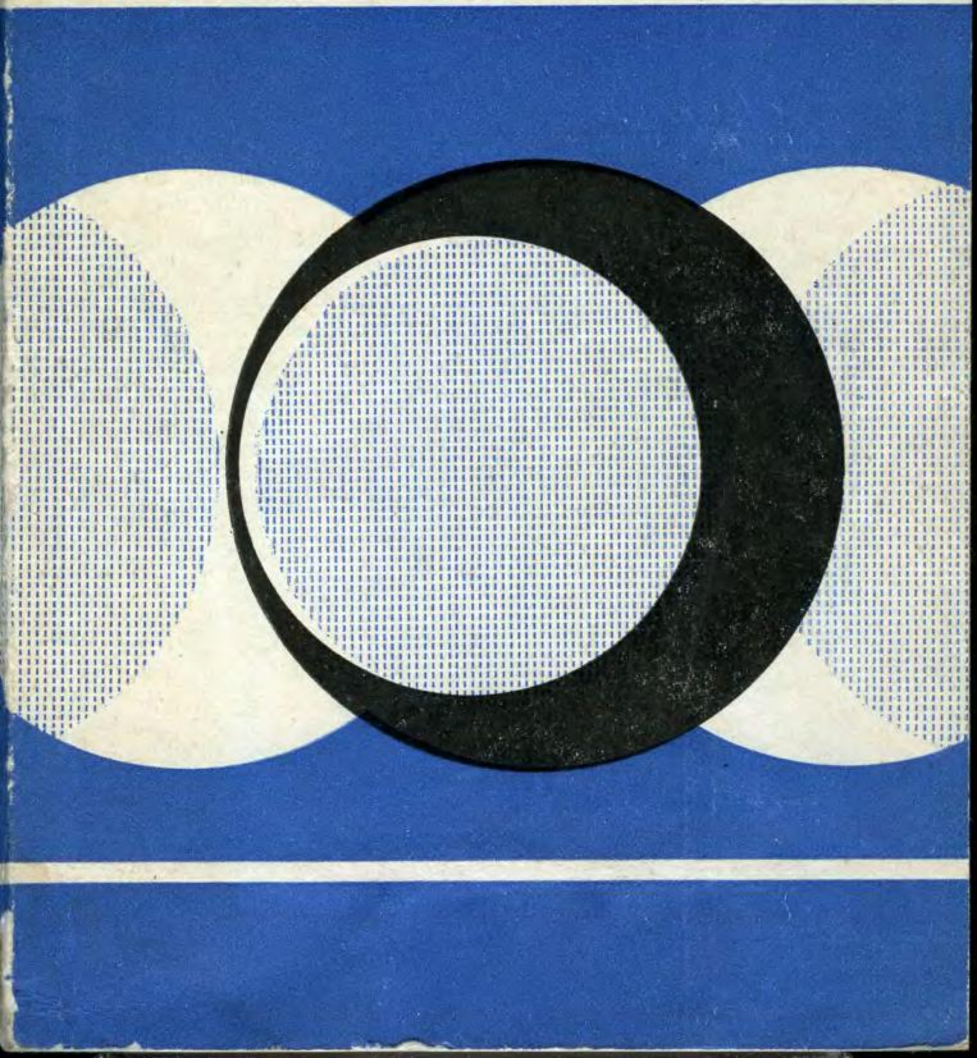
ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ИНЕРЦИИ

Г·Ю·ТРЕДЕР



Die Relativität der Trägheit

von

Prof. Dr. HANS-JÜRGEN TREDER

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ИНЕРЦИИ

Г · Ю · ТРЕДЕР

Перевод с немецкого
К. А. Бронникова

Под редакцией проф.
К. П. Станюковича

МОСКВА АТОМИЗДАТ 1975

УДК 530.12

Тредер Г.-Ю. **Относительность инерции.** Пер. с нем. Под ред. проф. К. П. Станюковича. М., Атомиздат, 1975, с. 128.

В книге крупного немецкого гравитациониста профессора Г.-Ю. Тредера проводится подробный анализ понятия инертной массы как в классической, так и в релятивистской физике. Основное место в книге занимает построение механики, в которой инерция тел — как этого требует принцип Маха — обусловлена гравитационным воздействием удаленных космических масс. Анализируются следствия этой механики, допускающие экспериментальную проверку.

Книга предназначена для физиков-теоретиков, а также аспирантов и студентов физико-математических специальностей.

Т $\frac{20402-006}{034(01)-75}$ 6—75

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Автор этой книги профессор Ганс-Юрген Тредер — один из крупнейших немецких физиков, работающих в области теории тяготения.

Книга посвящена фундаментальным физическим проблемам — природе инерции тел, относительности движения и относительности инерции. Эти проблемы волновали многих великих физиков в течение последних трех столетий, начиная от Галилея, Ньютона и Гюйгенса, однако до сих пор в них не достигнуто полной ясности. Совершенно новое звучание эти проблемы приобрели в конце прошлого и в начале нашего столетий с появлением работ Маха, Эйнштейна и Пуанкаре. Как известно, общая теория относительности Эйнштейна вопреки своему названию является скорее теорией абсолютного четырехмерного пространства — времени (см., например, книгу Синга [1]). Эта теория, заставившая физиков существенно пересмотреть свои взгляды на пространство и время, свела гравитацию к геометрии и тем самым, в частности, дала объяснение эквивалентности тяжелой и инертной масс. Однако она не ответила на целый ряд вопросов, касающихся относительности движения и природы инерции, — имеются в виду вопросы, связанные с принципом Маха и доктриной Маха — Эйнштейна, которые и стали предметом обсуждения в книге Тредера.

На наш взгляд, важным достоинством этой книги является то внимание, которое автор уделил истории принципа Маха, причем многие факты, несомненно интересные, относятся к разряду малоизвестных.

Основное место в книге занимает построение механики, в которой в явном виде реализуется доктрина Маха — Эйнштейна: инерция тел в ней не задается заранее, а вытекает из взаимодействия тел. Это взаимодействие является особым видом гравитации и описывается потенциалом, зависящим от относительных скоростей тел, — потенциалом Римана; при этом обычная ньютоновская механика оказывается предельным случаем развитой Тредером «механики Римана — Маха», соответствующим бесконечно большому «космическому потенциалу». Как показано в книге, механика Римана — Маха способна даже объяснить некоторые эффекты, считающиеся сугубо релятивистскими (например, движение перигелия планет). Однако — и это автор неоднократно подчеркивает — эта теория не выходит за рамки механики и в принципе не может описывать, скажем, оптические явления. Созданная Тредером механика Римана — Маха не только стоит в стороне от релятивистской физики, но и, будучи теорией с дальнодействием, в неизменном виде с ней несовместима и может быть лишь предельным случаем некоторой релятивистской теории, пока не существующей. Соображениями о возможных вариантах построения такой теории и заканчивает автор основную часть книги.

Таким образом, Тредер намечает один из путей будущего развития теории гравитации и — шире — всей теоретической физики. Этот путь должен привести к более глубокому осмыслению одного из важнейших понятий физики — понятия инертной массы.

В то же время из уже построенной механики Римана — Маха автор выводит ряд интересных следствий, и некоторые из них допускают экспериментальную проверку (см. Приложение 2). Хотя теория Тредера носит предварительный характер, можно полагать, что полученные им следствия из переменности эффективной гравитационной постоянной должны сохраняться и в будущем релятивистском обобщении этой теории, подобно совпадению многих выводов фридмановской космологии и космологии, основанной на ньютоновском законе тяготения (см., например, [2, 3]).

Главное космологическое следствие теории Тредера — переменность эффективной гравитационной связи. Эта переменность и обусловливает явления, доступные для наблюдений, которые обсуждаются в Приложении 2.

Автор указывает и ряд других теорий и гипотез, связанных с возможной переменностью так называемых мировых постоянных: гипотезу Дирака, скалярно-тензорную теорию Йордана — Дикке и т. п. В связи с этим здесь упомянем некоторые альтернативные подходы, также связанные с переменностью величин, обычно предполагаемых вечными и неизменными. Так, скалярно-тензорная теория Зайцева — Колесникова [4] (ее идея связана с работами К. П. Станюковича [5], появившимися раньше работ Бранса и Дикке), способная (в духе Йордана) дать объяснение рассматриваемым здесь геофизическим и небесномеханическим эффектам, обладает и рядом других привлекательных черт. В отличие от теории Йордана — Дикке она приводит в случае сильных полей к насыщению сил тяготения. В частности, это позволяет получить несингулярные космологические модели для физически приемлемых уравнений состояния материи.

Другая теория, предполагающая изменение «мировых констант» во времени, — это теория гравитационного вакуума, развиваемая К. П. Станюковичем. На ней мы остановимся несколько подробнее.

Еще много десятилетий назад великий французский математик Пуанкаре заметил, что если бы люди знали все мировые законы, то достаточно было бы задать три любые разноразмерные константы и тогда по ним можно было бы вычислить все остальные величины, например заряд электрона, постоянную Планка, магнитный момент элементарной частицы и т. д.

Универсальные мировые законы человечеством изучены еще не полностью. Тем не менее фундаментальные теории, создаваемые во всем мире, дают примеры построения таких схем, которые связывают многочисленные физические величины, совершенно независимые по традиционным представлениям.

Можно считать достаточно надежно установленными следующие фундаментальные соотношения, связывающие основные физические величины, характеризующие макро- и микромиры:

$$\frac{2GM}{c^2a}=1;\quad \hbar=mc\lambda;\quad \frac{2G\hbar}{c^3}\,a=L^2a=\lambda^3,$$

где G — гравитационная постоянная Ньютона; $\hbar$ — постоянная Планка; c — скорость света; λ — комптоновская длина волны нуклона; m — масса нуклона; a — радиус кривизны Метагалактики; M — масса Метагалактики; $L = \sqrt{2G\hbar/c^3} \approx 10^{-33}$ *см* — так называемая планковская длина. Этой длине соответствует фундаментальная частица *планкеон* с массой $m_L \approx 10^{-5}$ *г* и гравитационным радиусом, равным L и комптоновской длине волны: $\lambda_L = L = \hbar/m_L c$.

Первое чисто космологическое соотношение фактически установлено еще А. Эйнштейном и, как было выяснено сравнительно недавно, характеризует закон сохранения массы — энергии в Метагалактике (естественно, предполагается, что масса M конечна). Второе соотношение — важнейшее в квантовой теории материи. Третье было получено К. П. Станюковичем в 1965 г.; оно является следствием гипотезы Дирака об эволюции Метагалактики и связывает фундаментальные величины, характеризующие микро- и макромиры. Далее на основании теории гравитации можно написать еще одно исключительно важное выражение, определяющее так называемую постоянную тонкой структуры:

$$\hbar c/e^2 = 1/\alpha = \ln (a/L),$$

где e — заряд электрона.

В этих важнейших соотношениях, согласно Пуанкаре, за единицы измерения можно выбрать любые три разноразмерные величины, и тогда, оказывается, можно, зная уже установленные законы физики, вычислить практически все физические величины — как основные, так и производные. Если принять $G = \text{const}$, $\hbar = \text{const}$, $c = \text{const}$, то $L = \text{const}$, $\tau_L = L/c = \text{const}$ (характерное время для планкеона), $m_L = \text{const}$. При этом выясняется что масса Метагалактики постепенно высвечивается из вакуума: $M \sim a \approx ct$, где t — время существования Метагалактики в бесконечной Вселенной. Далее находим, что $\lambda \sim a^{+1/3}, m \sim a^{-1/3}$. На самом деле практически всегда считается $\lambda = \text{const}$, $c = \text{const}$, $\hbar = \text{const}$; тогда $m = \text{const}$; $G \sim a^{-1}$; $M \sim a^2$ (гипотеза Дирака). С чисто математической точки зрения эти две системы единиц совершенно равноправны, дело лишь в пересчете безразмерных масштабов. Существенно, что некоторые фундаментальные величины, входящие в указанное соотношение, могут изменяться со временем вместе с расширением Метагалактики.

Необходимо особо отметить, что в теории вакуума удается связать такие фундаментальные величины, как постоянная Планка, скорость света, гравитационная постоянная Ньютона, и размеры элементарных частиц. Оказывается, размеры элементарных частиц не случайны, а находятся в определенном соотношении с размерами Метагалактики, которые, как известно, возрастают. Для сохранения устойчивости частицам нужно приспосабливаться к изменяющейся окружающей обстановке. Метагалактика расширяется, и размеры частиц, согласно теории вакуума, меняются. Меняются и некоторые другие фундаментальные величины. Косвенные геофизические данные подтверждают такую точку зрения, астрофизические данные пока не могут ответить на этот вопрос ни положительно, ни отрицательно. Проверка этих гипотез, как и гипотезы Тредера, зависит от будущих экспериментов, которые уже начаты у нас, в СССР, и в США.

Книга Тредера написана с большим педагогическим мастерством, ясным языком, причем для удобства читателя автор не останавливается даже перед повторением некоторых важных положений. В связи с этим книга доступна не только специалистам-теоретикам, но и студентам старших курсов физико-математических специальностей.

В заключение следует отметить интересное сочетание двух стилей книги Тредера: классического, в духе Эйнштейна, образа математического мышления о природе гравитации и новых, нетрадиционных подходов к этой сложнейшей в физике проблеме.

Нам кажется, что вдумчивый читатель книги не только извлечет пользу, но и получит удовольствие, размышляя о вопросах, затронутых в ней.

К. А. Бронников,
К. П. Станюкович

Господину профессору д-ру
Густаву Герцу к 85-летию
со дня рождения с почтением
посвящаю

Ганс-Юрген Тредер

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Толчком к исследованиям относительности инерции — так называемой доктрины Маха — Эйнштейна — и их связи с постулатами относительности Маха и Пуанкаре, с одной стороны, и с общим принципом относительности Эйнштейна — с другой, которые объединены в этой маленькой книжке, были несколько остро сформулированных вопросов, с которыми обратился ко мне профессор Густав Герц в связи с изданием работ Генриха Герца [1]. Профессор Герц спросил меня о связи принципов относительности в классической электродинамике Вильгельма Вебера с требованиями относительности в электродинамике движущихся тел Генриха Герца, а также об отношении обеих теорий к релятивистской электродинамике Эйнштейна и Минковского. Далее профессор Герц спросил о связи индукции инерции по Веберу, которая по предложению Гельмгольца была предметом первого экспериментального исследования Генриха Герца, с самоиндукцией инерции в электронной теории Лоренца. Наконец, профессор Герц затронул вопрос о том, связан ли этот комплекс проблем с бессиловой механикой Генриха Герца и если да, то каким образом и какое отношение имеет механика Герца к эйнштейновской общей теории относительности.

В свое время я смог лишь частично ответить на эти вопросы; они побудили меня заняться историей посту-

---

[1] **Hertz H.** Uber sehr schnelle elektrische Schwingungen. Eingeleitet und mit Anmerkungen versehen von Gustav Hertz. Ostwalds Klassiker, Bd. 251, Leipzig, 1971.

латов относительности от Вебера, Римана и Неймана, включая Герца, Маха, Пуанкаре и Лоренца, до Эйнштейна и Вейля. Некоторые результаты своих исследований я изложил в двух сообщениях в «Klasse Physik» и в Немецкой академии наук. В последующих дискуссиях при особенно активном участии профессора Герца возникли дальнейшие вопросы о связи относительности ускорения по Маху и Пуанкаре с общим принципом относительности Эйнштейна и, в частности, о связи эйнштейновского принципа эквивалентности тяжелой и инертной масс с доктриной Маха — Эйнштейна об индукции инертной массы гравитационным воздействием удаленных масс Вселенной; стала понятна аналогия этой доктрины и индукции инерции по Веберу и Риману.

Предлагаемая книга является попыткой ответить на эти вопросы в их взаимосвязи настолько полно, насколько это для меня возможно в настоящее время.

Я рад возможности посвятить этот труд профессору Густаву Герцу.

Я благодарю бабельсбергских коллег и сотрудников д-ров Боржешковского, Йона, Крейзеля, Либшера и в особенности моего друга Отто Зингера за обсуждения и помощь в подготовке рукописи, а также госпожу Вефер, взявшую на себя труд по печатанию.

Ганс-Юрген Тредер

Потсдам — Бабельсберг
Весна 1972 г.

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ИНЕРЦИИ И ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ

Цель настоящего труда — точная математическая формулировка принципа относительности инерции, т. е. принципа, установленного Эйнштейном вслед за Махом (1871—1883 гг.), «что инерция определенным образом происходит от взаимодействия тел» (Эйнштейн, в письме к Маху от 25/VI 1913 г.). При этом такое взаимодействие должно быть, как и формулировал Эйнштейн в 1913 г., особым видом гравитации. Тогда на основе математической формулировки этой «доктрины Маха — Эйнштейна» должны быть точно выведены те же самые динамические следствия, которые извлек Эйнштейн из принципа относительности инерции: зависимость инертной массы тела от окружающих его масс, индукция инерционного сопротивления ускоренным движением окружающих масс (включая принцип относительности поступательных ускорений) и, наконец, разрешение «парадокса Маха», связанного с проблемой относительности вращения [1].

[1] Аналогичные следствия из принципа относительности инерции Маха, как и Эйнштейн, получили уже в 1896 г. Б. и Й. Фридлендеры, однако частично с фантастической переоценкой действительной величины ожидаемых эффектов. (Б. Фридлендер предположил, что инерция земных тел в основном обусловлена гравитационным полем Земли! Он, таким образом, смешивал гравитационную силу и гравитационный потенциал.) Й. Фридлендер требовал единого закона для гравитации и инерции — вполне в духе более поздней доктрины Маха — Эйнштейна. Как известно, уже Гюйгенс — в противоположность ньютоновскому воззрению о динамической абсолютности ускорений — потребовал относительности всех движений (см. Л. Ланге [16]).

Как известно, доктрина Маха — Эйнштейна — и вместе с ней ее динамические следствия, указанные Эйнштейном, — фактически содержится в общей теории относительности лишь в виде намека [в частности, в эффектах Тирринга (1918 г.)]. Инерциальное движение и «инерциальный компас» в общей теории относительности в сущности не зависят от гравитирующих масс: они лишь несколько модифицируются гравитационными воздействиями («господство эфира над материей», согласно Вейлю). Отсюда Эйнштейн (1918 г.) констатировал — между прочим под впечатлением модели пустого мира де Ситтера (1917 г.) — независимость общей теории относительности от принципа Маха и отметил позднее, как и Вейль, принципиальную противоположность теоретико-полевых основ общей теории относительности доктрине Маха — Эйнштейна [1, 2]. Тем не менее Эйнштейн снова и снова возвращался к кругу идей принципа Маха [1].

По моему мнению, этот отрицательный результат общей теории относительности связан с тем, что она исходит из предпосылки, что ее нерелятивистским приближением должна быть ньютоновская гравитационная механика, которая в свою очередь основывается на принципе абсолютности инерции и ускорения. Математическая формулировка развивавшейся Махом и Эйнштейном идеи относительности инерции должна, таким образом, исходить из механики, основательно отличающейся от ньютоновской тем, что она содержит зависимость инертной массы тела от гравитационных потенциалов других тел.

---

[1] См. Einstein A., Autobiographisches (1949). Но см. также «Relativistic theory of the non-symmetric field» (1954). См. далее Seelig C., Einstein A. Helle Zeit — Dunkle Zeit (1955) и здесь, в частности, письмо Эйнштейна д-ру Мюзаму и сообщения Штрауса (E. Straus) (1944 г.) о подходе к теории гравитации с дальнодействующим массовым фоном. По мнению Эйнштейна, следовало бы в теории гравитации отказаться от воззрения Г. Герца, что может существовать только близкодействие, так как в этом случае теория гравитации не может быть лоренц-ковариантной

[2] Представление об исторической роли принципа Маха в обосновании Эйнштейном общей теории относительности дал Хёнль (1965 г.). Странно, что Мах не хотел признавать отношения своих постулатов относительности к общей теории относительности (см. предисловие Маха (1913 г) к его «Принципам физической оптики» [23]).

Таковой является развитая Риманом в 1861 г. механика с потенциалами взаимодействия, билинейно зависящими от относительных скоростей тел. Уже сам Риман (и позднее частично Нейман [1]), как и Пуанкаре (с более общими методическими замечаниями), показал, что эта механика приводит к отличному от ньютоновского понятию инертной массы (и кинетической энергии), так как, по Риману, инерция тела по крайней мере частично индуцируется потенциалами окружающих тел. Риман также показал, что эта индуцированная сила инерции зависит только от относительных ускорений.

Риманова механика возникла из аналитической формулировки указанных Вебером (1846 г.) и Риманом (1856 г.) электродинамических силовых законов, содержащих зависимость от относительной скорости и относительного ускорения. Риманова динамика была, таким образом, исторически частью обоснованной Вебером [2] галилей-инвариантной электродинамики с дальнодействием.

В рамках исследования свойств этой электродинамики Вебер столкнулся с зависимостью инертной массы своего «электрона» от внешнего (электрического) потенциала (однако не от самодействия, как позднее в электронной теории Лоренца — Абрагама). Риман затем распространил это открытие на свою аналитическую механику, сформулировав в качестве ее фундамента обобщенный принцип Лагранжа (см. § 2).

Эта историческая связь римановой механики с веберовской электродинамикой с дальнодействием и является, пожалуй, причиной того, что риманова механика

---

[1] Работы Неймана (1867, 1868 и 1873 гг., см. [25—27]) появились независимо от неопубликованных лекций Римана. Нейман исходил из потенциала Вебера, который, однако, приводит к тому, что индуцированная инерция не является скалярной величиной (см. § 3, 6). Теоретико-потенциальные соображения Неймана по потенциалу Вебера содержат несколько ошибок, которые были исправлены уже результатами Римана. В частности, как отметил фон Лауэ (1917 г.), потенциал Вебера не имеет ничего общего с конечной скоростью распространения действия, как это принимал Нейман (и вслед за ним Гербер (P. Gerber, 1898 г.) и др.

[2] Первая идея такой динамики исходит от Гаусса, который указал своему коллеге Веберу и своему и Вебера ученику Риману на возможность сил, зависящих от скорости и ускорения, в рамках теории потенциала.

почти не обсуждается. В то время, когда написанная на материале лекций книга Римана «Тяготение, электричество и магнетизм» была издана Хаттендорфом (1875 г.), основной закон электродинамики Вебера — в свое время представлявший значительный прогресс — уже серьезно оспаривался. Гельмгольц (1870 г.) и Клаузиус (1877 г.) показали, что постулированная Вебером зависимость электродинамических потенциалов от относительной скорости вообще реализуема лишь при весьма искусственных предположениях [1]. Гельмгольц (1870 г.) далее показал, что с потенциалом Вебера отталкивающие силы между одноименными зарядами приводят к новым особенностям в динамике, тогда как, напротив, чистое притяжение исключает все особенности. К этому времени уже появилась и электродинамика Максвелла (заведомо лоренц-инвариантная), которая постепенно получила всеобщее признание.

Фактически электродинамика — самая неподходящая область применения для римановой механики. По смыслу риманова определения массы само собой напрашивается вводить риманов потенциал как гравитационный, так как из него тогда вытекает эквивалентность тяжелой и инертной масс (см. § 4).

Потенциалы взаимодействия Вебера и Римана (в основном, правда, гравитационный потенциал Вебера, который не приводит ни к какому физически приемлемому определению индуцированной инертной массы, — см. § 3, 4 и 6) фактически пытались применять к гравитации начиная с 1872 г. (Цёлльнер [46], Тиссеран [38]), просто заменяя ньютоновский гравитационный потенциал в однотельной задаче небесной механики какой-либо комбинацией из выражений для потенциалов Вебера — Римана. Целью этих усилий было объяснение движения перигелия Меркурия, которое просто моделируется подходящими потенциалами Вебера — Римана. В годы появления общей теории относительности вве-

---

[1] Эти трудности обусловлены просто тем, что фактически основной закон электродинамики задается силой Лоренца. Историко-критическое изложение см. Уиттекер [44] и Treder H.-J., Helmholtzsche und relativistische Elektrodynamik, Gerlands Beitrage 79, 101—120 (1970); «Helmholtz' Elektrodynamik und die Beziehungen zwischen Kinematik, Dynamik und Feldtheorie», Wiss. Z. d. Hymboldt-Univ. 1972.

дение специальных потенциалов Вебера — Римана в небесную механику предлагалось как конкурирующее объяснение эйнштейновских общерелятивистских эффектов.

В гл. 1 мы сначала изложим основы небесной механики с гравитационным потенциалом Вебера — Римана и далее исследуем, до какой степени четыре эффекта Эйнштейна (движение перигелия и три световых эффекта) — и тем самым вообще релятивистская небесная механика — допускают моделирование с помощью гравитационного потенциала Вебера — Римана. Результат заключается в том, что (см. § 2) согласие с теорией Эйнштейна возможно только при $v^2 \ll c^2$, т. е. для тел, движущихся со скоростями, много меньшими скорости света. Однако риманова механика явно демонстрирует такие свойства инерции и кинетической энергии (§ 2, 3), которые рекомендуют использовать ее для моделирования доктрины Маха — Эйнштейна.

Это математическое моделирование и изучение его следствий проводятся в гл. 2. Показано, что для очень большого ансамбля из N частиц (N — число частиц во Вселенной) можно исключить ньютоновский инерционный член из римановой механики, так что тогда инерция тела индуцируется гравитационным воздействием всех других масс Вселенной и, таким образом, по существу средним гравитационным потенциалом Вселенной (см. § 6). Гравитационный потенциал близких тел увеличивает эту инерцию в согласии с эйнштейновским требованием, а именно прямо пропорционально их гравитационным радиусам и обратно пропорционально их расстояниям (§ 5 и 6).

Инерция тем самым оказывается особым видом гравитационного воздействия.

Поскольку в риманову механику без ньютоновского инерционного члена входят только относительные ускорения, эта математическая формулировка доктрины Маха — Эйнштейна приводит непосредственно к дальнейшим следствиям, которых требовал Эйнштейн. В частности, она строго обосновывает принцип относительности поступательного ускорения (см. § 7) (и вместе с тем соответствует общему принципу относительности Эйнштейна). Полная индукция инертной массы коллективным гравитационным потенциалом Вселенной обусловливает далее (см. § 8), что в мировом пространстве, вообще свободном от масс, вращение (как угодно кинематически определенное) единственной частицы динамически недоказуемо и что, в частности, в мировом пространстве без других гравитирующих масс все силы инерции на вращающемся теле исчезают. Таким образом, сплюснутость вращающегося жидкого тела оказывается функцией гравитационного потенциала Вселенной [1].

От гравитационного потенциала Вселенной зависит при этом и сдвиг перигелия планеты. Для Вселенной с бесконечно большим гравитационным потенциалом результатом решения небесномеханической задачи одного тела были бы точные кеплеровы эллипсы (см. § 5). Если потребовать, чтобы локальная индукция инерции в римановой механике с доктриной Маха — Эйнштейна была эквивалентна локальной индукции инерции согласно общей теории относительности, то для сдвига перигелия планеты получается в точности эйнштейновское значение (см. § 6).

На основе доктрины Маха — Эйнштейна риманова механика связывает общую динамику и небесную механику с космологией (см. § 8 и 9). Эта связь составляет собственную теоретико-познавательную привлекательность принципа Маха и соответственно доктрины Маха — Эйнштейна и является одной из причин интереса к принципу Маха со стороны Эйнштейна, Эддингтона, Милна и Гейзенберга.

Однако нужно подчеркнуть, что обосновываемая здесь риманова механика с доктриной Маха — Эйнштейна в ее имеющемся виде есть только чистая механика (с космологическими следствиями выводимости расширяющейся Вселенной — см. § 9), которая опирается на группу Галилея как кинематическую группу (см. здесь также дополнение к гл. 2). Поэтому ее отношение к релятивистской физике совершенно не выяснено, и, в частности, нет никакого подхода к электродинамике и оптике.

---

[1] Учтем, что потенциал уменьшается как $1/r$, а гравитирующая масса для постоянной (в среднем) плотности ρ растет пропорционально r^3. Поэтому при достаточно большом объеме усредненный коллективный потенциал превышает локальные потенциалы на любой желаемый порядок величины.

Как чистая механика риманова динамика с доктриной Маха — Эйнштейна, хотя и приводит к следствиям, весьма общерелятивистским по виду (см. § 7 и 8), все же не является дальнейшим развитием (или даже заменителем) общей теории относительности (см. § 4 и 10). Ее вклад в общую теорию относительности, напротив, состоит прежде всего в доказательстве того, что доктрину Маха — Эйнштейна в ее виде, строго сформулированном Эйнштейном, фактически можно смоделировать математически (см. § 5) и затем построить непротиворечивую гравитационную динамику, которая дает относительность ускорений (см. § 7 и 8) и имеет следствиями правильную небесную механику и содержательную космологию. Остается главная проблема: выяснить, возможно ли и если возможно, то как расширить основные положения общей теории относительности таким образом, чтобы она содержала как предельный случай риманову механику с доктриной Маха — Эйнштейна и тем самым осуществляла первоначальную идею Эйнштейна.

Как в свое время Милн во Введении к «Кинематической относительности» [24], так и я высказываю надежду, что предлагаемые исследования по «безынерционной» механике снова показывают, какие глубокие и широкие физические проблемы и сегодня еще содержатся в основах динамики. Независимо от физического значения доктрины Маха — Эйнштейна представляет интерес как проблема чистой аналитической механики изучение свойств динамики (см. § 5, 7 и 8), в которой инерционное сопротивление является исключительно коллективным эффектом некоторой *внешней индукции* [и она, таким образом, представляет противоположность электронной динамике Абрагама, Лоренца и Зоммерфельда, в которой инерция проявляется через *самоиндукцию* (см. § 3) [1]].

[1] В Приложении 2 излагаются небесномеханические и космогонические следствия доктрины Маха — Эйнштейна, которые содержат экспериментально проверяемые выводы, выходящие за рамки ньютоновской и эйнштейновской динамики. В частности, показано, что доктрина Маха — Эйнштейна имеет следствием количественную теорию вековых ускорений Луны и планет, и, кроме того, предлагается решающий эксперимент за или против доктрины Маха — Эйнштейна, который должен стать осуществимым в обозримый период времени.

УКАЗАНИЯ К ОБОЗНАЧЕНИЯМ

Нижними индексами (например, v_α, P_a, r_{AB}, m_A) обозначены номера частиц. Суммирование по ним всегда сопровождается знаком суммы Σ. Исключение составляют формулы из общерелятивистского тензорного исчисления: в них все индексы тензорные. Верхние индексы — всегда векторные. Латинские векторные (тензорные) индексы — пространственные и пробегают значения от 1 до 3 (например, v^i, x^i), греческие — пространственно-временные и пробегают значения от 0 до 3 (например, v^ν, x^ν). По одинаковым векторным (тензорным) индексам должно быть проведено суммирование согласно эйнштейновскому условию о суммировании, например

$$v^i v^i = \sum_{i=1}^{3} v^i v^i = v^2;$$

$$u^\nu u^\nu = \sum_{i=0}^{3} u^\nu u^\nu = u^2.$$

В выражениях из тензорного исчисления всюду применяется символика, соответствующая введенной Эйнштейном (см. «Основы теории относительности» [8]). В написании формул из аналитической механики мы следуем, насколько это возможно, классической книге Римана «Тяготение, электричество и магнетизм» [35]; f — ньютоновская гравитационная постоянная; c — скорость света в вакууме, фундаментальная постоянная специальной теории относительности.

К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРУЕМОСТИ ЭФФЕКТОВ ЭЙНШТЕЙНА В ГАЛИЛЕЙ-ИНВАРИАНТНЫХ ТЕОРИЯХ ГРАВИТАЦИИ СОГЛАСНО ВЕБЕРУ И РИМАНУ

§ 1. Четыре эффекта Эйнштейна и теория гравитации Ньютона

Общая теория относительности Эйнштейна для слабого статического гравитационного потенциала

$$fM/r \ll c^2 \qquad (1.1а)$$

и для малых относительных скоростей

$$v^2 = (v^i)^2 \ll c^2 \qquad (1.1б)$$

дает в первом приближении ньютоновскую небесную механику. Отклонения от предсказаний ньютоновской теории гравитации появляются в двух случаях:

1) если при малых скоростях v принимается во внимание второе приближение теории Эйнштейна;

2) если исследуется движение частиц, скорости v которых сравнимы со скоростью света c (уже в первом приближении).

Единственным эмпирически установленным эффектом второго приближения с (1.1б) (движение планет) является движение перигелия. Зато известны три гравитационных эффекта первого приближения, при которых справедливо (1.1а), но

$$v \approx c. \qquad (1.2)$$

Эти эффекты относятся к движению света, т. е. к электродинамике в гравитационном поле.

