

С. ТРЕЙМАН, Р. ДЖЕКВИ, Д. ГРОСС

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ ТОКОВ

Перевод с английского
кандидатов физико-математических наук
Н. Н. НИКОЛАЕВА и В. А. НОВИКОВА

Список замеченных опечаток

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
171	16 снизу	$W_3^{\sqrt{p}}$	$W_3^{\sqrt{p}}$
212	14 сверху	$\partial_0 \delta(x^2) x_0 \approx 0 \delta^3(x)$	$\partial_0 \delta(x^2) \approx \delta^3(x)$ $x_0 \approx 0$

Зак. 934



МОСКВА АТОМИЗДАТ 1977

LECTURES ON CURRENT ALGEBRA
AND ITS APPLICATIONS

SAM B. TREIMAN
ROMAN JACKIW
DAVID J. GROSS

PRINCETON SERIES IN PHYSICS

Princeton University Press
PRINCETON, NEW JERSEY, 1972

Трейман С., Джекив Р., Гросс Д. Лекции по алгебре токов. Пер. с англ. (США, 1972). М., Атомиздат, 1977, 232 с.

Книга представляет собой обработку лекций, прочитанных авторами летом 1970 г. в Брукхейвенской летней школе по теоретической физике. В ней изложены все основные результаты, полученные в рамках алгебры токов и в смежных областях, а также достаточно полно освещены приложения алгебры токов к конкретным процессам.

Книга полезна студентам старших курсов, аспирантам, преподавателям и физикам-теоретикам, специализирующимся в области элементарных частиц. Она является не только учебником, но и справочным пособием по алгебре токов и ее применениям.

Рис. 28. Списки литературы 136 наименований.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Книга является переводом курса лекций, прочитанных авторами в Брукхейвенской летней школе по теоретической физике в 1970 г. Ее авторы — всемирно известные специалисты в области теоретической физики элементарных частиц, и в частности в области алгебры токов. Достаточно сказать, что в работе С. Треймана (совместно с М. Голдбергером) было положено начало направлению, получившему впоследствии название «теория частичного сохранения аксиального тока» (РСАС), и им же был получен ряд важных результатов в теории РСАС. Р. Джекив поставил и исследовал широкий круг вопросов, касающихся связи между теорией РСАС и обычным аппаратом квантовой теории поля (так называемая проблема аномалий). Наконец, Д. Гросс, уже после написания данной книги, явился одним из зачинателей асимптотически-свободных теорий — нового направления в квантовой теории поля, которое в настоящий момент представляется одним из наиболее перспективных.

Несмотря на то, что исследования по алгебре токов занимают важное место в теоретической физике элементарных частиц и роль их сильно выросла за последние годы, монографий по этой проблеме в русской литературе очень мало. Существует перевод книги С. Адлера и Р. Дашена «Алгебра токов», а также книга Р. Фейнмана «Взаимодействие фотонов с адронами», в которой в некоторой степени затронуты относящиеся сюда вопросы. Предлагаемая читателю книга должна по крайней мере частично восполнить этот пробел.

Книга рассчитана главным образом на физика-теоретика. В отличие от книги Адлера и Дашена, в ней основное внимание уделено рассмотрению сравнительно тонких и глубоких вопросов о соотношении между различными методами получения правил сумм в алгебре токов, анализу заложенных в этих выводах предположений, а также изучению аномальных коммутационных соотношений и аномальных расходимостей тока. Следует особо подчеркнуть ясное и систематизированное изложение последнего круга вопросов в разделе, написанном Р. Джекивом. Для физика-экспериментатора полезно прочитать изложение основных результатов теории РСАС совместно с анализом заложенных в ней предположений в лекциях

С. Треймана и ознакомиться с основными экспериментальными и теоретическими фактами о глубоконеупругих слабых и электромагнитных процессах по лекциям Д. Гросса.

С момента составления данной книги прошло свыше пяти лет. При нынешних темпах развития физики высоких энергий это большой срок. За это время был получен ряд новых экспериментальных и теоретических результатов в физике высоких энергий, так что, если бы авторы писали эту книгу сейчас, им пришлось бы ввести в нее несколько новых разделов, а некоторые из имеющихся изложить по-иному. Экспериментально в области рассматриваемых в данной книге явлений было установлено следующее: 1) открыто рассеяние нейтрино и антинейтрино на нуклонах за счет нейтральных токов; 2) установлено, что линейный рост сечения рассеяния нейтрино на нуклонах продолжается по крайней мере до энергий 150 ГэВ в лабораторной системе, найдены структурные функции для νN - и $\bar{\nu} N$ -рассеяния и проверены некоторые правила сумм; 3) проведено детальное измерение процесса электророждения на нуклонах, определены структурные функции для этого процесса и сделано их сопоставление со структурными функциями для рассеяния нейтрино; 4) обнаружены отклонения от скейлинга в рассеянии мюонов на нуклонах при больших энергиях порядка 150 ГэВ и $q^2 \sim 30 \text{ ГэВ}^2$; 5) проведены измерения полных сечений и инклюзивных спектров в аннигиляции $e^+e^- \rightarrow$ адроны до энергий порядка 8 ГэВ в с.ц.и.; 6) открыты новые узкие резонансы — квазистабильные частицы $J - \Psi$ и Ψ' с массами 3,1 и 3,7 ГэВ, определены их ширины, типы распада и исследованы механизмы их рождения; 7) получены экспериментальные данные, свидетельствующие о наличии других квазистабильных частиц, распадающихся на адроны и (или) лептоны.

В той части теории элементарных частиц, которая обсуждается в предлагаемой книге, за это время было сделано следующее: 1) сформулированы перенормируемые калибровочные теории с заряженными массивными векторными полями с массами, возникающими при спонтанном нарушении симметрии; 2) на основе этих калибровочных теорий предложены различные схемы единых теорий слабого и электромагнитного взаимодействий, в которых отсутствуют трудности, присущие обычной теории слабого взаимодействия; 3) показано, что указанные калибровочные теории обладают свойством асимптотической свободы, т. е. эффективное взаимодействие стремится к нулю на малых расстояниях; 4) интенсивное развитие получили методы алгебры токов на световом конусе и разложение Вилсона (кратко обсуждаемые в лекциях Д. Гросса), с помощью которых в асимптотически свободных теориях, а также в масштабно-инвариантных теориях с аномальными размерностями был получен ряд предсказаний для глубоконеупругих процессов. Читателю, желающему ознакомиться с этим кругом вопросов, можно рекомендовать обзоры [1—4] и книгу [5].

В лекциях практически отсутствует изложение результатов, полученных в рассматриваемом круге явлений советскими авторами,

поэтому при переводе были добавлены ссылки на работы советских авторов, причем только в тех случаях, когда эти работы имели прямое отношение к рассматриваемым в тексте вопросам. Кроме того, в отдельных случаях были сделаны сноски, разъясняющие современное состояние вопроса. При переводе книги были также устранены многочисленные опечатки, а все формулы переписаны в метрике Бьёркена—Дрелла.

Б. Л. Иоффе

Список литературы

1. Захаров В. И. Сборник «Элементарные частицы» (1-я Школа физики ИТЭФ), вып. 1. М., Атомиздат, 1973, с. 82.
2. Бьёркен Дж. Д., Иоффе Б. Л. — «Успехи физ. наук», 1975, т. 116, с. 115.
3. Захаров В. И., Иоффе Б. Л., Окунь Л. Б. — «Успехи физ. наук», 1975, т. 117, с. 227.
4. Вайнштейн А. И., Хриплович И. Б. — «Успехи физ. наук», 1974, т. 112, с. 685.
5. Коноплева Н. П., Попов В. Н. Калибровочные поля. М., Атомиздат, 1972.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу книги положен курс лекций, который был прочитан в летней школе теоретической физики в Брукхейвене в 1970 г. Раздел «Алгебра токов и РСАС» содержит так называемые классические результаты теории. В этом разделе читатель знакомится с общими методами теории, которые затем применяются для получения конкретных правил сумм и низкоэнергетических теорем. В разделе «Теоретико-полевые исследования в алгебре токов» приводятся результаты вычислений, указывающие на зависимость предсказаний алгебры токов от динамики. В книге показано, что в моделях многие из этих предсказаний нарушаются (по крайней мере в теории возмущений) из-за аномалий, к которым приводят расходимости локальной квантовой теории поля. Наконец, в разделе «Поведение слабых и электромагнитных процессов при высоких энергиях» обсуждаются приложения алгебры токов к процессам при высоких энергиях, в частности к глубоконеупругим процессам. Большинство из этих приложений инициированы экспериментами МТИ—СЛАК по неупругому электрон-нуклонному рассеянию и представляют новое направление в теории.

За разрешение поместить несколько рисунков в третьем разделе книги мы благодарны Р. Дайболду (рис. 11); Ф. Гилману (рис. 12); К. Дику и Дж. Моку (рис. 15 из журнала «Phys. Rev.», 1968, v. 75, p. 171); Е. Блуму и др. (рис. 16—21 из журнала «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 23, p. 935) и Ю. Будагову и др. (рис. 22 из «Phys. Lett. B», 1969, v. 30, p. 364).

Нам хотелось бы особо поблагодарить Р. Пайерлса за предоставленную возможность прочесть эти лекции в летней школе. Мы также весьма благодарны мисс Патриции Тауэй и ее секретариату, которые с большим старанием подготовили первый вариант рукописи.

Октябрь 1971

*С. Трейман
Р. Джекив
Д. Гросс*

ЛЕКЦИЯ 1

АЛГЕБРА ТОКОВ И РСАС

С. Трейман

ГЛАВА I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Основные идеи алгебры токов были высказаны Гелл-Маном [1] еще в 1961 г. Но их развитие происходило весьма медленно вплоть до 1965 г., когда Фубини и Фурлан [2] разработали формализм, пригодный для практических применений, а Адлер [3] и Вайсбергер [4] получили свое замечательное соотношение, связывающее параметры β -распада с пион-нуклонным рассеянием. Все это предвещало золотой век, и, действительно, вскоре произошло то, что обычно происходит при появлении хорошей идеи. Уже в 1967 г. Реннер [5] насчитал около 500 работ на эту тему, а к настоящему времени это число можно смело удвоить. Конечно, реальных достижений несколько меньше, чем можно вообразить при простом подсчете числа публикаций. Действительно, основные черты теории с 1967 г. существенно не изменились, и к этому времени большинство классических результатов было уже получено. В течение последующих лет неизбежно возникали лишь вариации на более ранние темы. Вместе с тем обострился интерес к обоснованности некоторых формальных действий, к которым прибегали ранее авторы для получения результатов. Эти интересные вопросы рассмотрит проф. Джекив.

Что касается экспериментальных результатов, то для большого числа процессов, данные по которым могли бы быть решающими для обсуждаемых идей, они еще не установились. Это справедливо как для K_{13} -распада, для которого имеется много данных, но все они не согласуются друг с другом, так и для K_{14} -распада, экспериментальные данные по которому все еще бедны. Для интересных и, быть может, спорных результатов, относящихся к $\pi\pi$ -рассеянию и нейтринным реакциям при высоких энергиях, в настоящее время также отсутствуют достоверные экспериментальные данные. В последнее время особое внимание привлекали нейтринные реакции. Их подробное обсуждение можно найти в лекциях, написанных проф. Гроссом.

Основными объектами алгебры токов являются одновременные коммутационные соотношения для токов, участвующих в слабых и электромагнитных взаимодействиях адронов. Поэтому в книге подробно разъясняется, что схема Гелл-Мана применима только для коммутаторов временных компонент токов. Однако в процессе изложения делаются различные предположения также о коммутаторах для пространственных компонент, и именно эти предположения наиболее рискованны. Обсуждение их здесь не приводится. Отметим лишь, что коммутационные соотношения приводят к правилам сумм для матричных элементов некоторых операторов. Возникающие при этом матричные элементы обычно недоступны для измерений, поэтому требуется известная изобретательность, чтобы извлечь полезные физические результаты. Для этого часто вводят дополнительные предположения и различные приближения. При оценке этих приближений мнения часто расходятся. Одни выражают удивление, как можно доверять результатам, когда, скажем, бесконечная сумма обрывается на первом или втором члене, выбранном более или менее произвольно. Другие считают, что можно быть более снисходительными к нескольким абстрактным предположениям о сходимости дисперсионных интегралов, если это не противоречит известным фактам или общим принципам. Но даже в лучшем случае не следует ожидать большой строгости результатов. Конечно, некоторые из них вполне надежны и, хотя это является вторжением в тему лекций профессора Гросса, здесь мы обсудим правило сумм Адлера для нейтринных реакций как пример не зависящей от моделей проверки предположений Гелл-Мана.

Во всех работах по приложениям алгебры токов процессы, включающие пионы, занимают непропорционально большое место. Это произошло потому, что гипотезы о коммутационных соотношениях удачно дополняются другой независимой системой идей о свойствах токов слабых взаимодействий. Они составляют так называемую гипотезу РСАС о доминантности пионного полюса в дивергенции сохраняющего странность аксиального тока. Гипотезу РСАС можно проверить независимо от идей алгебры токов. Только в комбинации эти две системы идей дали наиболее интересные результаты. Однако отметим разный статус этих гипотез. Предположения Гелл-Мана кажутся совершенно ясными и непротиворечивыми, и единственный вопрос состоит в том, выполняются ли они в реальном мире. Гипотеза же РСАС не имеет до сих пор строгой формулировки, поэтому вопрос не только в том, правильна ли она, но и в том, что она собой представляет.

В дальнейшем сосредоточим основное внимание на конкретных приложениях алгебры токов и РСАС с примерами, взятыми из классических результатов. Вопрос о смысле РСАС будем всюду опускать (конечно, совершенно незаконно). Тем не менее в основном изложение будет стандартно. Оно адресовано тем, кто еще не стал специалистом в данной области, и служит введением в более современный материал. К счастью, есть прекрасный обзор этой темы в книге Адле-

ра и Дашена «Алгебра токов» (N. Y., W. A. Benjamin Publ., 1968)*. Что касается общих вопросов теории слабых взаимодействий, то можно сослаться на книгу Marshak, Riazuddin, Ryan «Theory of Weak Interaction In Particle Physics» (N. Y., Wiley-Interscience, 1969)**. Вопросы, связанные с $SU(3)$, подробно рассмотрены в книге Gell-Mann, Neeman «The Eightfold Way» (N. Y., W. A. Benjamin Publ., 1964)***.

ГЛАВА 2

ФИЗИЧЕСКИЕ ТОКИ

Формула Адлера—Вайсбергера установила совершенно неожиданную связь между величинами, относящимися к сильным взаимодействиям, и параметрами слабых взаимодействий. Обобщая ее на случай рассеяния пионов на других адронных мишенях, можно вообще исключить параметры слабых взаимодействий и получить соотношения между чисто адронными величинами. Это следует из гипотезы PCAC, относящейся к определенным физическим токам в слабых взаимодействиях. В конечном счете все результаты можно сформулировать так, что никаких ссылок на слабые взаимодействия не потребуется: токи могут быть введены как чисто математические объекты. Однако подобный подход не отражает истории развития теории. Кроме того, физические токи интересны сами по себе. Поэтому начнем с рассмотрения того, как эти токи входят в слабые и электромагнитные процессы. В дальнейшем для описания квантовомеханических состояний и операторов будем использовать представление Гейзенберга. Метрика соответствует скалярному произведению $a \cdot b = a_0 b_0 - \mathbf{ab}$.

