизм.

С помощью одних лишь метрических объектов вообще нельзя произвести сравнение тензоров на конечном расстоянии. Геодезический параллельный перенос, с помощью которого можно производить сравнение геометрических объектов в пространстве Минковского, в римановом пространстве будет зависеть от способа переноса и потому не может уже служить эффективным инструментом сравнения объектов. Задание же поля тетрад позволяет осуществить сравнение на расстоянии путем сравнения скалярных проекций тензоров на оси соответствующих тетрад:

$$v^k(P_1)\, h_k^A(P_1) = v^k(P_2)\, h_k^A(P_2). \tag{1.13}$$

Это условие равенства векторов зависит от локальных преобразований Лоренца, но инвариантно относительно глобальных, т. е. не зависящих от места, лоренцевых преобразований. Таким образом, глобальные лоренцевы преобразования переводят тетрады в им эквивалентные, а локальные — изменяют форму сравнения объектов на конечном расстоянии.

В пространстве Минковского поле тетрад определяется геодезическим переносом, а потому в нем допустимы лишь глобальные лоренцевы преобразования систем отсчета. В римановом пространстве с не равной нулю кривизной не существует геометрически выделенного конечного переноса, поэтому в нем допустимы локальные преобразования. Так как в принципе можно ввести другие тетрады и в пространстве Минковского, то оно отличается от риманова пространства именно наличием выделенного поля тетрад, а не группой их инвариантности.

По отношению к группе движений риманово пространство существенно отличается от пространства Минковского: риманово пространство существенно более жестко. Движение есть бесконечно малое координатное преобразование типа

$$\bar{x}^k = x^k + \varepsilon\, \xi^k(x). \qquad (1.14)$$

Это преобразование используется для определения некоторой точечной подстановки: каждой точке P сопоставляется точка P', которая в старой системе координат имела координаты

$$\bar{x}^k = x^k + \varepsilon\, \xi^k,$$

являющиеся в новой системе координат координатами точки P. Метрика в точке P в новой координатной системе

$$\bar{g}_{ik}(P) = g_{ik}(P) - \varepsilon\, g_{lk}\, \xi^l_{,\,i} - \varepsilon\, g_{il}\, \xi^l_{,\,k} + O_2$$

сравнивается с метрикой в точке P' в старой координатной системе:

$$g_{ik}(P') = g_{ik}(P) + \varepsilon\, \xi^l g_{ik,\,l} + O_2.$$

Координатное преобразование (1.14) означает движение только тогда, когда эти метрики равны, т. е. когда бесконечно малое координатное преобразование метрики эквивалентно некоторому смещению двух точек. Движение — это изометрическое отображение пространства самого на себя. Условие того, что бесконечно малое координатное преобразование является движением, можно записать в другой форме

$$\xi_{i;\,k} + \xi_{k;\,i} = 0. \qquad (1.15)$$

Движение образует некоторую группу Ли, а число независимых решений уравнения (1.15), т. е. число векторов Киллинга, определяет число независимых параметров группы. В пространстве Минковского существует десять линейно независимых векторов Киллинга, а группа движений изоморфна неоднородной группе Лоренца.

Векторы Киллинга позволяют непосредственно перейти от динамических уравнений к интегральным законам сохранения. С учетом (1.15) из соотношений

$$T^{ik}_{;\,k} = 0 \quad \text{и} \quad T^{ik} = T^{ki}$$

следуют формулы

$$(T^{ik}\xi_k)_{;\,i} = 0 \quad \text{или} \quad (\sqrt{g}\, T^{ik}\xi_k)_{,\,i} = 0, \qquad (1.16)$$

так что

$$\int\limits_{x^0=\mathrm{const}} \sqrt{-g}\, T^{0k}\xi_k\, dx^1\, dx^2\, dx^3$$

не зависит от гиперповерхности $x^0 = \text{const}$, по которой производится интегрирование.

Каждому вектору Киллинга соответствует интегральный закон сохранения. В пространстве максимальной подвижности (пространство Минковского или пространство постоянной кривизны) существует десять независимых векторов Киллинга, а следовательно, и десять интегральных законов сохранения, эквивалентных законам сохранения механики. В общем случае произвольного риманова пространства векторов Киллинга нет, а потому и нет законов сохранения. В стационарном римановом пространстве существует времениподобный вектор Киллинга; с учетом (1.16) он дает теорему сохранения энергии. Отсутствие закона сохранения движения центра тяжести может привести к тому, что активная и пассивная тяжелая массы частицы будут различаться

Детальное исследование пространств различной подвижности можно найти у А. З. Петрова [27].

Расщепление релятивистской группы Лоренца в римановом пространстве ведет к трем различным толкованиям физических основ общей теории относительности. В. А. Фок обратил внимание на то, что все варианты интерпретации общей теории относительности опираются на высказывания самого Эйнштейна, что первоначальные интуитивные рассуждения Эйнштейна об «общей относительности» в процессе дальнейшей работы претерпели существенные изменения. Вслед за Фоком заметим, что к понятию «принципа относительности» имеются три совершенно различных подхода.

I. Утверждения относительно симметрии пространства — времени. Максимально симметричным пространством — временем является мир Минковского (или, в более общем случае, пространство постоянной кривизны де Ситтера). Наличие гравитационного поля нарушает симметрию пространства Минковского, описываемого 10-параметрической группой. В пространстве — времени с гравитацией осуществляется группа движений с числом параметров, всегда меньшим 10. Произвольное риманово пространство, т. е. пространство с произвольным гравитационным полем, вообще не обладает никакой симметрией, а потому и не имеет групп движений. Если интерпретировать принцип относительности в терминах симметрии пространства — времени, то в общем случае произвольного гравитационного поля нет никакого обобщенного принципа относительности. Теория гравитации ведет, таким образом, к ограничению специального принципа относительности.

II. Общий принцип относительности интерпретируется как принцип эквивалентности всех систем отсчета, совместимых с метрикой

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k.$$

В этом смысле общий принцип относительности является принципом локальной лоренц-ковариантности — ковариантности относительно зависящих от координат лоренцевых преобразований систем отсчета; причем сами системы отсчета представляются тетрадным полем $h_i^A(x)$.

В этом смысле имеется единственный физически содержательный и нетривиальный общий принцип относительности. Мы увидим позже, что в тетрадных теориях гравитации эквивалентность систем отсчета нарушается гравитационным полем, в результате из общего числа систем выделяется специальный класс инерциальных систем отсчета. При такой интерпретации общей теории относительности все еще остается в силе старое возражение Кречмана и Фока, что этот принцип справедлив и в специальной теории относительности, причем все связанные с метрикой Минковского тетрадные поля дают класс общерелятивистских систем отсчета. В гл. 4 мы увидим, что именно эта формулировка общего принципа относительности наиболее конструктивна; вместе с принципом эквивалентности она позволяет однозначно определять всю гравитационную динамику вещества и материальных полей.

III. Наконец, общий принцип относительности понимают как ковариантность уравнений для физических систем при произвольных преобразованиях координат

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i\,(x^k),$$

составляющих группу Эйнштейна, т. е. независимость физического содержания уравнений от того или иного частного выбора координатной системы. Это требование логически очевидно и необходимо, так как зависимость физических процессов от способа их описания была бы нелепостью. Но в такой формулировке общий принцип ковариантности становится физически бессодержательным, так как он должен автоматически выполняться в любой разумной теории (а следовательно, и в теории гравитационных явлений). На самом деле Эйнштейн истолковывал принцип относительности в духе II, а координатную систему он толковал как «отсчетный моллюск».

В гл. 4 мы увидим, что эта интерпретация принципа ковариантности в действительности полностью оправдана, ибо тогда II и III определения общего принципа относительности оказываются друг относительно друга «дуально сформулированными». Таким образом, это дает возможность конструктивно применять общий принцип относительности как принцип эквивалентности всех систем отсчета, совместимых с некоторой заданной метрической структурой пространства — времени при построении релятивистской теории гравитации.

Однако более общая идея, которая с необходимостью связывает общую относительность систем отсчета с гравитацией, не может быть реализована таким путем. Исторически она возникла в 1909—1913 гг. и была высказана Эйнштейном главным образом в его дискуссии с Максом Абрагамом относительно относительности и гравитации [1—5, 8—17].

Дискуссия между Эйнштейном и Абрагамом охватывает вкратце все предложенные определения принципа относительности (а также различные интерпретации принципа эквивалентности). В особенности Абрагам во многих отношениях предвосхитил точку зрения Фока.

В гл. 4 при изложении теории систем отсчета как теории гравитации мы еще раз вернемся к высказываниям Эйнштейна относительно сущности гравитационного поля. Но так как основное внимание в настоящей книге уделено не общему принципу относительности, а принципу эквивалентности, то круг проблем, касающихся систем отсчета и гравитационного поля, вообще не будет систематически излагаться. В частности, не будет обсуждаться вопрос о возможности интерпретации эйнштейновского варианта принципа относительности 1915 г., как реализации той программы, которая была выдвинута Эйнштейном в его дискуссии с Абрагамом. Этот круг проблем включает применение неголономных координат в общей теории относительности и задачу алгебраического воспроизведения гравитационного поля при помощи неголономных преобразований [33].

В дискуссии с Абрагамом Эйнштейн развил идею, что сущность гравитации следует истолковывать как необходимый переход от инерциальных систем отсчета к неинерциальным, причем неинерциальные системы отсчета вообще таковы, что их нельзя более вложить в плоскую метрику. Эйнштейн определил гравитационную теорию непосредственно как теорию таких неинтегрируемых и нелоренцевых преобразований систем отсчета, которые переводят инерциальную систему отсчета, принадлежащую плоскому пространству—времени, в неинерциальную систему отсчета, принадлежащую неплоской римановой геометрии. Эйнштейн хотел в таком смысле пояснить связь общей относительности систем отсчета с гравитационным полем.

§ 3. НЬЮТОНОВО ПРИБЛИЖЕНИЕ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ОБЩЕЙ МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Принцип эквивалентности — это представление гравитационного поля метрикой риманова пространства и существование динамического уравнения для тензора материи. Последнее, как мы видели, следует из теории волновых полей в СТО, а именно дифференциальные законы сохранения СТО переходят в динамическое уравнение ОТО. Отсюда и вытекает метрический характер теории гравитационного поля. Теория, по крайней мере, оказывается инвариантной относительно глобальных лоренцевых преобразований систем отсчета, однако интегральных законов сохранения в теории уже нет. Из принципа эквивалентности вытекает лишь метрическая форма теории, но не конкретный вид уравнений поля. Особенностью теории Эйнштейна является то, что принцип эквивалентности содержится уже в самих уравнениях гравитационного поля, и нет необходимости вводить его дополнительно. Конечно, уравнения Эйнштейна определяют систему отсчета только с точностью до локальных преобразований Лоренца.

Все гравитационные эксперименты и расчеты конкретных гравитационных эффектов относятся к слабому гравитационному полю (за исключением, правда, космологии). Поэтому совершенно очевидно, что в любом варианте теории гравитации эти хорошо установленные результаты должны быть приняты в качестве экспериментальной основы. Все варианты теорий должны правильно описывать кинематику нашей планетной системы, т. е. должны приводить к единственной картине движения системы малых масс в сферически-симметричном поле большой массы. Это значит, что в слабом гравитационном поле, когда

$$\left|\frac{\text{потенциал}}{c^2}\right| \ll 1,$$

уравнения движения в любой теории гравитации в предельном случае $v^2 \ll c^2$ должны переходить в уравнение теории Ньютона, а потенциал поля с точностью до членов высшего порядка должен подчиняться уравнению Лапласа.

Принцип эквивалентности дает возможность прийти к уравнениям движения точечной массы

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop kl} \right\} \frac{dx^k}{ds} \cdot \frac{dx^l}{ds} = 0; \\ \frac{d}{ds} g_{ik} \frac{dx^k}{ds} - [k, il] \frac{dx^k}{ds} \cdot \frac{dx^l}{ds} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1.17)$$

В случае слабого поля (медленное движение) имеем дополнительные условия

$$g_{ik} = \eta_{ik} + O\left(\frac{\Phi}{c^2}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 \gg \left(\frac{dx^i}{ds}\right)^2_{i=1, 2, 3},$$

учет которых в (1.17) дает уравнения для ньютоновского, нерелятивистского приближения

$$-\frac{d^2 x^k}{ds^2} - \frac{1}{2} g_{00,\,k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \qquad (1.18)$$

причем (1.18) должны следовать из любого варианта теории гравитации.

Сравнивая (1.18) с уравнением движения ньютоновской теории, получим

$$g_{00} = 1 + 2\frac{\Phi}{c^2} + O\left(\frac{\Phi^2}{c^4}\right). \qquad (1.19)$$

Этот принцип соответствия нерелятивистского приближения любой релятивистской гравитационной теории и нерелятивистской теории Ньютона указывает на физический смысл g_{00} в случае слабого поля как на эквивалент ньютоновского гравитационного потенциала. С помощью (1.19) можно проверить формулу (1.3) для смещения частоты фотона. Собственное время покоящегося наблюдателя (излучателя) в гравитационном поле равно

$$d\tau^2 = g_{00}\, dt^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2,$$

откуда для частоты излучаемого сигнала получаем соотношение

$$\nu_0^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) = \nu^2$$

и затем находим связь между излученной и наблюдаемой частотами

$$\nu_s \left(1 + \frac{\Phi_s}{c}\right) = \nu_E \left(1 + \frac{\Phi_E}{c}\right).$$

В приближении слабого поля это последнее соотношение совпадает с нерелятивистским (1.4).

Если эффект смещения частоты дает возможность убедиться в справедливости только принципа эквивалентности, то эффекты отклонения света и смещения перигелия Меркурия накладывают условия на сами уравнения гравитационного поля. В теории Ньютона эффект отклонения света вычислить невозможно, поскольку для фотонов в принципе не существует нерелятивистское приближение. Поэтому необходимо с самого начала рассматривать метрику статического сферически-симметричного гравитационного поля, общий вид которой можно установить, пользуясь только граничными условиями [24]:

$$ds^2 = -\left(1 + \alpha \frac{m}{r} + O\left(\frac{m^2}{r^2}\right)\right) dr^2 - \left(1 + \beta \frac{m}{r} + \right.$$

$$\left. + O\left(\frac{m^2}{r^2}\right)\right) r^2 d\sigma^2 + \left(1 + \gamma \frac{m}{r} + \delta \frac{m^2}{r^2} + O\left(\frac{m^3}{r^3}\right)\right) dt^2, \quad (1.20)$$

где m — масса центрального тела в геометрических единицах, $m = GM/c^2$. Чтобы из (1.20) получить затем кеплеровские орбиты, следует положить $\gamma = -2$. Из трех коэффициентов α, β, δ один выбирается произвольно, а α и $(2\delta + \beta\gamma)$ инвариантны относительно координатных преобразований, причем $(2\delta + \beta\gamma)$ определяется из уравнений поля в вакууме, а α зависит от внутренней структуры центрального тела. В теории гравитации Эйнштейна коэффициенты определяются с учетом теоремы Биркхофа, так что при $\beta = 0$ (при определенном выборе системы координат) получаем $\alpha = 2$, $\delta = 0$.

Для смещения перигелия можно получить формулу

$$\Delta\varphi = m\pi(u_1 + u_2)\left[\frac{2\delta + \beta\gamma}{2\gamma} - \gamma + \frac{\alpha}{2}\right], \tag{1.21}$$

где u_1 и u_2 — полуоси эллипса, а отклонение света вычисляют по формуле

$$\Delta\psi = m\bar{u}(\alpha - \gamma). \tag{1.22}$$

Здесь $1/\bar{u}$ — минимальное расстояние от луча света до источника гравитационного поля. Если к теории Ньютона прибавить принцип эквивалентности, то становится возможным и расчет отклонения света, причем получаемое таким путем значение ($-\gamma m\bar{u}$) составляет лишь половину эйнштейновского отклонения.

Так как α зависит от внутренней структуры источника, точнее от его уравнения состояния, то один эффект, например отклонение света, можно использовать тогда для установления вида уравнений гравитационного поля, а второй — смещение перигелия — для их проверки. В теории Эйнштейна для проверки используются оба эффекта.

Изменение скорости света в гравитационном поле

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \left(1 + \frac{\gamma - \alpha}{2} \cdot \frac{m}{r}\right)c,$$

дающее частичный вклад в отклонение света, можно проверить непосредственной локацией планет [30]. Время прохождения сигнала при локации планет вблизи источника оказывается несколько бóльшим, чем соответствующее время в пространстве Минковского*. Этот эффект можно интерпретировать и по-другому, а именно расстояние в римановой геометрии зависит от способа измерения. Если считать расстояние до планеты как произведение скорости света на половину полного времени от излучения сигнала до его приема, то оказывается, что оно зависит не только от положения планеты (что естественно), но и от относительного положения Солнца. Для проверки теории можно воспользоваться также законом падения плотности излучения

* Наоборот, в теории Ньютона фотон должен был бы ускоряться [37].

Солнца с расстоянием, причем характерная величина падения плотности излучения в Солнечной системе равна

$$r_I = r\left(1 + \frac{\beta}{2}\cdot\frac{m}{r}\right).$$

Еще одну возможность проверки получают из третьего закона Кеплера о зависимости радиуса орбиты от времени обращения.

$$r_K = r\left(1 + \frac{\beta + 2\delta}{6}\cdot\frac{m}{r}\right).$$

Инвариантное расстояние

$$\int ds = \int \sqrt{ds^2 \Big|_{\xi_k dx^k = 0}}$$

как интеграл вдоль геодезической на гиперповерхности, ортогональной вектору Киллинга, тоже может быть использован для проверки теории, однако в этом случае непосредственная экспериментальная проверка невозможна.

Сильный принцип эквивалентности, справедливый в теории Эйнштейна, утверждает, как известно, что внешние гравитационные поля не оказывают никакого влияния на локальные гравитационные процессы, происходящие в свободно падающей системе отсчета. Гравитационное поле в этом случае описывается метрикой, которая в центре падающей системы отсчета вырождается в метрику Минковского, так что первые производные от метрики исчезают, а вместе с ними исчезают и все внешние силы. В других, не эйнштейновских теориях гравитации вводятся дополнительные поля для описания того же гравитационного поля. В результате в свободно падающей системе отсчета внешнее гравитационное поле не исчезает. Например, на взаимное притяжение двух тел в падающей системе будет влиять внешнее гравитационное поле. Можно указать и другие экспериментально наблюдаемые следствия сильного и слабого принципов эквивалентности в свободно падающей системе отсчета, например переменность гравитирующей массы (см. гл. 5), однако экспериментальная техника еще не дает возможности выбирать между сильным и слабым принципами. Ясно, однако, что по крайней мере слабый принцип эквивалентности является несомненным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Abraham M.** Zur Theorie der Gravitation. Phys. Z., **13** (1912), 1—4 (Berichtigung 176).
2. **Abraham M.** Die Erhaltung der Energie und der Materie im Schwerkraftfelde. Z. Phys., **13** (1912), 311—314.
3. **Abraham M.** Relativität und Gravitation. Erwiderung auf eine Bemerkung von Herrn Einstein. Ann. Phys., **38** (1912), 1056—1064.
4. **Abraham M.** Nochmals Relativität und Gravitation. Bemerkungen zu A. Einsteins Erwiderung. Ann. Phys., **39** (1912), 444—448.
5. **Abraham M.** Das Gravitationsfeld. Phys. Z., **13** (1912), 793—797.
6. **Anderson J. L.** Riemannian geometry. In: H.—Y. Chiu and W. F. Hoffmann (ed.). Gravitation and Relativity. N—Y, 1964.
7. **Bergmann P. G.** Introduction to the Theory of Relativity, N—Y, 1942.
8. **Einstein A.** Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogene Folgerungen. Jahrb. Radioaktivität, **3** (1907), 411.
9. **Einstein A.** Philosopher—Scientist. (ed. P. A. Schilpp) Evansten, 1949.
10. **Einstein A.** Über spezielle und allgemeine Relativitätstheorie 21. Aufl., Berlin, Oxford, Braunschweig, 1969.
11. **Einstein A.** Grundzüge der Relativitätstheorie. Berlin, Oxford, Braunschweig, 1969.
12. **Einstein A.** Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. Ann. Phys., **35** (1911), 898—908.
13. **Einstein A.** Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes. Ann. Phys., **83** (1912), 355—369.
14. **Einstein A.** Theorie des statischen Gravitationsfeldes. Ann. Phys., **38** (1912), 443—458.
15. **Einstein A.** Relativität und Gravitation. Erwiderung auf eine Bemerkung von M. Abraham. Ann. Phys., **38** (1912), 1059—1064.
16. **Einstein A.** Bemerkung zu Abrahams vorangehender Auseinandersetzung "Nochmals Relativität und Gravitation". Ann. Phys., **39** (1912), 704.
17. **Einstein A., Grossmann M.** Entwurf einer Verallgemeinerten Relativitätstheorie und eine Theorie der Gravitation. Z. Math. u. Phys., **62** (1913).
18. **Fock V. A.** Theorie von Raum, Zeit und Gravitation. Berlin, 1960.
19. **Fock V. A.** Les deux principes de relativité et de la theorie d'Einstein. „Fluides et Champ Gravitationnel en Relativité Générale". Paris, 1960.
20. **Fokker A. D.** Time and Space, Weight and Inertial. Pergamon. Press, Lond., 1965.
21. **Jánossy L.** Theory of Relativity Based on Physical Relativity. Budapest Akad. kiadó, 1969.
22. **Kretschmann E.** Über den physicalischen Sinn der Relativitätspostulate. Ann. Phys., **53** (1917), 575.
23. **Laue M.** Die Relativitätstheorie. Bd. II, 3 Aufl., Braunschweig, 1953.
24. **Liebscher D.-E.** Periheldrehung, Lichtablenkung und Rotver-

schiebung in einer allgemeinen kugelsymmetrischen Metrik. Mber. DAW, **9** (1967), 573—577, Berlin.
25. **Papapetrou A.** On the motion of spin particles in general relativity. Proc. Roy. Soc., A **209** (1951), 248—258.
26. **Pauli W.** Theory of Relätivity. Lond., Pergamon Press, 1950.
27. **Petrov A. S.** Einsteinsraume. Berlin, 1964. **Петров А. З.** Новые методы в общей теории относительности. М., «Наука», 1966.
28. **Pound R. V. und Rebka G. A.** Apparent Weight of photons. Phys. Rev. Lett., **4** (1960), 337—341.
Snider J. L. Effect of gravity on gamma radiation. Phys. Rev., **140** (1965), 788—803.
29. **Roll P. G., Krotkov R., Dicke R. H.** The equivalence of inertial and passive gravitational mass. Ann. Phys. (USA), **26** (1964), 442—517.
30. **Shapiro I. I.** Testing General Relativity with Radar. Phys. Rev., **141** (1966), 1219—1222.
Shapiro I. I. a. o. Phys. Rev. Lett., **20** (1968), 1265.
31. **Treder H.-J.** (ed.). Entstehung, Entwicklung und Perspektiven der Einsteinschen Gravitationstheorie. Berlin, 1960.
32. **Treder H.-J.** Relativität und Kosmos. Berlin, Braunschweig Oxford, 1960.
33. **Treder H.-J., Liebscher D.—E.** Gravitation Theory as Theory of Non—Lorentzian Transformations of the Systems of Reference, Gen. Relat. Gravit., **1** (1970), 117—125.
34. **Treder H.-J.** On the question of a cosmological rest mass of gravitons, Inst. J. Theor. Phys., **1** (1968), 167—170.
35. **Wheeler J. A.** Einsteins Vision. Berlin, Heidelberg, 1968.
36. **Rainich G. Y.** Proc. U. S. Nat. Acad. Sci., **10** (1924), 124; Trans. Amer. Math. Soc., **27** (1925), 106.
37. **Treder H.-J.** Ann. Physik., **25** (1971), 315.

Глава 2

СКАЛЯРНО-ТЕНЗОРНЫЕ ТЕОРИИ

В этой главе будут рассмотрены так называемые скалярно-тензорные теории. Мы рассмотрим также и теорию гравитации Нордстрема, которую можно назвать скалярно-тензорной лишь условно. Кроме того, в теории Нордстрема, в отличие от стандартных скалярно-тензорных теорий, сильный принцип эквивалентности не нарушается.

Самым характерным для скалярно-тензорных теорий является то обстоятельство, что для полного описания гравитационного поля, наряду с фундаментальным тензором, вводится еще скалярное поле. С введением дополнительного скалярного поля сильный принцип эквивалентности нарушается: в свободно падающем ящике гравитационное поле оказывает влияние на все протекающие в нем процессы и явления. Метрический тензор риманова пространства, образованного распределением материи, всегда можно координатными преобразованиями свести к тензору Минковского, так что первые производные от g_{ik} исчезнут. Уничтожить же первые частные производные от скалярной полевой функции невозможно, поскольку они образуют 4-вектор.

Сильный принцип эквивалентности не нарушается в теории Нордстрема. Если относить эту теорию к классу скалярно-тензорных, то в ней вместо 11 уравнений (10 — для компонент метрического тензора и 1 — для скалярного поля) имеется лишь одно уравнение для скалярного поля и даются дополнительные алгебраические условия, связывающие скалярное поле и метрику таким образом, чтобы сильный принцип эквивалентности не нарушался. Сильный принцип эквивалентности нарушается в теориях Иордана—Дикке и Хойла — Нарликара. Теория Иордана — Дикке является прямым обобщением теории Эйнштейна — Максвелла, если эту последнюю рассматривать в некотором пятимерном пространстве.

Если в теории Иордана — Дикке для полного описания гравитационного поля, кроме метрического тензора, вводится одно дополнительное скалярное поле, то в теории Хойла — Нарликара для описания гравитации вводится уже несколько скалярных полей. Специально переформулировав теорию Иордана — Дикке, можно убедиться, что слабый принцип эквивалентности в ней соблюдается. В то же время в теории Хойла — Нарликара нарушается даже слабый принцип.

Теорию Нордстрема, которую мы здесь рассматриваем как вырожденный случай теории Иордана — Дикке, часто называют теорией в пространстве СТО. Именно так интерпретировал ее и Нордстрем. Но, по справедливому замечанию Абрагама, все специально-релятивистские теории противоречат эксперименту, так как основной постулат СТО о постоянстве скорости света запрещает явление отклонения света.

§ 4. ТЕОРИЯ НОРДСТРЕМА

Теория Нордстрема является самой первой логически завершенной релятивистской теорией гравитации [1].

Сначала мы представим ее в том виде, какой придали этой теории Эйнштейн и Фоккер [2].

Как и в ОТО, в теории Нордстрема принимается, что метрический тензор риманова пространства идентичен гравитационному потенциалу. Как и в ОТО, учет гравитации в теории Нордстрема сводится к требованию общековариантной формулировки уравнений СТО, причем входящий в эти уравнения метрический тензор описывает именно риманову геометрию.

Движение материи в гравитационном поле определяется динамическим уравнением $T^l_{k;l} = 0$, причем T^l_k — тензор энергии — импульса.

Ясно, что описание поля с помощью одного лишь метрического тензора свидетельствует о справедливости в теории Нордстрема сильного принципа эквивалентности, а о справедливости слабого принципа свидетельствует наличие в теории динамического уравнения. Позже мы увидим, что именно в теории Нордстрема впервые выявляется неидентичность различных формулировок принципа эквивалентности.

Перейдем к уравнениям поля в теории Нордстрема. Если в теории Эйнштейна тензор энергии — импульса алгебраически связан с тензором Риччи, то в теории Нордстрема устанавливается алгебраическая связь скалярной кривизны R со скаляром Лауэ $T = T_{kl}g^{kl}$, т. е. они пропорциональны друг другу:

$$R = k \cdot T. \tag{2.1}$$

При этом входящие в тензор энергии — импульса динамические величины (плотность энергии, давление и т. д.) измеряются с помощью определенных масштабов, вложенных в риманово пространство неисчезающей кривизны.

Естественно, что в теории Нордстрема имеется только одно уравнение для 10 компонент метрического тензора. Для их однозначного определения нужны дополнительные условия. Они вводятся на основании требования, чтобы в пространстве — времени существовала такая координатная система, в которой метрика имела бы вид

$$ds^2 = \Phi^2 \eta_{kl}\, dx^k\, dx^l. \tag{2.2}$$

Здесь Φ — пространственно-временной скаляр, а η_{kl} — метрический тензор пространства Минковского, представленный в стандартной форме. Метрика (2.2) как раз и дает

10 алгебраических соотношений в псевдодекартовых координатах:

$$\left(\sqrt{-g}\right)^{-1/2} g_{kl} = \eta_{kl}. \qquad (2.2a)$$

Из этих условий следует, что в теории Нордстрема допустимы только специальные классы римановых пространств. Это конформно-плоские пространства, т. е. такие, для которых тензор конформной кривизны Вейля C^k_{brs} исчезает; метрика, следовательно, может быть определена из условия $C^k_{lmn} = 0$ или из уравнения $R = kT$.

С учетом (2.2), из (2.1) можно получить уравнение для потенциала Φ:

$$\Phi^{-3} \Box \Phi = \frac{1}{6} kT, \qquad (2.3)$$

причем $\Box$— оператор Даламбера в метрике Минковского. Уравнение (2.3) первоначально записывалось в виде

$$\Phi \Box \Phi = \frac{1}{6} k\widetilde{T}, \qquad (2.4)$$

где тильда означает, что все входящие в T величины измеряются с помощью масштабов, вложенных в плоское пространство — время. Покажем это на примере некогерентной (идеальной) жидкости. Тензор энергии — импульса идеальной жидкости равен

$$T^l_k = \rho\, u_k u^l. \qquad (2.5)$$

Если масштабы (измерительные приборы) находятся в римановом пространстве, то для 4-скорости имеем выражение

$$u^k = dx^k/ds, \qquad (2.6)$$

где $ds^2 = g_{kl}\, dx^k\, dx^l$. В плоском пространстве 4-скорость равна

$$\widetilde{u}^k = dx^k/d\tau, \qquad (2.7)$$

где

$$d\tau^2 = \eta_{kl}\, dx^k\, dx^l.$$

Учитывая (2.2), а также равенство $ds = \Phi\, d\tau$, получим

$$g_{kl} u^k u^l = \eta_{kl} \widetilde{u}^k \widetilde{u}^l = 1. \qquad (2.8)$$

Отсюда следует, что

$$T = T^{kl} g_{kl} = \rho \quad \text{и} \quad \widetilde{T} = \widetilde{T}^{kl} \eta_{kl} = \widetilde{\rho}\,.$$

Но для собственных времен ds и $d\tau$ и собственных объемов dV_0 и $d\widetilde{V}$ в римановом и плоском пространствах соответственно имеем равенство

$$dsdV_0 = \Phi^4 d\tau d\widetilde{V}. \tag{2.9}$$

Поэтому для плотности материи ρ можно записать:

$$\rho = \frac{dm}{dV_0} = \frac{1}{\Phi^4}\Phi\frac{dm}{d\widetilde{V}}. \tag{2.10}$$

Рассмотрим объем достаточно малый, чтобы в нем можно было положить $\Phi = \text{const}$. Тогда для инертной массы в плоском пространстве можно записать:

$$\widetilde{m} = \Phi m, \tag{2.11}$$

а для плотности из (2.10)

$$\rho = \frac{1}{\Phi^4}\cdot\frac{d\widetilde{m}}{d\widetilde{V}} = \frac{1}{\Phi^4}\widetilde{\rho}, \tag{2.12}$$

где $\widetilde{\rho}$ — плотность материи в плоском пространстве. Из (2.12) и (2.3) получаем непосредственно уравнение (2.4).

И еще несколько слов об уравнении (2.11). Из динамического уравнения $T^l_{k;l} = 0$ следует, что пробная частица движется по геодезической риманова пространства, а ее тяжелая масса (масса покоя) остается постоянной. Из соотношения (2.11) следует, что масса покоя в плоском пространстве уже не остается постоянной. Это значит, что пробная частица в плоском пространстве уже не движется по геодезической, так как появляется дополнительная сила, пропорциональная градиенту потенциала Φ.

В соотношениях (2.2), (2.3) и (2.4) содержится специальный принцип относительности. Они инварианты относительно постоянных, т. е. не зависящих от мировых точек преобразований Лоренца.

Раньше мы сформулировали специальный принцип относительности с несколько иной точки зрения. Мы определяли принцип относительности как инвариантность систем отсчета относительно глобальных лоренцевых вращений. Данная же формулировка будет иметь место тогда, когда найдутся вращения, с помощью которых можно совместить оси системы отсчета с координатными осями (ср. гл. 4).

Прежде чем сравнивать теорию Нордстрема с экспериментальными результатами, рассмотрим две ее другие формулировки, позволяющие установить связь между скалярно-тензорной теорией, тетрадной теорией и теорией Нордстрема.

В теории Нордстрема можно рассматривать пространственно-временной скаляр Ф как одну из составляющих, наряду с метрическим тензором, полевой функции гравитационного поля. Для скалярного поля Ф можно записать вариационный принцип:

$$\delta \int \left[\frac{1}{2} \Phi^{-4} g^{kl} \Phi_{,k} \Phi_{,l} + a \Phi^{-2} g^{kl} T_{kl} \right] \sqrt{-g}\, d^4x = 0. \quad (2.13)$$

Варьируя (2.13) по Ф, получим полевое уравнение

$$\Phi^{-1} \Box_g \Phi - 2\Phi^{-2} g^{kl} \Phi_{,k} \Phi_{,l} + 2aT = 0, \quad (2.14)$$

причем $\Box_g$ — оператор Даламбера с метрикой g_{kl}. Однако метрика g_{kl} остается еще неопределенной. Чтобы прийти к теории Нордстрема, мы должны еще потребовать, чтобы g_{kl} была задана в некоторой, вполне определенной координатной системе, а следовательно, и во всех тех координатных системах, которые связаны с исходной постоянными лоренцевыми преобразованиями.

Уравнение (2.14) напоминает полевое уравнение теории Иордана — Дикке для скалярной составляющей. Это значит, что теорию Нордстрема можно рассматривать как один из вариантов скалярно-тензорной теории, если считать, что полевые уравнения для g_{kl} в ней заменены дополнительными алгебраическими условиями. Наконец, мы представим теорию Нордстрема в такой форме, которая имеет фундаментальное значение для тетрадных теорий [3]. Примем, что все гравитационные взаимодействия описываются не тензорным полем g_{kl}, не тензорным (g_{kl}) и скалярным (Ф), а некоторым векторным полем h_k^A (индексом A нумеруются векторы).

Все процессы, испытывающие влияние гравитационного поля, протекают в римановом пространстве с метрикой

$$g_{kl} = \eta_{AB} h_k^A h_l^B. \quad (2.15)$$

Само же гравитационное взаимодействие распространяется в плоском пространстве.

В качестве уравнений поля постулируем 16 уравнений для h_k^A:

$$\eta_{AB}\,\eta^{kl}\,h_k^A\,\Box\,h_l^B = C\,\eta^{kl}\,\widetilde{T}_{kl}, \tag{2.16}$$

где T_{kl} — тензор энергии — импульса в плоском пространстве. Чтобы определить h_k^A полностью, нужны дополнительные условия.

Мы придем к теории Нордстрема, если потребуем, чтобы в координатах, в которых метрический тензор пространства Минковского имеет вид η_{kl}, тетрадное поле можно было бы выразить следующим образом:

$$h_k^A = \Phi\,\delta_k^A. \tag{2.17}$$

Рассмотрим линейное приближение теории Нордстрема. Некогерентное распределение материи с малой плотностью ρ индуцирует слабое гравитационное поле

$$\Phi = 1 + \varphi/c^2,$$

подчиняющееся уравнению

$$\Delta\varphi = -\frac{k}{6}\,c^2\rho. \tag{2.18}$$

Из динамического уравнения следует, что пробная частица движется по геодезической риманова пространства. В случае медленного движения φ можно отождествить с потенциалом Ньютона. Тогда из возможности предельного перехода к ньютоновской теории находим

$$\frac{k}{6} = \frac{4\pi G}{c^2}, \tag{2.19}$$

где G — ньютоновская гравитационная константа.

Чтобы получить в рамках теории Нордстрема красное смещение спектральных линий, отклонение света гравитационным полем и смещение перигелия планетных орбит, рассмотрим статическое сферически-симметрическое поле

$$ds^2 = \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 (dt^2 - dr^2 - r^2 d\,\Omega^2). \tag{2.20}$$

Из этой метрики для собственных частот, измеряемых в точке $r_1 < r_2$, получим

$$\nu_2/\nu_1 = (1 - m/r_1)/(1 - m/r_2). \tag{2.21}$$

Затем красное смещение измеряется в точке r_2, и это значение сравнивается с полученным смещением в рамках эйнштейновской теории.

В литературе можно встретить утверждения, что красное смещение является непосредственным подтверждением слабого принципа эквивалентности для электромагнитного излучения [4].

Поместим в слабое гравитационное поле два экземпляра идентичных часов на расстоянии друг от друга достаточно малом, чтобы поле можно было считать однородным (часы мы называем идентичными, если они идут идентично в одной точке пространства). Затем будем посылать непрерывные сигналы из точки 1 в точку 2, так что в точке 1 измеряется ν_1, а в точке 2 измеряется ν_2. Частоты связаны соотношением

$$\nu_2 = \nu_1\left(1 + \frac{gh}{c^2}\right), \tag{2.22}$$

где h — расстояние между точками 1 и 2, g — ускорение силы тяжести в однородном поле.

В рамках гипотезы световых квантов потенциальная энергия кванта в точке 1 равна $h\nu/c^2 \cdot gh$, откуда следует, что фотон, кроме своей инертной массы $h\nu/c^2$, имеет равную ей по величине пассивную тяжелую массу.

Электромагнитное излучение, оказывается, тоже подтверждает слабый принцип эквивалентности, который теперь можно было бы сформулировать так: инертная масса равна пассивной тяжелой массе.

Однако эти аргументы справедливы только в рамках ньютоновской теории. Нельзя ожидать, чтобы теория, хотя и переходящая в предельном случае в ньютоновскую, но сформулированная на совершенно других принципах, имела бы тот же «механизм» красного смещения, что и нерелятивистская ньютоновская теория.

В рамках теории Нордстрема электромагнитному излучению нельзя приписать никакой тяжелой массы. Как уже было сказано, риманово пространство в теории Нордстрема конформно-плоское. Вследствие конформной инвариантности уравнений Максвелла фотон не должен чувствовать присутствие гравитационного поля. В любом случае он должен двигаться по нулевой геодезической пространства Минковского, и все же, несмотря на это, красное смещение должно иметь место и в теории Нордстрема.

Ясно, что формулировка слабого принципа эквивалентности в виде ($T^l_{k;l} = 0$) и формулировка этого принципа в словах: «инертная масса равна тяжелой пассивной массе» — это не одно и то же в теории Нордстрема: свет движется по нулевым геодезическим пространства Минковского и конформно-плоского пространства Римана, однако свету в теории Нордстрема нельзя приписать тяжелую массу.