Все четыре эйнштейновских эффекта можно получить, рассматривая задачу одного тела в статическом сферически-симметричном гравитационном поле центральной массы M (масса Солнца в небесной механике, масса Земли для опыта Паунда — Ребки) с ньютоновским гравитационным потенциалом

$$-c^2\Phi = -\frac{fM}{r} = \frac{-a}{r}c^2. \qquad (1.3)$$

(Здесь $a=fM/c^2$ — гравитационный радиус[1].) Гравитационное поле тогда задается линейным элементом Шварцшильда

$$ds^2 = \frac{-1}{1-2a/r}\,dr^2 - r^2\,(d\psi^2 + \sin^2\psi\, d\varphi^2) + \left(1-\frac{2a}{r}\right)c^2dt^2. \qquad (1.4а)$$

Однако в строгом виде (1.4а) этот линейный элемент нужен только для рассмотрения движения перигелия. Для световых эффектов достаточно линейного приближения

$$ds^2 = -\left(1+\frac{2a}{r}\right)\left(dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}\right) + \left(1-\frac{2a}{r}\right)c^2dt^2 =$$
$$= -\left(1+\frac{2a}{r}\right)dl^2 + \left(1-\frac{2a}{r}\right)c^2dt^2. \qquad (1.4б)$$

Закон движения пробной частицы (планеты) в гравитационном поле следует из динамического уравнения для тензора материи T_μ^ν:

$$(\sqrt{-g}\,T_\mu^\nu)_{,\nu} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\alpha\beta,\mu}\,T^{\alpha\beta} = 0 \qquad (\mu,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

Отсюда следует для массового монополя (точечной планеты в пренебрежении ее вращением) движение по закону инерции Эйнштейна:

$$m\frac{dx^\alpha_{;\lambda}}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} = mu^\alpha_{;\lambda}u^\lambda = 0 \qquad (1.5а)$$

с нормировкой

$$u^\lambda u_\lambda = 1, \qquad (1.5б)$$

которая выражает существование массы покоя. (1.5а) и (1.5б) показывают, что движение планеты происходит

[1] Обычно гравитационным радиусом называют величину $r_g=2fM/c^2=2a$, т. е. значение сферического радиуса r, при котором метрика (1.4а) имеет особенность. — *Прим. перев.*

вдоль временно-подобной геодезической и при этом справедлив принцип экстремума

$$\delta \int ds = \delta \int \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}\, ds = \delta \int L ds = 0, \qquad (1.6а)$$

где

$$L^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1. \qquad (1.6б)$$

Для случая линейного элемента Шварцшильда (1.4а) имеет место движение в плоскости $\psi = \pi/2$:

$$L^2 = -e^\lambda \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + e^\nu c^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2, \qquad (1.7а)$$

где

$$e^\lambda = -g_{11} = \left(1 - \frac{2a}{r}\right)^{-1}, \quad e^\nu = g_{00} = 1 - \frac{2a}{r} = e^{-\lambda}. \qquad (1.7б)$$

Используя функцию Лагранжа (1.7а), получаем закон сохранения относительной энергии планеты

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L^2}{\partial \dot t} = e^\nu c^2 \frac{dt}{ds} = W = \text{const} \qquad (1.8а)$$

и закон для момента импульса

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial L^2}{\partial \dot\varphi} = r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h^* = \text{const}. \qquad (1.8б)$$

Вместе с условием нормировки (1.6б) и в новых переменных $u = r^{-1}$, $u = u(\varphi)$, $u' = du/d\varphi$ это приводит к уравнению

$$u'^2 + u^2 (1 - 2au) + \frac{1 - W/c^2 - 2au}{h^{*2}} = 0. \qquad (1.9а)$$

С помощью дифференцирования окончательно получается уравнение движения

$$u'' + u = a/h^{*2} + 3au^2. \qquad (1.9б)$$

Уравнение (1.9б) можно приближенно решить в предположениях (1.1а) и (1.1б). Первое приближение приводит к эллипсам Кеплера

$$u = (a/h^{*2})(1 + \varepsilon \cos\varphi); \quad a/h^{*2} = 1/p, \qquad (1.10а)$$

а с учетом (1.10а) из (1.9б) получается как интеграл второго приближения

$$u = \frac{a}{h^{*2}} \left[1 + \varepsilon \cos\varphi \left\{\left(1 - \frac{3a^2}{h^{*2}}\right)\right\}\right]. \qquad (1.10б)$$

Формула (1.10б) описывает движение по Кеплеру с дополнительным вращением перигелия:

$$\left.\begin{aligned} &R = \frac{P}{1 - e^2} \text{ — большая полуось;} \\ &\delta\varphi = 3\,\frac{2\pi f M}{R(1 - e^2)\,c^2} = 3\Omega, \quad e = \varepsilon R. \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

Распространение света в гравитационном поле исследуется с помощью уравнений Максвелла общековариантного вида в эйкональном приближении:

$$g^{\mu\nu} S_{,\mu} S_{,\nu} \equiv g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} = 0. \tag{1.12}$$

Уравнения эйконала (1.12) означают, что лучи света движутся как частицы с исчезающей массой покоя, т. е. для световых лучей справедлив закон геодезического движения

$$\delta \int dS = 0 \tag{1.13а}$$

с

$$dS = 0. \tag{1.13б}$$

Для линейного элемента (1.4б) в приближении (1.1а) условие (1.13б) означает, что

$$\left(1 + \frac{a}{r}\right) dl = \left(1 - \frac{a}{r}\right) c\,dt. \tag{1.14а}$$

Поэтому эффективная скорость света v в гравитационном поле меньше, чем в пространстве, свободном от гравитации:

$$v = \frac{dl}{dt} = \left(1 - \frac{2a}{r}\right) c = \left(1 - \frac{2fM}{c^2 r}\right) c < c. \tag{1.14б}$$

Из (1.13) для движения света следуют законы сохранения энергии и момента импульса, и тем самым окончательно уравнение движения имеет вид

$$u'' + u = 3au^2. \tag{1.15}$$

С условиями (1.1а) и (1.1б) можно решить (1.15). Нулевое приближение есть евклидова прямая

$$u = (1/R)\cos\varphi \tag{1.16а}$$

с перигелием при $r = R$. Первое приближение описывает гиперболоподобное отклонение от прямой, так что для асимптот справедливы уравнения

$$x = R \pm (2a/R)\,y. \tag{1.16б}$$

С помощью (1.16б) определяется отклонение света гравитационным полем массы M по формуле

$$\Delta\varphi = 4a/R = 4fM/c^2R. \tag{1.16в}$$

Четвертый электродинамический эффект следует просто из эйнштейновского принципа эквивалентности. Согласно общерелятивистскому закону сохранения энергии, энергия движения света в статическом гравитационном поле есть константа:

$$h\nu/c = p_0 = c^2 g_{00}\, dt/ds = \mathrm{const}, \tag{1.17}$$

однако под влиянием гравитации изменяется ход часов. Поскольку дифференциал собственного времени $d\tau = ds/c$ для любой локальной неподвижной системы задается формулой

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\, dt = (1 - a/r)\, dt, \tag{1.18а}$$

собственные периоды в гравитационном поле увеличиваются [1]:

$$\Delta\tau \approx \Delta t\,(1 - a/r). \tag{1.18б}$$

Сдвиг частоты получается из-за того, что в точках r_1 и r_2 с разными гравитационными потенциалами по-разному определены эталоны частоты:

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{1 - a/r_1}{1 - a/r_2} = 1 - \frac{a}{r_1} + \frac{a}{r_2}, \tag{1.18в}$$

т. е. собственная частота ν при более высоком гравитационном потенциале fM/r ниже, чем при более низком.

С точки зрения динамики самое поразительное следствие теории Эйнштейна — это выражение (1.14б) для скорости света. Согласно ему эффективная скорость света v в перигелии наименьшая, а в афелии наибольшая. Если рассмотреть радиальное падение тела на центральную массу M, то из эйнштейновского закона геодезического движения следует:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{6ac^2}{2r(r - 2a)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{a\,(r - 2a)}{r^3}c^2. \tag{1.19а}$$

---

[1] Автор имеет в виду, что с точки зрения удаленного наблюдателя ($r_{\text{набл}} \gg r_0$) длительность Δt любого физического процесса, происходящего при $r = r_0$, больше, чем если бы этот процесс происходил при $r = r_{\text{набл}}$: $\Delta t > \Delta\tau$. — *Прим. перев.*

Из (1.19а) мы найдем (этот результат принадлежит Гильберту), что тело ускоряется гравитационным полем до тех пор, пока выполняется условие

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}\left(c - \frac{2a}{r}\right), \qquad (1.19б)$$

и, наоборот, тело тормозится, если

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| > \frac{1}{\sqrt{3}}\left(c - \frac{2a}{r}\right). \qquad (1.19в)$$

Поэтому световая частица всегда тормозится полем тяготения. Определим скорость радиально падающей частицы из закона сохранения энергии (1.8а) и условия нормировки (1.5б):

$$\frac{dr}{dt} = c\left(1 - \frac{2a}{r}\right)\sqrt{1 - \frac{c^2}{W} + \frac{2ac^2}{rW^2}}; \qquad (1.20а)$$

для светоподобной же частицы

$$dr/dt = c\,(1 - 2a/r). \qquad (1.20б)$$

Если скорость на бесконечности $v_\infty > c/\sqrt{3}$, то частица всегда тормозится полем центральной массы.

Эти общие предсказания теории Эйнштейна остаются в силе, если вместо общей теории относительности рассматривается любая ее модификация. Чтобы не нарушалось согласование с ньютоновской небесной механикой при условиях (1.1а) и (1.1б), вместо линейного элемента (1.4б) можно использовать только линейный элемент вида

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\chi a}{r}\right)dl^2 + c^2\left(1 - \frac{2a}{r}\right)dt^2. \qquad (1.21а)$$

Здесь χ — численная постоянная, для которой по общим физическим причинам должно выполняться требование

$$\chi \geqslant 0. \qquad (1.21б)$$

Случай

$$\chi = 0 \qquad (1.21в)$$

имеет место в первоначальной теории статического гравитационного поля, разработанной Эйнштейном (1911 г. [6]) и Абрагамом (1912 г. [1]). Эта теория, в которой справедлив закон геодезического движения, приводит к следующим результатам: сдвиг перигелия есть

$$\delta\varphi = 2\cdot 2\pi f M/c^2 R\,(1 - e^2) = 2\Omega, \qquad (1.22а)$$

скорость света

$$v = c(1 - a/r) < c, \qquad (1.22б)$$

отклонение света

$$\Delta\varphi = 2fM/c^2R, \qquad (1.22в)$$

а сдвиг частоты не изменяется.

Сравнение релятивистских теорий гравитации с ньютоновской теорией возможно в том случае, если предполагается всеобщая эквивалентность между инертной и тяжелой массами, так что решение задачи одного тела не зависит от массы частицы. Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{fmM}{r}. \qquad (1.23а)^1$$

Здесь m — масса частицы; $\dot{r}=dr/dt$, $\dot{\varphi}=d\varphi/dt$.

Справедливы закон сохранения момента импульса

$$\partial L/\partial\dot{\varphi} = mr^2\dot{\varphi} = mh = \text{const} \qquad (1.23б)$$

и закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{fmM}{r} = mw = \text{const}. \qquad (1.23в)$$

Для планет энергетическая постоянная w есть

$$w < 0, \qquad (1.24а)$$

а для светоподобных частиц

$$mw = (\mu/2)c^2 > 0, \quad c = v_\infty. \qquad (1.24б)$$

При этом здесь $m=\mu$ — «масса световой частицы», которая, однако, исключается из уравнений движения. Для планет отсюда следует кеплеровское движение

$$u = (fM/h^2)(1 + \varepsilon\cos\varphi), \quad p = h^2/fM. \qquad (1.25)$$

Напротив, светоподобные частицы движутся по широко разомкнутым гиперболам. Поскольку приближенно выполняются соотношения

$$h \approx R^2c^2;\ \varepsilon^2 \approx c^4R^2/f^2M^2 = R^2/a^2;\ p \approx R^2/a;\ \varepsilon/p \approx 1/R, \qquad (1.26а)$$

---

[1] Имеется в виду задача одного тела в теории Ньютона. — *Прим. перев.*

то такая гипербола в первом приближении аппроксимируется прямой

$$u = (\varepsilon/p)\cos\varphi \approx (1/R)\cos\varphi. \tag{1.26б}$$

Асимптоты гиперболы заданы тогда уравнениями

$$x = R \pm (a/R)\, y. \tag{1.26в}$$

Таким образом, в ньютоновской теории отклонение света в поле тяжести дается формулой

$$\Delta\varphi = 2fM/c^2R \tag{1.27}$$

(Зольднер, 1801 г.).

Согласно ньютоновской теории, в гравитационном поле меняется также скорость света v и, далее, свет совершает работу против гравитационного потенциала, следствием которой является сдвиг линий $\Delta\lambda/\lambda$. Оба эффекта вытекают из закона сохранения энергии

$$\mu v^2/2 - \mu\Phi c^2 = \mu c^2/2, \tag{1.28}$$

где $c = v_\infty$ — скорость света на бесконечности. Так как снова выполняется (1.1а), для скорости света находим

$$v = c\sqrt{1 + 2\Phi} \approx c\,(1 + fM/rc^2) > c. \tag{1.29}$$

Чтобы вычислить сдвиг линий в нерелятивистской ньютоновской механике, воспользуемся соотношениями Планка — Эйнштейна — де Бройля между импульсом и длиной волны:

$$\mu v = h/\lambda, \quad \mu c = h/\lambda_\infty .$$

Тогда с помощью (1.29) получаем

$$h\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_\infty}\right) = \mu\,(v - c) = \mu\Phi c = \frac{h}{\lambda_\infty}\,\frac{fM}{rc^2}. \tag{1.30}$$

Выражение (1.30) для сдвига линий, как известно, совпадает с аналогичным выражением из теории Эйнштейна. Тем самым оно равноценно понижению частоты в поле тяготения согласно (1.18а).

Напротив, ньютоновское выражение для эффективной скорости света v предсказывает эффект, противоположный эйнштейновскому: скорость света в перигелии наибольшая. Это заведомо ясно в ньютоновской теории, так как в перигелии потенциальная энергия $-\mu\Phi c^2$ имеет минимум, а кинетическая энергия T — максимум. Современное радиоастрономическое определение скорости света однозначно доказывает, что свет тормозится согласно Эйнштейну, а не ускоряется согласно Ньютону. Таким образом, при желании указать классическую модель для эффектов Эйнштейна мы вынуждены отказаться от ньютоновского потенциала, заменив его потенциалом, который при малых скоростях ($v^2 \ll c^2$) дает ускорение, а при больших скоростях ($v \approx c$) — замедление. Место ньютоновского потенциала должен занять потенциал, зависящий от скорости.

§ 2. Гравитационные потенциалы, зависящие от скорости

Потенциалы, зависящие от скорости, такие, какие требуются согласно § 1, известны прежде всего из специальной теории относительности. Однако специально-релятивистская теория гравитация заведомо исключена теоретически эквивалентностью инерции и гравитации применительно к свету и экспериментально существованием эйнштейновских световых эффектов (в частности, радиоастрономические данные доказывают зависимость скорости света от гравитационного потенциала). Уже Абрагам отметил, что специальная теория относительности своим принципом постоянства скорости света аксиоматически предопределяет изотропию распространения света в вакууме. Зависимость скорости света от гравитационного поля поэтому запрещает всякую теорию гравитации в рамках специальной теории относительности [1].

Постоянство скорости света в специальной теории относительности есть следствие того, что группой изометрий пространства — времени Минковского является группа Лоренца. Напротив, группой инвариантности ньютоновской гравитационной динамики является группа Галилея, и она не выделяет никакой скорости. На самом деле, согласно § 1, уже классическая ньютоновская теория приводит к зависимости скорости света от гравитационного поля. Чтобы попытаться смоделировать

[1] Разработанные Ми и Нордстремом (1912 г.) специально-релятивистские теории гравитации предсказывают движение перигелия с неверным знаком, и из них в самом деле следует постоянство скорости и прямолинейность распространения света даже при наличии гравитационного поля.

четыре эйнштейновских эффекта, нам придется, таким образом, ввести галилей-инвариантную теорию с гравитационным потенциалом, зависящим от скорости.

Поскольку из группы Галилея не следует никакой предельной скорости, примем, что гравитация действует мгновенно (т. е. ее скорость распространения бесконечно велика) и тем самым представляет дальнодействие при потенциале, зависящем от скорости [1].

Кроме того, обобщенный потенциал гравитационного взаимодействия U должен обладать координатной зависимостью ньютоновского вида

$$U \sim 1/r. \tag{2.1}$$

Однако «весовой множитель» в (2.1) должен зависеть от скорости [2].

Существуют две принципиально различные возможности для введения зависимости от скорости во взаимодействие:

1. Потенциал взаимодействия зависит от абсолютных скоростей тел, так что функция Лагранжа имеет вид, например,

$$L = \sum_{A} \frac{m_A (v^i_A)^2}{2} + \sum_{A>B} \frac{f m_A m_B}{r_{AB}} + \frac{\gamma}{c^2} \sum_{A>B} \frac{f m_A m_B}{r_{AB}} \left(v^i_A\, v^i_B\right), \tag{2.2а}$$

где

$$v^i_A = dx^i_A/dt \tag{2.2б}$$

— абсолютные скорости масс. Потенциал взаимодействия

$$U = \sum_{A>B} \frac{f m_A m_B}{r_{AB}} \left(1 + \frac{\gamma}{c^2}\, v^i_A\, v^i_B\right) \tag{2.2в}$$

---

[1] В принципе возможно ввести галилей-инвариантную теорию близкодействия с волновыми уравнениями того же типа, что предложил Ритц в своей баллистической теории света. Тогда эффективная скорость распространения гравитации зависит от относительного движения источника и точки наблюдения. Однако естественно связывать галилей-инвариантную теорию потенциала с идеей дальнодействия.

[2] Уравнения движения остаются при этом дифференциальными уравнениями второго порядка и тем самым соответствуют двум первым аксиомам Ньютона (ср. Пуанкаре А., «Наука и гипотеза» [32]).

удовлетворяет уравнению Лапласа. Можно также записать (2.2в) по аналогии с электродинамикой Клаузиуса в виде

$$U=\sum_{A>B}\left(m_A \Phi_B c^2+\gamma \frac{v_A^i}{c} A_B^i\right)$$

с

$$\Delta A_B^i=4\pi f m_B \frac{v_B^i}{c} \delta\left(x^i-x_B^i\right).$$

Здесь A^i — вектор-потенциал тяготения. Потенциалы взаимодействия, зависящие от абсолютных скоростей, были введены в теорию дальнодействия Клаузиусом в связи с общей дискуссией с Гельмгольцем. В дальнейшем мы будем называть их потенциалами Клаузиуса.

2. Можно, как это сделали Вебер (1846 г. [41]) и Риман (1858 г. [35]), потребовать, чтобы потенциал взаимодействия был галилей-инвариантным и при этом зависел только от относительных скоростей. В общем виде такой потенциал взаимодействия запишется как (в задаче двух тел)

$$L=\frac{m_1\left(v_1^i\right)^2}{2}+\frac{m_2\left(v_2^i\right)^2}{2}+\frac{f m_1 m_2}{r_{12}}+\frac{\psi}{r_{12}}\left(\frac{x_1^i-x_2^i}{r_{12}},\ v_{12}^i\right) \quad (2.3\text{а})$$

с относительными скоростями

$$v_{12}^i=v_1^i-v_2^i=\frac{d}{dt}\left(x_1^i-x_2^i\right). \quad (2.3\text{б})$$

В противоположность (2.3а) динамика (2.2а) с потенциалом Клаузиуса не галилей-инвариантна. Потенциал изменяется при переходе от одной инерциальной системы Σ к другой Σ', которая движется со скоростью V^i относительно Σ:

$$U'-U=\sum_{A>B}\frac{f m_A m_B}{r_{AB}}\frac{\gamma}{c^2}\left(v_A^i V^i+v_B^i V^i+V^i V^i\right). \quad (2.4)$$

При этом, однако, нарушается закон сохранения движения центра масс и тем самым ньютоновская аксиома противодействия. (По поводу физического смысла введения c как размерной константы см. ниже; γ — отвлеченное число.)

Для выполнения ньютоновской аксиомы противодействия необходима галилей-инвариантность потенциала взаимодействия U, поэтому U может зависеть только от относительных координат

$$x^i_{AB} = x^i_A - x^i_B \tag{2.5а}$$

и относительных скоростей

$$v^i_{AB} = v^i_A - v^i_B = \frac{d}{dt}\left(x^i_A - x^i_B\right), \tag{2.5б}$$

а именно

$$U = U\left(x^i_{AB}, v^i_{AB}\right) = \frac{\psi}{r_{AB}}\left(\frac{x^i_{AB}}{r^i_{AB}}, v^i_{AB}\right). \tag{2.5в}$$

Действительно, тогда для производных функции Лагранжа по координатам получаем

$$\frac{\partial U}{\partial x^i_A} = \sum_{B\neq A}\frac{\partial U}{\partial x^i_{AB}} = \sum_{B\neq A}\frac{\partial L}{\partial x^i_{AB}},$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial x^i_{AB}} = -\frac{\partial L}{\partial x^i_{BA}} = \frac{\partial U}{\partial x^i_{AB}} = -\frac{\partial U}{\partial x^i_{BA}}, \tag{2.6а}$$

а для производных по скоростям имеем

$$\frac{\partial U}{\partial v^i_A} = \sum_{B\neq A}\frac{\partial U}{\partial v^i_{AB}}, \text{ где } \frac{\partial U}{\partial v^i_{AB}} = -\frac{\partial U}{\partial v^i_{BA}}. \tag{2.6б}$$

Таким образом, из лагранжевых уравнений движения с помощью суммирования получаем

$$\sum_A \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v^i_A} = \frac{d}{dt}\sum_A m_A v^i_A + \frac{d}{dt}\sum_A \frac{\partial U}{\partial v^i_A} =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_A m_A v^i_A = 0, \tag{2.6в}$$

т. е. как полный канонический импульс

$$\sum_A \frac{\partial L}{\partial v^i_A},$$

так и полный кинетический импульс

$$\sum_A m_A v^i_A$$

остаются постоянными под действием внутренних сил. Ньютоновский принцип противодействия выполнен.

Если, напротив, потенциал взаимодействия зависит помимо относительных координат (2.5а) еще и от абсолютных скоростей v_A^i :

$$U = U\left(x_{AB}^i,\ v_A^i\right), \tag{2.7а}$$

то, согласно аксиоме противодействия, выполняется равенство

$$\partial L/\partial x_{AB}^i = -\,\partial L/\partial x_{BA}^i; \tag{2.7б}$$

однако, кроме того, справедлива формула

$$\frac{\partial U}{\partial v_A^i} = \frac{1}{2}\sum_B \frac{\partial U}{\partial\left(v_A^i - v_B^i\right)} + \frac{1}{2}\sum_B \frac{\partial U}{\partial\left(v_A^i + v_B^i\right)}, \tag{2.7в}$$

так что в общем случае лагранжево уравнение движения дает

$$\frac{d}{dt}\sum_A m_A v_A^i = -\frac{d}{dt}\sum_A \frac{\partial U}{\partial v_A^i} \neq 0. \tag{2.7г}$$

Поэтому в случае потенциалов Клаузиуса принцип противодействия, вообще говоря, нарушается [1].

Поскольку небесная механика предполагает аксиому противодействия, т. е. постоянство внутреннего импульса, небесная механика с потенциалом Клаузиуса невозможна. Таким образом, мы должны ввести потенциалы Вебера — Римана и при этом принять, что гравитационный потенциал зависит только от относительных скоростей [2].

Возможный вид зависимости U от скорости связан прежде всего с тем обстоятельством, что линейная зависимость

$$\sum_{A>B} \frac{\partial U}{\partial v_{AB}^i} v_{AB}^i = U,$$

---

[1] Специально для (2.2а) это впервые установил Пуанкаре (1890 г.).

[2] Кроме того, группа Лоренца специальной теории относительности, как известно, приводит к модификации (т. е. нарушению точного ньютоновского вида) аксиомы противодействия, которая возникает из-за эквивалентной инертной массы поля, передающего взаимодействие [Пуанкаре (1900 г.), Эйнштейн (1906 г.)]; ср. **Treder H.-J.**, Poincarés Relativität der Beschleunigung und die Mach—Einstein Doktrin, Mber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin. Bd. 13. 1971.

согласно Лапласу, должна быть столь слабой, что она не может привести к каким-либо обнаружимым эффектам небесной механики. Линейная зависимость также a priori исключается законом сохранения энергии (Гельмгольц, 1870 г. [13]).

Напротив, билинейная зависимость находится в согласии с законом сохранения энергии, если потенциал взаимодействия задан выражением

$$U = \sum_{A>B} \left[\frac{f m_A m_B}{r_{AB}} + \frac{f m_A m_B}{c^2 r_{AB}} \left(\alpha \dot{r}_{AB}^2 + \beta v_{AB}^i v_{AB}^i \right) \right] =$$

$$= P + D \quad \left(P = -\sum_{A>B} \frac{f m_A m_B}{r_{AB}} \right), \tag{2.8а}$$

где

$$\dot{r}_{AB} = \frac{d r_{AB}}{dt} = \frac{x_{AB}^k}{r_{AB}} v_{AB}^k \tag{2.8б}$$

суть относительные скорости; α и β — численные постоянные. Потенциальная энергия для задачи двух тел с массами m_1 и m_2 тогда имеет вид [см. (2.11)]

$$V = P + D = -\frac{f m_1 m_2}{r_{12}} \left(1 - \frac{\alpha}{c^2} \dot{r}^2 - \frac{\beta}{c^2} v^i v^i \right). \tag{2.8в}$$

В (2.8а) и (2.8в) c — постоянная, введенная из соображений размерности и обладающая размерностью скорости, которую следует рассматривать как инвариант. Как обычно, полагаем c равной скорости света в пустоте, причем мы здесь понимаем ее как скорость света от источника, покоящегося относительно наблюдателя. Заметим, однако, что толкование c как скорости света вначале не имеет никакого физического смысла. По сути дела изменение постоянной c означает не более чем переопределение численных постоянных α и β, поскольку в (2.8а) и (2.8в) входят только комбинации α/c^2 и β/c^2. Правда, ситуация замечательна тем, что если постоянная c вводится как скорость света, то численные постоянные становятся по порядку величины близкими к 1[1].

---

[1] Из чисто теоретико-потенциального рассмотрения не получается естественного физического объяснения этого обстоятельства, которое из-за структуры выражения (2.8а) не является неожиданным. Однако обоснование вытекает из доктрины Маха — Эйнштейна.

Как и $1/r$, v^2/r удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta(v^2/r) = v^2\Delta(1/r) = 0.$$

Выражение же

$$\dot{r}^2/r = (x^i v^i)^2/r^3 \tag{2.9а}$$

в силу (2.8б) удовлетворяет бипотенциальному уравнению (Риман, 1858 г.) вида

$$\Delta^2\left[\frac{(x^i v^i)^2}{r^3}\right] = \Delta^2\left[\frac{(x^i v^i)}{r^3}(x^l v^l)\right] = 0 \tag{2.9б}$$

(см. также § 6).

Для системы с функцией Лагранжа

$$L = T + U = \sum_A \frac{m_A}{2}(v_A^i)^2 + \sum_{A>B}\frac{fm_A m_B}{r_{AB}} + $$
$$+ \sum_{A>B}\frac{fm_A m_B}{c^2 r_{AB}}\left(\alpha\dot{r}_{AB}^2 + \beta[v_{AB}^i]^2\right), \tag{2.10}$$

согласно указанному Риманом обобщению принципа Лагранжа, справедлив закон сохранения энергии в виде

$$E = \sum_A \frac{m_A}{2}(v_A^i)^2 - \sum_{A>B}\frac{fm_A m_B}{r_{AB}} + \sum_{A>B}\frac{fm_A m_B}{c^2 r_{AB}}\left(\alpha\dot{r}_{AB}^2 + \right.$$
$$\left. + \beta[v_{AB}^i]^2\right) = T + V = T - P + D = \mathrm{const}. \tag{2.11}$$

В самом деле, если написать уравнения Эйлера — Лагранжа для (2.10):

$$m_A\frac{d}{dt}v_A^i + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial v_A^i} = \frac{\partial U}{\partial x_A^i}, \tag{2.12}$$

умножить (2.12) на скорость v_A^i и просуммировать по всем частицам P_A, то получим

$$\sum_A\left[m_A(v_A^i)^2 + v_A^i\frac{\partial U}{\partial v_A^i}\right]^{\cdot} = \sum_A v_A^i\frac{\partial U}{\partial x_A^i} + \sum_A \dot{v}_A^i\frac{\partial U}{\partial v_A^i} + $$
$$+ \sum_A \dot{v}_A^i m_A v_A^i = \sum_A\left(v_A^i\frac{\partial L}{\partial x_A^i} + \dot{v}_A^i\frac{\partial L}{\partial v_A^i}\right). \tag{2.13}$$

Так как (2.8а) — однородная функция второй степени от скоростей v^i_A, то

$$\frac{1}{2}\sum_A v^i_A \frac{\partial U}{\partial v^i_A} = \sum_{A\neq B} \frac{fm_A m_B}{c^2 r_{AB}} (\alpha \dot{r}^2_{AB} + \beta [v^i_{AB}]^2). \quad (2.14)$$

Правая часть (2.13) есть, очевидно, полная производная от $U + \sum_A \frac{m_A}{2}(v^i_A)^2$. Поэтому (2.13) вместе с (2.14) дают

$$2\frac{d}{dt}\left\{\sum \frac{m_A}{2}(v^i_A)^2 + \sum_{A>B} \frac{fm_A m_B}{c^2 r_{AB}} (\alpha \dot{r}^2_{AB} + \beta [v^i_{AB}]^2)\right\} = \\ = \frac{d}{dt}(T + U), \quad (2.15а)$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_A \frac{m_A [v^i_A]^2}{2} + \sum_{A>B} \frac{fm_A m_B}{c^2 r_{AB}} (\alpha \dot{r}^2_{AB} + \beta [v^i_{AB}]^2) - \\ - \sum_{A>B} \frac{fm_A m_B}{r_{AB}}\right\} = \frac{d}{dt}(T + D - P) = \\ = \frac{d}{dt}(T + V) = \frac{d}{dt} H = 0. \quad (2.15б)$$

Здесь особенно интересно то, что при билинейном по скоростям потенциале взаимодействия функции Лагранжа

$$L = \sum_A \frac{m_A}{2} v^2_A + \sum_{A>B} \frac{fm_A m_B}{c^2 r_{AB}} (\alpha \dot{r}^2_{AB} + \beta v^2_{AB}) + \\ + \sum_{A>B} \frac{fm_A m_B}{r_{AB}} \quad (2.16а)$$

соответствует функция Гамильтона

$$H = \sum_A \frac{m_A}{2} v^2_A + \sum_{A>B} \frac{fm_A m_B}{c^2 r_{AB}} (\alpha \dot{r}^2_{AB} + \beta v^2_{AB}) - \\ - \sum_{A>B} \frac{fm_A m_B}{r_{AB}} = \sum_A v^i_A \frac{\partial L}{\partial v^i_A} - L. \quad (2.16б)$$

Часть потенциала, зависящая от скоростей:

$$D = \sum_{A>B} \frac{fm_A m_B}{c^2 r_{AB}} \left(\alpha \dot{r}_{AB}^2 + \beta v_{AB}^2\right). \qquad (2.16в)$$

ведет себя в законе сохранения энергии (2.11) и в гамильтоновом формализме как дополнительная кинетическая энергия (см. также § 3 и 4).

Функция Лагранжа (2.16а) при $\alpha \neq 0$ зависит от скоростей анизотропно, поскольку в ней радиальные $\dot{r}_{AB}$ и трансверсальные скорости учитываются по-разному. Далее, (2.16а) приводит к обобщению закона сохранения момента импульса, так как (2.16в) зависит и от угловых скоростей (см. ниже). Все это вместе взятое приводит к выводу, что при функции Лагранжа (2.16а) в специальных случаях существует возможность ускоренного движения тела, при котором его кинетическая энергия (т. е. мера его скорости) не меняется.

Возможность дополнительной зависимости потенциала (2.8а) еще и от высших степеней относительных скоростей аналитически обосновать невозможно, так как обобщенный принцип Лагранжа и с ним закон сохранения энергии (2.11), а также обеспечивавшая его интерпретацию связь (2.16) между функциями Лагранжа и Гамильтона основаны на билинейности зависимости потенциала взаимодействия от скоростей. Отметим также, что аддитивное добавление членов, которые зависят от v^i_{AB} сильнее, чем билинейно, в предположениях из § 1 не приведет ни к каким обнаружимым небесномеханическим эффектам и, кроме того, в случае принципиальных световых эффектов обусловливает лишь переопределение константы (см. ниже).