2.1. Электромагнитные адронные токи

Из всех токов, которые будут обсуждаться, электромагнитный ток, конечно, самый знакомый. Взаимодействие адронов с оператором электромагнитного поля A_λ описывается в низшем порядке по электрическому заряду e гамильтонианом взаимодействия с плотностью \mathcal{H}^{em} :

$$\mathcal{H}^{em} = e j_\lambda^{em} A_\lambda, \quad (2.1)$$

* См. перевод: С. Адлер, Р. Дашен. «Алгебра токов». М., «Мир», 1970. См. также прекрасный обзор А. И. Вайнштейна и В. И. Захарова «Успехи физ. наук», 1970, т. 100, № 2, 225. — *Прим. пер.*

** На русском языке см.: Л. Б. Окунь. «Слабые взаимодействия элементарных частиц». М., Физматгиз, 1963. — *Прим. пер.*

*** См. также: Л. Б. Окунь. В кн.: «Проблемы теоретической физики». М., ВИНТИ, 1965; Нгуен Ван Хъеу. «Лекции по теории унитарной симметрии». М., Атомиздат, 1967. — *Прим. пер.*

где j_{λ}^{em} — адронный электромагнитный ток. Он является векторным оператором, составленным из адронных полей. Однако детали такого построения требуют решения фундаментальных проблем, относящихся к природе адронов. Современная физика обходит решение этих проблем и занимается рассмотрением симметрий или других свойств, которые, как полагают, не зависят от динамики. Так, сохранение заряда приводит к независимости оператора заряда $Q^{em} = \int d^3x j_0^{em}(x_0, \mathbf{x})$ от времени x_0 и к сохранению тока $\partial j_{\lambda}^{em}/\partial x_{\lambda} = 0$. Обычно предполагается, что j_{λ}^{em} нечетен относительно операции зарядового сопряжения, определяемой сильными взаимодействиями. Однако в связи с открытием нарушения CP -инвариантности было предположено, что электромагнитный ток может также содержать часть, четную относительно зарядового сопряжения. Мы будем пренебрегать этой, все еще не подтвержденной, возможностью.

Электромагнитные взаимодействия сохраняют барионный заряд B , странность S или, что эквивалентно, гиперзаряд $Y = S + B$ и компоненту I_3 изотопического спина. В соответствии с известной формулой $Q^{em} = I_3 + Y/2$ обычно предполагается, что j_{λ}^{em} содержит часть, преобразуемую как скаляр ($I = 0$) при изотопических поворотах, и часть, преобразуемую как третья компонента изовектора ($I = 1; \Delta I_3 = 0$):

$$j_{\lambda}^{em} = j_{\lambda}^{em}(I = 0) + j_{\lambda}^{em}(I = 1, \Delta I_3 = 0). \quad (2.2)$$

Эти два тока сохраняются по отдельности, что соответствует сохранению гиперзаряда и третьей компоненты изотопического спина; соответствующие «заряды» определяют эти величины:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Y}{2} &= \int d^3x j_0^{em}(I = 0), \\ I_3 &= \int d^3x j_0^{em}(I = 1, \Delta I_3 = 0). \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Рассмотрим теперь электромагнитный процесс типа $\alpha \rightarrow \beta + \gamma$, где γ — реальный фотон с импульсом k , а α и β — системы из одного или нескольких адронов. В низшем порядке по электромагнитному взаимодействию амплитуда перехода дается формулой

$$e \langle \beta | j_{\lambda}^{em} | \alpha \rangle \varepsilon_{\lambda}, \quad (2.4)$$

где ε_{λ} — вектор поляризации фотона, а состояния $|\alpha\rangle$ и $\langle\beta|$ определяются только сильными взаимодействиями. В этом процессе $k = p_{\alpha} - p_{\beta}$; $k^2 = 0$ и $k\varepsilon = 0$. Вне массовой поверхности ($k^2 \neq 0$) матричный элемент можно измерить в процессах, включающих взаимодействие электронов и мюонов с адронами. Например, в низшем порядке процесс рассеяния $e + \alpha \rightarrow e + \beta$ описывается диаграммой Фейнмана (рис. 1), где P_e и P_e' — начальный и конеч-

ный импульс электрона соответственно, а виртуальный фотон имеет импульс $k = P_e - P'_e$. Амплитуда процесса дается выражением

$$e^2 \langle \beta | j_\lambda^{em} | \alpha \rangle (1/k^2) \bar{u}(P'_e) \gamma_\lambda u(P_e). \quad (2.5)$$

Матричный элемент от электронной части полного тока хорошо известен (здесь он выделен в виде тривиального множителя). Вся сложность сильных взаимодействий сосредоточена в матричном элементе адронного тока j_λ^{em} . Вообще говоря, $k^2 = (p_\beta - p_\alpha)^2 \neq 0$.

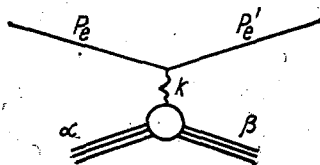


Рис. 1.

Матричные элементы адронных токов можно измерять и в других процессах: например, в распадах типа $\alpha \rightarrow \beta + e^+ + e^-$ или при аннигиляции $e^+ + e^- \rightarrow$ (адроны) в экспериментах на встречных пучках. И здесь сохранение тока приводит к соотношению $k_\lambda \langle \beta | j_\lambda^{em} | \alpha \rangle = 0$, $k = p_\beta - p_\alpha$.

2.2. Слабые лептонные токи

Обратимся теперь к слабым взаимодействиям. С феноменологической точки зрения они делятся на три класса; а) чисто лептонные процессы (из них на опыте наблюдался только распад мюона $\bar{\mu} \rightarrow \bar{e} + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ и сопряженный ему μ^+ -распад*); б) полулептонные процессы, т. е. процессы, содержащие и адроны, и лептонные пары $\nu_e e$ или $\nu_\mu \mu$ (большое количество процессов такого типа наблюдалось на опыте, например $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, $\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow n + \mu^+$, $K \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \pi$ и т. д.); в) нелептонные слабые процессы (например, $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$, $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ и т. д.).

Распад мюона описывается в низшем порядке гамильтонианом взаимодействия, связывающим «ток» ($\nu_e e$) с «током» ($\nu_\mu \mu$):

$$\mathcal{H}^I = (G/\sqrt{2}) \mathcal{L}_\lambda(e\nu) \mathcal{L}_\lambda^+(\mu\nu) + \text{э. с.} \quad (2.6)$$

Операторы тока задаются выражениями:

$$\mathcal{L}_\lambda(e\nu) = \bar{\Psi}_\nu \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \Psi_e;$$

$$\mathcal{L}_\lambda(\mu\nu) = \bar{\Psi}_\mu \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) \Psi_\nu.$$

Фактор $(1 + \gamma_5)$ возникает из-за двухкомпонентности нейтрино и приводит к тому, что каждый ток содержит и векторную, и аксиальную часть. Константа взаимодействия G имеет размерность

* В последнее время в нейтринных экспериментах обнаружено $\nu_\mu e$ -рассеяние за счет нейтральных токов. — Прим. пер.

(масса)⁻², и ее можно рассматривать как характеристику (размерную) интенсивности всех классов слабых взаимодействий. Из экспериментальных данных по ширине мюонного распада найдено, что $Gm^2 = 10^{-5}$ (здесь m — масса нуклона).

2.3. Слабые адронные токи

Все наблюдавшиеся полулептонные взаимодействия хорошо описываются в низшем порядке гамильтонианом взаимодействия, который связывает лептонные токи со слабым адронным током j_λ^w , содержащим векторную и аксиальную части:

$$\mathcal{H}^{sl} = (G/\sqrt{2}) j_\lambda^w \mathcal{L}_\lambda^+ + \text{э. с.}, \quad (2.7)$$

где $\mathcal{L}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda(e\nu) + \mathcal{L}_\lambda(\mu\nu)$. Отметим, что $\mathcal{L}_\lambda(e\nu)$ и $\mathcal{L}_\lambda(\mu\nu)$ на равных основаниях входят в лептонный ток, что соответствует гипотезе о μe -универсальности. В последующем изложении символ l будем использовать для обозначения e или μ , а символ ν — для соответствующего нейтрино ν_e или ν_μ .

Рассмотрим полулептонные процессы типа $\nu + \alpha \rightarrow l + \beta$, где α и β — адронные системы. В низшем порядке амплитуда перехода равна

$$(G/\sqrt{2}) \langle \beta | j_\lambda^w | \alpha \rangle \bar{u}(l) \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) u(\nu), \quad (2.8)$$

где состояния $|\alpha\rangle$ и $|\beta\rangle$ определяются только сильными взаимодействиями. Это выражение аналогично формуле (2.5), которая описывает процесс $e + \alpha \rightarrow e + \beta$. Матричный элемент лептонного слабого тока вновь выделяется как простой и известный множитель, а вся сложность сильных взаимодействий заключена в матричном элементе от адронного тока. Полулептонные реакции «зондируют» адронные состояния с помощью оператора тока j_λ^w . Для процессов распада $\alpha \rightarrow \beta + e + \tilde{\nu}$ структура такая же, как и описанная выше, за исключением очевидной замены нейтринного спинора $u(\nu)$ антинейтринным спинором. Заметим, что по принятому нами соглашению ток j_λ^w увеличивает электрический заряд адронов на единицу: $Q_\beta - Q_\alpha = +1$. В процессы, где заряд адронов уменьшается на единицу, дает вклад матричный элемент от сопряженного оператора $(j_\lambda^w)^\dagger$; лептонный ток, конечно, также должен претерпевать соответствующие изменения.

Как и в случае электромагнитного тока, в настоящее время нельзя указать способ построения слабых токов из фундаментальных адронных полей. Попытаемся описать свойства токов в наиболее общем виде, так, чтобы следствия не зависели от деталей построения. Конечно, не исключено, что и специальные модели могут привести на хорошую идею. Фактически именно так и произошло с идеями алгебры токов. Как уже говорилось, известно, что j_λ^w по отношению к преобразованиям Лоренца ведет себя как сумма век-

тора и аксиала: $\tilde{j}_\lambda^w = V_\lambda + A_\lambda$. В одних процессах, например $K^- \rightarrow K^0 + e + \bar{\nu}$, вносит вклад только векторная часть; в других например $\pi \rightarrow \mu \bar{\nu}$, только A_λ , а для остальных, например $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$, — обе части. Токи сохраняют барионный заряд. Что касается странности, то V_λ и A_λ содержат части, сохраняющие странность ($\Delta S = 0$), и изменяющие ее на единицу, а ΔS и ΔQ скоррелированы: $\Delta S/\Delta Q = +1$. Возможно, что существуют другие токи, скажем с $\Delta S/\Delta Q = -1$ или $|\Delta S| > 1$, но поскольку экспериментальные подтверждения для них отсутствуют, не будем рассматривать эти возможности. По отношению к изоспину считается, что токи с $\Delta S = 0$ преобразуются как компонента изовектора ($I = 1$), повышающая заряд, а токи с $\Delta S/\Delta Q = 1$ — как компонента изодублета ($I = 1/2$), повышающая заряд. По-видимому, членов с другими свойствами по отношению к изотопическому спину не требуется. Поэтому для всех хорошо установленных токов можно записать:

$$\left. \begin{aligned} V_\lambda &= \cos \theta_c V_\lambda(Y=0, I=1) + \sin \theta_c V_\lambda(Y=1, I=1/2); \\ A_\lambda &= \cos \theta_c A_\lambda(Y=0, I=1) + \sin \theta_c A_\lambda(Y=1, I=1/2). \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Свойства токов по отношению к изменению третьей компоненты изоспина можно не оговаривать, так как они следуют из соотношения $Q = I_3 + Y/2$. Множители $\cos \theta_c$ и $\sin \theta_c$, появившиеся в (2.9), пока входят в (2.7) на том же основании, что и $G/\sqrt{2}$. Следует подчеркнуть, что никаких новых масштабных множителей, кроме уже записанных, нет, и что все новые факторы можно включить в токи. Позднее мы обсудим некоторые идеи, которые позволят точнее определить понятие масштаба и придадут углу θ_c объективное значение. Сейчас же отметим, что угол θ_c называют *углом Кабиббо*.

Для токов без изменения странности (векторных и аксиальных) введем еще один признак, по которому их можно классифицировать. Это G -четность, которая характеризуется изотопическим поворотом вокруг второй оси на угол π , что изменяет знак I_3 , и операцией зарядового сопряжения, также изменяющей знак I_3 . Токи с $\Delta Y = 0$, $V_\lambda(Y=0, I=1)$ и $A_\lambda(Y=0, I=1)$ являются компонентами изотопического триплета, повышающими заряд на 1. Следовательно, сопряженные токи V_λ^+ и A_λ^+ — члены мультиплета, понижающие заряд. Вообще говоря, не обязательно, чтобы V_λ и V_λ^+ , а также A_λ и A_λ^+ входили в один мультиплет. Но если все-таки токи и сопряженные им токи входят в один и тот же мультиплет, то им можно приписать определенную G -четность: $G = +1$ или $G = -1$. Известно, что векторный ток с $Y = 0$ четен по отношению к G -преобразованию, а аксиальный нечетен. В настоящее время для альтернативных возможностей пока нет места. Напомним, что изовекторная часть электромагнитного тока имеет $G = +1$, а изоскалярная $G = -1$.

Изовекторная часть электромагнитного тока является, таким образом, нейтральной компонентой изотопического триплета с

$G = +1$, тогда как $V_\lambda (I = 1)$ и $V_\lambda^+ (I = 1)$ — повышающий и понижающий заряд члены, вообще говоря, другого изотопического триплета. Можно предположить, что на самом деле это один и тот же триплет. Это знаменитая гипотеза CVC Герштейна—Зельдовича, Фейнмана и Гелл-Мана. Она получила некоторые экспериментальные подтверждения и приводит (если она действительно правильна) к значительным упрощениям. Известно, что электромагнитные токи, изоскалярный и изовекторный, сохраняются каждый в отдельности. Гипотеза CVC названа так потому, что требует сохранения (C) векторного тока (VC) без изменения странности: $\partial V_\lambda (I = 1) / \partial x_\lambda = 0$. Теперь с помощью изотопической симметрии можно связать соответствующие матричные элементы для $V_\lambda (I = 1)$ и $j_\lambda^m (I = 1)$. Например, для покоящихся π -мезонов $\langle \pi^+ | j_\lambda^m | \pi^+ \rangle = 1$. Отсюда следует, что в β -распаде пиона $\langle \pi^+ | V_0 (I = 1) | \pi^0 \rangle = \sqrt{2}$. Теперь понятие «масштаба» слабого векторного тока $V_\lambda (I = 1)$ приобрело ясное содержание.

Свойства слабых и электромагнитных токов по отношению к изотопическим преобразованиям и гиперзаряду теперь полностью определены. Но осталась еще одна симметрия сильных взаимодействий, а именно $SU(3)$. Она не является строгой симметрией. Но если предположить, что $SU(3)$ нарушена не очень сильно, возникает вопрос, как преобразуются различные токи под действием $SU(3)$. Для всех токов, которые мы уже обсудили, простейшая возможность, согласованная с изотопикой и гиперзарядом, состоит в том, что они преобразуются как члены $SU(3)$ -октета. Однако Кабиббо [7] предположил нечто более сильное, а именно что все векторные токи (слабые и электромагнитные) входят в один общий октет. Тогда изоскалярный электромагнитный ток ($Y = 0, I = 0$), триплет электромагнитного и слабых сохраняющих странность токов ($Y = 0, I = 1/2$), а также слабые токи с изменением странности ($Y = \pm 1, I = 1/2$) преобразуются под действием $SU(3)$ так же, как $\eta^0, (\pi^\pm, \pi^0), (K^+, K^-)$. Кабиббо предположил также, что и все аксиальные слабые токи принадлежат одному октету аксиальных операторов. Эти гипотезы, если они правильны, приводят к громадным упрощениям, так как остается изучить только два независимых объекта: векторный и аксиальный октеты. В каждом из них различные члены связаны друг с другом. Это, в частности, означает, что относительный масштаб в октете фиксирован. Более того, в векторном октете фиксирован также абсолютный масштаб, поскольку этот октет содержит операторы заряда и гиперзаряда. Теперь, кажется, осталось только зафиксировать масштаб аксиального октета по отношению к векторному, что, однако, трудно сделать для объектов, обладающих разными трансформационными свойствами по отношению к преобразованию Лоренца. Тем не менее остается неясность — ведь $SU(3)$ не вполне строгая симметрия сильных взаимодействий. Нельзя ли придать $SU(3)$ -свойствам такой смысл, который сохранится даже при нарушении $SU(3)$? Гелл-Ман нашел решение обеих проблем. Об этом будет сказано ниже.