В теории Нордстрема, как и в остальных метрических теориях гравитации, причину красного смещения следует искать во влиянии гравитационного поля на ход часов.

С помощью непрерывного сигнала, посылаемого из точки 1 в точку 2, фиксируется определенное время. Это время, в единицу которого в точке 2 принимается столько колебаний, сколько их излучается в ту же единицу времени в точке 1. Это — координатное время t в (2.20), в чем мы скоро убедимся.

Идентичные часы, используемые для измерения частот, в различных точках пространства идут по-разному по отношению к t, поэтому сравнение их показаний и дает значения частотного смещения.

Обсудим вкратце отклонение света и смещение перигелия в теории Нордстрема. Из (2.20) получим

$$\gamma = -2, \quad \alpha = \beta = -2, \quad \delta = 1 \tag{2.23}$$

(см. 2.20). Из (2.23) следует, что отклонения света нет, что и нужно было ожидать, принимая во внимание конформную инвариантность уравнений Максвелла. Из (2.23) для смещения перигелия можно получить лишь 1/16 эйнштейновского значения.

Таким образом, приходим к заключению, что теория Нордстрема неудовлетворительна хотя бы потому, что не содержит отклонения света. Величина смещения перигелия тоже вызывает удивление. Хотя здесь и можно было бы возразить, что квадрупольный момент Солнца неизвестен и поэтому даже сейчас не вполне ясно, какую именно часть смещения перигелия не объясняет ньютоновская теория.

Если рассматривать первое теоретическое усиление принципа эквивалентности (см. стр. 27) естественным, то можно сказать, что на основании эксперимента Этвеша — Дикке гравитационную теорию Нордстрема можно также считать опровергнутой. Известно, что кулоновское взаимодействие между нуклонами добавляет к общей энергии, а следовательно, и к инертной массе атома около одного процента. В соответствии с квантовой теорией поля это взаимодействие нужно понимать как обмен виртуальными фотонами. Однако эти фотоны по теории Нордстрема не подчиняются влиянию гравитационного поля. Следовательно, в соответствии с теорией Нордстрема атомы с различным вкладом энергии, обусловленным кулоновским взаимодействием, при равном числе нуклонов должны иметь различные инертные и одинаковые пассивные тяжелые массы, и эта разница значительно превосходит точность измерений в эксперименте Этвеша — Дикке.

§ 5. ТЕОРИЯ ИОРДАНА — ДИККЕ

Исторически отправной точкой при создании теории Иордана—Дикке послужил один формальный недостаток теории Эйнштейна—Максвелла, если ее формулировать в пятимерном пространстве или, что эквивалентно, в четырехмерном проективном пространстве. Когда в рамках этой новой формулировки получают уравнения Эйнштейна—Максвелла

$$R_{kl}-\frac{1}{2}g_{kl}R=-\varkappa\left(F_{km}F_{l}^{m}-\frac{1}{4}g_{kl}F_{mn}F^{mn}\right); \quad (2.24)$$

$$F_{kl;\,m}+F_{lm;\,k}+F_{mk;\,l}=0; \quad (2.25)$$

$$F^{l}_{k;\,m}=0, \quad (2.26)$$

при варьировании скалярной кривизны пятимерного пространства выявляется необходимость дополнительных условий

$$\Phi=g_{ab}X^{a}X^{b}=\mathrm{const} \quad (2.27)$$

(a, b здесь и далее пробегают значения от 0 до 4). В (2.27): X^a — однородные координаты пятимерного пространства, g_{ab} — его метрика [19], а Φ — скаляр относительно пространственно-временных преобразований.

Можно, однако, отказаться от дополнительного условия (2.27), а ввести непосредственно новое скалярное поле Φ.

Скаляр Φ толковали по-разному. Сначала Иордан, а затем и Дикке связали его с константой гравитационного взаимодействия. Впоследствии Дикке ввел непосредственно новое материальное скалярное поле Φ.

С введением скалярного поля Φ возникает целый ряд новых возможностей для вывода уравнений поля из вариационного принципа (свобода выбора функции Φ). В рамках пятимерной теории общий вариационный принцип можно записать

$$\delta \int \left(\underset{5}{R} \tilde{f}_1 (\Phi) + \tilde{f}_2 (\Phi) \overset{5}{g}{}^{ab} \Phi_{,a} \Phi_{,b} + f_3 (\Phi) \right) \times \\ \times \sqrt{-\overset{5}{g}}\, dX^0 \dots dX^4 = 0, \qquad (2.28)$$

где $\underset{5}{R}$ — пятимерный скаляр кривизны, а f_1, f_2 и f_3 — произвольные функции.

Пятимерный скаляр $\underset{5}{R}$ можно выразить через четырехмерные величины:

$$\underset{5}{R} = R + \frac{1}{2} \Phi F_{kl} F^{kl} + \frac{1}{2} \Phi^{-2} \Phi_{,k} + \left(\frac{1}{\Phi} \Phi^{\cdot k} \right)_{;k}. \qquad (2.29)$$

Здесь для сокращения $\Phi^{\cdot k}$ обозначено $g^{kl}\Phi_{,l}$, причем g_{kl} — метрический тензор четырехмерного риманова пространства, а знаком (;) — ковариантные производные, образованные с метрикой g_{kl}. R — четырехмерный скаляр кривизны, а F^{kl} — тензор электромагнитного поля.

В терминах 4-величин вариационный принцип можно записать следующим образом:

$$\delta \int \left\{ \left(R + \frac{1}{2} \Phi F_{kl} F^{kl} \right) f_1 (\Phi) + f_2 (\Phi) \Phi_{,k} \Phi^{\cdot k} + f_3 (\Phi) \right\} \times \\ \times \sqrt{-g}\, d^4 x = 0. \qquad (2.30)$$

Вся вытекающая из (2.30) теория не описывает никакую другую материю, кроме Ф-поля, электромагнитного и гравитационного полей. Если возникает необходимость введения других материальных полей, следует (2.30) соответствующим образом дополнить. Из анализа вариационного принципа (2.30) ясно, как это нужно делать: вместо скаляра Максвелла $F_{kl}F^{kl}$ нужно написать общековариантную форму функции Лагранжа СТО. Следуя этому, получим целый класс вариационных принципов:

$$\delta \int \{ (R + \Phi \Lambda) f_1 (\Phi) + f_2 (\Phi) \Phi_{,k} \Phi^{\cdot k} + \\ + f_3 (\Phi) \} \sqrt{-g}\, d^4 x = 0. \qquad (2.31)$$

Если теперь потребовать, чтобы в присутствии гравитационного поля уравнения поля обычной материи были уравнениями СТО в общековариантной записи, то в (2.31) следует положить

$$f_1(\Phi) = \Phi^{-1}. \tag{2.32}$$

Только в этом случае тензор энергии — импульса введенной материи будет удовлетворять динамическому уравнению

$$T^l_{k;\,l} = 0. \tag{2.33}$$

Это и понятно, так как теперь Ф связано лишь со скалярной кривизной, а не с обычной материей. При условии справедливости (2.32) удовлетворяется также и слабый принцип эквивалентности. В частности, незаряженные пробные частицы движутся по геодезическим.

Сильный принцип эквивалентности в теории не выполняется, так как для описания гравитационного поля, кроме метрического тензора, привлекается функция Ф.

Произвольные функции $f_2(\Phi)$ и $f_3(\Phi)$ ограничены требованием, чтобы в линейном приближении из (2.31) следовала ньютоновская теория тяготения. Кроме ~~того, необходимо~~, чтобы полученные из (2.31) затем значения отклонения света и смещения перигелия были бы близки к соответствующим эйнштейновским значениям. При условии (2.32), из (2.31) можно найти, что Ф пропорционально константе гравитационного взаимодействия. Иордан и Дикке рассмотрели один частный случай, в котором приняли, кроме (2.32), еще условие $f_2(\Phi) \sim \Phi^{-2}$, а $f_3(\Phi)$ — «космологический член» — положили равным нулю.

Исторически путь создания теории Иордана—Дикке был все же иным. Иордан первоначально рассматривал вариационный принцип [5]:

$$\delta \int \Phi^{\eta} \left[\left(R - \frac{1}{2} \Phi F_{kl} F^{kl} \right) - \zeta \Phi^{-2} \Phi_{,k} \Phi^{,k} \right] \sqrt{-g}\, d^4x = 0, \tag{2.34}$$

где η и ζ — экспериментальные параметры.

Интересно, что математическое исследование вариационного принципа не зависит от конкретного выбора $\eta \neq 0$, если в мире, кроме электромагнитного поля и присущего ему гравитационного взаимодействия, нет никакой материи.

Иордан вначале принял $\eta = 1$, отождествил Ф с переменной гравитационной «константой» и принял, что метрика g_{kl}, входящая в (2.34), есть метрика четырехмерного мирового пространства. Этот вариант теории был подвергнут критике Фирцем [7] и Паули [6]. Позднее Иордан и сам пересмотрел его [8].

Паули обратил внимание на то, что обобщение теории Эйнштейна—Максвелла (введение дополнительного Ф-поля) не выводит теорию из класса чисто волновых теорий, т. е. в ней отсутствует материя с не равной нулю массой покоя. Кроме того, метрика g_{kl} определяется в теории неоднозначно: нулевые геодезические в пространстве с g_{kl} останутся таковыми и во всяком другом пространстве с $g_{kl} = w(x)g_{kl}$. В этой обобщенной теории Эйнштейна—Максвелла световые лучи являются единственным средством измерения метрики.

Метрика только тогда будет однозначно определена, когда к (2.34) будет добавлен член, описывающий движение незаряженной точечной массы, причем движение должно удовлетворять слабому принципу эквивалентности, т. е. оно должно быть геодезическим.

Фирц ввел этот дополнительный член следующим образом: подстановкой $\Phi^{\eta} = \sigma$, где $\varepsilon_0 = \sigma^{1+1/\eta}$, вводится в теорию диэлектрическая постоянная вакуума. Тогда для точечной массы m, имеющей скорость $\dot{\xi}^k$, получим

$$m \int f(\sigma) \sqrt{g_{kl} \dot{\xi}^k \dot{\xi}^l}\, d\lambda, \tag{2.35}$$

где f—произвольная функция от σ, а истинная метрика $\overline{g}_{kl} = f^2(\sigma) g_{kl}$.

Связь между материей и гравитационным полем будет такова же, как и в (2.31), только при условии $\eta = -1$, $f = 1$. Далее Фирц показал, что в теории Иордана «константа» связи гравитационного взаимодействия уже не будет постоянной, она оказывается произвольной функцией от Ф.

Немедленно возникают две возможности: или задаться конкретной зависимостью «константы» от Ф и установить тем самым метрику, или же задать метрику с точностью до конформных преобразований и определить зависимость «константы» от Ф. Затем оказалось, что построенная на (2.34) теория приводит и к переменности вакуумной диэлектрической «постоянной»

$$\varepsilon_0 = \sigma^{1+1/\eta},$$

а это, в свою очередь, вызывает переменность электродинамической «постоянной» тонкой структуры, т. е. должно приводить к наблюдаемым эффектам при приеме электромагнитного излучения от далеких источников. Однако экспериментальные данные по измерению красного смещения линии 21 *см* межзвездного водорода заставляют принять $\eta = -1$, т. е. «постоянная» тонкой структуры оказывается все-таки постоянной, а не переменной, как это должно быть по Иордану. Далее Фирц показал, что предположение о геодезическом характере движения незаряженных точечных масс эквивалентно предположению о постоянстве комптоновских длин волн соответствующих элементарных частиц.

При $\eta = -1$ диэлектрическая постоянная, действительно, постоянна, то результаты всех измерений, в которых за единицу длины принимается либо боровский радиус, либо комптоновская длина, либо произвольная спектральная линия, совпадают. Это не имело бы места, если бы $\eta \neq -1$ и $\varepsilon_0 = \text{const}$, так как в определение любой единицы длины всегда входит ε_0 той или иной степени.

Руководствуясь указанными соображениями, Иордан позже выбрал $\eta = -1$. В этом случае входящая в вариационный принцип (2.34) метрика такова, что незаряженные точечные массы движутся по геодезическим, а скаляр Φ пропорционален гравитационной константе.

Несколько позже Дикке и Бранс [9,17, 18], исходя из принципа Маха, предложили другую теорию, которая при $\eta = -1$ переходит в теорию Иордана (в дальнейшем для Φ^{-1} введем обозначение ψ).

Из вариационного принципа

$$\delta \int \left[\psi R + \frac{16\pi}{c^4} L - \omega \psi^{-1} \psi_{,k} \psi^{,k} \right] \sqrt{-g}\, d^4x = 0 \qquad (2.36)$$

получаем полевые уравнения

$$R_{kl} - \frac{1}{2} g_{kl} R = (8\pi\psi^{-1}/c^4) T_{kl} + (\psi^{-2}\omega)\Big(\psi_{,k}\psi_{,l} - \frac{1}{2} g_{kl} \psi_{,m} \psi^{,m}\Big) + \psi^{-1}(\psi_{,k;l} - g_{kl} \Box \psi); \qquad (2.37)$$

$$2\omega \psi^{-1} \Box \psi - (\omega/\psi^2) \psi_{,k} \psi^{,k} + R = 0. \qquad (2.38)$$

Отличительная особенность уравнения (2.37): плотность обычной материи во Вселенной (тензор T_{kl}) оказывается переменной из-за переменности гравитационной «константы».

Если Иордан истолковал Ф-поле исключительно как переменную «константу», то Дикке рассматривал скалярное поле Ф как равноправное с тензорным полем g_{kl}, т. е. он считал, что для полного описания гравитационного взаимодействия необходимо знать g_{kl} и Ф.

Скалярное Ф-поле не взаимодействует с полями материи (так что $T^{l}_{k;l} = 0$), а само является источником гравитационного поля и входит в правую часть (2.37) в виде дополнительного члена Z^{l}_{k}. А это значит, что решение уравнений (2.37) — (2.38) с некоторым T_{lk} дает метрику $\tilde{g}_{kl}$, отличную от g_{kl} — решения уравнений Эйнштейна с тем же тензором обычной метрики T_{kl}.

Получающуюся разность $(g_{kl} - \overline{g}_{kl})$ можно использовать для определения ψ-поля. Оно не может быть произвольным, так как в противном случае такая теория гравитации оказалась бы не конструктивной. Поле ψ следует подчинить некоторому волновому уравнению, содержащему константу, выбор которой дает возможность подогнать теорию под эксперимент. Существенным недостатком теории является то, что ψ-поле непосредственно нельзя зарегистрировать, оно проявляется только через свое гравитационное взаимодействие.

В варианте теории Иордана — Дикке, к изложению которого мы приступаем, скалярное поле взаимодействует непосредственно с материальными полями, но возникает другая трудность — перестает выполняться слабый принцип эквивалентности.

Дикке обратил внимание на то, что уравнения поля (2.37) конформными преобразованиями можно привести к стандартному эйнштейновскому виду, если к тензору энергии — импульса обычной материи прибавить тензор энергии — импульса скалярного поля.

Конформное преобразование

$$\overline{g}_{kl} = \chi(x^m)\, g_{kl} \tag{2.39}$$

дает новые коэффициенты аффинной связности Кристоффеля $\left\{\overline{\begin{matrix} m \\ kl \end{matrix}}\right\}$, связанные со старыми коэффициентами $\left\{\begin{matrix} m \\ kl \end{matrix}\right\}$ соотношением

$$\left\{\begin{matrix} m \\ kl \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overline{m} \\ kl \end{matrix}\right\} + \frac{1}{2}\left\{-\delta^m_k (\ln\chi)_{,\,l} + \overline{g}^{ms}\overline{g}_{kl}(\ln\chi)_{,\,s} - \delta^m_l (\ln\chi)_{,\,k}\right\}. \tag{2.40}$$

Как уже было сказано, интерпретация φ как гравитационной константы возможна, если только имеет место постулат Фирца о геодезических, т. е. если вектор скорости незаряженной точечной массы касателен к геодезической, а масса покоя частицы постоянна.

Конформное преобразование (2.39) переводит старое уравнение движения с учетом (2.40) в новое:

$$\frac{D}{d\bar{s}}(\bar{m}\,\bar{u}^k) + \bar{g}^{kl}\bar{m}_{,\,l} = 0. \tag{2.41}$$

При этом имеет место $d\bar{s}^2 = \chi\, ds^2$, где $\bar{u}^k$ — 4-скорость в метрике $\bar{g}_{kl}$, а масса покоя определяется формулой

$$\bar{m} = m \ln \chi. \tag{2.42}$$

В метрике $\bar{g}_{kl}$ незаряженные точечные массы движутся уже не по геодезическим; кроме того, масса покоя уже не постоянна.

С физической точки зрения конформное преобразование метрики означает: с каждой метрикой связываются «масштабы», которые параллельно перемещаются из одной точки пространства в другую без изменения «длин», т. е. в римановом пространстве — времени становится возможным сравнение объектов на расстоянии. Этот параллельный перенос нет необходимости выполнять (да и невозможно), если из самой теории следует, какие величины являются постоянными и из какого набора этих величин можно образовать объекты с размерностью длины.

В теории гравитации с уравнениями (2.37) и (2.38) масса покоя m постоянна, а потому постоянны комптоновская длина, постоянная тонкой структуры и скорость света в вакууме. Константа связи гравитационного взаимодействия не постоянна. Следовательно, в качестве масштабов длины можно взять комптоновскую длину, боровский радиус или какую-либо узкую спектральную линию. Планковскую длину $l = \sqrt{hG/c^3}$ в качестве масштаба принять нельзя из-за непостоянства G по пространству. Если в некоторой точке пространства P_0 задан пространственный вектор с длиной $l_0 = \sqrt{hG/c^3}$, то при параллельном переносе в любую другую точку его длина изменится.

Перейдем теперь с помощью конформного преобразования к метрике $\bar{g}_{kl}$, в которой единицы длины при параллельном переносе не меняются. Эти единицы уже не будут в общем случае совпадать с единицами, определенными в метрике g_{kl}.

Мы видели уже, что масса покоя в метрике g_{kl} оказывается переменной. Следовательно, ни комптоновская длина, ни боровский радиус, ни спектральные линии не могут служить в $\bar{g}_{kl}$ масштабами длины.

Если положить $\chi = G\psi$, то уравнение (2.37) приводится к стандартному эйнштейновскому виду, только к T_{kl} обычной материи добавлен $\Theta = \ln\chi$ — тензор энергии — импульса скалярного поля, а g_{kl} заменено на $\bar{g}_{kl}$. Теперь уже и гравитационная константа является истинной константой. Это значит, что величины $\sqrt{hG/c^3}$, $\sqrt{hG/c^5}$ и $\sqrt{hc/G}$ могут теперь служить единицами длины, времени и массы соответственно, так как h и c — конформно-инвариантные величины. Но из-за того, что в $\bar{g}_{kl}$ пробные частицы не движутся по геодезическим, нарушается слабый принцип эквивалентности.

Однако в теории есть метрика g_{kl}, в которой слабый принцип выполняется.

Произвольным конформным преобразованием

$$\bar{g}_{kl} = \mu(\psi)\, g_{kl} \tag{2.43}$$

можно получить любые отклонения от геодезических в метрике $\bar{g}_{kl}$, конформной g_{kl}. Отклонение траекторий пробных частиц от геодезических в пространстве с метрикой g_{kl} оказывается в теории не произвольным, а весьма малым из-за того, что μ выбирается пропорциональным ψ, а само поле ψ подчиняется уравнению (2.38), описывающему слабое гравитационное поле, т. е. ψ меняется очень мало. Но выполнение слабого принципа эквивалентности недостаточно для постулата о геодезических. Нужно, чтобы метрика допускала в качестве масштабов длины комптоновскую длину или же спектральные линии. Здесь это имеет место.

Чтобы обсудить в теории Иордана — Дикке три классических эффекта, найдем из (2.37) и (2.38) внешнюю метрику статического сферически-симметричного распределения материи.

Для метрики типа

$$ds^2 = D(r)\,dt^2 - A(r)\,dr^2 - A(r)\,r^2\,d\Omega^2 \tag{2.44}$$

имеем [9]

$$D(r) = [(1 - B/r)/(1 + B/r)]^{2/\lambda}; \tag{2.45}$$

$$A(r) = (1 + B/r)^4 [(1 - B/r) / (1 + B/r)]^{2[(\lambda - C - 1)/\lambda]}; \quad (2.46)$$

$$\psi(r) = \psi_0 [(1 - B/r) / (1 + B/r)]^{-C/\lambda}. \quad (2.47)$$

Здесь B, C, ψ_0 — константы интегрирования, а

$$\lambda = \left[(C+1)^2 - C\left(1 - \frac{1}{2}\omega C\right)\right]^{1/2}. \quad (2.48)$$

Из (2.45) и (2.46) при больших r получим

$$D(r) = 1 - \frac{4B}{\lambda} \cdot \frac{1}{r} + \frac{8B^2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{r^2} + O(r^3), \quad (2.49)$$

$$A(r) = 1 + 2(C+1)\frac{2B}{\lambda} \cdot \frac{1}{r} + O(r^{-2}). \quad (2.50)$$

Чтобы выполнялся предельный переход к теории Ньютона, положим

$$\frac{2B}{\lambda} = m\ (= GM). \quad (2.51)$$

Тогда

$$D(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{2m^2}{r^2} + O(r^{-3}), \quad (2.52)$$

$$A(r) = 1 + 2(C+1)\frac{m}{r} + O(r^{-2}). \quad (2.53)$$

А отсюда получаем (см. (1.20))

$$\gamma = -2, \quad \alpha = \beta = 2(C+1), \quad \delta = 2. \quad (2.54)$$

Эти значения дают для отклонения света

$$\Delta\varphi_L = \frac{1}{4}[2 + 2(C+1)]\,\Delta\varphi_L^{\text{Einstein}} \quad (2.55)$$

и для смещения перигелия

$$\Delta\varphi_P = \frac{1}{3}[1 + 2(C+1)]\,\Delta\varphi_P^{\text{Einstein}}. \quad (2.56)$$

Метрика (2.44) с коэффициентами (2.45), (2.46) и (2.47) должна быть локально изоморфной метрике Хекмана в теории Иордана, так как в вакууме конкретное значение η несущественно (соответствующее отклонение света и смещение перигелия получатся, если $C+1$ положить равным B теории Иордана). Различие между этими метриками появляется при введении в решение материи с отличной от нуля массой покоя, например в случае, когда рассматривается поле точечной массы, ньютоновское на бесконечности.

Следует подчеркнуть, что значения отклонения света и смещения перигелия не определяются вакуумным решением (константа C произвольна). Нужно обязательно рассматривать источник поля. Тогда при $C = 0$ в теории Иордана получаем те же величины для классических эффектов, что и в теории Эйнштейна.

Из (2.37) и (2.38) получим поле точечной массы

$$\psi = \psi_0\left(1 + \frac{2M}{\psi_0} \cdot \frac{1}{3+2\omega} \cdot \frac{1}{r}\right); \tag{2.57}$$

$$g_{00} = 1 - \frac{2M}{\psi_0} \cdot \frac{4+2\omega}{3+2\omega} \cdot \frac{1}{r}, \tag{2.58}$$

где M определяется как интеграл $\int \rho\, dV$. Сравнивая его с (2.52), выразим ньютоновскую константу связи в виде

$$G = \frac{1}{\psi_0} \cdot \frac{4+2\omega}{3+2\omega}. \tag{2.59}$$

Далее, из (2.47) получим выражение

$$\psi = \psi_0\left(1 + \frac{2B}{\lambda} C \frac{1}{r}\right), \tag{2.60}$$

и, сравнивая с (2.57) и учитывая (2.51), приходим к формуле

$$C = -\frac{1}{2+\omega}. \tag{2.61}$$

В частности, при $\omega \geqq 0$ константа C для точечной массы не равна нулю; тогда значения классических эффектов в теории Иордана оказываются отличными от эйнштейновских.

Если взять C по (2.61), то из (2.48) можно получить выражение для λ:

$$\lambda = \left(\frac{2\omega+3}{4\omega+2}\right)^{1/2}. \tag{2.62}$$

И наконец, из (2.55) и (2.56) находим для отклонения света и смещения перигелия соотношения

$$\Delta\varphi_L^P = \frac{3+2\omega}{4+2\omega} \Delta\varphi_L^{\text{Эйнштейн}}, \tag{2.63}$$

$$\Delta \varphi_P^P = \frac{4+3\omega}{6+3\omega} \Delta \varphi_P^{\text{Эйнштейн}} . \qquad (2.63а)$$

При $\omega \geqq 0$ они оказываются меньше соответствующих эйнштейновских значений.

Чтобы объяснить те же 43″ в смещении перигелия Меркурия, что и в теории Эйнштейна, Дикке должен был допустить наличие у Солнца квадрупольного момента, наибольшая ось инерции которого перпендикулярна к плоскости эклиптики.

Однако наличие у Солнца квадрупольного момента еще не доказано (см. теорию звездного магнетизма Штеенбека). У магнитных звезд можно ожидать наличие эллипсоида инерции, наименьшая ось которого совпадает с осью вращения звезды [10].

В соответствии с теорией Иордана—Дикке величина отклонения света в поле точечной массы меньше, чем в теории Эйнштейна. Если же экспериментальное значение отклонения света Солнцем будет больше, чем дает даже теория Эйнштейна (как считает Фрейндлих [11]), то в теории Иордана — Дикке возникает принципиальная трудность: никакие разумные модели Солнца для отрицательных C не «дотягивают» теорию Иордана — Дикке до максимальных эйнштейновских значений отклонения света.

В заключение обратимся к сильному принципу эквивалентности и покажем, что его формулировка в виде «активная тяжелая масса равна пассивной тяжелой массе и равна инертной массе» является гораздо менее конструктивной по сравнению с другой формулировкой: гравитационный потенциал тождествен фундаментальному метрическому тензору некоторого риманова пространства.

Метрику заключенной в конечном объеме замкнутой физической системы на большом расстоянии от нее можно считать статической и сферически-симметричной. Тогда из интервала следует, что $2B/\lambda$ является активной тяжелой массой.

Паули предложил считать инертную массу величиной сохраняющейся. В теории Иордана—Дикке, как и в теории Эйнштейна, не существует интеграл от T_0^0. Но только если в теории Эйнштейна к T_0^0 добавляется еще t_0^0 (что в ограниченных пределах интерпретируется как плотность энергии гравитационного поля), то соответствующее выражение в теории Иордана — Дикке становится гораздо более громоздким и гораздо менее понятным.

Как известно, тензорную плотность Эйнштейна можно представить в виде

$$\mathbf{U}_{k,\,m}^{\overset{lm}{\vee}} - \mathbf{t}_k^l = \left(R_k^l - \frac{1}{2}\,\delta_k^l\,R\right)\sqrt{-g}. \qquad (2.64)$$

Подставим затем (2.64) в уравнения гравитационного поля и получим

$$\mathbf{U}_{k,\,m}^{\overset{lm}{\vee}} = (8\pi\,\psi^{-1}/c^4)\,\mathbf{T}_k^l + \mathbf{t}_k^l + \mathbf{Z}_k^l\,, \qquad (2.65)$$

где дополнительный член $\mathbf{Z}_k^l$ зависит от поля ψ и его первых и вторых производных.

Так как тензор $\mathbf{U}_k^{\overset{lm}{\vee}}$ антисимметричен по l и m, то закон сохранения должен иметь вид

$$\left[(8\pi\,\psi^{-1}/c^4)\,\mathbf{T}_k^l + \mathbf{t}_k^l + \mathbf{Z}_k^l\right]_{,\,l} = 0, \qquad (2.66)$$

так что мы будем рассматривать

$$\int \left[(8\pi\,\psi^1/c^4)\,\mathbf{T}_0^0 + \mathbf{t}_0^0 + \mathbf{Z}_0^0\right] d^3x = \mathrm{const} \equiv P_0 \qquad (2.67)$$

как определение инертной массы замкнутой системы.

Можно записать P_0 как интеграл по поверхности. Тогда, с учетом (2.44), (2.49) и (2.50), получим из суперпотенциала Фрейда $\mathbf{U}_k^{lm}$

$$P_0 = (C + 1)\cdot 2B/\lambda, \qquad (2.68)$$

откуда следует, что активная тяжелая масса и инертная масса в теории Иордана — Дикке различаются, а следовательно, нарушается и сильный принцип эквивалентности. Это имеет место даже для поля точечных масс, так как для них $C \neq 0$.

Вообще говоря, вместо (2.68) следовало бы ожидать другой результат.

Как известно, для стационарного поля R_0^0 можно представить в дивергентной форме. Кроме того, если метрика при $r \to \infty$ переходит в (2.44) с коэффициентами (2.49) и (2.50), имеет место равенство

$$2\int \mathbf{R}_0^0\,d^3x = \frac{2B}{\lambda}. \qquad (2.69)$$

Но

$$\int \mathbf{R}_0^0\,d^3x = \int \left[\frac{1}{2\psi}\left(\mathbf{T}_0^0 - \mathbf{T}_\alpha^\alpha\right) + \left(\mathbf{Z}_0^0 - \mathbf{Z}_\alpha^\alpha\right)\right] d^3x \qquad (2.70)$$

(суммирование по α от 1 до 3).

С другой стороны, для замкнутой системы нужно потребовать, чтобы интегралы

$$\int \left[\frac{1}{\psi} \mathbf{T}_k^\alpha + \mathbf{t}_k^\alpha + \mathbf{Z}_k^\alpha \right] d^3x \quad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{2.71}$$

исчезали. Поэтому можем преобразовать интеграл (2.70), что дает

$$\frac{2B}{\lambda} = 2 \int \mathbf{R}_0^0 \, d^3x = \int \left[\psi^{-1} \mathbf{T}_0^0 + \mathbf{t}_0^0 + \mathbf{Z}_0^0 \right] d^3x = P_0, \tag{2.72}$$

но не (2.68). Где ошибка?

Интегралы (2.71) можно, с учетом (2.65), преобразовать в поверхностные. Тогда легко можно убедиться, что в метрике (2.44), (2.49) и (2.50) эти интегралы не исчезают. Следовательно, преобразование интеграла $\int \mathbf{R}_0^0 \, d^3x$ недопустимо.

Но если интегралы (2.71) не равны нулю, то рассмотренное выше распределение материи ($T_k^l \neq 0$ в мировой трубке конечного сечения) не является замкнутым. Другими словами, величины

$$P_k = \int \left(\mathbf{T}_k^0 + \mathbf{t}_k^0 + \mathbf{Z}_k^0 \right) d^3x \tag{2.73}$$

не образуют никакого вектора относительно преобразований, переходящих на бесконечности в лоренцевы.

Если же мы хотим видеть в P_0 инертную массу, то автоматически в теории Иордана — Дикке активная тежелая масса не совпадает с инертной. Но: 1) в теории Эйнштейна P_k имеет физический смысл в некотором классе систем координат; 2) в теории Иордана—Дикке P_k теряет всякий физический смысл. Из всего этого следует, что формулировка сильного принципа эквивалентности как условие равенства масс несет очень мало информации, если речь идет о неньютоновских гравитационных полях.

§ 6. ТЕОРИЯ ХОЙЛА

Для описания гравитационного взаимодействия Хойл также вводил скалярное поле, однако руководствовался он при этом принципом Маха [12]. Особенно большое значение его C-поле играет в космологии Хойла (предотвращение сингулярностей), а также для решения недавно возникшей задачи о сильных гравитационных полях локальных неоднородностей во Вселенной [13].

Уравнения поля и движения в теории Хойла выводятся из вариационного принципа

$$\delta\left\{\int\left[\frac{1}{2G}R+\frac{1}{2}fg^{kl}C_kC_l\right]\sqrt{-g}\,d^4x-\right.$$
$$\left.-\sum m\int ds-\sum m\int C_k\frac{dx^k}{ds}\,ds\right\}=0, \qquad (2.74)$$

где f — константа связи, равная 10^{-28}, а в новых вариантах теории она равна 10^{-8} [20]; $C_k\equiv C_{,k}$ — градиент скалярного поля C; m — масса покоя заполняющих Вселенную частиц.

Структура теории Хойла отличается от структуры теории Иордана — Дикке. Если в последней скалярное поле является составной частью гравитационного поля, а член связи есть ψR, то в теории Хойла C-поле связано с материей при помощи выражения $\Sigma m\int C_k\cdot dx^k/ds$, которое является полным дифференциалом и поэтому при вариации мировой линии дает вклад только в конечных точках. Другими словами, в теории Хойла возможен переход от обычной материи к C-полю и обратно. Пока обычная материя существует, ее движение определяется членом $\Sigma m\int ds$, т. е. существующая материя движется по геодезическим линиям пространства, образованного ею же.

Следовательно, в теории Хойла выполняется слабый принцип эквивалентности для обычной материи, пока она существует. Более того, выполняется и сильный принцип, поскольку для описания поля используется лишь метрика, а C-поле рассматривается как новая материя. Это новое поле тоже является источником гравитации, но соответствующие решения в теории Хойла и Эйнштейна различаются очень мало из-за чрезвычайной малости f. На этом мы и закончим обсуждение теории Хойла.

Уже в наше время Хойл и Нарликар предложили новую теорию, основанную на принципе Маха (масса и инерция одной частицы обусловлены всей материей Вселенной) [14].

В основе теории лежит вариационный принцип:

$$\delta\left(\sum_{a<b}\sum\int\int\widetilde{G}(A,\,B)\,da\,db\right)=0. \qquad (2.75)$$

До конца параграфа мы будем пользоваться следующими обозначениями: a, b,... — номера частиц; A,B,... — точки на мировых линиях частиц a,b,...; a^{i_A}, b^{i_B},...— координаты этих точек ($i = 1, 2, 3, 4$). Вдоль мировой линии частицы a собственное время в точке A задается выражением

$$da^2 = g_{i_A k_A} da^{i_A} da^{k_A}, \tag{2.76}$$

где g_{ik} — метрика риманова пространства, в котором частицы движутся; $G(A, B)$ — действие сил инерции A на B и, наоборот, $\widetilde{G}(A, B) = \widetilde{G}(B, A)$ и определяется с помощью конформно-инвариантного уравнения

$$g^{i_X k_X} \widetilde{G}(X, A)_{; i_X k_X} + \frac{1}{6} R(X) \widetilde{G}(X, A) =$$

$$= -(-\overline{g})^{-1/2} \delta^4(X, A). \tag{2.77}$$

Здесь X — произвольная точка риманова пространства, скалярная кривизна в которой имеет значение $R(X)$. Далее, $\overline{g}$ — детерминант параллельного пропагатора $\overline{g_{i_A k_X}}$.

Варьируя (2.75) по мировым линиям частиц, получаем уравнения их движения:

$$\frac{d}{da}\left(m_a \frac{da^{i_A}}{da}\right) + m_a \left\{ \begin{matrix} i_A \\ k_A \; l_A \end{matrix} \right\} \frac{da^{k_A}}{da} \cdot \frac{da^{l_A}}{da} -$$

$$- g^{i_A k_A} \frac{\partial m_a}{\partial a^{k_X}} = 0. \tag{2.78}$$

Здесь инертная масса m_a частицы определяется с помощью так называемых массовых функций $m^{(b)}$ прочих частиц

$$m^{(b)}(X) = - \int \widetilde{G}(X, B)\, db \tag{2.79}$$

в виде

$$m_a(A) = \sum_{b \neq a} m^{(b)}(A). \tag{2.80}$$

Геометрия определится варьированием g_{ik}, которые входят в (2.75), по $G(A, B)$. Получаются уравнения

$$\left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}\right)\left(\sum_{a<b}\sum m^{(a)} m^{(b)}\right) + 3 g_{ip} g_{kp} T^{pq} -$$

$$- \sum_{a<b}\sum \left[m^{(a)} \left(g_{ik} g^{pq} m^{(b)}_{;pq} - m^{(b)}_{;ik}\right) + m^{(b)} \left(g_{ik} g^{pq} m^{(a)}_{;pq} -\right.\right.$$

$$-m^{(a)}_{;ik})] - 2\sum_{a<b}\sum\left[m^{(a)}_{;i}m^{(b)}_{;k} + m^{(a)}_{;k}m^{(b)}_{;i} - \frac{1}{2}g_{ik}m^{(a);l}m^{(b)}_{;l}\right] =$$

$$= 0, \tag{2.81}$$

причем тензор энергии—импульса некоторой системы N-частиц определяется выражением

$$T^{pq}(X) = \sum_a \int \delta^4(X, A)\left[-\bar{g}(X, A)\right]^{-1/2} m_a \frac{da^{i_A}}{da} \times$$

$$\times \frac{da^{k_A}}{da}\, \bar{g}^p_{i_A}\, \bar{g}^q_{k_A}\, da. \tag{2.82}$$

Хойл и Нарликар замечают, что уравнения (2.78) и (2.81) при преобразовании

$$\overset{*}{g}_{kl} = \Omega^2 g_{ik} \tag{2.83}$$

конформно-инвариантны, если массовые функции преобразуются следующим образом:

$$\overset{*}{m}{}^{(a)} = \Omega^{-1} m^{(a)}, \tag{2.84}$$

где Ω — произвольная функция мировой точки.

Одновременно с $[g_{ik}, \ m^{(a)}, m^{(b)}, \ldots]$ получается также $[\overset{*}{g}_{ik}, \ m^{*(a)}, \ m^{*(b)}, \ \ldots]$ — решение (2.78) и (2.81). По Хойлу и Нарликару, эти решения физически эквивалентны.

Если число частиц так велико, что можно рассматривать систему N-частиц как континуум, то можно повсюду заменить $\sum_{b\neq a} m^{(b)}$ на $\sum_b m^{(b)}$ (приближение однородной жидкости). Уравнения (2.81) с учетом подстановки

$$m(X) \equiv \sum_a m^{(a)}(X) \tag{2.85}$$

примут вид

$$\frac{1}{2}m^2\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) + 3T_{ik} - m\left(g_{ik}g^{pq}m_{;pq} - m_{;ik}\right) -$$

$$-2\left(m_{;i}m_{;k} - \frac{1}{4}m_{;l}m^{;l}g_{ik}\right) = 0, \tag{2.86}$$

тогда как для m из (2.77) следует уравнение

$$\frac{1}{m}\square m + \frac{1}{6}R = \frac{1}{m^2}T. \tag{2.87}$$

Уравнения (2.86) и (2.87) имеют большое сходство с уравнениями поля скалярно-тензорной теории Иордана—Дикке. Можно сказать, что в теории Хойла — Нарликара в «приближении однородной жидкости» мы имеем дело с скалярно-тензорной теорией с одним скалярным полем m, тогда как в общем случае — со скалярно-тензорной теорией со многими скалярными полями $m^{(b)}$. Это доказали Пирани и Дезер [15].