Ограничимся теперь, как и в § 1, задачей одного тела и заметим, что из обобщенной функции Лагранжа также следует движение двух тел в одной плоскости. Функция Лагранжа (2.16а) для задачи двух тел имеет вид

$$L = \frac{m_1 (v_1^i)^2}{2} + \frac{m_2 (v_2^i)^2}{2} + \frac{fm_1 m_2}{r_{12}} \left(1 + \frac{\alpha}{c^2} \dot{r}_{12}^2 + \frac{\beta}{c^2} (v_{12}^i)^2\right) \qquad (2.17)$$

с интегралом энергии

$$H = E = \frac{m_1 (v_1^i)^2}{2} + \frac{m_2 (v_2^i)^2}{2} - \frac{f m_1 m_2}{r_{12}}\left(1 - \frac{\alpha}{c^2}\dot{r}_{12}^2 - \frac{\beta}{c^2}(v_{12}^i)^2\right). \quad (2.18)$$

Переходя к задаче одного тела, рассмотрим $m_1 = M$ как центральную массу и $m_2 = m \ll M$ как пробную массу. Тогда можно (в согласии с галилей-инвариантностью) предполагать центральное тело покоящимся:

$$v_2^i - v_1^i = v_2^i = v = dx_2^i/dt = dx^i/dt. \quad (2.19)$$

Теперь функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{mv^2}{2} - \frac{fmM}{r}\left(1 + \frac{\alpha}{c^2}\dot{r}^2 + \frac{\beta}{c^2}v^2\right) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{fmM}{r} + \frac{fmM}{rc^2}(\alpha\dot{r}^2 + \beta[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2]), \quad (2.20\text{а})$$

а интеграл энергии есть

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{fmM}{r}\left(1 - \frac{\alpha}{c^2}\dot{r}^2 - \frac{\beta}{c^2}v^2\right) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{fmM}{r} + \frac{fmM}{rc^2}(\alpha\dot{r}^2 + \beta[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2]). \quad (2.20\text{б})$$

Из (2.20а) следует закон сохранения момента импульса:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\left(1 + \frac{2\beta}{c^2}\frac{fM}{r}\right)\dot{\varphi} = mh = \text{const}. \quad (2.20\text{в})$$

Для планет интеграл энергии есть

$$E = mw < 0, \quad (2.21\text{а})$$

а для светоподобных частиц

$$E = \mu w = \frac{\mu}{2}c^2 > 0. \quad (2.21\text{б})$$

Рассмотрим движение в предположении

$$fM/r \ll c^2 \quad (2.22\text{а})$$

и потребуем при движении планет выполнения условия

$$v^2 \ll c^2, \quad (2.22\text{б})$$

а для движения света

$$|v^2 - c^2| \ll 1. \qquad (2.22в)$$

Используя интеграл момента импульса (2.20в) и интеграл энергии, находим для $u = r^{-1}$

$$\frac{1}{2}(u'^2 + u^2) - fMh^{-2}u + \frac{fM}{c^2}\alpha uu'^2 - $$

$$- \frac{fM}{c^2}\beta u(u'^2 + u^2) = wh^{-2}. \qquad (2.23)$$

Однократное дифференцирование (2.23) дает

$$u'' + u - fMh^{-2} + \frac{fM\alpha}{c^2}(u'^2 + 2uu'') -$$

$$- \frac{fM}{c^2}\beta(3u^2 + 2uu'' + u'^2) = 0. \qquad (2.24)$$

Для движения планет первое приближение (2.24) есть снова кеплеровское движение

$$u = \frac{fM}{h^2}(1 + \varepsilon\cos\varphi), \qquad (2.25а)$$

причем

$$u'' + u = fMh^{-2} \qquad (2.25б)$$

и

$$u'^2 + u^2 = 2fMh^{-2}u + 2wh^{-2}. \qquad (2.25в)$$

Далее, во втором приближении получаем уравнение

$$u'' + \left[1 + 4(\alpha - \beta)\frac{h^{-2}}{c^2}f^2M^2\right]u = fMh^{-2} + 3\alpha\frac{fM}{c^2}u^2. \quad (2.26)$$

Его интеграл в том же приближении

$$u = \frac{fM}{h^2}\left\{1 + \varepsilon\cos\varphi\left[1 - \frac{f^2M^2}{h^2c^2}(\alpha + 2\beta)\right]\right\} \qquad (2.27)$$

определяет, таким образом, эллипс Кеплера с дополнительным движением перигелия

$$\delta\varphi = (\alpha + 2\beta\ 2\pi f^2M^2/h^2c^2 = (\alpha + 2\beta)\Omega. \qquad (2.28)$$

Для света, согласно (2.26), первое приближение (2.24) есть движение по евклидовой прямой:

$$u = (f/R)\cos\varphi \quad (h \approx Rc), \qquad (2.29а)$$

причем

$$u'' + u = 0 \tag{2.29б}$$

и

$$u'^2 + u^2 = c^2 h^{-2}\,. \tag{2.29в}$$

Подставляя (2.29а) в (2.24), получаем во втором приближении следующее уравнение движения:

$$u'' + u = fMh^{-2}(1 - \alpha + \beta) + (3\varkappa/c^2)\, fMu^2. \tag{2.30а}$$

Правая часть (2.30а) состоит из члена зольднеровского типа

$$fMh^{-2}(1 - \alpha + \beta) \tag{2.30б}$$

и члена эйнштейновского типа

$$(3\varkappa/c^2)\, fMu^2. \tag{2.30в}$$

Следовательно, во втором приближении результатом является сильно разомкнутая гипербола, для асимптот которой справедливо уравнение

$$x = R \pm (1 + \alpha + \beta)\,(fM/c^2R)\; y. \tag{2.31а}$$

Таким образом, в результате получается отклонение света в поле тяготения, которое определяется формулой

$$\Delta\varphi = (1 + \alpha + \beta)\,(2fM/c^2R). \tag{2.31б}$$

Оба оставшихся световых эффекта вытекают также из закона сохранения энергии, т. е. (2.20б). Для этого достаточно применить закон сохранения энергии к радиальному падению: $\dot{r} = v$, $\dot{\varphi} = 0$, а именно

$$\frac{m}{2} v^2 = \frac{mV^2}{2} + m\Phi c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\gamma\right), \tag{2.32а}$$

где $\varphi = \alpha + \beta$, $\Phi = fM/rc^2$. В (2.32а)

$$mV^2/2 = mv_\infty^2/2 \tag{2.32б}$$

есть кинетическая энергия частицы на бесконечности. В частности, для света справедливо

$$\mu V^2/2 = \mu v_\infty^2/2 = \mu c^2/2. \tag{2.32в}$$

Прежде всего выясним из (2.32а) для $\gamma > 0$, ускоряет или тормозит гравитационное поле радиально движущуюся частицу, смотря по тому, выполняется ли

$$v^2 < c^2\gamma^{-1} \tag{2.33а}$$

или

$$v^2 > c^2\gamma^{-1}. \qquad (2.33б)$$

В данном случае $\Phi \approx 1$, так что для световой частицы эффективная скорость $v = dr/dt$ мало отличается от v_∞. Поэтому, согласно (2.32а) для световой частицы, эффективная скорость света сводится к

$$v \approx c(1 + [1 - \gamma]\Phi). \qquad (2.34)$$

Сдвиг линий в гравитационном поле получается из (2.34), как и в ньютоновской теории потенциала, с помощью соотношения Планка — Эйнштейна — де Бройля в виде

$$h(1/\lambda - 1/\lambda_\infty) = \mu(v - c) = \mu c\Phi[1 - \gamma] = \\ = (h/\lambda_\infty)[1 - \gamma]\Phi, \qquad (2.35)$$

и, следовательно, он составляет

$$-\Delta\lambda/\lambda = \Phi(1 - \gamma). \qquad (2.36)$$

$-(\Delta\lambda/\lambda)_0 = \Phi$ — это ньютоновско-эйнштейновский сдвиг линий, о котором говорилось в § 1. Отсюда сдвиг линий определяется потенциалом Вебера — Римана как

$$\Delta\lambda/\lambda = (\Delta\lambda/\lambda)_0(1 - \gamma). \qquad (2.37)$$

В зависимости от $\gamma \gtreqless 0$ сдвиг линий соответственно меньше, равен или больше ньютоновско-эйнштейновского значения $(\Delta\lambda/\lambda)_0$.

Мы выясняем, что для потенциала Вебера — Римана изменение скорости света и сдвиг линий происходят в противоположных «фазах», если речь идет о моделировании эйнштейновских световых эффектов. Чтобы в согласии с теорией Эйнштейна эффективная скорость света v в гравитационном поле была меньше c, должно быть

$$\gamma > 1. \qquad (2.38а)$$

Однако тогда сдвиг линий приобретает другой знак, нежели в теории Эйнштейна:

$$\Delta\lambda/\lambda = -(\gamma - 1)(\Delta\lambda/\lambda)_0. \qquad (2.38б)$$

Правильное ньютоновско-эйнштейновское значение сдвига линий получается как раз тогда, когда

$$\gamma = 0 \qquad (2.38в)$$

и, следовательно, свет ускоряется гравитационным полем по Ньютону и Зольднеру.

Добавление к потенциалу Вебера — Римана членов, зависящих от высших степеней скоростей v^i или $\dot{r}$, естественно, никак не влияет на выражение для движения перигелия, так как этими членами можно пренебречь на основании предположения $v^2 \ll c^2$. В законе сохранения энергии (2.32а) теперь на месте потенциала Вебера — Римана стоит просто обобщенный потенциал $\tilde{\varphi}$. Поэтому для скорости света находим

$$v \approx c(1 + \tilde{\varphi}), \tag{2.39а}$$

а для сдвига линий

$$-\Delta\lambda/\lambda \approx \tilde{\varphi}, \tag{2.39б}$$

так что и здесь снова изменение скорости света и сдвиг линий получают к своим ньютоновским значениям поправки противоположного смысла.

§ 3. Специальные потенциалы Вебера—Римана и индуцированная инерция Вебера

Предложение ввести в небесную механику вместо ньютоновского потенциал Вебера или Римана было сделано Цёлльнером и Тиссераном (1872 г. [46, 38]) непосредственно в связи с работами Вебера и Римана по электродинамической теории дальнодействия. Уже Тиссеран предложил трактовать обнаруженное Леверье (1846 г.) движение перигелия Меркурия (т. е. небольшую часть движения перигелия, полученного астрономически, необъяснимую по Ньютону) как следствие зависимости гравитационного потенциала от скорости. В последующие десятилетия вплоть до установления теории относительности, а также в дискуссиях о необходимости эйнштейновской теории обсуждались различные потенциалы типа Вебера — Римана. Интерес к теории гравитации с потенциалом Вебера — Римана проявлялся в основном в Германии и во Франции. Из немецких авторов можно особо отметить Неймана, Гербера, фон Зеелигера и Оппенгейма; из французов — Леви, Пенлеве и Норманна[1]. Общий потенциал Вебера — Римана

$$V = P + D = -\frac{fM}{r}\left(1 - \alpha\frac{\dot{r}^2}{c^2} - \beta\frac{v^2}{c^2}\right) \quad (3.1а)$$

содержит ньютоновский член

$$-fM/r \text{ с } \Delta(fM/r) = 0, \quad (3.1б)$$

веберовский член, зависящий от относительных радиальных скоростей:

$$\alpha\frac{fM}{c^2r}\dot{r}^2 \text{ с } \Delta^2\left(\frac{fM}{c^2r}\dot{r}^2\right) = 0, \quad (3.1в)$$

и римановский член, зависящий от абсолютных значений относительных скоростей:

$$\beta\frac{fM}{c^2r}v^2 \text{ с } \Delta\left(\frac{fM}{c^2r}v^2\right) = 0. \quad (3.1г)$$

Потенциал (3.1а) содержит две независимые константы α и β, которые можно выбрать таким образом, чтобы смоделировать два эйнштейновских эффекта. Из § 2 следует, что движение перигелия определяется комбинацией постоянных

$$\alpha + 2\beta, \quad (3.2)$$

тогда как все три световых эффекта зависят от одной и той же комбинации постоянных:

$$\gamma \equiv \alpha + \beta. \quad (3.3)$$

Эйнштейновская величина сдвига перигелия моделируется, если α и β выбраны так, что

$$\alpha + 2\beta = 3. \quad (3.4)$$

---

[1] В годы появления общей теории относительности теории гравитации вебер-римановского типа выдвигались в качестве конкурирующих, причем наиболее детально это делалось Пенлеве (1921—1922 гг). В немецкой литературе это (отчасти весьма неявно) пытались делать в числе других Герке и Ленард. Эти авторы особенно пропагандировали гравитационный потенциал Гербера (см ниже) вместе с зольднеровским выводом об отклонении света в ньютоновской теории. [Фактически, однако, герберовская и зольднеровская величины взаимно исключают друг друга (см. ниже).] Позиция Герке и Ленарда подвергалась критике, особенно со стороны фон Лауэ и фон Зеелигера, а также Гильберта.

Эйнштейновское значение для отклонения света потребовало бы

$$\gamma = 1, \tag{3.5а}$$

эйнштейновская величина скорости света —

$$\gamma = 3 \tag{3.5б}$$

а эйнштейновский сдвиг линий —

$$\gamma = 0. \tag{3.5в}$$

Таким образом, имеется бесконечно много возможностей смоделировать движение перигелия, и независимо от этого моделируем еще один световой эффект. При этом, согласно замечаниям в § 2, моделирование эйнштейновского закона для скорости света приведет в известном смысле к неверному выражению для сдвига частоты, и наоборот.

Отметим далее, что в случае малых гравитационных потенциалов и малых скоростей:

$$fM/r \ll c^2, \ v^2 \ll c^2 \tag{3.6}$$

функция Лагранжа (1.7а) шварцшильдовской метрики почленно совпадает с потенциалом (3.1а), в котором константы выбраны так, что $\alpha=\beta=1$, т. е.

$$V = (-fMm/r)(1 - \dot{r}^2/c^2 - v^2/c^2). \tag{3.7а}$$

Однако это совпадение имеет место только при малых скоростях. (3.7а) при $v \approx c$ дает для всех трех световых эффектов значения, отличающиеся от эйнштейновских:

$$\Delta\varphi = \frac{3}{2}(\Delta\varphi)_{\text{Эйнштейн}}; \tag{3.7б}$$

$$v = c(1 - fM/rc^2); \tag{3.7в}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_\infty} = + \frac{fM}{c^2 r} = -\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_\infty}\right)_{\text{Эйнштейн—Ньютон}}. \tag{3.7г}$$

Потенциал Леви соответствует следующему выбору констант:

$$\alpha + \beta = 1, \ \alpha + 2\beta = 3, \ \text{т. е. } \alpha = -1, \ \beta = 2, \tag{3.8а}$$

и моделирует движение перигелия

$$\delta\varphi = (\delta\varphi)_{\text{Эйнштейн}} = 3\Omega \tag{3.8б}$$

и отклонение света

$$\Delta\varphi = (\Delta\varphi)_{\text{Эйнштейн}} = \frac{4fM}{c^2R}. \qquad (3.8\text{в})$$

Однако скорость света остается постоянной:

$$v = c(1 + [1 - \alpha - \beta]\,\Phi) = c, \qquad (3.8\text{г})$$

и нет никакого сдвига линий $\Delta\lambda/\lambda_\infty$. Таким образом, потенциал Леви — пример «безэнергетического»[1] действия гравитационного потенциала[2].

Выбор постоянных

$$\alpha = 3,\ \beta = 0 \qquad (3.9\text{а})$$

дает гравитационный потенциал Гербера. Потенциал Гербера (1898 г.) моделирует движение перигелия

$$\delta\varphi = 6\pi fM/R(1 - e^2)c^2 = 3\Omega \qquad (3.9\text{б})$$

и выражение для скорости света

$$v = c(1 - 2\Phi). \qquad (3.9\text{в})$$

Напротив, для отклонения света из (3.9а) следует

$$\Delta\varphi = 8fM/Rc^2 = 2\Delta\varphi_{\text{Эйнштейн}}, \qquad (3.9\text{г})$$

а для сдвига линий

$$-\Delta\lambda/\lambda_\infty = 2(\Delta\lambda/\lambda_\infty)_{\text{Ньютон—Эйнштейн}}. \qquad (3.9\text{д})$$

Наконец, можно подобрать потенциал так, чтобы он давал для всех световых эффектов ньютоновско-зольднеровские значения и, следовательно, правильное эйнштейновское значение для сдвига линий. Это соответствует такому выбору постоянных:

$$\gamma = \alpha + \beta = 0;\ \alpha + 2\beta = 3 \leftrightarrow \alpha = -\beta = -3, \qquad (3.10\text{а})$$

что дает потенциал

$$V = -\frac{fMm}{r}\left(1 + \frac{3\dot{r}^2}{c^2} - \frac{3v^2}{c^2}\right). \qquad (3.10\text{б})$$

[1] В оригинале «wattlos». — *Прим. перев.*

[2] Так как к 1920 году с достаточной надежностью были установлены только движение перигелия и отклонение света, тогда как существование красного смещения было спорным, а эффект скорости еще стоял вне всякого обсуждения. Пенлеве и Норманн рассматривали введение потенциала Леви (1890 г.) как возможную замену общей теории относительности.

Потенциал (3.10б) интересен постольку, поскольку он объединяет эйнштейновскую небесную механику с ньютоновской гравитационной оптикой.

Противоположная направленность моделирования эффектов сдвига линий и скорости света, которая исключает любое классическое моделирование эйнштейновских световых эффектов, объясняется законом сохранения энергии для световых частиц:

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu c^2}{2} + \frac{\mu f}{rc^2}(1-\gamma), \tag{3.11}$$

где при этом импульс фотона устанавливается из соотношения Планка — Эйнштейна — де Бройля

$$\mu v = h/\lambda = \mu c(1 + [1-\gamma]\Phi). \tag{3.12}$$

Из этого подхода, очевидно, следует представление, что «масса световой частицы» не зависит от внешнего гравитационного потенциала.

Далее, согласно § 2, справедлив обобщенный принцип Лагранжа с галилей-инвариантным гравитационным потенциалом (3.1а), по которому функции Лагранжа для задачи одного тела ($m \ll M$)

$$L = \frac{m}{2}v^2 + \frac{fmM}{c^2r}(\alpha\dot{r}^2 + \beta v^2) + \frac{fmM}{r} \tag{3.13а}$$

соответствует функция Гамильтона

$$H = \frac{m}{2}v^2 + \frac{fmM}{c^2r}(\alpha\dot{r}^2 + \beta v^2) - \frac{fmM}{r} = \mathrm{const}, \tag{3.13б}$$

так что в каноническом формализме

$$T^* = T + D = \frac{m}{2}\left(v^2 + \frac{2fM}{c^2r}[\alpha\dot{r}^2 + \beta v^2]\right) \tag{3.14}$$

преобразуется как кинетическая энергия и только ньютоновская часть потенциала (3.1а) — как потенциальная энергия. Если рассматривать (3.14) как эффективную кинетическую энергию частицы в задаче одного тела, то отсюда следует зависимость ее эффективной инертной массы от гравитационного потенциала (см. ниже). (Строгий вывод для эффективной инертной массы в задаче N тел будет дан в § 5.)

Уже в рамках электродинамики с дальнодействием Вебер и Нейман предложили толковать член

$$T^* = T + D = \frac{m}{2} v^2 - \frac{eQ}{c^2 r}(\alpha \dot{r}^2 + \beta v^2) \qquad (3.15)$$

в функции Лагранжа для задачи одного тела как кинетическую энергию «электрона». Тогда закон Ампера и закон индукции получаются, если выбрать

$$\alpha + \beta = 1/2 \qquad (3.16)$$

(Гельмгольц, 1870 г.). Однако, согласно Гельмгольцу, эта интерпретация терпит крушение из-за неуниверсальности электродинамического взаимодействия, для которого, в частности, индуцированная инертная масса, соответствующая (3.15), имеет любой из двух знаков. Отрицательный знак, имеющий место при одноименных зарядах, приводит к особенностям для v в точках $r > 0$. Установление экспериментальных границ для этой индукции массы было предметом первых работ (1881 г.) Г. Герца в Институте Гельмгольца (см. G. Hertz, «Heinrich Hertz, Leben und Werk», 1971).

Напротив, гравитация есть универсальная сила притяжения, и индуцированная кинетическая энергия всегда обладает положительным знаком, если выбрано $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Поэтому, если понимать (3.14), согласно Нейману и Пуанкаре, как эффективную кинетическую энергию частицы в задаче одного тела, то и индуцированная инерция будет иметь только положительный знак. Уже при $\gamma < 0$ эта индукция инерции препятствует появлению сингулярной скорости при радиальном движении:

$$\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{\gamma f m M \dot{r}^2}{c^2 r} - \frac{f m M}{r} = E \leftrightarrow \dot{r}^2 = \frac{E/m + fM/r}{1/2 + \gamma f M/c^2 r}. \qquad (3.17)$$

Определение (3.14) для кинетической энергии содержит указание на доктрину Маха — Эйнштейна; она будет обсуждаться далее в гл. 2, § 5 и 6.

В задаче одного тела при радиальном движении из (3.14), согласно Веберу и Риману, получается эффективная инертная масса

$$m^* = m(1 + 2\gamma f M/c^2 r), \qquad (3.18)$$

которая соответствует эффективной кинетической энергии

$$T^* = (m/2)(1 + 2\gamma fM/c^2r)v^2. \qquad (3.19)$$

Из (3.18) и (2.34) получаем в качестве импульса световой частицы ее канонический импульс

$$\partial L/\partial v = \mu^* v \approx \mu(1 + 2\gamma\Phi)c(1 + [1 - \gamma]\Phi) \approx$$
$$\approx \mu c(1 + [1 + \gamma]\Phi), \qquad (3.20)$$

и при этом из соотношения Планка — Эйнштейна — де Бройля следует

$$h(1/\lambda - 1/\lambda_\infty) = (h/\lambda_\infty)\Phi(1 + \gamma), \qquad (3.21)$$

так что вместо (2.36) и (2.37) для сдвига линий имеем

$$\Delta\lambda/\lambda = -\Phi(1 + \gamma) = (1 + \gamma)(\Delta\lambda/\lambda)_{\text{Ньютон—Эйнштейн}},$$

т. е. поправка к ньютоновско-эйнштейновскому значению получает другой знак, нежели в § 2.

В случае чисто римановского потенциала ($\alpha = 0$) уравнения движения для задачи одного тела с массой (3.18) записываются в виде

$$m^*\dot{v}^l \doteq \frac{2f\beta}{c^2} mM \frac{x^k v^k}{r^3} v^l - \frac{fmM}{r^3}\left(1 + \frac{\beta}{c^2}v^2\right)x^l. \qquad (3.22)$$

В случае же общего потенциала Вебера — Римана приходится различать радиальную и трансверсальную инертные массы (см. § 6). Именно, для радиального движения находим

$$m\frac{d}{dt}\left[\left(1 + 2\frac{\alpha + \beta}{c^2 r} fM\right)\dot{r}\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{fmM}{r}\left(1 + \frac{\alpha + \beta}{c^2}\dot{r}^2\right)\right] \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow m\left(1 + 2\frac{\alpha + \beta}{c^2 r} fM\right)\ddot{r} = -(\alpha + \beta)\frac{fmM}{c^2 r^2}\dot{r}^2 - \frac{fmM}{r^2}, \qquad (3.23а)$$

а для трансверсального движения

$$m\left(1 + \frac{2\beta}{c^2 r} fM\right)\dot{v}^a = -\frac{fmM}{r^3}\left(1 + \frac{\beta}{c^2}v^2\right)x^a. \qquad (3.23б)$$

Различие между продольной и трансверсальной инертными массами, даваемое потенциалами Вебера —

Римана, аналогично такому же различию в дорелятивистских теориях полевой массы электрона, выдвинутых Абрагамом и Лоренцем.

Между абрагамовским толкованием инертной массы электрона как следствия инерции энергии собственного поля электрона, с одной стороны, и принципом инерции Вебера — Римана [и его радикальным использованием в доктрине Маха — Эйнштейна (см. § 5)], с другой стороны, существует, однако, принципиальная разница. Согласно Абрагаму и Лоренцу, инертная масса есть следствие «самоиндукции»; согласно же Веберу и Риману и соответственно Маху и Эйнштейну, инертная масса есть результат индукции со стороны внешних источников (см. § 6).

Однако с предложенным Нейманом и Пуанкаре толкованием m^* и T^* соответственно как инертной массы и кинетической энергии мы уже шагнули далеко за рамки классической физики и непосредственно подошли к основным проблемам общей теории относительности.

РИМАНОВА МЕХАНИКА И ДОКТРИНА МАХА — ЭЙНШТЕЙНА

§ 4. Эквивалентность, общая относительность и принцип Маха

Подтвержденная со всей строгостью опытами Этвеша эквивалентность инертной массы $m^* = m_{\text{ин}}$ и тяжелой массы $m_{\text{тяж}}$ (пассивной тяготеющей массы)

$$m^* = m_{\text{тяж}} = m$$

была конструктивно усилена Эйнштейном до принципа эквивалентности, согласно которому локальные влияния инерции и тяготения неразличимы ни в каких физических процессах.

В общей теории относительности, согласно Эйнштейну, эта эквивалентность обеспечивается тем, что влияние инерции и гравитация на все физические процессы описывается с помощью общековариантных канонических динамических уравнений для материи и материальных полей. Для описания инерции и гравитации используется метрический тензор $g_{\mu\nu}$ риманова пространственно-временного мира V_4, и место ньютоновской гравитации занимает зависимость этой метрической структуры V_4 от материи, согласно эйнштейновским уравнениям тяготения

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi f}{c^4} T_{\mu\nu}. \tag{4.1}$$

Эйнштейновская гравитационная динамика есть, таким образом, чистая динамика инерции, в которой физические процессы, происходящие под влиянием только гравитации, бессиловые[1], хотя в V_4 в целом метрика $g_{\mu\nu}$, согласно эйнштейновским уравнениям, определяется материей. Граничные условия и условия сшивания вместе с (4.1) однозначно определяют $g_{\mu\nu}$ с точностью до преобразований координат из общей группы Эйнштейна. Разные координатные системы приводят к преобразованным метрикам

$$g'_{\alpha\beta}(x'^{\lambda}) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} g_{\mu\nu}(x^{\lambda}) \qquad (4.2)$$

и соответствуют различным системам отсчета (эйнштейновский принцип ковариантности).

Таким образом, истолкование принципа эквивалентности в общей теории относительности связано с тем, что она исключает гравитацию как силовое поле и тем самым трактует все гравитационные воздействия как инерциальные. Дополнительной (альтернативной) возможностью по отношению к этому истолкованию принципа эквивалентности является маховское представление, согласно которому инерция интерпретируется как гравитационное воздействие и которое вошло в первоначальную разработку общей теории относительности как доктрина Маха — Эйнштейна (см. ниже).

Мах прежде всего отметил, что *кинематически* скорость и ускорение определимы только по отношению к телу, которое принято неподвижным или соответственно неускоренным. В небесной механике этой кинематической системой отсчета является целиком вся Вселенная (сфера неподвижных звезд во времена Маха; по современным представлениям — Метагалактика). Но Мах затем потребовал, чтобы эта *кинематическая относительность* была справедлива и для *динамики*. Из-за галилей-инвариантности ньютоновской механики это автоматически выполняется для всех скоростей. Однако принцип Маха требует дополнительно *динамической относительности*, т. е. относительности ускорения.

Рассмотрим в ньютоновской механике взаимодействие двух произвольных тел K_1 и K_2 с массами m_1 и m_2,

[1] Тем самым эйнштейновская гравитационная динамика применительно к ньютоновским гравитационным силам выполняет программу исключения всех сил, разработанную Герцем в его «Принципах механики» [14].

на которые действуют произвольные внешние силы F_1^i и F_2^i; пусть, далее, тело K_1 действует на тело K_2 с силой F_{21}^i, а тело K_2 — в свою очередь на тело K_1 с силой F_{12}^i. Тогда ньютоновские уравнения движения имеют вид соответственно

$$m_1 dv_1^i/dt = F_1^i + F_{12}^i; \tag{4.3а}$$

$$m_2 dv_2^i/dt = F_2^i + F_{21}^i. \tag{4.3б}$$

Они могут быть приведены к уравнениям для относительного движения

$$\frac{d}{dt}(v_1^i - v_2^i) = \frac{d}{dt} v_{12}^i = \frac{F_{12}^i}{m_1} - \frac{F_{21}^i}{m_2} + \frac{F_1^i}{m_1} - \frac{F_2^i}{m_2} \tag{4.4}$$

и уравнению для абсолютного движения центра масс

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1^i + m_2 v_2^i) = F_1^i + F_2^i + F_{12}^i + F_{21}^i. \tag{4.5}$$

Согласно принципам относительности классической механики, справедлива ньютоновская аксиома противодействия:

$$F_{12}^i = -F_{21}^i. \tag{4.6}$$

В самом деле, пусть имеется потенциал U, описывающий взаимодействие между телами K_1 и K_2; тогда, согласно принципу относительности места и галилеевскому принципу относительности, U может зависеть только от относительных координат и относительных скоростей

$$x_{12}^i = x_1^i - x_2^i; \tag{4.7а}$$

$$v_{12}^i = v_1^i - v_2^i, \tag{4.7б}$$

при этом справедливо

$$\frac{\partial U}{\partial x_{12}^i} = \frac{\partial U}{\partial x_1^i} = -\frac{\partial U}{\partial x_2^i}; \quad \frac{\partial U}{\partial v_{12}^i} = \frac{\partial U}{\partial v_1^i} = -\frac{\partial U}{\partial v_2^i}, \tag{4.8}$$

и поэтому абсолютные уравнения движения (4.5) принимают вид

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1^i + m_2 v_2^i) = F_1^i + F_2^i. \tag{4.9}$$

Уравнения (4.9) есть закон движения центра масс, который означает, что в отсутствие внешних сил центр масс движется неускоренно.

Мах далее отметил, что абсолютные уравнения (4.9) по крайней мере кинематически отнесены к сфере неподвижных звезд и что местонахождение частицы фактически определено по отношению к достаточно большому числу «неподвижных звезд» (сегодня мы выбрали бы ядра туманностей или компактные галактики и квазары):

$$x_a^i = \sum_A m_A x_{aA}^i / \sum_A m_A. \tag{4.10а}$$

В (4.10а) m_A — удаленные массы, а r_{1A} и r_{2A}, где

$$r_{aA}^2 = (x_{aA}^1)^2 + (x_{aA}^2)^2 + (x_{aA}^3)^2, \tag{4.10б}$$

их расстояния от масс m_1 и m_2 соответственно. Таким образом, уравнения движения (4.5) принимают вид

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(m_1 \frac{\sum\limits_A m_A x_{1A}^i}{\sum\limits_A m_A} + m_2 \frac{\sum\limits_A m_A x_{2A}^i}{\sum\limits_A m_A}\right) = F_1^i + F_2^i. \tag{4.10в}$$

Итак, хотя кинематически ускоренные движения можно рассматривать как относительные движения — движения относительно Вселенной, — динамически ускорение в ньютоновской механике носит абсолютный характер, поскольку ускоренные движения связаны с появлением сил инерции. Мах отметил, однако, что эмпирически ускоренное движение, определенное через силы инерции, согласуется с астрономически измеренным кинематическим ускорением. По Маху, это должно быть указанием на то, что силы инерции на самом деле могут быть отнесены к удаленным массам Вселенной. Это означало бы, что инерциальные члены в ньютоновских уравнениях движения на самом деле являются функциями космических масс и поэтому исчезли бы, если космические массы были исключены. Отсюда Мах потребовал, чтобы силы инерции, которые обусловливают абсолютный характер ньютоновских уравнений движения, понимались на самом деле как гравитационные воздействия удаленных космических масс [1].

---

[1] Б. и И. Фридлендеры весьма строго формулировали это уже в 1896 г. в требовании, что правильная форма закона инерции должна основываться только на относительной инерции, которая должна определяться тем же законом взаимодействия, что и гравитация. Этим была бы устранена и отмеченная Герцем непоследовательность понятия «сила инерции».

Из-за эквивалентности инерции и тяготения и вытекающей отсюда универсальности гравитационного поля это представляется мыслимым. По интерпретации Маха, эквивалентность инерции и тяготения означает, что силы инерции на самом деле являются особым видом гравитационных сил. В то время как общая теория относительности фактически исключает из физики пассивную тяжелую массу $m_{\text{тяж}}$, сводя ее к инертной, согласно трактовке Маха, инертную массу $m_{\text{ин}}$ можно исключить из гравитационной механики, сводя ее к тяжелой массе $m_{\text{тяж}}$.

Эйнштейн в этом отношении конструктивно усилил принцип Маха, постулировав «доктрину Маха — Эйнштейна», согласно которой инертная масса тела $m^* = m_{\text{ин}}$ должна быть однородной линейной функцией взятого с противоположным знаком гравитационного потенциала Вселенной:

$$\Phi = f \sum_A \frac{m_A}{r_A},$$

$$m_a^* = \varphi_a(m_a\Phi) \sim B \sum_{A \neq a} \left(f \frac{m_a m_A}{r_{aA}} \right), \qquad (4.11)$$

где $B = \text{const}$. [В (4.11) массы в правой части суть исключительно тяжелые массы; индуцированные гравитацией инертные массы мы здесь для отличия обозначаем m^*.]

Поскольку на основании доктрины Маха — Эйнштейна ньютоновские уравнения движения приобрели бы вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[B \sum_{A \neq a} \left(\frac{f m_a m_A}{r_{aA}} \right) x_a^i \right] \sim F_a^i, \qquad (4.12)$$

принцип Маха фактически содержался бы в доктрине Маха — Эйнштейна, так как тогда без удаленных «масс» m_A инерционный член в уравнениях движения исчез бы. Однако уравнение вида (4.12) требует основательной переработки ньютоновской механики.

При подобной реализации принципа Маха была бы, естественно, введена и общая относительность, так как различие между инерциальными и неинерциальными системами отсчета в конечном счете основывается на появлении сил инерции. Однако, согласно доктрине Маха — Эйнштейна, эта инерция индуцируется не абсолютным пространством, а удаленными массами (см. § 7 и 8).

Из-за локальной равноценности эйнштейновской геометрической и маховской динамической интерпретации эквивалентности инерции и тяготения и в силу появления общей относительности уже при постулировании доктрины Маха — Эйнштейна у Эйнштейна вначале было представление, что общая теория относительности вместе с общим принципом относительности должна была бы заключать в себе принцип Маха. Этому соответствует первоначальное эйнштейновское толкование полей инерции как особых гравитационных полей. Эйнштейн полагал, что такое толкование возможно на основании его уравнений (4.1), потому что все $g_{\mu\nu}$ должны быть решениями уравнений (4.1) и эти $g_{\mu\nu}$ охватывают и инерциальные, и гравитационные воздействия. В противоположность этому в ньютоновской теории поля инерции, вообще говоря, не удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi = 0. \qquad (4.13)$$

В своих космологических исследованиях (1917 г.) Эйнштейн выяснил фундаментальное различие между общим принципом относительности и принципом Маха и отметил, что в противоречие с доктриной Маха — Эйнштейна уравнения (4.1) определяют метрику $g_{\mu\nu}$ не полностью, а лишь с точностью до граничных условий. Но как раз эти граничные условия и определяют глобальные системы отсчета и тем самым силы инерции. Выполнение принципа Маха на основании эйнштейновских уравнений гравитации было бы возможно, только если бы эти уравнения полностью устанавливали $g_{\mu\nu}$ и именно так, чтобы

$$g_{\mu\nu} = 0 \qquad (4.14а)$$

для

$$T_{\mu\nu} = 0. \qquad (4.14б)$$

Имеющаяся в общей теории относительности относительность инерции указывает лишь на вид зависимости инертной массы m^* от метрического тензора $g_{\mu\nu}$.