Отметим, что в рамках точной $SU(3)$ -симметрии модель Кабиббо нашла множество применений. Она оказалась полезной для корреляции различных барионных и мезонных β -распадов. Угол Кабиббо здесь равен $\theta_c = 0,23^*$,

2.4. Нелептонные слабые взаимодействия

Гамильтониан как слабых лептонных, так и полулептонных взаимодействий имеет вид (ток \times ток). А что можно сказать о нелептонных процессах? В реакциях этого класса все частицы участвуют в сильных взаимодействиях, поэтому из экспериментальных данных не удастся извлечь полезную информацию о структуре гамильтониана. Невозможно, например, узнать, распадается ли он на произведение двух токов. Здесь ситуация отличается от случая полулептонных взаимодействий, где легко заключить, что взаимодействие осуществляется через локальную связь лептонного тока с адронным. В то же время можно, как обычно, попытаться описать свойства нелептонного гамильтониана по отношению к различным адронным симметриям. Он нарушает C - и P -инвариантность (и, возможно, CP), содержит части, нарушающие странность и изоспин. Действительно, все известные нелептонные слабые процессы изменяют странность на единицу. Однако недавно в некоторых ядерных переходах с $\Delta S = 0$ был обнаружен эффект нарушения четности, который находится в грубом соответствии с величиной обычных слабых процессов без изменения странности. Это приводит к мысли, что слабое нелептонное взаимодействие наряду с обычной частью с $|\Delta S| = 1$ содержит взаимодействие с $\Delta S = 0$ (нарушающее четность). Никаких указаний на взаимодействие с $|\Delta S| > 1$ пока не найдено. По отношению к изотопическим преобразованиям \mathcal{H}^w с $|\Delta S| = 1$ ведет себя как член изодублета. Это известное правило $\Delta I = 1/2$; оно подтверждается экспериментально, за несколькими исключениями, которые, возможно, объясняются электромагнитными поправками (хотя эффект необычно велик для такой интерпретации). В основных чертах изотопические свойства кажутся простыми. По отношению к $SU(3)$ -симметрии свойства нелептонного взаимодействия менее ясны. Простейшая теоретическая возможность состоит в том, что части с $\Delta S = 0$ и с $\Delta S = 1$ преобразуются по октетному представлению.

Хотя нет никаких убедительных способов получить из эксперимента информацию о внутренней структуре нелептонного гамильтониана, существует одна очень привлекательная гипотеза. Именно: можно представить, что гамильтониан построен из локальных произведений адронных токов, которые уже встречались в полулептонных взаимодействиях, и что все классы слабых взаимодействий описываются единым (ток \times ток) взаимодействием. Это означает сле-

* Современное состояние вопроса см. в [24, 25]. — *Прим. пер.*

дующее: пусть $J_\lambda = j_\lambda^w + \mathcal{L}_\lambda$ — единый слабый ток, построенный из адронных и лептонных частей; тогда гамильтониан слабого взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{H}^w = (G/\sqrt{2}) J_\lambda J_\lambda^+, \quad (2.10)$$

предложенный Фейнманом и Гелл-Маном [8].

Ясно, что гамильтониан содержит как чисто лептонные взаимодействия, ответственные за распад мюона, так и лептон-адронные, ответственные за полулептонные процессы. Кроме того, возникают дополнительные члены.

1. *Самодействие* лептонных токов $\mathcal{L}_\lambda(e\nu) \mathcal{L}_\lambda^\dagger(e\nu)$ и $\mathcal{L}_\lambda(\mu\nu) \mathcal{L}_\lambda^\dagger(\mu\nu)$. Оно приводит к предсказанию таких процессов, как $\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e^*$.

2. *Самодействие* адронных токов $j_\lambda j_\lambda^\dagger$. Оно описывает нелептонные взаимодействия с $\Delta S = 0$ и с $|\Delta S| = 1$. Существуют, однако, трудности, связанные с тем, что взаимодействие с $\Delta S = 1$ содержит члены не только с $\Delta I = 1/2$, но и с $\Delta I = 3/2$. Что касается $SU(3)$ -симметрии, то в дополнение к октету есть член, принадлежащий представлению {27}.

Трудности с $SU(3)$ не кажутся решающими, так как экспериментальные доказательства октетной доминантности очень скудны; во всяком случае, $SU(3)$ не является хорошей симметрией. Но нарушение правила $\Delta I = 1/2$ в этой модели может оказаться более серьезным, если только оно не будет случайно численно подавлено за счет динамических факторов (или, как иногда говорят, не будет усилен вклад $\Delta I = 1/2$)**. Можно восстановить правило $\Delta I = 1/2$ и, более того, достигнуть чисто октетной структуры гамильтониана, если ввести подходящее самодействие *нейтральных* членов октета адронных токов. Нейтральные токи до сих пор рассматривались только как математические объекты и не проявлялись в полулептонных взаимодействиях с нейтральными лептонными токами, такими, как $(\bar{\nu}\nu)$. Поэтому введение самодействия нейтральных адронных токов кажется очень искусственным приемом***.

* В последнее время экспериментально найдены нейтральные слабые токи, как адронные, так и лептонные [26]. Существование этого взаимодействия не сказывается, однако, на обсуждаемых вопросах. — *Прим. пер.*

** Такое динамическое усиление переходов с $\Delta T = 1/2$ возникает в калибровочных теориях сильного взаимодействия (см. [27]). — *Прим. пер.*

*** Взаимодействие нейтральных токов возникает естественным образом в калибровочных теориях слабого взаимодействия, широко обсуждаемых в последнее время. Однако в этих моделях адронный нейтральный ток не может содержать компонент с $|\Delta S| = 1$ (см. [28]). — *Прим. пер.*

КОММУТАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТОКОВ

Мы уже рассмотрели целый набор токов, векторных и аксиальных, которые можно использовать для описания электромагнитных и слабых взаимодействий. Каждому току можно приписать индекс, указывающий на его квантовые числа (I, I_3, Y) . В электромагнитных и полулептонных взаимодействиях участвуют шесть различных векторных токов и четыре аксиальных. Исходя из $SU(3)$ -симметрии, дополним каждую группу токов до полного октета, вводя недостающие токи, которые могут как иметь, так и не иметь физического смысла, но которые, во всяком случае, являются полезными математическими объектами. Кроме того, удобно ввести вместо квантовых чисел (I, I_3, Y) единый $SU(3)$ -индекс α , обычно присваиваемый октету в реальном тензорном базисе. Векторный и аксиальный октеты будем обозначать в дальнейшем символами V_λ^α и A_λ^α соответственно ($\alpha = 1, \dots, 8$). В этих обозначениях электромагнитный ток запишется в виде

$$j_\lambda^{em} = V_\lambda^3 + (1/\sqrt{3}) V_\lambda^8, \quad (3.1)$$

где первый член — изовекторная часть тока, а второй — изоскалярная. Аналогично слабый адронный ток можно выразить как

$$j_\lambda^w = \cos \theta_c j_\lambda^{1+12} + \sin \theta_c j_\lambda^{4+15}, \quad (3.2)$$

а ток, уменьшающий заряд, — следующим образом:

$$(j_\lambda^w)^+ = \cos \theta_c j_\lambda^{1+12} + \sin \theta_c j_\lambda^{4-15}. \quad (3.2a)$$

Здесь

$$j_\lambda^\alpha = V_\lambda^\alpha + A_\lambda^\alpha; \quad (3.3)$$

$$j_\lambda^{\alpha+12} = j_\lambda^1 + i j_\lambda^2 \quad (3.3a)$$

и т. д.

Для каждого векторного тока V_λ^α введем оператор обобщенного заряда Q^α согласно формуле

$$Q^\alpha(x_0) \equiv \int d^3x V_0^\alpha(x_0, \mathbf{x}). \quad (3.4)$$

Сохранение гиперзаряда в сильных взаимодействиях означает, что V_λ^8 — сохраняющийся ток и, следовательно, Q^8 в действительности не зависит от времени. С точностью до множителя Q^8 совпадает с оператором гиперзаряда

$$Q^8 = (\sqrt{3}/2) Y. \quad (3.4a)$$

Согласно гипотезе CVC векторные токи $V_\lambda^1, V_\lambda^2, V_\lambda^3$ также сохраняются и принадлежат одному изотопическому триплету. Соот-

ветствующие заряды Q^i ($i = 1, 2, 3$) не зависят от времени и являются тремя компонентами оператора изотопического спина I :

$$Q^i = I^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Операторы Q^i — генераторы изотопической $SU(3)$ -симметрии — удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям

$$[Q^i, Q^j] = i\epsilon_{ijk} Q^k, \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

Если предположить, что нет взаимодействия, нарушающего $SU(3)$ -симметрию сильных взаимодействий, то возникает октет сохраняющихся векторных токов, и его по гипотезе Кабиббо нужно идентифицировать с октетом V_λ^α , $\alpha = 1, \dots, 8$. (Напомним, что компоненты V_λ^6 и V_λ^8 не входят ни в электромагнитные взаимодействия, ни в полулептонные.) В мире с точной $SU(3)$ -симметрией сильных взаимодействий все восемь зарядов Q^α не зависят от времени. Они также совпадают с генераторами $SU(3)$ -группы и удовлетворяют соответствующим коммутационным соотношениям

$$[Q^\alpha, Q^\beta] = if^{\alpha\beta\gamma} Q^\gamma. \quad (3.7)$$

Структурная $SU(3)$ -константа $f^{\alpha\beta\gamma}$ полностью антисимметрична по индексам. Неисчезающие элементы $f^{\alpha\beta\gamma}$ (за исключением элементов, отличающихся перестановкой индексов) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} f^{123} &= 1; \\ f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} &= -f^{156} = -f^{367} = 1/2; \\ f^{458} = f^{678} &= \sqrt{3}/2. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Для воображаемого мира с точной $SU(3)$ -симметрией можно развить модель Кабиббо еще дальше. Предположим, что не только заряды Q^α , но и *плотности* токов $V_\lambda^\alpha(x)$ составляют $SU(3)$ -октет и что это также верно и для плотностей аксиальных токов $A_\lambda^\alpha(x)$. Их трансформационные свойства отражены в коммутационных соотношениях:

$$\left. \begin{aligned} [Q^\alpha, V_\lambda^\beta(x)] &= if^{\alpha\beta\gamma} V_\lambda^\gamma(x); \\ [Q^\alpha, A_\lambda^\beta(x)] &= if^{\alpha\beta\gamma} A_\lambda^\gamma(x). \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

В этом воображаемом мире адроны обладают хорошо определенными $SU(3)$ -трансформационными свойствами, а соотношения симметрии связывают матричные элементы различных токов. Коэффициенты Клебша — Гордона в этих соотношениях отражают структуру $SU(3)$ -группы и, следовательно, структуру коммутационных соотношений (3.7). Однако, кроме технических упрощений при получении коэффициентов Клебша — Гордона, коммутационные соотношения фактически ничего не дают. Важно, что $SU(3)$ -симметрия на самом деле не является хорошей. При включении члена, нарушающего симметрию, адроны уже не обладают хорошо определенными трансформационными свойствами, заряды Q^α (за исключе-

нием $\alpha = 1, 2, 3, 8$) становятся зависящими от времени и модель Кабиббо, казалось бы, теряет смысл. Гелл-Ман выдвинул предположение, что даже в этом случае кое-что от модели Кабиббо можно сохранить. Именно Гелл-Ман предложил описывать $SU(3)$ -свойства токов в терминах их одновременных коммутационных соотношений (в то время это было совершенно новым взглядом). Он заметил, что одновременные коммутационные соотношения зависят только от структуры токов, если рассматривать их как функции канонических полевых переменных: обобщенных координат q и обобщенных импульсов p . Если член, нарушающий симметрию, достаточно простой (скажем, не содержит членов с производными), то независимо от остальных деталей токи как функции канонических переменных сохраняют прежнюю структуру; следовательно, и коммутационные соотношения не изменятся. Все это правильно для проинтегрированных по пространству плотностей, т. е. для операторов заряда. Короче говоря, Гелл-Ман предположил, что одновременный вариант соотношений (3.7) может быть верным и для реального мира. Несколько более сильное предположение заключается в том, что и одновременные соотношения (3.9) также всегда справедливы. Эти соотношения придают точный смысл понятиям о том, что векторные и аксиальные токи обладают октетными трансформационными свойствами. Они также фиксируют относительный масштаб различных векторных токов и аналогично аксиальных токов. Но масштаб аксиальных токов никак пока не связан с масштабом векторных полей. Гелл-Ман первым решил и эту проблему. Именно он ввел предположение о виде коммутаторов для аксиальных токов. Эти коммутационные соотношения представляют наиболее интересную часть его схемы. Чтобы понять, в чем состоит новая гипотеза, введем восемь «аксиальных зарядов» \tilde{Q}^α , определенных по аналогии с (3.5):

$$\tilde{Q}^\alpha(x_0) = \int d^3x A_0^\alpha(x_0, \mathbf{x}). \quad (3.10)$$

Гелл-Ман постулировал одновременные коммутационные соотношения

$$[\tilde{Q}^\alpha(x_0), \tilde{Q}^\beta(x_0)] = i f^{\alpha\beta\gamma} Q^\gamma(x_0). \quad (3.11)$$

Так как это выражение билинейно по аксиальным зарядам и его правая часть содержит векторные заряды, то относительный масштаб между аксиальными и векторными зарядами теперь фиксирован.

Одновременные коммутационные соотношения (3.7) и (3.9) можно оправдать по крайней мере грубой симметрией реального мира и привлекательностью модели Кабиббо, основанной на этой симметрии. Значительно труднее обосновать (3.11). Это можно сделать, введя более высокую группу $SU(3) \otimes SU(3)$ с генераторами $Q^\alpha + \tilde{Q}^\alpha$, $Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha$. Нельзя, однако, сказать, что эта симметрия сама по себе очевидна. В то же время можно найти подтверждение (3.11)

в различных моделях. Следуя Гелл-Ману, предположим, что фундаментальные поля — это поля кварков. Тогда, так же как протонные и нейтронные поля объединяются в двухкомпонентный спинор в изотопическом пространстве $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix}$, в $SU(3)$ можно ввести спинор

$$q = \begin{pmatrix} q'_p \\ q'_n \\ q'_\lambda \end{pmatrix},$$

который описывает тройку кварковых полей. По аналогии с тремя бесследовыми (2×2) -матрицами τ^i , $i = 1, 2, 3$, которые действуют в изотопическом пространстве нуклонного дублета, вводятся восемь бесследовых (3×3) -матриц λ^a , действующих в $SU(3)$ -пространстве кварков. Базис можно выбрать так, что матрицы λ^a удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\lambda^a/2, \lambda^b/2] = if^{ab\gamma} \lambda^\gamma/2. \quad (3.12)$$

Построим теперь векторный и аксиальный токи простейшим способом — в виде билинейной комбинации кварковых полей:

$$\left. \begin{aligned} V_\lambda^\alpha &= \bar{q} \gamma_\lambda \lambda^\alpha q; \\ A_\lambda^\alpha &= \bar{q} \gamma_\lambda \gamma_5 \lambda^\alpha q. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

На первый взгляд кажется, что выбор числовых множителей (вообще говоря, различных для векторных и аксиальных токов) перед приведенными выражениями произволен. Но это не так. Используя канонические антикоммутационные соотношения для спинорных полей вместе с соотношениями (3.12), можно получить одновременные коммутационные соотношения для различных компонент токов. Не будем выписывать пространственные коммутаторы. При желании каждый может получить формальные выражения:

$$\left. \begin{aligned} [V_0^\alpha(x), V_\lambda^\beta(y)]_{x_0=y_0} &= if^{\alpha\beta\gamma} V_\lambda^\gamma(x) \delta(x-y); \\ [V_0^\alpha(x), A_\lambda^\beta(y)]_{x_0=y_0} &= if^{\alpha\beta\gamma} A_\lambda^\gamma(x) \delta(x-y); \\ [A_0^\alpha(x), A_\lambda^\beta(y)]_{x_0=y_0} &= if^{\alpha\beta\gamma} V_\lambda^\gamma(x) \delta(x-y); \\ [A_0^\alpha(x), V_\lambda^\beta(y)]_{x_0=y_0} &= if^{\alpha\beta\gamma} A_\lambda^\gamma(x) \delta(x-y). \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Уравнения (3.14) содержат как (3.11), так и (3.9). Но эти локальные коммутационные соотношения, конечно, более сильные и приводят к далеко идущим следствиям. До сих пор, насколько известно, нет никаких теоретических аргументов против локальных соотношений (3.14) для временных компонент.