Достойна внимания форма уравнений движения (2.78). Массы покоя всех частиц не могут при помощи одного конформного преобразования одновременно стать постоянными. Вообще при помощи одного конформного преобразования можно достичь того, чтобы только одна частица двигалась по геодезической линии и имела постоянную массу покоя. Тогда все другие частицы не будут двигаться по геодезическим линиям, т. е. в теории Хойла — Нарликара слабый принцип эквивалентности выполняется не строго.

Чтобы рассмотреть в своей теории красное смещение, отклонение света и смещение перигелия, Хойл и Нарликар выбирают свободный конформный множитель так, что

$$\sum_{b} m^{(\ )} = m_0 = \text{const}. \tag{2.88}$$

Тогда геометрия в окрестности какой-либо частицы (в качестве таковой выбирается первая частица) определяется при условии, что в этой окрестности нет других частиц, но на большом от нее расстоянии находится много частиц, так что здесь можно применить «приближение однородной жидкости»:

$$2\sum_{1<b<c}\sum m^{(b)}\, m^{(c)} = \left[\sum_{b\neq 1} m^{(b)}\right]^2 \sum_{b\neq 1}\left[m^{(b)}\right]^2 \approx \left[\sum_{b\neq 1} m^{(b)}\right]^2.$$

Если обозначить μ функцию массы $m^{(1)}$, то при учете упомянутого условия получаются уравнения

$$\left(\frac{1}{2}m_0^2 - \mu^2\right)\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right) = -3T_{ik} + \mu\left(\mu_{;\,ik} - \right.$$

$$\left. - g^{mn}\mu_{;\,mn}\,g_{ik}\right) - 2\left(\mu_{;\,i}\,\mu_{;\,k} - \frac{1}{4}\mu^{;\,l}\,\mu_{;\,l}\,g_{ik}\right). \tag{2.89}$$

Хойл и Нарликар предполагают затем, что вне частицы в ее системе покоя геометрия является сферически-симметричной и статической, а μ зависит только от r. Для точечной массы они дают решение

$$ds^2 = \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2 dt^2 - \left(1 - \frac{p}{r}\right)^2 dr^2 - r^2\, d\Omega, \quad (2.90)$$

причем

$$\mu = m_0 p/r - p \quad (2.91)$$

и

$$2\pi m_0 p = 1. \quad (2.92)$$

Из (2.90) получаем (см. 1.20)

$$\gamma = -2, \quad \delta = 1, \quad \beta = 0, \quad \alpha = 2. \quad (2.93)$$

Здесь p следует интерпретировать как активную тяжелую массу частицы, тогда как $m_0 - \mu_r = 2m_0$ — инертная масса.

Если считать Солнце точечной массой и принять, что траектория планеты существенно не отклоняется от геодезической линии, что должно иметь место по оценкам Хойла и Нарликара, то для отклонения света получается значение Эйнштейна, тогда как смещение перигелия достигает 5/6 значения Эйнштейна, т. е. примерно на 17% меньше, что, по оценкам Дикке, находится в пределах возможного. По Хойлу и Нарликару, смещение перигелия, существенно зависящее от $(p/r)^2$, может быть приближено к смещению в теории Эйнштейна, если учитывать, что Солнце является системой, состоящей из $n \approx 10^{57}$ частиц.

Хойл и Нарликар показали, что за член $\sim r^{-1}$ в (2.90) отвечает тензор энергии—импульса, а за член $\sim r^2$ — функция μ. В таком случае следовало бы в качестве активной тяжелой массы для системы из n частиц принять np. Для системы, состоящей из n частиц, следует, кроме μ, в (2.89) добавить только одну частицу, так что, по Хойлу и Нарликару, в этом случае должно иметь место

$$g_{00} = 1 - \frac{2np}{r} - \frac{1}{n}\left(\frac{np}{r}\right)^2. \quad (2.94)$$

Очевидно, что теперь для $n \to \infty$ смещение перигелия достигает значения Эйнштейна.

Существенно, что и по этой теории смещение перигелия меньше, чем по теории Эйнштейна, так что, очевидно, теория войдет в противоречие с магнитогидродинамикой магнитных звезд [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Nordström G.** Ann. Phys., **42** (1913), 533.
   Laue M. Jahrb. Radioak. u. Elektronik, **14** (1917), 163.
2. **Einstein A., Focker A. D.** Ann. Phys., **44** (1914), 321.
3. **Treder H.-J.** Lorentz-Gruppe, Einstein-Gruppe und Raumstruktur. Jn: Einstein—Symposium 1965. Berlin, 1966, p. 57.
4. **Dicke R. H.** Remarks on the Observational Basis of General Relativity. In: **H. Y. Chiu and W. F. Hoffmann.** Gravitation and Relativity, New York and Amsterdam, 1964, p. 1.
5. **Jordan P.** Schwerkraft und Weltall. Braunschweig, 1952, 1955.
6. **Pauli W.** Ann. Phys. ,**18** (1933), 305.
7. **Fierz M.** Helv. Phys. Acta, **29** (1956), 128.
8. **Jordan P.** Z. Physik **157** (1959), 112.
9. **Brans C., Dicke R. H.** Phys. Rev., **124** (1961), 925.
10. **Steenbeck M., Krause F.** Astron. Nachrichten, **291** (1969), 49.
11. **Freundlich E. F.** Vistas in Astronomie (ed. A. Beer), Vol. I, Pergamon Press Ltd., Headington Hill Hall, Oxford, England. 1960.
12. **Hoyle F.** Proc. Roy. Soc., **A273** (1963), 1.
13. **Hoyle F., Narlikar J. V.** Proc. Roy. Soc., **A290** (1966), 143.
14. **Hoyle F., Narlikar J. V.** Proc. Roy. Soc., **A282** (1964), 190.
    Hoyle F., Narlikar J. V. Proc. Roy. Soc., **A294** (1966), 138.
15. **Deser S., Pirani F. A. E.** Proc. Roy. Soc., **A288** (1965), 133.
16. **Bergmann P. G.** Comments on the Scalar-Tensor Theory. Intern. J. Theor. Phys., **1** (1968), 25.
17. **Dicke R. H.** The Many Faces of Mach, in H. Y. Chiu and W. F. Hoffman, Gravitation and Relativity, New York and Amsterdam, 1964, p. 121.
18. **Dicke R. H.** The Significance for the Solar System of Time Varying Gravitation. Ebenda, p. 242.
19. **Ludvig G.** Fortschritte der projektiven Relativitätstheorie. Braunschweig, 1951.
20. **Hoyle F.** Galaxis, Nuclei and Quasars, New York, 1966.
21. **Jordan P.** Die Expansion der Erde. Braunschweig, 1967.

Глава 3

БИМЕТРИЧЕСКИЕ И ТЕТРАДНЫЕ ТЕОРИИ

§ 7. РАСШИРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

В рамках слабого принципа эквивалентности уже не нужно требовать, чтобы симметричный тензор g_{ik} описывал гравитационное поле *полностью*. Кроме введения дополнительного скалярного поля (см. гл. 2), можно вводить и другие поддающиеся геометрической интерпретации величины в качестве дополнительных к тензору g_{ik}. Рассмотрим здесь такие величины, которые имеют физический смысл даже в геометрии Минковского. Имеются в виду метрический тензор Минковского η_{ik} и объекты, обобщающие понятие системы отсчета в СТО.

Метрика Минковского η_{ik} в инерциальной системе отсчета (в связанной с ней координатной системе) имеет компоненты η_{AB}. Сам репер имеет при этом форму $\eta_i^A = \delta_i^A$, так что

$$\eta_{ik} = \eta_{AB}\ \delta_i^A\ \delta_k^B, \quad \eta_{AB} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Произвольно ускоренную систему отсчета можно получить локальным преобразованием инерциальной системы

$$h_i^A = \omega_B^A(x^k)\,\delta_i^B \quad (\text{см. гл. } 4). \tag{3.2}$$

Так как тензор Римана в пространстве Минковского равен нулю, то тетрады удовлетворяют условию

$$h_{i,\,k}^A = h_{k,\,i}^A\,. \tag{3.3}$$

Поэтому всегда существует возможность привести систему отсчета к виду $\bar{h}_i^A = \delta_i^A$ соответствующим голономным преобразованием координат $\bar{x}^i = \bar{x}^i\ (x^k)$. Координатная система $\bar{x}^i$ соответствует заданной посредством δ_i^A инерциальной системе отсчета и потому может быть отождествлена с ней. В этом случае каждое лоренц-преобразование тетрад оказывается связанным с контравариантным преобразованием координат. Теория систем отсчета в СТО будет исчерпывающей, если известен способ перехода от инерциальной системы отсчета к произвольно ускоренной. Этот переход можно найти с помощью голономных преобразований координат. Векторы $h_i^A = \delta_i^A$ полностью определяют абсолютный параллелизм, идентичный параллельному переносу евклидова пространства.

Если в пространстве Минковского метрику можно получить из η_{AB} голономным преобразованием $h_i^A\left(h_{i,\,k}^A = h_{k,\,i}^A\right)$, то при наличии гравитационного поля возможны только неголономные преобразования h_i^A, причем тетрады h_i^A определят неголономный объект

$$\underset{\smile}{\Delta}{}_{mn}^{r} = \frac{1}{2}\, h_A^r \left(h_{m,\,n}^A - h_{n,\,m}^A\right) \tag{3.4}$$

и абсолютный параллелизм с аффинной связностью

$$\Delta^r_{mn} = h^{Ar}\, h_{Am,\,n}\,. \tag{3.5}$$

В рассматриваемых ниже теориях Розена [1], Колера [2], Меллера [3], Пеллегрини и Плебаньского [4], а также в исчерпывающе изложенной в части Б теории Тредера [5] происходит постепенное ослабление сильного принципа эквивалентности. Во всех этих теориях либо используется дополнительная к g_{ik} метрика Минковского η_{ik} в качестве опорной и асимптотической при $r \to \infty$, либо вводятся в рассмотрение тетрады h^A_i, дающие способ перехода от плоского пространства к искривленному, т. е. от инерциальной системы отсчета к некоторой выделенной системе отсчета в искривленном пространстве (см. гл. 4).

В специальной теории относительности инерциальная система отсчета, вместе с определенной в ней метрикой η_{AB}, дана. В общей теории относительности инерциальные тетрады δ^A_i обобщаются до произвольных тетрад h^A_i, так что метрика искривленного пространства выражается через них следующим образом:

$$g_{ik} = h^A_i\, h^B_k\, \eta_{AB}\,.$$

Но при этом шесть тетрадных компонент выбираются произвольно — они соответствуют локальным преобразованиям Лоренца. В тетрадных теориях, близких по духу исследованиям Эйнштейна по геометрии с абсолютным параллелизмом [6], будут зафиксированы все 16 компонент (см. теории Меллера, Плебаньского и Пеллегрини).

В теории Розена — Колера, в дополнение к набору геометрических объектов теории Эйнштейна, вводится еще 10 симметричных комбинаций тетрад СТО

$$\eta_{ik} = \eta_{AB}\, \delta^A_i\, \delta^B_k, \tag{3.6}$$

т. е. в теорию входят общие тетрады и инерциальные тетрады СТО одновременно. Естественно, что при этом инерциальные тетрады δ^A_i считаются известными, поскольку они определяются как векторы Киллинга для η_{ik}.

В теории Тредера используются инерциальные тетрады СТО δ^A_i и тетрады теории Меллера, так что в ней определены матрицы перехода от δ^A_i к h^A_i, симметричные комбинации δ^A_i, приводящие к плоской метрике η_{ik}, а также h^A_i, приводящие к метрике риманова пространства g_{ik}. Другими словами, теория Тредера отличается от теории Розена—Колера лишь способом обобщения ОТО, близким к способам Меллера, Пеллегрини и Плебаньского. В теории Тредера принцип эквивалентности ослабляется в наибольшей степени, в то время как теория Розена — Колера занимает в этом смысле промежуточное место между теориями Меллера и Эйнштейна. Поскольку в теории Тредера представление о физической природе гравитационного поля основано на крайне слабом принципе эквивалентности, существенно изменяющем физическое содержание теории гравитации, ее следует рассмотреть особо (часть Б).

В каждом из рассматриваемых вариантов обобщения ОТО имеет место обогащение геометрической структуры V_4. Все они отличаются от теории Эйнштейна наличием системы отсчета, подобранной соответствующим образом. В результате оказывается возможным разумное определение энергии и импульса. Во всех вариантах используются особые векторные поля, которые, однако, не имеют ничего общего с векторными полями, определенными с помощью групп движений риманова пространства. Это дает возможность непосредственно вводить в теории спинорные поля (см. теории Меллера и Тредера).

§ 8. ТЕОРИЯ РОЗЕНА — КОЛЕРА

В теории Розена—Колера в дополнение к g_{ik} вводится в рассмотрение метрика η_{ik}. Это значит, что, кроме риманова пространства с g_{ik}, существует еще некоторое плоское пространство η_{ik}, и точки с одинаковыми координатами в обоих пространствах отображаются друг на друга. Это эквивалентно заданию некоторого многообразия V_4 с двумя сопряженными тензорными полями g_{ik} и η_{ik}, причем многообразие, соответствующее плоскому пространству, гомеоморфно многообразию искривленного пространства. Физически это значит, что в теории существует возможность непрерывно сравнивать опорное плоское пространство с пространством, адекватным реальной ситуации при наличии гравитационного поля.

Для двух метрик можно записать линейные элементы

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k, \quad d\sigma^2 = \eta_{ik}\, dx^i\, dx^k. \tag{3.7}$$

Затем определяются ковариантные производные от метрик и накладывается дополнительное условие

$$g_{ik;\, l} = 0 \quad \text{или} \quad \eta_{ik \perp l} = 0. \tag{3.8}$$

Разность между коэффициентами аффинной связности риманова пространства $\left\{ {l \atop mn} \right\}$ и коэффициентами $\Gamma^l_{0\,mn}$ пространства с метрикой η_{ik} оказывается тензором

$$D^l_{mn} = \left\{ {l \atop mn} \right\} - \Gamma^l_{0\,mn}. \qquad (3.9)$$

В координатной системе, для которой $\Gamma^l_{0\,mn} = 0$ (будем называть ее нормальной), $\left\{ {l \atop mn} \right\}$ и D^l_{mn} совпадают, и ковариантная производная от η_{ik} сводится к обычной частной производной по координатам. Отсюда для D^l_{mn} получаем явное выражение в произвольной системе координат

$$D^l_{mn} = \frac{1}{2} g^{al} \left(g_{ma\perp n} + g_{na\perp m} - g_{mn\perp a} \right), \qquad (3.10)$$

так как в нормальной системе координат выражения (3.9) и (3.10) совпадают.

Очевидно, что с помощью этих двух ковариантных производных легко теперь свести к тензорам все геометрические объекты, которые в общей теории относительности были лишь аффинными. Для этого достаточно заменить в них обычные производные производными относительно η_{ik}.

В нормальных координатах полученные тензоры совпадают с аффинными тензорами, если выполнить подстановку

$$\sqrt{-g} \to \sqrt{g/\gamma} \qquad (g = \det g_{ik}, \quad \gamma = \det \eta_{ik}). \qquad (3.11)$$

Тензор Риччи теперь можно получить с помощью D^l_{mn} и η_{ik} только чисто тензорными операциями. Так как пространство с метрикой η_{ik} плоское, то можно положить $\Gamma^l_{0\,mn} = 0$ глобально. В этих координатах, с учетом (3.9), получим

$$D^l_{mn\perp s} = D^l_{mn,\,s} = \left\{ {l \atop mn} \right\}_{,\,s}, \qquad (3.12)$$

а для тензора Риччи

$$R_{mn} = -D^a_{mn\perp a} + D^a_{am\perp n} - D^a_{ab} D^b_{mn} + D^a_{bm} D^b_{an}. \qquad (3.13)$$

Так как в определение (3.13) входят только тензорные величины, то оно будет справедливо в любой системе координат.

Уравнение геодезической

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop rs} \right\} \frac{dx^r}{ds} \cdot \frac{dx^s}{ds} = 0 \qquad (3.14)$$

с учетом (3.9) переходит в уравнение

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{0\,rs} \frac{dx^r}{ds} \cdot \frac{dx^s}{ds} = -D^i_{rs} \frac{dx^r}{ds} \frac{dx^s}{ds}.$$

Так как в нормальных координатах $\Gamma^i_{0\,rs} = 0$, т. е. равны нулю силы инерции, то правая часть в уравнении геодезической

$$-D^i_{rs} \frac{dx^r}{ds} \cdot \frac{dx^s}{ds}$$

описывает гравитационные силы. Это значит, что в теории Розена—Колера полю сил гравитации сопоставляется тензор, причем тензор g_{ik} является тензорным потенциалом, а η_{ik} — тензорный потенциал мнимых сил. Геодезические координаты, в которых $\left\{ {l \atop mn} \right\} = 0$ в некоторой точке, получаем, когда силы инерции

$$\Gamma^i_{0\,rs} \frac{dx^r}{ds} \cdot \frac{dx^s}{ds}$$

равны силам гравитационным

$$-D^i_{rs} \frac{dx^r}{ds} \cdot \frac{dx^s}{ds}.$$

Если в качестве уравнений гравитационного поля принять уравнения Эйнштейна, то они будут иметь вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik}, \qquad (3.15)$$

где тензор Риччи определяется по формуле (3.13), а гравитационным силам отвечает введенный выше тензор. Существенным моментом в формулировке уравнений поля является разделение инерционных и гравитационных сил (3.9).

Так как уравнения Эйнштейна подчиняются условию

$$\left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right)_{;\,k} = 0, \qquad (3.16)$$

то в собственно теории Эйнштейна можно ввести четыре дополнительных координатных условия, например условия де Дондера

$$(\sqrt{-g}\, g^{ik})_{,k} = 0. \tag{3.17}$$

В теории Розена — Колера имеется асимптотическое условие

$$\lim_{r\to\infty} g_{ik} = \eta_{ik}. \tag{3.18}$$

Однако его недостаточно для определения связи g_{ik} и η_{ik}, так как всегда можно четырьмя координатными преобразованиями, не нарушая (3.18), перейти от заданного η_{ik} к произвольной связи η_{ik} и g_{ik}.

В качестве примера рассмотрим сферически-симметричную метрику

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= -A^2 d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + V^2 (dx^0)^2;\\ d\sigma^2 &= -d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + (dx^0)^2,\\ &\lim_{\bar{r}\to\infty} A = 1, \quad \lim_{r\to\infty} V(\bar{r}) \to 1. \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

Плоскую метрику $d\sigma^2$ преобразованием $r = \rho\,(\bar{r})$ можно привести к другому виду:

$$d\sigma^2 = -\left(\frac{\partial\rho}{\partial\bar{r}}\right)^2 d\bar{r}^2 - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + (dx^0)^2, \tag{3.20}$$

однако асимптотическое условие (3.18) все еще выполняется, если положить

$$\lim_{\bar{r}\to\infty} A = \lim_{\bar{r}\to\infty} \partial\rho/\partial\bar{r}, \quad \lim_{\bar{r}\to\infty} \rho = \bar{r}. \tag{3.21}$$

Отсюда следует, что для установления однозначной связи η_{ik} и g_{ik} необходимы еще четыре координатных условия. Только в этом случае g_{ik} и η_{ik} фиксированы. Выбор дополнительных координатных условий кажется несколько искусственным и неоднозначным. Однако можно воспользоваться принципом соответствия с проверенной теорией слабого гравитационного поля по аналогии с условием де Дондера в теории Эйнштейна, записанным в ковариантном виде

$$(\sqrt{g/\gamma}\, g^{ik})_{\perp k} = 0. \tag{3.22}$$

Плохо только, что условие (3.22) не вытекает с необходимостью из самой теории. Кроме того, недостатком теории можно считать сам факт введения, кроме g_{ik}, дополнительного тензора η_{ik}, который не входит в уравнения поля, а связан с ними лишь через дополнительные условия.

Тензор η_{ik} не входит также и в уравнения движения. Поэтому установление однозначной связи g_{ik} и η_{ik} особенно важно, иначе может возникнуть ситуация, когда различные гравитационные поля приводят к одинаковой картине движения частиц в этих полях. В теории Розена — Колера два решения с одинаковыми g_{ik}, но разными η_{ik}, приводили бы в этом случае к различному разложению в уравнении (3.14) действующих на частицу сил, а именно менялось бы соотношение между силами инерции и гравитационными.

Так как уравнения движения частиц во внешнем гравитационном поле следуют уже из слабого принципа эквивалентности, то необходимость фиксации связи g_{ik} и дополнительных полевых величин должна учитываться в любом варианте теории гравитации.

Выведем теперь уравнения гравитационного поля Розена — Колера из принципа действия. В отличие от теории Эйнштейна в теории Розена—Колера можно образовать скалярную величину, билинейную по D^m_{rs} и содержащую лишь первые производные метрического тензора. Для этого достаточно соответствующий аффинный скаляр теории Эйнштейна

$$\widetilde{\mathrm{L}} = \sqrt{-g}\, g^{mn}\left[\left\{ {r \atop mn} \right\}\left\{ {s \atop rs} \right\} - \left\{ {r \atop ms} \right\}\left\{ {s \atop nr} \right\}\right] \qquad (3.23)$$

понимать как плотность в нормальных координатах с $\Gamma^r_{0\,mn} = 0$. С учетом (3.9) из вариации выражения

$$\int \sqrt{-g}\, g^{ik}\left(D^r_{ik} D^s_{rs} - D^r_{is} D^s_{kr}\right) d^4x \qquad (3.24)$$

получаем уравнения Эйнштейна, так как (3.23) справедливо в нормальных координатах.

Дополнительные условия (3.22) не вытекают из этого вариационного принципа. При нашем выборе координат вариация функции Лагранжа по η_{ik} не приводит ни к каким новым уравнениям, а дает лишь тождество Риччи (3.16).

Чтобы в рамках биметрической теории получить замкнутую систему уравнений поля, нужно сконструировать полный лагранжиан, в который входили бы g_{ik} и η_{ik} и их первые производные. Но в рамках теории Розена — Колера такой лагранжиан определяется неоднозначно. Если ограничиться функциями Лагранжа, однородно квадратичными в нормальных координатах по скалярным плотностям g^{ik}, содержащими первые производные от скалярных плотностей и приводящими к симметричному тензору энергии — импульса, то можно показать, что существуют лишь две такие функции

$$\mathbf{L}_1 = g_{mn} g_{rs} g^{lt} \mathbf{g}^{mr}_{,\,l} \mathbf{g}^{ns}_{,\,t} \left(\sqrt{-g}\right)^{-1};$$

$$\mathbf{L}_2 = g_{mn} g_{rs} g^{lt} \mathbf{g}^{rs}_{,\,l} \mathbf{g}^{rs}_{,\,t} \left(\sqrt{-g}\right)^{-1},$$

так что

$$\mathbf{L} = \lambda_1 \mathbf{L}_1 + \lambda_2 \mathbf{L}_2, \qquad (3.25)$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные константы. Кроме них существуют еще три аффинные плотности, однако они не приводят к симметричному тензору энергии — импульса гравитационного поля. Варьируя (3.25), получаем полную систему уравнений Колера [2] в нормальных координатах:

$$\left(\overset{s}{\mathbf{L}}_{rk} \mathbf{g}^{ri} \Big| - \frac{1}{2} \delta^{i}_{k} \overset{s}{\mathbf{L}}_{rm} \mathbf{g}^{rm}\right)_{,\,s} = \varkappa \left(\mathbf{T}^{i}_{k} + \mathbf{t}^{i}_{k}\right); \qquad (3.26)$$

$$\left(\overset{r}{\mathbf{L}}_{mk} \mathbf{g}^{mi} - \frac{1}{2} \overset{r}{\mathbf{L}}_{nm} \mathbf{g}^{nm} \delta^{i}_{k}\right)_{,\,ir} = 0, \qquad (3.27)$$

причем $\mathbf{T}^{i}_{k} = \sqrt{-g}\, T^{i}_{k}$ есть тензорная плотность энергии— импульса материи,

$$\mathbf{t}^{i}_{k} = -\frac{1}{\varkappa} \left(\mathbf{L} \delta^{i}_{k} + \overset{i}{\mathbf{L}}_{ms} \mathbf{g}^{ms}_{,\,k}\right) \qquad (3.28)$$

есть тензорная плотность энергии — импульса гравитационного поля, и справедливы равенства

$$\overset{i}{\mathbf{L}}_{mn} = \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{g}^{mn}_{,\,i}} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{g}^{nm}_{,\,i}}\right), \quad \mathbf{g}^{mn} = \sqrt{-g}\, g^{mn}. \qquad (3.29)$$

Уравнение (3.26) есть результат вариации действия по g_{ik}, а уравнение (3.27) — по η_{ik}. Из (3.26) непосредственно следует условие

$$\left(\mathbf{T}^{i}_{k} + \mathbf{t}^{i}_{k}\right)_{,\,i} = 0, \qquad (3.30)$$

являющееся законом сохранения энергии — импульса в нормальных координатах.

Из уравнений (3.26) и (3.27) вытекает справедливость слабого принципа эквивалентности. Кроме того, из (3.26) и (3.27) после некоторых преобразований можно получить

$$T^{ik}_{;\,k} = 0, \tag{3.31}$$

а это значит, что уравнения поля для g_{ik} и η_{ik} удовлетворяют условию равенства нулю дивергенции тензора материи. И наоборот, если дивергенция тензора материи равна нулю, то уравнения для η_{ik} удовлетворяются тождественно, т. е. они выбраны в теории Колера так, чтобы произвол выбора η_{ik} при фиксированном g_{ik} соответствовал произволу определения g_{ik} из уравнения (3.26). А этот произвол, в свою очередь, ограничивается условием равенства нулю дивергенции тензора материи. Уравнения для η_{ik} можно рассматривать так же, как дополнительные условия на g_{ik}. Дополнительные условия Колера на η_{ik} имеют глубокий физический смысл — они гарантируют справедливость слабого принципа эквивалентности. В теории Колера нельзя произвольно выбирать g_{ik} и η_{ik} и вычислять затем тензор материи. Нужно всегда учитывать дополнительные условия (3.27) .

Для величин $\mathbf{L}^{m}_{rs}$ из (3.27) можно получить выражение

$$\mathbf{L}^{r}_{mn} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\left(\lambda_1 g_{ms} g_{nk} g^{ri} \mathbf{g}^{sk}_{,\,i} + \lambda_2 g_{mn} g^{ri}\, \mathbf{g}^{sk}_{,\,i}\, g_{sk}\right), \tag{3.32}$$

если $\mathbf{L}$ выбрать в форме (3.25).

В случае слабого поля, с учетом (3.26) и (3.28), получаем уравнения поля

$$(\mathbf{L}^{r}_{mn})_{,\,r} = \varkappa\left(T_{mn} - \frac{1}{2} T g_{mn}\right), \tag{3.33}$$

если для слабого поля справедливы условия

$$g_{mn} = \tilde{\eta}_{mn} + \gamma_{mn}, \quad \sqrt{-g} = 1 + \gamma^{n}_{n}/2, \quad \gamma_{mn} \ll 1 \tag{3.34}$$

и если отбросить в производных от g_{mn} члены второго порядка. Здесь $\tilde{\eta}_{mn}$ — тензор Минковского. Принимая это во внимание, сводим уравнения поля (3.33) к виду

$$\lambda_1 \Box \gamma^{n}_{m} + \lambda_2 \delta^{n}_{m} \Box\, \gamma^{r}_{r} = -2\varkappa T^{m}_{m}, \tag{3.35}$$

где

$$\lambda_1 \gamma_m^n + \lambda_2 \delta_m^n \gamma_r^r \equiv \psi_m^n,$$

$$\Box \psi_m^n = -2\varkappa T_m^n. \qquad (3.36)$$

Если учесть (3.39), то в случае статического распределения однородной материи (для которой дивергенция тензора материи равна нулю) получим метрику

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2-\lambda_1}{\lambda_1} \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \\ + \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)(dx^0)^2, \qquad (3.37)$$

удовлетворяющую уравнениям (3.27). Если $\lambda_1 = 1$, то (3.37) совпадает с соответствующим результатом теории Эйнштейна*. Требование положительной определенности $\mathbf{t}_0^0$ дает ограничение на выбор константы λ_1:

$$3/4 \leqq \lambda_1 < 3/2, \qquad 3/2 < \lambda_1 \leqq 2. \qquad (3.38)$$

Для того чтобы в (3.37) коэффициент при $(dx^0)^2$ отвечал общепринятому для определения красного смещения приближению, между λ_1 и λ_2 должно существовать соотношение

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1(\lambda_1 - 2)}{2(3 - 2\lambda_1)}, \qquad (3.39)$$

откуда следует ограничение на выбор λ_1:

$$\lambda_1 \neq 3/2. \qquad (3.40)$$

Теперь уже можно выразить отклонение света и смещение перигелия через λ_1. Для отклонения света

$$\Delta\psi = \frac{1}{\lambda_1} \Delta\psi_{\text{Эйнштейн}}, \qquad (3.41)$$

причем при $\gamma_1 = 1$ получаем эйнштейновское значение. Для смещения перигелия нужно вычислить g_{00} во втором приближении. Конкретные вычисления по (3.26) дают

* Φ — ньютоновский потенциал.

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \cdot \frac{\delta\Phi^2}{c^4}\right); \\ -\delta &= \frac{20\lambda_1^3 - 83\lambda_1^2 + 101\lambda_1 - 36}{\lambda_1^2(4\lambda_1 - 5)}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.42)$$

откуда, учитывая также (1.20) и (1.21), получаем формулу для красного смещения:

$$\Delta\varphi = m\pi(u_1 + u_2)\left[\frac{4}{\lambda_1} - \frac{\delta}{2}\right]. \qquad (3.43)$$

Если $\lambda_1 = 1$, то из (3.43) снова следует эйнштейновское значение смещения.

Как видим, конкретное смещение перигелия в сильной степени зависит от λ_1. При $\lambda_1 < 1$ $\Delta\varphi$ всегда положителен, но даже при дальнейшем уменьшении λ_1 смещение все еще превышает эйнштейновское значение. Например, при $\lambda_1 = 0{,}9$ соответствующие величины имеют следующие конкретные значения: $\Delta\psi = 1{,}90''$, $\Delta\varphi = 1{,}15\ \Delta\varphi_{\text{Эйнштейн}}$.

В рассматриваемой теории уже в лагранжиане полагают $\lambda_1 = 1$, что приводит, во-первых, к наиболее простому математическому оформлению теории и, во-вторых, к полному совпадению теории с теорией Эйнштейна в низших порядках приближения слабого поля. Расхождения с теорией Эйнштейна (даже при $\lambda = 1$) начинаются уже в высших порядках приближения слабого поля и, разумеется, в случае сильного поля.

В теории Розена — Колера можно сформулировать законы сохранения энергии, импульса, момента импульса и закон движения центра тяжести системы. Уравнение (3.30) справедливо только в нормальных координатах. В общем же случае следует написать

$$(\mathrm{T}_k^i + \mathrm{t}_k^i)_{\perp i} = 0. \qquad (3.44)$$

В теории Эйнштейна величина $(\mathrm{T}_k^i + \mathrm{t}_k^i)$ является псевдотензором, из которого можно получить лишь интегральные законы сохранения, связанные с определенным выбором системы координат. В теории Розена — Колера уравнение (3.44) чисто тензорное. Так как пространство η_{ik} плоское, то существует 10 векторов Киллинга, удовлетворяющих уравнениям

$$\xi^A_{m\perp n} + \xi^A_{n\perp m} = 0, \ A = 1, 2, \dots, 10. \qquad (3.45)$$

Поэтому из (3.44) обычным путем можно найти 10 строгих законов сохранения для величин

$$P^A = \int\limits_{\Sigma} (\mathbf{T}_k^i + \mathbf{t}_k^i)\ \xi_i^A\, d\Sigma^k. \tag{3.46}$$

Гравитационная энергия локализуема, так как тензорная плотность энергии — импульса $\mathbf{t}_k^i$ есть истинная тензорная плотность. Но можно ли рассматривать величины P^A как некоторое обобщение энергии, импульса, момента импульса и центра тяжести системы СТО — специальной теории относительности— не совсем ясно, поскольку векторы Киллинга ξ_m^A генерируют группу движений в пространстве с метрикой η_{ik}, а не в римановом пространстве с метрикой g_{ik}, в котором как раз и происходит, в соответствии с принципом эквивалентности, истинное движение материальной системы. Отсюда следует также, что нет такой материальной частицы, движение которой можно было бы использовать для измерения метрики η_{ik}.

§ 9. ТЕТРАДНЫЕ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Если в теорию Эйнштейна ввести тетрады, то из уравнений гравитационного поля можно определить лишь метрику

$$g_{ik} = h_i^A h_k^B \eta_{AB}\ ,\ A, B = 1, 2, 3, 4. \tag{3.47}$$

Тетрады же остаются произвольными, так как в (3.47) они могут быть определены только с точностью до произвольных локальных лоренцевых вращений: теория инвариантна относительно этой группы преобразований. Тетрадная переформулировка общей теории относительности Эйнштейна не дает новой физической информации. Эйнштейн уже в 1928 г. [6] пришел к мысли ввести в теорию в качестве существенных физических величин, кроме самих тетрад, и 6 их комбинаций. Он имел в виду построить единую теорию гравитации и электромагнетизма, поэтому 6 дополнительных величин он пытался ассоциировать с полевыми величинами теории Максвелла и искал для них такие уравнения, которые в приближении слабого поля совпадали бы с уравнениями Максвелла.

Полученная таким образом теория все еще оставалась бы инвариантной относительно глобальных лоренцевых преобразований тетрад. Геометрическая структура риманова пространства обогащается в этом случае за счет абсолютного параллелизма, позволяющего сравнивать расстояния и направления в удаленных друг от друга точках.

Две физические величины (например, два вектора) равны, если равны их компоненты, измеренные относительно тетрад h_i^A*:

$$A^A(P_2) = h_i^A A^i_{|P_2} = A^A(P_1) = h_i^A A^i_{|P_1} \tag{3.48}$$

(знак « | » означает ковариантную производную по Δr_{mn}). В этой теории можно осуществить и конечный параллельный перенос векторов; для этого достаточно, чтобы измеренные относительно тетрад компоненты вектора в результате переноса не изменялись. Из условия параллельного переноса вытекает требование на коэффициенты аффинной св[я]зности Δr_{mn}

$$\left.\begin{aligned} dA^A = A^A_{,n}\, dx^n = h_i^A A^i_{|n} dx^n = h_i^A (A^i_{,n} + \Delta^i_{rn} A^r)\, dx^n = 0,\\ \Delta^r_{mn} = h^{Ar} h_{Am,\, n}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.49}$$

Характерно, что абсолютно параллельная производная тетрады

$$h^A_{m|n} = h^A_{m,\, n} - \Delta^r{}_{mn} h^A_r \tag{3.50}$$

тождественно исчезает вследствие (3.49). Это значит, что тензор Римана, определенный по (3.49), тождественно исчезает. В то же время тензор кручения

$$\Delta_{r\underset{\smile}{mn}} \equiv \frac{1}{2} h^A_r (h_{Am,\, n} - h_{An,\, m}) \tag{3.51}$$

не равен нулю, откуда следует несимметричность Δ^r_{mn}. Тензор кручения появляется при сложении векторов по правилу параллелограмма после параллельного переноса, выполненного различным образом по сторонам бесконечно малого параллелограмма, если начальная и конечная точки переноса лежат на его диагонали. Тензор кручения равен

$$-2A_{m|s}\Delta^s_{\underset{\smile}{mn}} = A_{m|nr} - A_{m|rn}\,. \tag{3.52}$$

---

* Исчерпывающие рассуждения по этому поводу см. в § 11, 12 следующей главы.

Так как кроме аффинной связности Δ^r_{mn} существует еще афинная связность Кристоффеля $\{^{\,r}_{mn}\}$, то можно ввести так называемый тензор вращения Риччи

$$\overset{m}{\gamma}_{nr} = \overset{m}{\Delta}_{nr} - \left\{ \begin{matrix} m \\ nr \end{matrix} \right\}, \tag{3.53}$$

несимметричная часть которого и есть тензор кручения.

Эйнштейн и Майер [7] показали, что в первоначальном варианте единой теории гравитации и электромагнетизма Эйнштейна поле статического сферически-симметричного источника не совпадает с полем Шварцшильда. В дальнейшем была предложена новая система уравнений [9], которую можно получить из лагранжиана

$$\mathbf{H} = \sqrt{-g}\,(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 + \alpha_3 H_3). \tag{3.54}$$

Инварианты лагранжиана (3.54)

$$H_1 = R, \quad H_2 = \Delta^{k}_{\underset{\vee}{ik}} \overset{ir}{\underset{r}{\Delta}}, \qquad H_3 = S^{mn}_{i} S^{i}_{mn},$$

где $S_{mni} = \Delta_{\underset{\vee}{i}mn} + \Delta_{m\underset{\vee}{n}i} + \Delta_{ni\underset{\vee}{m}}$ и R — скалярная кривизна, были исследованы еще Вейценбеком [8].

К риманову пространству с абсолютным параллелизмом обращался и Меллер [3] в связи с проблемой сохранения энергии — импульса в общей теории относительности. Исходным пунктом рассуждений Меллера явилось то обстоятельство, что в рамках теории Эйнштейна невозможно в принципе сконструировать такой комплекс энергии— импульса, который приводил бы к интегрально сохраняющемуся 4-вектору энергии — импульса с правильными трансформационными свойствами при произвольных координатных преобразованиях. В качестве исходных уравнений поля Меллер использовал уравнения Эйнштейна вместе с 6 дополнительными условиями. Эти уравнения можно получить из вариационного принципа, если в качестве функции Лагранжа взять

$$\overline{\mathbf{L}} = \sqrt{-g}\,R = \mathbf{L}_0 + \mathbf{Z}, \tag{3.55}$$

где $\mathbf{Z}$ имеет вид дивергенции векторной плотности, а $\mathbf{L}_0$ определяется выражением

$$\mathbf{L}_0 = \sqrt{-g}\,\left(h^{s}_{A;\,r}\, h^{Ar}_{;\,s} - h^{r}_{A;\,r}\, h^{As}_{;\,s} \right). \tag{3.56}$$

Дифференциальный закон сохранения

$$T^{mn}_{;\,n} = 0 \tag{3.57}$$

с учетом уравнений Эйнштейна

$$E^{mn} \equiv R^{mn} - \frac{1}{2} g^{mn} R = -\varkappa T^{mn} \tag{3.58}$$

и вариационной производной от функции Лагранжа $\mathbf{L}_0$ можно переписать в виде

$$\left(\sqrt{-g}\, T^{m}_{m}\right)_{,\,n} = \frac{1}{2\varkappa} h^{An}_{\ \ ,\,m} \frac{\delta \mathbf{L}_0}{\delta h^{An}}. \tag{3.59}$$

Отсюда следует, что и для аффинной тензорной плотности

$$\Theta^{n}_{m} = \sqrt{-g}\left(T^{n}_{m} + t^{n}_{m}\right), \tag{3.60}$$

где

$$\sqrt{-g}\; t^{n}_{m} = \frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{\partial \mathbf{L}_0}{\partial h^{Ar}_{\ \ ,\,n}} h^{Ar}_{\ \ ,\,m} - \delta^{n}_{m} \mathbf{L}_0\right); \tag{3.61}$$

также имеет место дифференциальный закон сохранения

$$\Theta^{n}_{m,\,n} = 0. \tag{3.62}$$

Аффинную тензорную плотность (3.60) можно получить из функции Лагранжа $\mathbf{L}_0$ из суперпотенциала

$$\mathbf{U}^{nr}_{m} = -\mathbf{U}^{rn}_{m} = \frac{\sqrt{-g}}{\varkappa}\left[h^{n}_{A} h^{Ar}_{\ \ ;\,m} + \left(\delta^{n}_{m} h^{Ar} - \delta^{r}_{m} h^{An}\right) h^{s}_{A;\,s}\right]. \tag{3.63}$$

Так как суперпотенциал является истинной тензорной плотностью третьего ранга, то при чисто пространственных координатных преобразованиях

$$\bar{x}^{i} = \bar{x}^{i}\left(x^{k}\right), \quad \bar{x}^{0} = x^{0} \tag{3.64}$$

он преобразуется как антисимметричная тензорная плотность второго ранга. Тогда $\Theta^{k}_{0} = \mathbf{U}^{kr}_{0,\,r}$ преобразуется как истинная векторная плотность, и энергия в конечном объеме V_3

$$P_0 = \int\limits_{V_3} \Theta^{0}_{0}\, dx^1 dx^2 dx^3 \tag{3.65}$$

оказывается не зависящей от выбора пространственных координат, т. е. энергия локализуема.