При выборе координат $g_{i0}=0$ в общей теории относительности из определения импульса p_i следует частичная относительность инерции. Для малых скоростей [1] v это определение имеет вид

$$p_i = -\frac{g_{ik}m}{\sqrt{g_{00}}}\frac{dx^k}{dt}; \quad p_\nu = g_{\nu\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}m. \qquad (4.15а)$$

Для изотропного пространства

$$g_{11} = g_{22} = g_{33},\ g_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k, \qquad (4.15б)$$

и при эйнштейновском координатном условии

$$g = |g_{ik}|\, g_{00} = (g_{11})^3 g_{00} = -1; \qquad (4.15в)$$

отсюда следует для инертной массы

$$m^* = m\,|g_{11}|\, g_{00}^{-1/2} \qquad (4.16а)$$

и для относительной энергии

$$p_0 c = mc^2 g_{00}/\sqrt{g_{00}} = mc^2(-g_{11})^{-3/2}. \qquad (4.16б)$$

Видно, что инертная масса m^*, согласно общей теории относительности, исчезает только тогда, когда выполняется (4.14а).

Однако эйнштейновские уравнения (4.1) суть уравнения в частных производных, и в них принципиально не содержится никаких сведений о граничных условиях. Поэтому в общей теории относительности принцип Маха может быть самое большее принципом выбора граничных условий, с помощью которого отбираются именно такие граничные условия, чтобы сделать возможной реализацию доктрины Маха — Эйнштейна.

Из доктрины Маха — Эйнштейна следует, что эффективная инертная масса m^* тела K индуцируется его гравитационным взаимодействием с остальными массами Вселенной, причем в качестве индивидуальной постоянной выступает гравитационный заряд $m_{\text{тяж}}$ (пассивная тяжелая масса) тела. Механикой, в которой инертная масса индуцируется гравитационными потенциалами всех остальных масс, является механика

[1] Поскольку принцип Маха был выдвинут прежде всего применительно к галилей-инвариантной механике, он без затруднений приложим к релятивистской механике только при $v^2 \ll c^2$.

Римана, рассмотренная в гл. 1. В этой механике место ньютоновского потенциала

$$\varphi_{12} = -fm_2/r_{12} \tag{4.17}$$

занимает риманов потенциал, зависящий от скорости:

$$\varphi^*_{12} = -\frac{fm_2}{r_{12}}\left[1 - \frac{\beta}{c^2}(v^i_{12})^2\right], \tag{4.18}$$

где $\beta > 0$. Потенциал (4.18) также удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi^* = 0. \tag{4.19}$$

Риманова функция Лагранжа имеет вид

$$L = T + U = T - P + D = \sum_A \frac{m_A}{2}(v^i_A)^2 + \sum_{A>B}\left\{\frac{fm_A m_B}{r_{AB}}\left[1 + \frac{\beta}{c^2}(v^i_{AB})^2\right]\right\} = H - 2P. \tag{4.20а}$$

Здесь

$$v^i_{AB} = v^i_A - v^i_B = dx^i_A/dt - dx^i_B/dt \tag{4.20б}$$

— относительные скорости и

$$r_{AB} = \sqrt{(x^i_A - x^i_B)(x^i_A - x^i_B)} \tag{4.20в}$$

— относительные расстояния. Выражение для эффективной кинетической энергии системы

$$T^* = T + D = \sum_A \frac{m_A}{2}(v^i_A)^2 + \sum_{A>B}\frac{\beta f}{c^2}\frac{m_A m_B}{r_{AB}}(v^i_{AB})^2 \tag{4.21а}$$

состоит из члена Галилея — Ньютона

$$T = \frac{1}{2}\sum_A m_A v^2_A, \tag{4.21б}$$

содержащего абсолютные скорости v^i_A, и римановского индукционного члена

$$D = \sum_{A>B}\frac{\beta f}{c^2}\frac{m_A m_B}{r_{AB}} v^2_{AB}, \tag{4.21в}$$

который зависит только от относительных скоростей (4.20б) (см. § 5).

Если бы мы теперь положили ньютоновский член (4.21б) в функции Лагранжа (4.20а) равным нулю, то получили бы неполную риманову функцию Лагранжа

$$L^* = D - P = \sum_{A>B} \frac{\beta f}{c^2} \frac{m_A m_B}{r_{AB}} v_{AB}^2 + \sum_{A>B} \frac{f m_A m_B}{r_{AB}}, \quad (4.22)$$

содержащую только относительные скорости. Отсюда возникло бы далеко идущее обобщение галилеевой относительности (подробнее см. § 7). Дальнейшее различие между функцией Лагранжа (4.22) и функцией Лагранжа с инерционным членом Галилея — Ньютона (4.21б) заключается в том, что для последней функции Лагранжа галилей-инвариантность проявляется только в лагранжевых уравнениях движения, тогда как выражение (4.22) явно галилей-инвариантно.

Функция Лагранжа (4.20а) и неполная функция Лагранжа (4.22) удовлетворяют уравнению Лапласа. Справедливо

$$\Delta L = 0; \quad (4.23а)$$

$$\Delta L^* = 0. \quad (4.23б)$$

Однако функция Лагранжа (4.22) замечательна тем, что при $r \to \infty$, т. е. с исчезновением гравитационного взаимодействия, она тождественно исчезает, тогда как L при $r \to \infty$ стремится к галилей-ньютоновской кинетической энергии (4.21б):

$$L^* \to 0; \; L \to \frac{1}{2} \sum_A m_A v_A^2 \text{ при } r \to \infty.$$

Индукцию инерции дал бы также и потенциал с веберовской частью $\sim \dot{r}_{AB}^2 / r_{AB}$, однако она не приводит к скалярной инерции (см. § 3), так как потенциал Вебера зависит от относительных скоростей анизотропно, выделяя радиальные скорости (Риман, 1861 г.). Кроме того, потенциал Вебера не удовлетворяет уравнению Лапласа (см. § 6) [1].

---

[1] Чистый потенциал Вебера при условиях, изложенных в § 5, не приводит к динамике с ньютоновским пределом.

§ 5. Моделирование доктрины Маха — Эйнштейна

Чтобы получить аналитико-механическую модель доктрины Маха — Эйнштейна, будем исходить из системы N частиц, причем N должно быть очень большим числом[1]. Пусть взаимодействие между частицами P_A этого ансамбля задано галилей-инвариантным образом с помощью потенциала, зависящего от скоростей, для которого потребуем, чтобы он был изотропен по скоростям.

Соответственно этому выберем в качестве энергии взаимодействия между частицами ансамбля риманов гравитационный потенциал

$$V = P + D = -f\sum_{A>B}\frac{m_A m_B}{r_{AB}}\left(1-\frac{\beta}{c^2}v_{AB}^2\right). \tag{5.1}$$

Тогда функция Лагранжа для ансамбля имеет вид

$$L = T + D - P = \frac{1}{2}\sum_A m_A v_A^2 + f\frac{\beta}{c^2}\sum_{A>B}\frac{m_A m_B}{r_{AB}}v_{AB}^2 + f\sum_{A>B}\frac{m_A m_B}{r_{AB}} = T + U. \tag{5.2}$$

Канонический импульс частицы P_a ансамбля задается формулой

$$\frac{\partial L}{\partial v_a^i} = m_a v_a^i + 2m_a f\frac{\beta}{c^2}\sum_{B\neq a}\frac{m_B}{r_{aB}}\left(v_a^i - v_B^i\right). \tag{5.3}$$

Следовательно, функция Гамильтона имеет вид

$$H = \sum_A v_A^i\frac{\partial L}{\partial v_A^i} - L = \frac{1}{2}\sum_A m_A v_A^2 + f\frac{\beta}{c^2}\sum_{A>B}\frac{m_A m_B}{r_{AB}}v_{AB}^2 - f\sum_{A>B}\frac{m_A m_B}{r_{AB}} = T + D + P, \tag{5.4a}$$

[1] Мы всюду принимаем частицы точечными, т. е. рассматриваем только центры (тяжелых) масс.

причем закон сохранения энергии приобретает вид обобщенного закона Лагранжа (§ 2):

$$H = T + D + P = E = \text{const}. \tag{5.4б}$$

Таким образом, члены

$$T^* = T + D = \frac{1}{2} \sum_A m_A v_A^2 + f \frac{\beta}{c^2} \sum_{A>B} \frac{m_A m_B}{r_{AB}} v_{AB}^2 \tag{5.5}$$

функции Лагранжа (5.2) в каноническом формализме играют роль кинетической энергии.

Римановская функция Лагранжа (5.2) есть наиболее общая галилей-инвариантная функция Лагранжа, обеспечивающая закон сохранения вида (5.4б), при которой потенциал взаимодействия

$$U = -P + D = f \sum_{A>B} \frac{m_A m_B}{r_{AB}} \left(1 + \frac{\beta}{c^2} v_{AB}^2\right) \tag{5.6а}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа (см. § 6). Одновременно потенциал (5.6а) замечателен тем, что он зависит от относительных скоростей v_{AB}^i изотропно.

В силу галилей-инвариантности (5.6а) выполняется принцип противодействия. Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x_A^i} = \sum_B \frac{\partial U}{\partial x_{AB}^i}, \text{ причем } \frac{\partial U}{\partial x_{AB}^i} = -\frac{\partial U}{\partial x_{B1}^i}, \tag{5.6б}$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial v_A^i} = \sum_B \frac{\partial D}{\partial v_{AB}^i} = 2f \frac{\beta}{c^2} \sum_{B \neq A} \frac{m_A m_B}{r_{AB}} v_{AB}^i$$

причем

$$\frac{\partial D}{\partial v_{AB}^i} = -\frac{\partial D}{\partial v_{BA}^i}. \tag{5.6в}$$

Следовательно, полный внутренний импульс системы N частиц постоянен:

$$\frac{d}{dt} \sum_A m_A v_A^i = 0. \tag{5.7}$$

То же самое справедливо для полного канонического импульса:

$$\frac{d}{dt}\sum_A\left(m_A v_A^i + \frac{\partial V}{\partial v_A^i}\right) = 0. \tag{5.8}$$

Лагранжевы уравнения движения для произвольной частицы P_a ансамбля имеют вид

$$m_a \frac{d}{dt}\left(v_a^i + \sum_{B\neq a} f\frac{\beta}{c^2}\frac{m_B}{r_{aB}} v_a^i\right) - m_a\frac{d}{dt}\left(\sum_{B\neq a} f\frac{\beta}{c^2}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{m_B}{r_{AB}} v_B^i\right) = m_a\frac{\partial}{\partial x_a^i}\left(f\sum_{B\neq a}\frac{m_B}{r_{aB}} + f\frac{\beta}{c^2}\sum_{B\neq a}\frac{m_B}{r_{aB}} v_{AB}^2\right). \tag{5.9}$$

Если ввести зависящую от потенциала эффективную инертную массу

$$m_a^* = m_a\left(1 + 2f\frac{\beta}{c^2}\sum_{B\neq a}\frac{m_B}{r_{AB}}\right), \tag{5.10}$$

то можно написать (5.9) с учетом (5.6а) как римановы уравнения движения

$$\frac{d}{dt}(m_a^* v_a^i) = \frac{\partial}{\partial x_a^i} U + 2f\frac{\beta}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{B\neq a}\frac{m_B}{r_{aB}} v_B^i\right). \tag{5.11}$$

Теперь введем доктрину Маха — Эйнштейна, отбросив, как это обсуждалось в § 4, ньютоновский инерционный член, т. е. кинетическую энергию ньютоновской механики

$$T = \frac{1}{2}\sum_A m_A v_A^2$$

в функции Лагранжа (5.2). Таким образом, функция Лагранжа (5.2) сокращается до

$$L^* = \sum_{A>B} f\frac{m_A m_B}{r_{AB}}\left(1 + \frac{\beta}{c^2} v_{AB}^2\right). \tag{5.12}$$

Теперь лагранжевы уравнения движения для частицы P_a принимают следующий упрощенный вид:

$$m_a\left(\frac{d}{dt}\sum_{B\neq a}2f\frac{\beta}{c^2}\frac{m_B}{r_{aB}}v_a^i\right)=m_a\frac{d}{dt}\left(\sum_{B\neq a}2f\frac{\beta}{c^2}\frac{m_B}{r_{aB}}v_B^i\right)+$$
$$+m_a\frac{\partial}{\partial x_a^i}\left[f\sum_{B\neq a}\frac{m_B}{r_{aB}}\left(1+\frac{\beta}{c^2}v_{AB}^2\right)\right]. \qquad (5.13)$$

В (5.13) величина

$$m_a^*=2f\frac{\beta}{c^2}\sum_{B\neq a}\frac{m_B}{r_{aB}} \qquad (5.14)$$

играет роль инертной массы, тогда как m_a представляет собой константу связи, с помощью которой частица P_a связана с внешним гравитационным полем.

Полный канонический импульс такой N-частичной системы без ньютоновского инерционного члена (которую мы будем называть *облаком Маха*) тождественно равен нулю:

$$\sum_A\frac{\partial L^*}{\partial v_A^i}=2f\frac{\beta}{c^2}\sum_A\sum_{B\neq a}\frac{m_Am_B}{r_{AB}}(v_A^i-v_B^i)=0. \qquad (5.15а)$$

Представим себе нашу N-частичную систему построенной следующим образом: существует облако Маха из $M=N-2$ частиц, относительно которых примем, что их полный канонический импульс тождественно исчезает:

$$\sum_{A>2}^{N}\frac{\partial L^*}{\partial v_A^i}=\sum_{A'}^{M}\frac{\partial L^*}{\partial v_{A'}^i}=0. \qquad (5.15б)$$

Пусть число частиц M весьма велико, и пусть где-то в центральной части облака две соседние частицы P_1 и P_2 расположены таким образом, что их взаимодействием с отдельными частями облака можно пренебречь. Пусть массы облака в среднем изотропно распределены в пространстве. Далее, пусть в облаке нет никаких систематических движений, так что если представить объединенным в одном месте большое число $m\subset M$ частиц, произвольно выхваченных из облака Маха, то и сумма их скоростей, и сумма импульсов исчезают[1].

В силу (5.15а) условие (5.15б) означает, что мы пренебрегаем вкладом гравитационного потенциала частиц P_1 и P_2 в инерцию облака Маха (см. по этому поводу § 7). Теперь функция Лагранжа (5.12) записывается как

$$L^* = \sum_{A'>B'}^{M} f\,\frac{m_{A'}m_{B'}}{r_{A'B'}}\left(1 + \frac{\beta}{c^2}v_{A'B'}^2\right) + \sum_{A'}^{M} f\,\frac{m_1 m_{A'}}{r_{1A'}} \times$$

$$\times\left(1 + \frac{\beta}{c^2}v_{1A'}^2\right) + \sum_{A'}^{M} f\,\frac{m_2 m_{A'}}{r_{2A'}}\left(1 + \frac{\beta}{c^2}v_{2A'}^2\right) +$$

$$+ f\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}}\left(1 + \frac{\beta}{c^2}v_{12}^2\right). \qquad (5.16)$$

Отсюда получаем уравнения движения Римана — Маха соответственно для частиц P_1 и P_2:

$$m_1\frac{d}{dt}\left[2\,\frac{\beta}{c^2}\,f\left(\sum_{B'}\frac{m_{B'}}{r_{1B'}} + \frac{m_2}{r_{12}}\right)v_1^i\right] =$$

$$= m_1\,\frac{d}{dt}\left[2\,\frac{\beta}{c^2}\,f\left(\sum_{B'}\frac{m_{B'}v_{B'}^i}{r_{1B'}} + \frac{m_2 v_2^i}{r_{12}}\right)\right] +$$

$$+ m_1\,\frac{\partial}{\partial x_1^i}\left[\frac{\beta}{c^2}\,f\left(\sum_{B'}\frac{m_{B'}}{r_{1B'}}\,v_{1B'}^2 + \frac{m_2 v_{12}^2}{r_{12}}\right) +\right.$$

$$\left. + f\left(\sum_{B'}\frac{m_{B'}}{r_{1B'}} + \frac{m_2}{r_{12}}\right)\right]; \qquad (5.17а)$$

$$m_2\frac{d}{dt}\left[2\,\frac{\beta}{c^2}\,f\left(\sum_{B'}\frac{m_{B'}}{r_{2B'}} + \frac{m_1}{r_{12}}\right)v_2^i\right] =$$

$$= m_2\,\frac{d}{dt}\left[2\,\frac{\beta}{c^2}\,f\left(\sum_{B'}\frac{m_{B'}v_{B'}^i}{r_{2B'}} + \frac{m_1 v_1^i}{r_{12}}\right)\right] +$$

[1] Случай систематического движения большого количества частиц облака Маха обсуждается в § 7.

$$+ m_2 \frac{\partial}{\partial x_2^i} \left[\frac{\beta}{c^2} f \left(\sum_{B'} \frac{m_{B'}}{r_{2B'}} v_{2B'}^2 + \frac{m_1 v_{12}^2}{r_{12}} \right) + \right.$$

$$\left. + f \left(\sum_{B'} \frac{m_{B'}}{r_{2B'}} + \frac{m_1}{r_{12}} \right) \right]. \tag{5.17б}$$

Поскольку вся масса облака изотропно окружает частицы P_α ($\alpha = 1, 2$) [1], справедливо условие

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \left(\sum_{B'} \frac{m_{B'}}{r_{\alpha B'}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \left(\sum_{B'} \frac{m_{B'}}{r_{\alpha B'}} v_{\alpha B'}^2 \right) = 0. \tag{5.18а}$$

Далее, из-за неупорядоченности движения частиц облака

$$\sum_{B'} \frac{m_{B'} v'_{B'}}{r_{\alpha B'}} = 0. \qquad (5.18б)^2$$

Наконец, можно пренебречь еще и средним изменением положения частиц P_1 и P_2 относительно частиц облака. Это означает, что

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{B'} \frac{m_{B'}}{r_{1B'}} \right) = - \sum_{B'} \frac{m_{B'} \dot{r}_{1B'}}{r_{1B'}^2} = 0. \tag{5.18в}$$

С учетом (5.18в) уравнения движения (5.17) окончательно принимают следующий вид:

---

[1] Мы, таким образом, видим, что предположение о справедливости уравнения Лапласа для зависящей от скорости части потенциала взаимодействия U вызывается не только требованием, чтобы гравитация и инерция определялись одним и тем же дифференциальным уравнением (см. ниже § 6), но что это предположение фактически необходимо для моделируемости доктрины Маха — Эйнштейна.

[2] Впрочем, на основании симметрии условие (5.18б) выполняется не только, когда космическое облако не обладает никакими систематическими движениями, но и при вращении вокруг центра (см. также § 8) и при радиальном расширении облака (см. § 9). Для вращательного движения выражение (5.18б) в первом приближении (на оси вращения) исчезает. Поправки второго приближения дают для тел, не участвующих во вращении, силы типа кориолисовых. В расширении же облака принимают участие все тела.

$$2f\frac{\beta}{c^2}\sum_{B'}\frac{m_1 m_{B'}}{r_{1B'}}\dot{v}_1^i + 2f\frac{\beta}{c^2}\frac{d}{dt}\left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}}(v_1^i - v_2^i)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1^i}\left[f\frac{m_1 m_2}{r_{12}}\left(1 + \frac{\beta}{c^2}v_{12}^2\right)\right]; \qquad (5.19а)$$

$$2f\frac{\beta}{c^2}\sum_{B'}\frac{m_2 m_{B'}}{r_{2B'}}\dot{v}_2^i + 2f\frac{\beta}{c^2}\frac{d}{dt}\left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}}(v_2^i - v_1^i)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2^i}\left[f\frac{m_1 m_2}{r_{12}}\left(1 + \frac{\beta}{c^2}v_{12}^2\right)\right]. \qquad (5.19б)$$

Из (5.19а), (5.19б) немедленно следует, что скорость центра масс системы $P_1 + P_2$ постоянна.

Рассмотрим теперь облако Маха как модель реальной Вселенной и определим для этой реальной Вселенной пока еще произвольную «индукционную постоянную» β/c^2 в (5.19). Этот вывод будет основан на динамическом определении инертной массы и на условии, что эффективное значение гравитационной постоянной f в данной Вселенной устанавливается при использовании ньютоновского закона тяготения. (Это означает, что β/c^2 устанавливается с помощью требования самосогласованности гравитационной динамики в данной Вселенной.)

Динамическое определение инертной массы по Маху (1871 г.) гласит, что для двух тел P_1 и P_2, между которыми действует сила F_{12}^i (на основании ньютоновских аксиом), по определению, справедливо равенство

$$\overset{*}{m}_1\dot{v}_1^i = F_{12}^i = -F_{21}^i = -\overset{*}{m}_2\dot{v}_2^i, \qquad (5.20а)$$

при этом F_{12}^i, вообще говоря, не гравитационная сила, так что определенные согласно (5.20а) инертные массы m_α^* содержат только главную часть инерции

$$\overset{*}{m}_\alpha = m_\alpha 2f\frac{\beta}{c^2}\sum_{B'}^{M}\frac{m_{B'}}{r_{\alpha B'}} \quad (\alpha = 1, 2), \qquad (5.20б)$$

не зависящую от относительных координат r_{12}. При определенной таким способом инертной массе, согласно ньютоновскому закону тяготения, выполняются (Пуанкаре, 1904 г.) уравнения

$$\dot{v}_1^i = -f\,\frac{m_2 x_{12}^i}{r_{12}^3}; \tag{5.21а}$$

$$\dot{v}_2^i = f\,\frac{m_1 x_{12}^i}{r_{12}^3}. \tag{5.21б}$$

Уравнения (5.20а), (5.21) и (5.20б) дают условие самосогласованности

$$2f\,\frac{\beta}{c^2}\sum_{B'}^{M}\frac{m_{B'}}{r_{\alpha B'}} = 1, \tag{5.22а}$$

которое устанавливает индукционную постоянную β/c^2 для нашей Вселенной. При *заданной* гравитационной постоянной f величина β/c^2 определяется, таким образом, гравитационным потенциалом в центре облака Маха:

$$\frac{\beta}{c^2} = \frac{1}{2}\Phi^{-1}\quad\left(\Phi = f\sum_{A'}\frac{m_{A'}}{r_{A'}}\right). \tag{5.22б}$$

Для центральной области однородного облака Маха этот гравитационный потенциал (взятый с противоположным знаком) имеет вид

$$\Phi = \frac{3}{2}f\,\frac{M}{R}\quad\left(M = \sum_{A'}^{M} m_{A'}\right), \tag{5.23а}$$

где R и M — радиус и масса облака соответственно. Поэтому для β/c^2 имеем

$$\beta/c^2 = R/3fM. \tag{5.23б}$$

Из космологии известно (см. § 9 и 10), что для значений f и c^2, полученных из эксперимента,

$$\beta \approx fM/Rc^2 \approx 1, \tag{5.24}$$

где fM/c^2 — гравитационный радиус облака Маха.

Заметим, что для гравитационной механики, очевидно, совершенно безразлично, как выбрана постоянная c, которая должна иметь размерность скорости: равной экспериментальному значению скорости света или в отношении λ к этой скорости, при этом «гравитационный радиус» облака Маха задается формулой

$$fM/c^2\lambda^2. \tag{5.25а}$$

Тогда вместо β возникает новая численная постоянная

$$\tilde{\beta} = \lambda^2\beta, \tag{5.25б}$$

так что единственная индукционная постоянная, влияющая на динамику,

$$\tilde{\beta}/\lambda^2 c^2 = \beta/c^2 \tag{5.25в}$$

остается неизменной. Но введение индукционной постоянной в виде β/c^2 облегчает сравнение с общей теорией относительности.

Таким образом, мы выяснили, что по порядку величины β должна быть близкой к 1. Точно определить β можно, потребовав в соответствии с замечаниями § 4, чтобы малая поправка

$$\delta m_1^* = m_1 2f \frac{\beta}{c^2} \frac{m_2}{r_{12}} \to m_1^* = m_1 2f \frac{\beta}{c^2} \sum_{B'} \frac{m_{B'}}{r_{1B'}} + \delta m_1^*, \tag{5.26}$$

которую частица P_2, согласно (5.17), добавляет к инертной массе частицы P_1, была в точности равна тому вкладу, который следует из общей теории относительности, согласно эйнштейновскому определению эффективной инертной массы покоя (см. § 4). В общей теории относительности этот вклад, согласно Эйнштейну и Тиррингу, задается формулой

$$m_1^* = m_1 \left(1 + 3 \frac{fm_2}{c^2 r_{12}}\right) = \overline{m}_1^* + \delta m_1^*. \tag{5.27}$$

Формулы (5.27) и (5.26) совпадают, если положить[1]

$$\beta = 3/2. \tag{5.28}$$

Итак, сформулируем механику Римана — Маха для данной Вселенной K в целом с помощью функции Лагранжа (5.12):

$$L^* = f \sum_{A>B} \frac{m_A m_B}{r_{AB}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v_{AB}^2}{c^2}\right). \tag{5.29}$$

---

[1] Более подробно об этой связи см. в § 6 и 8.

Уравнения движения (5.19а) и (5.19б) с учетом (5.22а) и (5.28) примут вид

$$m_1 \frac{d}{dt}\left[\left(1+3\frac{f}{c^2}\frac{m_2}{r_{12}}\right)v_1^i\right] = m_1 \frac{\partial}{\partial x_1^i}\left[f\frac{m_2}{r_{12}}\left(1+\frac{3}{2c^2}v_{12}^2\right)\right] + \\ + m_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{3f}{c^2}\frac{m_2}{r_{12}}v_2^i\right); \tag{5.30а}$$

$$m_2 \frac{d}{dt}\left[\left(1+3\frac{f}{c^2}\frac{m_1}{r_{12}}\right)v_2^i\right] = m_2 \frac{\partial}{\partial x_2^i}\left[f\frac{m_1}{r_{12}}\left(1+\frac{3}{2c^2}v_{12}^2\right)\right] + \\ + m_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{3f}{c^2}\frac{m_1}{r_{12}}v_1^i\right). \tag{5.30б}$$

Если $m_1=M$ — большая центральная масса и $m_2= =m \ll M$ — малая масса, то отсюда получаются следующие уравнения движения для задачи одного тела:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(1+\frac{3fM}{c^2 r}\right)v^i\right] = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{fM}{r}\left(1+\frac{3}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\right], \tag{5.31а}$$

В предположениях

$$v^2 \ll c^2, \quad fM/r \ll c^2 \tag{5.31б}$$

решением (5.31а) является кеплеров эллипс с движением перигелия. Именно в этом приближении уравнения движения с $u=u(\varphi)=r^{-1}$ имеют вид

$$u'' + \left(1 - \frac{4h^2 f^2 \beta M^2}{c^2}\right)u = fMh^{-2}. \tag{5.32}$$

Они приводят в этом же приближении к интегралу

$$\frac{1}{r} = \frac{fM}{h^2}\left[1+\varepsilon\cos\varphi\left(1-\frac{2\beta f^2 M^2}{h^2 c^2}\right)\right], \tag{5.33а}$$

из которого выводится формула для движения перигелия (см. § 2):

$$\delta\varphi = 2\beta\frac{f}{c^2}\frac{2\pi M}{a(1-e^2)}. \tag{5.33б}$$

В (5.33б) мы должны подставить теперь $\beta=3/2$, в результате чего получается в точности эйнштейновское выражение для движения перигелия, но теперь как следствие доктрины Маха — Эйнштейна.

Вытекающая из доктрины Маха — Эйнштейна связь между движением перигелия и гравитационным потенциалом Вселенной Ф станет наглядной, если сравнить нашу реальную Вселенную с двумя другими фиктивными мирами, но при этом пользоваться значением гравитационной постоянной f, известным для нашей Вселенной.

1. Рассмотрим сначала мир $\overline{K}$, в котором выполняется условие

$$\overline{\Phi} = \frac{3}{2} f \frac{\overline{M}}{\overline{R}} < \Phi. \qquad (5.34а)$$

Тогда при заданной гравитационной постоянной f из закона тяготения Ньютона и динамического определения массы следует условие самосогласованности

$$2\overline{\beta}\overline{\Phi} = c^2. \qquad (5.34б)$$

Это означает, что

$$\overline{\beta} = \frac{c^2}{2}(\overline{\Phi})^{-1} > \beta; \qquad (5.34в)$$

откуда следует, что движение перигелия увеличивается. В экстремальном случае

$$\overline{\Phi} \to 0, \quad \overline{\beta} \to \infty \qquad (5.34г)$$

использованное выше приближение, естественно, перестает работать, и вместо уравнений (5.32) получаются уравнения движения

$$r'' + r = br^2, \quad b = \mathrm{const}, \qquad (5.35а)$$

которые выводятся из функции Лагранжа

$$L = \frac{mM}{c^2 r} f\overline{\beta}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2); \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2\overline{\beta} f m M r \dot{\varphi}}{c^2} = \mathrm{const}. \qquad (5.35б)$$

При очень малом гравитационном потенциале $\overline{\Phi}$ мира $\overline{K}$ существовала бы, таким образом, небесная механика, соответствующая доктрине Маха — Эйнштейна, весьма сильно отличающаяся от ньютоновской[1].

2. Примем, что в мире K' выполняется условие

$$\Phi' = \frac{3}{2} f \frac{M'}{R'} > \Phi. \qquad (5.36а)$$

---

[1] Более подробно см. в § 8. Поскольку в (5.35б) входит только v_{12}^2, (5.35а) уже соответствует задаче двух тел.

Тогда имеем

$$\beta' = \frac{c^2}{2}(\Phi')^{-1} < \beta, \tag{5.36б}$$

и при этом $\delta\varphi' < \delta\varphi$. Отсюда находим, что при гравитационном потенциале Φ', стремящемся к бесконечности, в мире K'

$$\beta' \to 0. \tag{5.36в}$$

Следовательно, в таком мире движение перигелия исчезает:

$$\delta\varphi' \to 0 \text{ при } \Phi' \to \infty.$$

Точная ньютоновская небесная механика является, таким образом, предельным случаем небесной механики Римана — Маха для мира K' с очень большим средним гравитационным потенциалом.

Эти соотношения вполне понятны, так как, согласно механике Римана — Маха, эффективная инертная масса m_2^* частицы P_2 индуцируется средним гравитационным потенциалом Φ облака Маха и гравитационным потенциалом $f(m_1/r_{12})$ частицы P_1 (соседней с телом P_2). В задаче одного тела движение перигелия возникает как следствие зависимости инертной массы m_2^* от гравитационного потенциала тела P_1. Этот вклад δm^* пренебрежимо мал по сравнению с не зависящей от места частью m_2^*, если гравитационный потенциал Φ облака очень велик.

Из связи между средним гравитационным потенциалом Вселенной Φ, индукционной постоянной β/c^2 и сдвигом перигелия следует, что при данной гравитационной постоянной f можно вычислить средний гравитационный потенциал Вселенной из известного значения сдвига перигелия[1]. Для конкретной космологической модели (см. § 9 и 10) это означает, что плотность массы космологического облака можно вычислить теоретически, если из данных небесной механики известны значения гравитационной постоянной f и сдвига перигелия $\delta\varphi$.

Приведенные соображения о модельных вселенных $\bar{K}$ и K' основаны на том, что в этих вселенных грави-

[1] Имеем $\delta\varphi = 2\pi f \Phi^{-1} M/a\sqrt{1-e^2}$.

тационная постоянная, определяемая из ньютоновского закона тяготения, принимает такое же значение, как и в нашей реальной Вселенной. Если же распределение масс $\Sigma(m_A/r_A)$ в нашей реальной Вселенной изменяется, то маховское определение массы (5.20a) и ньютоновский закон тяготения (5.21) приводят к переопределению эффективного значения гравитационной постоянной. Мы это рассмотрим в § 8 и 9.

§ 6. Гравитационное поле и поле инерции

Определенная согласно доктрине Маха — Эйнштейна инертная масса тела P_a

$$m_a^* = \frac{2\beta f}{c^2} \sum_{A \neq a} \frac{m_a m_A}{r_{aA}}, \qquad (6.1)$$

где m_a — гравитационный заряд тела P_a, подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta m_a^* = 0 \qquad (6.2)$$

как прямое следствие того, что для гравитационных потенциалов $\varphi \sim m_A/r_{aA}$ частиц Вселенной также справедливо уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \qquad (6.3)$$

Величина (6.1) — особая комбинация этих гравитационных потенциалов. Таким образом, наличие инертных масс m_a^* — как и требовали Эйнштейн и Фридлендеры — является особым следствием закона всемирного тяготения. Кроме того, выраженная посредством (6.1) пропорциональность инертной и тяжелой масс реализует принцип эквивалентности.

Если бы вместо гравитационного потенциала Римана использовался гравитационный потенциал Вебера — Римана, то эффективные инертные массы имели бы общий вид

$$m_a \frac{2f}{c^2} \sum_{A \neq a} \frac{m_A}{r_{aA}} \left(\beta\delta^{ik} + \alpha \frac{x_{aA}^i}{r_{aA}} \frac{x_{aA}^k}{r_{aA}} \right). \qquad (6.4)$$

Инертные массы в отличие от тяжелых не были бы тогда скалярными величинами. Гравитационный потенциал Вебера — Римана [и вместе с ним инертные массы (6.4)] удовлетворяют бипотенциальному уравнению.

Итак, для веберовской части справедливо:

$$\Delta\left(\frac{\dot{r}^2}{r}\right)=\Delta\left(\frac{x^i x^k}{r^3}\right)v^i v^k=2v^i v^k\left(\frac{\delta^{ik}}{r^3}-\frac{3x^i x^k}{r^5}\right)\to$$

$$\to\Delta^2\left(\frac{\dot{r}^2}{r}\right)=0. \tag{6.5}$$

В этом смысле веберовский потенциал является обобщением ньютоновской гравитации.

Тот факт, что инерция в механике Римана — Маха удовлетворяет требованию, которое накладывает на поле инерции общая теория относительности, отражает также то, что сравнением определения массы (6.1) с эйнштейновским определением инертной массы покоя частицы в гравитационном поле

$$m_a^*=\frac{-g_{(ii)}}{\sqrt{g_{00}}}m_a \quad (m_a \text{ — гравитационный заряд или тяжелая масса}) \tag{6.6а}$$

(см. § 4) можно непосредственно получить условие согласования (5.22а), если потребовать, чтобы (6.6а) и (5.22а) для случая малых скоростей были локально эквивалентны [1].