Пространственно-временные локальные коммутационные соотношения более формальны. Они должны обязательно содержать так называемые швингеровские члены (ШЧ), которые, по-видимому,

отражают опасности, возникающие при формальном обращении с такими сингулярными объектами, как операторы в квантовой теории поля. Не будем вдаваться в эти подробности, так как все приложения, которые будут здесь обсуждаться, основаны на локальных операторах для нулевых компонент токов или даже на более надежных проинтегрированных соотношениях (заряд — ток).

Отвлечемся теперь от кварковой модели и тех рассуждений, которые привели к коммутационным соотношениям (3.14), и рассмотрим эти соотношения как некоторые независимые гипотезы. Выполняются ли они в реальном мире? Чтобы выяснить это, необходимо научиться извлекать из данных абстрактных утверждений физические следствия, по возможности с минимумом приближений и дополнительных предположений. При непосредственном подходе можно преобразовать коммутационные соотношения в правила сумм. В связи с этим стоит напомнить известное правило сумм для силы осциллятора при дипольном излучении нерелятивистской системы. Для простоты рассмотрим электрон в одномерном потенциале. Пусть E_i — собственная энергия состояния $|i\rangle$. Вероятность электрического дипольного перехода между уровнями i и j пропорциональна так называемой силе осциллятора:

$$f_{ij} = (2m/\hbar^2)(E_j - E_i) |\langle j|x|i\rangle|^2.$$

Уровни энергии, состояния и, следовательно, сила осциллятора зависят от вида потенциала, в котором движется электрон. Тем не менее существуют соотношения, которые не зависят от вида потенциала и которые следуют из наиболее простого коммутационного соотношения: $[x, p] = i\hbar$. С помощью элементарных выкладок легко преобразовать это соотношение в правило сумм Томаса — Райхе — Куна: $\sum_j f_{ij} = 1$.

Однако из коммутаторов алгебры токов получить практические следствия не так просто. Нахождение физического содержания в предположениях алгебры токов и будет одной из основных наших задач. В дальнейшем придется часто использовать понятие PCAC. Поэтому оставим на время алгебру токов и займемся PCAC.

ГЛАВА 4

ЧАСТИЧНОЕ СОХРАНЕНИЕ АКСИАЛЬНОГО ТОКА (PCAC)

4.1. Основные соотношения

Обратимся сначала к распаду π -мезона: $\pi \rightarrow \mu\nu$. Этот распад инициируется аксиальным током без изменения странности и имеет очень простую структуру. Скажем, для $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ амплитуда дается выражением

$$(G/\sqrt{2}) \cos \theta_c \langle 0 | A_\lambda^{1+2} | \pi^- \rangle \bar{u}(l) \gamma_\lambda (1 + \gamma_5) u(\tilde{\nu}). \quad (4.1)$$

Адронный матричный элемент, очевидно, имеет вид

$$\langle 0 | A_\lambda^{i2} | \pi^- \rangle = i \sqrt{2} f_\pi p_\lambda,$$

где p_λ — импульс пиона; f_π — константа пионного распада, имеющая размерность массы. В более общем случае, если описывать изотопические состояния пионов в действительном базисе с индексами i ($i=1, 2, 3$), то, вспоминая, что $\pi^- = (1/\sqrt{2})(\pi^1 - i\pi^2)$, получаем

$$\langle 0 | A_\lambda^i | \pi^j \rangle = i f_\pi p_\lambda \delta_{ij}. \quad (4.2)$$

Обозначим массу пиона μ , а массу заряженного лептона m_l . Тогда ширина распада пиона

$$\Gamma(\pi \rightarrow l\nu) = \frac{G^2 f_\pi^2}{4\pi} \mu m_l^2 \left(1 - \frac{m_l^2}{\mu^2}\right)^2 \cos^2 \theta_c. \quad (4.3)$$

Экспериментальное значение $\Gamma(\pi \rightarrow l\nu)$ соответствует $f_\pi \cos \theta_c \approx \approx 96$ МэВ. Так как в РСАС основное внимание уделяется матричным элементам от дивергенции аксиального тока, заметим, что

$$\langle 0 | \partial A_\lambda^i / \partial x_\lambda | \pi^j \rangle = -i p_\lambda \langle 0 | A_\lambda^i | \pi^j \rangle = \mu^2 f_\pi \delta_{ij}. \quad (4.4)$$

Дивергенция $\partial A_\lambda^i / \partial x_\lambda$ — псевдоскалярный оператор с отрицательной G -четностью, единичным изоспином и нулевым гиперзарядом, т. е. все его квантовые числа совпадают с квантовыми числами i -компоненты пионного триплета. Основная идея РСАС состоит в том, что этот оператор можно использовать для описания рождения и уничтожения пионов. Теперь для процессов с участием пионов следует ввести понятие продолжения амплитуды за массовую поверхность. Отметим, что предполагаемая возможность описывать пионы дивергенцией аксиального тока означает, в частности, что матричные элементы этого оператора медленно меняются при изменении массовой переменной.

Такое утверждение требует, конечно, пояснения. Для начала обсудим реакцию $a + b \rightarrow c + d$, зависящую от обычных мандельстамовских переменных $s = (p_a + p_c)^2$ и $t = (p_a - p_c)^2$. Они могут непрерывно меняться в некоторой физической области, и только в ней амплитуды представляют интерес и их можно экспериментально измерить. Однако известно, что в действительности амплитуда является граничным значением аналитической функции, определенной в значительно большей области комплексных переменных s и t . Это означает, что физическая амплитуда допускает аналитическое продолжение в нефизическую область, которое в силу теоремы Коши единственно. В конечном счете нас интересуют утверждения, которые можно сделать для физической амплитуды. Задача облегчается, если рассматривать амплитуду с точки зрения ее полных аналитических свойств. В настоящее время это общепринятый подход.

В то же время массу данной частицы нельзя варьировать ни в какой области. Для таких параметров понятие аналитического продолжения лишено реального смысла. Теорема Коши здесь не применима. Это, конечно, не означает, что амплитуду вне массовой поверхности *нельзя определить* с помощью некоторого теоретического построения. Но это означает, что различные процедуры, примененные к *одной и той же физической величине*, могут в действительности привести к различным результатам за массовой поверхностью. Нам кажется, что стандартные редуцированные формулы Лемана—Шиманчика—Циммермана (ЛШЦ) дают наиболее естественное определение амплитуд вне массовой поверхности. Тем не менее неопределенности все еще остаются: действительно, какой оператор должен быть использован для описания рождения и уничтожения данных частиц? Оказывается, что подходит любой локальный оператор, построенный из полей рассматриваемой теории, при условии, что он обладает подходящими квантовыми числами и правильно нормирован. Безусловно, пуристы имеют свои дополнительные требования, но на самом деле на массовой поверхности разные варианты приводят к одним и тем же результатам, а за массовой поверхностью, вообще говоря, к различным. Например, «каноническое» поле пиона, даже если оно является фундаментальным полем теории, не обладает в этом смысле преимуществами перед другими операторами. Сторонники РСАС отстаивают то, что роль «пионного» поля может играть дивергенция аксиального тока. Может случиться (как это происходит в σ -модели Гелл-Мана — Леви [9]), что теория содержит каноническое пионное поле φ^i , а аксиальный ток можно определить так, что из уравнений движения следует соотношение $\partial A_\lambda^i / \partial x_\lambda \sim \varphi^i$. Тогда дивергенция аксиального тока *совпадает* с каноническим полем пиона с точностью до константы. Но и это специальное обстоятельство не кажется решающим для принятия идеи РСАС.

Почему следует уходить с массовой поверхности, станет ясно из последующего изложения. В нескольких словах: так как РСАС дает интересные результаты при нулевой массе пиона, есть надежда, что эти результаты останутся более или менее правильными и при возвращении на массовую поверхность.

При использовании стандартных редуцированных формул предполагается, что оператор φ^i , описывающий поле пиона, должен быть нормирован согласно формуле $\langle 0 | \varphi^i | \pi^j \rangle = \delta_{ij}$. Если пользоваться определением РСАС, то необходимо отождествить φ^i с оператором

$$\frac{1}{\mu^2 f_\pi} \frac{\partial A_\lambda^i}{\partial x_\lambda} \equiv \varphi^i. \quad (4.5)$$

Чтобы убедиться в допустимости такого отождествления, рассмотрим процесс $\alpha \rightarrow \beta +$ (лептонная пара) и остановимся на вкладе аксиального тока, который описывается матричным элементом

$\langle \beta | A_{\lambda}^i | \alpha \rangle$. Пусть $q = p_{\alpha} - p_{\beta}$ — импульс лептонной пары. Величина $-iq_{\lambda} \langle \beta | A_{\lambda}^i | \alpha \rangle$ есть матричный элемент от дивергенции тока. Остановимся на этой величине подробнее.

Из всех диаграмм Фейнмана, дающих вклад в $\langle \beta | \partial A_{\lambda}^i / \partial x_{\lambda} | \alpha \rangle$, выделим одну, в которой виртуальный π -мезон связывает лептонную пару с адронами, как показано на рис. 2. Эта диаграмма имеет полюс при $q^2 = \mu^2$ (из-за пионного пропагатора). Вычет в полюсе равен произведению матричного элемента $\langle 0 | \partial A_{\lambda}^i / \partial x_{\lambda} | \pi^i \rangle = \mu^2 f_{\pi}$ на множитель, соответствующий амплитуде за массовой поверхностью для процесса $\alpha \rightarrow \beta + \pi^i$. Таким образом, можно написать:

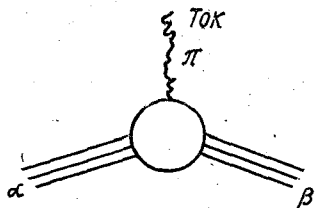


Рис. 2.

$$\langle \beta | \frac{\partial A_{\lambda}^i}{\partial x_{\lambda}} | \alpha \rangle = \frac{f_{\pi} \mu^2}{\mu^2 - q^2} \text{Амр}(\alpha \rightarrow \beta \pi^i) + \text{члены, регулярные при } q^2 = \mu^2.$$

В пределе $q^2 \rightarrow \mu^2$ полюсной член доминирует, поэтому

$$\text{Амр}(\alpha \rightarrow \beta + \pi^i) = \lim_{q^2 \rightarrow \mu^2} \frac{\mu^2 - q^2}{\mu^2 f_{\pi}} \langle \beta | \frac{\partial A_{\lambda}^i}{\partial x_{\lambda}} | \alpha \rangle. \quad (4.6)$$

Интересно сравнить (4.6) со стандартной формулой Лемана—Шиманчика — Циммермана для той же амплитуды, выраженной в терминах «пионного поля»:

$$\text{Амр}(\alpha \rightarrow \beta + \pi^i) = \lim_{q^2 \rightarrow \mu^2} (\mu^2 - q^2) \langle \beta | \phi^i | \alpha \rangle.$$

4.2. β -Распад нейтрона

На массовой поверхности (4.6) есть, очевидно, простое тождество. Опустив же требование $q^2 \rightarrow \mu^2$, мы *определим* амплитуду вне массовой поверхности. РСАС приобретает смысл тогда, когда утверждается, что определенная таким образом амплитуда слабо меняется при изменении q^2 в области от $q^2 = \mu^2$ до $q^2 = 0$. Понятие гладкости амплитуды не очень строгое. Поэтому обратимся сначала к простому приложению, в котором оно приобретает более ясный смысл [10]. Именно, рассмотрим β -распад нейтрона $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ и остановимся на матричном элементе аксиального тока. Наиболее общая структура матричного элемента дается выражением

$$\langle p | A_{\lambda}^{+12} | n \rangle = \bar{u}_p \{ g_A(q^2) \gamma_{\lambda} \gamma_5 + G_A(q^2) q_{\lambda} \gamma_5 \} u_n, \quad (4.7)$$

где $q = n - p$ — переданный импульс. Форм-факторы $g_A(q^2)$ и $G_A(q^2)$ — действительные функции от инвариантной переменной q^2 . В β -распаде нейтрона она меняется в небольшом интервале вблизи $q^2 \approx 0$. Для матричного элемента от дивергенции аксиаль-

ного тока с помощью уравнения Дирака легко получить выражение

$$\begin{aligned} \langle p | \partial A_\lambda^{1+12} / \partial x_\lambda | n \rangle &= -iq_\lambda \langle p | A_\lambda^{1+12} | n \rangle = \\ &= i [2mg_A(q^2) - q^2 G_A(q^2)] \bar{u}_p \gamma_5 u_n. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Однако, используя РСАС, можно записать:

$$\langle p | \partial A_\lambda^{1+12} / \partial x_\lambda | n \rangle = \sqrt{2} \mu^2 f_\pi \langle p | \Phi^{1+12} | n \rangle. \quad (4.9)$$

Матричный элемент справа определяет пион-нуклонную вершинную функцию $g_r(q^2)$:

$$\langle p | \Phi^{1+12} | n \rangle = \sqrt{2} \frac{g_r(q^2)}{\mu^2 - q^2} \bar{u}_p \gamma_5 u_n. \quad (4.10)$$

Вершинная функция $g_r(q^2)$ хорошо определена только в точке $q^2 = \mu^2$, где она совпадает с пион-нуклонной константой связи. За массовой поверхностью $q^2 \neq \mu^2$ $g_r(q^2)$ уже не имеет однозначно определенного значения. Она зависит от выбора оператора, используемого для описания пиона за массовой поверхностью. Здесь мы делаем выбор РСАС. Фактически до сих пор все выкладки были бессодержательны. Они приобретают физическое содержание, только если при выборе оператора поля по РСАС $g_r(q^2)$ слабо меняется при сходе с массовой поверхности. Рассмотрим, в частности, точку $q^2 = 0$ и предположим, что $g_r(0) \approx g_r(\mu^2) \equiv g_r$. Тогда из уравнений (4.8)—(4.10) находим, что

$$f_\pi = mg_A(0)/g_r. \quad (4.11)$$

При $g_A(0) \approx 1,22$, $g_r^2/4\pi \approx 14,6$ имеем $f_\pi \approx 87$ МэВ, что находится в разумном согласии с экспериментальным значением, равным 96 МэВ. Кроме того, из уравнений (4.8)—(4.10) можно получить соотношение

$$2mg_A(q^2) - q^2 G_A(q^2) = \frac{2g_r(q^2)}{\mu^2 - q^2} \mu^2 f_\pi = 2g_r(q^2) f_\pi + \frac{2q^2 g_r(q^2) f_\pi}{\mu^2 - q^2}.$$

Если $g_r(q^2)$ и $g_A(q^2)$ медленно меняются в пределах $\mu^2 \gg q^2 \geq 0$, то

$$G_A(0) \approx -2mg_A(0)/\mu^2. \quad (4.12)$$

Этот результат важен, потому что член, пропорциональный $G_A(0)$ в (4.7), ответствен за так называемое псевдоскалярное взаимодействие в β -распаде и захвате мюона, которое было измерено в экспериментах по захвату мюона в водороде. Знак и численное значение G_A находятся в согласии с предсказанием (4.12).