В случае замкнутой системы, когда метрика на бесконечности удовлетворяет обычным граничным условиям, величины

$$P_i = \int\limits_{V_3} \overset{0}{\Theta}_i dx^1 dx^2 dx^3 \qquad (3.66)$$

в асимптотически декартовых координатах от времени не зависят и преобразуются при линейных координатных преобразованиях как ковариантные компоненты свободного вектора. Суперпотенциал (3.63) и аффинная тензорная плотность (3.60) в случае статического сферически-симметричного поля в изотропных координатах совпадают с суперпотенциалом Эйнштейна и псевдотензором энергии — импульса Эйнштейна, однако это не имеет места в случае произвольной системы координат.

Комплекс энергии — импульса (3.60) все же не является установленным однозначно, поскольку не все компоненты тетрад однозначно определены. Допустимы еще такие локальные лоренцевы преобразования тетрад, которые на бесконечности достаточно сильно отличаются от постоянных значений и изменяют (3.60). Тетрады однозначно определяются лишь при помощи дополнительной системы шести полевых уравнений

$$\xi^r_{ik} \equiv \gamma^r_{ik;\, r} + \gamma_{ikr} \gamma^{sr}_s = 0 \qquad (3.67)$$

и граничных условий, сформулированных в асимптотически декартовых координатах

$$h^m_A(x^i) \to \delta^m_A \text{ при } r \to \infty,$$

$$\lim_{r\to\infty} \left[\frac{\partial \{ r (h^m_A - \delta^m_A) \}}{\partial r} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \{ r (h^m_A - \delta^m_A) \} \right] = 0 \qquad (3.68)$$

для всех $t_0 = t + r/c$.

Теперь можно попытаться связать шесть уравнений (3.67) с электромагнитным полем. Меллер предположил для тензора электромагнитного поля

$$F_{mn} = \mathrm{const}\, \xi_{mn}. \qquad (3.69)$$

Такая интерпретация дополнительных полевых уравнений для тетрад соответствует первоначальной идее Эйнштейна.

Однако более последовательной является все же та точка зрения, когда тетрады отсчета и связанные с ними спинорные поля считают принципиально необходимыми геометрическими объектами для полного описания, совместно с метрикой, гравитационного поля. Эта возможность была исследована, например, Пеллегрини и Плебаньским [4]. Они опирались на исследования Вейценбека [8] по возможным инвариантам поля реперов и рассмотрели наиболее общую функцию Лагранжа, произвольно зависящую от h^A_m, билинейную по первым производным от h^A_m, являющуюся скаляром и скалярной плотностью относительно координатных преобразований и лоренцевых преобразований с постоянными коэффициентами соответственно. Из функции Лагранжа можно получить затем семь псевдоскалярных инвариантов, которые, воспользовавшись символом Леви—Чивита ε^{iklm} и тензором кручения $\Delta^r_{\underset{\smile}{mn}}$, можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned}
I_1 &= \sqrt{-g}\,\Delta^{s}_{\underset{\vee}{rs}}\Delta^{\overset{rt}{\vee}}_{t}; &\quad \hat{I}_1 &= \varepsilon^{krnm}g^{il}\,\Delta_{r\underset{\vee}{ik}}\Delta_{m\underset{\vee}{ln}};\\
I_2 &= \sqrt{-g}\,\Delta_{r\underset{\vee}{ik}}\Delta^{i\overset{rk}{\vee}}; &\quad \hat{I}_2 &= \varepsilon^{iknm}g^{rl}\,\Delta_{r\underset{\vee}{ik}}\Delta_{m\underset{\vee}{ln}};\\
I_3 &= \sqrt{-g}\,\Delta_{r\underset{\vee}{ik}}\Delta^{r\overset{ik}{\vee}}; &\quad \hat{I}_3 &= \varepsilon^{ilnm}g^{kr}\,\Delta_{r\underset{\vee}{ik}}\Delta_{m\underset{\vee}{ln}};\\
I_4 &= \varepsilon^{iklm}g^{rn}\,\Delta_{r\underset{\vee}{ik}}\Delta_{n\underset{\vee}{lm}}.
\end{aligned}\right\}\qquad (3.70)$$

Величины I_1, I_2, I_3 являются псевдоскалярами и относительно глобальных преобразований Лоренца. Между инвариантами $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$, $\hat{I}_3$, $\hat{I}_4$ имеют место соотношения

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_3 - \frac{1}{2}\hat{I}_4, \quad \hat{I}_1 = -\hat{I}_3 + \frac{1}{2}\hat{I}_4. \qquad (3.71)$$

Кроме того, $\hat{I}_4$ можно записать в дивергентной форме; следовательно, $\hat{I}_4$ можно исключить из вариационного принципа. Тогда общая функция Лагранжа может быть записана в виде

$$\mathrm{L}^{(a)} = \sum_{i=1}^{3} b^i I_i + b_4\hat{I}_3, \qquad (3.72)$$

т. е. определяется с точностью до четырех произвольных постоянных.

Для того чтобы фиксировать (3.72) однозначно, можно воспользоваться принципом соответствия, а именно вытекающая из (3.72) теория должна содержать в качестве своего предельного случая теорию Ньютона. Однако и принципа соответствия недостаточно для однозначного определения (3.72). Но можно ввести дополнительные ограничения, т. е. можно исключить из рассмотрения те функции Лагранжа, которые не дают возможности в первом приближении полностью фиксировать тетрады. Руководствуясь этими соображениями, Пеллегрини и Плебаньский взяли функцию Лагранжа в виде

$$\mathbf{L} = k_1 \mathbf{L}_0 + k_2 \hat{I}_3 \quad (\mathbf{L}_0 \text{ как в } (3.56)). \tag{3.73}$$

Все результаты, полученные в теории с (3.73) в первом приближении или же в статическом сферически-симметричном поле, остаются неизменными, если к (3.73) добавить еще

$$k_3 \left(I_2 - \frac{1}{2} I_3 \right).$$

Функция (3.73) остается инвариантной только относительно глобальных собственных лоренцевых преобразований тетрад. Если теперь к (3.73) добавить функции Лагранжа для бозонных полей $\mathbf{L}^B$ и фермионных полей $\mathbf{L}^F$, то, варьируя интеграл действия W по h_i^A, получим

$$\delta W = \delta \int \mathbf{L} d^4x = \int \sqrt{-g} \left(k_1 E_A^r + k_2 F_A^r + \right. \\ \left. + T_A^{(B)\,r} + T_A^{(F)\,r} \right) \delta h_r^A \, d^4x, \tag{3.74}$$

причем

$$E_A^r = \frac{\delta \mathbf{L}_0}{\delta h_r^A} \frac{1}{\sqrt{-g}}$$

есть соответствующий (3.55) тензор Эйнштейна, а

$$T_A^{(B)\,r} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\delta \mathbf{L}^{(B)}}{\delta h_r^A}, \qquad T_A^{(F)\,r} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\delta \mathbf{L}^{(F)}}{\delta h_r^A} \tag{3.75}$$

тензоры энергии бозонных и фермионных полей соответственно, и, кроме того,

$$F^r_A = \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\delta \overset{\wedge}{I_3}}{\delta h^A_r}. \qquad (3.76)$$

(Здесь нижний индекс относится к пространству тетрад.) Зная явный вид F^r_A и учитывая (3.74), можно получить следующие уравнения поля:

$$\sqrt{-g}\, k_1 E^{ik} + k_2 \Big[\Big(-\Delta_{\underset{\vee}{d}sr}\, \varepsilon^{ksrd}\Big)^{;\,i} - 2\varepsilon^{kirs}\, \Delta^l_{\underset{\vee}{r}l;\,s} +$$

$$+ \varepsilon^{ksrd}\, \Delta_{\underset{\vee}{d}sr}\, \Delta^{\overset{il}{\vee}}_l - \varepsilon^{rsod}\, \Delta_{\underset{\vee}{d}so}\gamma^{ki}_r + \varepsilon^{krst}\, \Delta^i_{\underset{\vee}{s}t}\Delta^l_{\underset{\vee}{r}l} - \varepsilon^{rsbd}\, \Delta_{\underset{\vee}{d}sb}\, \Delta^{ki}_{\underset{\vee}{r}\cdot} -$$

$$- \frac{1}{2} g^{ik}\, \varepsilon^{rstl}\, \Delta_{\underset{\vee}{d}tl}\, \Delta^d_{\underset{\vee}{r}s}\Big] = -\sqrt{-g}\left(T^{(B)\,ik} + T^{(F)\,ik}_{h^A_i}\right). \qquad (3.77)$$

Это система из 16 уравнений для тетрад отсчета h^A_i, поскольку тензор F^{ik} несимметричный. Константа k_1 — это величина, равная $1/\varkappa$, где $\varkappa$ — гравитационная константа. Константа F_2 характеризует связь антисимметричной части тензора материи фермионных полей с гравитационным полем:

$$k_2 F^{\overset{ik}{\vee}} = -T^{(F)\,\overset{ik}{\vee}}. \qquad (3.78)$$

Несимметричную часть тензора материи ферми-полей можно было бы использовать тогда для фиксации дополнительных 6 степеней свободы тетрад отсчета. Но мы увидим, что исчезновение антисимметричной части $T^{(F)ik}$ ведет к нарушению слабого принципа эквивалентности.

Если рассмотреть вариацию функции Лагранжа (3.73) при бесконечно малых преобразованиях координат

$$\overline{x}^i = x^i + \zeta^i(x^k) \qquad (3.79)$$

и учесть, что h_{Ai} удовлетворяет условию

$$\delta h_{Ai} = -h_{Ak}\xi^k_{,\,i} - h_{Ai,k}\,\xi^k, \qquad (3.80)$$

то легко можно увидеть, что уравнения поля (3.74) содержат в себе общее тождество

$$k_1 E^{ik}_{;\,i} + k_2\left(F^{ki}_{;\,i} - F^{ri}\gamma^k_{ri}\right) = 0. \qquad (3.81)$$

Если учесть, что вследствие справедливости уравнений поля для бозонных и фермионных полей вариация функции Лагранжа зависит лишь от вариации h^A_i, то можно получить соответствующие тождества для тензоров материи этих полей

$$T^{(B)\,ik}_{;\,k} = 0; \quad T^{(F)\,ik}_{;\,k} - T^{(F)\,rk}\,\gamma^{\,i}_{rk} = 0. \qquad (3.82)$$

(При выводе (3.81) и (3.82) использованы также соотношения (3.49), (3.80) и (3.53).)

В уравнениях (3.81), (3.82) в общем случае слабый принцип эквивалентности нарушается. Вследствие антисимметрии выражения $\gamma_{mnr} = h^A_m h_{An;\,r}$ по m и n получается все-таки обычное динамическое уравнение, если тензор материи ферми-полей $T^{(F)ik}$ является симметричным. Следовательно, это тот случай, когда $L^{(F)}$ есть действительная скалярная плотность относительно локальных преобразований Лоренца и зависит лишь от q_{ik}.

В действительности слабый принцип эквивалентности в форме, которая требует локального выполнения соотношений специальной теории относительности, приводит, как это было выяснено выше, непосредственно к таким уравнениям поля, функции Лагранжа которых обладают отмеченным свойством. При таком достаточно широком предположении теория Пеллегрини и Плебаньского оказывается в сущности бессодержательной и не составляет никакого прогресса по сравнению с теорией Меллера.

Так же, как и в теории Меллера, здесь можно для общей функции Лагранжа (3.72) вывести комплекс энергии—импульса. Проще всего его можно получить, принимая во внимание то, что функцию Лагранжа, которая является билинейной относительно производных от h^A_i, можно записать в общем виде:

$$L^{(a)} = \frac{1}{4}\sqrt{-g}\, L_A^{\overset{ik}{\vee}} B^{\overset{mn}{\vee}} \left(h^A_{i,\,k} - h^A_{k,\,i}\right)\left(h^B_{m,n} - h^B_{n,\,m}\right), \qquad (3.83)$$

причем

$$L_A^{\overset{ik}{\vee}}{}_B^{\overset{mn}{\vee}} = L_B^{\overset{mn}{\vee}}{}_A^{\overset{i}{\vee}} \qquad (3.84)$$

является зависящим от h^A_i тензором относительно любых преобразований координат. Вариация $L^{(a)}$ вместе с вариацией функции Лагранжа материальных полей по h^A_i дает

$$\sqrt{-g}\,T^i_A = \frac{\partial}{\partial h^A_i}\left(\sqrt{-g}\,L_{C\;B}^{\overset{mn}{\vee}\,\overset{ls}{\vee}}\right) h^C_{m;\,n}\, h^B_{r;\,s} -$$

$$-2\left[-\sqrt{-g}\,L_{A\;B}^{\overset{id}{\vee}\,\overset{is}{\vee}}\, h^B_{r;\,s}\right]_d. \tag{3.85}$$

Тогда свойства симметрии $L_{A\;B}^{ik\,rs}$ определят дифференциальный закон сохранения:

$$\left.\begin{aligned} &\Theta^i_{A;\,i} = (\,t^i_A + T^i_A)_i = 0 \text{ при} \\ &\sqrt{-g}\;t^i_A = \frac{\partial}{\partial h^A_i}\left(\sqrt{-g}\,L_{C\;B}^{\overset{mn}{\vee}\,\overset{rs}{\vee}}\right) h^C_{m;\,n}\, h^B_{r;\,s}, \end{aligned}\right\} \tag{3.86}$$

где

$$\Theta^i_A = U^{\overset{id}{\vee}}_{A;\,d} \text{ и } U^{\overset{id}{\vee}}_A = 2L_{A\;B}^{\overset{id}{\vee}\,\overset{rs}{\vee}}\, h^B_{r;\,s}. \tag{3.87}$$

При интегрировании (3.86) по трехмерному пространству V_3 интеграл от трехмерной дивергенции уничтожается, если только производные h^A_i достаточно быстро исчезают на бесконечности $(0\,(1/r))$, так что имеют место интегральные сохраняющиеся величины

$$P_A = \int\limits_{(\Sigma_3)} \sqrt{-g}\,\Theta^i_A\, d\Sigma_i. \tag{3.88}$$

С помощью суперпотенциала (3.87) это выражение можно представить в виде интеграла по поверхности

$$P_A = \int\limits_{(\Sigma_3)} \sqrt{-g}\,U^{\overset{oi}{\vee}}_A. \tag{3.89}$$

Величины P_A представляют вектор энергии—импульса в системе отсчета h^A_i; относительно постоянных лоренцевых преобразований системы отсчета они составляют один лоренц-вектор и не зависят от выбора координатной системы.

Теоремы сохранения можно выразить также и в обычной форме, если перейти от (3.87) к суперпотенциалу

$$U^{\overset{lm}{\vee}}_n = \sqrt{-g}\,h^A_n\, U^{\overset{lm}{\vee}}_A. \tag{3.90}$$

Для $k_2 = 0$ из (3.90) получается точный суперпотенциал (3.63) Меллера вместе со следующим из него комплексом энергии—импульса Меллера. Очевидно, что, ограничиваясь асимптотически декартовой координатной системой и линейным преобразованием координат совместно с псевдотензором энергии—импульса, мы в сущности получим результат, эквивалентный введению тетрад отсчета, относительно которых измеряются энергия и импульс системы и для которых допустимы еще лишь постоянные преобразования Лоренца*.

В важном случае статического сферически-симметричного распределения материи уравнения поля (3.77) принимают вид

$$k_1 E^{mn} + k_2 F^{\underline{mn}} = -T^{(B)\,mn}, \tag{3.91}$$

$$k_2 F^{mn} = 0. \tag{3.92}$$

В изотропных координатах сферически-симметричный линейный элемент

$$ds^2 = A(r)(dx^0)^2 - B(r)\left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] \tag{3.93}$$

можно получить с помощью подстановок

$$h_A^m = h^m \delta_A^m, \quad h^0 = A^{-1/2}, \quad h^1 = h^2 = h^3 = B^{-1/2}, \tag{3.94}$$

которые в то же время удовлетворяют уравнению (3.92) и для которых тождественно исчезает $F^{\underline{mn}}$. Тем самым уравнения поля сводятся к уравнениям Эйнштейна, и решением (3.91), (3.92) будет решение Шварцшильда с фиксацией тетрад, заданных при помощи (3.93) и (3.94). Аналогичный результат получается в теории Меллера с дополнительными условиями (3.67).

Тем самым описанные тетрадные теории в случае симметричного тензора материи не только удовлетворяют слабому принципу эквивалентности, но также дают для красного смещения, для смещения перигелия и для отклонения света те же самые значения, что и теория Эйнштейна.

§ 10. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Среди разнообразных биметрических полевых теорий имеются также линейные гравитационные теории, которые были изучены Белинфанте и другими [10,11,12]. Важней-

---

* См. также § 11.

шим членом в уравнениях поля является волновой оператор $\square g_{ik}$. Из простейшего полевого уравнения в вакууме

$$\square g_{ik} = 0 \tag{3.95}$$

следуют значения Эйнштейна для отклонения света и красного смещения, если только ввести постоянную массы для статического сферически-симметричного поля. Для смещения перигелия получается тогда

$$\Delta\varphi = \frac{4}{3}\Delta\varphi_{\text{Эйнштейн}},$$

т. е. на треть больше значения Эйнштейна. Обычное статическое сферически-симметричное поле зависит от двух постоянных. В соответствующих координатах имеем

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -(1 + \alpha m/r), \quad g_{00} = 1 - 2m/r. \tag{3.96}$$

Метрика (3.96) является линейным приближением уравнения Эйнштейна — Розена с условием де Дондера $(\sqrt{-g}\, g^{ik})_k = 0$. Связь с тензором материи T_k линейна и имеет вид потенциала

$$\square g_{ik} = -2\varkappa g_{kl}\left(T_i^l - \frac{1}{2}\delta_i^l T\right) = -2\varkappa \overset{*}{T}_{ik}. \tag{3.97}$$

Потенциалоподобный характер этой связи уясняется при $T_i^k = \rho u_i u^k$, т. е. когда для компоненты g_{00} в (3.97) имеет место условие

$$\square g_{00} = -\varkappa g_{00}\rho. \tag{3.98}$$

Связь типа (3.97) не является все же необходимой, а в таком виде она неестественна, ибо (3.97) не выводится из вариационного принципа.

Индексы в биметрических полевых уравнениях должны перемещаться с помощью метрики η_{ik}, так как лишь такое перемещение совместимо с волновым оператором. Уравнение приобретает тривиальный вид

$$\square g_{ik} = -2\varkappa T_i^{*l}\eta_{kl} \tag{3.99}$$

или в симметричной форме

$$\square g_{ik} = -\varkappa\left(T_i^{*l}\eta_{lk} + T_k^{*l}\eta_{li}\right). \tag{3.100}$$

Уравнение (3.100) — снова линеаризованная форма уравнений поля Эйнштейна—Розена; его можно вывести из вариационного принципа (член связи $\varkappa T_i^{*l} g_{kl}\eta^{ik}$).

Следствия потенциалоподобной связи между гравитацией и материей рассмотрены в гл. 5 в рамках теории систем отсчета, которая тоже имеет дело с подобной связью.

В статических сферически-симметричных полях, определенных в (3.97) и (3.100), естественно следуют для красного смещения и для отклонения света значения, равные эйнштейновским, тогда как для смещения перигелия

$$\Delta\varphi = (4/3)\Delta\varphi_{\text{Эйнштейн.}}$$

(ср. с § 15).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Rosen N.** Phys. Rev., **57** (1940), 147.
2. **Kohler.** Z. Physik, **131**, 571; **134**, 286 u. 306, 1954.
3. **Moller C.** Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. 2, No. 10 (1961).
4. **Pellegrini C., Plebanski J.** Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk. 2, No. 4 (1962), 39.
5. **Treder H.-J.** Annalen der Physik, **20** (1967), 194.
6. **Einstein A.** Berl. Ber. (1928), 217; (1929), 1 u. 156; (1930), 18 u. 401.
7. **Einstein A., Mayer W.** Berl. Ber. (1930), 110.
8. **Weitzenböck R.** Berl. Ber. (1928), 466.
9. **Einstein A., Mayer W.** Berl. Ber. (1931), 287.
10. **Belinfante F. J., Swihart J. C.** Ann. Phys., **1** (1957), 168.
11. **Belinfante F. J., Swihart J. C.** Ann. Phys., **1** (1957), 196.
12. **Belinfante F. J., Swihart J. C.** Ann. Phys., **2** (1957), 81.
13. **Utijama R.** Phys. Rev., **101** (1956), 1596.
14. **Kibble T. W. B.** J. Math. Phys., **2** (1961), 212.
15. **Бродский А. М., Иваненко Д. Д., Соколик Г. А.** «Ж. эксперим. и теор. физ.», **41** (1961), 1307.

ЧАСТЬ Б

ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ — ТЕОРИЯ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

Глава 4

ОБОБЩЕННАЯ ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНОСТЬ

§ 11. ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Как было указано во введении, для понимания общего принципа относительности необходимо делать различие между системой координат $\{x^i\}$ и системой отсчета Σ. Координатные системы — это чисто математическое средство описания математических соотношений. Независимость физических величин от выбора координатной системы логически необходима, так как сами координатные системы никакой физики в себе не содержат. Системы отсчета — это физическая реальность: они соответствуют некоторому набору измерительных приборов, служащих для определения тех или иных физических величин. Простейшая система отсчета — набор трех пространственных и одного временного эталонов. Каждому событию в пространстве — времени V_4 соответствуют в этом случае три пространственных и один временной отсчеты [6].

Математически систему отсчета можно представить как поле 4-векторов h_i^A, которые можно считать ортонормированными:

$$g_{ik} = h_i^A h_k^B \eta_{AB}, \quad \eta_{AB} = h_A^i h_B^k g_{ik}, \tag{4.1}$$

где g_{ik} — метрический тензор пространства — времени, а

$$\eta_{AB} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$$

тензор Минковского. (Малые латинские индексы — тензорные, а большие индексы нумеруют векторы; и те и другие изменяются от 0 до 3). Векторы h_i^A являются функциями пространственных и временно́й координат.

Уравнение (4.1) есть условие совместимости системы отсчета h_i^A с пространством — временем V_4, в котором реализуется метрика g_{ik}. Эйнштейновская группа пространственно-временных преобразований

$$x^{\backslash l} = x^{\backslash l}(x^k), \quad h_l^{\backslash A} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{\backslash l}} h_k^A \tag{4.2}$$

поля 4-векторов соответствует переходу к некоторой изометрической метрике

$$g'_{mn} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{\backslash m}} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x^{\backslash n}} h_k^A h_{Al} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{\backslash m}} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x^{\backslash n}} g_{kl}. \tag{4.3}$$

Условие (4.1) сопоставляет пространству V_4 универсальное касательное пространство Минковского M_4, которое по отношению к V_4 является дуальным многообразием V_4^*. Матрица преобразования h_l^A, связывающая V_4 и V_4^*, вообще говоря, неголономна с объектом неголономности Эйнштейна, равным ([1, 5])

$$\underset{\vee}{\Delta}{}^i_{kl} = \frac{1}{2} h^i_A \left(h^A_{k,\,l} - h^A_{l,\,k} \right) \cdot \tag{4.4}$$

Наряду с h_i^A системой отсчета в пространстве q_{ik} будет и преобразованное в V_4^*-поле 4-векторов

$$\bar{h}_i^B = \omega_A^B h_i^A, \tag{4.5}$$

если только

$$\omega_A^C \omega_{BC} = \eta_{AB}. \tag{4.6}$$

Общий принцип относительности тогда можно понимать как эквивалентность всех систем отсчета Σ, связанных с заданной метрической структурой q_{ik} пространства V_4.

Геометрические объекты в V_4 только тогда будут удовлетворять этому определению, если они построены из лоренц-инвариантных комбинаций тетрад (4.1) и их производных (см. ниже). Все лоренц-инварианты являются тензорами Эйнштейна или величинами, построенными из них.

Измеряемые значения Φ^J физических величин инвариантны относительно выбора системы координат, т. е. они должны быть локальными объектами — пространственно-временными скалярами:

$$\Phi^{\backslash J} = \Phi^J(x^i(x^{\backslash h})) = \Phi^J(\check{x}^i). \tag{4.7}$$

В соответствии с принципом относительности соотношения между измеряемыми физическими величинами не должны зависеть и от выбора системы отсчета. В частности, $\overline{\Phi}^J$ всегда равно нулю, если $\Phi^J = 0$. Отсюда следует, что матрица Φ^J должна быть ковариантна по отношению к лоренц-преобразованиям (4.6), т. е. измеряемая величина Φ^J должна быть тензором Лоренца n-ой валентности:

$$\overline{\Phi}^{A_1 \dots}_{B_1 \dots} = \omega^{A_1}_{C_1} \dots \omega^{D_1}_{B_1} \dots \Phi^{C_1 \dots}_{D_1 \dots} \qquad (4.8)$$

Из (4.8) и (4.7), совместно с (4.1), следует, что всем измеряемым значениям физических величин можно однозначно сопоставить мировые лоренц-инвариантные тензоры той же валентности:

$$\Phi^{i_1 \dots}_{k_1 \dots} = h^{i_1}_{A_1} \dots h^{B_1}_{k_1} \dots \Phi^{A_1 \dots}_{B_1 \dots} \qquad (4.9)$$

Лоренц-тензоры $\Phi^{A_1 \dots}_{B_1 \dots}$ и мировые тензоры $\Phi^{i_1 \dots}_{k_1 \dots}$ являются дуальными величинами.

Значение Φ^A некоторой величины Φ^i в системе отсчета h^A_i в мировом пространстве V_4 постоянно, если при изменении Φ^i выполняется условие

$$\Phi^i_{,l} + h^i_A h^A_{k,l} \Phi^k = \Phi^i_{;l} + \Delta^i_{kl} \Phi^k = 0, \qquad (4.10а)$$

где

$$\Delta^i_{kl} = h^i_A h^A_{k,l} \qquad (4.10б)$$

аффинные коэффициенты интегрируемого переноса с абсолютным параллелизмом Эйнштейна [1], удовлетворяющие тождеству

$$h^A_{i,l} - \Delta^k_{il} h^A_k = 0. \qquad (4.10в)$$

Обычный дифференциал $d\Phi^{i_1 \dots}_{k_1 \dots}$ мирового тензора не является тензором, например

$$d\,\Phi'^{i} = \Phi'^{i}_{,l}\, dx^l = \left(\frac{\partial x'^{i}}{\partial x^r} \Phi^r_{,l} + \frac{\partial^2 x'^{i}}{\partial x^r \partial x^l} \Phi^r \right) dx^l. \qquad (4.11а)$$

Дифференциал становится тензором только после добавления к нему величины

$$\Gamma^i_{kl} \Phi^k dx^l, \qquad (4.11б)$$

где коэффициенты аффинной связности преобразуются по закону

$$\Gamma^{|i}_{kl} = \frac{\partial x^{|i}}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x^r}{\partial x^{|k}} \cdot \frac{\partial x^p}{\partial x^{|l}} \Gamma^m_{rp} + \frac{\partial x^{|i}}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{|k} dx^{|l}}. \quad (4.11\text{в})$$

Из величин g_{ik} и их производных можно образовать лишь один тип коэффициентов аффинной связности — трехиндексные коэффициенты (символы) Кристоффеля

$$\begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{ir} (- g_{kl,r} + g_{lr,k} + g_{rk,l}). \quad (4.11\text{г})$$

Очевидно, что они лоренц-инвариантны. Обычный (координатно-инвариантный) дифференциал

$$d\Phi^A = \Phi^A_{,l}\, dx^l = \Phi^A_{,l}\, h^l_B\, dx^B = \Phi^A_{,B}\, dx^B \quad (4.12\text{а})$$

от лоренц-вектора Φ^A также не является лоренц-тензором

$$d\overline{\Phi}^A = (\omega^A_B \Phi^B)_{,l}\, dx^l = (\omega^A_B \Phi^B_{,l} + \omega^A_{B,l} \Phi^B)\, dx^l. \quad (4.12\text{б})$$

И в этом случае для получения лоренц-ковариантной производной необходимо ввести комплексирующую лоренц-аффинную связность

$$L^A_{Bl} \Phi^B\, dx^l = L^A_{BC} \Phi^B\, dx^C, \quad (4.12\text{в})$$

преобразующуюся по закону

$$\overline{L}^A_{Bl} = \omega^A_C \omega^D_B L^C_{Dl} + \omega^A_D \omega^D_{B,l}. \quad (4.12\text{г})$$

Единственной связностью, которую можно образовать из тетрад и их производных, являются величины*

$$L^A_{Bl} = -\gamma^A_{Bl} = h^A_i h^i_{B;l} = -h^A_{i;l} h^i_{B,l} \quad (4.13)$$

преобразующиеся по закону

$$\overline{\gamma}^A_{Bl} - \omega^A_C \omega^D_B \gamma^C_{Dl} = -\omega^A_D \omega^D_{B,l} = \omega^A_{D,l} \omega^D_B. \quad (4.13\text{а})$$

Величины (4.13) есть коэффициенты вращения Риччи тетрадного поля h^A_i [2]. Их пространственно-временные компоненты равны

$$\gamma^i_{kl} = h^i_A h^B_k \gamma^A_{Bl} = h^i_A h^A_{k;l} = -h^i_{A;l} h^A_k, \quad (4.13\text{б})$$

где $\Phi^i_{;k} = \Phi^i_{,k} + \Phi^l \begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix}$, и сами по себе не являются до-

---

* Если в некотором плоском V_4 зададим инерциальную систему СТО в декартовых координатах $h^A_i = \delta^A_i$ и произведем общее преобразование Лоренца $h^A_i = \omega^A_B \delta^B_i$, то найдем $\gamma^A_{Bl} = -\omega^A_C \omega^C_{B,l}$.

пустимыми общерелятивистскими величинами, так как они не лоренц-скаляры, хотя они и мировые тензоры. Здесь можно провести некоторую параллель с символами Кристоффеля $\{{}^{i}_{kl}\}$, которые, будучи лоренц-скалярами, не являются мировыми тензорами.

С помощью лоренцевой аффинной связности (4.13) и правила Лейбница определим лоренц-ковариантную производную, например, от смешанного лоренц-тензора Φ^A_B:

$$\Phi^A_{B\,\|\,C} = \Phi^A_{B\,\|\,l}\, h^l_C = \Phi^A_{B,C} - \gamma^A_{DC}\,\Phi^D_B + \gamma^D_{BC}\,\Phi^A_D. \quad (4.14)$$

Для смешанного мирового и лоренцева тензора Φ^A_i определим обобщенную (лоренц-ковариантную и координатно-ковариантную) производную с помощью коэффициентов Риччи и Кристоффеля:

$$\Phi^A_{i\,|||\,l} = \Phi^A_{i,l} - \Phi^B_i\,\gamma^A_{Bl} - \Phi^A_r \begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix}. \quad (4.15)$$

Обобщенная производная для чисто мировых величин переходит в координатно-ковариантную

$$\Phi^i_{|||\,l} = \Phi^i_{,l} + \begin{Bmatrix} i \\ rl \end{Bmatrix} \Phi^r = \Phi^i_{;l}, \quad (4.15а)$$

а для лоренц-тензоров — в лоренц-ковариантную

$$\Phi^A_{|||l} = \Phi^A_{,l} - \gamma^A_{Bl}\,\Phi^B = \Phi^A_{\|\,l}. \quad (4.15б)$$

Кроме хорошо известных равенств

$$\delta^i_{k;l} = \delta^i_{k,l} = 0; \quad (4.16а)$$

$$\delta^A_{B\,\|\,l} = \delta^A_{B,l} = 0; \quad (4.16б)$$

$$g_{ik\,|||\,l} = g_{ik;l} = 0; \quad (4.16в)$$

$$\eta_{AB\,|||\,l} = \eta_{AB\,\|\,l} = \gamma_{ABl} + \gamma_{BAl} = 0 \quad (4.16г)$$

установлено также, что тетрады h^A_i являются обобщенно-ковариантными константами (лемма Вейля [12]):

$$h^{\mathrm{A}}_{i|||\,l} = h^{\mathrm{A}}_{i,l} - h^{B}_{i}\,\gamma^{\mathrm{A}}_{Bl} - h^{\mathrm{A}}_{r}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix} =$$

$$= h^{\mathrm{A}}_{i,l} - h^{\mathrm{A}}_{i;l} - h^{\mathrm{A}}_{r}\begin{Bmatrix} r \\ il \end{Bmatrix} = 0. \qquad (4.17)^*$$

В действительности выражение

$$\gamma^{i}_{kl} + \begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} = \Delta^{i}_{kl} = h^{i}_{\mathrm{A}}\,h^{\mathrm{A}}_{k,l} \qquad (4.17\text{а})$$

является аффинной связностью Эйнштейна абсолютным параллелизмом.

Из (4.1) и (4.17) вытекает взаимно однозначное соответствие (дуальность) лоренц-ковариантного и координатно-ковариантного представлений тензорных величин. Например, имеет место тождество Эйзенхарта [2]

$$\Phi^{\mathrm{A}}_{\|\,C} = \left(h^{\mathrm{A}}_{i}\,\Phi^{i}\right)_{\|\,l}\,h^{l}_{C} = \Phi^{i}_{;l}\,h^{\mathrm{A}}_{i}\,h^{l}_{C} \qquad (4.18\text{а})$$

и далее

$$\Phi^{\mathrm{A}}_{\|\,CD} = \Phi^{i}_{;kl}\,h^{\mathrm{A}}_{i}\,h^{k}_{C}\,h^{l}_{D}. \qquad (4.18\text{б})$$

Таким образом, можно переходить от лоренц-ковариантных производных лоренц-тензоров к координатно-ковариантным производным мировых тензоров и наоборот. Оба типа производных взаимно дуальны. Например, лоренц-ковариантный тензор кривизны тождествен риманову тензору:

$$\Phi^{\mathrm{A}}_{\|\,BC} - \Phi^{\mathrm{A}}_{\|\,CB} = \left(\Phi^{i}_{;kl} - \Phi^{i}_{;lk}\right) h^{\mathrm{A}}_{i}\,h^{k}_{B}\,h^{l}_{C} =$$

$$= -R^{i}_{rkl}\,\Phi^{r}\,h^{\mathrm{A}}_{i}\,h^{k}_{B}\,h^{l}_{C} = -\,\Phi^{D}\,R^{\mathrm{A}}_{DBC}. \qquad (4.19)$$

Закон инерции СТО

$$u^{l}_{,k}\,u^{k} = 0$$

может быть записан в терминах лоренц-ковариантных величин

$$u^{\mathrm{A}}_{\|\,C}\,u^{C} = \left(u^{\mathrm{A}}_{,i} - \gamma^{\mathrm{A}}_{Bi}\,u^{B}\right) h^{i}_{C}\,u^{C} = 0 \qquad (4.20)$$

---

* Для эквивалентности представлений Лоренца и Эйнштейна необходимо, чтобы имела место лемма Вейля $h^{A}_{i\,|||\,l} = 0$. Отсюда вытекает неголономность преобразования (4.1): $\Gamma^{i}_{kl} = L^{i}_{kl} + h^{i}_{A}\,h^{A}_{k.\,l}$.

и приводит, таким образом, к уравнению геодезических на некотором римановом пространстве V_4:

$$u^i_{;k} u^k h^{\mathrm{A}}_i = u^{\mathrm{A}}_{\|C} u^C = 0. \qquad (4.20\text{a})$$

При выводе этого уравнения существенно требование ковариантности относительно произвольных локальных лоренцевых вращений. Если потребовать ковариантность относительно только постоянных вращений $(\omega^{\mathrm{A}}_{B,l} = 0)$, то уже нет надобности добавлять к обыкновенному дифференциалу

$$d\,\Phi^{\mathrm{A}} = \Phi^{\mathrm{A}}_{,l}\, dx^l$$

лоренц-аффинную связность

$$\Phi^{\mathrm{A}}_{,l}\, dx^l = \left(\Phi^i_{,l}\, h^{\mathrm{A}}_i + h^{\mathrm{A}}_{i,l} \Phi^i\right) dx^l. \qquad (4.21)$$

Из (4.21) приходим к координатно-ковариантной производной

$$d\,\Phi^{\mathrm{A}}\, h^k_{\mathrm{A}} = \left(\Phi^k_{,l} + h^k_{\mathrm{A}}\, h^{\mathrm{A}}_{i,l} \Phi^i\right) dx^l, \qquad (4.22)$$

дуальной (4.21). Здесь координатно-аффинная связность равна интегрируемой аффинной связности Эйнштейна Δ^i_{kl}, и перенос тензора в V_4 становится интегрируемым. В этом случае нет никакой аффинной кривизны, а следовательно, и гравитационного действия. Общий принцип относительности как лоренц-ковариантность соотношений между физическими величинами включает в себя в качестве частного случая и эйнштейновское толкование этого принципа (координатная ковариантность физических уравнений, сформулированных в мировом пространстве), а потому также допускает геометризацию гравитационного поля.

Если допустить, что структура V_4 определяется только метрикой g_{ik} и что все физические величины сформулированы на языке лоренц-тензоров, то становится возможным инвариантное относительно выбора системы отсчета описание физических соотношений, т. е. запись уравнений на языке мировых тензоров.

Общий принцип относительности в этом случае можно сформулировать так [6]: основные физические законы можно формулировать в V_4 без привязки их к какой бы то ни было системе отсчета (эйнштейновская формулировка)*.