Рассмотрим Вселенную, в которой частица P_a с тяжелой массой $m_a=m$ расположена около большой центральной тяжелой массы $M\gg m$. Можно принять протяженность системы m—M малой по сравнению с размерами Вселенной. Определим тогда в окрестности M собственную систему покоя этой массы. Она задается с помощью локальной метрики

$$(g_{\mu\nu})_{x^i=0}=\eta_{\mu\nu}, \tag{6.7а}$$

---

[1] Уравнение (6.6а) справедливо для массы покоя релятивистской частицы. Инертная масса, согласно общей теории относительности, зависит также от скорости:

$$\mu_a=\frac{m_a^*}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{-g_{(ii)}}{\sqrt{g_{00}}}\frac{m_a}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{6.6б}$$

Динамика Римана — Маха не может дать такую зависимость (см. § 10).

причем мировая линия M задана как

$$x^i = 0. \tag{6.7б}$$

В этой системе отсчета метрика, воздействующая на m, записывается просто как

$$g_{(ii)} = -(1 + 2fM/rc^2); \; g_{00} = 1 - 2fM/rc^2; \; g_{\mu\nu} = 0 \text{ для } \mu \neq \nu. \tag{6.8}$$

В приближении, справедливом для малых скоростей, находим, таким образом, выражение для инертной массы покоя малого тела

$$m^* = m(1 + 3fM/rc^2). \tag{6.9}$$

Для этого тела в таком же приближении доктрина Маха — Эйнштейна дает инертную массу (5.30):

$$m^* = m\frac{2\beta f}{c^2}\left(\sum_{A>2}^{N}\frac{m_A}{r_{1A}} + \frac{M}{r_{12}}\right), \tag{6.10а}$$

где, согласно § 5,

$$\sum_{A>2}^{N}\frac{m_A}{r_{1A}} = \text{const}. \tag{6.10б}$$

Почленное сравнение (6.9) и (6.10а) приводит к

$$\frac{2\beta f}{c^2}\sum\frac{m_A}{r_{1A}} = 1 \tag{6.11а}$$

и

$$\beta = 3/2. \tag{6.11б}$$

Требование локальной равноценности общерелятивистской относительности инерции по Эйнштейну и относительности инерции, согласно доктрине Маха — Эйнштейна, определяет тем самым a priori как средний гравитационный потенциал $\Phi = f\sum_A (m_A/r_A)$ облака Маха, так и постоянную индукции β/c^2. Это дополняет выводы § 5.

§ 7. Относительность ускорения

В соответствии с зависимостью функции Лагранжа L^* (5.12) от относительных скоростей $v^i_{AB} = v^i_A - v^i_B$ в механике Римана — Маха существует группа инвариантности, которая вместе с определением массы (5.20а) приводит к сильному расширению класса допустимых систем отсчета и означает относительность поступательного ускорения[1]. Наоборот, моделирующая доктрину Маха — Эйнштейна «неполная» функция Лагранжа (5.12) получается из римановской (5.2), если потребовать, чтобы динамика была инвариантна относительно любого поступательного ускорения системы отсчета, как это постулируется общим принципом относительности Эйнштейна.

Рассмотрим далее частицу P_1 в центре облака Маха, состоящего из N частиц ($N \gg 1$) $P_{A'}$ ($A' > 1$), и будем пренебрегать всеми локальными гравитационными взаимодействиями между P_1 и P_A, т. е. примем, что в непосредственной близости от P_1 нет других частиц. В качестве действующих на P_1 сил рассмотрим негравитационные, возникающие при добавлении соответствующего негравитационного члена к (5.12). (Получающуюся в результате функцию Лагранжа обозначим $\overline{L}^*$.)

Теперь сначала примем, что в облаке нет систематических движений относительно P_1, так что справедливо

$$\sum_{A'}^{N} \frac{m_{A'} v_{A'}^i}{r_{1A'}} = 0. \tag{7.1}$$

Тогда уравнения движения для частицы P_1 имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2\beta}{c^2} f \sum_{A'} \frac{m_1 m_{A'}}{r_{1A'}} v_{A'}^i\right) = \frac{\partial}{\partial x_1^i} \overline{U} = \frac{\partial}{\partial x_1^i} \overline{L}^*. \tag{7.2а}$$

Поскольку мы не принимаем во внимание локальные воздействия, справедливо также

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{A'} \frac{m_{A'}}{r_{1A'}}\right) = 0; \tag{7.2б}$$

$$\overline{\partial} U / \partial x_1^i = F_1^i \text{ — негравитационная сила;} \tag{7.2в}$$

---

[1] Общий вывод свойств инвариантности нашей механики из функции Лагранжа дан в нашей работе «Принципы относительности Пуанкаре и доктрина Маха — Эйнштейна» (Рим, 1972).

$$m_1^* = m_1 2f \frac{\beta}{c^2} \sum_{A'}^{N} \frac{m_{A'}}{r_{1A'}} = m_1. \qquad (7.3)$$

Здесь m_1^* — инертная масса частицы P_1, которая, таким образом, численно совпадает с тяжелой массой. Поэтому для частицы P_1 справедливы уравнения движения ньютоновского типа

$$m_1 \dot{v}_1^i = F_1^i. \qquad (7.4а)$$

Если принять, что на P_1 не действуют никакие негравитационные силы, то мы получим (так как мы пренебрегаем локальными эффектами тяготения) закон инерции Галилея:

$$m \dot{v}_1^i = 0. \qquad (7.4б)$$

Уравнения движения и закон инерции выглядят совершенно иначе, если N частиц облака — или большая их часть — обладают систематическим движением относительно P_1, так что вместо (7.1) имеем[1]

$$\sum_{A'} \frac{m_{A'} v_{A'}^i}{r_{1A'}} \neq 0. \qquad (7.5)$$

Уравнения движения для P_1 (в пренебрежении локальными гравитационными эффектами) теперь запишутся в виде

$$m_1 2f \frac{\beta}{c^2} \frac{d}{dt} \left[\sum_{A'} \frac{m_{A'}}{r_{1A'}} (v_1^i - v_{A'}^i) \right] =$$

$$= m_1 \dot{v}_1^i - m_1 \frac{d}{dt} \left(\sum_{A'} \frac{m_{A'} v_{A'}^i}{r_{1A'}} \right) = F_1^i. \qquad (7.6)$$

Уравнения движения (7.6) явно выражают относительность ускорения. Если приписать всем частицам $P_{A'}$ ($A' \neq 1$) космического облака одну и ту же произвольную скорость $v_{A'}^i(t) = V^i(t)$, зависящую от време-

[1] При радиальном расширении облака (см. § 9) в силу симметрии все же справедливо (7.1). То же самое верно из соображений симметрии при твердотельном вращении облака вокруг оси, проходящей через P_1.

ни, то с учетом (7.2б) и определения массы (5.20а), (5.22а) уравнение (7.6) примет вид

$$m_1 \frac{2f\beta}{c^2} \sum_{A'} \frac{m_{A'}}{r_{1A'}} \frac{d}{dt}(v_1^i - V^i) = m_1(\dot{v}_1^i - \dot{V}^i) = F_1^i. \quad (7.7а)$$

Таким образом, сила инерции, действующая на P_1, пропорциональна ускорению относительно Вселенной

$$d(v_1^i - V^i)/dt. \quad (7.7б)$$

Итак, не только кинематически, но и динамически эквивалентно, движется ли частица P_1 со скоростью $v_1^i(t)$ и ускорением $\dot{v}_1^i(t)$ относительно Вселенной, которая подразумевается покоящейся, или Вселенная движется со скоростью $V^i = -v_1^i$ и ускорением $\dot{V}^i = -\dot{v}_1^i$ относительно покоящейся частицы P_1. Поэтому если приписать всей Вселенной, т. е. частицам $P_{A'}$ облака и частице P_1, еще одно дополнительное *общее* движение с произвольной скоростью $U^i(t)$, то (7.7а) переходит в

$$m_1(\dot{v}_1^i + \dot{U}^i - \dot{V}^i - \dot{U}^i) = m_1(\dot{v}_1^i - \dot{V}^i) = F_1^i. \quad (7.8)$$

Это означает, что уравнения движения — и соответственно в случае исчезающих сил F_1^i закон инерции — инвариантны относительно произвольного поступательного движения системы отсчета: уравнения движения инвариантны относительно перехода от системы отсчета Σ к произвольно поступательно движущейся системе отсчета Σ'. Это обобщение группы Галилея означает инвариантность относительно преобразований [1]

$$d\bar{x}^i = dx^i + U^i(t)\,dt \quad (7.9)$$

со скоростью U^i, зависящей от времени. Закон инерции в галилеевой форме

$$m_1\dot{v}_1 = 0$$

в механике Римана — Маха справедлив и тогда, когда Вселенная принимается в среднем покоящейся, и в слу-

---

[1] При преобразованиях неголономного вида $d\bar{x}^i = dx^i + U^i(x^l, t)dt$ возникнут местные различия в скоростях и ускорениях; следовательно, такие преобразования не являются допустимыми (см. § 10).

чае, когда Вселенной и частице P_1 приписывается общее поступательное движение.

Если в систематическом движении участвуют не все частицы космического облака, а только M частиц $(M \subset N)$ $P_{\underline{B}}$, причем M частиц $P_{\underline{B}}$ обладают общей скоростью $v^i_{\underline{B}} = V^i(t)$, то из (7.6) для P_1 находим уравнения движения

$$m_1 \frac{d}{dt}\left(\sum_{A'} \frac{m_{A'}}{r_{1A'}} v^i_1\right) = m_1 \frac{2f\beta}{c^2} \frac{d}{dt} \sum_{\underline{B}}^{M \subset N} \frac{m_{\underline{B}}}{r_{1\underline{B}}} V^i + F^i_1. \quad (7.10)$$

Если положение частицы P_1 по отношению к части облака во время движения меняется незначительно, то из (7.10) следует, что

$$m_i \dot{v}^i_1 - m_1 \frac{2f\beta}{c^2} \sum_{\underline{B}} \frac{m_{\underline{B}}}{r_{1\underline{B}}} \dot{V}^i = F^i_1 . \quad (7.11a)$$

Сила инерции, действующая на P_1, согласно (7.11а) зависит от ускорения dV^i/dt части облака, причем коэффициент пропорциональности

$$\frac{2f\beta}{c^2} \sum_{\underline{B}}^{M} \frac{m_{\underline{B}}}{r_{1\underline{B}}} = \sum_{\underline{B}}^{M \subset N} \frac{m_{\underline{B}}}{r_{1\underline{B}}} \left(\sum_{A'}^{N} \frac{m_{A'}}{r_{1A'}}\right)^{-1} \quad (7.11б)$$

воспроизводит отношение гравитационного потенциала M частиц $P_{\underline{B}}$ к среднему гравитационному потенциалу Вселенной (оба берутся в точке P_1). Если M переходит в N, то опять становятся справедливыми уравнения (7.7а), описывающие относительность ускорения.

Сравним (7.11а) с общерелятивистской относительностью ускорения, согласно Эйнштейну (1913 г.). Здесь вместо (7.11а) и $\beta = 3/2$ в первом приближении справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}(m^* v^i_1) - F^i_1 = m_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{4f}{c^2} \sum_{\underline{B}} \frac{m_{\underline{B}}}{r_{1\underline{B}}} V^i\right) =$$

$$= \frac{4f}{c^2} m_1 \sum_{\underline{B}} \frac{m_{\underline{B}}}{r_{1\underline{B}}} \dot{V}^i. \quad (7.12)$$

Таким образом, общерелятивистское выражение содержит в правой части численный коэффициент 4/3, который невозможно объяснить, исходя из относительности ускорения. (Кроме того, инертная масса m_1^* не является чистой функцией гравитационного потенциала и содержит в качестве главного члена постоянную [1].)

Уравнения (7.11а) показывают, что относительное ускорение части Вселенной относительно P_1 индуцирует силы инерции на P_1, и вместе с тем указывают, что физические эффекты, которых ожидали Фридлендеры и Фёппль на основании принципа Маха (и позднее Эйнштейн и Тирринг на основе предполагаемых следствий принципа Маха в общей теории относительности), в механике Римана — Маха действительно содержатся [2].

Но уравнение (7.11б) указывает и на то, что при движении земных масс ожидаемые эффекты будут слишком малы для экспериментального обнаружения, так как гравитационный потенциал земных масс всегда мал по сравнению со средним гравитационным потенциалом Вселенной.

Как показано в § 5, из-за

$$\frac{\partial L^*}{\partial v_a^i} = m_a \frac{2\beta f}{c^2}\left(\sum_{A\neq a}\frac{m_A}{r_{aA}}\,v_a^i - \sum_{A\neq a}\frac{m_A v_A^i}{r_{aA}}\right) \qquad (7.13\text{а})$$

полный канонический импульс Вселенной исчезает:

$$\sum_a^N \frac{\partial L^*}{\partial v_a^i} = \frac{2\beta f}{c^2}\sum_a^N\sum_A^N\left(\frac{m_a m_A}{r_{aA}}\,v_a^i - \frac{m_a m_A}{r_{aA}}\,v_A^i\right) = 0. \qquad (7.13\text{б})$$

---

[1] Эйнштейновское выражение (7.12) — приближенная формула· если бы мы применили (7.12) к ускоренному движению ($\dot{V}_i \neq 0$) всей Вселенной относительно частицы P_1, то из (7.12) следовал бы абсолютный эффект ускорения: кинематически покоящаяся частица P_1 в ускоренной Вселенной неотличима от ускоренной частицы с $\dot{v}_1^i = -\dot{V}_i$ в покоящейся Вселенной, однако динамически эйнштейновское выражение (7.12) дает для первого случая в 4/3 раза большую силу инерции, действующую на P_1, чем для второго. Из ньютоновской механики в первом случае вообще не получается никакой силы инерции на P_1. Только механика Римана — Маха дает, согласно (7.7), для обоих случаев одинаковое инерционное сопротивление и тем самым относительность поступательных ускорений.

[2] Дальнейшее обсуждение зависимости сил инерции от относительных движений космических масс содержится в § 8.

Разделим космическое облако на две части, состоящие из K частиц P_α и L частиц P_β, так что $K+L$ равно числу частиц облака $N+1$, и примем, что не существует негравитационных взаимодействий; тогда справедливо

$$\sum_{\alpha}^{K} \frac{\partial L^*}{\partial v_\alpha^i} = -\sum_{\beta}^{L} \frac{\partial L^*}{\partial v_\beta^i}, \tag{7.14а}$$

что в явном виде означает

$$\sum_{\alpha}^{K} \sum_{A}^{N+1} \frac{m_A}{r_{\alpha A}} (v_\alpha^i - v_A^i) = -\sum_{\beta}^{L} \sum_{A}^{N+1} \frac{m_A}{r_{\beta A}} (v_\beta^i - v_A^i). \tag{7.14б}$$

Отсюда с помощью дифференцирования получаем условия для сил:

$$\sum_{\alpha} m_\alpha \frac{d}{dt}\left[\sum_{A} \frac{m_A}{r_{\alpha A}} (v_\alpha^i - v_A^i)\right] = \\ = \sum_{\beta} m_\beta \frac{d}{dt}\left[\sum_{A} \frac{m_A}{r_{\beta A}} (v_A^i - v_\beta^i)\right]. \tag{7.15}$$

Из-за большого числа частиц в облаке $(N \gg 1)$ для большинства частиц P_a снова выполняется

$$\frac{2\beta}{c^2} f \sum_{A \neq a} \frac{m_A}{r_{aA}} = 1 \quad (a \subset K \text{ или } a \subset L), \tag{7.16}$$

так что из (7.15) получаем

$$\sum_{\alpha} m_\alpha \left[\dot{v}_\alpha^i - \frac{2\beta}{c^2} f \frac{d}{dt}\left(\sum_{A} \frac{m_A}{r_{\alpha A}} v_A^i\right)\right] = \\ = -\sum_{\beta} m_\beta \left[\dot{v}_\beta^i - \frac{2\beta}{c^2} f \frac{d}{dt}\left(\sum_{A} \frac{m_A}{r_{\beta A}} v_A^i\right)\right]. \tag{7.17}$$

Если положить $K=1$ и $L=N$, то этим мы проверим согласованность динамики Римана — Маха и определения массы (5.22). Из (7.14) имеем

$$m_1\left(\dot{v}_1^i - \sum_{A \neq 1}^{N+1} \frac{2\beta f}{c^2} \frac{m_A v_A^i}{r_{1A}}\right) = -\frac{2\beta f}{c^2} \sum_{\beta}^{N+1} \frac{m_\beta}{r_{1\beta}} (v_\beta^i - v_1^i). \tag{7.18а}$$

Действительно, (7.18а) выполняется тождественно. Далее из (7.17) с учетом (7.16) получим закон инерции (7.7б), если снова примем $K=1$, $L=N$ и $v_\beta^i=V^i$:

$$m_1\left[\dot{v}_1^i-\frac{2\beta f}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{A\neq 1}\frac{m_A}{r_{1A}}V^i\right)\right]=$$

$$=\sum_\beta m_\beta\left[\dot{V}^i-\frac{2\beta f}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\sum_A\frac{m_A}{r_{\beta A}}V^i\right)\right]=0. \quad (7.18б)$$

В рассмотренной в § 5 задаче двух частиц равенство (7.15) с $K=2$ соответствует индукционному влиянию частиц P_1 и P_2 на инертную массу облака. Система из двух частиц в силу зависимости членов взаимодействия исключительно от относительных величин r_{12} и v_{12}^i обладает постоянным полным кинетическим импульсом

$$m_1^* v_1^i + m_2^* v_2^i = \mathfrak{P}_{12}^i = \text{const} \quad (7.19а)$$

и постоянным полным каноническим импульсом такой же величины

$$\frac{\partial L^*}{\partial v_1^i}+\frac{\partial L^*}{\partial v_2^i}=\mathfrak{P}_{12}^i. \quad (7.19б)$$

При этом кинетический импульс индуцирован облаком. Если теперь принять во внимание вклад гравитационного потенциала масс m_1 и m_2 в канонический импульс облака, то последний будет равен $-\mathfrak{P}_{12}^i$, и полный канонический импульс системы частицы+облако исчезает. Это в соответствии с (7.15) справедливо также и для взаимодействия между произвольной подсистемой и остальной Вселенной.

Против эйнштейновского принципа общей относительности ускорений (физической равноценности ускоренных и инерциальных систем отсчета) выступил Ленард (1917 г.), сформулировав свой парадокс, из которого якобы следовало, что обобщенная относительность[1] может иметь место только для движений, про-

[1] В 1917 г. — в противоположность своим более поздним высказываниям — Ленард полностью признавал специальный принцип относительности. Напротив, общий принцип относительности он предпочитал понимать как чисто «гравитационный принцип» (см. также Тредер [40]).

исходящих исключительно под влиянием гравитационных сил (т. е. для $F_a^i = 0$). Для движений же под влиянием негравитационных сил ($F_a^i \neq 0$), по Ленарду, никакой обобщенный принцип относительности не справедлив. Ленард в своей аргументации опирался на мысленный эксперимент: он сравнивал ускоренное движение (торможение) поезда в инерциально движущемся окружении и возникающие при этом физические эффекты с эффектами, которые имели бы место для инерциально движущегося поезда в ускоренно движущемся окружении, причем он, как и Эйнштейн, допускал, что ускоренное движение окружения можно представить как результат действия особых гравитационных полей на массы этого окружения.

Ленард замечал, что между физическими процессами в ускоренном поезде и физическими процессами в окружающем мире существует очевидная разница, которую невозможно исключить никаким изменением системы отсчета. Торможение поезда может привести к необратимой деформации тел в поезде, тогда как окружающий мир не деформируется. Но Ленард допускал, что деформационные явления в поезде не имели бы места, если бы его торможение было результатом действия одних лишь гравитационных сил, так что общий принцип относительности как «гравитационный принцип» был бы правильным.

Парадокс Ленарда обсуждался Эйнштейном в 1918 г. и далее фон Лауэ (1919 г.) и Вейлем (1921 г.).

Так как торможение поезда является следствием как раз не гравитационных, а иных сил, удельные силы, действующие на различные тела в поезде, различны. В начале процесса торможения прежде всего вагоны — а не пассажиры — отрицательно ускоряются. Таким образом, из-за неуниверсальности тормозящих сил временно возникает относительное ускорение находящихся в вагоне тел по отношению к самому вагону, равно как и отдельных частей вагона друг относительно друга. Это относительное ускорение и служит причиной физических явлений, происходящих при торможении поезда.

Таким образом, «парадокс» Ленарда доказывает противоположное тому, что хотел доказать сам Ленард. Абсолютные ускорения не оказывают никакого физического действия и поэтому физически необнаружимы. Все физические воздействия ускоренных движений, напротив, объясняются разностями ускорений, т. е. возникновением относительных ускорений

$$\dot{v}^i_A - \dot{v}^i_B = \frac{d}{dt}(v^i_A - v^i_B) = \dot{v}^i_{AB}.$$

Однако в основы ньютоновской динамики наряду с инерционными сопротивлениями входят абсолютные ускорения $\dot{v}^i_A$. Таким образом, классическая динамика содержит, как это отметили Мах и Эйнштейн, нефизические величины. Требование же, чтобы основы динамики содержали только физические величины, приводит к постулированному Махом и Эйнштейном принципу относительности ускорений [1].

Относительные ускорения $\dot{v}^i_{AB} = \dot{v}^i_A - \dot{v}^i_B$ суть физические величины. В частности, они являются причиной «приливных воздействий» (отклонений), которые безотносительно к кинематической системе отсчета обнаружимы динамически. Так как при вращательных движениях имеют место относительные ускорения, вращательные движения обладают «абсолютным» динамическим смыслом, который не отменяется принципом относительности ускорений (Вейль, 1922—1924 гг. [42]). Требуемая принципом Маха «относительность вращения» получается лишь как следствие из «относительности инерции», постулируемой доктриной Маха — Эйнштейна (см. § 8) [2].

---

[1] Как и Эйнштейн (а также Ленард), Вейль в 1921 г. высказал мнение, что теория относительности должна в смысле доктрины Маха — Эйнштейна обнаружить удаленные космические массы, движение которых индуцирует, согласно Эйнштейну, релятивистские эффекты ускорения. Из-за важности граничных условий для установления системы отсчета и физических полей в общей теории относительности Эйнштейн (1918—1921 гг.) и Вейль (1921 г.) видели в этом требовании космологический принцип (см. ниже § 10). Начиная с 1924 г. Вейль открыто отвергал принцип Маха, так как это требование оказалось невыполнимым в общей теории относительности.

[2] Таким образом, принципиально не имеет смысла искать динамику, уравнения движения которой инвариантны относительно вращательного движения, ибо вращательные ускорения приводят к измеримым величинам.

§ 8. Индукция инерции и парадокс Маха

В своем обсуждении связи между общим принципом относительности и принципом Маха, уточненным в виде доктрины Маха — Эйнштейна, Эйнштейн повторил уже сказанное о том, что, хотя общая относительность и дает возможность включить принцип Маха в динамику, все же общая относительность и принцип Маха отнюдь не равнозначны по содержанию. В изложенном здесь математическом моделировании доктрины Маха — Эйнштейна (в рамках римановой механики), хотя выведенная в § 7 относительность поступательного движения систем отсчета необходима для физически осмысленного включения доктрины Маха — Эйнштейна в гравитационную динамику, однако по содержанию она вовсе не исчерпывает доктрину Маха — Эйнштейна, основное содержание которой — это индукция инерции гравитационным потенциалом удаленных масс. Без этой индукции инерции обобщенной относительности (см. § 7) совершенно недостаточно для разрешения парадокса Маха. Напротив, индукция инерции в смысле доктрины Маха — Эйнштейна в принципе возможна и без относительности. Однако такая индукция инерции абсолютными движениями приводит к физически бессмысленной динамике.

Появление скалярной индукции инерции просто связано с переходом от ньютоновского гравитационного потенциала к гравитационному потенциалу, который билинейно зависит от скоростей частиц. Из использованной нами римановской галилей-инвариантной функции Лагранжа для задачи N тел (см. § 5)

$$L = T + D - P = T^* - P = \frac{1}{2} \sum_B m_B (v_B^i)^2 +$$

$$+ \frac{\beta}{c^2} f \sum_{A>B} \frac{m_A m_B}{r_{AB}} (v_A^i - v_B^i)^2 + f \sum_{A>B} \frac{m_A m_B}{r_{AB}} \qquad (8.1\text{а})$$

с каноническими импульсами

$$\frac{\partial L}{\partial v_a^i} = m_a \left[v_a^i + \frac{2\beta f}{c^2} \sum_{A \neq a} \frac{m_A}{r_{aA}} (v_a^i - v_A^i) \right] \qquad (8.1\text{б})$$

и функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\sum_B m_B (v_B^i)^2 + \frac{\beta f}{c^2}\sum_{A>B}\frac{m_A m_B}{r_{AB}}(v_A^i - v_B^i)^2 - $$
$$- f\sum_{A>B}\frac{m_A m_B}{r_{AB}} \tag{8.1в}$$

можно легко получить функцию Лагранжа, в которой члены взаимодействия зависят от абсолютных скоростей частиц v_A^i [1]. Для этого к функции Лагранжа (8.1а) можно просто добавить дополнительный член

$$W = \frac{2\beta f}{c^2}\sum_{A>B}\frac{m_A v_A^i m_B v_B^i}{r_{AB}}. \tag{8.2}$$

Новой функции Лагранжа

$$\bar{L} = L + W = \frac{1}{2}\sum_B m_B (v_B^i)^2 + \frac{\beta f}{c^2}\sum_{A>B}\frac{m_A m_B}{r_{AB}}[(v_A^i)^2 +$$
$$+ (v_B^i)^2] + f\sum_{A>B}\frac{m_A m_B}{r_{AB}} \tag{8.3}$$ [2]

соответствуют канонические импульсы

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial v_a^i} = m_a\left(1 + \frac{2\beta f}{c^2}\sum_{A\neq a}\frac{m_A}{r_{aA}}\right)v_a^i \tag{8.4}$$

---

[1] Идея этого преобразования была развита Риманом (1858 г.).

[2] Если вместо W к функции Лагранжа (8.1) добавить член

$$R = -\frac{\beta f}{c^2}\sum_{A>B}\frac{m_A m_B}{r_{AB}}(v_A^2 + v_B^2)$$

[как это сделал Риман (1858 г.)], то риманова функция Лагранжа (8.1а) превратится в лагранжеву функцию Неймана (F. Neumann, 1845 г.), Гельмгольца и Клаузиуса

$$L' = L + R = \frac{1}{2}\sum_B m_B v_B^2 - \frac{2\beta f}{c^2}\sum_{A>B}\frac{m_A v_A^i m_B v_B^i}{r_{AB}} +$$
$$+ f\sum_{A>B}\frac{m_A m_B}{r_{AB}},$$

которая, очевидно, вводит в уравнения движения не индукцию инерции, а лишь внешнюю силу, зависящую от абсолютных скоростей.

и, далее, поскольку справедлив обобщенный принцип Лагранжа, функция Гамильтона

$$\overline{H}=\frac{1}{2}\sum_{B} m_B (v_B^i)^2+\sum_{A>B}\frac{\beta f}{c^2}\frac{m_A m_B}{r_{AB}}\left[(v_A^i)^2+(v_B^i)^2\right]-$$

$$-f\sum_{A>B}\frac{m_A m_B}{r_{AB}}. \tag{8.5}$$

Такого рода механика с силами Клаузиуса (см. § 2), зависящими от абсолютных скоростей, описывает, как и риманова механика, индукцию инертной массы:

$$m_a^*=m_a\left(1+\frac{2\beta f}{c^2}\sum_{A\neq B}\frac{m_A}{r_{aA}}\right) \tag{8.6}$$

и реализует доктрину Маха — Эйнштейна, если отбросить в (8.3) ньютоновский инерционный член и для индуцированных величин потребовать, как и в § 5, выполнения равенства

$$\frac{2\beta f}{c^2}\sum_{A\neq a}^{N}\frac{m_A}{r_{aA}}=1. \tag{8.7}$$

Однако динамика, соответствующая функции Лагранжа (8.3), физически бессмысленна, поскольку в уравнения движения входят сами абсолютные скорости v_A^i. Действительно, в уравнения движения для частицы P_a входят, вообще говоря, по-разному абсолютная скорость v_a^i частицы и абсолютные скорости $v_A^i=v_a^i+v_{Aa}^i$ остальных космических масс, так что в общем получается зависимость от v_a^i и v_{Aa}^i. Например, для задачи двух тел получаются уравнения движения

$$m_1\frac{d}{dt}\left[\left(1+\frac{2\beta f m_2}{c^2 r_{12}}\right)v_1^i\right]=\frac{\partial}{\partial x_1^i}\left\{\frac{m_1 m_2}{r_{12}}f\left[1+\frac{\beta}{c^2}(v_1^2+v_2^2)\right]\right\} \tag{8.8а}$$

и

$$m_2\frac{d}{dt}\left[\left(1+\frac{2\beta f m_1}{c^2 r_{12}}\right)v_2^i\right]=\frac{\partial}{\partial x_2^i}\left\{\frac{m_1 m_2}{r_{12}}f\left[1+\frac{\beta}{c^2}(v_1^2+v_2^2)\right]\right\} \tag{8.8б}$$

или — по отношению к P_1 —

$$m_1 \frac{d}{dt}\left[\left(1+\frac{2\beta f m_2}{c^2 r_{12}}\right) v_1^i\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_1^i}\left\{\frac{m_1 m_2}{r_{12}} f\left\{1+\frac{\beta}{c^2}\left[2\left(v_1^i\right)^2+2 v_1^i v_{21}^i+\left(v_{21}^i\right)^2\right]\right\}\right\} \quad (8.8в)$$

и

$$m_2 \frac{d}{dt}\left[\left(1+\frac{2\beta f m_1}{c^2 r_{12}}\right)\left(v_1^i+v_{21}^i\right)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_2^i}\left\{\frac{m_1 m_2}{r_{12}} f\left\{1+\frac{\beta}{c^2}\left[2\left(v_1^i\right)^2+2 v_1^i v_{21}^i+\left(v_{21}^i\right)^2\right]\right\}\right\}. \quad (8.8г)$$

(8.8) содержат абсолютное ускорение $\dot{v}_1^i$ и абсолютную скорость v_1^i. Ньютоновский принцип противодействия нарушен; для ускорения центра тяжести имеем

$$m_1\dot{v}_1^i+m_2\dot{v}_2^i=$$

$$=-\frac{2\beta f}{c^2}\frac{m_1 m_2}{r_{12}}\left(\dot{v}_1^i+\dot{v}_2^i\right)-\frac{2\beta f}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right)\left(v_1^i+v_2^i\right)=$$

$$=-\frac{2\beta f}{c^2}\frac{m_1 m_2}{r_{12}}\left(2\dot{v}_1^i+\dot{v}_{21}^i\right)-\frac{2\beta f}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right)\left(2v_1^i+v_{21}^i\right)=$$

$$=-\frac{2\beta f}{c^2} m_1 m_2\left[\frac{2\dot{v}_1^i+\dot{v}_{21}^i}{r_{12}}-\frac{\dot{r}_{12}}{r_{12}^2}\left(2v_1^i+v_{21}^i\right)\right]. \quad (8.9)$$

Таким образом, необходимая для моделирования доктрины Маха — Эйнштейна билинейная зависимость членов взаимодействия в функции Лагранжа от скоростей имеет физический смысл только в том случае, когда вместо функции Лагранжа (8.3), зависящей от абсолютных скоростей, используется функция Лагранжа (8.1а), в которой член взаимодействия зависит от относительных скоростей. Если в соответствии с доктриной Маха — Эйнштейна отбросить в функции Лагранжа ньютоновский инерционный член

$$T=\frac{1}{2}\sum_B m_B v_B^2,$$

то такая зависимость от относительных скоростей приводит как раз к общей относительности поступательного движения согласно § 7. В этом смысле относительность всех поступательных ускоренных движений является условием моделируемости доктрины Маха — Эйнштейна.

Уже приведенные выше соображения Фридлендеров и Фёппля, как и исследования Эйнштейна и Тирринга в рамках общей теории относительности, касающиеся зависимости сил инерции от относительных движений масс, основаны на этой физически необходимой связи между обобщенной относительностью и доктриной Маха — Эйнштейна.

Рассмотрим космическое облако, состоящее из N частиц, как очень большое однородное облако [1], состоящее из M частиц P_A, в центральной области которого расположен ансамбль из n частиц P_α, причем

$$n \ll M \approx N,$$

так что можно положить, не делая заметной ошибки, как и в (5.22а), для всех P_α

$$\frac{2\beta f}{c^2} \sum_A^M \frac{m_A}{r_{\alpha A}} = 1, \qquad (8.10а)$$

где f — современное значение ньютоновской гравитационной постоянной. Кроме того, если облако Маха движется неупорядоченно (или твердотельно вращается вокруг ансамбля частиц), справедливо

$$\sum_A \frac{m_A v_A^i}{r_{\alpha A}} = 0. \qquad (8.10б)^2$$

Далее мы снова пренебрегаем всеми локальными влияниями облака на ансамбль частиц. Тем самым для произвольной частицы P_α из ансамбля получим уравнения движения

---

[1] Силы инерции, индуцируемые вращающейся сферической оболочкой, вычислены моим сотрудником д-ром Либшером (Dr. E. Liebscher).