4.3. РСАС для нейтринных реакций

Другое интересное приложение гипотезы РСАС нашел Адлер в связи с нейтринными реакциями при высоких энергиях [11]. Эти процессы представляют огромный интерес. Позднее мы вернемся к ним и изучим некоторые аспекты этих процессов. Сейчас же зай-

мемся РСАС. Рассмотрим нейтринную реакцию: $\nu + p \rightarrow l + \beta$, где β — некоторая система адронов с нулевой странностью; для определенности в качестве мишени выбран протон. Амплитуда дается выражением

$$M = \frac{G}{\sqrt{2}} \langle \beta | j_{\lambda}^{\bar{w}} | p \rangle \bar{u}_l \gamma_{\lambda} (1 + \gamma_5) u_{\nu} \cos \theta_c. \quad (4.13)$$

Пусть $q = p_{\nu} - p_l$, где p_{ν} — импульс нейтрино; p_l — импульс лептона. Предположим, что можно пренебречь лептонной массой m_l , что вполне разумно при энергиях много выше порога; выберем специальную конфигурацию, когда нейтрино и лептоны имеют параллельные 3-импульсы $\mathbf{p}_l \parallel \mathbf{p}_{\nu}$ (мы работаем в лабораторной системе, хотя это свойство для безмассовых частиц инвариантно). Для такой конфигурации, очевидно, $q^2 = 0$. Более того, простые вычисления показывают, что

$$\bar{u}_l \gamma_{\lambda} (1 + \gamma_5) u_{\nu} = 4 \left(\frac{E_{\nu} E_l}{(E_{\nu} - E_l)^2} \right)^{1/2} q_{\lambda}, \quad (4.14)$$

где E_{ν} и E_l — энергии нейтрино и лептона соответственно. Но

$$-i q_{\lambda} \langle \beta | j_{\lambda}^{\bar{w}} | p \rangle = \langle \beta | \partial j_{\lambda}^{\bar{w}} / \partial x_{\lambda} | p \rangle. \quad (4.15)$$

Таким образом, для параллельной конфигурации амплитуда содержит дивергенцию слабого тока. Однако мы рассматриваем только токи, сохраняющие странность, и чтобы исключить дивергенцию векторной части тока $j_{\lambda}^{\bar{w}}$, можем применить гипотезу CVC. Тогда матричный элемент можно записать при $q^2 = 0$ (т. е. при параллельной конфигурации) в виде

$$M_{q^2 \rightarrow 0} \rightarrow 2 \sqrt{2} i G \left[\frac{E_{\nu} E_l}{(E_{\nu} - E_l)^2} \right]^{1/2} \cos \theta_c \left\langle \beta \left| \frac{\partial A_{\lambda}^{1+12}}{\partial x_{\lambda}} \right| p \right\rangle. \quad (4.16)$$

Оставим (4.16) и обсудим реакцию $\pi^+ + p \rightarrow \beta$, положив q равным импульсу пиона. Согласно стандартной редукционной формуле, амплитуда этого процесса равна

$$M_{\pi} = \lim_{q^2 \rightarrow \mu^2} (\mu^2 - q^2) \langle \beta | \varphi^{1+12} | p \rangle, \quad (4.17)$$

где φ^{1+12} — поле, уничтожающее π^+ (или рождающее π^-). Сделаем теперь отождествление пионного поля по РСАС, согласно уравнению (4.5). Более того, опустим в (4.17) требование $q^2 \rightarrow \mu^2$ и продолжим M_{π} за массовую поверхность по q^2 в точку $q^2 = 0$. В этой точке физическая амплитуда M нейтринной реакции связывается с продолженной пионной амплитудой M_{π} , и мы находим

$$|M|_{q^2 \rightarrow 0}^2 \rightarrow 16 G^2 f_{\pi}^2 \frac{E_{\nu} E_l}{(E_{\nu} - E_l)^2} |M_{\pi}|^2 \cos^2 \theta_c. \quad (4.18)$$

Опять формулы становятся осмысленными только тогда, когда призывается на помощь гипотеза РСАС, согласно которой амплитуда рассеяния пиона с нулевой массой не очень сильно отличается от физической (т. е. на массовой поверхности) пионной амплитуды. С помощью РСАС слабые процессы связываются с сильными! Более детальное выражение этой связи в терминах сечений рассеяния теперь дело техники. Для иллюстрации, пусть $\sigma_\pi(W)$ — полное сечение рассеяния для реакции $\pi^+ + p \rightarrow \beta$, где W — энергия в системе центра инерции или, что эквивалентно, инвариантная масса адронов системы β . Пусть для нейтринной реакции $\partial^2\sigma/\partial\Omega\partial W$ — дифференциальное сечение в лабораторной системе для процесса рассеяния лептона вперед с инвариантной адронной массой W . Тогда

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial\Omega\partial W} = \frac{G^2}{\pi^3} f_\pi^2 \cos^2\theta_c \left(\frac{M^2}{m^2}\right) \left(\frac{2mE_\nu - W^2 + m^2}{W^2 - m^2}\right)^2 \left(\frac{W^2 - m^2}{2W}\right) \sigma_\pi(W), \quad (4.19)$$

где m — нуклонная масса; E_ν — энергия нейтрино в лабораторной системе. Надежная проверка (4.19) пока, к сожалению, невозможна.

4.4. Условия самосогласованности Адлера

Третье приложение РСАС, полученное опять-таки Адлером [12], можно проиллюстрировать на примере пион-нуклонного рассеяния. Пусть p_1 и p_2 — начальный и конечный импульсы нуклона, а k и q — начальный и конечный импульсы мезона. Пусть α и β — изотопическое состояние начального и конечного мезона. Все это можно записать как $k(\alpha) + p_1 \rightarrow q(\beta) + p_2$. При РСАС-выборе пионного поля амплитуда дается выражением

$$\begin{aligned} M^{\beta\alpha} &= \lim_{q^2 \rightarrow \mu^2} \frac{\mu^2 - q^2}{\mu^2 f_\pi} \left\langle p_2 \left| \frac{\partial A_\lambda^\beta}{\partial x_\lambda} \right| p_1, k(\alpha) \right\rangle = \\ &= \lim_{q^2 \rightarrow \mu^2} -i \frac{\mu^2 - q^2}{\mu^2 f_\pi} q_\lambda \langle p_2 | A_\lambda^\beta | p_1, k(\alpha) \rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Общая структура амплитуды имеет вид

$$M^{\beta\alpha} = \bar{u}(p_2) \left[A^{\beta\alpha} + \frac{(\hat{k} + \hat{q})}{2} B^{\beta\alpha} \right] u(p_1), \quad (4.21)$$

где $A^{\beta\alpha}$ и $B^{\beta\alpha}$ — скалярные функции двух кинематических переменных, скажем переменных Мандельштама s и t , или, что более удобно для наших целей, переменных

$$\left. \begin{aligned} v &= (p_1 + p_2)q/2m; \\ v_B &= qk/2m. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

В реальном мире пионная масса, конечно, фиксирована: $q^2 = k^2 = \mu^2$. Функция $B^{\beta\alpha}$ имеет нуклонный полюс, возникающий от

диаграмм Фейнмана (рис. 3):

$$B^{\beta\alpha} \Big|_{\text{полюс}} = -\frac{g_r^2}{2m} \left\{ \frac{\tau_\beta \tau_\alpha}{v_B + v} - \frac{\tau_\alpha \tau_\beta}{v_B - v} \right\}. \quad (4.23)$$

Вернемся теперь к (4.20). Опустим требование $q^2 \rightarrow \mu^2$ и устремим 4-вектор q к нулю (таким образом, и $q^2 \rightarrow 0$), другими словами, определим амплитуду за массовой поверхностью и продолжим ее

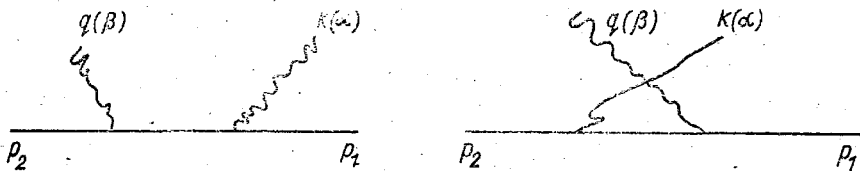


Рис. 3.

по массовой переменной в точку $q^2 = 0$. Но когда $q \rightarrow 0$, «правильные» переменные v и v_B также переходят в нефизическую точку: $v \rightarrow 0$ и $v_B \rightarrow 0$. Из-за множителя q_λ , появляющегося в правой части уравнения (4.20), может показаться, что $M^{\beta\alpha}$ должна исчезать

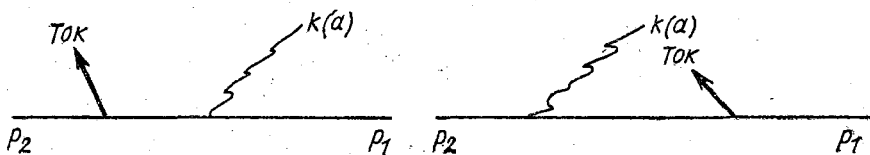


Рис. 4.

при $q \rightarrow 0$. Это, конечно, так, за исключением членов в матричном элементе $\langle p_2 | A_\lambda^\beta | p_1, k(\alpha) \rangle$, которые сингулярны в пределе $q \rightarrow 0$. Легко видеть, что такие члены возникают от полюсных диаграмм рис. 4. Оценивая их вклад, находим в пределе $q \rightarrow 0$:

$$M^{\beta\alpha} \xrightarrow{q \rightarrow 0} \frac{g_A g_r}{f_\pi} \bar{u}(p^2) \left\{ \delta_{\alpha\beta} + \frac{\hat{k} + \hat{q}}{2} \frac{1}{2} \left[\frac{\tau_\alpha \tau_\beta}{v_B - v} - \frac{\tau_\beta \tau_\alpha}{v_B + v} \right] \right\} u(p_1). \quad (4.24)$$

Сравнивая (4.24) с (4.23), видим, что аналитически продолженная функция $B^{\beta\alpha}$ имеет полюса, совпадающие с полюсами $B^{\beta\alpha}$ на массовой поверхности, если выполняется равенство

$$g_A g_r / (2f_\pi) = g_r^2 / 2m \quad (\text{или } f_\pi = m g_A / g_r).$$

Но это соотношение получено ранее для β -распада с помощью PCAC, т. е. PCAC проходит проверку на самосогласованность. Мы также получили новый результат для амплитуды $A^{\beta\alpha}$. В пределе $q \rightarrow 0$

$$A^{\beta\alpha}(v=0, v_B=0, q^2=0) = \delta_{\alpha\beta} \frac{g_A g_r}{f_\pi} = \frac{g_r^2}{m} \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.25)$$

Полученная амплитуда оценена в нефизической точке по отношению ко всем трем переменным ν , ν_B , q^2 . Физической амплитуде соответствует точка $q^2 = \mu^2$. Значения непрерывных переменных $\nu = \nu_B = 0$ также лежат вне физической области. В принципе это не приводит к трудностям. Физическая амплитуда допускает единственное аналитическое продолжение в точку $\nu = \nu_B = 0$; поэтому можно считать $A^{\beta\alpha}(\nu = \nu_B = 0, q^2 = \mu^2)$ известной. (Адлер действительно проделал такую экстраполяцию.) Чтобы сравнить эту величину с амплитудой в левой части (4.25), вновь предположим, что амплитуды слабо меняются при изменении q^2 от μ^2 до нуля. Тогда приходим к соотношению

$$A^{\beta\alpha}(\nu = \nu_B = 0, q^2 = 0) \approx A^{\beta\alpha}(\nu = \nu_B = 0, q^2 = \mu^2), \quad (4.26)$$

и предсказание PCAC состоит в том, что

$$A^{\beta\alpha}(\nu = \nu_B = 0, q^2 = \mu^2) \approx (g_\pi^2/m) \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.27)$$

Формула (4.27) вполне согласуется с экспериментом. Можно сформулировать эти результаты по-другому, если рассмотреть пион-нуклонную амплитуду на пороге $\nu = \mu$, $\nu_B = M^2/(2m)$. Такая физическая точка наиболее близка к $\nu = \nu_B = 0$. Разложим $M^{\beta\alpha}$ на симметричную и антисимметричную по индексам амплитуды:

$$M^{\beta\alpha} = M^{(\epsilon)} \delta_{\beta\alpha} + \frac{1}{2} [\tau^\beta, \tau^\alpha] M^{(0)}. \quad (4.28)$$

Выполним аналогичное разложение для $A^{\beta\alpha}$ и $B^{\beta\alpha}$. Обратимся теперь к четной амплитуде $M^{(\epsilon)}$. На пороге она равна $M^{(\epsilon)} = A^{(\epsilon)} + \mu B^{(\epsilon)}$. Для $A^{(\epsilon)}$ воспользуемся формулой Адлера (4.27), пренебрегая малым различием между точками $\nu = \nu_B = 0$ и пороговыми значениями $\nu = \mu$, $\nu_B = \mu^2/(2m)$. В результате получаем замечательное соотношение на пороге

$$M^{(\epsilon)} \approx 0. \quad (4.29)$$

В терминах s -волновых длин рассеяния $a_{3/2}$ и $a_{1/2}$ (индексы относятся к изоспину) это соотношение имеет вид

$$(1/3)(2a_{3/2} + a_{1/2}) \approx 0.$$

Оно хорошо выполняется для экспериментальных значений

$$a_{1/2} \approx 0,17\mu^{-1}; \quad a_{3/2} = -0,088\mu^{-1}.$$

4.5. Обсуждение результатов

Обсудим некоторые неопределенности в понятиях PCAC. В рассуждениях, ведущих к (4.11), для определения пион-нуклонной вершинной функции $g_\pi(q^2)$ вне массовой поверхности был использован способ определения пионного поля по PCAC. Только в точке $q^2 = \mu^2$

это определение является однозначным, и поэтому соотношение $f_{\pi} = mg_A(0)/g_r(0)$ само по себе бессодержательно. Оно становится осмысленным лишь когда сделано предположение РСАС о том, что $g_r(q^2)$, определенная соответствующим образом, слабо меняется, так что $g_r(0) \approx g_r(\mu^2) \equiv g_r$. Здесь продолженная величина зависит только от массовой переменной q^2 , и этот путь кажется единственным разумным способом интерпретации идей РСАС. В других приложениях амплитуды зависят не только от массы. Так, в пион-нуклонном рассеянии $A^{(\epsilon)}$ — функция двух непрерывных переменных ν и ν_B . Здесь наши действия приводят к утверждению, относящемуся к $A^{(\epsilon)}$ ($\nu = 0, \nu_B = 0, q^2 = 0$). Как обычно, оно лишено смысла до тех пор, пока не сделано предположение о связи этой амплитуды с амплитудой на массовой поверхности $A^{(\epsilon)}$ ($\nu = 0, \nu_B = 0, q^2 = \mu^2$). Последняя величина сама нефизическая по отношению к переменным ν и ν_B , но это не проблема — точка $\nu = 0, \nu_B = 0$ может, по крайней мере в принципе, быть достигнута экстраполяцией из физической области. Однако формулы остаются бессодержательными до тех пор, пока не сделано предположение, что изменения по q^2 малы для фиксированных ν и ν_B , т. е. что $A^{(\epsilon)}(\nu = 0, \nu_B = 0, q^2 = 0) \approx A^{(\epsilon)}(\nu = 0, \nu_B = 0, q^2 = \mu^2)$. Но вместо ν и ν_B можно выбрать другую систему переменных, например мандельштамовские переменные s и t . На массовой поверхности тот или иной выбор есть вопрос удобства. Но вне массовой поверхности утверждение, что амплитуда слабо меняется по q^2 при фиксировании ν и ν_B , неэквивалентно такому же утверждению при фиксированных s и t : соотношения, связывающие одну систему переменных с другой, содержат переменную q^2 . Они эквивалентны, только когда физическая амплитуда действительно медленно меняется в интересующей нас области, т. е. медленно меняется по физическим непрерывным переменным, так что детализация таких переменных становится несущественной для целей РСАС. Можно полагать, что для амплитуды $A^{(\epsilon)}$ это действительно справедливо. Однако, строго говоря, если физическая амплитуда имеет некоторые вариации, хотя бы и очень малые, достаточно большие изменения в выборе переменных могут всегда привести к любому желаемому изменению в предсказаниях РСАС. По-видимому, при выборе переменных каждый должен руководствоваться требованием, чтобы пионный полюс при $q^2 = \mu^2$ доминировал над другими сингулярностями, т. е. чтобы другие сингулярности располагались как можно дальше от точки $q^2 = 0$. Однако простая корреляция между расстоянием до сингулярности и ее вкладом также не очевидна*.