* См. также введение.

Чтобы следующие из основных физических законов соотношения между измеряемыми физическими величинами не зависели от координатной системы, они должны быть координатно-ковариантными (принцип ковариантности Эйнштейна).

Отсюда следует, что та форма, которую Эйнштейн придал общему принципу относительности, по сути дела является дуальным изложением требования лоренц-ковариантности [8].

§ 12. СПИНОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Для тензорных полей существуют два эквивалентных (взаимно дуальных) представления, удовлетворяющих общему принципу относительности [6]: 1) лоренц-ковариантное представление с использованием координатно-инвариантных величин $\Phi^{A}_{B\ldots}$; 2) координатно-ковариантное представление с использованием лоренц-инвариантных величин $\Phi^{i\ldots}_{k\ldots}$. Эквивалентность этих представлений следует из однозначности соответствия

$$\Phi^{\mathrm{A}\ldots}_{D\ldots} = h^{\mathrm{A}}_{i}\ldots h^{k}_{D}\ldots \Phi^{i\ldots}_{k\ldots} \tag{4.22а}$$

и

$$\Phi^{i\ldots}_{k\ldots} = h^{i}_{\mathrm{A}}\ldots h^{D}_{k}\ldots \Phi^{\mathrm{A}\ldots}_{D\ldots}. \tag{4.22б}$$

Однако эта однозначность нарушается, если вводятся в теорию спиноры. Введение спинорных величин означает прежде всего замену однозначного тензорного представления группы Лоренца двузначным унимодулярным представлением. При этом тетраде системы отсчета сопоставляются метрические спинтензоры посредством

$$\sigma^{l\mu\dot{\nu}} = h^{l}_{\mathrm{A}}\, \sigma^{\mathrm{A}\mu\dot{\nu}}, \tag{4.23}$$

где $\sigma^{\mathrm{A}\mu\dot{\nu}}$ — постоянные матрицы Паули (греческими буквами будем обозначать спинорные индексы: $\mu,\nu = 1,2$).

Условие ортогональности (4.1) гласит, что

$$\gamma_{\alpha\beta}\, \gamma_{\dot{\mu}\dot{\nu}} = \sigma^{k}_{\alpha\dot{\mu}}\, \sigma^{l}_{\beta\dot{\nu}}\, g_{kl} = \sigma^{\mathrm{A}}_{\alpha\dot{\mu}}\, \sigma^{B}_{\beta\dot{\nu}}\, \eta_{AB} \tag{4.24а}$$

и

$$g_{kl} = \sigma^{\alpha\dot{\mu}}_{k}\, \sigma^{\beta\dot{\nu}}_{l}\, \gamma_{\alpha\beta}\, \gamma_{\dot{\mu}\dot{\nu}} = h^{\mathrm{A}}_{k}\, h^{B}_{l}\, \sigma^{\alpha\dot{\mu}}_{\mathrm{A}}\, \sigma^{\beta\dot{\nu}}_{B}\, \gamma_{\alpha\beta}\, \gamma_{\dot{\mu}\dot{\nu}}. \tag{4.24б}$$

Здесь величины $\gamma_{\alpha\beta} = -\gamma_{\beta\alpha} = \gamma_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\gamma_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$ вместе с условием

$$|\gamma_{\alpha\beta}| = 1, \quad \gamma_{\alpha\beta}\gamma^{\varepsilon\beta} = \delta^{\varepsilon}_{\alpha} \tag{4.25а}$$

определяют метрический спинор спинорного пространства, который с учетом (4.24) имеет постоянные компоненты

$$\gamma_{12} = -\gamma_{21} = -\gamma^{12} = \gamma^{21} = 1. \tag{4.25б}$$

Представление (4.24 а, б) инвариантно относительно унимодулярных преобразований в спинпространстве S_2 и S_2^*, т. е. относительно преобразований спинтензоров

$$\overline{\sigma}_i^{\alpha\dot{\mu}} = \alpha^{\dot{\mu}}_{\dot{\nu}}\,\alpha^{\alpha}_{\beta}\,\sigma_i^{\beta\dot{\nu}}, \tag{4.26}$$

когда матрицы преобразований $\alpha^{\mu}_{\nu} = \alpha^{\mu}_{\nu}(x^l)$ удовлетворяют условию

$$\left|\alpha^{\dot{\mu}}_{\dot{\nu}}\right| = \left|\alpha^{\mu}_{\nu}\right| = 1. \tag{4.27}$$

Если измеряемые величины относятся к спинорным пространствам S_2 и S_2^*, то общий принцип относительности требует, чтобы в соответствии с унимодулярной инвариантностью (4.24) эти величины преобразовывались как спиноры

$$\overline{\psi}^{\nu} = \alpha^{\nu}_{\mu}\,\psi^{\mu}; \quad \overline{\psi}^{\dot{\nu}} = \alpha^{\dot{\nu}}_{\dot{\mu}}\,\psi^{\dot{\mu}}. \tag{4.28}$$

В соответствии с (4.23) это условие для эрмитовых спиноров валентности $2n$ $\psi_{\mu\dot{\nu}}$, $\psi_{\mu\dot{\nu}\alpha\dot{\beta}}$ и т. д. эквивалентно требованию, чтобы измеряемые величины были лоренц-тензорами:

$$\Phi_{\mu\dot{\nu}} = \sigma_{A\,\mu\dot{\nu}}\,\Phi^A = \sigma_{i\mu\dot{\nu}}\,h^i_A\,\Phi^A = \sigma_{i\mu\dot{\nu}}\,\Phi^i.$$

Если ψ_{ν} — спинор, то обычная производная от него

$$d\psi_{\nu} = \psi_{\nu,\,l}\,dx^l \tag{4.29а}$$

уже не является спинором, так как имеет место

$$\overline{\psi}_{\nu,\,l} = \left(\alpha^{\mu}_{\nu}\,\psi_{\mu}\right)_{,l} = \alpha^{\mu}_{\nu}\,\psi_{\mu,\,l} + \alpha^{\mu}_{\nu,\,l}\,\psi_{\mu}. \tag{4.29б}$$

Введение спинорной аффинной связности (см., например [4] $\Lambda^{\alpha}_{\beta l}$ с законом преобразования

$$\bar{\Lambda}^{\alpha}_{\beta l}=\alpha^{\mu}_{\beta}\,\alpha^{\alpha}_{\nu}\,\Lambda^{\nu}_{\mu l}+\alpha^{\alpha}_{\lambda}\,\alpha^{\lambda}_{\beta,\,l} \tag{4.29в}$$

дает возможность образовать лоренц-ковариантную производную от спинора:

$$\psi_{\nu\,\|\,l}\,dx^{l}=\left(\psi_{\nu,\,l}-\Lambda^{\mu}_{\nu l}\,\psi_{\mu}\right)dx^{l}. \tag{4.30}$$

Спинорная аффинная связность должна быть одновременно в мировом пространстве тензором, поскольку производная (4.30) координатно инвариантна. Единственная связность такого рода, которую можно сконструировать из спинтензоров и их производных, есть связность Инфельда и Ван-дер-Вардена [3]:

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta l}=\frac{1}{2}\,\sigma^{i\alpha\dot{\nu}}\,\sigma_{i\beta\dot{\nu};\,l}=\frac{1}{2}\,\sigma^{i\alpha}_{\dot{\nu};\,l}\sigma^{\dot{\nu}}_{i\beta}\,. \tag{4.31}$$

Теперь уже можно определить общековариантную производную для смешанных тензорно-спинорных величин, например

$$\Phi^{k}_{\nu\,\|\|\,l}=\Phi^{k}_{\nu,\,l}+\left\{ {k \atop rl} \right\}\Phi^{r}_{\nu}-\Lambda^{\alpha}_{\nu l}\,\Phi^{k}_{\alpha}\,. \tag{4.32}$$

Из (4.32) для метрических спинтензоров получим основное условие

$$\sigma^{k\mu\dot{\nu}}_{\|\|\,l}=\sigma^{k\mu\dot{\nu}}_{,\,l}+\sigma^{r\mu\dot{\nu}}\left\{ {k \atop rl} \right\}+\sigma^{k\alpha\dot{\nu}}\,\Lambda^{\mu}_{\alpha l}+\sigma^{k\mu\dot{\alpha}}\,\Lambda^{\dot{\nu}}_{\dot{\alpha} l}=0. \tag{4.33}$$

В самом деле

$$\sigma^{k\mu\dot{\nu}}_{\|\|\,l}=\sigma^{k\mu\dot{\nu}}_{,\,l}+\sigma^{r\mu\dot{\nu}}\,\Delta^{k}_{rl}=0, \tag{4.33а}$$

где Δ^{k}_{rl} — аффинная связность Эйнштейна (4.17а)

$$\Delta^{k}_{rl}=h^{k}_{A}\,h^{A}_{r,\,l}=\sigma^{k\mu\dot{\nu}}\,\sigma_{r\mu\dot{\nu},\,l}\,. \tag{4.34}$$

Учитывая (4.31) и (4.25), получим

$$\gamma_{\alpha\beta\,\|\,l}=-\gamma_{\beta\alpha\,\|\,l}=\gamma_{\alpha\lambda}\,\Lambda^{\lambda}_{\beta l}+\gamma_{\lambda\beta}\,\Lambda^{\lambda}_{\alpha l}=\Lambda_{\alpha\beta l}-\Lambda_{\beta\alpha l}=0. \tag{4.35}$$

Имеет место дуальность координатно-ковариантных уравнений для тензорных полей и лоренц-ковариантных уравнений для соответствующих им спинорных полей четной валентности

$$\Phi_{\mu\dot{\nu}\,\|\,l}=\left(\sigma_{i\mu\dot{\nu}}\,\Phi^{i}\right)_{\|\|\,l}=\sigma_{i\mu\dot{\nu}}\,\Phi^{i}_{;\,l}\,. \tag{4.36}$$

Учитывая

$$\Phi_{\mu\dot{\nu}} = \Phi^k \sigma_{k\mu\dot{\nu}} = \Phi^A \sigma_{A\mu\dot{\nu}},$$

из (4.23) и (4.15) получим

$$\Phi_{\mu\dot{\nu}\parallel l} = \Phi^A_{\parallel l} \sigma_{A\mu\dot{\nu}} + \Phi^A \sigma_{A\mu\dot{\nu}\parallel l}. \qquad (4.37)$$

Но из (4.33) и (4.16) имеем [13].

$$\sigma^{A\mu\dot{\nu}}_{\parallel\mid l} = \left(\sigma^{i\mu\dot{\nu}} h^A_i\right)_{\parallel\mid l} = \sigma^{i\mu\dot{\nu}}_{\parallel\mid l} h^A_i + \sigma^{i\mu\dot{\nu}} h^A_{i\parallel\mid l} = 0, \quad (4.38)$$

а из (4.37) и (4.31) следует

$$\Phi_{\mu\dot{\nu}\parallel l} \sigma^{A\mu\dot{\nu}} = \Phi^A_{\parallel l} = h^A_i \Phi^i_{;\,l}. \qquad (4.39)$$

Таким образом, для спинорных полей четной валентности спинорная и лоренц-ковариантная производные эквивалентны. Лоренц-ковариантные уравнения для спинорных полей нечетной валентности невозможно преобразовать в координатно-ковариантные уравнения, т. е. без спинорных индексов.

С общетеоретической точки зрения произвольные спинорные поля должны быть координатно-инвариантными и, в соответствии с общим принципом относительности, лоренц-ковариантными. Однако, как уже было сказано, для спинорных полей нечетной валентности не существует лоренц-инвариантного и координатно-ковариантного представлений. Для тензорных величин тоже имеет место дуальное утверждение, что все физические величины должны быть лоренц-инвариантными и координатно-ковариантными.

§ 13. НАРУШЕНИЕ ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНОСТИ ГРАВИТАЦИОННЫМ ПОЛЕМ

Общий принцип относительности будет в теории выполненным, если физические уравнения для тензорных и спинорных полей записаны в координатно-инвариантной и лоренц-ковариантной форме. Нарушение общего принципа относительности, а именно общей лоренц-ковариантности соотношений между физическими величинами, возникает тогда, когда геометрия мирового пространства V_4 определяется не только лоренц-инвариантной метрикой g_{ik}, но и лоренц-неинвариантными комбинациями тетрад h^A_k. Это значит, что законы, определяющие структуру пространства — времени, должны быть также координатно-ковариантными. Если эти уравнения определяют лишь g_{ik}, то структура пространства лоренц-инвариантна. Но если из этих уравнений определяются и другие, не лоренц-инвариантные величины, то лоренц-ковариантность метрической структуры V_4 нарушается. В частности, общая лоренц-ковариантность структуры V_4 полностью исчезает, если из структурных уравнений в V_4 можно определить 16 компонент тетрадного поля h^A_k.

Поскольку понятие глобального вращения пространства — времени V_4 не имеет физического смысла, то нужно потребовать ковариантность относительно локальных лоренцевых вращений (таких вращений, для которых $\omega^A_{B,l} = 0$). Это накладывает ограничения на структуру уравнений в V_4: они должны быть инвариантны относительно локальных лоренцевых вращений. Последнее выполняется, в частности, если уравнения, определяющие структуру V_4, являются координатно-ковариантными дифференциальными уравнениями для 16 компонент h^A_k. Из слабого принципа эквивалентности следует, что геометрическая структура пространства — времени тождественно описывает гравитационное поле. Поэтому о наличии или отсутствии в теории общего принципа относительности можно судить по структуре уравнений для гравитационного поля. Если они лоренц-инвариантны, то общий принцип относительности имеет место, в противном случае — нет.

Переход от g_{ik} к полному ансамблю тетрад h^A_i означает одновременно и нарушение сильного принципа эквивалентности, так что сильный принцип эквивалентности и общий принцип относительности взаимозависимы. Это будет продемонстрировано ниже*.

Итак, полная теория гравитационного поля, исходящая из понятия системы отсчета, требует введения уравнений для тех нелоренцевых преобразований тетрады отсчета, которые преобразуют первоначальные тетрады Минковского в соответствующие римановы объекты**. В пространстве Минковского мы должны иметь полевые уравнения для тетрад h^A_k или спинтензоров $\sigma^{\dot{\mu}\nu}_k$. Эти уравнения должны быть первоначально сформулированы в ковариантном пред-

---

* См. дополнение «Принцип эквивалентности и экранирование силы тяжести».

** Обоснование см. в § 14.

ставлении (с нижними пространственно-временными индексами), так как преобразование η_{AB} в g_{ik} (см. ниже)

$$g_{ik}=h_i^A\, h_k^B\, \eta_{AB}=\Omega_C^A\, \Omega_D^B\, \delta_i^C\, \delta_k^D\, \eta_{AB}$$

определяет метрический тензор с нижними индексами (см. § 4 настоящей главы).

Если принять, что эти тетрадные поля 4-векторные (т. е. соответствуют бозонам с нулевой массой покоя), то можно ожидать, что уравнение для тетрад должно напоминать уравнение Гейзенберга

$$i\sigma_{\alpha}^{k\dot{\beta}}\, \psi_{\dot{\beta}\,\|\,k}+l^2\, \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{k}\, \psi^{\dot{\beta}}\, \psi^{\dot{\delta}}\, \sigma_{k\varepsilon\dot{\delta}}\, \psi^{\varepsilon}=0.$$

Только вместо вейлевской части $i\sigma^{k}\,\alpha^{\dot{\beta}}\, \psi_{\dot{\beta}\,\|\,k}$ в уравнение Гейзенберга нужно ввести оператор Даламбера $\Box\, h_k^A$, а вместо произведения трех спинорных полей — произведение трех векторных полей. Тогда часть уравнения Гейзенберга, отвечающая за взаимодействие, будет не что иное, как потенциалоподобная связь вейлевских спиноров с током Дирака (плотность тока $\sim \psi^{\dot{\delta}}\, \sigma_{k\varepsilon\dot{\delta}}\, \psi^{\varepsilon}$).

Так как источником гравитационного поля является тензор энергии—импульса Θ_k^i, то в уравнения для h_i^A в качестве взаимодействующего члена войдет выражение, описывающее потенциалоподобную связь с тензором энергии—импульса Гейзенберга:

$$\varkappa\, h_l^A\, \Theta_i^l=\varkappa\, \Theta_i^A.$$

Из соображений размерности константа связи $\varkappa$ должна быть равна эйнштейновской гравитационной константе с точностью до численного множителя.

Потенциалоподобная связь гравитации и материи неизбежна, так как из тензора материи Θ_i^k и из h_k^A можно образовать только 4 вектора. Последовательная тетрадная теория приводит, таким образом, к однородным уравнениям относительно материи и гравитации. (Потенциалоподобная связь могла бы быть устранена, если бы в член взаимодействия были введены 4 дополнительных векторных поля. В этом случае простейший тип связи в декартовых координатах имел бы вид $\varkappa\Theta^k$; $\delta_k^B\omega_B^A$.)

В псевдодекартовых координатах уравнения для тетрад имеют вид [7]

$$\eta^{mn} h^A_{i,mn} + \varkappa h^A_l \Theta^l_i = 0.* \qquad (4.40)$$

В вакууме $\Theta^k_l = 0$, тогда для тетрадного поля h^A_l получим

$$\Box h^A_i = 0. \qquad (4.40\text{a})$$

Для 16 уравнений (4.40) при заданных начальных и граничных условиях тетрады h^A_l, а следовательно, и метрические спинтензоры $\sigma^{\alpha\beta}_l$ определены с точностью до глобальных преобразований Лоренца ($\omega^A_{B,l} = 0$). В квантовой теории поля с учетом гравитации действует значительно более слабая группа симметрии, чем группа симметрии уравнения Гейзенберга.

Так как в тензор материи Гейзенберга входят, кроме спинтензоров, тетрады и их производные, то из (4.40) следует существенно нелинейная теория взаимодействия гравитации и материи, в которой уравнения для материальных полей и (4.40) самосогласованны. Можно получить приближенную теорию слабого гравитационного поля, если взять Θ^i_k из релятивистского уравнения Гейзенберга и подставить его в (4.40). Это — линеаризация точных гравитационных уравнений.

Тетрадное поле можно проквантовать (что соответствует квантованию гравитационного поля), причем «гравитоны» оказываются безмассовыми частицами спина 1, а не 2.

Процесс квантования вакуумного поля тривиален:

$$\left[h^A_i(x),\ h^B_k(x')\right] = \eta^{AB}\,\eta_{ik}\, D(x, x'), \qquad (4.41)$$

---

* Можно получить теорию, в некотором смысле дуальную к (4.40), если вместо ковариантных тетрад h^A_i в качестве первичных величин теории взять контравариантные тетрады h^i_A[7]. Вследствие неэквивалентности плоского оператора $\Box$ и римановой метрики g_{ik} эти теории и физически оказываются различными

$$\Box h^i_A + \varkappa h^k_A \Theta^i_k = 0. \qquad (*)$$

Эти уравнения во втором приближении дают неизометрические метрики с (4.40), в результате смещение перигелия $\Delta\varphi = 5/6$ эйнштейновского (ср. § 15). Но так как первичными являются ковариантные метрика и тетрады, то уравнение (*) не является линейным уравнением для системы отсчета, определяющей метрику. Это скорее уравнение для преобразованной искомой тетрады h^A_i.

где $D(x, x')$ — причинная функция Иордана—Паули для уравнения Даламбера. В общем случае вместо (4.41) будем писать

$$\left[h_i^A(x), h_k^B(x') \right] = \eta^{AB} \eta_{ik} F(x, x'), \tag{4.41a}$$

где $F(x, x')$ — некоторая двухточечная функция, соответствующая двухточечной бозонной функции уравнения Гейзенберга. Точному определению $F(x, x')$ не поддается. Феноменологическое гравитационное поле и макроскопическая мировая метрика могут быть определены как операторное среднее билинейного произведения полевых операторов h_i^A

$$g_{ik} = \langle | h_i^A h_k^B | \rangle \eta_{AB}. \tag{4.42}$$

Видим, что квантование гравитационного поля не приводит к квантованию метрики макроскопического пространства — времени.

Гравитационное поле — дальнодействующее, а потому для него должна быть сформулирована макроскопическая теория. В такой теории динамику материи и гравитации не будем описывать точным уравнением Гейзенберга, а лишь потребуем, чтобы динамические свойства феноменологической квантовой материи были совместны с квантовой теорией поля. В частности, постулируем справедливость эйнштейновского динамического уравнения для тензора материи T_i^k

$$(\sqrt{-g}\, T_i^k)_{;\, k} = (\sqrt{-g}\, T_i^k)_{,\, k} - \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, T^{mn} g_{mn,\, i} = 0, \tag{4.43}$$

что означает справедливость эйнштейновского принципа эквивалентности инертной и (пассивной) тяжелой масс.

Следуя Гейзенбергу, заметим, что фундаментальное поле ψ_α описывает безмассовые частицы, а масса покоя появляется лишь при взаимодействии с вакуумом. Тензор материи Гейзенберга, в противоположность феноменологическим теориям, имеет равный нулю шпур

$$\Theta = \Theta_l^l = 0.$$

По аналогии с теорией Эйнштейна потребуем, чтобы в приближении слабого поля теория переходила в ньютоновскую, причем распределение материи — островное. В том же приближении ньютоновская теория должна быть справедлива и внутри материальных распределений, т. е. их массы определяются по формуле

$$m_A = c^{-2} \int \left(T_4^4 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3\right) d^3x. \qquad (4.44)$$

Это требование дает возможность написать окончательный вид уравнений поля тетрад с феноменологическим тензором материи T_i^k [7]:

$$\left.\begin{aligned} &\Box\, h_i^A + \varkappa\, h_l^A\, T_i^{*l} = 0 \\ \text{с} \qquad & \\ &T_i^{*l} = T_i^l - \frac{1}{2}\,\delta_i^l\, T, \end{aligned}\right\} \qquad (4.45)$$

где $\varkappa = 8\pi G/c^4$ — эйнштейновская гравитационная константа [7] (см. также § 15).

В уравнениях поля тензор материи $T_i^{*l} = T_i^l - \frac{1}{2}\,\delta_i^l\, T$ связан с тетрадным полем потенциальным образом (а не по типу уравнения с источником, как в теории Эйнштейна). Так как в T_i^l, кроме метрического тензора g_{ik} и его производных, входят еще h_i^A со своими производными, то (4.45) — система нелинейных уравнений относительно h_i^A. Она решается совместно с (4.43) и уравнением состояния материи. Для метрического тензора из (4.45) и (4.1) следуют 10 уравнений*:

$$\Box\, g_{ik} - 2h_{i,m}^A\; h_{k,n}^B\; \eta^{mn}\, \eta_{AB} = -2\varkappa\, T_{ik}^*. \qquad (4.45\text{a})$$

Уравнения (4.45) с заданными начальными и граничными условиями фиксируют тетрадное поле с точностью до глобальных преобразований Лоренца, а следовательно, определяют риманово пространство с абсолютным параллелизмом в смысле Эйнштейна.

Наряду с обсужденной уже формой члена связи возможна и другая, а именно

$$\varkappa\, h_l^A\, \eta^{ml}\, \eta_{kn}\, T_m^{*n}, \qquad (4.46)$$

отличающаяся от использованной в (4.45) тем, что в ней подняты индексы с помощью плоской метрики η_{ik}.

---

* Ср. с биметрическими тензорными уравнениями (3.97).

Симметризуя, получим уравнение

$$\frac{\varkappa}{2} h_l^A \left(T_k^{*l} + \eta_{km} \eta^{ln} T_n^{*m}\right) = \frac{\varkappa}{2} h_l^A Q_k^l, \qquad (4.47)$$

которое можно вывести также из вариационного принципа для h_l^A с функцией Лагранжа

$$2L = -\eta^{kl} \eta^{mn} \eta^{AB} h_{Ak, m} h_{Bl, n} + \varkappa h_{Al} h_{Bn} \eta^{AB} \eta^{ml} T_m^{*n}, \qquad (4.48)$$

что является преимуществом (4.47). Вместо (4.45) можно теперь написать уравнение [8]

$$\Box h_i^A + \frac{\varkappa}{2} \left(T_i^{*l} + \eta^{lm} \eta_{in} T_m^{*n}\right) h_l^A = 0. \qquad (4.49)$$

Оно во всех физически важных случаях практически не отличается от (4.45) (см. § 15).

По нашему мнению, связь между материей и гравитацией должна быть не типа уравнения с источником (как в теории Ньютона или Эйнштейна), а потенциалоподобной (связи типа Ферми совместно с моделью Юкава). Уравнения гравитационного поля в этом случае становятся однородными дифференциальными уравнениями и в произвольных координатах имеют вид

$$a^{mn} h_{i,\, mn}^A + \frac{\varkappa}{2} \left(T_i^{*l} + a^{ml} a_{ni} T_m^{*n}\right) h_l^A = 0, \qquad (4.50)$$

где $a^{mn}(x^{|l}) = \frac{\partial x^{|m}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^{|n}}{\partial x^k} \eta_{ik}$, а $a_{mn}(x^{|l})$ — плоская метрика в произвольных криволинейных координатах $x^{|l} = x^{|l}(x^k)$. Запятой обозначены теперь ковариантные производные с метрикой $a_{mn}(x^{|l})$. Оператор $\Box$ является ковариантным оператором Даламбера для векторного поля. Величина Q_k^l из (4.47) означает теперь

$$Q_k^l = T_k^{*l} + a_{kr} T_m^{*n} a^{ml}.$$

В соответствии с этими уравнениями плотность источника гравитационного поля, которая по Эйнштейну и Ньютону определяется как

$$R_0^0 = \varkappa T_0^{*0} \qquad (4.51а)$$

и

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \qquad (4.51б)$$

соответственно, теперь будет задаваться уравнением

$$\Delta h_0^0 = \varkappa h_0^0 T_0^{*0}. \tag{4.51в}$$

Иначе говоря, эффективная активная гравитационная масса зависит от гравитационного потенциала, причем таким образом, что при увеличении гравитационного квазиньютоновского потенциала эффективная гравитационная масса уменьшается (см. § 15 и 16).

С учетом квазиньютоновского потенциала h_4^4 эффективная гравитационная масса m_A плотного тела K, состоящего из N частиц, становится меньше суммы $\sum_{n=1}^{N} m_{An}$ отдельных частиц тела: $m_A < \sum_{n=1}^{N} m_{An}$. (Здесь под эффективной активной гравитационной массой m_A всегда подразумевается гравиметрически измеренный вес сферически-симметричного распределения материи, обладающего сферическим ньютоновским потенциалом.) Напротив, инертная масса m_{Tn} и пассивная масса m_{Pn} просто складываются, т. е. имеем $\sum_n m_{Tn} = m_T$ и $\sum_n m_{Pn} = m_P$ соответственно (см. § 15 и 16).

По отношению к трансформационным свойствам системы «материя плюс гравитация» в тетрадной теории можно сказать следующее: уравнения для материальных полей в V_4 лоренц-ковариантны и эйнштейн-ковариантны. Так как между $\sigma_l^{\alpha\beta}$ в лоренц-ковариантной записи спинорных уравнений Дирака или Гейзенберга и тензором g_{ik} в эйнштейн-ковариантной записи тензорных полевых уравнений имеет место связь (4.23), то влияние гравитационного поля сказывается как на спинорных, так и на тензорных полях. При этом спинорные уравнения оказываются лоренц-инвариантными и эйнштейн-ковариантными. Уравнения гравитационного поля определяют метрические спинтензоры (4.23) и, следовательно, метрический тензор g_{ik}. Они эйнштейн-ковариантны, однако не ковариантны относительно локальных лоренцевых преобразований. Напротив, при таком преобразовании из (4.45) вытекает

$$\Box \overline{h}_i^B + \varkappa \overline{h}_l^B T_i^{*l} = 2\eta^{mn} \omega^B_{A,\,m} h^A_{i,\,n} + h_i^A \Box \omega_A^B. \tag{4.52}$$

Уравнение (4.45) или (4.49) ковариантно только относительно постоянных лоренцевых вращений [11].

Итак, самосогласованная система уравнений материальных и гравитационного полей с заданными начальными и граничными условиями дает решения эйнштейн-ковариантные, но не лоренц-общековариантные.

Абсолютный параллелизм в V_4 не определяется динамикой материальных полей. Но h_i^A определяются именно обратным воздействием полей материи на V_4. Если же рассматривается замкнутая система «материя плюс гравитация», то из ее динамики следует определение g_{ik} и затем тетрад h_i^A с точностью до локальных лоренц-преобразований. Истинными (истинная система отсчета) будут тогда те тетрады, для которых метрика g_{ik} при заданном тензоре материи T_i^k есть решение уравнений (4.50).

Независимо от проблемы физического смысла спинорных величин при некоторой модификации уравнений тетрадной теории появляется следующий побочный результат: замена метрического поля g_{ik} тетрадным полем h_i^A означает извлечение корня квадратного из гравитационного потенциала Эйнштейна. Тем самым уравнения поля не определяют метрику g_{ik}, она появляется только в результате внутреннего умножения тетрад h_i^A (ср. § 9).

Следующее существенное отличие тетрадной теории от эйнштейновской заключается в особенностях уравнений поля, сформулированных для случая плоского пространства (4.40а). Из них следует, что возмущение гравитации распространяется всегда со скоростью c, а не со скоростью света в V_4, зависящей от $g_{ik}(x^l)$. Так как эта последняя во всех случаях меньше c, то скорость гравитационных возмущений будет всегда больше скорости света в V_4. Это значит, что «гравитоны» в мировом пространстве обладают мнимой массой.

Самодействие гравитации в тетрадной теории возможно только через связь с материей. В вакууме гравитационное поле действует на распространение гравитационной волны столь же слабо, как и в теории Максвелла электромагнитное поле слабо влияет на распространение световых лучей.

Итак, несмотря на далеко идущее соответствие феноменологических следствий тетрадной теории и теории Эйнштейна, между ними имеются и существенные различия. В частности, отличие гравитационного поля от материальных полей приобретает в тетрадной теории иной характер, чем в ОТО Эйнштейна (см. § 14). Квантование гравитации в тетрадной теории осуществляется в пространстве Минковского. Характеристические поверхности тетрадной теории являются изотропными поверхностями также в пространстве Минковского. А все остальные поля в тетрадной теории квантуются уже в римановом пространстве V_4, и характеристические поверхности для негравитационных безмассовых полей являются изотропными поверхностями пространства V_4.

§ 14. НЕЛОРЕНЦЕВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ ОТСЧЕТА

Уравнение поля

$$\square h_l^A + \frac{\varkappa}{2} \left(h_k^A T_l^{*k} + a_{ls} a^{kr} h_k^A T_r^{*s} \right) = 0 \qquad (4.53)$$

следует понимать так: в мировом пространстве V_4 существует некоторая плоская фоновая метрика

$$a_{ik} = \varphi^A_{,\,i}\, \varphi^B_{,\,k}\, \eta_{AB}$$

такая, что по отношению к ней пространство систем отсчета V_4^* и мировое пространство V_4 эквивалентны. Из уравнений поля определяются системы отсчета

$$h_l^A (x^r) \quad \text{с} \quad h^A_{l,\,r} - h^A_{r,\,l} \neq 0, \qquad (4.54)$$

которые в общем случае ортонормированы не относительно плоской метрики a_{ik}, а относительно

$$g_{ik} = h_i^A\, h_k^B\, \eta_{AB}. \qquad (4.55)$$

Вследствие этого (см. § 11) в случае тензорных полей лоренц-ковариантные соотношения между измеряемыми физическими величинами эквивалентны тензорным уравнениям, определенным в римановом пространстве с метрикой (4.55). Равным образом для спинорных полей лоренц-ковариантные производные (и спинорные аффинные связности) определяются относительно метрических спинтензоров $\sigma^{l\mu\dot\nu} = h^l_A \sigma^{A\mu\dot\nu}$. Это значит, что поля материи изменяются под действием внешних сил не в плоском V_4^*, а в V_4 с метрикой (4.55) [11]. Определяемые уравнением (4.53) (с соответствующими граничными и начальными условиями тетрады) h_l^A дают обобщение инерциальных систем отсчета в специальной теории относительности. Инерциальная система в декартовых координатах имеет вид

$$\underset{0}{h}{}_l^A = \delta_l^A, \tag{4.56}$$

а в произвольных координатах

$$\underset{0}{h}{}_l^{|A} = \frac{\partial x^{|k}}{\partial x^{|l}} \delta_k^A = \varphi^A_{,l}, \quad \text{где} \quad \varphi^A = \varphi^A(x^{|l}). \tag{4.56a}$$

Они принадлежат к плоской метрике

$$\eta_{ik} = \delta_i^A \delta_k^B \eta_{AB} \tag{4.57}$$

и соответственно

$$a_{ik} = \varphi^A_{,i} \varphi^B_{,k} \eta_{AB} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{|i}} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial x^{|k}} \eta_{mn}. \tag{4.57a}$$

В вакууме уравнения поля (4.53) переходят в волновое уравнение

$$\Box h_l^A = 0. \tag{4.58}$$

Если надлежащим выбором граничных и начальных условий существование свободных гравитационных волн исключено, то (в декартовых координатах) инерциальная система (4.56) будет решением уравнения (4.58), свободным от сингулярностей, с граничными условиями

$$h_i^A \to \underset{0}{h}{}_i^A = \delta_i^A \quad \text{для} \quad x^l \to \infty. \tag{4.59}$$

Эта инерциальная система накрывает V_4 в случае, если установлена гравитационная постоянная $\varkappa = 0$ (включение гравитационного поля). Если же при существовании материи опять включено гравитационное поле, т. е. принято $\varkappa \neq 0$, то это означает деформацию инерциальной системы (4.56), что соответствует некоторой неголономной нелоренцевой трансформации, как это было показано выше.

Матрица Ω_B^A этих неголономных преобразований дается (в декартовых координатах $\{x^l\}$) выражением

$$h_i^A = \Omega_B^A(x^l)\, \delta_i^B \tag{4.60a}$$

с объектом неголономности

$$\Omega^A_{B,\,C} - \Omega^A_{C,\,B} \neq 0. \tag{4.60б}$$

Неголономные преобразования переводят инерциальные тетрады δ_i^B в общие тетрады h_i^A:

$$h_i^A = \Omega_B^A\, \delta_i^B = \eta^{AC}\, \Omega_C^B\, \eta_{BD}\, \delta_i^D \tag{4.61а}$$

и

$$h_A^i = \eta_{AC}\, \Omega_B^C\, \delta_l^B\, g^{il} = h_l^B\, \eta_{AB}\, g^{il}. \tag{4.61б}$$

Теперь в соответствии с определением можно записать

$$h_i^A\, h_k^B\, \eta_{AB} = g_{ik} \tag{4.62а}$$

и

$$h_A^i\, h_B^k\, g_{ik} = \eta_{AB}. \tag{4.62б}$$

С матрицей обратной δ_l^A,

$$\delta_A^l = \eta^{lk}\, \eta_{AB}\, \delta_k^B, \tag{4.62в}$$

выражение (4.61в) принимает вид

$$h_A^i = \Omega_A^{-1\,B}\, \delta_B^i, \tag{4.63}$$

где $\Omega_A^{-1\,B}$ есть обратная и транспонированная матрица

$$\Omega_A^B\, \Omega_B^{-1\,C} = \delta_A^C = \Omega_A^B\, \Omega_B^{-1\,C}. \tag{4.64}$$

Тем самым находим

$$g_{ik} = \Omega_C^A\, \Omega_D^B\, \delta_i^C\, \delta_k^B\, \eta_{AB} = \gamma_{CD}\, \delta_i^C\, \delta_k^D \tag{4.65а}$$

и

$$g^{ik} = \Omega_A^{-1\,C}\, \Omega_B^{-1\,D}\, \delta_C^i\, \delta_D^k\, \eta^{AB} = G^{CD}\, \delta_C^i\, \delta_D^k. \tag{4.65б}$$

Матрицы

$$\gamma_{AB} = \delta_A^i\, \delta_B^k\, g_{ik} = \Omega_A^C\, \Omega_B^D\, \eta_{CB} \tag{4.66а}$$

и

$$G^{AB} = \delta_i^A\, \delta_k^B\, g^{ik} = \Omega_C^{-1\,A}\, \Omega_D^{-1\,B}\, \eta^{CD} \tag{4.66б}$$

взаимообратны:

$$G_{AC}\, \gamma_B^C = \delta_B^A. \tag{4.66в}$$

В случае, если

$$\gamma_{AB} = \eta_{AB}, \tag{4.67а}$$

имеет место также и

$$G^{AB} = \eta^{AB}, \tag{4.67б}$$

и преобразования сводятся к лоренц-вращениям, причем

$$\Omega_B^A = \Omega_B^{-1\,A} = \omega_B^A. \tag{4.67в}$$

Преобразования, обратные (4.65), переводят риманову метрику g_{ik} в плоскую метрику η_{ik}. Имеет место

$$\eta_{AB} = \Omega_{AC}\,\Omega_{BD}\,G^{CB} = \Omega_A^{-1\,C}\,\Omega_B^{-1\,D}\,\gamma_{CD} \tag{4.68}$$

и вместе с (4.62в)

$$\begin{aligned}\eta_{ik} &= \delta_i^A\,\delta_k^B\,\eta_{AB} = \delta_i^A\,\delta_k^B\,\Omega_{AC}\,\Omega_{BD}\,\delta_m^C\,\delta_n^D\,g^{mn} = \\ &= \delta_i^A\,\delta_k^B\,\Omega_A^{-1C}\,\Omega_B^{-1D}\,\delta_C^m\,\delta_D^n\,g_{mn}.\end{aligned} \tag{4.69}$$

Плоская метрика η_{ik} может, таким образом, быть выражена через Ω_A^B и g^{ik} (или соответственно для обратных матриц Ω_A^{-1B} и g_{ik}).