[2] Для вращательного движения выражения (8.10б) в первом приближении (на оси вращения) исчезают. Поправки второго приближения дают для тел, не участвующих во вращении, силы типа кориолисовых. В расширении же облака принимают участие все тела (см. § 9).

$$m_\alpha \frac{d}{dt}\left[\left(1+\frac{3f}{c^2}\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}\right)v_\alpha^i\right] = m_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{3f}{c^2}\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}v_\beta^i\right) +$$

$$+ m_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\left(f\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}\right) + m_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\left(\frac{3f}{2c^2}\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}v_{\alpha\beta}^2\right) + F_\alpha^i. \tag{8.11a}$$

При этом мы ввели дополнительное негравитационное взаимодействие F_α^i, для которого в соответствии с аксиомой противодействия требуем

$$F_\alpha^i = \sum_{\beta\neq\alpha}^{n} F_{\alpha\beta}^i, \text{ причем } F_{\alpha\beta}^i = -F_{\beta\alpha}^i. \tag{8.11б}$$

Гравитационный вклад

$$m_\alpha g_\alpha^i = m_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{3f}{c^2}\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}v_\beta^i\right) +$$

$$+ m_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\left[f\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}\left(1+\frac{3}{2c^2}v_{\alpha\beta}^2\right)\right] \tag{8.12a}$$

содержит в правой части уже подробно обсуждавшееся в § 7 дополнительное ускорение

$$3m_\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{f}{c^2}\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}v_\beta^i\right), \tag{8.12б}$$

которое зависит от ускорений остальных частиц ансамбля, ньютоновскую гравитационную силу

$$f m_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}} \tag{8.12в}$$

и силу, зависящую билинейно от относительных скоростей $v_{\alpha\beta}^i$ частиц P_α по отношению к остальным частицам ансамбля:

$$\frac{3}{2}\frac{f}{c^2} m_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\left(\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}v_{\alpha\beta}^2\right). \tag{8.12г}$$

При вращательном движении ансамбля эта сила привела бы к появлению [хотя и с весьма малым коэффициентом (7.11б)] дополнительных сил, зависящих от относительных скоростей и действующих на частицу P_α, находящуюся вне оси вращения и не принимающую участия во вращательном движении остальных частиц ансамбля. Такие силы были предметом поисков Б. и Й. Фридлендеров и Фёппля.

Сравним (8.11а) и (8.12а) с общерелятивистскими уравнениями движения первого приближения (Эйнштейн, 1913, 1920 гг.; Тирринг, 1918 г.; см. [37]). Релятивистское уравнение движения для частицы P_α имеет вид

$$m_\alpha \frac{d}{dt}\left[\left(1+\frac{3f}{c^2}\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\alpha}{r_{\alpha\beta}}\right)v_\alpha^i\right]=$$

$$=m_\alpha\frac{d}{dt}\left(\frac{4f}{c^2}\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}v_\beta^i\right)+m_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\left(f\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}\right)+$$

$$+m_\alpha\frac{4f}{c^2}\left[\operatorname{rot}\left(\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}v_\beta^k\right),\ v_\alpha^l\right]^i+F_\alpha^i. \qquad (8.13а)$$

Член

$$4m_\alpha\frac{f}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha\neq\beta}^{n}\frac{m_\beta v_\beta^i}{r_{\alpha\beta}}\right) \qquad (8.13б)$$

в правой части (8.13а) отличается от члена (8.12б), как уже отмечено в § 7, множителем 4/3, который не выводится из относительности поступательного ускорения; член

$$4m_\alpha\frac{f}{c^2}\left[\operatorname{rot}\left(\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}v_\beta^k\right),\ v_\alpha^l\right]^i \qquad (8.13в)$$

приводит к силам типа кориолисовых. Вместе с членами

$$m_\alpha f\left[\frac{3}{2c^2}v_\alpha^2\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\left(\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}\right)+\frac{2}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\left(\sum_{\beta\neq\alpha}^{n}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}v_\beta^2\right)\right] \qquad (8.13г)$$

из второго приближения (Тирринг [37]) (8.13в) дополняет (8.12а). Как и (8.12г), члены (8.13в) и (8.13г) билинейны по скоростям v_α^i и v_β^i. (В обоих случаях, помимо членов типа сил Кориолиса и центробежных сил, появляются и члены другой структуры.)

Существенное различие между уравнениями (8.11а) и (8.13а) заключается, однако, в том, что, согласно § 5, уравнение (8.11а) означает на самом деле

$$m_\alpha \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{3f}{c^2}\sum_A^M \frac{m_A}{r_{\alpha A}} + \frac{3f}{c^2}\sum_{\beta\neq\alpha}^n \frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}\right) v_\alpha^i\right] = m_\alpha g_\alpha^i +$$
$$+ F_\alpha^i \leftrightarrow m_\alpha \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{9f}{2c^2}\frac{M}{R} + \frac{3f}{c^2}\sum_{\beta\neq\alpha}^n \frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}\right) v_\alpha^i\right] =$$
$$= m_\alpha g_\alpha^i + F_\alpha^i, \qquad (8.14)$$

и поэтому инерционный член в (8.11а) в действительности является функцией гравитационного потенциала Вселенной. Из (8.14) следует, что инерционный член стремится к нулю, если этот космический гравитационный потенциал исчезает [если при этом считать неизменным эффективное значение гравитационной постоянной f (см. ниже) [1]]. Это обстоятельство объясняет парадокс Маха [2].

Прежде всего очевидно, что одна лишь релятивизация ускорения не может привести к разрешению парадокса Маха, так как при вращательном движении появляются как раз относительные ускорения, так что, например, при твердотельном вращении с угловой ско-

[1] Примем во внимание, что, согласно § 4, полный импульс системы облако+ансамбль частиц всегда тождественно исчезает. Поэтому изменение инертной массы m_α частицы P_α не означает нарушения закона сохранения импульса.

[2] Сформулированная Махом, Й. Фридлендером и Эйнштейном проблема действия инерции на вращающемся теле в пустой (в остальном) Вселенной является прямым обращением интерпретации Ньютоном его опыта с ведром. По Маху, Й. Фридлендеру и Эйнштейну, Ньютон фактически констатировал действие силы, индуцированной удаленными космическими массами. Эту точку зрения в принципе отстаивал уже Гюйгенс в противоположность ньютоновскому положению об абсолютной динамической определимости движения.

ростью ω вокруг оси ($\rho=0$) центробежное ускорение $\mathfrak{Z}$ пропорционально расстоянию ρ:

$$\mathfrak{Z} \sim \rho\omega^2.$$

На самом деле и в общей теории относительности вращение тела является абсолютным движением, что впервые отметил Вейль. Мировые линии элементов массы на оси вращения $\rho=0$ суть геодезические линии; напротив, мировые линии элементов массы вне оси вращения обладают геодезической кривизной, которая пропорциональна локальному центробежному ускорению $\mathfrak{Z}$. (И в нашей механике вращение Вселенной и вращение тела относительно Вселенной — две физически различные ситуации. Мы здесь рассматриваем второй случай.)

Для объяснения парадокса Маха в соответствии с обсуждением Эйнштейна (1916 г.) рассмотрим вращающееся тело, состоящее из однородной жидкости, которая образует фигуру равновесия [1]. Пусть тело свободно вращается вокруг оси симметрии $\rho=0$. Тогда сплюснутость эллипсоида вращения по сравнению с невращающимся жидким шаром той же массы и плотности пропорциональна центробежной силе $\mathfrak{Z}$. $\mathfrak{Z}$ является результатом действия сил инерции на элементы массы $d\overset{*}{m}_\alpha$. Согласно принципу Д'Аламбера, в условия равновесия для вращающегося тела входят не только гравитационные силы $dm_\alpha g^i_\alpha$ и результирующие F^i_α остальных сил $F^i_{\alpha\beta}$, действующих между его элементами dm_α, но и инерционные сопротивления $-d\overset{*}{m}_\alpha \dot{v}^i_\alpha$, которые содержат не зависящую от взаимодействий во вращающемся теле ньютоновскую инерцию

$$-\overline{d\overset{*}{m}_\alpha}\dot{v}^i_\alpha = -dm_\alpha \frac{9}{2}\frac{f}{c^2}\frac{M}{R}\dot{v}^i_\alpha, \qquad (8.15\text{a})$$

индуцированную Вселенной.

Если бы члены (8.15а) исчезали, то условия равновесия вращающегося тела, следующие из принципа Д'Аламбера, зависели бы только от физических сил, действующих в теле, и от римановского гравитационно-

---

[1] Обсуждение парадокса после Ньютона снова начал Нейман (Neumann, 1870 г.). Его решение в смысле более поздней доктрины Маха — Эйнштейна было по существу дано Махом (1871 и 1883 гг.).

го потенциала между его элементами массы dm_β. Если $F^i_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} F^i_{\alpha\beta}$ — результирующая негравитационных сил, действующих на dm_α, $dm_\alpha g^i_\alpha$ — гравитационная сила и

$$-\frac{d}{dt}\left(dm^*_\alpha \dot{v}^i_\alpha\right) = -dm_\alpha \left(\frac{9fM}{2c^2R} + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{3f}{c^2} \frac{dm_\beta}{r_{\alpha\beta}}\right) \dot{v}^i_\alpha -$$

$$- dm_\alpha \frac{d}{dt}\left(\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{3f}{c^2} \frac{dm_\alpha}{r_{\alpha\beta}}\right) v^i_\alpha \qquad (8.15б)$$

— инерционное сопротивление, то из принципа Д'Аламбера для каждого dm_α следует

$$F^i_\alpha + dm_\alpha g^i_\alpha - dm^*_\alpha \dot{v}^i_\alpha - dm_\alpha \frac{d}{dt}\left(\sum \frac{3f}{c^2} \frac{dm_\beta}{r_{\alpha\beta}}\right) v^i_\alpha = 0. \qquad (8.16а)$$

Ньютоновские силы инерции в (8.16а) исчезают, если выполняется либо

$$dm^*_\alpha \to dm_\alpha \frac{3f}{c^2} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}, \qquad (8.16б)$$

либо

$$g^i_\alpha \to \infty; \quad F^i_\alpha \to \infty. \qquad (8.16в)$$

Элементы массы dm_α вращающегося тела соответствуют частицам P_α нашего ансамбля. С инертной массой

$$m^*_\alpha = m_\alpha \left(\frac{9fM}{2c^2R}\right) + m_\alpha \left(\frac{3f}{c^2} \sum_{\beta \neq \alpha}^{n} \frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}\right) = \bar{m}^*_\alpha + \delta m^*_\alpha \quad (8.17а)$$

уравнения движения (8.14) для частицы P_α имеют вид

$$F^i_\alpha + m_\alpha f \left\{\frac{d}{dt}\left[-\frac{3}{c^2} \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}} (v^i_\alpha - v^i_\beta)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}\left[\sum_{\beta \neq \alpha} \frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{v^2_{\alpha\beta}}{c^2}\right)\right]\right\} =$$

$$= \bar{m}^*_\alpha \dot{v}^i_\alpha = m_\alpha \left(\frac{9fM}{2c^2R}\right) \dot{v}^i_\alpha. \qquad (8.17б)$$

Теперь примем, что ньютоновская потенциальная функция облака Маха

$$f^{-1}\Phi = \sum_{A}^{M} \frac{m_A}{r_{\alpha A}} = \frac{3}{2}\,\frac{M}{R}, \text{ где } M = \sum_{A}^{M} m_A,$$

в (8.7) убывает и в конце концов стремится к нулю [либо в силу постоянного увеличения радиуса R облака — расширение Вселенной (см. § 9), — либо из-за того, что частицы P_A непрерывно уходят из облака, так что M уменьшается]. Тогда при фиксированном мгновенном значении гравитационной константы f инертные массы (8.17а) переходят в инертные массы δm^{*}_{α}, индуцированные одним лишь ансамблем частиц и зависящие от относительных координат:

$$m^{*}_{\alpha} \to \frac{3f}{c^2} \sum_{\beta \neq \alpha}^{n} \frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}} = \delta m^{*}_{\alpha}. \qquad (8.17\text{в})$$

Однако если мы исходим из того, что, как и в § 5, эффективная гравитационная постоянная f^* в ньютоновском законе тяготения определяется согласно равенству

$$\dot{v}^{i}_{\alpha} = -f\frac{m_\alpha}{\bar{m}_\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha}^{n} \frac{m_\beta}{r^3_{\alpha\beta}}\, x^{i}_{\alpha\beta} = -f\left(\frac{2c^2R}{9fM}\right) \sum_{\beta \neq \alpha}^{n} \frac{m_\beta}{r^3_{\alpha\beta}}\, x^{i}_{\alpha\beta} =$$

$$= -f^* \sum_{\beta \neq \alpha}^{n} \frac{m_\beta}{r^3_{\alpha\beta}}\, x^{i}_{\alpha\beta}, \qquad (8.18)$$

а инертные массы $\bar{m}^{*}_{\alpha}$ — динамически как инерционное сопротивление, то соотношения (8.17а) истолковываются следующим образом: с расширением Вселенной (или с исчезновением космических масс), т. е. при уменьшении величины M/R, эффективная гравитационная постоянная растет. Если $f_0=f$, M_0 и R_0 — современные значения соответственно гравитационной постоянной, массы и радиуса облака Маха, то для переменных M и R справедливо:

$$f^* = \frac{2}{9}\,\frac{c^2R}{M} = \left(\frac{R}{M}\right)\left(\frac{M_0}{R_0}\right) = f\,\frac{m_\alpha}{\bar{m}^{*}_{\alpha}} f. \qquad (8.19\text{а})$$

Аналогично для всех негравитационных констант связи при современных значениях $\underset{L}{k_0}=\underset{L}{k}$ справедливо:

$$\underset{L}{k^*} = \underset{L}{k}\frac{m_\alpha}{\overline{m}_\alpha^*} = \left(\frac{R}{M}\right)\left(\frac{M_0}{R_0}\right)\underset{L}{k}, \tag{8.19б}$$

так что отношение между константами связи

$$\underset{L}{k^*} : f^* = \underset{L}{k} : f \tag{8.19в}$$

остается неизменным.

Таким образом, уравнения движения (8.14) принимают вид

$$m_\alpha \dot{v}_\alpha^i = -m_\alpha \frac{2Rc^2}{9M}\frac{d}{dt}\left(3\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}v_{\alpha\beta}^i\right) + m_\alpha\frac{2Rc^2}{9M}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\left[\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}\left(1+\frac{3}{2}\frac{v_{\alpha\beta}^2}{c^2}\right)\right] + \frac{2Rc^2}{9M}f^{-1}F_\alpha^i. \tag{8.20}$$

Это означает

$$m_\alpha\frac{d}{dt}\left[\left(1+\frac{3}{c^2}f^*\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}\right)v_\alpha^i\right] = m_\alpha g_\alpha^{*i} + F_\alpha^{*i}, \tag{8.21}$$

т. е. при $R\to\infty$ или $M\to 0$ ньютоновский инерционный член в (8.20) бесконечно мал по сравнению с силами взаимодействия в ансамбле частиц. Тогда справедливо

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{3f}{c^2}\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}v_{\alpha\beta}^i\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\left[f\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}}\left(1+\frac{3}{2c^2}v_{\alpha\beta}^2\right)\right] + \frac{F_\alpha^i}{m_\alpha} = 0. \tag{8.22а}$$

В этом случае динамика ансамбля частиц определяется только взаимодействиями между частицами P_α самого ансамбля, т. е. эта динамика зависит только от относительных взаимных скоростей $v_{\alpha\beta}^i$ частиц ансамбля, и в динамику не входит никакая ньютоновская сила инерции. Следовательно, инерционное сопротивление сводится к индукционному гравитационному действию элементов массы друг на друга, которое зависит только от относительных скоростей. Изолированная материальная точка совершенно свободна от сил и инерции, и поэтому для нее вращение динамически не определено. Это разрешает парадокс Маха. Вообще при твердотельном вращении силы инерции, индуцированные самим вращающимся телом и действующие на его элементы массы, исчезают:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L^*}{\partial v_\alpha^i} = \frac{3f}{c^2}\,dm_\alpha \frac{d}{dt} \sum_\beta \frac{dm_\beta\,[\omega,\, r_{\alpha\beta}]^i}{r_{\alpha\beta}} = 0, \qquad (8.22б)$$

так что условие равновесия (8.16а) сводится к свободному от инерции выражению

$$F_\alpha^i + dm_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\left(\sum_\beta \frac{f\,dm_\beta}{r_{\alpha\beta}}\left\{1 + \frac{3}{2}\,\frac{v_{\alpha\beta}^2}{c^2}\right\}\right) = 0, \qquad (8.23)$$

при этом фигуры равновесия для однородных жидкостей почти сферические. [«Релятивистский» коэффициент $1+3\,v^2/2c^2$ в (8.23) означает деформацию лоренцевского типа.]

Простейшим случаем «безынерционных» уравнений движения (8.22а) является гравитационная задача двух тел ($n=2$). Для двух частиц P_1 и P_2, предполагая пустой остальную Вселенную, функцию Лагранжа с учетом (8.19а) можно записать в виде

$$L^* = f^*\,\frac{m_1 m_2}{r}\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\right) = f^*\,\frac{m_1 m_2}{r}\left(1 + \frac{3}{2c^2}\,[\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2]\right), \qquad (8.24а)$$

где $x^i = x_{12}^i$, $r = r_{12}$ и $v^i = v_{12}^i$ — соответственно относительные координаты и скорости. (8.24а) приводит к функции Гамильтона

$$H^* = -f^*\,\frac{m_1 m_2}{r}\left(1 - \frac{3}{2}\,\frac{v^2}{c^2}\right) = m_1 m_2 f^* k = \mathrm{const} \qquad (8.24б)$$

и закону сохранения момента импульса

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot\varphi} = \frac{3}{c^2}\,f^* m_1 m_2 r \dot\varphi = \frac{3}{c^2} f^* m_1 m_2 h = \mathrm{const}. \qquad (8.24в)$$

Уравнения движения для $r = r(\varphi)$ имеют вид

$$\left(-2 + \frac{3h^2}{c^2}\right) r + \frac{3h^2}{c^2}\,r'' = 3kr^2. \qquad (8.25)$$

Таким образом, они в принципе не отличаются от (5.34), где $\beta/c^2 \to \infty$, а для гравитационной постоянной оставлено ее современное значение f.

Мы видим, что с исчезновением индукции инерции, обусловленной Вселенной, уравнения движения для задачи двух тел сводятся к уравнениям для относительного движения. Канонический импульс системы двух частиц при этом исчезает (в согласии с общими положениями § 7) тождественно:

$$\frac{\partial L^*}{\partial v_1^i} = \frac{3f^*}{c^2} \frac{m_1 m_2}{r} v_{12}^i = -\frac{\partial L^*}{\partial v_2^i}. \tag{8.26}$$

Тот факт, что вся динамика задачи двух тел в пустой остальной Вселенной сводится к определению относительных величин, ясно выражает принцип Маха. Напротив, в ньютоновской механике, кроме уравнений относительного движения, имеет место условие постоянства скорости центра тяжести (см. § 4).

Подчеркнем еще, что для ансамбля из n частиц относительное значение ньютоновских сил инерции по сравнению с физическими силами взаимодействия между частицами ансамбля непрерывно уменьшается с уменьшением ньютоновской потенциальной функции Вселенной M/R (при этом либо $\overline{m}_\alpha^* \sim MR$ при постоянном значении f гравитационной константы, либо все константы связи растут $\sim R/M$ при динамически определяемых $\overline{m}_\alpha^*$).

Поскольку, согласно моделям Вселенной из § 9, реальный мир расширяется ($R \to \infty$ при $t \to \infty$), то относительное значение сил инерции по сравнению с локальными «физическими» силами в нашей Вселенной по динамике Римана — Маха непрерывно уменьшается. Тем самым, в частности, фигуры равновесия небесных тел (и вообще фигуры равновесия вращающихся жидкостей) по мере развития Вселенной все больше приближаются к сфере, тогда как на ранних стадиях Вселенной фигуры вращения небесных тел при тех же скоростях вращения были сильнее сплюснуты, чем теперь (см. Приложение 2).

Вообще для произвольного коллектива частиц, динамика которого определяется римановой механикой с принципом Маха и заданной постоянной индукции инерции β/c^2 (причем ньютоновский потенциал может иметь любое физическое значение), из сказанного следует фундаментальная связь между динамикой частиц и коллективом.

Инерция частиц (полностью изолированного) коллектива есть результат коллективного влияния усредненного потенциала частиц. Чем больше это коллективное влияние (т. е. чем больше усредненный потенциал маховского облака частиц), тем меньше влияние локальных взаимодействий (возмущений, вносимых физическими силами). В очень большом (или очень плотном) коллективе частиц (усредненный потенциал $\Phi \to \infty$) движение отдельных частиц практически не зависит от локальных сил; частицы движутся лишь в соответствии с их инерцией, индуцированной коллективным потенциалом $\Phi \sim M/R$. Напротив, для очень малого (или очень разреженного) коллектива частиц ($\Phi \to 0$) динамика частиц сводится к локальным взаимодействиям.

Согласно доктрине Маха — Эйнштейна (см. § 5), Вселенная является моделью такого коллектива частиц, в центральной области которого глобальный гравитационный потенциал равен $\Phi = \frac{3}{2} \frac{fM}{R}$.

§ 9. Космологические вопросы

Космологические проблемы в механике Римана — Маха рассматриваются аналогично «ньютоновской космологии» по Милну. Однако относительность движения «фундаментального наблюдателя», констатированная Гекманом для ньютоновской космологии в силу космологического принципа, в нашем случае следует уже из основ динамики благодаря общей относительности поступательно ускоренного движения (см. § 7).

Рассмотрим массы m_A космического облака как «фундаментальные частицы». Для облака конечных размеров, состоящего из этих фундаментальных частиц (в остальном пространство предполагается пустым), вероятностное распределение их скоростей (т. е. отсутствие систематического движения в облаке), согласно Милну, приводит к радиальному расширению облака[1]

[1] Мой сотрудник д-р Крейзель (Dr. E. Kreisel) показал, что космологическое расширение облака Маха выводится непосредственно из теоремы вириала, примененной к нашей механике.

с изотропным полем скоростей

$$\frac{x^i_{AB}\left(v^i_A - v^i_B\right)}{r_{AB}} = \dot{r}_{AB} = \frac{d}{dt}(r_A - r_B). \qquad (9.1)$$

Функция Лагранжа при этом имеет вид

$$L^* = f\sum_{A>B}\frac{m_A m_B}{r_{AB}}\left(1 + \frac{\beta}{c^2}\dot{r}^2_{AB}\right). \qquad (9.2)$$

Исходя теперь из обычной космологической гипотезы, что пространственное распределение фундаментальных частиц во Вселенной в среднем однородно и изотропно, и вводя для расстояний среднюю величину

$$\overline{r_A - r_B} = r, \qquad (9.3)$$

получим среднее значение ньютоновского потенциала облака

$$-fM/r \qquad (9.4а)$$

и отсюда среднее значение дополнительной римановской части

$$\frac{\beta}{c^2}\frac{fM}{r}\dot{r}^2. \qquad (9.4б)$$

Итак, полный риманов потенциал облака задается формулой

$$V = -\frac{fM}{r}\left(1 - \frac{\beta}{c^2}\dot{r}^2\right), \qquad (9.5а)$$

где

$$M = {}^4/_3\pi\rho r^3 = \sum m_A \qquad (9.5б)$$

полный гравитационный заряд (полная тяжелая масса) облака.

Функция Лагранжа для (9.5а) имеет вид

$$L^* = \frac{\beta}{c^2}\frac{fM^2}{r}\dot{r}^2 + \frac{fM^2}{r}. \qquad (9.6)$$

Отсюда находим полную энергию облака

$$H = \frac{\beta}{c^2} f\frac{M^2}{r}\dot{r}^2 - f\frac{M^2}{r} = E = \mathrm{const}. \qquad (9.7)$$

Мы можем также написать для (9.7)

$$fM\frac{\beta}{c^2}\dot{r}^2 - fM - kr = 0 \ \left(k = \frac{E}{M}\right). \qquad (9.8)$$

При решении уравнения (9.8) будем различать случай нулевой полной энергии

$$k = 0, \tag{9.9а}$$

положительной полной энергии

$$k > 0, \tag{9.9б}$$

и отрицательной полной энергии

$$k < 0. \tag{9.9в}$$

При условии (9.9а) интегрирование (9.8) дает

$$r = ct/\sqrt{\beta} + \text{const}; \tag{9.10а}$$

следовательно, облако расширяется линейно с «постоянной Хаббла»

$$\dot{r}/r = t^{-1}. \tag{9.10б}$$

Случаи (9.9б) и (9.9в) приводят к квадратичному закону расширения

$$\frac{4f^2M^2}{k^2}\left(\frac{kr}{fM} + 1\right) = \left(\frac{c}{\sqrt{\beta}}\, t + \text{const}\right)^2. \tag{9.11а}$$

Мы видим, что случай отрицательной полной энергии (9.9в) невозможен, так как r может быть только положительным[1].

Таким образом, конкурирующими моделями остаются равномерно расширяющийся мир (9.10а) и мир (9.11а) с равноускоренным расширением:

$$\dot{r} = kc^2t/2\beta fM + \text{const}. \tag{9.11б}$$

Равномерно расширяющийся мир (9.10а) здесь соответствует параболической скорости расширения, а ускоренно расширяющийся мир — гиперболической скорости[2].

Существенное отличие этих космологических моделей от моделей динамической космологии Милна, Мак-Кри

---

[1] В действительности при $k<0$ из равенства (9.11а) следует лишь ограничение: $|k|r<fM$. Аналогичное ограничение существует и в релятивистской космологии в случае закрытого мира. — *Прим. перев.*

[2] В противоположность этому в релятивистской кинематике равномерно расширяющийся мир — гиперболический.

и Гекмана заключается в том, что в уравнении (9.8) место постоянной M динамической космологии занимает функция

$$\frac{M^2 f \beta}{c^2 r} = \frac{3}{2} f \frac{M^2}{c^2 r}, \tag{9.12}$$

которая выражает, что, согласно доктрине Маха — Эйнштейна, с ростом мирового радиуса r инертные массы уменьшаются (см. § 8). Как и в (8.19а), это уменьшение инертной массы представляется на основе динамического определения массы таким образом, что эффективное значение f^* гравитационной постоянной возрастает по закону[1]

$$f^* = (r/r_0) f_0 = (r/r_0) f. \tag{9.13}$$

где r_0 — исходное значение r; $f_0 = f$ — исходная эффективная гравитационная постоянная.

Таким же образом изменяются и эффективные значения негравитационных констант связи, так что эффективное отношение этих констант связи к гравитационной постоянной f^* остается неизменным [см. (8.19в)].

Как в ньютоновской космологии, так и здесь оптические и электродинамические соотношения во Вселенной остаются совершенно незатронутыми. Мы ввели только гравитационную механику с группой Галилея в качестве кинематической группы, и ее связь с лоренц-ковариантной релятивистской физикой, и в частности с электродинамикой, остается невыясненной (см. § 10).

Галилей-инвариантная оптика, соответствующая баллистической теории света Ритца, дала бы эффект Доплера, зависящий только от относительных скоростей, так что в этом случае из нашей модели Вселенной с учетом (9.1) эффект Хаббла мог бы следовать как ритцевский эффект Доплера. Однако теория Ритца как основа электродинамики принципиально не приемлема[2].

---

[1] Это соотношение справедливо, так же как и в нашей космологии, в кинематической теории относительности Милна (см. § 10).

[2] Ср. Тредер, в цитированном месте. — Различные интерпретации баллистической теории света приводят, впрочем, к разным предсказаниям относительно интерферометрической и спектрометрической обнаружимости доплеровского сдвига линий (см. Паули [30]).

§ 10. Связь с теорией относительности

Разработанная в этой главе риманова механика с доктриной Маха — Эйнштейна является чистой механикой и в исходном виде вообще не включена в общую физику. Такое включение возможно только при условии, что будет выяснена связь этой механики с теорией относительности, которая определяет кинематические рамки для физики.

Как отмечалось в разное время, между римановой механикой, модифицированной с помощью доктрины Маха — Эйнштейна, и общей теорией относительности существует фундаментальная общность; она заключается в том, что в обеих теориях конструктивно содержится принцип эквивалентности инертной и тяжелой масс и, далее, в обеих теориях имеется динамическая относительность систем отсчета. Однако существующей группой инвариантности в общей теории относительности является эйнштейновская группа общих пространственно-временных преобразований координат $x'^{\nu} = x'^{\nu}(x^{\lambda})$, которая представляет собой обобщение группы Лоренца — Пуанкаре:

$$x'^{\nu} = \omega^{\nu}_{\alpha} x^{\alpha} + \alpha^{\nu},$$

причем

$$\omega^{\nu}_{\alpha}\omega^{\alpha}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu}; \quad \omega^{\nu}_{\alpha},\ \alpha^{\mu} = \mathrm{const} \ (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3).$$

В механике же Римана — Маха группой инвариантности является обобщенная группа Галилея (см. § 7)[1]

$$dx'^{i} = dx^{i} + V^{i}(t)\,dt \ \ (i = 1, 2, 3). \tag{10.1}$$

---

[1] Пуанкаре (1904 г.) отметил, что в механику, удовлетворяющую динамическому принципу относительности, имеют право входить не абсолютные кинематические величины, а лишь относительные — относительные координаты, относительные скорости и относительные ускорения (возможно, и относительные высшие производные). По Пуанкаре, это означает, что в уравнения движения частиц должны входить не сами величины

$$\frac{d^n}{dt^n} x^i \quad (n \geqslant 0; \quad i = 1, 2, 3),$$

а лишь разности между имеющимися кинематическими величинами для частиц

$$x^i_{AB} = x^i_A - x^i_B; \ \ v^i_{AB} = v^i_A - v^i_B; \ \ \dot{v}^i_{AB} = \dot{v}^i_A - \dot{v}^i_B$$

(Только чисто пространственные преобразования $x'^i = x'^i(x)$ являются общими для обеих теорий.) Поэтому, несмотря на имеющуюся точку соприкосновения с общей теорией относительности, включение нашей механики в релятивистскую физику остается полностью нерешенной проблемой; последующие замечания по этому поводу носят полностью спекулятивный характер.

В § 5 и 6 мы потребовали, чтобы вытекающая из римановой механики зависимость инертной массы m_a^* частицы P_a от локальных гравитационных потенциалов гравитирующих масс, находящихся в ее окрестности, аналогичная общерелятивистской, совпадала с зависимостью, вытекающей из эйнштейновского определения инертной массы. Тем самым локальная индукция инерции по Риману соответствует локальной деформации метрики $g_{\mu\nu}$, которая получается из уравнений тяготения Эйнштейна как действие ближних масс. Этим соответствием определяется индукционное число β: $\beta = 3/2$. Мы можем проследить дальше это соответствие с геометризацией тяготения.

Согласно (5.22а), между индукционной постоянной $\beta/c^2 = 3/2c^2$ и средним гравитационным потенциалом Φ в центре Вселенной существует связь:

$$c^2 = 3f\sum \frac{m_A}{r_A} = 3\Phi = \frac{9}{2} f \frac{M}{R} \quad (m = \textstyle\sum m_A).$$

Можно было бы интерпретировать это соотношение как определение эффективной скорости света $c_{эф}$ через Φ:

$$c_{эф} = \sqrt{3\Phi}. \tag{10.2а}$$

При условии (10.2а) (локально) ньютоновская механика является общим предельным случаем динамики Ри-

---

или вообще

$$\frac{d^n}{dt^n} x^i_{AB} = \frac{d^n}{dt^n}\left(x^i_A - x^i_B\right) \quad (n \geqslant 0).$$

Динамика, удовлетворяющая постулату относительности Пуанкаре, инвариантна относительно обобщенной группы Галилея:

$$dx'^i_A = dx^i_A + V^i(t)\,dt,$$

и соответственно в интегральном виде

$$x'^i_A = x^i_A + \rho^i(t),$$

где $V^i(t)$ и $\rho^i(t)$ — произвольные функции времени.

мана — Маха и общей теории относительности: в динамике Римана — Маха, согласно § 5, для

$$\Phi \to \infty \leftrightarrow 2/3c^2 \to 0 \tag{10.2б}$$

локально строго справедлива ньютоновская небесная механика. В общей теории относительности в случае

$$g_{00} = c^2 \to \infty \ (g_{i0} = 0, \ \det g_{ik} \neq 0) \tag{10.2в}$$

четырехмерное пространство — время превращается в ньютоновское с гравитационной динамикой Галилея — Ньютона (Фридрихс, 1927 г.). Таким образом, при условии (10.2а) и механика Римана — Маха, и общая теория относительности содержат динамику Галилея — Ньютона как предельный случай, соответствующий бесконечно большой скорости света. Но, согласно специальной теории относительности, каждой энергии E приписывается инертная масса E/c^2. Если эта инертная масса также должна быть индуцирована Вселенной, то и $c_{эф}$ должна определяться Вселенной, при этом в предельном случае (10.2б) конечной энергии E не соответствует никакая инертная масса, так что тогда механика частиц, возможно, могла бы быть построена без всякого учета свойств инерции электромагнитного поля.

Это подсказывает мысль интерпретировать конечную скорость света в реальной Вселенной как скорость относительно усредненного распределения масс и, более того, понимать зависимость инертной массы от скорости (т. е. энергии), констатируемую релятивистской механикой, как индукционное воздействие Вселенной, которая тем самым определяет полную инерцию тел. Это потребовало бы замены гравитационного потенциала Ньютона — Римана, которому соответствует мгновенное действие, запаздывающим потенциалом (и, следовательно, уравнение Лапласа должно было бы быть заменено соответствующим волновым уравнением). Однако запаздывание и волновое уравнение должны были бы здесь вводиться галилей-инвариантным образом. Это осуществимо, если понимать распространение волн и запаздывание в смысле Ритца, так что в скорость передачи гравитационного взаимодействия относительная скорость источника и наблюдателя входит аддитивно.