* Полный анализ экстраполяционных формул и зависимости следствий РСАС от способа экстраполяции амплитуд пион-нуклонного рассеяния проведен А. И. Вайнштейном и В. И. Захаровым [29]. — *Прим. пер.*

МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ ТОКОВ

В этой главе будет рассмотрен формализм, весьма полезный при выводе различных следствий из алгебры токов.

Рассмотрим матричный элемент

$$M_{\nu}^{\beta} = i \int dx \exp(iqx) \langle b | \theta(x_0) [j_{\nu}^{\beta}(x), F(0)] | a \rangle, \quad (5.1)$$

где j_{ν}^{β} — оператор некоторого тока, квантовые числа которого включены в индекс β , а $F(0)$ — произвольный локальный оператор. В дальнейшем увидим, что аналогичные матричные элементы возникают в физических задачах. Сейчас же вопрос об интерпретации (5.1) оставим открытым. Умножим (5.1) на iq_{ν} :

$$iq_{\nu} M_{\nu}^{\beta} = i \int dx \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \exp(iqx) \langle b | \theta(x_0) [j_{\nu}^{\beta}(x), F(0)] | a \rangle$$

и проинтегрируем по частям, отбросив поверхностные члены (не будем обращать внимание на протестующие крики пуристов). Учтя, что $\partial \theta(x_0) / \partial x_0 = \delta(x_0)$, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} iq_{\nu} M_{\nu}^{\beta} = & -i \int dx \exp(iqx) \langle b | \theta(x_0) \left[\frac{\partial j_{\nu}^{\beta}(x)}{\partial x_{\nu}}, F(0) \right] | a \rangle - \\ & -i \int dx \exp(iqx) \delta(x_0) \langle b | [j_0^{\beta}(x), F(0)] | a \rangle. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Первый член в правой части содержит дивергенцию тока, которая определяется с помощью PCAC, а второй член содержит одновременной коммутатор, т. е. как раз то, чем занимается алгебра токов.

Если $F(0)$ — оператор тока, то по аналогии с (5.1) можно рассмотреть матричный элемент

$$T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = i \int dx \exp(iqx) \langle b | \theta(x_0) [j_{\nu}^{\beta}(x), j_{\mu}^{\alpha}(0)] | a \rangle. \quad (5.3)$$

Тогда аналогом (5.2) будет выражение

$$\begin{aligned} iq_{\nu} T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} = & -i \int dx \exp(iqx) \langle b | \theta(x_0) \left[\frac{\partial j_{\nu}^{\beta}(x)}{\partial x_{\nu}}, j_{\mu}^{\alpha}(0) \right] | a \rangle - \\ & -i \int dx \exp(iqx) \delta(x_0) \langle b | [j_0^{\beta}(x), j_{\mu}^{\alpha}(0)] | a \rangle. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Можно рассматривать $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$ как амплитуду следующего «процесса»: ток $(\alpha) + a \rightarrow$ ток $(\beta) + b$, где q — импульс «падающего» тока, а

$$k = p_b - p_a - q \quad (5.5)$$

импульс «рассеянного» тока. Для некоторых дальнейших приложений полезно обсудить уравнение

$$q_\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} k_\mu = -k_\mu \int dx \exp(iqx) \langle b | \theta(x_0) \left[\frac{\partial j_\nu^\beta(x)}{\partial x_\nu}, j_\mu^\alpha(0) \right] | a \rangle - \\ - k_\mu \int dx \exp(iqx) \delta(x_0) \langle b | [j_0^\beta(x), j_\mu^\alpha(0)] | a \rangle.$$

Воспользовавшись трансляционной инвариантностью, первый член в правой части представим в виде

$$-k_\mu \int dx \exp(-ikx) \langle b | \theta(-x_0) \left[\frac{\partial j_\nu^\beta(0)}{\partial x_\nu}, j_\mu^\alpha(x) \right] | a \rangle.$$

Как и раньше, выполним интегрирование по частям. Вновь воспользовавшись трансляционной инвариантностью, находим

$$q_\nu T_{\nu\mu}^{\beta\alpha} k_\mu = +i \int dx \exp(iqx) \langle b | \theta(x_0) \left[\frac{\partial j_\nu^\beta(x)}{\partial x_\nu}, \frac{\partial j_\mu^\alpha(0)}{\partial x_\mu} \right] | a \rangle - \\ - k_\mu \int dx \exp(iqx) \langle b | [j_0^\beta(x), j_\mu^\alpha(0)] | a \rangle \delta(x_0) + \\ + i \int dx \exp(iqx) \delta(x_0) \langle b | \left[j_0^\alpha(0), \frac{\partial j_\nu^\beta(x)}{\partial x_\nu} \right] | a \rangle. \quad (5.6)$$

Наконец, рассмотрим амплитуду

$$F_\mu^\alpha = (i)^2 \int dx dy \exp[i(qx + ky)] \langle b | T(j_\mu^\alpha(x), B(y), C(0)) | a \rangle, \quad (5.7)$$

где символ $T(\dots)$ означает T -произведение. Применив ту же процедуру, легко получить

$$iq_\mu F_\mu^\alpha = -i \int dx dy \exp[i(qx + ky)] \langle b | T\left(\frac{\partial j_\mu^\alpha(x)}{\partial x_\mu}, B(y), C(0)\right) | a \rangle - \\ - i \int dx dy \exp[i(qx + ky)] \delta(x_0 - y_0) \langle b | T([j_0^\alpha(x), B(y)], C(0)) | a \rangle - \\ - i \int dx dy \exp[i(qx + ky)] \delta(x_0) \langle b | T([j_0^\alpha(x), C(0)], B(y)) | a \rangle. \quad (5.8)$$

Некоторые важные приложения алгебры токов (правило сумм Кабиббо—Радикати для рассеяния Комптона, правило сумм Адлера для нейтринных реакций, соотношение Адлера — Вайсбергера для пион-нуклонного рассеяния) можно получить непосредственно, используя приведенные формулы. Для этого рассмотрим амплитуду $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$, определенную уравнением (5.3), в специальном случае, когда состояния $|a\rangle$ и $|b\rangle$ тождественны и соответствуют одночастичному адронному (скажем, протонному) состоянию с импульсом p , т. е.

$|a\rangle = |b\rangle = |p\rangle$. Тогда из (5.5) следует, что $k = q$. Кроме того, если адрон обладает спином, будем под $T_{\nu\mu}^{\beta\alpha}$ понимать амплитуду, усредненную по спину. Различные приложения, к которым сейчас следовало бы перейти, отличаются только видом токов и интерпретацией некоторых основных результатов. Но продолжим пока изучение формализма, оставив приложения на будущее. Во всех рассматриваемых случаях j^α будет током, повышающим заряд, а j^β — ему сопряженным. Для краткости запишем $j^\alpha = j$ и $j^\beta = j^+$. Тогда амплитуда $T_{\nu\mu}$ примет вид

$$T_{\nu\mu} = i \int dx \exp(iqx) \langle p | \theta(x_0) [j_\nu^+(x), j_\mu(0)] | p \rangle. \quad (5.9)$$

Так как под $T_{\nu\mu}$ понимается амплитуда, усредненная по спину адронного состояния $|p\rangle$, то $T_{\nu\mu}$ — тензор, зависящий только от импульсов p и q . Следовательно, его можно представить в виде

$$T_{\nu\mu} = A p_\mu p_\nu + B_1 g_{\mu\nu} + B_2 p_\mu q_\nu + B_3 q_\mu p_\nu + B_4 q_\mu q_\nu + i B_5 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} q_\alpha p_\beta, \quad (5.10)$$

где коэффициенты A, B_1, \dots, B_5 — скалярные функции от двух инвариантных переменных — «массовой» переменной q^2 и энергии тока в Л-системе: $v = pq/m, p^2 = m^2$.

Заметим, что функция B_5 отлична от нуля только при нарушении четности из-за интерференции аксиальной и векторной компонент токов.

Обратимся теперь к уравнению (5.4) и разложим первый член в правой части, согласно формуле

$$\int dx \exp(iqx) \langle p | \theta(x_0) \left[\frac{\partial j_\nu^+(x)}{\partial x_\nu}, j_\mu(0) \right] | p \rangle = D p_\mu + E q_\mu, \quad (5.11)$$

где D и E — скалярные функции переменных q^2 и v . Уравнение (5.4) содержит также одновременный коммутатор, для его определения привлечем гипотезы алгебры токов. Будем рассматривать в дальнейшем процессы с j_μ , равными V_μ^{1+i2} и A_μ^{1+i2} :

$$j_\mu^{\omega} = (V_\mu^{1+i2} + A_\mu^{1+i2}) \cos \theta_c + (V_\mu^{4+i5} + A_\mu^{4+i5}) \sin \theta_c.$$

Напомним некоторые соотношения алгебры токов:

$$[V_0^{1-i2}(x), V_\mu^{1+i2}(0)]_{x_0=0} = [A_0^{1-i2}(x), A_\mu^{1+i2}(0)]_{x_0=0} = -2V_\mu^3(x) \delta(x); \quad (5.12)$$

$$[V_0^{4-i5}(x), V_\mu^{4+i5}(0)]_{x_0=0} = [A_0^{4-i5}(x), A_\mu^{4+i5}(0)]_{x_0=0} = - \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} V_\mu^8(x) + V_\mu^3(x) \right\} \delta(x). \quad (5.12a)$$

Можно также отметить соотношения:

$$[V_0^{1-12}(x), A_\mu^{1+12}(0)]_{x_0=0} = [A^{1-12}(x), V_\mu^{1+12}(0)]_{x_0=0} = -2A_\mu^3(x) \delta(x); \quad (5.13)$$

$$[V_0^{4-15}(x), A_\mu^{4+15}(0)]_{x_0=0} = [A_0^{4-15}(x), V_\mu^{4+15}(0)]_{x_0=0} = -\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8(x) + A_\mu^3(x) \right\} \delta(x), \quad (5.13a)$$

но они здесь не встретятся, так как мы усредняем по спине и, следовательно, $\langle p | A_\mu^\alpha | p \rangle = 0$. Наконец, заметим, что

$$\langle p | V_\mu^3 | p \rangle = \frac{p_\mu}{m} I_3; \quad (5.14)$$

$$\langle p | V_\mu^8 | p \rangle = \frac{p_\mu}{m} \frac{\sqrt{3}}{2} Y, \quad (5.15)$$

где Y и I_3 — гиперзаряд и изоспин адрона. Следовательно, во всех обсуждавшихся случаях член с одновременным коммутатором в (5.4) можно записать в виде

$$\int dx \exp(iqx) \delta(x_0) \langle p | [j_\delta^\alpha(x), j_\mu(0)] | p \rangle = C p_\mu, \quad (5.16)$$

где константа C зависит от конкретной ситуации. Теперь подставим (5.10), (5.11) и (5.16) в уравнение (5.4), которое на самом деле приводит к двум уравнениям: одно для коэффициента при p_μ , другое для коэффициента при q_μ . Из первого получаем соотношение

$$(qp)A + q^2 B_2 = -D - C. \quad (5.17)$$

Напомним, что A , B_2 и D зависят от v и q^2 , тогда как C — константа, которая определяется коммутационными соотношениями.

Теперь воспользуемся основным предположением формализма. Функции A , B_2 , D удовлетворяют дисперсионным соотношениям по v при фиксированном q^2 (q — пространственно-подобный вектор). Предположим, что все три функции удовлетворяют дисперсионным соотношениям без вычитаний. Например,

$$A(v, q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv' \frac{\text{Im } A(v', q^2)}{v' - v},$$

и аналогично для B_2 и D . Но в соотношении (5.17) функция A входит с множителем $qp = mv$. В пределе $v \rightarrow \infty$ функции B_2 и D не вносят вклада в (5.17), и поэтому

$$\lim_{v \rightarrow \infty} (qp)A = -\frac{m}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv' \text{Im } A(v', q^2) = -C. \quad (5.18)$$

Это основной результат.

Абсорбтивная часть $T_{\nu\mu}$ задается выражением

$$\text{Abs } T_{\nu\mu} = t_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \int dx \exp(iqx) \langle p | [j_{\nu}^{\dagger}(x), j_{\mu}(0)] | p \rangle, \quad (5.19)$$

и ее тензорное разложение находится в прямом соответствии с уравнением (5.10):

$$t_{\nu\mu} = \text{Im } A p_{\mu} p_{\nu} + \text{Im } B_1 g_{\mu\nu} + \dots \quad (5.20)$$

Раскладывая $t_{\nu\mu}$ по полной системе состояний $|s\rangle$, получаем

$$t_{\nu\mu} = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_s \{ \langle p | j_{\nu}^{\dagger} | s \rangle \langle s | j_{\mu} | p \rangle \delta(s - p - q) - \\ - \langle p | j_{\mu} | s \rangle \langle s | j_{\nu} | p \rangle \delta(s + q - p) \}. \quad (5.21)$$

При $\nu > 0$ вносит вклад только первый член, а при $\nu < 0$ — только второй. Введем теперь новый матричный элемент

$$\tilde{T}_{\nu\mu} = +i \int dx \exp(iqx) \langle p | \theta(x_0) [j_{\nu}(x), j_{\mu}^{\dagger}(0)] | p \rangle, \quad (5.22)$$

отличающийся от $T_{\nu\mu}$ только перестановкой токов, с тензорным разложением, аналогичным (5.10), но с заменой $A \rightarrow \tilde{A}$, $B_1 \rightarrow \tilde{B}_1$ и т. д. Абсорбтивная часть $\tilde{T}_{\nu\mu}$ есть

$$\tilde{t}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \int dx \exp(iqx) \langle p | [j_{\nu}(x), j_{\mu}^{\dagger}(0)] | p \rangle; \quad (5.23)$$

раскладывая ее аналогично (5.21), находим, что

$$t_{\nu\mu}(p, -q) = -\tilde{t}_{\nu\mu}(p, q), \quad (5.24)$$

поэтому, в частности,

$$\text{Im } A(-\nu, q^2) = \text{Im } \tilde{A}(\nu, q^2). \quad (5.25)$$

Таким образом, правило сумм (5.18) можно записать в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\nu [\text{Im } A(\nu, q^2) - \text{Im } \tilde{A}(\nu, q^2)] = \frac{C}{m}. \quad (5.26)$$

Этот же результат можно получить, если провести рассуждения для «нечетной» по изоспину амплитуды: $(1/2)(T_{\nu\mu} - \tilde{T}_{\nu\mu})$. Поэтому предположение о безвычитательных дисперсионных соотношениях достаточно сделать только для этой амплитуды. Модель полюсов Редже согласуется с этим предположением.

Теперь скажем несколько слов о методе системы с бесконечным импульсом. Уравнение (5.18) или эквивалентное ему уравнение (5.26) является важным результатом. Поэтому обсудим его подробнее. Начнем с абсорбтивной части амплитуды $t_{\nu\mu}$, определенной

(5.19), и проинтегрируем ее по q_0 , оставляя трехмерные вектора \mathbf{q} и \mathbf{p} фиксированными. Используя равенство

$$\int dq_0 \exp(iq_0 x_0) = 2\pi \delta(x_0),$$

находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi p_0} \int dq_0 t_{\nu\mu}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, q_0) = \\ & = \frac{1}{p_0} \int dx \exp(-i\mathbf{q}x) \delta(x_0) \langle p | [j_{\nu}^{\dagger}(x), j_{\mu}(0)] | p \rangle, \end{aligned}$$

где для удобства выражение поделено на p_0 . Теперь выберем нулевые компоненты как для индекса ν , так и μ ; тогда, используя (5.16), получим

$$\frac{1}{\pi p_0} \int dq_0 t_{00}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, q_0) = C, \quad (5.27)$$

где

$$t_{00} = \text{Im } A p_0^2 + \text{Im } B_1 - \dots \quad (5.28)$$

Скалярные функции $\text{Im } A$, $\text{Im } B_1$, ... зависят от переменных

$$q^2 = q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 \text{ и } \nu = pq/m = (p_0 q_0 - \mathbf{q}\mathbf{p})/m.$$

Выберем систему, где $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = 0$, так что

$$q_0 = \frac{m\nu}{p_0}; \quad q^2 = \frac{m^2 \nu^2}{p_0^2} - \mathbf{q}^2. \quad (5.29)$$

Преобразуя (5.27) в интеграл по ν , имеем

$$\frac{m}{\pi p_0^2} \int d\nu \{ \text{Im } A \cdot p_0^2 + \text{Im } B_1 + \dots \} = C, \quad (5.30)$$

где

$$\text{Im } A = \text{Im } A(\nu, q^2 = \frac{m^2 \nu^2}{p_0^2} - \mathbf{q}^2) \text{ и т. д.}$$

При интегрировании по ν величина q^2 сама меняется, и $q^2 \rightarrow \infty$ при $|\nu| \rightarrow \infty$. Однако еще осталась свобода в выборе системы отсчета. Предположим, что мы выбрали систему с бесконечным импульсом мишени $p_0 \rightarrow \infty$. Сделаем теперь предположение, что переход к пределу можно осуществить до взятия интеграла в (5.30). Это означает, что для каждого фиксированного ν следует найти предел при $p_0 \rightarrow \infty$ и только затем проинтегрировать по ν . Если такая процедура законна, тогда в (5.30) остается только член с $\text{Im } A$. Более того, $q^2 \rightarrow -\mathbf{q}^2$ и не зависит от ν .