В произвольной криволинейной системе координат $\{x^{\,|\,l}\}$ с условием

$$\varphi^i(x^{\,|\,l}) = \delta_A^i\,\varphi^A(x^{\,|\,l}) = x^i(x^{\,|\,l}) \tag{4.70а}$$

инерциальные тетрады $\underset{0}{h}{}_i^A = \delta^A$ переходят в

$$\underset{0}{h}{}_i^{|\,A} = \underset{0}{h}{}_l^A\,\frac{\partial x^l}{\partial x^{\,|\,i}} = \varphi^A_{\;,\,i} = \frac{\partial x^A}{\partial x^{\,|\,i}}, \tag{4.70б}$$

а истинные (римановы) тетрады h_i^A переходят в

$$h_i^{|\,A} = \Omega_B^A\,\underset{0}{h}{}_i^{|\,B} = \Omega_B^A\,\varphi^B_{\;,\,i}. \tag{4.70в}$$

Для метрик находим соответственно

$$\begin{aligned} g_{ik}^{|} &= h_i^{|\,A}\,h_k^{|\,B}\,\eta_{AB} = \gamma_{AB}\,\varphi^A_{\;,\,i}\,\varphi^B_{\;,\,k} = \Omega_C^A\,\Omega_D^B\,\eta_{AB}\,\varphi^C_{\;,\,i}\,\varphi^D_{\;,\,k} = \\ &= \Omega_{AC}\,\Omega_{BD}\,\varphi^A_{\;,m}\,\varphi^B_{\;,\,n}\,\varphi^C_{\;,\,i}\,\varphi^D_{\;,\,k}\end{aligned} \tag{4.71а}$$

и

$$\begin{aligned}\alpha_{ik} &= \varphi^A_{\;,\,i}\,\varphi^B_{\;,\,k}\,\Omega_{AC}\,\Omega_{BD}\,\delta_m^C\,\delta_n^D\,g^{mn} = \\ &= \varphi^A_{\;,\,i}\,\varphi^B_{\;,\,k}\,\Omega_{AC}\,\Omega_{BD}\,\varphi^C_{\;,\,m}\,\varphi^D_{\;,\,n}\,g^{mn},\end{aligned} \tag{4.71б}$$

причем

$$a_{ik}(x^{\,|\,l}) = \varphi^A_{\;,\,i}\,\varphi^B_{\;,\,k}\,\eta_{AB} = \frac{\partial x^m}{\partial x^{\,|\,l}}\cdot\frac{\partial x^n}{\partial x^{\,|\,k}}\,\eta_{mn}. \tag{4.71в}$$

Если окончательно инерциальная система отсчета совершает постоянное лоренц-вращение в плоском пространстве, то тогда переходят к системе отсчета в плоском пространстве, движущейся равномерно относительно первоначальной, и для старых h_i^A просто будет иметь место представление

$$h_i^A = \Omega_B^A \beta_C^B \overline{h}_{\substack{i\\0}}^C. \tag{4.72а}$$

Здесь инерциальные тетрады

$$\overline{h}_{\substack{i\\0}}^A = \beta_C^A \delta_i^C \tag{4.72б}$$

повернуты* относительно первоначальных тетрад δ_i^A, причем матрица вращения постоянна

$$\beta_C^A \beta_B^C = \delta_B^A; \quad (\beta_{C,\, l}^A = 0). \tag{4.72в}$$

Из уравнений поля (4.53) мы получим, учитывая (4.60)

$$\delta_i^B \square_B^A + \varkappa\, \Omega_C^A \delta_l^C Q_i^l = 0, \tag{4.73}$$

т. е.

$$\square\, \Omega_B^A + \varkappa\, \Omega_C^A Q_B^{\overline{C}} = \square\, \Omega_B^A + \varkappa\, Q_{\overline{B}}^A = 0. \tag{4.74}$$

При этом (линейный) оператор, действующий на матрицу преобразования Ω_B^A, содержит при

$$Q_B^{\overline{A}} = \delta_i^A \delta_B^k Q_k^i \tag{4.75}$$

лишь величины, определенные в плоском $\overset{*}{V}_4$ (т. е. при выключенной гравитации).

Уравнения поля (4.74) определяют, следовательно, такую матрицу преобразования Ω_B^A, которая преобразует инерциальную систему плоского пространства — времени $\overset{*}{V}_4$ в «инерциальную систему отсчета» физического V_4 с гравитационным полем и вообще значение некоторой величины Φ^i в СТО

$$\overline{\Phi}^A = \delta_i^A \Phi^i \tag{4.76а}$$

в ее истинное общерелятивистское значение

$$\Phi^A = h_i^A \Phi^i = \Omega_C^A \Phi^{\overline{C}}. \tag{4.76б}$$

---

* В специальной теории относительности обычно принято связывать постоянные лоренц-вращения (4.72 в) тетрад отсчета с одновременным контраградиентным преобразованием координатной системы $x^{i} = \beta_l^i x^l$ при $\beta_l^i = \delta_A^i \delta_l^B \beta_B^A$, так что тогда во всех инерциальных системах отсчета имеет место $\underset{0}{h}_i^A = \beta_B^A \beta_i^l \delta_l^B = \delta_i^A$.

Вследствие ковариантного характера уравнения (4.73) действительны в любой координатной системе. Эти соотношения показывают, что в теорию поля входят в качестве принципиально независимых величин, с одной стороны, плоская или риманова метрика, а с другой стороны, матрицы преобразования.

Вместо инерциальных измеряемых величин $Q^{\overline{A}}_{\overline{B}}$ можно ввести для определения матрицы преобразования Ω^A_B истинные (инерциальные измеряемые величины

$$Q^A_B = h^A_i\, h^k_B\, Q^i_k = \Omega^A_C\, \Omega^D_B\, Q^{\overline{C}}_{\overline{D}}. \tag{4.77}$$

Это дает

$$\square\, \Omega^C_A + \varkappa\, Q^B_A\, \Omega^{-1C}_B = 0, \tag{4.78}$$

так что здесь вместо Ω_{AB} с измеряемыми величинами тензора материи связана обратная матрица $\overset{-1}{\Omega}_{AB}$.

Таким образом, тетрадная теория гравитации является теорией неголономных преобразований, которые переводят плоское V^*_4 с псевдоевклидовым (инерциальным) тетрадным полем в риманово V_4 с однозначно определенным (инерциальным) тетрадным полем. Введение плоской метрики, наряду с римановой метрикой g_{ik}, не ведет к дальнейшей детализации структуры многообразия V_4, а задает лишь дуальность V_4 посредством некоторого (определенного с точностью до глобальных преобразований Лоренца) тетрадного поля.

Как указывалось во введении, первоначальная, интуитивная идея Эйнштейна заключалась в том, что гравитационное поле должно приводить к нарушению инерциальности систем отсчета. Это нарушение можно описать с помощью неголономных преобразований систем отсчета и плоской метрики в риманову метрику g_{ik}. Эта идея была впервые сформулирована Эйнштейном в 1912 г. в дискуссии с М. Абрагамом о гравитации и о принципе относительности. Задачей теории гравитации является, по Эйнштейну, нахождение соответствующих неголономных нелоренцевых преобразований $\Omega^A_B\,(x^l)$ из (4.61) для получения гравитационных полей конкретного вида. Теория гравитации как теория систем отсчета рассматривает именно такие неголономные «изгибания» псевдоевклидовых инерциальных тетрад отсчета, так что уравнения поля гравитации в теории Тредера непосредственно определяют матрицу деформации тетрад. В этом смысле теория Тредера есть прямая реализация первоначальных идей Эйнштейна.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Einstein A.** Riemann-Geometrie unter Aufrechterhaltung des Begriffes Fernparallelismus. Berliner Berichte (1928), 215.
2. **Eisenhart L. P.** Non-Riemannian Geometry. New York, 1927.
3. **Infeld L., Warden B. L.** Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitärstheorie. Berliner Berichte (1933).
4. **Iwanenko D. D.** Gravitation and Unified Picture of Matter. Atti del Congresso sulla Relatività Generale. Florence, 1965, p. 205.
5. **Schouten J. A.** Ricci-Calculus. Berlin, Götingen, Heidelberg, 1953.
6. **Treder H.-J.** Lorentz-Gruppe, Einstein-Gruppe und Raumstructur in: Entstehung, Entwicklung und Perspektiven der Einsteinschen Gravitationstheorie. Berlin, 1966, p. 5.
7. **Treder H.-J.** Ann. Physik, **20** (1967), 194.
8. **Treder H.-J.** Math. Nachr. (1969).
9. **Treder. H.-J.** Intern. J. Theor. Phys., **3** (1970).
10. **Элементарные** частицы и компенсирующие поля. Пер. с англ. Под ред. Д. Д. Иваненко. М., Изд-во, «Мир», 1964.
11. **Иваницкая О. С.** Обобщенные преобразования Лоренца и их приложения. Минск, Изд-во «Наука и техника», 1969.
12. **Weyl H.** Z. Physik, **56** (1929), 330.
13. **Einstein A., Mayer W.** Semi-Vektoren und Spinoren, Berliner Berichte (1932), 522.
14. **Heisenberg W.** Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen. Stuttgart, 1967.

Глава 5

АБСОРБЦИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В гл. 4 было показано, что введение тетрад не имеет прямых физических следствий, если рассматривается действие только внешнего гравитационного поля, а измеримы лишь тензорные величины. Новая физика с введением тетрад появляется лишь тогда, когда рассматривается самосогласованная система материи и гравитационного поля, например, при рассмотрении эффективного гравитационного вклада некоторого тела в гравитационное поле, создаваемое остальной материей.

Изложенная в гл. 4 тетрадная теория существенно отличается от общей теории относительности в двух пунктах.

1. Функции, определяющие геометрию пространства—времени, в тетрадной теории гравитации образуются с помощью внутреннего произведения гравитационных потенциалов h_i^A. Вытекающие отсюда следствия являются непосредственным результатом нарушения в теории силь-

ного принципа эквивалентности, а потому являются критерием справедливости последнего. Тем самым создается возможность проверки изложенного в четвертой главе общего принципа относительности.

2. Материя в уравнениях (4.45) связана с гравитационным полем потенциалоподобным образом. Такой тип связи обязателен для любой последовательной тетрадной теории, хотя, разумеется, возможны и другие типы связи. Вытекающие из такой формы уравнений следствия также поддаются экспериментальной проверке. Косвенно они могут служить также для проверки нарушения сильного принципа эквивалентности в тетрадной теории.

В дальнейшем будут изложены некоторые конкретные результаты тетрадной теории, а также произведено сравнение их с выводами ОТО и с экспериментальными данными. В § 15 сопоставлены значения трех классических эффектов в тетрадной теории и в ОТО, а в § 16 и 17 рассмотрены эффекты, которые можно объединить одним названием — абсорбция силы тяжести. В частности, рассмотрены более подробно оба пункта отличий тетрадной теории от ОТО.

§ 15. ЭЙНШТЕЙНОВСКИЕ ЭФФЕКТЫ

Необходимым критерием феноменологической гравитационной теории, как уже неоднократно указывалось, является правильный переход к предельному случаю слабого статического гравитационного поля в почти инерциальной системе отсчета в случае непрерывного или островного распределения материи. Поэтому перейдем к линейному приближению тетрадной теории и покажем, что оно, совместно с динамическим уравнением (4.43), совпадает с линейным приближением ОТО Эйнштейна [1]. Представим тетрады в виде

$$h_i^A = \delta_i^A + \chi_i^A, \tag{5.1}$$

причем предполагается применение их для слабого гравитационного поля и квазиинерциальных систем отсчета, т. е. добавка в (5.1) должна быть малой:

$$\chi_i^A \ll 1. \tag{5.1a}$$

В силу равенства

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \eta_{AB} \left(\delta_i^A \chi_k^B + \delta_k^B \chi_i^A \right) + \eta_{AB} \chi_i^A \chi_k^B \tag{5.2}$$

из (5.1) находим вид метрического тензора

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \chi_{ki} + \chi_{ik} = \eta_{ik} + \gamma_{ik} (\gamma_{ik} \ll 1). \qquad (5.2а)$$

Если тетрады (5.1) получены в результате бесконечно малых лоренцевых вращений, то

$$\chi_{ik} = -\chi_{ki}, \quad \gamma_{ik} = 0. \qquad (5.2б)$$

Уравнения поля (4.45) с учетом (5.1а) в линейном приближении будут иметь вид

$$\Box \chi_i^A + \varkappa \delta_l^A T_i^{*l} = 0, \qquad (5.3)$$

тогда как для метрики в том же приближении ([1], [8]) имеем уравнение

$$\Box \gamma_{ik} = -2\varkappa T_{ik}^{*}. \qquad (5.3а)$$

Из (5.3а) следует, что тетрадное поле, которое можно получить из тетрады δ_i^A при помощи лишь лоренц-вращения, не может быть приближенным решением уравнений поля с материей.

Рассмотрим теперь некогерентную материю T_i^k в покоящейся системе отсчета. Это приводит к

$$T_{\mu}^{*\nu} = -\frac{1}{2} \rho \delta_{\mu}^{\nu}, \quad T_0^{*0} = \frac{\rho}{2},$$

$$T_{\mu}^{*0} = T_0^{*\mu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3). \qquad (5.4а)$$

Решение уравнения (5.3) с тензором материи (5.4а) дает

$$\chi_0^0 = -\frac{a}{r},$$

$$\chi_{\nu}^{\mu} = \frac{a}{r} \delta_{\nu}^{\mu} (\mu, \nu = 1,2,3) \quad \text{при} \quad a = Gm_A c^{-2}. \qquad (5.4б)$$

В выражении (5.4б) содержится также строгое статическое сферически-симметричное вакуумное решение для массового монополя (т. е. для точечной частицы без внутренней структуры):

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} \left(1 + \frac{a}{r}\right)^2, \quad g_{00} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2,$$

$$g_{0\mu} = 0 \ (\mu, \nu = 1, 2, 3). \qquad (5.5)$$

Сравнивая (5.5) с решением Шварцшильда гравитационных уравнений Эйнштейна в гармонических координатах

$$ds^2 = c^2\,dt^2\,\frac{r-a}{r+a} - \left(1+\frac{a}{r}\right)^2((dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2) =$$

$$= -\frac{r+a}{r-a}\,\frac{a^2}{r}\,(x^1dx^1+x^2dx^2+x^3dx^3)^2, \qquad (5.6)$$

видим, что в линейном приближении, т. е. с точностью до члена, пропорционального a^2, обе метрики совпадают. Вопреки этому, во втором приближении получим некоторое отличие от ОТО (см. ниже). Далее, из динамических уравнений как для точечных масс, так и для фотонов следует геодезический закон движения в пространстве с метрикой (5.5). Отсюда получаем в качестве первого гравитационного эффекта ньютоновское уравнение движения в поле тяготения массы m_A (кеплеровское движение), а также красное смещение в поле тяжести, равное

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{a}{r},$$

и, наконец, эйнштейновское значение для отклонения света

$$V = \sqrt{\frac{g_{00}}{g_{11}}} \approx \left(1-\frac{2a}{r}\right)c, \qquad (5.7)$$

где V — эффективная скорость света в гравитационном поле точечной массы m_A.

Для исследования смещения перигелия потребуется линейный элемент трехмерного пространства только в линейном приближении, а компонента g_{00}, наоборот, в нелинейном приближении:

$$ds^2 = c^2\left(1-\frac{a}{r}\right)^2 dt^2 - \left(1+\frac{2a}{r}\right)((dx^1)^2+(dx^2)^2+(dx^3)^2). \qquad (5.8)$$

Геодезический закон движения в метрике (5.8) дает для движения перигелия ([1], [4]) следующее выражение:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(1+7\,\frac{a\,(u_1+u_2)}{4}\right), \text{ т. е. } \Delta\varphi = \frac{7}{6}\,\Delta\varphi_{\text{Эйнштейн}}. \qquad (5.9)$$

Это выражение допускает некоторую корректировку. Общая внешняя статическая сферически-симметричная метрика сосредоточенного источника содержит не одну константу Шварцшильда, а две константы:

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}\left(1 + \frac{b}{r}\right)^2, \quad g_{00} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2,$$
$$g_{0\nu} = 0 \quad (\mu,\ \nu = 1, 2, 3). \tag{5.10}$$

Метрика (5.10) создается некоторым неточечным сферическим распределением масс (см. §16). Условие $a \neq b$ не изменяет ньютоновского приближения как в выражении для смещения перигелия, так и в выражении для отклонения света.

В то время как в вакуумном решении отношение константы Шварцшильда a к константе b остается неопределенным, то при заданной внутренней структуре источника поля оно может быть определено с помощью условий сшивки внешнего и внутреннего решений. Для физических условий, реализуемых в нормальных звездах (например, в Солнце), имеет место $a \approx b$ (см. §16). Существенные отклонения от эйнштейновской и ньютоновской теорий начинаются в том случае, если вблизи материи гравитационное поле является сильным.

§ 16. СТАТИЧЕСКОЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕРИИ

Статический тензор материи идеальной жидкости имеет вид

$$T_i^k = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{0} & -p & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{0} & -p \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Линейный элемент пространства — времени возьмем в виде

$$ds^2 = \varphi(r)^2\, dt^2 - g(r)^2 \left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) \tag{5.12}$$

и примем для тетрад и метрики a_{ik} плоского пространства, в котором сформулированы гравитационные уравнения, выражения

$$h_0^0 = \varphi, \quad h_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu g; \quad h_0^\mu = h_\mu^0 = 0 \ (\mu, \nu = 1, 2, 3),$$
$$a_{ik} = \eta_{ik}. \tag{5.13}$$

Уравнения для тетрадного поля (4.45)

$$\Box h_i^A + \varkappa h_l^A T_i^{*l} = 0 \tag{5.14}$$

приводятся тогда к двум уравнениям:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\varkappa\,\varphi(\rho + 3p); \tag{5.15а}$$

$$\Delta g = -\frac{1}{2}\chi g(\rho - p). \tag{5.15б}$$

В случае статического сферически-симметричного решения в вакууме ($p = 0$, $\rho = 0$) получаем отсюда

$$\varphi = 1 - \frac{a}{r}, \qquad g = 1 + \frac{b}{r} \tag{5.16}$$

и коэффициенты в метрике (5.10)

$$g_{00} = \left(1 - \frac{a}{r}\right)^2, \quad g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}\left(1 + \frac{b}{r}\right)^2,$$
$$g_{\nu 0} = 0\,(\mu, \nu = 1, 2, 3). \tag{5.17}$$

Эта метрика резко отличается от статического сферически-симметричного решения (5.6) общей теории относительности. В то время как в решении Шварцшильда (5.6) характеристическая поверхность $r = 2m$ (поверхность Шварцшильда) полупроницаема, поверхность в решении (5.17), соответствующая поверхности Шварцшильда, полностью непроницаема для частиц. К этому вопросу мы еще раз вернемся в конце параграфа.

Другое отличие, как уже было указано, состоит в том, что решение (5.17) зависит не от одной константы m Шварцшильда, а от двух констант. Поведение обеих этих констант устанавливается при заданной структуре островного распределения материи при помощи условий сшивки. В общей теории относительности для гравитационных полей, зависящих от времени и принадлежащих одному и тому же распределению материи, имеет место асимптотика

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu}\left(1 + \frac{2m}{r}\right),$$
$$g_{0\mu} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3).$$

Масса Шварцшильда задается при этом в соответствии с теоремами Толмана и Эйнштейна и Паули выражением

$$m = \frac{2G}{c^4}\int\sqrt{-g}\,T_0^{*0}\,d_x^3 = \frac{G}{c^4}\int\sqrt{-g}\,(T_0^0 - T_\nu^\nu)\,d^3x. \tag{5.18}$$

В эйнштейновских координатах $\sqrt{-g} = 1$ она равна

$$m = \left(\frac{G}{c^4}\right) \int (T_0^0 - T_\nu^\nu)\, d^3x. \qquad (5.19)$$

В нашем случае идеальной жидкости из тензора материи следует

$$T_0^0 = \rho, \quad T_\mu^\nu = -p\delta_\mu^\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3), \qquad (5.20)$$

откуда для массы m находим

$$m = \left(\frac{G}{c^4}\right)(\rho + 3p)\, d^3x. \qquad (5.21)$$

В тетрадной теории внешняя статическая метрика (5.16) содержит две константы a и b, что вытекает из потенциалоподобного вида уравнений поля. Чтобы лучше оттенить возникающие при этом новые эффекты, перепишем уравнения (5.14) и (5.15) в виде

$$\Box\, h_i^A + \varkappa M_i^A = 0 \qquad (5.22)$$

и

$$\Delta\varphi = \varkappa M_0^0, \qquad \Delta g = -\varkappa M_1^1, \qquad (5.23)$$

причем конкретная форма M^A определена только с точностью до требования $M_i^A = k_k^A T_i^{*k}$ (где k_i^A — четыре произвольных векторных поля).

Из (5.23) при условии сферической симметрии статического внешнего поля получили на основании гауссовых интегральных теорем

$$a = \left(\frac{2G}{c^4}\right) \int M_0^0\, d^3x = \left(\frac{G}{c^4}\right) \int k_0^0 (\rho + 3p)\, d^3x, \qquad (5.24а)$$

$$b = \left(\frac{2G}{c^4}\right) \int M_1^1\, d^3x = \left(\frac{G}{c^4}\right) \int k_1^1 (\rho - p)\, d^3x. \qquad (5.24б)$$

Вообще говоря, эти интегралы отличаются друг от друга: в частности, давление p приводит к увеличению константы a и к уменьшению b. Если положить, например, $k_i^A = \delta_i^A$ (вместе с h_i^A вводим, таким образом, еще 4 векторных поля, которые предполагаются постоянными), то $a > b$* [2].

---

* Речь идет о частном выборе связи, рассмотренном на стр. 104.

В нашем случае потенциалоподобной связи

$$M_i^{\mathrm{A}} = h_k^{\mathrm{A}} T_i^{*k}, \quad a = \frac{G}{c^4} \int \varphi (\rho + 3p)\, d^3x,$$

$$b = \frac{G}{c^4} \int g (\rho - p)\, d^3x \tag{5.25}$$

возникает второй эффект. Из уравнений (5.15а) и (5.15б) и условий $\varphi \to 1$ и $g \to 1$ при $r \to \infty$ следует, что $\varphi < 1$ и $g > 1$. При $p = 0$ из (5.25) и (5.19) получаем $a < m < b$.

Чтобы сравнить оба эти эффекта, рассмотрим несжимаемую жидкость с $\rho = \mathrm{const}$ [3]. Для тензора материи (5.11) в метрике (5.12) получим динамическое уравнение

$$\varphi \frac{dp}{dr} + (\rho + p) \frac{d\varphi}{dr} = 0. \tag{5.26}$$

Уравнения (5.15) и (5.26) можно решить итерациями. Для этого φ, g и p разложим в ряд по степеням $\varkappa\rho/2$; после подстановки их в в (5.15) и (5.26) получим

$$\left.\begin{aligned} p &= \rho \left[\frac{R^2 - r^2}{6} \cdot \frac{\varkappa\rho}{2} + \frac{3R^4 - 5R^2r^2 + 2r^2}{45} \left(\frac{\varkappa\rho}{2}\right)^2 + \right. \\ &\qquad \left. + 0\left(\left(\frac{\varkappa\rho}{2}\right)^3\right)\right], \\ \varphi &= 1 - \frac{3R^2 - r^2}{6} \cdot \frac{\varkappa\rho}{2} + \frac{5R^4 - r^4}{60} \left(\frac{\varkappa\rho}{2}\right)^2 + 0\left(\left(\frac{\varkappa\rho}{2}\right)^3\right), \\ g &= 1 + \frac{3R^2 - r^2}{6} \cdot \frac{\varkappa\rho}{2} + \frac{3R^4 - R^2r^2}{18} \left(\frac{\varkappa\rho}{2}\right)^2 + 0\left(\left(\frac{\varkappa\rho}{2}\right)^3\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.27}$$

Здесь R — радиус сферического распределения материи. Пренебрегая членами высшего порядка малости, из (5.25) и (5.27) получим

$$\left.\begin{aligned} a &= m\left(1 - \frac{3}{5} \frac{m}{R} + \frac{3m^2}{R^2} + \ldots\right), \\ b &= m\left(1 + \frac{m}{R} + \frac{27}{35} \cdot \frac{m^2}{R^2} + \ldots\right). \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

Чтобы устранить отсюда эффекты, связанные с давлением, используем (5.27) формально и в случае $p = 0$ пренебрежем уравнением (5.26).

Тогда получим

$$a = m\left[1 - \frac{6}{5}\,\frac{m}{R} + 0\left(\frac{m^2}{R^2}\right)\right],$$

$$b = m\left[1 + \frac{6}{5}\,\frac{m}{R} + 0\left(\frac{m^2}{R^2}\right)\right]. \qquad (5.29)$$

Сравнение (5.28) и (5.29) показывает, что эффекты, связанные с давлением, и эффекты потенциалоподобной связи одного порядка. Однако последние, вообще говоря, преобладают, так что

$$a < m < b, \qquad X = \frac{b}{a} > 1. \qquad (5.30)$$

Заметим, что применение итерационных методов для плотных звезд, у которых m и R сравнимы между собой, не совсем корректно. В случае $R < 2m$ эффекты потенциалоподобной связи резко преобладают над эффектами, связанными с давлением. На поверхности распределение φ становится меньше $^1/_2$, а из условия положительной определенности тензора материи $\rho > 3\rho$ следует

$$(\rho + 3p)\,\varphi < 1 \quad \text{и} \quad (\rho - p)\,g > 1,$$

т. е. имеет место неравенство (5.30).

Константа a пропорциональна активной тяжелой массе $m_A (a = Gm_A/c^2)$. Следовательно, она в тетрадной теории оказывается меньше, чем в ОТО. Это обстоятельство можно интерпретировать как подавление гравитирующего действия источника гравитационным потенциалом φ, иными словами, как своеобразная абсорбция гравитации. Напротив, источник q не подавляется полем g. Истинная абсорбция $X = b/a$ в принципе может быть измерена, так как она входит в выражения для смещения перигелия и для отклонения света [3]. Релятивистские эффекты смещения перигелия и отклонения света являются тем самым, по крайней мере, в принципе, проверкой нарушения сильного принципа эквивалентности, поскольку $X = 1$ имеет место только в общей теории относительности, удовлетворяющей сильному принципу эквивалентности. Все же практическое определение X из указанных эффектов невозможно, так как $|X - 1|$ для Солнца имеет величину порядка 10^{-6}.

Различие между интегралами (5.19) и (5.25) тем больше, чем сильнее гравитационные потенциалы внутри материи.

Чтобы можно было обсудить количественное соотношение этих величин, необходимо рассмотреть полную систему уравнений феноменологической тетрадной теории, состоящую из гравитационных уравнений, динамического уравнения и уравнения состояния материи [5]. Принимая во внимание (5.13), получаем из (5.15) уравнения

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=\frac{\varkappa}{2}(\rho+3p)\varphi \tag{5.31а}$$

и

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial g}{\partial r}\right)=-\frac{\varkappa}{2}(\rho-p)g. \tag{5.31б}$$

Интегрирование этих уравнений дает

$$\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\Big|_0^r=\frac{\varkappa}{2}\int\limits_0^r(\rho+3p)\varphi\,dr \tag{5.32а}$$

и

$$\left(r^2\frac{\partial g}{\partial r}\right)\Big|_0^r=-\frac{\varkappa}{2}\int\limits_0^r(\rho-p)g\,dr. \tag{5.32б}$$

Так как φ и g при $r=0$ должны быть регулярными, то имеет место $r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=0}=0$ и $r^2\frac{\partial g}{\partial r}\Big|_{r=0}=0$. Тем самым получается из (5.32а,б)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\varkappa}{2r^2}\int\limits_0^r(\rho+3p)\varphi\,r^2dr \tag{5.33а}$$

и

$$\frac{dg}{dr}=-\frac{\varkappa}{2r^2}\int\limits_0^r(\rho-p)\,gr^2\,dr. \tag{5.33в}$$

Граничными условиями для φ, g, $\frac{d\varphi}{dr}$ и $\frac{dg}{dr}$ будут

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(R)=1-\frac{a}{R}, \quad g(R)=1+\frac{b}{R},\\ &\frac{d\varphi}{dr}\Big|_{r=R}=\frac{a}{R^2}, \quad \frac{dg}{dr}\Big|_{r=R}=-\frac{b}{R^2}\end{aligned}\right\}. \tag{5.34}$$

Из $T^k_{i;k}=0$ получаем, учитывая (5.11) и (5.12), динамическое уравнение

$$\frac{dp}{dr}=-\frac{p+\rho}{2}\varphi^{-2}\frac{\partial}{\partial r}\varphi^2. \qquad (5.35)$$

Точную картину поведения масс a и b можно получить при высоких центральных плотностях лишь с помощью интегрирования уравнений (5.33) и (5.35). Учтем граничные условия (5.34) и положим

$$\varphi(r)=\varphi(0)\psi_0(r), \quad g(r)=g(0)\psi_1(r),$$
$$\psi_a(0)=1 \quad (a=0,1). \qquad (5.36)$$

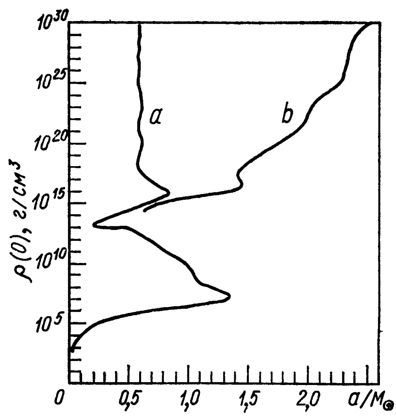

Рис. 1. Массы a и b (в единицах массы Шварцшильда $M_\odot$ Солнца) в зависимости от центральной плотности.

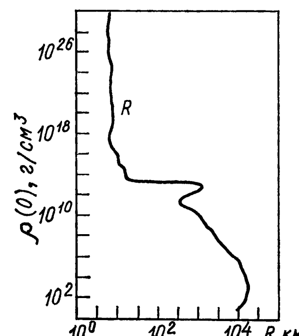

Рис. 2. R как функция $\rho(0)$.

Уравнения (5.33), вместе с (5.36), переходят в уравнения

$$\frac{d\varphi_a}{dr}=\frac{\varkappa}{r^2}\lambda_a, \quad \frac{d\lambda_a}{dr}=T_a r^2\psi_a, \qquad (5.37)$$

$$\frac{dp}{dr}=-(p+\rho)\frac{\varkappa}{r^2}\cdot\frac{\lambda_0(r)}{\psi_0(r)} \qquad (5.38)$$

$\left(T_0=\frac{1}{2}(\rho+3p), T_1=-\frac{1}{2}(\rho-p)\right)$ с начальными значениями $\psi_0(0)=1$, $\lambda_a(0)=0$, $p(0)=p(\rho(0))$.

Из условий сшивки (5.34) для постоянных a и b находим следующие значения:

$$a = -\left[\frac{\psi_0(R)}{\varkappa\lambda_0(R)} + \frac{1}{R}\right]^{-1} \tag{5.39а}$$

и

$$b = -\left[\frac{\psi_1(R)}{\varkappa\lambda_1(R)} + \frac{1}{R}\right]^{-1}. \tag{5.39в}$$

Задаваясь $\rho(0)$ и уравнением состояния $p = p(\rho)$, будем численно интегрировать систему (5.37) и (5.38), начиная

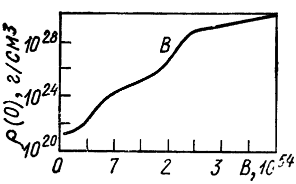

Рис. 3. Число барионов B (внутри ядра с уравнением состояния $p = \rho/3$) в зависимости от центральной плотности $\rho(0)$.

от $r = 0$ и до $r = R$, причем $\rho(R) \leq 7{,}89$ *г/см*^{3}. Пользуясь уравнениями состояния Гаррисона, Вакано и Уилера [6], получаем для a, b и R кривые*, представленные на рис. 1 и 2. Рис. 1 означает, что кривая для a ведет себя так же, как и в общей теории относительности: a стремится к критическому значению $0{,}6M_\odot$. Кривая в области сверхъядерных плотностей существенно отличается от a. Разность $b—a$ возрастает от $0{,}046M_\odot$ при $\rho(0) = 3 \cdot 10^{14}$ *г/см*^{2} до $1{,}94M_\odot$ при $\rho(0) = 10^{30}$ *г/см*^{2}. В соответствии со сказанным выше, это возрастание разности означает рост эффективной абсорбции гравитации.

Обратимся теперь к тем следствиям, к которым приводит в теории гравитационного коллапса эффект абсорбции гравитационного взаимодействия.

В работе [5] подсчитано число барионов

$$B = \int n \sqrt{|g_{\mu\nu}|}\, d^3x \tag{5.40}$$

* Позже мы вернемся к рис. 2.

(где n—плотность числа барионов, $|g_{\mu\nu}|$—детерминант метрики трехмерного пространства) для внутреннего ядра $r \leqslant r_a$ звезд с критической центральной плотностью и уравнением состояния $p = \rho/3$. Рис. 3 дает зависимость числа барионов в центральной области с радиусом от $0{,}17 \times 10^{-2}$ до $0{,}19 \cdot 10^{-2}$ от центральной плотности. Очевидно, что, в отличие от общей теории относительности, в тетрадной теории число барионов B неограниченно возрастает с центральной плотностью ρ (0) в рассматриваемом интервале плотностей. То, что такое поведение числа барионов в тетрадной теории действительно является следствием потенциалоподобной связи, уясняется из следующего качественного рассуждения.

Пусть будут заданы число барионов n, плотность энергии ρ и давление p газа ультрарелятивистских частиц Ферми с массой m, импульсом q и энергией $E = \sqrt{m^2c^2 + q^2} \approx q$:

$$dn = \frac{8\pi}{h^3} p^2 dq, \quad \rho = \int \frac{8\pi}{h^3} q^3 dq,$$

$$p = \int \frac{8\pi}{h^3} q^3 \frac{1}{3} \frac{\partial E}{\partial q} dq = \frac{1}{3} \rho$$

(h — постоянная Планка). Тогда для плотности числа барионов имеем выражение

$$n = \frac{2^{2/3}}{3\pi^{1/2} L^{3/2}} \rho^{3/4} \qquad (5.41)$$

(где L — элементарная планковская длина $\left(\frac{hG}{c^3}\right)^3$, а ρ пересчитано в геометрические единицы [$см^{-2}$]). Тогда из (5.40) и (5.41) получим

$$B \sim \int_0^{r_a} r^2 \rho^{3/4} \left| g_{\mu\nu} \right|^3 dr. \qquad (5.42)$$

Теперь исследуем уравнения поля (5.31) и уравнение (5.35) для $p = \rho/3$ вблизи $r = 0$ при условии, что $\rho(r) \to \infty$ при $r \to 0$. Принимаем также во внимание, что

$$\rho(r) = \rho_0 r^{-\alpha} + \ldots, \quad \alpha > 0, \quad g(r) = g_0 r^{\beta} + \ldots \qquad (5.43)$$

Переходя теперь к уравнениям (5.31) и (5.35), получим

$$\alpha = 2 \quad \text{и} \quad \beta = -\frac{1}{2}. \qquad (5.44)$$

Из (5.42) следует тогда, с учетом (5.43) и (5.44),

$$B \sim \int\limits_0^{r_a} r^{-1}\,dr, \quad B \sim \ln r_a - \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \varepsilon. \tag{5.45}$$

Таким образом, число барионов логарифмически расходится, если ρ при приближении к центру уходит на бесконечность. Напротив, если принять для сравнения $M_i^A = \delta_k^A T_i^{*k}$, то получим

$$\alpha = \frac{8}{5} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{2}{5}. \tag{5.46}$$

Следовательно, для B имеет место

$$B \sim r_a^3 - \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^3.$$

Итак, B остается конечным при отсутствии потенциалоподобной связи и для бесконечных центральных плотностей, точно так же, как и в теории Эйнштейна.

Абсорбция тяжелой массы потенциалом φ и поведение числа барионов B, вызванное противоабсорбционным действием потенциала g, показывают, как парадокс гравитационного коллапса, определенный Уилером как «самый принципиальный кризис в физике», может найти свое объяснение. Как в ньютоновской, так и в эйнштейновской теориях гравитации при заданном объеме V имеется максимальное, критическое число N барионов, которые могут содержаться в этом объеме. Однако введение n следующих барионов в объем V не запрещается. Наоборот, как ньютоновская, так и эйнштейновская теории требуют, чтобы с приближением дополнительных барионов к объему V они втягивались в этот объем V (это, собственно, и является одним из свойств гравитационного коллапса). Однако, так как число барионов N в V не может быть превзойдено даже и после того, как n следующих барионов войдут в объем, число барионов в V не может быть больше N. Иначе говоря, дополнительные n барионов должны бесследно исчезнуть из Вселенной.

Это обстоятельство беспокоит в особенности потому, что звездные модели показывают, что в конечной стадии эволюции звезды порядка солнечной массы $M_{\odot}$ будет достигнута сверхплотная стадия, при которой объем звезды в соответствии с ньютоновской и эйнштейновской теориями больше не будет в состоянии принять все барионы звезды, но излишние барионы не будут иметь возможности удалиться от звезды, так что излишек барионов тем или иным путем должен будет исчезнуть из Вселенной.

В тетрадной теории, благодаря потенциалоподобной связи, нет верхнего предела числа барионов в некотором заданном объеме. Однако тяжелая масса $m_A \sim a$ в конечной стадии эволюции звезды ведет себя так же, как и в общей теории относительности. Лишние барионы «не включаются в гравитационное поле», так как их гравитационное действие экранируется окружающими барионами. Тем самым, в соответствии с тетрадной теорией, космические образования могут иметь значительно более высокую плотность барионов и значительно большее число барионов, однако их тяжелая масса не должна быть существенно больше тяжелой массы нормальной звездной массы и, соответственно этому, вызывает красное смещение спектральных линий, существенно не отличающееся от красного смещения линий нейтронной звезды в теории Эйнштейна.

Действие потенциалоподобной связи, приводящей к подобным физическим следствиям, дополнительно может быть понято качественно. Для этого рассмотрим чрезвычайно простую звездную модель*, для которой мы, за исключением ядра звезды, можем сделать следующие предположения: принимаем $p = 0$, а плотность ρ — постоянной. Относительно ядра, которое окружено слоем постоянной плотности, следует сделать предположение, что оно построено таким образом, что гравитационный потенциал при $r = 0$ регулярен и возможна сшивка с решением вне ядра звезды. Ядро принимается настолько малым, что инертная масса объекта в основном определяется массой слоя постоянной плотности.

Для слоя $\rho = \text{const}$ имеет место уравнение

$$\Delta\varphi - \frac{1}{2}\varkappa\rho\varphi = 0, \quad \varphi = \text{const}. \tag{5.47}$$

Оно имеет, следовательно, вид уравнения Юкавы. Частное решение (5.47), описывающее абсорбцию, дается выражением

---

* Здесь речь идет не о создании серьезной звездной модели, а лишь о такой конструкции, которая дает возможность пояснить способ действия потенциалоподобной связи.

$$\varphi_{\text{Mat.}} = C_0 \frac{e^{-\sqrt{(\varkappa\rho/2)}\, r}}{r}. \tag{5.48}$$

На границе $r = R$ звезды необходимо сшить с решением для вакуума (5.16)

$$\varphi_{\text{Vak}} = 1 - \frac{a}{r}, \quad a \equiv G m_A c^{-2}, \tag{5.49}$$

откуда находим $a = \sqrt{2/\varkappa\rho} + R$. Активная тяжелая масса m_A, стоящая множителем при члене $\sim 1/r$ в вакуумном решении, с возрастанием R увеличивается значительно медленнее, чем инертная масса звезды. (Если взять $M_i^A = \delta_k^A T_i^{*k}$, то вместо (5.47) следует рассматривать уравнение Пуассона $\Delta\varphi = \varkappa\rho/2$. Сшивая полученное решение этого уравнения с внешней метрикой, можно было бы найти активную тяжелую массу, которая с увеличением R возрастала бы уже скорее, чем в случае потенциалоподобной связи.)