Так как теперь инертная масса тела m^* по существу определяется коллективным гравитационным потенциалом Вселенной, то относительными скоростями тел, которые надо учесть при ритцевском запаздывании инерционных воздействий, будут их скорости относительно Вселенной[1]. Но пока остается совершенно открытым вопрос о том, может ли такого рода замена ньютоновской потенциальной функции $\sim 1/r$ запаздывающими гравитационными потенциалами в смысле Ритца — и тем самым замена уравнения Лапласа для гравитационного потенциала волновым уравнением Ритца — фактически моделировать релятивистскую динамику (или по крайней мере энергетическую зависимость инертной массы)[2].

В любом случае механика Римана — Маха должна быть предельным случаем общерелятивистской физики. Она могла бы представлять собой такой предельный случай в двух отношениях:

1. Можно было бы принять, что механика Римана — Маха является первым приближением в предельном случае

$$v^2 \ll c^2, \quad \sum_{\beta \neq \alpha}^{n} f \frac{m_\beta}{r_{\alpha\beta}} \ll c^2, \tag{10.3}$$

т. е. для малых относительных скоростей и малых локальных гравитационных потенциалов. Тогда можно было бы таким образом модифицировать существующую общую теорию относительности, чтобы из ее уравнений поля и уравнений движения в приближении (10.3) следовала гравитационная динамика Римана — Маха, а не Ньютона[3].

Согласно этому толкованию, в существующей общей теории относительности доктрина Маха — Эйнштейна не содержится, поскольку она исходит из требования, чтобы из нее в качестве первого приближения получалась ньютоновская (а не римановская) гравитационная динамика. Это следует из того, что вместе с требова-

[1] Такое толкование, очевидно, родственно предложенной Хольстом (1920 г.) «причинной» интерпретации теории относительности.

[2] В этом волновом уравнении Ритца скорость света c следовало бы истолковывать как относительную скорость по отношению к источнику, принятую постоянной.

[3] Ньютоновская механика справедлива тогда не для малых возмущений в пространстве, свободном от гравитации, а для возмущений стремящегося к бесконечности среднего коллективного потенциала Вселенной ($M \to \infty$, $\beta \to 0$).

нием приближенной справедливости ньютоновской гравитационной механики общая теория относительности одновременно восприняла и допущение, что в нулевом приближении ускорение и инерция не зависят от физического содержания пространства — времени — отмеченное Вейлем «превосходство эфира» над «весомой материей».

2. Можно было бы исходить из замечания, что симметрии физического пространства — времени связаны с видом взаимодействий. Электромагнитное поле представляет другое (гораздо более сильное) взаимодействие, нежели гравитация. Принципиально возможно, чтобы чистая электродинамика обладала в качестве кинематической группы симметрии группой Лоренца — Пуанкаре, а для чистой гравитационной динамики кинематической группой была бы обобщенная группа Галилея (10.1). Единая теория относительности, содержащая вместе электро- и гравидинамику, не обладала бы тогда (с точностью до тривиальных подгрупп) никакой кинематической группой инвариантности. Сверх того, Вселенная (с полным каноническим импульсом, равным нулю; см. § 5) представляла бы выделенную систему отсчета, к которой можно отнести сразу и гравитационную динамику, и электродинамику. (Фактически ведь и общее риманово пространство — время общей теории относительности не обладает никакой группой симметрии.) Механика Римана — Маха с кинематической группой симметрии (10.1) была бы при этом тем самым предельным случаем релятивистской физики, который проявляется при чисто гравитационном взаимодействии (а лоренц-ковариантная теория Максвелла — предельным случаем чистой электродинамики — без учета гравитации и инерции). Осуществимость такого подхода, естественно, весьма проблематична [1].

Толкование относительности инерции с помощью моделирования доктрины Маха — Эйнштейна в римановой гравитационной механике является дополнительным к попыткам провести доктрину Маха — Эйнштейна в об-

[1] Укажем по этому поводу, что Милн (1937—1948 гг. [24]) в своей «Релятивистской кинематике» (см. ниже) фактически ввел для электродинамики и гравитационной динамики различные кинематические группы, а именно группу Лоренца и группу Галилея (как раз ссылаясь на принцип Маха).

щей теории относительности. В этих попытках принцип Маха используется как принцип отбора, который выделяет из множества решений эйнштейновских уравнений гравитации такие типы решений, которые в том или ином смысле должны моделировать относительность инерции в соответствии с доктриной Маха — Эйнштейна[1]. В нашей механике Римана — Маха доктрина Маха — Эйнштейна является первичным, исходным пунктом, и из множества возможных Вселенных выделяются в качестве физических такие, в которых приближенно справедлива ньютоновская теория гравитации. То и другое, естественно, приводит к определению «констант интегрирования».

Если мы, например, введем в общерелятивистское уравнение Фридмана

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2+\frac{\varepsilon}{R^2}=\frac{8\pi f}{3c^2}\rho\ (\varepsilon=+1;\ 0;\ -1)^2 \tag{10.4}$$

для релятивистской эволюционирующей Вселенной соотношения между мгновенным значением радиуса Вселенной R_0 и мгновенной плотностью массы ρ_0, вытекающие из (5.23) и $\beta=3/2$, то получим

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)_0^2+\frac{\varepsilon}{R_0^2}=\frac{2}{3\beta R_0^2}=\frac{4}{9R_0^2}. \tag{10.5}$$

Из (10.5) находим, что только гиперболический фридмановский мир ($\varepsilon=-1$) находится в соответствии с космологией доктрины Маха — Эйнштейна.

В этой Вселенной мгновенное значение плотности массы ρ_0 устанавливается теоретически из того соображения, что уже небольшое увеличение плотности массы по сравнению с соответствующей (10.5) плотностью

$$\rho_0=\frac{3c^2}{8\pi f}\,\frac{4}{9R_0^2}=\frac{c^2}{6fR_0^2}, \tag{10.6}$$

а именно до

$$\tilde{\rho}_0={}^9\!/_4\rho_0=1/R_0^2. \tag{10.7}$$

[1] См., например, работы Уилера (1964 г.) и Хёнля (1965 г.). Для Эйнштейна этот принцип отбора был одно время фундаментальным аспектом космологии (см. § 7).

[2] $\varepsilon=+1$; 0; -1 соответствуют сферическому (закрытому), квазиевклидову и гиперболическому мирам. — *Прим. перев.*

дало бы минимальную плотность, которую может иметь сферический мир Фридмана ($\varepsilon=+1$), т. е. при этом $(\dot{R}/R)_0=0$. Итак, гиперболически расширяющаяся Вселенная — общий результат как релятивистской космологии, так и космологии, основы которой намечены в § 9.

Дальнейшее различие между гравитационной индукцией инерции по Веберу — Риману и Маху — Эйнштейну, с одной стороны, и общерелятивистскими попытками моделирования принципа Маха, с другой стороны, будет очевидно, если сравнить гравитационную теорию Римана — Маха с так называемой «теорией гравитации с дальнодействием» Хойла (1964 г.). В противоположность первой теории Хойла — на самом деле не теория с дальнодействием, а настоящая полевая теория. Но в ней, помимо метрического тензорного поля $g_{\mu\nu}$, фигурируют как дополнительные скалярные поля N массовых функций

$$m'_A = m'_A(x^\nu) \quad (A = 1, \ . \ . \ . \ , N) \tag{10.8а}$$

и инертные массы m^*_A для N частиц P_A определяются как суммы

$$m^*_B = \sum_{A \neq B}^{N} m'_A. \tag{10.8б}$$

Эти массовые функции должны, согласно Хойлу, удовлетворять особому волновому уравнению[1]

$$\Box m'_A + {}^1/_6 R m'_A = 0. \tag{10.9}$$

В этом отношении хойловское определение массы находится в соответствии с уравнениями (6.1) и (6.2). Однако, помимо этого, у Хойла для метрического тензора $g_{\mu\nu}$ справедливы соответствующим образом модифицированные уравнения Эйнштейна; $g_{\mu\nu}$ есть гравитационный потенциал, а массовые функции $m'_A(x^\nu)$ суть особые дополнительные поля, связанные с этим гравитационным потенциалом. Напротив, у нас «массовые функции» задаются самим ньютоновским гравитационным потенциалом, поскольку для инертных масс m^*_a справедливо

$$m'_A(x^i_a) = \frac{3}{c^2} f \frac{m_A m_a}{r_{aA}} \quad (m_A \text{ — тяжелая масса}), \tag{10.10а}$$

[1] Здесь R — скалярная кривизна пространства — времени, а $\Box$ — общековариантный оператор Д'Аламбера. — *Прим. перев.*

$$m_a^* = \sum_{A \neq a}^{N} m_A' = \frac{3}{c^2} f \sum_{A \neq a}^{N} \frac{m_A}{r_{aA}} m_a = m_a. \quad (10.10б)$$

Поскольку в теории Хойла массам соответствуют дополнительные полевые переменные, доктрина Маха — Эйнштейна фактически невыполнима, так как она постулирует индукцию инерции гравитационным потенциалом [1].

Напротив, изложенная здесь гравитационная динамика связывает закон инерции с Вселенной (см. § 7), как и «кинематическая теория относительности» Милна [24]. У нас на месте милновского «мирового субстрата» выступает «маховское облако частиц». Согласно Милну, частица движется свободно в том случае, если ее движение определяется только этим субстратом; согласно § 7, «свободное движение» частицы задано тогда, когда на частицу действует только глобальный гравитационный потенциал космического облака. «Кинематическому мировому постулату» Милна здесь противостоит высказывание, что функция Лагранжа космического облака явно зависит только от относительных скоростей частиц v_{AB}^i.

Космологические высказывания в § 9 тоже родственны выводам кинематической космологии Милна. В частности, согласно § 9, имеется возможность равномерного расширения Вселенной: $R \sim t$. Уравнение для эффективной гравитационной постоянной f^*, определенной в § 8, отличается от выражения Милна только множителем порядка 1. Согласно § 9, при мгновенных значениях $f=f_0$, $M=M_0$ и $R=R_0$ для гравитационной постоянной, массы и радиуса Вселенной справедливо равенство

$$f^* = \frac{2}{9} \frac{Rc^2}{M} = \left(\frac{R}{R_0}\right) f_0 \quad (10.11а)$$

тогда как у Милна

$$f^* = \frac{Rc^2}{M} = \left(\frac{R}{R_0}\right) f, \quad (10.11б)$$

[1] У Хойла, сверх того, нарушается (слабый) эйнштейновский принцип эквивалентности, так как каждой частице P_a отвечает особое скалярное поле, так что — в соответствии с проблематикой определения метрики в скалярно-тензорных теориях гравитации — в принципе для каждой частицы P_a можно ввести собственную пространственно-временную метрику $\underset{a}{g'_{\mu\nu}}$.

при этом в (10.11а) M и R суть масса и радиус «облака Маха», а в (10.11б) — масса и радиус «видимой Вселенной». Как у нас (10.11а), так и по Милну (10.11б) понимаются как следствия принципа Маха [1].

В общерелятивистских теориях гравитации пространство — время обладает римановой геометрией (геохронометрией), на метрику которой, согласно эйнштейновским уравнениям гравитации, влияют массы и энергии. В динамике Римана — Маха, напротив, как и в ньютоновской динамике, для трехмерного пространства предполагается евклидова метрика. Эту разную роль геометрии легко понять иначе, нежели различие кинематических групп (группа Лоренца и группа Галилея), если исходить из отмеченного в § 4 различия в интерпретации эквивалентности между инерцией и тяготением по Эйнштейну и по Маху.

Пуанкаре [32] показал, что в физике ни геометрическая структура пространства (G), ни закон физической динамики (P) не имеют самостоятельного значения. Напротив, опытное содержание физики дается только суммой Пуанкаре

$$G + P.$$

Для всех локальных проблем разложение совокупности фактов на слагаемые Пуанкаре G и P — в духе самого общего принципа относительности — произвольно. Этот произвол, конечно, существует только локально, так как в целом слагаемые Пуанкаре G и P должны удовлетворять различным условиям.

С точки зрения суммы Пуанкаре инерция Галилея — Ньютона обладает замечательной двойственностью, которая выяснена Махом, Ланге и Герцем. Инерциальное движение и силы инерции в ньютоновской механике — результат динамического влияния пространства на движение масс, тогда, как, наоборот, массы на геометрию

[1] Пожалуй, не совсем лишено интереса отметить, что и в нашей механике можно ожидать астрономических и космогонических следствий, таких, как в теории Милна образование спиральных ветвей. В специально-релятивистской Вселенной Милна имеет место сохранение инертной массы. Во вселенной Маха — Эйнштейна инертная масса уменьшается с расширением Вселенной: $M_{\text{ин}} \approx R^{-1}$. Милновская Вселенная — чисто инерциальная Вселенная; Вселенная же Маха — Эйнштейна есть чисто гравитационная Вселенная без инерции.

пространства не влияют. Таким образом, силы инерции принадлежат слагаемому G в сумме Пуанкаре как силы, возникающие при перемещении.

Напротив, гравитация в ньютоновской механике — это физическая сила, которая принадлежит динамическому слагаемому P. Эта разная принадлежность инерции и гравитации приводит к тому, что эквивалентность инерции и гравитации в ньютоновской гравитационной динамике необъяснима. Эквивалентность же требует, чтобы силы инерции и гравитации вместе были отнесены к одному из слагаемых Пуанкаре. В остальном для этого ньютоновского разделения справедлива критика Маха и Эйнштейна, согласно которой непоследовательно (и в определенном смысле противоречит ньютоновской аксиоме противодействия) принимать динамическое влияние пространства на движение масс без обратного влияния масс на геометрию пространства.

Как показано в § 4, геометрическая теория гравитации Эйнштейна относит инерцию и гравитацию к слагаемому G, описывая поля инерции и гравитации основным метрическим полем $g_{\mu\nu}$ риманова пространства — времени. Маховский принцип индукции инерции гравитационным воздействием космических масс, наоборот, полностью сводит (в виде доктрины Маха — Эйнштейна) влияние инерции к гравитации и исключает инерционные поля из динамики (как явно показано в § 7 и 8). Поэтому доктрина Маха — Эйнштейна относит инерцию и гравитацию к слагаемому P суммы Пуанкаре.

Вытекающий из эквивалентности инерции и тяготения локальный эффект зависимости инертной массы от локальных гравитационных потенциалов, как показано в § 5, одинаков при обоих отнесениях. Глобальные же следствия общей теории относительности, с одной стороны, и доктрины Маха — Эйнштейна, с другой стороны, касающиеся относительности ускорения (см. § 7) и относительности вращения (см. § 8), различны[1].

---

[1] Укажем еще на связь с тетрадной теорией гравитации (Тредер, 1967 г.). «Самоэкранирование» силы тяжести, связанное с зависимостью эффективной гравитационной постоянной от гравитационного потенциала, приводит для свободного движения в гравитационном поле к качественным и количественным результатам, аналогичным следствиям индукции инерции локальным гравитационным потенциалам (см. также Приложение 2).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Индукция инертной массы в релятивистской механике

Без обсуждения трудностей, которые в задаче n тел связаны с запаздыванием по n различным временам, относящимся к разным частицам, а также в пренебрежении подобными трудностями, возникающими из-за того, что при учете эффектов излучения ньютоновская аксиома противодействия формально нарушается, уже в проблеме одного тела видно, что индукция инерции в духе доктрины Маха — Эйнштейна несовместима с лоренц-ковариантной механикой.

Инерционный член в функции Лагранжа для движения одной частицы в специальной теории относительности имеет вид

$$T = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{П1.1}$$

Дополнительная индукция инерции внешним потенциалом требует поэтому появления в функции Лагранжа дополнительного члена

$$+U = \varphi\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{П1.2}$$

где — φ — потенциальная энергия взаимодействия. Тогда, чтобы функция Лагранжа

$$L = T + U = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + \varphi\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{П1.3}$$

была действительно лоренц-ковариантной, φ должна быть скаляром. Поэтому для движения под влиянием центрального скалярного поля (в системе покоя центрального тела) в функции Лагранжа (П1.3) (Пуанкаре, 1906 г.)

$$\varphi \sim \frac{M_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{1}{r} = \frac{M}{r}, \tag{П1.4}$$

что задает динамику частицы в классическом скалярном поле мезонного типа.

Трехмерный канонический импульс записывается в виде

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = \frac{mv^i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{\varphi v^i/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{(m - \varphi/c^2)\,v^i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} =$$

$$= \frac{m^*}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,v^i. \tag{П1.5}$$

Для случая статического поля ($\partial\varphi/\partial t=0$) функция Гамильтона равна интегралу энергии:

$$H = T + U = \frac{mc^2 - \varphi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m^* c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \mathrm{const}. \qquad (\text{П1.6})$$

Уравнения движения в трехмерной форме суть

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{m - \varphi/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) v^l\right] = \partial_l \varphi \sqrt{1 - v^2/c^2}\ , \qquad (\text{П1.7})$$

причем с учетом (П1.6) можно также написать

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt}\left(\frac{m^* v^l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \frac{m^*}{1 - v^2/c^2} \frac{dv^l}{dt} = \partial_l \varphi. \quad (\text{П1.8})$$

(П1.6) и (П1.8) в совокупности дают уравнения движения Минковского

$$\frac{d}{d\tau}(m^* u^\nu) = \partial_\alpha \varphi \eta^{\alpha\nu}. \qquad (\text{П1.9})$$

Таким образом, мы получаем хорошо известный результат: при скалярном взаимодействии в специальной теории относительности эффективная инертная масса m^* зависит от внешнего потенциала. Однако эта зависимость такова, что притяжение связано с уменьшением инерции, т. е. с отрицательной индукцией массы:

$$m^* = m - \varphi/c^2 \to \delta m^* = -\varphi/c^2 < 0. \qquad (\text{П1.10})$$

Столь же хорошо известно, что соответственно этому уравнения вида (П1.8) приводят к неправильному знаку движения перигелия: движение перигелия равно $-\Omega/2$ (ср. § 1).

Функция Лагранжа (П1.3) — единственная лоренц-инвариантная функция Лагранжа для задачи одного тела, имеющая вид

$$L = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, L' \text{ с } \partial L'/\partial v^i = 0. \qquad (\text{П1.11})$$

Но это выражение описывает скалярное (мезонного типа) взаимодействие и не дает требуемой положительной индукции массы. Решающим является то, что в (П1.3) мы не имеем в распоряжении произвольной индукционной постоянной β/c^2 (в специальной теории относительности c — с необходимостью скорость света в пустоте), с помощью которой достигалось бы согласование доктрины Маха — Эйнштейна с динамическим определением массы и эмпирическим значением гравитационной постоянной.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Некоторые следствия доктрины Маха — Эйнштейна в небесной механике, геофизике и космогонии

1. Движение перигелия планет

В гл. 2 мы развили аналитическую механику, в которой нет инерции Галилея — Ньютона, а все инерционные эффекты обусловлены индукционным воздействием потенциала тяготения всех космических масс, как этого требует принцип Маха, усиленный Эйнштейном до доктрины Маха — Эйнштейна. Наше аналитическое представление этой доктрины Маха — Эйнштейна основано на разработанном Риманом обобщении механики Лагранжа на потенциалы, зависящие от скоростей, причем в соответствии с доктриной Маха — Эйнштейна (и на основании обобщенного постулата относительности: см. § 7) мы отбросили ньютоновскую кинетическую энергию в римановой функции Лагранжа.

Было показано (см. § 5), что в механике, основанной на *безынерционной* римановой функции Лагранжа

$$L^* = \sum_{A>B}^{N} \frac{m_A m_B}{r_{AB}} f\left(1 + \frac{3}{2}\frac{v_{AB}^2}{c^2}\right), \qquad (\text{П}2.1)$$

для $N \gg 1$ частиц P_A Вселенной, предполагаемых точечными, выражение

$$m_a^* = \frac{3f}{c^2} m_a \sum_{B \neq a}^{N} \frac{m_B}{r_{aB}} =$$

$$= m_a \frac{f}{c^2}\left(\frac{9}{2}\frac{M}{R} + 3\sum_{\alpha \neq a}^{n} \frac{m_\alpha}{r_{\alpha a}}\right) = \bar{m}_a^* + \Delta m_a^* \qquad (\text{П}2.2)$$

принимает на себя роль инертной массы частицы P_a^*. Здесь m_a, m_B, m_α — тяжелые массы (гравитационные заряды) частиц. Главная часть $\bar{m}_a^*$ этой инертной массы индуцирована средним коллективным гравитационным потенциалом Вселенной

$$\Phi = \frac{3M}{2R} f \qquad (\text{П}2.3)$$

(M и R — соответственно масса и радиус космического облака частиц), который в центре космического облака частиц можно принять одинаковым во всех точках. К этому добавляется малая поправка Δm_a^* к инертной массе, постулированная Махом [15], Фридлендерами [7] и Эйнштейном [5; 6], которая индуцирована гравитационными потенциалами n тел P_α, находящимися в окрестности P_a. Эти поправки меняются от точки к точке:

$$\Delta m_a^* = 3m_a \frac{f}{c^2} \sum_{\alpha}^{n} \frac{m_\alpha}{r_{\alpha a}}. \qquad (\text{П}2.4)$$

Исходя из динамического определения массы Маха [15] и установленного эффективного значения гравитационной постоянной f в ньютоновском законе тяготения, можно вывести, что постоянная тяготения f и гравитационный заряд m_a нормированы таким образом, что в каждый момент времени справедливо

$$m_a^* = m_a\left(1 + 3\frac{f}{c^2}\sum_{\alpha}^{n}\frac{m_\alpha}{r_{\alpha a}}\right), \qquad (\text{П2.5а})$$

$$\overline{m}_a^* = m_a\frac{9f}{2c^2}\frac{M}{R} = m_a \qquad (\text{П2.5б})$$

(см. § 6). Выражение (П2.5а) соответствует зависимости инертной массы от локальных гравитационных потенциалов, выведенной Эйнштейном [5] из принципа эквивалентности и общего принципа относительности.

Первым небесномеханическим следствием механики Римана — Маха являются уравнения для движения пробной частицы P_1 (масса m_1) вокруг центральной массы $m_2=m$ с учетом (П2.5а), выведенные в § 5:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(1 + \frac{3fm}{c^2r}\right)v^i\right] = \frac{\partial}{\partial x^i}\left[\frac{fm}{r}\left(1 + \frac{3v^2}{2c^2}\right)\right], \qquad (\text{П2.6})$$

из которых при $v^2 \ll c^2$, $fm/r \ll c^2$ следует

$$\frac{1}{r} = \frac{fm}{h^2}\left[1 + \varepsilon\cos\varphi\left(1 - \frac{3f^2m^2}{h^2c^2}\right)\right], \qquad (\text{П2.7а})$$

т. е. кеплеровское движение с эйнштейновским поворотом перигелия [4][1]

$$\delta\varphi = 6\pi\frac{f}{c^2}\frac{m}{a(1-e^2)}, \text{ где } a \text{ — большая полуось.} \qquad (\text{П2.7б})$$

2. Вековое изменение сплюснутости Земли

Вековые возмущения получаются из формулы (П2.2), если принять во внимание, что в механике Римана — Маха, согласно § 9, облако частиц является эволюционирующей Вселенной, причем его радиус R возрастает либо параболически по закону

$$R = \sqrt{2/3}\,ct + \text{const}, \qquad (\text{П2.8а})$$

либо гиперболически по закону [2]

$$\frac{4f^2M^2}{k^2}\left(\frac{kr}{fM} + 1\right) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,ct + \text{const}\right)^2. \qquad (\text{П2.8б})$$

[1] Для (П2.7б) существенно, что $\beta=3/2$. Напротив, рассматриваемые в дальнейшем космологические эффекты не зависят от значения β, так как они определяются лишь отношениями между инертными массами.

[2] См. примечание переводчика на с. 98.— *Прим. перев.*

Из (П2.2) тогда следует [в пренебрежении локальной индукцией массы (П2.4)], если

$$\overset{*}{m}_0 = \frac{9}{2} m \frac{f}{c^2} \frac{M}{R_0}, \qquad R_0 = R(t = t_0) \tag{П2.9}$$

означает мгновенное современное значение m^* инертной массы, что закон изменения инертной массы имеет вид

$$m^*(t) = \frac{R_0}{R(t)} \overset{*}{m}_0 = \frac{9}{2} \frac{f}{c^2} \frac{M}{R(t)} m. \tag{П2.10а}$$

Согласно имеющимся моделям Вселенной, (П2.10а) приводит к

$$m^* = m \sqrt{\frac{3}{2} \frac{fM}{c^2 t}} = \overset{*}{m}_0 \frac{t_0}{t} \tag{П2.10б}$$

или

$$m^* \sim \overset{*}{m}_0 (t_0/t)^2. \tag{П2.10в}$$

Если мгновенные значения $\overset{*}{m}_a(A)$ инертных масс определены, согласно Маху [15], в некоторый произвольный момент времени $t=A$, т. е. для произвольного значения $R_A = R(t=A)$, то для каждой частицы P_a инертная масса равна тяжелой:

$$\overset{*}{m}_a(A) = m_a \tag{П2.11а}$$

(см. § 5, 8 и 9). Это означает, что вместо изменения (П2.10а) инертной массы мы измеряем обратное изменение эффективной гравитационной постоянной, определенной в соответствии с ньютоновским законом тяготения:

$$f^*(t) = f_0 \frac{R(t)}{R_0} = \frac{2}{9} \frac{c^2}{M} R(t), \tag{П2.11б}$$

где $f_0 = f$ — современное значение гравитационной постоянной; $R_0 = R(t_0)$. Так как первичным является все же изменение инерции $\overset{*}{m}_a$ тел P_2, то по тому же закону (П2.11б) изменяются и все другие физические константы связи k'. Пусть их современное динамически измеренное значение составляет $k'_0 = k'(t_0)$, тогда их эффективное значение в произвольный момент времени есть (см. § 9)

$$k'(t) = k'_0 R(t)/R_0. \tag{П2.12}$$

Отношение гравитационной постоянной к остальным физическим константам связи остается, таким образом, неизменным:

$$f^*(t)/k'(t) = \mathrm{const}. \tag{П2.13}$$

Итак, из эволюции Вселенной (П2.8) следует, что инерция всех тел уменьшается, и это измеряется динамически как соответствующий рост сил, действующих на тела, причем отношение физических сил друг к другу не изменяется[1]. Вытекающая из принципа Маха

---

[1] О балансе импульса во Вселенной см. § 7. Канонический импульс так связан с импульсом остальной Вселенной, что полный импульс всей Вселенной исчезает.

зависимость (П2.11б) гравитационной постоянной от возраста Вселенной имеет два существенных отличия от гипотезы Дирака, введенной Йорданом [13] также и в геофизику:

1. Из доктрины Маха — Эйнштейна следует рост гравитационной постоянной с возрастом Вселенной (см. § 8 и 9):

$$f^* \sim t \text{ или } f^* \sim t^2,$$

тогда как в гипотезе Дирака делается противоположное высказывание:

$$f^* \sim t^{-1}$$

(см. Йордан [13, 14], Тредер [20]).

2. Из принципа Маха следует, что отношение физических сил друг к другу остается неизменным (см. (П2.13)): $k'/f \sim \mathrm{const}$, тогда как гипотеза Дирака допускает изменение этого отношения: $k'/f^* \sim t^{-1}$.

По пункту 2 изменение гравитационной постоянной, вытекающее из доктрины Маха — Эйнштейна, отличается от подобного изменения в кинематической теории относительности Милна (см. Гекман [9]) и в тетрадной теории Тредера (см. [21, 20]), которые также предсказывают космологический рост гравитационной постоянной. В частности, и в теории Милна справедлив закон

$$f^*_{\text{Милн}} = c^3 t/M,$$

однако все константы связи не растут одновременно по этому же закону (см. § 10).

Из этих замечаний прежде всего следует, что из принципа Маха и доктрины Маха — Эйнштейна космологические эффекты естественно вытекают только для таких процессов, в которых играет роль инерция. Например, средний радиус Земли не зависит от инерции. Сжатие земного вещества зависит только от отношения гравитационной постоянной к постоянным, характеризующим вещество, а последние в конечном счете определяются константами связи k'. Поскольку мы занимаемся только механикой точек, предположим просто несжимаемость вещества как следствие сил отталкивания. Отношение этих сил отталкивания к силе тяготения тогда не меняется со временем. Поэтому внутренняя структура земного вещества по существу не зависит от состояния Вселенной.

Напротив, инерционные эффекты определяют фигуру Земли: они являются причиной ее сплюснутости. Поскольку, согласно (П2.10а), инертные массы и вместе с ними силы инерции, действующие на частицы, из которых состоит Земля, уменьшаются с расширением Вселенной, сплюснутость Земли (и всех других небесных тел) α при неизменном радиусе и постоянной угловой скорости вращения Ω уменьшается с течением времени (см. § 8).

Сплюснутость α Земли определяется отношением центробежной силы

$$\sim m^* \rho^2 \Omega^2 \tag{П2.14а}$$

к гравитационной силе

$$\sim m f_0/\rho^2 = m_0 f_0/\rho^2 \tag{П2.14б}$$

и, следовательно, задается выражением

$$\alpha = \text{const}\,\frac{\Omega^2\rho^2}{f_0}\,\frac{m^*}{m_0} = \text{const}\,\frac{\Omega^2\rho^3}{f^*}. \qquad (\text{П}2.15\text{а})$$

В (П2.15а) $f^* = (m_0/m^*) f_0$ — мгновенное эффективное значение гравитационной постоянной. Если гравитационная постоянная уменьшается, то уменьшается и α в предположении, что

$$\rho = \text{const}, \qquad \Omega = \text{const}. \qquad (\text{П}2.15\text{б})$$

Количественная оценка эффекта особенно проста, если исходить из параболически расширяющейся Вселенной, так как при этом возраст Вселенной t просто равен обратной «постоянной Хаббла» H (см. Гекман [9], Эйнштейн [5]):

$$t = R/\dot{R} = H^{-1}. \qquad (\text{П}2.16)^1$$

Для возраста Вселенной в настоящий момент, вычисленного как обратная «постоянная Хаббла», по порядку величины имеем

$$2\cdot 10^{10}\ \text{лет} \geqslant t_0 \geqslant 10^{10}\ \text{лет}; \quad t_0 = H_0^{-1}, \qquad (\text{П}2.17\text{а})$$

где $H_0 = 1/t_0$ — современное значение постоянной Хаббла. Вместе с тем с учетом (П2.11а) для временных приращений приближенно справедливо

$$f^*(t_0 + \Delta t) = f_0(1 + H_0\Delta t), \qquad (\text{П}2.17\text{б})$$

а с учетом (П2.17б) из (П2.15а) следует

$$\alpha(t_0 + \Delta t) = \text{const}\,\frac{\rho^3\Omega^2}{f_0}(1 - H_0\Delta t) = \alpha_0(1 - H_0\Delta t). \quad (\text{П}2.18\text{а})$$

Отсюда, в частности, получаем, что 10^8 лет назад сплюснутость Земли была примерно на 1% больше, чем теперь:

$$\alpha(t_0 + H_0\cdot 10^8\ \text{лет}) \approx \alpha_0(1 + 10^{-2}). \qquad (\text{П}2.18\text{б})$$

Согласно Манку и Макдональду [16], это и в самом деле эмпирически подтверждается.

Конкурирующим объяснением эмпирически обнаруженного уменьшения сплюснутости Земли α в ходе ее развития является

---

[1] В гиперболической модели возраст Вселенной несколько больше обратной «постоянной Хаббла», и расширение Вселенной раньше происходило медленнее, чем теперь. Поэтому все рассматриваемые эффекты, если они относятся к далекому прошлому, несколько меньше, чем в параболической модели. Установление величины H_0 опирается на эффект Доплера в предположении справедливости релятивистской оптики (см. § 9). В рамках нашей механики нет никаких определенных высказываний об оптических явлениях.

старая теория Дарвина (см. [2, 3]) приливного торможения [1], согласно которой вместо (П2.15б) справедливо

$$\Omega = \Omega(t), \quad \dot{\Omega}(t) < 0, \tag{П2.19а}$$

и при этом

$$\alpha(t + \Delta t) = \mathrm{const}\,\frac{\rho^3\Omega^2}{f_0}\left[1 + 2\left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)_0 \Delta t\right]. \tag{П2.19б}$$

Таким образом, по теории Дарвина угловая скорость Ω Земли постоянно уменьшается вследствие приливного трения, и поэтому длительность суток τ (измеренная по инерциальному, или эфемеридному, времени) постоянно возрастает:

$$\tau(t_0 + \Delta t) = \tau_0\left(1 + \frac{\dot{\tau}}{\tau_0}\Delta t\right) = \tau_0\left[1 - \left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)_0 \Delta t\right]. \tag{П2.19в}$$

Уже Кельвин возражал против утверждения, что можно обнаружить влияние приливного трения. Джеффрис [12] показал, что приливное трение по существу зависит только от контура мелководных морей и поэтому, возможно, неизмеримо мало. Хольмберг (см. Хойл [10]) отметил, что резонансы Кельвина в атмосфере Земли как раз компенсировали бы возможное тормозящее действие приливного трения, так как кельвиновские резонансы вращения Земли стабилизировали бы длительность суток. Согласно Манку и Макдональду [16], вне сомнения приливное трение слишком мало, чтобы объяснить более чем 1/3 палеогеофизических данных. Возможно, их влиянием вообще можно пренебречь.

Принцип Маха дает сам по себе, независимо от возможного дополнительного влияния приливного трения, эффект того порядка величины, который требуется для объяснения геофизических данных; к этому эффекту, может быть, добавляется и некоторый вклад от приливного трения.

3. Вековое ускорение Луны

Вывод о реальности приливного торможения вращения Земли был сделан, в частности, на основе астрономических данных — из ускорения движения Луны, которое, по Адамсу, присутствует во всех теориях Луны в небесной механике. Подобное остаточное ускорение существует, согласно де Ситтеру и Спенсер-Джонсу [19], и при движении планет. Относительное ускорение $\dot{\omega}/\omega$, где ω — орбитальная угловая скорость в данный момент, одинаково для Луны и планет. По Делоне и Ньюкомбу, это ускорение кажущееся и объясняется как следствие изменения длительности суток, т. е. астрономической меры времени; причиной этого изменения должно быть исследованное Дарвином [3] приливное торможение (см. Пуанкаре [17]).