Таким образом, мы получаем прежний результат

$$(1/\pi) \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \text{Im } A(\nu, q^2) = +C/m,$$

в котором интегрирование по ν производится при фиксированном q^2 .

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРЫ ТОКОВ

Основной результат предыдущей главы — формула (5.26) — будет теперь применен для комптоновского рассеяния, нейтринных реакций при высоких энергиях и пион-нуклонного рассеяния. В первых двух случаях гипотеза PCAC не используется, и поэтому они, если не учитывать дополнительных технических предположений, необходимых для вывода (5.26), могут служить для проверки алгебры токов. Пион-нуклонное рассеяние будет обсуждаться при выводе соотношения Адлера—Вайсбергера, там используется гипотеза PCAC.

6.1. Правило сумм Кабиббо — Радикати

Рассмотрим упругое рассеяние фотона с импульсом q на адронной мишени с импульсом p без переворота спина [13]. Для определенности выберем рассеяние на протоне. Пусть ε — вектор поляризации фотона, так что $\varepsilon^2 = -1$, $q^2 = 0$, $\varepsilon q = 0$. Амплитуда рассеяния равна $\varepsilon^2 \varepsilon_\nu T_{\nu\mu} \varepsilon_\mu$, где $T_{\nu\mu}$ задается уравнением (5.3) с $j^\alpha = j^\beta = j^{em}$. Напомним, что электромагнитный ток содержит изоскалярную и изовекторную части. Абсорбтивная часть $T_{\nu\mu}$ связана через оптическую теорему (унитарность) с полным сечением рождения адронов при рассеянии фотонов. В принципе, используя данные по рассеянию на протоне и нейтроне и проводя изотопический анализ конечных адронных состояний, можно определить, какой вклад в сечение дают изоскалярная и изовекторная части тока, а последний можно разложить на вклад от состояний с $I = 1/2$ и $I = 3/2$. Поскольку нам кое-что известно об абсорбтивной части комптоновской амплитуды, рассмотрим комптоновское рассеяние, индуцированное только изовекторной частью электромагнитного тока: $j_\lambda^{em} \rightarrow V_\lambda^3$. Более того, рассмотрим рассеяние «заряженных изовекторных» фотонов, используя члены триплета, повышающие и понижающие заряд (V_λ^3 — нейтральная компонента). В дальнейшем, результаты с помощью изотопической инвариантности можно будет связать с величинами, представляющими физический интерес. А пока обсудим амплитуду

$$T_{\nu\mu} = i \int dx \exp(iqx) \langle p | \theta(x_0) [V_\nu^{1-12}(x), V_\mu^{1+12}(0)] | p \rangle. \quad (6.1)$$

Ее абсорбтивная часть есть

$$t_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \int dx \exp(iqx) \langle p | V_\nu^{1-12}(x), V_\mu^{1+12}(0) | p \rangle. \quad (6.2)$$

Тензорное разложение задается уравнениями (5.10) и (5.20) соответственно ($B_5 \equiv 0$).

Поскольку здесь мы имеем дело с сохраняющимися токами, то получаем

$$q_\nu t_{\nu\mu} = t_{\nu\mu} q_\mu = 0; \quad q_0^2 t_{00} = q_i q_j t_{ij}; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (6.3)$$

Оставим пока q^2 отличным от нуля. Из (6.3) легко установить, что

$$\text{Im } A(\nu, q^2 = 0) = 0, \quad (6.4)$$

но

$$\frac{\partial}{\partial q^2} \text{Im } A(\nu, q^2) |_{q^2=0} = \frac{\text{Im } B_1(\nu, 0)}{m^2 \nu^2}. \quad (6.5)$$

Этот результат вскоре нам понадобится.

Амплитуда $T_{\nu\mu}$ и, следовательно, скалярные величины A, B_1, \dots при $\nu \geq 0$ связаны с процессом $\gamma^+ + p \rightarrow \gamma^+ + p$. Но их можно аналитически продолжить в область $\nu < 0$, где они связаны с кроссинговой реакцией $\gamma^- + p \rightarrow \gamma^- + p$. Пусть $\tilde{A}(\nu, q^2)$, $\tilde{B}_1(\nu, q^2)$ и т. д. относятся к кроссинговой реакции с энергией $\nu > 0$. Тогда $\text{Im } A(\leftarrow\nu, q^2) = \text{Im } \tilde{A}(\nu, q^2)$ и т. д. Обсудим теперь уравнения (5.12), (5.14), (5.16), (5.26). Константа C , связанная с коммутатором, равна

$$C = -(2/m)I_3, \quad (6.6)$$

где I_3 — третья компонента изотопического спина мишени (для протона $I_3 = 1/2$). Уравнение (5.26) принимает вид

$$\frac{m^2}{\pi} \int_0^\infty d\nu [\text{Im } \tilde{A}(\nu, q^2) - \text{Im } A(\nu, q^2)] = 1. \quad (6.7)$$

Для $\text{Im } A$, соответствующей реакции $\gamma^+ + p \rightarrow \gamma^+ + p$, интеграл начинается с порога, определяемого формулой $(q + p)^2 = (m + \mu)^2$. Для $\text{Im } \tilde{A}$, которая соответствует $\gamma^- + p \rightarrow \gamma^- + p$, вклад континуума начинается с того же порога, но существует также «полюсный» вклад от промежуточного состояния с одним нейтроном, т. е. \tilde{A} из-за процесса $\gamma^- + p \rightarrow \text{нейтрон} \rightarrow \gamma^- + p$ при $(q + p)^2 = m^2$ содержит полюс. Его вычет зависит от изовекторных электромагнитных форм-факторов нуклона, взятых в точке q^2 . Выделив этот член, находим

$$1 = [F_1^V(q^2)]^2 - \frac{q^2}{4m^2} [F_2^V(q^2)]^2 + \frac{m^2}{\pi} \int_{\text{порог}}^\infty d\nu [\text{Im } \tilde{A}(\nu, q^2) - \text{Im } A(\nu, q^2)], \quad (6.8)$$

где $F_1^V(q^2)$ и $F_2^V(q^2)$ — соответственно зарядовый и магнитный изовекторный форм-фактор нуклона; $F_1^V(0) = 1$, $F_2^V(0) = \mu_p^a - \mu_n^a$ — разность аномальных магнитных моментов протона и нейтрона. Так как в точке $q^2 = 0$ $\text{Im } A(\nu, 0) = \text{Im } \tilde{A}(\nu, 0) \equiv 0$, то написанное

соотношение при $q^2 = 0$ тривиально. Продифференцируем теперь (6.8) по q^2 и положим $q^2 = 0$. Используя (6.8), находим

$$2 \left(\frac{dFV_1}{dq^2} \right)_{q^2=0} - \frac{1}{4m^2} [FV_2(0)]^2 + \frac{1}{\pi} \int_{\text{порог}}^{\infty} \frac{dv}{v^2} [\text{Im } \tilde{B}_1(v, 0) - \text{Im } B_1(v, 0)] = 0. \quad (6.9)$$

Попробуем выразить интеграл через физически измеримые величины. Напомним, что амплитуда рассеяния $\gamma^+ + p \rightarrow \gamma^+ + p$ равна $(1/2)e^2 e_{\nu} T_{\nu\mu} \varepsilon_{\mu}$, где множитель $1/2$ связан с тем, что рождение γ^+ и уничтожение γ^- описываются оператором $(1/\sqrt{2})V_{\mu}^{1+i2}$. В уравнении (6.9) мы перешли к пределу $q^2 = 0$, поэтому $\varepsilon q = 0$ и $\varepsilon^2 = -1$. Будем использовать лабораторную систему ($\mathbf{p} = 0$), где \mathbf{v} совпадает с энергией фотона, и выберем поперечную калибровку, так что $\varepsilon p = 0$. Тогда абсорбтивная часть амплитуды равна

$$\text{Im } F \equiv (1/2)e^2 e_{\nu} t_{\nu\mu} \varepsilon_{\mu} = (1/2)e^2 \text{Im } B_1(v, 0). \quad (6.10)$$

Для рассеяния $\gamma^- + p \rightarrow \gamma^- + p$ B_1 следует заменить на \tilde{B}_1 . Выражение (6.10) и аналогичное выражение для $\gamma^- p$ -рассеяния — мнимые части фейнмановской амплитуды F для рассеяния вперед. Обычная амплитуда рассеяния f (квадрат абсолютной величины которой дает $d\sigma/d\Omega$) отличается от F множителем 4π . Следуя оптической теореме, находим: $\text{Im } f = \text{Im } F/4\pi = v\sigma(v)/4\pi$.

Введя обозначения $\sigma^+(v)$ и $\sigma^-(v)$ для полных сечений рождения адронов в $\gamma^+ p$ - и $\gamma^- p$ -столкновениях, интеграл в (6.9) можно записать в виде

$$\frac{2}{e^2 \pi} \int_{\text{порог}}^{\infty} \frac{dv}{v} [\sigma^-(v) - \sigma^+(v)].$$

Теперь осталось связать величины σ^- и σ^+ с сечениями рассеяния нейтрального извекторного фотона, соответствующего извекторному току V_{λ}^3 . Для этого необходимо выделить сечения рождения адронов в состояниях с $I = 1/2$ и $I = 3/2$. Пусть $\sigma_{1/2}^V$ и $\sigma_{3/2}^V$ — соответствующие сечения. Их можно связать с σ^- и σ^+ с помощью простых изотопических соотношений. Прюделав все это, получим формулу Кабиббо—Радикати:

$$\frac{1}{2\pi^2 \alpha} \int_{\text{порог}}^{\infty} \frac{dv}{v} [\sigma_{3/2}^V(v) - 2\sigma_{1/2}^V(v)] - \left(\frac{FV_2(0)}{2m} \right)^2 - 2 \left(\frac{dFV_1}{dq^2} \right)_{q^2=0} = 0. \quad (6.11)$$

Сечения рассеяния, появившиеся здесь, в принципе измеримы, но практические трудности их определения очень велики. Гилман и Шнитцер [14] сделали попытку проверить формулу, насытив интеграл ближайшими барионными резонансами. Согласно получилось вполне удовлетворительным.

6.2. Правило сумм Адлера для нейтринных реакций

Технику, использованную выше, можно с минимальными изменениями применить к обсуждению нейтринных реакций при высокой энергии. В этом случае в (5.9) под j_μ понимается слабый адронный ток

$$j_\mu = j_\mu^w = \cos \theta_c (V_\mu^{1+12} + A_\mu^{1+12}) + \sin \theta_c (V_\mu^{4+15} + A_\mu^{4+15}), \quad (6.12)$$

j_μ^+ — сопряженный ему ток. При таком выборе токов $T_{\nu\mu}$ описывает нефизический процесс (лептонная пара) + мишень \rightarrow (лептонная пара) + мишень. Абсорбтивная часть $t_{\nu\mu}$ имеет больший физический смысл: она связана с реакцией ν + мишень $\rightarrow l$ + (все что угодно). Как и раньше, проведем в (5.9) усреднение по спине мишени, но не будем пока уточнять, на каком состоянии $|p\rangle$ происходит рассеяние. Тензорное разложение $T_{\nu\mu}$ дается формулой (5.10). Но при описании нейтринных реакций в (5.10) обычно делают перегруппировку членов и вводят специальные обозначения. Запишем $T_{\nu\mu}$ в следующем виде:

$$T_{\nu\mu} = -T_1 \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + \frac{T_2}{m^2} \left(p_\nu - \frac{pq}{q^2} q_\nu \right) \left(p_\mu - \frac{pq}{q^2} q_\mu \right) - \\ - \frac{i}{2} \frac{T_3}{m^2} \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} q_\alpha p_\beta + \frac{T_4}{m^2} q_\nu q_\mu + \frac{T_5}{m^2} q_\nu p_\mu + \frac{T_6}{m^2} q_\mu p_\nu. \quad (6.13)$$

Абсорбтивная часть $t_{\nu\mu}$ имеет ту же структуру с заменой $T_i \rightarrow \text{Im} T_i$. Обычно вводят обозначения

$$W_i(q^2, \nu) = \frac{1}{\pi} \text{Im} T_i(q^2, \nu). \quad (6.14)$$

В дальнейшем нам понадобятся только «структурные функции» W_1, W_2, W_3 . W_i — скалярные функции переменных q^2 и $\nu = pq/m$, где m — масса адронной мишени. Заметим, что в новых обозначениях

$$\text{Im} A \rightarrow \pi W_2/m^2. \quad (6.15)$$

Учитывая, что $\widetilde{W}_2(\nu, q^2) = -W_2(-\nu, q^2)$, уравнение (5.26) можно записать в виде

$$\int_0^\infty d\nu [W_2(\nu, q^2) - \widetilde{W}_2(\nu, q^2)] \equiv mC, \quad (6.16)$$

где константа C определяется уравнением (5.16). При настоящем выборе токов [см. (6.12)], используя уравнения (5.12)—(5.15), легко найти константу C и получить правило сумм Адлера:

$$\int_0^\infty d\nu [\widetilde{W}_2(\nu, q^2) - W_2(\nu, q^2)] = 2(2I_3 \cos^2 \theta_c + (I_3 + 3Y/2) \sin^2 \theta_c). \quad (6.17)$$

Здесь Y и I_3 — гиперзаряд и третья компонента изотопического спина мишени. В приведенном выражении не выделен вклад от одночастичного промежуточного состояния. В правой части уравнения (6.17) член, пропорциональный $\cos^2\theta_c$, возникает из-за токов без изменения странности, остальные члены — из-за токов с изменением странности. Заметим, что правая часть этого уравнения не зависит от переменной q^2 . Получив правило сумм Адлера (6.17), обратимся к интерпретации структурных функций $W(\nu, q^2)$. Рассмотрим реакцию

$$\nu + (\text{адронная мишень}) \rightarrow l + (\text{адроны}). \quad (6.18)$$

Предположим, что выделено определенное конечное адронное состояние $|s\rangle$, где символ s обозначает как систему, так и ее полный 4-импульс. Пусть $q(\nu)$, $q(l)$ и p — соответственно импульсы нейтрино, лептона и адронной мишени, так что $q(\nu) + p = q(l) + s$. Пусть E — энергия нейтрино в лабораторной системе; E' — энергия лептона; θ — угол между направлением вылета лептона и пучком нейтрино в лабораторной системе. Будем пренебрегать массой лептонов во всех последующих рассуждениях. Обозначим:

$$q = q(\nu) - q(l), \quad \nu = pq/m \quad (6.19)$$

и заметим, что

$$\left. \begin{aligned} q^2 &= -4EE' \sin^2(\theta/2) \leq 0; \\ \nu &= E - E' \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Инвариантная масса M адронной системы s связана с этими величинами соотношением

$$M^2 = (p + q)^2 = 2m\nu + m^2 + q^2. \quad (6.21)$$

Это все, что касается кинематики.