Выше мы упоминали уже о второй особенности решения (5.17), связанной с необычным поведением «сингулярной поверхности Шварцшильда» [7]. Уравнение поверхности Шварцшильда $r_s = a + b$, следовательно, она формируется двумя массами, участвующими в создании статического сферически-симметричного поля аддитивно. В отличие от стандартной шварцшильдовской поверхности, на поверхности, следующей из тетрадной теории, свернутый тензор кривизны Римана — скалярная кривизна $R = R_i^i$ — становится сингулярным. Если записать метрику (5.17) в сферических полярных координатах

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r-b}\right)^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{b}{r}\right)^2} dr^2 - $$

$$- r^2 (d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\varphi^2), \tag{5.50}$$

то для R получается*

$$R = R_i^i = -\frac{1}{2} g^{00} g^{11}_{,1} g_{00,1} - \frac{1}{2} g^{00} g^{11} g_{00,1} \left(g^{22} g_{22,1} + \right.$$

* Индекс (, 1) означает производную $\partial/\partial r$.

$$+ \quad g^{33} g_{33,1}) + (\text{для } r \to a + b) \text{ регулярные члены} =$$

$$= \frac{1}{r^3}[-2ab - 4a(r-b)] \frac{1}{r-a-b} + \text{регулярные члены,} \tag{5.51}$$

иначе говоря, скаляр кривизны R имеет при $r \to a+b$ полюс первого порядка. В результате поверхность $r = a+b$ оказывается непроницаемой для всех мировых линий.

Световые конусы, принадлежащие к линейному элементу (5.50), ведут себя при $r = a + b$ так, что частицы могут приближаться к этой поверхности лишь асимптотически со скоростью света. То же самое получается для световых конусов в решении Шварцшильда при $r = 2m$. Однако если в случае решения Шварцшильда можно перейти к координатам Финкельштейна, в которых метрика стационарна, а световые конусы построены так, что поверхность $r = 2m$ может пропустить времениподобные мировые линии, в случае решения для вакуума (5.50) это, как и следовало ожидать, не имеет места (из-за истинной сингулярности на $r = a + b$); не существует такого координатного преобразования, которое сделало бы поверхность проницаемой.

Из существования сингулярности в вакуумной метрике вытекает требование, накладываемое на связь между гравитационным полем и материей: связь должна быть построена таким образом, что радиус $\overline{R}$ статического сферически-симметричного распределения материи, получающийся при использовании разумных уравнений состояния с условием $\rho(\overline{R}) \leqslant 7{,}89$ $г/см^3$, всегда должен быть большим r_s, так что вообще не может существовать никакого вакуумного поля для $r \leqslant r_s$. Численное интегрирование уравнений (5.37) и (5.38) показывает, что это условие выполнено. На рис. 2 показана зависимость $R = \overline{R} - b$ от $\rho(0)$.

§ 17. ЭКРАНИРОВАНИЕ АКТИВНОЙ МАССЫ ЗЕМЛИ

До сих пор рассматривался лишь тот случай, когда осуществлялось ослабление гравитационного действия источника гравитационным полем, созданным этим же источником. В дальнейшем будет рассмотрено ослабление действия источника воздействием внешнего гравитационного поля, а именно ослабление гравитационного действия Земли гравитационным полем Солнца.

Детектором гравитационного действия Земли является ее активная тяжелая масса, которую можно приближенно определить из метрики, описывающей сферически-симметричную часть поля Земли. Определенная таким образом масса может быть измерена при помощи земных методов определения массы Земли (определение массы Земли путем измерения ускорения свободно падающего тела или же путем измерения периода качаний маятника на земной поверхности). Если мы рассмотрим в качестве примера определение массы Земли из ускорения свободно падающего тела, то в этом случае масса Земли определится из гравитационного взаимодействия Земли и пробного тела. Земля свободно движется в гравитационном поле Солнца, поэтому измерительные приборы на ее поверхности образуют локальную инерциальную систему, в которой метрика g_{ik} поля Солнца в первом приближении приравнивается метрике η_{ik} пространства Минковского. Так как в общей теории относительности удовлетворяется сильный принцип эквивалентности (гравитационное поле тождественно метрике g_{ik}, то все внешние гравитационные влияния исчезают; иначе говоря, нет никакого влияния поля Солнца на взаимодействие Земли и пробного тела. Наоборот, в тетрадной теории сильный принцип эквивалентности нарушается: внешнее гравитационное поле Солнца описывают не 10 комбинаций g_{ik}, образованных из тетрад h_i^A, а сами h_i^A. Отсюда следует ожидать, что гравитационное взаимодействие между Землей и пробным телом испытывает влияние гравитационного потенциала Солнца. Так как местоположение Земли в солнечном поле периодически меняется, то тетрадная теория, в отличие от общей теории относительности, должна давать периодическое изменение определенной земным способом активной тяжелой массы Земли. Причина этого состоит в том, что уравнения гравитации одновременно являются уравнениями тетрадного поля, т. е. определены только «корни из g_{ik}». Вычисление показывает, что абсорбция тяжелой массы Земли имеет место, причем к «эффекту извлечения корня» добавляется еще вклад, вызванный потенциалоподобной связью. Измерение этого эффекта может служить критерием выбора между теорией Эйнштейна и тетрадной теорией.

Различия, которые имеют место между тетрадной теорией и общей теорией относительности, можно дополнительно уяснить из уравнения для g_{00}, вытекающего из тетрадных уравнений. Из (5.14) получаем [1]

$$\Box g_{ik} = -2\varkappa \overset{*}{T}_{ik} + 2\eta_{AB}\eta^{mn} h^A_{i,m} h^B_{k,n}. \tag{5.52}$$

Для статических гравитационных полей с диагональными h_i^A отсюда следует

$$-\Lambda g_{ik} = -2\varkappa \overset{*}{T}_{ik} + 2\eta_{AB}\delta^{mn} h^A_{i,m} h^B_{k,n} \tag{5.53}$$

и

$$-\Delta g_{00} = -2\varkappa \overset{*}{T}_{00} + 2h^0_{0,m} h^0_{0,n}\delta^{mn}. \tag{5.54}$$

Подставляя $h^0_0 = 1 + \Phi$ и $g_{00} = 1 + 2\Phi + \Phi^2$, получаем

$$2\Delta\Phi = 2\varkappa \overset{*}{T}_{00} - 2\Phi\Delta\Phi - 4\Phi_{,m}\Phi_{,n}\delta^{mn}. \tag{5.55}$$

Уравнение (5.55) отличается от соответствующего линеаризованного уравнения Эйнштейна для g_{00} отрицательной добавкой $-2\Phi\Delta\Phi - 4\Phi_{,m}\Phi_{,n}\delta^{mn}$. Эта добавка при возрастании Φ вообще растет, поэтому в тетрадной теории появляется эффект ослабления действия источника $\overset{*}{T}_{00}$. Естественно, что во втором приближении

$$g_{00}\overset{*}{T}{}^0_0 = \overset{*}{T}_{00} + \eta_{00}\overset{*}{T}{}^0_0,$$

как это было выяснено выше (см. § 13), так как имеет место

$$\overset{*}{T}_{00} = (1 + 2\Phi + \Phi^2)\overset{*}{T}{}^0_0. \tag{5.55a}$$

При вычислении абсорбции активной тяжелой массы Земли необходимо принять во внимание, что Земля движется вокруг Солнца со скоростью, квадрат которой имеет тот же порядок величины, что и гравитационное поле Солнца: эффект от этой скорости имеет противоположный знак. Однако вычисление [3] показывает, что эффект абсорбции превосходит эффект скорости.

Рассмотрим уравнение

$$\Box h^A_i = -\varkappa h^A_k \overset{*}{T}{}^k_i \tag{5.56}$$

и вычислим измерение сферически-симметричной части поля Земли, на которое влияет изменение места Земли в гравитационном поле Солнца. Для этого будем вновь рассматривать поле Земли как некоторое возмущение поля Солнца. Если обозначить $\underset{0}{h_i^A}$ невозмущенный потенциал Солнца, заданный выражениями (5.12) и (5.16), а $\underset{1}{h_i^A}$ возмущение, вызванное Землей, причем $\underset{S}{T^{ik}}$ и $\underset{E}{T^{ik}}$ соответственно обозначаются тензоры материи Солнца и Земли, то (5.56) можно записать следующим образом:

$$\Box \underset{0}{h_i^A} + \Box \underset{1}{h_i^A} = -\varkappa \left(\underset{0}{h_k^A} \underset{S}{T_i^{*k}} + \underset{0}{h_k^A} \underset{E}{T_i^{*k}} + \underset{1}{h_k^A} \underset{S}{T_i^{*k}} + \underset{1}{h_k^A} \underset{E}{T_i^{*k}} \right). \quad (5.57)$$

Так как уравнение

$$\Box \underset{0}{h_i^A} = -\varkappa \underset{0}{h_k^A} \underset{S}{T_1^{*k}}$$

вне Солнца имеет решение

$$\left. \begin{array}{l} \underset{0}{h_0^0} = 1 - \dfrac{a}{r}; \quad \underset{0}{h_\nu^\mu} = \delta_\nu^\mu \left(1 + \dfrac{a}{r} \right); \\ \underset{0}{h_\nu^0} = \underset{0}{h_0^\nu} = 0, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \quad (5.58)$$

(где r — расстояние от Солнца, a — активная тяжелая масса Солнца), то уравнение

$$\Box \underset{1}{h_i^A} = -\varkappa \left(\underset{0}{h_k^A} \underset{E}{T_i^{*k}} + \underset{1}{h_k^A} \underset{S}{T_i^{*k}} + \underset{1}{h_k^A} \underset{E}{T_i^{*k}} \right) \quad (5.59)$$

решается в требуемом приближении. Можно еще сделать следующие предположения, упрощающие расчет.

1. Так как внутренняя структура Земли, приводящая к эффекту давления, определяется в основном полем Земли, а изменение поля Земли имеет порядок величины эффекта абсорбции, то учет изменения внутренней структуры (эффект давления) привел бы к эффектам высшего порядка. Однако нас интересуют лишь эффекты порядка вариации потенциала. Так как мы хотим вычислить относительное изменение абсорбции, то можно, кроме того, пренебречь также и постоянными эффектами внутренней структуры. В таком случае получим

$$\underset{E}{T^{ik}} = \rho u^i u^k, \quad \rho = \text{const}.$$

На том же основании не следует принимать во внимание внутреннее динамическое уравнение.

2. Член $\underset{1}{h_k^A} \underset{E}{T_i^{*k}}$ в правой части (5.59), который описывает действие поля Земли на массу самой Земли, много

меньше действия потенциала Солнца и к тому же почти постоянен, а поэтому им можно пренебречь.

3. Можно пренебречь также и членом $\underset{1}{h}{}^A_k \underset{S}{T}{}^{*k}_i$, стоящим в правой части (5.59). Он описывает действие потенциала Земли на Солнце и имеет тот же порядок величины, что и эффект, подлежащий вычислению; в окрестности Земли, однако, следующая из этого поправка не имеет сферически симметричной составляющей по отношению к полю Земли.

Уравнение, подлежащее решению,

$$\square \underset{1}{h}{}^A_i = -\varkappa \underset{0}{h}{}^A_k \underset{E}{T}{}^{*k}_i \tag{5.60}$$

после исключения членов, содержащих поправку $\underset{1}{h}{}^A_i$ и плотность материи ρ, вследствие

$$\underset{E}{T}{}^{*k}_i = \rho u_i u^k - \frac{1}{2}\rho\delta^k_i \left(\eta_{AB} \underset{0}{h}{}^A_m \underset{0}{h}{}^B_n + \ldots \right) u^m u^n,$$

можно записать в виде

$$\square \underset{1}{h}{}^A_i = -\varkappa\rho \left(u_i \underset{0}{h}{}^A_k u^k - \frac{1}{2} \underset{0}{h}{}^A_i \right). \tag{5.61}$$

Исходя из формул для кеплеровского движения Земли в поле Солнца:

$$\left.\begin{aligned} &x^i = \left(ct, \frac{p\cos\alpha}{1+\varepsilon\cos\alpha}, \frac{p\sin\alpha}{1+\varepsilon\cos\alpha}, 0 \right); \\ &\frac{d\varphi}{cdt} = \frac{L}{r^2}, \ r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\alpha}, \ p = \frac{L}{a^2}, \ \frac{a}{p} = \frac{L^2}{p^2}, \end{aligned}\right\} \tag{5.62}$$

получаем

$$\left.\begin{aligned} &u^i = U\left(1 - \frac{L}{p}\sin\alpha, \quad \frac{L}{p}(\cos\alpha + \varepsilon), 0 \right); \\ &U = \left[\varphi^2 - g^2 \frac{L^2}{p^2} (1 + 2\varepsilon\cos\alpha + \varepsilon^2) \right]^{-1/2}; \\ &\varphi = \underset{0}{h}{}^0_0, \quad g = \underset{0}{h}{}^1_1; \end{aligned}\right\} \tag{5.63}$$

g_{00} — компонента метрического тензора, преобразованная при помощи матрицы

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{\prime k}} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \xi & -\xi\frac{L}{p}\sin\alpha & \xi\frac{L}{p}(\cos\alpha+\varepsilon) & 0 \\ -\xi\frac{L}{p}\sin\alpha & 1+O\left(\frac{L^2}{p^2}\right) & O\left(\frac{L^2}{p^2}\right) & 0 \\ \xi\frac{L}{p}(\cos\alpha+\varepsilon) & O\left(\frac{L^2}{p^2}\right) & 1+O\left(\frac{L^2}{p^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad (5.64)$$

$$\xi = \left[1 - \frac{L^2}{p^2}(1+2\varepsilon\cos\alpha+\varepsilon^2)\right]^{-1/2}$$

к локальной системе покоя Земли, составляется тогда из невозмущенных тетрад $\underset{0}{h_i^A}$ (5.58) и решений h_i^A (5.61) следующим образом:

$$g'_{00} = \eta_{AB}\left(\underset{0}{h_i^A} + \underset{1}{h_i^A}\right)\left(\underset{0}{h_k^B} + \underset{1}{h_k^B}\right)\frac{\partial x^i}{\partial x^{\prime 0}}\,\frac{\partial x^k}{\partial x^{\prime 0}}. \quad (5.65)$$

Чтобы вычислить искомый эффект, необходимо знать массу Земли с точностью до $O(L^2/p^2) = O(a/p)$. Для этого достаточно записать первые части уравнений (5.61) с точностью до L/p следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\Box\,\underset{1}{h_0^0} = -\varkappa\rho\left(U^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi\right);\\
&\Box\,\underset{1}{h_1^0} = -\varkappa\rho\left[\frac{L}{p}\sin\alpha - O\left(\frac{L^2}{p^2}\right)\right];\\
&\Box\,\underset{1}{h_2^0} = \varkappa\rho\left[\frac{L}{p}(\cos\alpha+\varepsilon) + O\left(\frac{L^2}{p^2}\right)\right];\\
&\Box\,\underset{1}{h_0^1} = \varkappa\rho\left[\frac{L}{p}\sin\alpha + O\left(\frac{L^2}{p^2}\right)\right];\\
&\Box\,\underset{1}{h_0^2} = -\varkappa\rho\left[\frac{L}{p}(\sin\alpha+\varepsilon) + O\left(\frac{L^2}{p^2}\right)\right];\\
&\Box\,\underset{1}{h_1^1} = \Box\,\underset{1}{h_2^2} = \frac{\varkappa\rho}{2}\left[1+O\left(\frac{L^2}{p^2}\right)\right];\\
&\Box\,\underset{1}{h_2^1} = \Box\,\underset{1}{h_1^2} = \varkappa\rho\cdot O\left(\frac{L^2}{p^2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (5.66)$$

Масса Земли, измеренная гравиметром, установленным на поверхности Земли, определяется, как это было показано выше, сферически-симметричной составляющей земного потенциала вблизи Земли, в локальной системе покоя Земли. В (5.65) следует подставить вместо h_i^A запаздывающие потенциалы монополя из (5.66):

$$g'_{00} = \xi^2\left[\varphi^2 - g^2\frac{L^2}{p^2}(1+\varepsilon\cos\alpha+\varepsilon^2)\right]+$$

$$+2\frac{m_{E_0}}{R}\left[\varphi^2\xi^2 - 2\varphi^4U^2\xi^2 + 3\frac{L^2}{p^2}(1+2\varepsilon\cos\alpha+\varepsilon^2)\right] \quad (5.67)$$

(где R — расстояние от центра Земли).

Таким образом, поправочный коэффициент массы Земли равен [3]

$$\Theta = 2\varphi^4U^2\xi^2 - \varphi^2\xi^2 - 3\frac{L^2}{p^2}(1+2\varepsilon\cos\alpha+\varepsilon^2),$$

причем оба первых члена следует брать с точностью до L^2/p^2. Если разложить это выражение по степеням L/p, то получим

$$\Theta = 1 - \frac{2a}{p}(1+\varepsilon\cos\alpha) = 1 - \frac{2a}{r}. \quad (5.68)$$

В (5.65) входят перекрестные члены

$$2\eta_{AB}\underset{0}{h_i^A}\underset{1}{h_k^B}\frac{\partial x^i}{\partial x^{\mid 0}}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial x^{\mid 0}}.$$

Так как эти члены влияют на составляющую $\frac{2m_{E_0}}{r}\Theta$ в g'_{00}, то независимо от того, будут ли $\underset{1}{h_i^A}$ определены из уравнений поля с потенциалоподобной связью или без нее, будет иметь место влияние потенциала Солнца $\underset{0}{h_i^A}$ на активную массу Земли. В случае, когда исследуются лишь эффекты «корня из метрики», а не эффекты потенциалоподобной связи $\left(M_i^A = \delta_k^A T_i^{*k}\right)$, получаем

$$\Theta = 1 - \frac{a}{p}(1+\varepsilon\cos\alpha) = 1 - \frac{a}{r}. \quad (5.69)$$

Эффект «корня из метрики», таким образом, по отношению к абсорбции активной тяжелой массы Земли оказывается в точности равным эффекту, обусловленному потенциалоподобной связью.

Тяжелая масса Земли тем сильнее абсорбируется полем Солнца, чем ближе Земля подходит к Солнцу. Вследствие эксцентриситета траектории Земли существует годичная периодичность расстояния Земля — Солнце, которая приводит к годичному периоду в изменении величины активной тяжелой массы. Для относительного максимального колебания активной тяжелой массы Земли получаем выражение

$$\varepsilon \cdot \frac{2a}{p} = 3{,}3 \cdot 10^{-10}.$$

Для того чтобы иметь возможность измерить это колебание, необходим стабильный в течение года гравиметр указанной точности. В принципе, это находится в пределах современных экспериментальных возможностей. Обнаружение этого эффекта будет означать, что любая теория, удовлетворяющая сильному принципу эквивалентности, неправильно описывает гравитацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Treder H.-J.** Ann. Physik, **20** (1967), 194; Monatsber. Dt. Akad. Wiss, 9 (1967), 283.
2. **Kasper U.** Monatsber. Dt. Akad. Wiss, **12** (1970), 286.
3. **Liebscher D.-E.** Internat. J. Theor. Phys., **2** (1969), 89.
4. **Liebscher D.-E.** Monatsber. Dt. Akad. Wiss., **9** (1967), 573.
5. **Kreisel E.** Ann. Physik, **23** (1969), 180.
6. **Harrison B., Thorne K. S., Wakano M., Wheeler J. A.** Gravitational Theorie and Gravitational Collapse. University Press, Chicago, 1965.
7. **Borzeszkowski H.-H.** Ann. Physik, **22** (1969), 326.
8. **Kasper U., Treder H.-J.** Ann. Physik, **22** (1969), 201.

ДОПОЛНЕНИЕ

ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ЭКРАНИРОВАНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ (ТЕЗИСЫ)

I. Эмпирическим основанием общей теории относительности Эйнштейна является так называемый слабый принцип эквивалентности. Из универсальной пропорциональности инертной и пассивной тяжелой массы, определенной в опытах Этвеша—Дикке с чрезвычайно малой погрешностью, вплоть до $1 : 10^{-10}$, Эйнштейн вывел локальную эквивалентность гравитации и инертности в общей динамике частиц и полей.

Для обсуждения дальнейшего развития общерелятивистской теории гравитации, созданной Эйнштейном в 1915 г., имеет значение различие между слабым и сильным принципами эквивалентности. Разница между этими формами принципа эквивалентности связана с тем, что доказана лишь эквивалентность инертной и пассивной масс.

II. Масса входит в гравитационную динамику Ньютона в трех различных значениях: во-первых, как инертное сопротивление, инертная масса m_T; во-вторых, как постоянная связи, которая показывает, как сильно действует некоторое заданное гравитационное поле с силой $F_i = -\partial\varphi/\partial x^i$ на тело — эта постоянная связи и является пассивной гравитационной массой m_P; наконец, в-третьих, как активная гравитационная масса m_A, а именно, как интенсивность источника гравитационного поля.

В двух первых значениях массы входят в закон движения Ньютона:

$$m_T \frac{d^2x^i}{dt^2} = -m_P \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \qquad (A1)$$

третье значение массы содержится в ньютоновском гравитационном потенциале

$$\Phi = -m_A/r. \qquad (A2)$$

Эквивалентность инертной и тяжелой масс означает, что при соответствующем выборе единиц измерения имеет место универсальный закон

$$m_T = m_P. \qquad (A3)$$

Из ньютоновского принципа равенства действия и противодействия следует универсальная пропорциональность активной и пассивной гравитационных масс:

$$m_A = Gm_P, \qquad (A4)$$

где G — ньютоновская гравитационная постоянная.

Однако принцип равенства действия и противодействия тождествен с теоремой о сохранении центра масс, а эта теорема нарушается в общем римановом пространстве—времени, поскольку оно, согласно гравитационной теории Эйнштейна, соответствует некоторому произвольному гравитационному полю. Поэтому принципиально нельзя исходить из ньютоновского принципа равенства действия и противодействия. Более того, в рамках дозволенного небесной механикой в общей релятивистской теории гравитации допускается нарушение универсальной пропорциональности пассивной и активной тяжелой масс. Различные релятивистские теории гравитации различаются здесь лишь по тому, каким способом они допускают нарушение принципа равенства действия и противодействия.

III. Относительно структуры общерелятивистского пространственно-временного мира следует различать три фундаментальные группы преобразований, которые совпадают в пространстве Минковского.

Эти группы преобразований следующие.

1. Эйнштейновская группа общих координатных преобразований

$$x^{|i} = x^{|i}(x^l). \tag{A5}$$

2. Группа Ли свободных от силового воздействия движений тел и полей, возможных в пространстве—времени без деформации его структуры. В плоском пространстве — времени специальной теории относительности каждое действительное перемещение тела относительно некоторой заданной координатной системы может быть математически заменено изменением координатной системы при закрепленном положении тела. Условием того, чтобы это было возможно в обычном римановом пространстве — времени, по крайней мере в бесконечно малых масштабах, является выполнение так называемого уравнения Киллинга

$$\xi^i \partial_i g_{kl} = -g_{ki}\partial_l \xi^i - g_{il}\partial_k \xi^i,$$

которое в самом общем случае вообще не имеет решений.

3. Группа Лоренца, которая описывает изменение системы отсчета. Эту систему отсчета можно считать физически реализованной при помощи $(3+1)$-мерной системы нормальных масштабов и нормальных часов. Математически эти системы отсчета представляются при помощи 4 составляющих тетрадного поля h_i^A $(A = 1,2,3,4)$ или, что то же самое, при помощи составляющих метрического спинтензора $\overset{\bullet}{\sigma}{}_i^{\alpha\beta}$ $(\alpha,\ \beta = 1,2)$. Между метрикой g_{ik} и тетрадным полем существует соотношение ортогональности

$$g_{ik} = \eta_{AB}\, h_i^A h_k^B, \quad \eta_{AB} = h_A^i h_B^k g_{ik} \tag{A6}$$

или соответственно

$$g_{ik} = \sigma_i^{\alpha\dot{\beta}} \sigma_k^{\mu\dot{\nu}} \gamma_{\alpha\mu} \gamma_{\dot{\beta}\dot{\nu}} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\dot{\mu}\dot{\nu}} = \sigma_{\alpha\mu}^{i\cdot} \sigma_{\beta\dot{\nu}}^{k\cdot} g_{ik},$$

и лоренцовы вращения системы отсчета задаются при помощи группы преобразований

$$\overline{h}_i^A = \omega_B^A (x^l) h_i^B, \quad \omega_B^A \omega_C^B = \delta_C^A. \tag{A.7}$$

Для формулировки принципа эквивалентности имеют значение лишь первая и третья группы преобразований; вторая группа описывает внутреннюю структуру конкретных гравитационных полей.

IV. Применяя эти понятия, легко можно теперь сформулировать принципы эквивалентности. Для всех тензорных полей имеет значение лишь эйнштейновская группа координатных преобразований, так что все тензорные выражения сами по себе являются лоренц-инвариантными. Принцип эквивалентности Эйнштейна гласит: если динамические уравнения тензорной материи сформулированы в канонической форме, иначе говоря, лишь с первыми производными, то влияние гравитации на динамику этой материи будет получено благодаря тому, что эти уравнения будут записаны точно в эйнштейновской ковариантной форме (лоренц-инвариантны они сами по себе).

Для эйнштейновски-ковариантного способа записи необходимо введение метрического тензора g_{ik} и его первых производных (а именно, трехиндексных символов Кристоффеля):

$$\begin{Bmatrix} i \\ kl \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{im} (-\partial_m g_{kl} + \partial_k g_{lm} + \partial_l g_{mk}).$$

Так как первые производные являются лишь аффинными тензорами, то имеет место следующее определение принципа эквивалентности для тензорной материи: локально, т. е. в бесконечно малой окрестности точки P пространственно-временного мира уравнения специальной теории относительности справедливы и при наличии гравитационного поля.

Для спинорной материи старое определение слабого принципа эквивалентности, предложенное Эйнштейном, недостаточно, так как все специально-релятивистские уравнения для спинорной материи сами по себе инвариантны относительно группы Эйнштейна. Слабый принцип эквивалентности для спинорной материи вытекает из требования, что тензорные поля, возникшие из спинорных полей путем квадрирования, удовлетворяют слабому принципу эквивалентности в форме Эйнштейна (включая лемму Вейля). Таким образом, для спинорной материи слабый принцип эквивалентности формулируется так: влияние гравитационного поля на общую динамику спинорной материи описывается при помощи лоренц-ковариантных и эйнштейн-инвариантных канонических уравнений движения. Слабый принцип эквивалентности для спинорной материи является, очевидно, дуальным принципу эквивалентности для тензорной материи, но включает последний принцип в соответствии с выводом.

Для лоренц-ковариантного способа записи спинорных полей недостаточны 10 g_{ik} и их производные; необходимы еще 16 тетрадных компонент, иначе говоря, 16 составляющих спинтензора и их первые производные. Так называемый индекс-символ для переноса спинора

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta l} = \frac{1}{2}\, \sigma^{i\alpha\dot{\gamma}}\, \sigma_{i\beta\dot{\gamma};\, l}$$

является вектором по отношению к группе Эйнштейна, но не лоренц-ковариантной величиной; с помощью соответствующего преобразования Лоренца его можно локально исключить (см. В. А. Фок, Д. Д. Иваненко, 1929).

V. В специальной теории относительности метрические спинтензоры и, тем самым, тетрадные поля обычно фиксируются таким образом, что при этом определяется псевдоевклидовский абсолютный параллелизм. Этот параллелизм в специальной теории относительности выделяет инерциальную систему из всех других систем отсчета. В инерциальных системах тетрады имеют (пользуясь псевдо-декартовыми координатами) форму

$$h^A_l = \delta^A_l, \tag{A8}$$

а метрические спинтензоры являются спинматрицами Дирака—Паули. Если в теории гравитации тетрадные поля принципиально остаются свободно движущимися, иначе говоря, теория гравитации принципиально лоренц-общековариантна, то слабый принцип эквивалентности для спинорной материи допускает также и преобразование в форму Эйнштейна: метрика g_{ik} и тетрады h_i^A всегда локально выбираются таким образом, чтобы уравнения движения для спинорной материи локально совпадали со специально-релятивистскими уравнениями также и при существовании гравитационного поля.

VI. Сильный принцип эквивалентности следует из выше приведенных формулировок слабого принципа эквивалентности на основе замечания, что влияние гравитации на тензорную материю однозначно определяется заданием метрического тензора g_{ik}. Если структура пространства — времени сама полностью определяется метрическим тензором, то имеет место для всех физических явлений, включая и гравитацию, следующее: в бесконечно малой окрестности некоторой мировой точки справедлива специальная теория относительности. Следовательно, различие между специальной и общей теориями относительности состоит в том, что в специальной теории относительности бесконечно малые окрестности всех мировых точек лежат все в одном и том же пространственно-временном многообразии Минковского, тогда как в общей теории относительности каждая из этих окрестностей лежит в некотором другом многообразии Минковского. Утверждение, что специальная теория относительности справедлива в бесконечно малой области даже при наличии гравитационного поля, является сильным принципом эквивалентности. Из установленной справедливости сильного принципа эквивалентности следует затем, что геометрия пространства—времени, а тем самым и гравитационное поле, полностью и исключительно определяются метрическим тензором g_{ik}. Если для описания гравитации будут дополнительно введены другие величины, например гравитационное число G или 16 составляющих h_i^A, соответственно $\sigma_i^{\alpha\beta}$, то сильный принцип эквивалентности окажется нарушенным, ибо преобразований Эйнштейна, имеющихся в нашем распоряжении, недостаточно для того, чтобы локально исключить все гравитационные величины.

VII. Для динамики тензорной материи сильный и слабый принципы эквивалентности, очевидно, тождественны. Поэтому в случае тензорной материи нарушение сильного принципа эквивалентности может стать заметным лишь в гравитационном действии материи. Это означает, что универсальная пропорциональность пассивной и активной гравитационных масс будет нарушена тогда, когда вместо постоянного скалярного коэффициента пропорциональности принята некоторая функция, которая сама зависит от гравитационного поля. Тогда будет нарушен также и принцип противодействия, так что нарушение сильного принципа эквивалентности включает также дополнительное нарушение принципа противодействия.

Для спинорной материи как кинематически, так и динамически имеется различие между требованиями сильного и слабого принципов эквивалентности. Однако сильный принцип эквивалентности требует лоренц-ковариантности общей теории: динамики материи плюс уравнений поля для гравитации. Слабый принцип эквивалентности, наоборот, разрешает фиксирование тетрадных полей гравитационными полями вплоть до постоянных вращений Лоренца. Вследствии этого слабый принцип эквивалентности разрешает введение исключительного класса систем отсчета для спинорной материи.

VIII. Гравитационной теорией, в которой справедлив сильный принцип эквивалентности, является гравитационная теория Эйнштейна 1915 г.

Соответственно сильному принципу эквивалентности g_{ik} определяют только геометрию и гравитацию. Вследствие этого следует определить уравнения поля для гравитации как ковариантные по Эйнштейну дифференциальные уравнения, в однородную часть которых входят лишь g_{ik} и их производные. Естественное требование предельного перехода общерелятивистской гравитационной теории в теорию гравитации Ньютона приводит к общему виду гравитационных уравнений

$$R_{ik} + a g_{ik} R = -\varkappa T_{ik}; \quad \varkappa = 8\pi G/c^4; \quad a = \text{const}. \qquad (\text{A}.9)$$

Эти уравнения удовлетворяют сильному принципу эквивалентности, так как тензор Риччи R_{ik} и скаляр кривизны $R = g^{kl} R_{ik}$ построены лишь из тензора g_{ik} и его первой и второй производных. Из общей ковариантности Эйнштейна следует, что если

$$g_{kl}(x^i) \qquad (\text{A}10\text{a})$$

является решением (A9), то и все преобразованные по Эйнштейну метрики

$$g'_{mn}(x'^i) = \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x'^n} g_{kl} \qquad (\text{A}10\text{б})$$

также будут решениями (A9). Поэтому между 10 составляющими (A9) должны иметь место 4 дифференциальных тождества. (Это является следствием тождеств Бъянки для тензора кривизны Римана.) Имеет место

$$R^k_{i;k} = \frac{1}{2} R_{,\,i}, \text{ т. е. } -\varkappa T^k_{i;\,k} = \left(\frac{1}{2} + a\right) R_{,\,i}. \qquad \text{(A11)}$$

Для того чтобы гравитационные уравнения (A9) были совместимы со слабым принципом эквивалентности, дифференциальные тождества (A11) должны следовать также из гравитационной динамики тензорной материи, которая создается на основе только слабого принципа эквивалентности. Из ковариантной по Эйнштейну записи специально-релятивистских уравнений следует все же для тензора материи динамическое уравнение

$$T^k_{i;\,k} = 0. \qquad \text{(A12)}$$

Это выражение является ковариантным по Эйнштейну определением дифференциальной теоремы энергии — импульса, выведенной в рамках слабого принципа эквивалентности из СТО:

$$\partial k T^k_i = 0. \qquad \text{(A12a)}$$

Сравнивая (A10) и (A11), сразу же получаем определение постоянной a в (A9):

$$a = -1/2. \qquad \text{(A13)}$$

Принимая во внимание (A13), приводим (A9) к уравнениям Эйнштейна:

$$E_{ik} = R_{ik} - (1/2)\, g_{ik} R = -\varkappa T_{ik}. \qquad \text{(A14)}$$

IX. В обобщенных теориях гравитации необходимо обеспечить, чтобы общая ковариантность по Эйнштейну гравитационных уравнений приводила лишь к тривиальным тождествам, т. е. чтобы имелось достаточно большое количество калибровочных параметров. Так как гравитационные уравнения в этих обобщенных теориях формулируются независимо от сильного принципа эквивалентности, гравитационная динамика материи следует в них принципиально не из уравнений для гравитационного поля, а исключительно из слабого принципа эквивалентности и из законов сохранения для материи. Уже при требовании слабого принципа эквивалентности уравнения поля материи сами по себе обеспечивают тождественное выполнение динамического уравнения (A11).

X. Особой формой гравитационной теории, удовлетворяющей только слабому принципу эквивалентности, является теория гравитации — теория систем отсчета. В соответствии с этой теорией гравитационное действие определяет общее нарушение лоренц-ковариантности, между тем как при помощи уравнений поля и граничных условий определяется универсальный параллелизм на удалении, который задается тетрадным или соответственно спинтензорным полем $h_l^A = h_l^A(x^i)$ и соответственно $\sigma_l^{\alpha\dot{\beta}} = \sigma_l^{\alpha\dot{\beta}}(x^l)$. Этот параллелизм вообще не подходит к плоскому пространству — времени и поэтому определяет по (A6) искривленный риманов пространственно-временной мир. Физически этот параллелизм на удалении означает выделение одного класса систем отсчета в качестве «инерциальных».

XI. Все гравитационные теории, которые содержат экранирование тяготения — зависимость эффективной гравитационной постоянной от самого гравитационного потенциала, и нарушают сильный принцип эквивалентности, должны приводить к некоторым одинаковым, по крайней мере по порядку величины, эффектам. Существование или несуществование указанной в § 17 зависимости эффективных планетных масс от их удаления от Солнца является в действительности решающим экспериментом за или против справедливости сильного принципа эквивалентности. Если сильный принцип эквивалентности будет подтвержден, то теория Эйнштейна будет единственно возможной.

XII. В гравитационной теории Эйнштейна с сильным принципом эквивалентности введение тетрад или соответственно спинтензоров в гравитационные уравнения означает лишь применение (избыточных) неголономных координат, т. е. проектирование уравнений на тетрадные или соответственно на спинтензорные поля. Уравнения (A14) при учете (A6) принимают вид

$$E_{AB} = R_{AB} - (1/2)\,\eta_{AB} R = -\varkappa T_{AB} \qquad \text{(A15a)}$$

или

$$E_{\alpha\dot{\beta}\gamma\dot{\delta}} = R_{\alpha\dot{\beta}\gamma\dot{\delta}} = (1/2)\,\gamma_{\alpha\gamma}\,\gamma_{\dot{\beta}\dot{\delta}}\,R = -\varkappa T_{\alpha\dot{\beta}\gamma\dot{\delta}} \qquad \text{(A15б)}$$

вместе с

$$R_{AB} = h^{i}_{A}\, h^{k}_{B} R_{ik} \text{ и т. д.} \tag{A16а}$$

или

$$R_{\alpha\dot{\beta}\gamma\dot{\delta}} = \sigma^{i\,\cdot}_{\alpha\,\beta}\, \sigma^{k\cdot}_{\gamma\,\delta} R_{ik} \text{ и т. д.} \tag{A16б}$$

Вариация функции действия Эйнштейна $R = \sqrt{-g}\, R$ имеет вид

$$\frac{1}{2}\,\frac{\delta R}{\delta h^{A}_{i}} = -\sqrt{-g}\, E^{ik} h^{A}_{k} \tag{A17а}$$

или

$$\frac{1}{2}\,\frac{\delta R}{\delta \sigma^{\alpha\dot{\beta}}_{l}} = -\sqrt{-g}\; E^{ik} \sigma^{\alpha\dot{\beta}}_{k}\,. \tag{A17б}$$

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Д. Д. Иваненко.

КАТАЛОГИ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

1. Геометрический каталог

К первому каталогу отнесем различные варианты «единых» теорий, условно относимых к 20-м годам, когда они возбуждали наибольший интерес. Их целью являлась геометризация не только гравитации, проделанная в ОТО 1916 г., но и электромагнетизма, а средством служили различные отходы от римановой геометрии. Основными теориями оказались: конформная теория Вейля 1918 г., несимметричная метрика Эйнштейна, обобщенная связность Эддингтона, различные типы геометрии Схоутена, пятимерная теория Калуца с вариантами Иордана, Паули, Тири, Эйнштейна и других, геометрия абсолютного параллелизма в пространстве с кручением (Эйнштейн — Вейценбек), геометрия Финслера.

Из множества этих работ не удалось получить никаких физических результатов, за исключением первого вывода уравнения Клейна—Гордона с помощью пятимерной теории. Поэтому продолжение подобных исследований стало вызывать в лучшем случае недоумение. Однако нынешний, более глубокий подход к анализу теорий каталога I позволяет извлечь из них ряд плодотворных идей и методов. Во-первых, следует отметить возросший интерес к кручению, введение которого подсказывается ныне с разных точек зрения (см. ниже каталог III); различные стороны конформности сейчас широко исследуются в гравидинамике и в теории элементарных частиц. Затем следует обратить внимание на возрождение в работах некоторых авторов самой идеи геометризованной трактовки взаимодействий и структуры материи с ударением на топологическую, ранее оставленную в стороне, ее характеристику, конечно, при учете квантовой теории поля. Подобную программу как своеобразный реванш геометризации выдвинул более 10 лет назад Уилер.