Принципиальная трудность здесь заключается в том, что это приливное торможение настолько сильно зависит от формы поверхности Земли (в частности, от форм мелководных морей), что вряд

[1] В принципе указанная уже Кантом (1754 г.) и Майером (J. R. Mayer, 1848 г.).

ли его можно рассчитать колличественно, и поэтому, наоборот, ускорение Луны и планет должно служить доказательством эффекта приливного торможения [1].

Напротив, из доктрины Маха — Эйнштейна (см. гл. 2) следует реальное ускорение Луны и планет вследствие уменьшения их инерции или, если инертная масса по определению принята постоянной, вследствие увеличения эффективной гравитационной постоянной f^*. С учетом (П2.17б), если полагать инертную массу Луны постоянной, второй закон Кеплера имеет вид

$$r^2\omega = h = \text{const}, \tag{П2.20}$$

а третий закон Кеплера

$$r^3\omega^2 = f^*\mathfrak{M}, \tag{П2.21а}$$

где $\mathfrak{M}$ — тяжелая масса центрального тела, т. е. Земли; r — радиус орбиты Луны вокруг Земли; ω — орбитальная угловая скорость Луны. (П2.20) представляет собой момент импульса, а (П2.21а) соответствует закону вириала

$$mv^2 = f^*m\mathfrak{M}/r, \tag{П2.21б}$$

т. е.

$$v^2 = f^*\mathfrak{M}/r. \tag{П2.21в}$$

Подстановкой (П2.20) в (П2.21а) получаем

$$\omega = f^{*2}\frac{\mathfrak{M}^2}{h^3} = \frac{f_0^2\mathfrak{M}^2}{h^3}\,\frac{R^2(t)}{R_0^2}. \tag{П2.22а}$$

(П2.22а) означает, что орбитальная частота ω растет как квадрат эффективной гравитационной постоянной f^*:

$$\Delta\omega/\omega = 2\Delta f^*/f^* = 2\Delta R/R. \tag{П2.22б}$$

Пользуясь снова приближенным подходом (П2.17б) получаем

$$\omega = f_0^2\frac{\mathfrak{M}^2}{h^3}\left[1 + 2\left(\frac{\dot R}{R}\right)_0\Delta t\right]. \tag{П2.23}$$

Если подставим сюда (П2.17а), то найдем формулу для ускорения:

$$\omega = f_0^2\frac{\mathfrak{M}^2}{h^3}(1 + 2H_0\Delta t) = \omega_0(1 + 2H_0\Delta t), \tag{П2.24а}$$

т. е.

$$\omega = \omega_0(1 + 2\Delta t/t_0). \tag{П2.24б}$$

Значение (П2.24б) соответствует вычисленному в теории Луны по модели Спенсер-Джонса [19], согласно которой ускорение заключено в пределах [2] $1\cdot10^{-10}$ *год*$^{-1} \leqslant (\dot\omega/\omega)_0 < 2\cdot10^{-10}$ *год*$^{-1}$.

---

[1] По этому вопросу см. P. Brosche, J. Sündermann (Mitt. d. Astron. Recheninst. Heidelberg, A 42, 1971). В зависимости от фактического хода приливов приливное трение может вызывать и ускорение вращения! Гармонические приливы не дали бы никакого динамического эффекта.

[2] По Фрикке, значение ускорения может быть еще несколько больше (см. Йордан [14]).

Мы хотим вывести этот результат подробнее и показать, как связано действительное ускорение с гипотетическим кажущимся ускорением, стимулированным замедлением вращения Земли.

В пренебрежении всеми локальными инерционными эффектами уравнения движения для задачи N тел в механике Римана — Маха имеют вид (см. § 7)

$$\frac{d}{dt}\left(\overset{*}{m}_a \dot{x}_a^i\right) = \frac{d}{dt}\left[m_a \frac{R_0}{R(t)} \dot{x}_a^i\right] = f_0 m_a \sum_{b \neq a}^{n} \frac{m_b x_{ab}^i}{r_{ab}^3}. \qquad (\text{П2.25а})$$

Здесь m_a, m_b — снова тяжелые массы. (В строгие уравнения движения входит еще зависимость инертной массы $\overset{*}{m}_a$ от гравитационного потенциала масс m_b.) Выпишем явно производную по времени в (П2.25а):

$$-m_a \frac{R_0}{R^2} \dot{R} \dot{x}_a^i + m_a \frac{R_0}{R} \ddot{x}_a^i. \qquad (\text{П2.25б})$$

В этом выражении член

$$-m_a \frac{R_0}{R^2} \dot{R} \dot{x}_a^i \approx -m_a \frac{R_0}{R} H_0 v_a^i = -\overset{*}{m}_a H_0 v_a^i \qquad (\text{П2.25в})$$

для кругового движения Луны (или планет) пренебрежимо мал. Если положить приближенно

$$v_a = r\omega, \qquad (\text{П2.26а})$$

то (П2.25а) принимает вид

$$-m^* r\omega H_0 + m^* r\omega^2 = m f_0 \mathfrak{M} r^{-2}. \qquad (\text{П2.26б})$$

Таким образом, в (П2.25б) в линейном приближении можно опустить первый член. Поэтому на основании маховского определения инертной массы также можно записать (П2 25а) в виде

$$\dot{v}_a^i = f^* \sum_{b \neq a}^{n} \frac{m_b}{r_{ab}^3} x_{ab}^i, \qquad (\text{П2 27})$$

где теперь f^* — эффективная гравитационная постоянная (П2.11б). Если $f^*(0) = f_0$ — значение этой постоянной в некоторый момент $t' = 0 = t - t_0$, то для периода «астрономической истории» t' найдем

$$f^* = f_0 (1 + H_0 t'),$$

и уравнения движения (П2.27) превращаются в

$$\ddot{x}_a^i = f_0 (1 + H_0 t') \sum_{b \neq a}^{n} \frac{m_b}{r_{ab}^3} x_{ab}^i. \qquad (\text{П2.28})$$

Модифицируя идею Йордана [14], произведем конформное преобразование пространственно-временных координат, которое переводит уравнения Ньютона с переменной гравитационной константой в обыкновенные ньютоновские уравнения. Положив

$$\bar{x}^i = (1 + H_0 t') x^i, \qquad (\text{П2.29а})$$

$$\bar{t} = (1 + H_0 t') t', \qquad (\text{П2.29б})$$

найдем в линейном приближении

$$d\bar{t} = dt'\,(1 + 2H_0 t'), \qquad (\text{П}2.30\text{а})$$

$$\frac{d\bar{x}^i}{d\bar{t}} = \frac{dt}{d\bar{t}} = \frac{d\bar{x}^i}{dt} = (1 - H_0 t')\,\frac{dx^i}{dt} + H_0 x^i \qquad (\text{П}2.30\text{б})$$

и, наконец,

$$\frac{d^2\bar{x}^i}{d\bar{t}^2} = \frac{dt}{d\bar{t}}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{x}^i}{d\bar{t}}\right) = (1 - 3H_0 t')\,\frac{d^2x^i}{dt^2}. \qquad (\text{П}2.30\text{в})$$

Конформно преобразованные уравнения движения (П2.27) при этом принимают вид

$$\frac{d^2\bar{x}^i}{d\bar{t}^2} = (1 - 3H_0 t')\,\frac{d^2x^i}{dt^2} = f_0 \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}^3}\, x_{ab}^i\,(1 - 2H_0 t') =$$

$$= f_0 \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{\bar{r}_{ab}^3}\, \bar{x}_{ab}^i. \qquad (\text{П}2.31)$$

(П2.31) — это ньютоновские уравнения движения, из которых не следует никакого векового ускорения. Однако в соответствии с (П2.29б) изменяется единица $\Delta\bar{t}$ преобразованного времени по отношению к единице Δt инерциального времени:

$$\Delta\bar{t} = \Delta t\,(1 + 2H_0 t') = \Delta t'\left(1 + 2 \cdot 10^{-10}\,\frac{t'}{\textit{год}}\right) \qquad (\text{П}2.32)$$

(это указываемая в литературе величина удлинения суток, согласно Гутенбергу [8] и Спенсер-Джонсу [19]).

Таким образом, мы имеем два альтернативных объяснения·

1. Исходим из того, что астрономическая мера времени — насколько это существенно для векового ускорения — равна инерциальной мере времени (которая определяется, скажем, атомными часами). Тогда вместо ньютоновских уравнений движения справедливы упрощенные маховские уравнения движения, и эти уравнения дают, согласно (П2.24а), вековое ускорение.

   Небесномеханическое выражение для векового ускорения получается в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t' + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)_0 \omega t^2 = \varphi_0 + \omega_0 t' + H_0\omega_0 t'^2. \qquad (\text{П}2.33\text{а})$$

   При этом

$$b = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)_0 \omega_0 = H_0\omega_0 \qquad (\text{П}2.33\text{б})$$

   коэффициент векового ускорения.

2. Принимаем, что справедливы ньютоновские уравнения движения без всяких поправок. Тогда вековое ускорение полу·

чается из-за того, что астрономическая мера времени (П2.32) отклоняется от инерциальной меры времени. Если Ω — угловая скорость вращения Земли, то вековое ускорение Луны задается выражением

$$\varphi = \varphi_0 + n\Omega_0 t' + \frac{n}{2}\left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\right)_0 \Omega_0 t'^2 = \varphi_0 + n\Omega_0 t' + bt'^2, \quad (\text{П}2.34)$$

где n — «среднее движение» Луны (отнесенное к единице времени; Пуанкаре [17]).

4. Изменение расстояния Земля — Луна

Из выведенного в предыдущем параграфе реального векового ускорения движения Луны в силу закона сохранения момента импульса

$$r^2\omega = h = \text{const}$$

следует вековое уменьшение расстояния Земля — Луна:

$$\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -H_0. \quad (\text{П}2.35\text{а})$$

Это означает, что в настоящее время за год r уменьшается на величину порядка $(0{,}5 \div 1{,}0) \cdot 10^{-10}\, r$:

$$2\ \textit{см/год} \leqslant -\Delta r/\Delta t < 4\ \textit{см/год}. \quad (\text{П}2.35\text{б})$$

Гипотеза Дирака потребовала бы, наоборот, возрастания r на величину такого же порядка:

$$2\ \textit{см/год} < \Delta r/\Delta t < 4\ \textit{см/год}. \quad (\text{П}2.36)$$

Дарвиновское приливное трение также привело бы к увеличению расстояния r, которое, однако, пренебрежимо мало по сравнению с (П2.36), так как оно задается формулой

$$\frac{\Delta r}{r} = -2\frac{\Theta\Delta\Omega}{\pi r^2\omega}, \quad (\text{П}2.37)$$

где Θ — момент инерции Земли; m — масса Луны (Пуанкаре [17]).

В принципе вековое изменение расстояния (П2.35а) или (П2.36) [или соответственно приближенное постоянство расстояния Земля — Луна по (П2.37)] может быть проверено с помощью лазерных отражателей, если предполагать возможность многолетних исследований, которые выделят периодические и случайные колебания. Таким образом, можно будет сделать выбор между доктриной Маха — Эйнштейна, гипотезой Дирака и дарвиновским приливным трением на основе эксперимента.

Тем самым одну из важнейших космологических и общефизических проблем — проблему справедливости доктрины Маха — Эйнштейна — можно будет разрешить опытным путем.

Значение ускорения движения Луны известно не очень точно. Соответствующее — в случае справедливости принципа Маха — фиктивное удлинение суток составляет по Спенсер-Джонсу [19]

$$\dot{T}/T \approx (1 \div 2) \cdot 10^{-10}\ \textit{год}^{-1},$$

а по Фрикке даже

$$\dot{T}/T > 2 \cdot 10^{-10}\ \textit{год}^{-1},$$

при этом в принципе возможно, что к реальному ускорению, вытекающему из принципа Маха, добавляется некоторое меньшее ускорение, соответствующее удлинению суток из-за приливного трения. По Манку [16], этот вклад мог бы достигать одной трети полного ускорения.

Если бы мы, однако, приняли, что удлинения суток вообще нет, то, согласно (П2.24а), ускорение движения Луны определяло бы сразу однозначно современное значение «постоянной Хаббла» H_0 и — если исходить из линейной модели Вселенной — также сразу мировое время (возраст Вселенной)[1].

Следствия вытекающего из (П2.11а) векового изменения эффективной гравитационной постоянной

$$0.5 \cdot 10^{-10}\ \textit{год}^{-1} \leqslant \Delta f^*/f^* < 1{,}0 \cdot 10^{-10}\ \textit{год}^{-1}$$

для небесной механики совместимы с ограничением сверху на вековое изменение f, которое получено Шапиро и др. ([18], 1971) из радиоастрономических измерений и обнаруживается при исследовании движения внутренних планет. Предполагая, что это движе-

---

[1] Исследования Йордана [14] и Дикке [1] по ускорению движения Луны, проведенные на основе дираковской гипотезы уменьшения гравитационной постоянной с возрастом Вселенной, в отличие от данных в тексте довольно софистичны: при уменьшении гравитационной постоянной естественно получается замедление (торможение) движения Луны согласно

$$\dot{\omega}/\omega = 2\dot{f}/f \approx -(0{,}5 \div 1{,}0) \cdot 10^{-10}\ \textit{год}^{-1}.$$

Чтобы при этом прийти к фактическому ускорению Луны, Йордан и Дикке принимают, что это замедление перекомпенсируется удлинением земных суток, которое приводит к мнимому ускорению. Это удлинение земных суток получается из-за постулированного Йорданом сильного увеличения радиуса Земли:

$$\dot{\rho}/\rho \geqslant 1 \cdot 10^{-10}\ \textit{год}^{-1}.$$

По Йордану, такой результат есть следствие того, что — как говорилось выше в тексте — по гипотезе Дирака гравитационная постоянная уменьшается и по отношению ко всем другим константам связи, и, таким образом, тело Земли «разгружается».

Формула Йордана (см. [14]) для ускорения движения Луны объясняет это ускорение как малую разность между реальным замедлением вследствие уменьшения гравитационной постоянной

$$-\dot{f}/f \approx (0{,}5 \div 1{,}0) \cdot 10^{-10}\ \textit{год}^{-1}.$$

и несколько бóльшим кажущимся ускорением вследствие расширения Земли

$$\dot{\Omega}/\Omega = 2\dot{\rho}/\rho.$$

ние определяется статическим линейным элементом Шварцшильда, Шапиро нашел, что[1]

$$\dot{f}/f < (3 \div 4) \cdot 10^{-10}\ \textit{год}^{-1}.$$

Отметим еще, что приближенные уравнения движения (П2.25а) будут несправедливы, если вследствие расширения Вселенной

$$f^* \to \infty \text{ при } R \to \infty,$$

так как тогда инерционные эффекты, индуцированные локальными гравитационными полями в смысле, указанном Фридлендерами и Эйнштейном, превосходят эффекты коллективного влияния Вселенной (см. § 8).

5. Космогония. Теорема Пуанкаре

Малые небесномеханические и геофизические эффекты, индуцированные расширением Вселенной в соответствии с принципом Маха, становятся эффектами порядка единицы, если рассматривае-

---

[1] Утверждаемое в последнее время палеонтологами (Уэллс, 1966 г.; Броше и Зюндерман, 1971 г.) вековое уменьшение числа дней N земного года T при постоянной длительности суток $\tau=\tau_0$ получается из векового ускорения орбитального движения Земли согласно условию

$$(\dot{\omega}/\omega)_{\text{Земля}} = 2H_0.$$

Таким образом, длительность года приближенно равна

$$T = T_0\,(1-2H_0\,\Delta t) > T_0 \text{ для } \Delta t<0.$$

Здесь T_0 — современная длительность земного года. Поэтому при современной длительности земного дня $\tau=\tau_0$ и при $N_0\tau_0=T_0$ имеем

$$N\tau_0 = T = T_0\,(1-2H_0\,\Delta t),$$

т. е. число дней N в году T изменяется согласно формуле

$$N = N_0\,(1-2H_0\,\Delta t) < N \text{ для } \Delta t<0.$$

Принимаемое Уэллсом и другими уменьшение скорости вращения Земли $\dot{\Omega}/\Omega \approx -2H_0$ дает следующее выражение для длительности суток:

$$\tau = \tau_0(1+2H_0\,\Delta t) < \tau_0 \text{ для } \Delta t<0.$$

Уэллс принимает длительность земного года постоянной, равной T_0; при этом

$$Nt = N\tau_0\,(1+2H_0\,\Delta t) = T_0,$$

откуда для числа дней в году снова получается то же выражение:

$$N = N_0\,(1-2H_0\,\Delta t) < N_0 \text{ для } \Delta t<0.$$

Следовательно, палеонтологические данные объясняются доктриной Маха — Эйнштейна таким же образом, как и гипотетически принятым приливным торможением Земли, потому что важно здесь только отношение N длительности года T к длительности суток τ. Фактический рост скорости обращения Земли с возрастом Земли был впервые отмечен в работах фон Бубнова (S. v. Bubnoff, 1949, 1954 гг.).

мые отрезки времени становятся сравнимыми с возрастом Вселенной. С возрастом Вселенной T сравним возраст Солнечной системы[1]. Это означает, что в момент образования Солнечной системы инертная масса каждой частицы P_A, определенная согласно (П2.2), была примерно вдвое больше, чем в настоящее время, или, что то же самое, эффективное значение константы связи было в два раза меньше, чем теперь:

$$f^*(t_0/2) \approx f_0/2.$$

Такое увеличение инерции приводит, естественно, к космогоническим следствиям; в частности, при данном радиусе ρ конечного тела (или облака частиц) и данной угловой скорости Ω момент импульса $m^*\rho^2\Omega$ вдвое больше, чем вычисленный по Ньютону:

$$m^*\rho^2\Omega = \frac{9}{2}\,\frac{mf_0}{c^2}\,\frac{M}{R}\,\rho^2\Omega \quad (m = m_0 \text{ — тяжелая масса}).$$

Но, поскольку момент импульса играет решающую роль во всех космогонических теориях, этот факт имеет космогонические следствия.

В магнитогидродинамической теории возникновения Солнечной системы, выдвинутой Альвеном, роль ранней эпохи играет эпоха образования тонкого диска из солнечного вещества, окружавшего тогдашнее Солнце; из этого диска в результате магнитогидродинамических процессов, исследованных Альвеном, образовались планеты. Этот диск по существу несет на себе весь момент импульса первичной Солнечной системы, точнее, такую его часть, что теперь орбитальный момент импульса планет составляет 98% полного момента импульса.

Однако оказывается, что полного орбитального момента импульса планет (вместе с солнечным) недостаточно, чтобы в соответствии с теорией фигур равновесия вращающихся жидкостей было допустимо образование первичного диска, а именно: полный момент импульса раннего Солнца должен был бы быть примерно в 8—10 раз больше современного момента импульса Солнечной системы.

Согласно Хойлу [10], который исследовал эту трудность, разница частично объясняется тем, что современная планетная система содержит лишь некоторую часть первичного диска из солнечного вещества, а потому несет на себе только часть его момента импульса. Если полная масса планет составляет сейчас $\mathfrak{M}_0$, то масса первичного диска должна была составлять $\mathfrak{M} \approx 10\,\mathfrak{M}_0$.

Но, далее, надо потребовать, чтобы первоначальный химический состав диска совпадал с составом солнечного вещества, причем практически исключено, чтобы во время образования планетной системы из Солнечной системы были выброшены какие-либо элементы, кроме водорода. Это требование приводит к трудностям для приведенной выше оценки. Только если, как и Хойл, принять, что внешние планеты Уран и Нептун не содержат заметной доли водорода, получится возможный дефицит массы

$$\Delta\mathfrak{M} \approx 7\mathfrak{M}_0.$$

---

[1] Возраст Солнечной системы составляет около $5 \cdot 10^9$ лет. Возраст Вселенной, возможно, не превышает $10 \cdot 10^9$ лет.

Однако, по-видимому, Уран и Нептун содержат значительное количество водорода, так что доля остальных элементов в планетной системе сильно снижается. Приходим к результату, что на самом деле вместо указанных соотношений дефицит массы составляет скорее $\Delta\mathfrak{M} > 4\mathfrak{M}_c$, и поэтому масса может составить лишь

$$\mathfrak{M} > 5\mathfrak{M}_0,$$

а этого слишком мало для образования диска (особенно если потребовать. как это необходимо для космогонии, чтобы планетный диск образовался уже в эпоху, когда радиус первичного Солнца был во много раз больше современного солнечного радиуса). Трудности с балансом массы и момента импульса разрешаются легче, если заметить, что в соответствии с принципом Маха угловой момент Солнечной системы в допланетные времена был примерно в

$$R(t_0)/R(t_0/2) \approx 2 \text{ раза}$$

больше, чем вычисленный по Ньютону. Поэтому, чтобы получить требуемый первичный момент импульса, нужен дефицит массы

$$\Delta\mathfrak{M} \approx 4\mathfrak{M}_0.$$

Очевидно, что маховский множитель $R(t_0)/R(t)$ является существенным для всех космогонических проблем, в которых играют роль силы инерции вращательного движения. В частности, в соответствии с теоремой Пуанкаре (Пуанкаре [17], Джинс [11]) для устойчивости вращения теперь имеем

$$\frac{R(t_0)}{R(t)}\,\Omega^2 < 2\pi f_0\bar{\sigma} \quad (\bar{\sigma} \text{ — средняя плотность массы}) \qquad (\text{П2.38а})$$

или, вводя эффективную гравитационную постоянную,

$$\Omega^2 < 2\pi f^*\bar{\sigma}. \qquad (\text{П2.38б})$$

Таким образом, $R(t_0)/R(t)$ входит и в эти конкретные условия устойчивости для вращающихся небесных тел, в определенном смысле увеличивая устойчивость с увеличением возраста Вселенной t. (Наши соображения по космогонии Альвена являются частным следствием этой модификации теоремы Пуанкаре.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Предисловие к русскому изданию

1. **Синг Дж. Л.** Общая теория относительности. Пер. с англ. Под ред. А. З. Петрова. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
2. **Станюкович К. П.** Гравитационное поле и элементарные частицы. М., «Наука», 1965.
3. **Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.** Релятивистская астрофизика. М., «Наука», 1967.
4. **Зайцев Н. А., Колесников С. М.** Самосогласованное взаимодействие скалярного и тензорного гравитационных полей. — В сб.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. Вып. 4. М., Атомиздат, 1970, с. 24.
5. **Станюкович К. П.** «Докл. АН СССР», 1958, т. 119, № 4, с. 686; Бюлл. ВАГО, 1959, № 24.

Главы 1, 2

1. **Abraham M.** Theorie der Elektrizität, Bd. II, 4. Aufl., Leipzig, 1920. (**Абрагам М.** Теория электричества. Пер. с нем. Под ред. Т. П. Кравца. Т. 2. Изд. 2-е Л.—М., ГОНТИ, 1939.)
2. **Boltzmann L.** Prinzipe der Mechanik, Bd. II. Leipzig, 1904.
3. **Bondy H.** Cosmology Cambridge, 1952.
4. **Chin H. Y., Hoffman W. F.** (ed). Gravitation and Relativity. N. Y.—Amsterdam, 1964. (Гравитация и относительность. Ред. Х. Цзю. В. Гоффман. Пер. с англ. Под ред. А. З. Петрова. М., «Мир», 1965.) (Сравните статьи Дикке, Хьюза и Уилера.)
5. **Clausius R.** Mechanische Wärmetheorie. Bd. II, 2. Aufl., 1879.
6. **Эйнштейн А.** Собранис научных трудов. Т. I—IV. М., «Наука», 1965—1967.
7. **Einstein A** Über spezielle and allgemeine Relativitätstheorie. 21. Aufl. Berlin, Oxford, Braunschweig, 1969. (**Эйнштейн А.** О специальной и общей теории относительности (общедоступное изложение). Пер. с 5-го нем. издания. Под ред. А. П. Афанасьева. Петроград, Научное книгоиздательство, 1923.)
8. **Einstein A.** Grundzüge der Relativitätstheorie. 5. Aufl. Berlin, Oxford, Braunschweig, 1969.
9. **Einstein A.** Helle Zeit, Dunkle Zeit. Ed. C. Seelig. Zürich, 1956.

10. **Föppl A.** Vorlesungen über technische Mechanik. 2. Aufl., Bd. I u. IV. Leipzig, 1900 und 1901.
11. **Friedländer B. u. J.** Absolute oder relative Bewegung. Berlin, 1896.
12. **Heckmann O.** Theorien der Kosmologie. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, N. Y., 1968
13. **Helmholtz H. V.** Gesammelte Abhandlungen. Bd. I. Leipzig, 1882.
14. **Hertz H.** Die Prinzipien der Mechanik. Leipzig, 1894. (**Герц Г. Р.** Принципы механики, изложенные в новой связи. Пер. с нем. Общ. ред. И. И. Артоболевского. М., Изд-во АН СССР, 1959.)
15. **Kottler F.** Gravitation und Relativitätstheorie. — Encykl. der math. Wiss. Bd. VI, N 2, Leipzig, 1920.
16. **Lange L.** Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffes. Leipzig, 1886
17. **de Laplace P. S.** Mécanique céleste, Liv. X. — Oeuvres, Bd. IV. Paris, 1880.
18. **Laue M. V.** Die Relativitätstheorie. Bd. II, 3. Aufl. Braunschweig, 1953.
19. **Lenard P.** Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation. 3. Aufl. Leipzig, 1921. [**Ленар П.** О принципе относительности, эфире, тяготении. (Критика теории относительности.) Пер. с 3-го нем. изд. Под ред. А. К. Тимирязева. М., Гос. изд., 1922.]
20. **Lorentz H. A., Einstein A., Minkowski H., Weyl H.** Das Relativitätsprinzip. Leipzig, 1922. [**Принцип** относительности. Сборник работ классиков релятивизма. Под ред. В. К. Фредерикса. Д. Д. Иваненко. М.—Л., ОНТИ, 1935. (Авт.: Г. А. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Г. Минковский)].
21. **Mach E.** Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. 2. Aufl. Leipzig, 1909. (**Мах Э.** Принцип сохранения работы. История и корень его. Пер. с нем. Под ред. Н. А. Гезехуса. Спб., 1909.)
22. **Mach E.** Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 9. Aufl. Leipzig, 1933. (**Мах Э.** Механика. Историко-критический очерк ее развития. Пер. с 6-го нем. изд. Под ред. Н. А. Гезехуса. Спб., 1909.)
23. **Mach E.** Die Prinzipien der physikalischen Optik. Leipzig, 1921.
24. **Milne E. A.** Kinematic Relativity. Oxford, 1948.
25. **Neumann C.** Die Prinzipien der Elektrodynamik. Tübingen, 1868.
26. **Neumann C.** Über die Prinzipien der Galilei-Newtonischen Theorie. Leipzig, 1870.
27. **Neumann C.** Allgemeine Untersuchungen über die Newtonsche Theorie der Fernwirkung. Leipzig, 1896.
28. **Newton I.** Philosophia Naturalis Principia Mathematica 1687.— Opera Tom. II et III. London, 1779 und 1782. (**Ньютон И.** Математические начала натуральной философии. Пер. с лат. Под ред. А. Н. Крылова. Т. II, III. Пг., 1916.)
29. **Oppenheim S.** Kritik des Newtonschen Gravitationsgesetzes. — Encykl. der math. Wiss., Bd. V, N 2, Leipzig, 1921.
30. **Pauli W.** Relativitätstheorie. — Encykl. der math. Wiss., Bd. V, N 2, Leipzig, 1921
31. **Poincaré H.** Elektrizität und Optik. Bd. II. Berlin, 1892.
32. **Poincaré H.** Wissenschaft und Hypothese. 3. Aufl. Leipzig, 1912. (**Пуанкаре А.** Наука и гипотеза. Пер. с франц. Под ред. А. Г. Генкеля Спб., 1906.)

33. **Poincaré H.** Wissenschaft und Methode. Leipzig, 1914. (**Пуанкаре А.** Наука и метод. Пер. с франц. Под ред. Н. А. Гезехуса. Спб., 1910.)
34. **Reiff R., Sommerfeld A.** Standpunkt der Fernwirkung. — Encykl. der math. Wiss., Bd. V. N 2, Leipzig, 1905.
35. **Riemann B.** Schwere, Elektrizität und Magnetismus. 2. Aufl. Ed. K. Hattendorff. Hannover, 1880. (**Риман Б.** Сочинения. Пер. с нем. Под ред. О. Л. Гончарова. М.—Л., Гостехиздат, 1948).
36. **Ritz W.** Gesammelte Werke. Paris, 1911.
37. **Thirring H.** Die Idee der Relativitätstheorie. Berlin, 1921.
38. **Tisserand F.** Mécanique céleste. Bd. IV. Paris, 1896.
39. **Treder H-J.** (ed.) Entstehung, Entwicklung und Perspektiven der Einsteinschen Gravitationstheorie. Berlin, 1966. (См. статьи Хёнля и Иваненко.)
40. **Treder H.-J.** Die ersten Kritiker der allgemeinen Relativitätsprinzip. Moskow, 1971.
41. **Weber W.** Gesammelte Werke. Bd. III u. IV. Leipzig, 1890 und 1892
42. **Weyl H.** Raum, Zeit, Matherie. 5. Aufl. Berlin, 1923.
43. **Weyl H.** Gesammelte Abhandlungen. Bd. II. Berlin, Heidelberg. N. Y., 1968.
44. **Whittaker E.** History of the Theories of Aether and Electricity. Bd. I und Bd. II. 2. Aufl. London, Edinburgh, 1951 und 1953
45. **Whittaker E.** From Euclid to Eddington. N. Y., 1958.
46. **Zöllner F.** Die Natur der Kometen. Leipzig, 1872.
47. **Zöllner F.** Prinzipien der elektrodynamischen Theorie der Matherie. Leipzig, 1876.
48. **Nordmann Ch.** Einstein und das Weltall. Stuttgart, 1922. (Находится частично на точке зрения гравитационной теории Пенлеве.)

Приложения

1. **Chiu H. Y., Hoffmann W.** Gravitation and Relativity. N. Y., Amsterdam, 1964. (Гравитация и относительность. Ред. Х. Цзю, В. Гоффман. Пер. с англ. Под ред. А. З. Петрова. М., «Мир», 1965.)
2. **Darwin G. H., Hough S. S.** Bewegung der Hydrosphäre. — Encykl. der math. Wiss. Bd. VI, 1.6, Leipzig, 1900.
3. **Darwin G.** Ebbe und Flut. 2. Aufl. Leipzig, 1911.
4. **Einstein A.** Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. Leipzig, 1916.
5. **Einstein A.** Grundzüge der Relativitätstheorie. 5. Aufl. Berlin, Oxford, Braunschweig, 1960.
6. **Эйнштейн А.** Собрание научных трудов. Под ред. И. Е. Тамма и др. Т. 1. М., «Наука», 1965.
7. **Friedländer B., Friedländer J.** Absolute oder relative Bewegung? Berlin, 1896.
8. **Gutenberg B.** Internal Constitution of the Earth. N. Y., 1951. (**Гутенберг Б.** (ред.) Внутреннее строение Земли. Пер. с англ. Под ред. Б. Н. Достовалова и др. М., Изд-во иностр. лит., 1949.)
9. **Heckmann O.** Theorien der Kosmologie. 2. Aufl. Berlin Heidelberg, N. Y., 1968.
10. **Hoyle F.** Das grenzenlose All. Köln, Berlin, 1957.
11. **Jeans J.** Astronomy and Cosmogony. Cambridge, 1929.

12. **Jeffreys H.** The Earth. 4th ed. London, 1959.
13. **Jordan P.** Schwerkraft und Weltall. 2. Aufl. Braunschweig, 1955.
14. **Jordan P.** Die Expansion der Erde. Braunschweig, 1966.
15. **Mach E.** Die Mechanik in ihrer Entwicklung. 9. Aufl. Leipzig, 1933. (**Мах Э.** Механика. Историко-критический очерк ее развития. Пер. с 6-го нем. изд. Под ред. Н. А. Гезехуса. Спб., 1909.
16. **Munk W. H., MacDonald G. J. F.** The Rotation of the Earth. Cambridge, 1960. (**Манк У., Макдональд Г.** Вращение Земли. Пер. с англ. Под ред. П. Н. Успенского. М., «Мир», 1964.)
17. **Poincaré H.** Hypothéses Cosmogoniques. Paris, 1911.
18. **Shapiro I. I. e. a.** Phys. Rev. Lett., 1971, vol. 26, N 27.
19. **Spencer-Jones H.** The Rotation of the Earth. Handbuch der Physik. Vol. XLVII. Berlin, Heidelberg, 1956.
20. **Treder H.-J.** Gerlands Beiträge, 1969, Bd. 78, N 1.
21. **Treder H.-J.** Gravitationstheorie und Äquivalenzprinzip. Berlin, 1971. (**Тредер Г.-Ю.** Теория гравитации и принцип эквивалентности. Пер. с нем. Под ред. проф. Д. Д. Иваненко. М., Атомиздат, 1973.)
22. **Treder H.-J.** Poincarés Relativität der Beschleunigung und die Mach-Einstein Doktrin. Monatsberichte der D.A.W. zu. Berlin, 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Ганс-Юрген Тредер

ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ИНЕРЦИИ

Редактор *Г. В. Чернышова*
Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*
Художник *А. И. Шавард*
Технический редактор *И. Н. Подшебякин*
Корректор *Л. С. Тимохова*

Сдано в набор 3/VI 1974 г. Подписано к печати 19/XI 1974 г. Формат 84×108¹/₃₂.
Бумага типографская № 2 Усл печ. л. 6,72. Уч.-изд. л. 6,56. Тираж 6600 экз
Зак. изд. 72249. Зак. тип. 1030. Цена 66 коп.

Атомиздат, 103031, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7.

Московская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.