В трудах группы Уилера следует отличать отдельные интересные результаты и новые точки зрения на ОТО от допущений и выводов, выходящих за рамки стандартных теорий. Одним из достижений программы Уилера является идея «суперпространства», каждая точка которого является трехмерным пространством. Эти идеи, на которых мы не будем останавливаться, играют определяющую роль в фундаментальных исследованиях и успели обратить на себя общее внимание.

11. Прагматический каталог Торна

Недавно группа Кип Торна (Вилл, Нордведт, Вей Ту-Ни) составила каталог «жизнеспособных» теорий, пригодных прежде всего для объяснения четырех классических эйнштейновских эффектов с точностью, допускаемой современным исследованием Солнечной системы. При этом в каталог Торна включены также и «нежизнеспособные» теории, заведомо не дающие требуемых эффектов. Хотя это и нарушает принцип составления каталога, но анализ этих теорий целесообразен для сравнения с «жизнеспособными» вариантами. В каталоге II речь идет о «метрических» теориях, удовлетворяющих условиям: 1) наличие метрики с обычной сигнатурой $ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$, 2) воздействие гравитации на обычную материю описывается уравнением $\nabla T = 0$, где T — тензор всех видов «обычной» материи без гравитационного поля, ∇ — ковариантная производная.

Далее, для каждой теории подсчитывается первое постньютоновское приближение; идея метода постньютоновских параметров (ПНП) восходит к Эддингтону и была развита Шиффом. Метрике планетной системы придается вид

$$ds^2 = \{1 - 2M'/r + 2\beta\,(M'/r)^2\}\,dt^2 - (1 - 2\gamma M'/r)\,ds_0^2;$$

$$M' = GM/c^2;\ \text{в ОТО}: \gamma = \beta = 1;\quad \text{в СТТ}: \beta = 1,$$

$$\gamma = \frac{1+\omega}{2+\omega}.$$

Однако для учета вращательного эффекта, возможных отклонений от принципа эквивалентности и т. д. оказалось необходимым взять разложение метрики не с двумя, а с девятью параметрами, различные значения которых характеризуют ту или иную «метрическую» теорию. Имеем

$$g_{00} = 1 - 2u + 2\beta u^2 - 4\phi + \zeta A;$$

$$g_{0a} = \frac{7}{2}\Delta_1 v_a + \frac{1}{2}\Delta_2 w_a;$$

$$g_{ab} = -(1 - 2\gamma u)\delta_{ab}.$$

Функции u, ϕ и т. д. описывают распределение плотности ρ, давления p, внутренней энергии Π и т. д.:

$$u(x, t) = \int \frac{\rho(x', t)}{|x - x'|}\, dx';$$

$$\phi(x, t) = \int \frac{\rho(x', t)\cdot\varphi(x', t)}{|x - x'|}\, dx';$$

$$\varphi = \beta_1 v^2 + \beta_2 u + \frac{1}{2}\beta_3\Pi + \frac{3}{2}\beta_4\frac{p}{\rho};$$

$$v_a = dx^a dt.$$

Существующие эксперименты дали следующие границы параметров: $\gamma = 1{,}04 \pm 0{,}08$ (по запаздыванию времени и отклонению света); $\beta = 1{,}14 \pm 0{,}3$ (по сдвигу перигелия и запаздыванию времени); $|\Delta_2 - 1| \leqslant 0{,}03$ (гравиметры); $|2\beta_1 - \beta_4 - 1| \leqslant 0{,}4$ (отношение активной к пассивной массе).

Параметр γ характеризует меру искривления пространства, обязанную телу, β дает меру нелинейности. В позднейших обозначениях и несколько иной нормировке Вилл наряду с β, γ берет параметры α_1, α_2, α_3, ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4. Параметры Вилла α_1, α_2, α_3 характеризуют влияние на постньютонову метрику движения относительно средней выделенной системы отсчета во Вселенной. Для сохранения энергии — импульса требуется $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = \alpha_3 = 0$. Для выполнения всех законов сохранения должны исчезать все семь параметров, кроме γ, β.

Отсылая за деталями к литературе, перечислим коротко основные метрические теории каталога II:

ОТО — один произвольный параметр (космологический член); $\gamma = \beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \Delta_1 = \Delta_2 = 1$, $\zeta = 0$; следовательно, теория удовлетворяет всем известным экспериментам;

СТТ (различные варианты скалярно-тензорной теории Иордана, развитой Брансом—Дикке и др.) —два произвольных параметра: константа связи скалярного поля с обычной гравитацией и космологический член. Напомним, что основой скалярно-тензорной теории является высказанная ранее Дираком идея о зависимости гравитационной константы от космологического времени. В СТТ берется $\phi^{-1}(r, t)$ вместо $G = \text{const}$, причем оказалось удобным взять за основную функцию ϕ^{-1}; затем можно локализовать константу связи и космологическую постоянную, заменив их новыми скалярными функциями (Бергман, Вагонер, Д. Д. Иваненко). Заметим в этой связи, что локализация космологического члена в ОТО, на наш взгляд, по существу приводит к стационарной Вселенной Хойла $\lambda_{\text{ОТО}} \to \to C(x, t)_{\text{Хойл}}$

Для параметров СТТ в каталоге Торна имеем

$$\gamma = \frac{1+\omega}{2+\omega}, \quad \beta_1 = \frac{3+2\omega}{4+2\omega}, \quad \beta_3 = 1 \text{ и т. д.}, \ \zeta = 0.$$

Лагранжиан СТТ имеет вид

$$(-g)^{1/2}\left(\phi R - \omega\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}/\phi + 2\lambda(\phi) + L_m\right);$$

космологический член обычно опускался. При достаточно большом значении параметра: $\omega > 6$, СТТ удовлетворяет всем известным экспериментам и астрономическим наблюдениям; при $\omega \to \infty$, $\phi = \text{const}$, СТТ переходит в ОТО. Интересно отметить, что при $0 < \omega + 3/2 = \varepsilon \ll 1$ СТТ становится приближенно эквивалентной конформноплоской теории Вей Ту-Ни.

В известном смысле СТТ является одним из «ближайших» обобщений ОТО. В период, предшествовавший созданию ОТО, попытки релятивизации ньютоновской гравистатики, начатой еще Пуанкаре в 1906 г., привели затем к скалярной теории гравитации Нордстрема (1912 г.), развивавшейся Эйнштейном.

Обратим сейчас внимание на некоторые новые результаты в СТТ, полученные в нашей группе. Нерелятивистское приближение сводится к уравнениям

$$\phi = c^4\chi_0\left[1 + \frac{1}{c^2} f(x^\nu)\right]; \quad f \ll c^2,$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho; \quad \Delta f = -4\pi G\rho/(\omega + 2)$$

(φ — ньютонов потенциал, $g_{00} = 1 + 2\varphi/c^2$), что приводит к моделям звезд, не отличающимся в этом приближении от ньютоновских (Г. Е. Горелик). Не останавливаясь на скалярно-тензорном обобщении шварцшильдовской задачи, отметим, что первоначальное решение Хекмана и позднейшее решение Бранса—Дикке эквивалентны друг другу, что можно показать, переходя от шварцшильдоподобных координат к изотропным.

Значительный интерес представляет космология в СТТ, основные соотношения которой мы приведем в квазиньютоновской трактовке типа Милна—Мак Кри:

$$-3\chi\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\omega+2}{2\omega+3}\rho + \frac{\omega}{\chi}\dot{\chi}^2 + \ddot{\chi}; \quad \ddot{\chi} = \frac{\rho}{2\omega+3},$$

где $\chi(t) = \phi/c^4$, a — масштабный фактор. Принимая $|\omega| \gg 1$, получим вполне в духе гипотезы Дирака

$$\frac{1}{\chi} \approx \frac{1}{\phi} \approx G \sim \frac{1}{t}; \; a \sim t^{1/2}.$$

В точных космологических решениях СТТ сингулярность, в противоположность ОТО, достигается при конечных значениях масштабного фактора a (в ОТО при $a \to 0$) и хаббловской «постоянной». Более того, оказывается, что в СТТ пробная частица достигает локальной сингулярности за конечное время; сама сингулярность может быть «голой», в противоположность случаю ОТО. Таким образом, неправильными оказываются как утверждения об отсутствии коллапса в СТТ, так и заключение Торна об отсутствии каких-либо существенных различий коллапса в СТТ и ОТО.

Напомним, наконец, что одним из наглядных следствий СТТ является возможность расширения Земли ввиду векового ослабления гравитации, что приводит ко многим результатам, подтверждающим аргументы мобилистов в теории движения континентов (Иордан, Д. Д. Иваненко, М. Х. Сагитов).

Продолжим ознакомление с каталогом II. В векторной гравидинамике, как и в СТТ или в варианте с дополнительным тензорным полем, физика локальных процессов может зависеть от движения относительно некоторой выделенной глобально во Вселенной системы отсчета; в частности, гравитационная константа, как и в СТТ, может меняться под влиянием окружающей материи.

Вопреки обычным представлениям, что эксперимент Юза—Древера (в котором не была найдена анизотропия инертной массы) и эксперименты, не обнаружившие «увлечения» эфира, будто бы опровергают векторный вариант теории, Вилл полагает, что эти опыты исключают только те векторные и дополнительные тензорные поля, которые взаимодействуют непосредственно с материей, но не поля, взаимодействующие только с гравитацией.

Исходя из интеграла действия

$$\delta \int \left[\sqrt{-g}\, G_0^{-1} \{ R + k_{\alpha;\,\beta}\, k_{\gamma;\,\alpha}\, g^{\alpha\gamma} g^{\beta\gamma} \} + L_m \right] d^4x$$

и уравнений поля $k_{\alpha;\,\beta}{}^{;\beta} = 0$, можно построить теорию, где в правой части уравнения Эйнштейна возникает тензор энергии векторного поля, а также рассчитать постньютоновское приближение. Гравитационная константа здесь может меняться со временем. При достаточно малом значении векторного поля ($k^2 < 3 \cdot 10^{-2}$) теория согласуется с опытом. Кустаанхеймо рассмотрел ряд векторных гравидинамик с произвольными параметрами, подобранными для согласования с опытом, однако ему не удалось добиться полного согласования.

Заметим, со своей стороны, что, введя дополнительное поле тензора 2-го ранга $C_{\alpha\beta}$, можно построить теорию типа биметрической (Розен—Коллер—Я. И. Пугачев), в которой имеются два римановых многообразия и строятся относительные величины тензора 3-го ранга в виде разности символов Кристоффеля $s = \Gamma(g) - \Gamma(C)$ (в этой записи опущены для простоты индексы). Если одно из многообразий является плоским пространством, то подобная вспомогательная теория приобретает наиболее простую форму и позволяет проанализировать ряд положений гравидинамики. Эта теория коротко упоминается в каталоге II, впрочем, без указания на ее близость к биметризму и еще без анализа постньютоновского приближения и без сравнения с экспериментом. Более последовательно биметрическую теорию как чисто геометризованную гравидинамику можно было бы включить в каталог I.

Для СТТ два параметра совпадают в старых и новых обозначениях (β, γ); новые (α, ζ) все исчезают.

После ОТО и СТТ в каталоге II главное внимание уделено целой серии конформно плоских теорий гравитации (КПТ), характеризующихся физической метрикой, порождаемой скалярным полем на базе глобальной плоской метрики $g_{\alpha\beta} = \psi\, \eta_{\alpha\beta}$. Кроме того, в КПТ задается полевое уравнение волнового типа для скалярной функции ψ:

$W(\psi) = 4\pi\rho'$, где ρ' определяется либо тензором энергии, либо его следом.

Поскольку максвелловские уравнения конформно инвариантны, то распространение света в КПТ соответствует случаю плоского пространства, так что все КПТ не дают эффектов отклонения света и запаздывания времени в гравитационном поле, т. е. противоречат двум из четырех основных тестов гравитации.

Рассмотрение явно «нежизнеспособных» КПТ в каталоге Торна производится, по-видимому, с целью лучшего анализа постньютоновских предсказаний в различных теориях. В каталоге рассмотрены КПТ разных авторов: Нордстрем (1912 г.), Эйнштейн—Фоккер (1914 г.), Уитроу—Мордух (1960—1965 г.), Литтлвуд — Бергман (1953 — 1956 г.), Ни (1971 г.). В общем случае можно положить $\psi = \exp(-2f(\varphi))$, $\eta^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha\beta} = 4\pi k(\varphi)\rho'$ и, разлагая $f(\varphi) = \varphi + q\varphi^2 + \dots$, $k(\varphi) = 1 + p\varphi + \dots$, можно исследовать постньютоновское приближение. В случае КПТ Нордстрема—Эйнштейна—Фоккера имеем уравнения поля: $R = 24\pi T$, $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ (исчезновение тензора Вейля), а параметры принимают значения $\gamma = -1$, $\beta = 1/2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -3/2$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = -1$, $\zeta = 0$, $\Delta_1 = -1/7$, $\Delta_2 = 1$; в обозначениях Вилла $\gamma = -1$, $\beta = +1/2$, все α и ζ исчезают.

Затем следует класс «слоистых» теорий, где глобальное распределение материи во Вселенной определяет выделенную систему отсчета, в которой только пространственные «слои», ортогональные времени, являются конформно плоскими. В каталоге Торна рассмотрены: теория Эйнштейна 1912 — с переменной скоростью света, где

$$ds^2 = (1 - 2\phi)\,c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

не приводящая к общерелятивистским эйнштейновским (!) эффектам отклонения света, запаздывания времени и сдвига перигелия; варианты Пейдж—Туппера, Папепетру, Йилмаза, Уитроу—Мордуха, Колемана, Розена (1971 г.), Ни (1972 г.). Для иллюстрации приведем еще метрику Папапетру

$$ds^2 = e^{-\varphi}dt^2 - e^{\varphi}ds_3^2,$$

которая, согласно Ни, совместима с известными опытами кроме гравиметрических.

Розен берет метрику $ds^2 = \phi\, dt^2 - \psi\, ds^2_3$, где ϕ, ψ — две скалярные функции, удовлетворяющие некоторым полевым уравнениям. Метрика согласуется с опытом лишь при определенном выборе параметров разложения функций, однако, в противоположность ОТО, здесь, как для вариантов Папапетру и Ни, предсказывается отсутствие увлечения инерциальных систем вращающейся Землей, которое предполагается проверить в Стэнфорде (проект Шиффа—Фэйрбенка).

Различные варианты подобных теорий предсказывают те или иные значения сдвигов в орбите Луны, что в принципе можно зарегистрировать в точных измерениях (лазерный эксперимент с использованием установленных на Луне «зеркал»). Предсказания различных отклонений от выводов ОТО, обязанных нарушению принципа эквивалентности, стали называть эффектами Нордведта (исследовавшего отличие инертной массы от пассивной гравитационной массы). В частности, ввиду того, что собственная гравитационная энергия Луны гораздо меньше, чем Земли, согласно Нордведту (1968 г.), ускорения Земли и Луны по отношению к Солнцу слегка различны, что и приводит к «поляризации» орбиты Луны; при этом анизотропия сдвига лежит далеко за пределами нынешних возможностей лунно-лазерных экспериментов, точность которых, как надеются, составит примерно 10 *см*.

Заметим в этой связи, что лунный лазер в принципе способен заметить ряд других возмущений лунной орбиты, обязанных, например, нелинейной суперпозиции полей Солнца и Земли или же движению Солнечной системы во Вселенной и зависящих от параметров α_i.

Другими предсказаниями нордведтовского типа являются сдвиг стабильных лагранжевых точек Юпитера, модификация 3-го закона Кеплера, поляризации орбит, вызванные Юпитером.

Мы коснулись этих вопросов несколько подробнее, чтобы еще раз передать нынешнюю атмосферу в релятивистской физике: постановка уточненных гравитационных опытов, релятивистская «ревизия» небесной механики, установления различных «ближайших» обобщений эйнштейновской теории гравитации.

III. «Третий» полевой каталог

Приводя в предварительный порядок множество существующих теорий гравитации, для дальнейшей классификации целесообразно объединить в «третий» каталог все варианты, основанные на аналогии поля тяготения с другими полями — скалярным, векторным и т. д., и тем самым питающиеся различными идеями современной теории поля. С этой точки зрения сюда можно отнести скалярную теорию, СТТ, векторные и тензорные варианты, которые с иных позиций включаются в каталоги I или II.

Включим в каталог III различные варианты, исходящие из теорий спина 2. Нетривиальным вариантом является затем «сильная» гравитация Салама, в которой за основу берутся ОТО-подобные уравнения, построенные для волновых функций φ-мезонов спина 2. Предполагается, что барионы взаимодействуют с этим квазигравитационным полем, а через него уже с обычной гравитацией, которая непосредственно связана только с лептонами (подобно тому, как, согласно гипотезе векторной доминантности, адроны связаны с электромагнитным полем через ρ-мезоны).

Наряду с работами, делающими ударение на значении спина, обратим внимание на тетрадные варианты. Отправным пунктом служит установление вида взаимодействия гравитационного поля с фермионами, описываемыми спинорным уравнением.

Как было показано (В. А. Фок, Д. Д. Иваненко, 1929 г.), для этой цели необходимо ввести тетрады и определить через коэффициенты вращения Риччи ковариантную производную спинора. Эти коэффициенты аналогичны символам Кристоффеля в общем тензорном анализе. Позднее тетрадная трактовка гравитации была применена для анализа систем отсчета (см. книгу О. С. Иваницкой), для анализа проблемы энергии (Меллер, В. И. Родичев, Б. Н. Фролов) и установления правдоподобных критериев гравитационных волн (И. М. Дозморов). Выяснилось, что речь идет не о простой переписке эйнштейновских уравнений в тетрадной форме (хотя и в этом случае рассмотрение дополнительных условий придает теории новую окраску), а скорее можно говорить о «тетрадной ревизии» ОТО, причем в конце концов подсказывается мысль, что именно тетрадные компоненты, а не составленная из них метрика, более соответствуют роли волновых функций или потенциалов гравитационного поля.

Обратимся к «крайнему» варианту тетрадной гравитации Тредера (1967 г.) с сотрудниками (см. настоящую книгу), в котором теория строится при отказе от сильного принципа эквивалентности. Анализ постньютоновского приближения и сингулярностей показывает, что здесь восстанавливается основной блок результатов ОТО и СТТ и вместе с тем имеются новые возможности. Выполнение слабого принципа эквивалентности гарантирует обычную форму уравнений всех полей, кроме гравитационного.

Интересны космологические следствия некоторых вариантов теории Тредера. Выбирая квазисинхронную метрику $g_{00} = f^2(t)$, $g_{0a} = 0$, приходим к аналогу уравнений Фридмана:

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \frac{1}{2}\varkappa f(\rho + 3p) = 0, \text{ или } \frac{d^2f}{dt^2} + \frac{1}{2}\varkappa(\rho + 3p) = 0$$

(для случая, когда основное уравнение гравитационного поля имеет вид

$$\Box h_i^A + \delta_k^A\left(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T\right) = 0\Big).$$

Если f не обращается в нуль, то $\gamma = \det(q_{\alpha\beta})$ тоже нигде не исчезает. Иначе говоря, наряду с сингулярными решениями эйнштейновского типа в теории Тредера содержатся и решения, не имеющие особенностей.

Как изложено в книге Тредера, его теория приводит к своеобразной абсорбции гравитации, т. е. к ее ослаблению внутри массивных тел, что позволяет с новой точки зрения посмотреть на проблему коллапса, неизбежность которого отвергается. Так или иначе, тредеровский тетрадный вариант гравидинамики уже оказался интересным в ряде отношений.

К каталогу III следует отнести трактовку гравитации как «компенсирующего» поля (Утияма, А. М. Бродский — Д. Д. Иваненко — Г. А. Соколик, чьи работы развили Киблл, Б. Н. Фролов). Для компенсации производных от ставшей локализованной, т. е. функцией точки, фазы α необходимо ввести электромагнитное поле, если лагранжиан должен оставаться инвариантным при $\psi' = \psi \exp[i\alpha x]$; подобно этому локализация параметров группы Пуанкаре требует введения нового компенсирующего поля, которое замечательным образом оказывается по существу совпадающим с гравитационным. Минимальный, по обычным критериям, лагранжиан компенсирующей, или, как ее до сих пор чаще называли, калибровочной теории содержит, наряду со скаляром кривизны, добавки, соответствующие космологическому члену, квадрату кривизны, и, наконец, члены, описывающие кручение; полагая произвольные (на данном этапе) 4 параметра равными нулю, оставим в точности лагранжиан ОТО.

Подсказываемое, но еще не требуемое с необходимостью, кручение «стучится в двери» современной теории и с других сторон. Оно рассматривалось еще в геометризованных теориях каталога I. Интересная теорема В. И. Родичева утверждает, что ковариантная производная спинора в закрученном пространстве приводит к нелинейному добавку кубического типа ψ^3, который как раз лежит в основе современной спинорной нелинейной теории (Д. Д. Иваненко, А. М. Бродский, М. М. Мирианашвили, Д. Ф. Курдгелаидзе, А. И. Наумов, Гейзенберг, Дюрр и др.).

Различные эффекты, предсказываемые наличием кручения, сказываются в поправках к уравнениям движения и являются, в принципе, наблюдаемыми, как показали Траутман, В. Н. Пономарев; кручение сказывается также на космологических решениях, что следует учесть при обсуждении коллапса.

Зарегистрируем в каталоге III новую трактовку гравитации наряду с другими полями с точки зрения теории источников Швингера. Идеология этого подхода, стремящегося базироваться на предельно феноменологической точке зрения, близка к алгебре токов и вместе с тем заострена против S-матричного и дисперсионного подходов; помимо прочего, Швингер приходит к признанию обычных и новых магнитных кварков. В некоторой мере близкая к предыдущей трактовка гравитации посредством запаздывающего действия на расстоянии развивается Хойлом и Нарликаром, в духе прежней трактовки классической электродинамики Фоккера, возрожденной Уилером—Фейнманом. Заряд — источник непосредственно воздействует на другие заряды, поле вообще исключается. В ряде работ дисскусия сосредоточилась вокруг вопроса об отбрасывании опережающих потенциалов, для чего было предложено учесть космологическое распределение зарядов. Отметим еще, что вариант Уайтхеда гравидинамики прямого действия на расстоянии оказался среди прочих неэйнштейновских вариантов, по словам Вилла, «крепким орешком», поскольку здесь правильно описываются три основных эффекта ОТО, а его опровержение, согласно Виллу (1972 г.), покоится на факте неверного предсказания приливов под влиянием поля галактики (в постньютоновском приближении).

К каталогу III следует затем отнести трактовку гравитации, стимулированную ролью спиноров в квантовой теории: заманчиво построить метрические или тетрадные компоненты из более простых спиноров; во-первых, можно перейти к спинорной записи уравнений ОТО (Пенроуз), что позволяет интересным образом рассмотреть ряд соотношений; во-вторых, можно встать на более принципиальную точку зрения единой нелинейной теории, базирующейся, как мы уже указывали, на том или ином обобщении дираковского или вейлевского уравнения добавком нашего вида ψ^3, и конструировать гравитационное поле из фундаментального нелинейного праспинора подобно тому, как нелинейная спинорная теория уже позволила заложить основы теории адронов и фотонов. Отсылая за подробностями к нашим статьям и книге Гейзенберга, укажем коротко ряд основных результатов. Беря за основу волновую функцию в виде спинора—изоспинора (Гейзенберг, Дюрр и др.), или, на наш взгляд, более целесообразный вариант, в какой-то мере учитывающий кварки, спинор-унитарный спинор (Д. Д. Иваненко, Д. Ф. Курдгелаидзе, А. И. Наумов, Басьюни, Нгуен Зао), конструируя разумный пропагатор и учитывая вырождение вакуума по ряду симметрий, удается при помощи того или иного метода расчета (новый метод Тамма—Данкова в Мюнхенской группе, у нас — особый метод возмущений) получить массы адронов (октет и декуплет барионов; октет мезонов) и константы сильного и электромагнитного взаимодействий уже в примерном согласии с опытом. В частности, для постоянной тонкой структуры получаются значения в области 1/115—1/120 вместо 1/137, причем ясны возможности улучшения результата. Фотон оказывается при этом гольстоновской частицей, сопоставленной вырождению вакуума.

Более грубый метод слияния, т. е. построения волновых функций адронов из основных спинорных, позволил получить магнитные моменты адронов в хорошем согласии с опытом. Все это позволяет рассматривать нелинейную спинорную теорию в качестве одной из основ перспективной программы построения единой теории. Возникает вопрос о включении гравитации в эту схему либо по методу слияния, либо конструируя гравитон как новый «гольдстон» (Филипс, Гейзенберг, Д. Д. Иваненко, Катаяма).

Поскольку нам пришлось с необходимостью обратиться к квантовой теории поля, то следует отметить, что, несмотря на множество усилий, не был выработан полностью убедительный метод квантования гравитационного поля, что связано со сложностью системы нелинейных уравнений с их дополнительными условиями и, в конце концов, с тем фундаментальным обстоятельством, что квантование искривления пространства—времени находится в «опасной» близости к проблеме квантования самого пространства—времени (см. обзор Брилла—Гоуди в сборнике «Квантовая гравитация и топология», где дан обзор методов квантования: канонического, ковариантного, формализма суперпространства; см. также юбилейный сборник в честь Уилера со статьями Фейнмана, де Витта и других по этой проблеме).

К наиболее важным эффектам квантовой гравитации, рассчитанным сначала для слабого поля, относятся: 1) флуктуации метрики, возможно, приводящие к изменению топологии (Уилер, Тредер, Брилл, Докур, Д. И. Блохинцев и др.); 2) взаимные трансмутации гравитонов, фотонов и элементарных частиц (гипотеза Д. Д. Иваненко, развитая А. А. Соколовым, Уилером, Н. М. Коркиной и др.), которые следует учитывать как в теории горячей Вселенной, так и в космологической нестатической проблеме (Паркер, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков и др.).

Несмотря на отсутствие ясности в вопросе о состоянии вещества до Большого Взрыва (или после ожидаемого коллапса Вселенной), в ряде работ высказываются предварительные домыслы об уравнениях состояния (Хагедорн, Альфвен, Д. Ф. Курдгелаидзе и др.), о возможных формах дискретного пространства—времени (в статьях В. А. Амбарцумяна, Д. Д. Иваненко и Гейзенберга 1930 г., развивавшихся Шилдом, Дарлингом, затем в операторном варианте — Снайдером, И. Е. Таммом и др.; см. также работы Коиша, Финкельштейна, Пенроуза). Возникает вопрос: сохранятся ли резкие границы нынешних категорий пространства—времени, обычной материи и гравитационного поля в условиях сверхплотного, сверхгорячего, сверхискривленного состояния, когда должны заиграть в полную силу процессы на расстояниях порядка планковской длины $\sqrt{\hbar G/c^3} \approx 10^{-33}$ *см* при соответствующих сверхвысоких энергиях, и не придется ли перейти к объединенным в определенном смысле комплексам указанных категорий?

В квантовый раздел III полевого каталога можно занести различные варианты трактовки частиц как экситонов суперпространства (Уилер) или фундаментальных планковских объектов (М. А. Марков, К. П. Станюкович, В. Г. Лапчинский), поскольку здесь в ряде отношений имеется выход за рамки ОТО.

IV. Космологический каталог

Что касается специфических космологических теорий, их целесообразно отнести в особый каталог IV. К ним относятся кинематический релятивизм Милна (разлетающиеся галактики), вспомогательный вариант ньютоновской космологии нестационарной Вселенной (Милн, Мак-Кри), теория стационарной Вселенной (Бонди, Голд, Хойл); недавняя махианская модель космологии Тредера, в которой инертная масса уже в ньютоновом приближении зависит от окружающих масс. По мнению большинства экспертов космологической эмпирики (Мак-Витти, Мавридес, Эллис, группа Уилера и др.), результаты модели Милна и Хойла противоречат данным о подсчете плотности радиоисточников и квазаров на разных расстояниях, определению коэффициента замедления и постоянной Хабла, не говоря уже об основном противоречии стационарной модели с практически общепризнанной концепцией Большого Взрыва с ее удачным предсказанием реликтового излучения и другими следствиями.

Конечно, в IV каталог повторно входят все варианты гравидинамики, начиная с ОТО и СТТ, которые не ограничиваются локальными процессами. В этой связи следует вновь подчеркнуть необходимость учета космологического члена, замечательным образом введенного Эйнштейном в его не потерявшей ценности и в наше время статистической модели Вселенной. Позднее Эйнштейн по ряду скорее психологических причин отбросил космологический член и даже объявил его введение своей ошибкой. Вслед за этим многие авторы вплоть до настоящего времени продолжают необоснованно отбрасывать космологический член Λ (Уилер, Рис, Руффини, Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц и др.). На самом же деле Λ необходимо ввести в теорию (ОТО, СТТ и др.) по следующим причинам: 1) общие условия для уравнения второго порядка допускают введение Λ; 2) тензор энергии обычной материи определен с точностью до члена с исчезающей дивергенцией (В. А. Фок); 3) космологический член Λ подсказывается компенсационной трактовкой гравитации; 4) квантовая гравидинамика приводит к добавку с космологическим членом подобно тому, как квантовая электродинамика вносит соответствующие поправки в классическую теорию электромагнетизма; 5) анализ космологической эмпирики, согласно Мак Витти и др., приводит к определению Λ, не равного нулю.

Исключение космологического члена могло бы произойти только на основании нового добавочного условия, например, подобно тому, как масса нейтрино исключается из требований отрицания ряда симметрий. Излишне подробно напоминать, как наличие Λ обогащает классы космологических решений, в том числе и анизотропных (Э. Б. Аман, Г. Е. Горелик; см. также Эллис).

Отметим авторов недавних монографий и обзорных статей, учитывающих Λ-член: Мак Витти, Меллер, Вейнберг, Мавридес, Эллис, А. Л. Зельманов, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, группа Торна и др.

В заключение отметим интересную тенденцию переносить Λ-член в правую часть и рассматривать его как отражение энергетических свойств вакуума.

Завершая список современных теорий гравитации, который мы попытались разбить на четыре группы, заметим, что не были включены в них ряда сугубо вспомогательных вариантов, не нашедших развития в литературе и не обладающих ясным физическим смыслом.

Новые подтверждения ОТО

Дополняя и уточняя данные, приведенные в книге Тредера, дадим перечень основных новых экспериментальных подтверждений теории Эйнштейна, следуя докладу Шапиро в Копенгагене 1971 г.; обзору Вилла 1972 г. и другим источникам. Измерения отклонения света в поле Солнца удалось улучшить радиоинтерферометрическими методами, наблюдая сигналы от квазара 3С273, проходящего вблизи Солнца каждое 8 октября, и квазара сравнения 3С279. Указывая все результаты в долях эйнштейновских значений для отклонения сигналов, имеем: $0{,}90 \pm 0{,}05$ (Шрамек, 1971); $1{,}03 \pm 0{,}2$ (Шапиро, 1971).

Для нового эффекта — запаздывания времени сигнала, проходящего в поле Солнца, методом пассивного радирования Меркурия и Венеры получено значение $1{,}02 \pm 0{,}05$ (Шапиро, 1971); метод активной ретрансляции сигнала спутниками Маринер VI и VII дал значение $1{,}00 \pm 0{,}04$ (Мулеман и др., 1971).

Сдвиг перигелия Меркурия равен $1{,}00 \pm 0{,}01$ в долях эйнштейновского значения 43″; при этом не учитывается квадрупольный момент Солнца, до сих пор надежно не определенный. В безразмерных единицах он равняется $I_2 = (C - A) \; mR^2$, где C, A — моменты инерции относительно оси вращения и экваториальной оси; согласно Дикке, сплющенность Солнца характеризуется значением $I_2 = (2{,}7 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-5}$.

При анализе сдвига перигелия группа Шапиро использовала внушительный материал — около 400 000 отдельных измерений за период более 200 лет (1750—1970 г.!).

Универсальность гравитационного ускорения была проверена Этвешем с сотрудниками с погрешностью 10^{-9}, дальнейшие эксперименты довели погрешность измерений до 10^{-11} — 10^{-12} (см. обзор Вилла). Эксперименты Крейцера (1968 г.) подтвердили постоянство отношения активной и пассивной масс с погрешностью $5 \cdot 10^{-5}$ для брома и фтора. Кроме массы инертной, пассивной и активной гравитационных масс, группа Торна вводит «сохраняющуюся» массу, которая определяется по законам сохранения, например, в ядерных реакциях.

Измерение самой гравитационной константы в опытах типа Кевендиша имеет большую погрешность (единица пятого знака), поэтому приходится обратиться к вариациям константы под влиянием различных эффектов приливного типа. Рассмотрение подобных эффектов, зависящих от движения Земли по отношению к системе покоя Вселенной, позволяет определить величины вариаций в гравитационной константе четырех типов (суточные и т. д.) и значения постньютоновских параметров α_1, α_2, α_3:

$$|\alpha_1| < 0{,}2; \quad |\alpha_2| < 3 \cdot 10^{-2}; \quad |\alpha_3| < 2 \cdot 10^{-5}.$$

Отсюда, по мнению Вилла, исключаются все слоисто-тензорные теории, в которых $\alpha_1 \approx -8$ (в ОТО и СТТ эти параметры равны нулю).

Широкие возможности для экспериментального подтверждения ОТО открывают наблюдательные методы современной астрофизики, в первую очередь исследование нестационарных процессов во Вселенной. Как известно, релятивистские стадии эволюции массивных звезд в рамках ОТО заканчиваются коллапсом, и этот вывод остается справедливым при любых, сколь угодно общих предположениях о структуре материи (И. Д. Новиков и В. Г. Кречет, В. Г. Лапчинский с сотр.) и даже более того, вообще не зависит от материи (Ньюмен, Пенроуз). Однако удаленный наблюдатель воспринимает коллапс не как безостановочное сжатие до сингулярности, а как «черную дыру». Общая теория относительности с неизбежностью приводит к существованию «черных дыр», а в сочетании с квантовой теорией материи — в состоянии детально описать их свойства. Таким образом, сам факт открытия «черных дыр» послужил бы мощным, если не решающим подтверждением общей теории относительности. Кстати, Тредер в своей книге также считает, что проверка любой гравитационной теории, в том числе и его собственной, «на коллапс» необходима. Экспериментальная ситуация в настоящее время складывается, по-видимому, в пользу существования «черных дыр», а следовательно, в пользу справедливости ОТО.

Что касается усиленно обсуждаемой проблемы обнаружения гравитационных волн, то эксперименты Вебера, объявившего об их открытии, еще не получили подтверждения в других лабораториях. В частности, Тайсон не смог обнаружить гравитационные волны при помощи своей, по его мнению, более совершенной установки (доклад на 6-м «Техасском» симпозиуме по релятивистской астрофизике. Нью-Йорк, декабрь 1972 г.). Большая интенсивность всплесков, регистрируемых известными веберовскими детекторами, обязанных, на его взгляд, гравитационным волнам, исходящим из центра Галактики, побудила, с одной стороны, строить различные модели этого активного центра (де Саббата, Кафка и др.); с другой стороны, возникла мысль интерпретации высокой интенсивности подозреваемых гравитационных волн при помощи гравитационного излучения синхротронного типа, обязанного движению какой-то массы вокруг сверхмассивного тела (возможно даже «черной дыры»). Как известно, предсказание и теория синхротронного излучения релятивистских электронов в ускорителях (Д. Д. Иваненко, Я. И. Померанчук, Л. А. Арцимович, А. А. Соколов, Швингер и др.) была подтверждена Блуиттом, Поллоком и др. и нашла самое широкое применение в астрофизике. Позднее была разработана и подтверждена квантовая теория синхротронного излучения вместе с эффектом затухания (А. А. Соколов с сотрудниками, А. А. Коломенский, Сандс и др.). Гравитационное синхротронное излучение, обеспечивающее резкую направленность (прожекторный эффект), заслуживает, конечно, внимания независимо от интерпретации веберовских опытов и может найти применение в различных областях астрофизики (Мизнер, Брилл, Руффини, А. А. Соколов с сотр., М. Е. Герценштейн, Д. Д. Иваненко и др.).

Таким образом, в настоящее время развернулась работа огромного масштаба по теоретическому и экспериментальному исследованию гравитации в лабораторных, планетарных, астрофизических и космологических условиях, которая, несомненно, приведет нас в не очень отдаленном будущем к более глубокому пониманию структуры материи во Вселенной.

ЛИТЕРАТУРА

Уилер Дж. А. Гравитация, нейтрино, Вселенная. Пер. с англ. Под ред. и со вступ. статьей Д. Д. Иваненко. М., Изд-во иностр. лит., 1961.

Уилер Дж. Предвидение Эйнштейна. Пер. с англ. М., «Мир», 1972.

Ivanenko D. Acta Phys. Acad. Sci. hung., 1972, **32**, No. 1—4, 341; Tensor, 1972, **25**, 161 (Japan); Convegno S. Relativitagenerale (Firenze, 1962), (Юбилейный Галилеевский сборник); Bologna, 1965; Сборники тезисов 1-й, 2-й, 3-й Советских гравитационных конференций. Издания соответственно университетов: Московского (1961), Тбилисского (1965 и 1968) и Ереванского (1972).

Фролов Б. Н. «Вестн. Моск. ун-та, Серия физика, астрономия», 1964, № 2.

Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. М., Атомиздат, 1972.

Визгин В. П. Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике. М., «Наука», 1972.

Горелик Г. Е. «Изв. ВУЗов. Серия Физика», Томск, 1973, № 1.

Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М., «Наука», 1971.

Курдгелаидзе Д. Ф. «Ядерная физика», 1969, **9**, 718.

Наумов А. И. «Ядерная физика», 1968, **7**, с. 664.

Родичев В. И. Эйнштейновский сборник. М., «Наука», 1971. «Квантовая гравитация и топология». Пер. с англ. М., «Мир», 1973 (Сб. переводов статей Герока, Брилла, Гоуди, Салама. Со вступ. статьей Д. Д. Иваненко).

Швингер Ю. Частицы, поля, источники. Пер. с англ. Под ред. А. М. Бродского. М., «Мир», 1972.

Treder H.-J. Die Relativität der Trägheit. Berlin, DDR, Akademie Verlag, 1972. Ann. Physik, 1970, v. 24, p. 234.

Thorne K. S. Astrophys. J., 1971, v. 103, p. 595.

Will C. M. Astrophys. J., 1971, v. 169, p. 141. Proc. "Enrico Fermi" Intern. School, Varenna, Italy, 1972; OAP (Orange Aid Preprint Series), 1972, No. 289.

Nordvedt K. Phys. Rev. **D**, 1971, 1683.

Bertotti B., Brill D., Krotkov B. Experiments in Gravitation. Ed. L. Witten. London, J. Wiley, 1962.

Trautman A., Shapiro I. I., Weber J. e. a. GRG (General Relativity and Gravitation), 1972, v. 3, No. 1—2. (Доклады 6-й Международной гравитационной конференции в Копенгагене, 1971 г.).

ОГЛАВЛЕНИЕ