Амплитуда процесса (6.18) равна

$$\text{Amp} = (G/\sqrt{2}) \langle s | j_\mu^\omega | p \rangle \bar{u}_l \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_\nu. \quad (6.22)$$

Получим теперь дифференциальное сечение рассеяния как функцию энергии E' и угла рассеяния лептона θ , когда оно просуммировано по всем конечным адронным состояниям, разрешенным кинематикой. Проведем также усреднение по спине мишени (неполяризованная мишень). При вычислении дифференциального сечения встречается выражение

$$\frac{(2\pi)^4}{2} \sum_s \langle p | j_\nu^\dagger | s \rangle \langle s | j_\mu | p \rangle \delta(s - p - q). \quad (6.22a)$$

Напомним, что $\nu \geq 0$, и заметим, что выражение (6.22a) совпадает с абсорбтивной частью $t_{\nu\mu}$ амплитуды $T_{\nu\mu}$ для $\nu \geq 0$ только первая

сумма в (5.21) дает вклад в $t_{\nu\mu}$. Из уравнений (6.13) и (6.14) следует:

$$\frac{1}{\pi} t_{\nu\mu} = -W_1 \left(g_{\nu\mu} - \frac{q_\nu q_\mu}{q^2} \right) + \frac{W_2}{m^2} \left(p_\nu - \frac{pq}{q^2} q_\nu \right) \left(p_\mu - \frac{pq}{q^2} q_\mu \right) - \\ - i \frac{W_3}{2m^2} \varepsilon_{\nu\mu\alpha\beta} q_\alpha p_\beta + \dots \quad (6.23)$$

В приближении $m_l = m_\nu = 0$ $q_\mu \bar{u}_l \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_\nu = 0$, следовательно, оставшиеся структурные функции W_4, W_5, W_6 не вносят вклада в сечение. Произведя несложные выкладки, получим

$$\frac{\partial^2 \sigma^{(\nu)}}{\partial \Omega \partial E'} = \frac{G^2}{2\pi} (E')^2 \left\{ 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \right. \\ \left. - \frac{(E+E')}{m} W_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}. \quad (6.24)$$

Индекс (ν) в $d\sigma^{(\nu)}$ указывает на нейтринную реакцию (6.18). Структурные функции удовлетворяют следующим условиям положительности:

$$\left(1 - \frac{v^2}{q^2} \right) W_2 \geq W_1 \geq \frac{1}{2m} \sqrt{v^2 - q^2} |W_3| \geq 0. \quad (6.25)$$

Для рассеяния антинейтрино $\bar{\nu} +$ адроны $\rightarrow l^+ +$ адроны кинематический анализ аналогичен случаю нейтрино. Но теперь в сечение входят структурные функции $\tilde{W}_i(v, q^2)$. Другое отличие состоит в противоположном знаке последнего члена в (6.24). Формула для сечения рассеяния антинейтрино имеет вид

$$\frac{\partial^2 \sigma^{(\bar{\nu})}}{\partial \Omega \partial E'} = \frac{G^2}{2\pi} (E')^2 \left\{ 2\tilde{W}_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \tilde{W}_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{(E+E')}{m} \tilde{W}_3 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\}. \quad (6.26)$$

Как в случае нейтрино, так и антинейтрино дифференциальное сечение зависит от трех переменных E, E', θ или, что эквивалентно, от E, v, q^2 . Структурные функции зависят только от двух переменных v и q^2 . Таким образом, в принципе возможно выделить структурные функции. Тогда (6.17) становится важным правилом сумм для одной из этих функций.

До сих пор нет экспериментальных данных для проверки правила сумм Адлера*. Но важность его очевидна. С помощью этого правила можно проверять коммутационные соотношения для токов с изменением и сохранением странности для векторных и аксиальных токов. Кроме того, при $q^2 \neq 0$ проверяются локальные коммутационные соотношения.

* Последние данные по глубоководному электророждению и нейтринным реакциям не противоречат правилу сумм Адлера [3]. — *Прим. пер.*

6.3. Формула Адлера — Вайсбергера

Ниже будут обсуждаться задачи, в которых алгебра токов и РСАС используются совместно. Первое и наиболее значительное достижение — это формула Адлера — Вайсбергера. Один из способов ее получения полностью основан на методах этой главы, и интересно привести его здесь. В следующих главах мы вернемся к соотношению Адлера — Вайсбергера и обсудим его с других точек зрения.

Обратимся к амплитуде $T_{\nu\mu}$ уравнения (5.9), определив ее для аксиальных токов:

$$j_{\mu} = A_{\mu}^{1+12}; \quad j_{\mu}^{\dagger} = A_{\mu}^{1-12}.$$

Тензорное разложение $T_{\nu\mu}$ и абсорбтивной части $t_{\nu\mu}$ такое же, как и раньше; основной результат алгебры токов определяется уравнением (5.26). Для определенности в качестве адронной мишени возьмем протон. Тогда константа C в (5.26), зависящая от коммутатора, равна $C = -1/m$. В (5.26) интегрирование ведется начиная с $\nu = \mu + (\mu^2 - q^2)/(2m)$. Но в $\text{Im}\tilde{A}$ есть еще вклад от одночастичного промежуточного состояния с нейтроном. Ограничимся случаем $q^2=0$ и явно выделим вклад однонуклонного состояния, который содержит аксиальный форм-фактор $g_A(q^2=0) = g_A$ β -распада. В результате находим, что

$$g_A^2 + \frac{m^2}{\pi} \int_{\text{порог}}^{\infty} d\nu [\text{Im}\tilde{A}(\nu, 0) - \text{Im}A(\nu, 0)] = 1. \quad (6.27)$$

Из тензорного разложения $t_{\nu\mu}$ [см. (5.20)] видно, что

$$q_{\nu} t_{\nu\mu} q_{\mu} \xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} m^2 \nu^2 \text{Im}A(\nu, 0). \quad (6.28)$$

Но из (5.21) для $\nu > \mu$ (когда остается только первая сумма) и при $q^2 \rightarrow 0$ получаем

$$m^2 \nu^2 \text{Im}A(\nu, 0) = q_{\nu} q_{\mu} \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_s \langle p | A_{\nu}^{1-12} | s \rangle \langle s | A_{\mu}^{1+12} | p \rangle \delta(s-p-q). \quad (6.29)$$

Отметим, однако, что

$$q_{\nu} \langle p | A_{\nu} | s \rangle_{q=s-p} = i \left\langle p \left| \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\nu}} \right| s \right\rangle;$$

$$q_{\mu} \langle s | A_{\mu} | p \rangle_{q=s-p} = -i \left\langle s \left| \frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\mu}} \right| p \right\rangle.$$

С помощью РСАС-определения пионного поля можно записать:

$$\partial A_{\mu}^{1+12} / \partial x_{\mu} = \sqrt{2} \mu^2 f_{\pi} \varphi; \quad \partial A_{\mu}^{1-12} / \partial x_{\mu} = \sqrt{2} \mu^2 f_{\pi} \varphi^{\dagger},$$

где φ рождает π^+ , уничтожает π^- , а φ^+ — наоборот. Таким образом, для $\nu > \mu$ и $q^2 = 0$

$$m^2 \nu^2 \text{Im } A(\nu, 0) = 2\mu^4 f_\pi^2 \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_s \langle p | \varphi^+ | s \rangle \langle s | \varphi | p \rangle \delta(s - p - q). \quad (6.30)$$

Но, за исключением множителя $2f_\pi^2$, величина в правой части совпадает с мнимой (абсорбтивной) частью амплитуды рассеяния вперед для π^+p -рассеяния, если не учитывать, что $q^2 = 0$, и, следовательно, пион обладает нулевой массой. Для рассеяния вперед $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$ амплитуда равна

$$M^{(+)}(\nu) = \lim_{q^2 \rightarrow \mu^2} (q^2 - \mu^2)^2 i \int dx \exp(iqx) \langle p | \theta(x_0) [\varphi^+(x), \varphi(0)] | p \rangle. \quad (6.31)$$

Абсорбтивная часть есть

$$\text{Im } M^{(+)}(\nu) = (1/2) \lim_{q^2 \rightarrow \mu^2} (q^2 - \mu^2)^2 \int dx \exp(iqx) \langle p | [\varphi^+(x), \varphi(0)] | p \rangle. \quad (6.32)$$

При разложении по полной системе состояний $\text{Im } M^+$ при $\nu > \mu$ и $q^2 = 0$ имеет вид

$$\text{Im } M^{(+)} = \mu^4 \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_s \langle p | \varphi^+ | s \rangle \langle s | \varphi | p \rangle \delta(s - p - q).$$

Итак, действительно, при $\nu > \mu$ и $q^2 = 0$

$$\text{Im } A(\nu, 0) = \frac{2}{m^2 \nu^2} f_\pi^2 \text{Im } M^{(+)}(\nu). \quad (6.33)$$

Тем же способом легко найти, что $\text{Im } \tilde{A}(\nu, 0)$ для $\nu > \mu$ связана с мнимой частью амплитуды π^-p -рассеяния вперед (с нулевой массой π^- -мезона):

$$\text{Im } \tilde{A}(\nu, 0) = \frac{2}{m^2 \nu^2} f_\pi^2 \text{Im } M^{(-)}(\nu). \quad (6.34)$$

Правило сумм, таким образом, может быть записано в виде

$$g_A^2 + \frac{2}{\pi} f_\pi^2 \int_{\text{порог}}^{\infty} \frac{d\nu}{\nu^2} [\text{Im } M^{(-)}(\nu) - \text{Im } M^{(+)}(\nu)] = 1. \quad (6.35)$$

Как всегда, когда имеешь дело с РСАС, полученный результат для амплитуды вне массовой поверхности не обладает физическим смыслом, пока не сделано предположение о том, что амплитуды при $q^2 = 0$ не сильно отличаются от физических, когда $q^2 = \mu^2$. Примем это предположение РСАС и свяжем мнимую часть амплитуды с пол-

ным пион-нуклонным сечением, используя оптическую теорему $\text{Im } M^{(\pm)}(\nu) = |q| \sigma^{\pm}(\nu)$, где $|q| = \sqrt{\nu^2 - \mu^2}$. Тогда

$$g_A^2 + \frac{2}{\pi} f_\pi^2 \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\nu |\bar{q}|}{\nu^2} [\sigma^{(-)}(\nu) - \sigma^{(+)}(\nu)] = 1. \quad (6.36)$$

Выражение (6.36) есть формула Адлера — Вайсбергера. Ее можно рассматривать как уравнение, определяющее g_A через f_π и данные по сечениям. Это приводит к $|g_A| = 1,21$. Или можно воспользоваться прежними результатами PCAC, чтобы выразить константу f_π через g_A : $f_\pi = mg_A/g_r$. Тогда g_A будет определяться только величинами сильных взаимодействий. Это приводит к $|g_A| = 1,15$. В любом случае результат замечательный, если вспомнить, что экспериментальное значение $g_A^{exp} \approx 1,23$.

Чтобы понять, на каких результатах алгебры токов основывается формула Адлера — Вайсбергера, заметим, что π -мезонный импульс брался равным нулю, т. е. использовались только одновременные коммутаторы аксиальных зарядов: $[\tilde{Q}^i, \tilde{Q}^j] = i\epsilon_{ijk} Q^k$.

ГЛАВА 7

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛ АДЛЕРА—ВАЙСБЕРГЕРА

7.1. Пион-нуклонное рассеяние

Формула Адлера — Вайсбергера в том виде, как она представлена в (6.35), есть правило сумм. Однако ее можно записать также в виде низкоэнергетической теоремы для амплитуды πN -рассеяния. Рассмотрим антисимметричную амплитуду:

$$M^{(0)}(\nu) = (1/2)(M^{(-)}(\nu) - M^{(+)}(\nu)), \quad (7.1)$$

где $M^{(-)}$ и $M^{(+)}$ — амплитуды упругого π^-p - и π^+p -рассеяния. Предположим, что $M^{(0)}(\nu)$ можно продолжить за массовую поверхность π -мезона, как не раз делалось раньше. В конечном счете получим интересный результат для предела $q^2 \rightarrow 0$ (здесь q^2 — масса π -мезона). Потребуем, чтобы q^2 было действительным и $q^2 \leq \mu^2$. При фиксированном q^2 $M^{(0)}(\nu)$ является аналитической функцией в плоскости ν с полюсами при $\nu = \pm q^2/(2m)$ и разрезами вдоль действительной оси при $|\nu| > \mu + (\mu^2 - q^2)/(2m)$. Амплитуда $M^{(0)}(\nu)$ — нечетная функция ν , т. е. $M^{(0)}(\nu) = -M^{(0)}(-\nu)$; и $M^{(0)}(\nu)/\nu$, по-видимому, удовлетворяет дисперсионному соотношению без вычитаний. Вообще говоря, из-за нечетности $M^{(0)}(\nu)$ в точке $\nu = 0$ амплитуда должна зануляться. Но в специальном случае $q^2 \rightarrow 0$ есть тонкость, связанная с движением полюсов к началу координат. Эти полюсы возникли из-за нейтронного промежуточного состоя-

ния. Неопределенность можно разрешить, если учесть разность масс $\Delta m = m_n - m_p$ между нейтроном и протоном. Выделив отдельно полюсной член, получим для $q^2 = 0$ соотношение

$$\frac{M^{(0)}(\nu)}{\nu} = \frac{g_r^2 (\Delta m)^2}{2m^2 [(\Delta m)^2 - \nu^2]} + \frac{2}{\pi} \int_{\text{порог}}^{\infty} \nu' \frac{\text{Im } M^{(0)}(\nu')}{\nu'^2 - \nu^2}; \quad (7.2)$$

в котором порог начинается с $\nu_0 = \mu + \mu^2/2m$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{M^{(0)}(\nu)}{\nu} = \frac{g_r^2}{2m^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\text{порог}}^{\infty} \frac{\nu'}{\nu'^2} [\text{Im } M^{(-)}(\nu') - \text{Im } M^{(+)}(\nu')]. \quad (7.3)$$

Сравним (7.3) с (6.35), используя для f_π соотношение PCAC: $f_\pi = mg_A/g_r$. Тогда правило сумм (6.35) превращается в низкоэнергетическую теорему

$$\frac{M^{(0)}(\nu)}{\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \frac{g_r^2}{2m^2 g_A^2}. \quad (7.4)$$

Получим этот же результат непосредственно. Вернемся к уравнению (5.6) с $|a\rangle = |b\rangle = |p\rangle$ и $k = q$. Рассмотрим токи $j_\mu^\alpha = A_\mu^\alpha$; $j_\nu^\beta = A_\nu^\beta$; $\alpha, \beta = 1, 2, 3$. Для тренировки будем теперь работать с изотопическими индексами в действительном базисе. С помощью PCAC-определения пионного поля первый член в правой части (5.6) связывается с амплитудой для пион-нуклонного рассеяния вперед, с индексами α и β для начального и конечного π -мезонов:

$$M^{\beta\alpha}(\nu) = \lim_{q^2 \rightarrow \mu^2} \frac{(+i)(q^2 - \mu^2)^2}{\mu^4 f_\pi^2} \int dx \exp(iqx) \times \\ \times \langle p | \theta(x_0) \left[\frac{\partial A_\nu^\beta(x)}{\partial x_\nu}, \frac{\partial A_\mu^\alpha(0)}{\partial x_\mu} \right] | p \rangle. \quad (7.5)$$

Уйдем теперь с массовой поверхности, опустив требование $q^2 \rightarrow \mu^2$, и перейдем к пределу $q \rightarrow 0$, оставляя члены только первого порядка по q . Это означает, что члены $\sim q^2$ не учитываются, а в разложении по ν следует оставить только линейный член. Тогда первый член в правой части (5.6) заменяется на $f_\pi^2 M^{\beta\alpha}(\nu)$. Левая же часть (5.6) из-за введения конечной разности масс между протоном и нейтроном имеет второй порядок по q ; ею пренебрегаем. Второй член в правой части — хорошо известный одновременной коммутатор

$$q_\mu \int dx \delta(x_0) \langle p | [A_0^\beta(x), A_\mu^\alpha(0)] | p \rangle = i\epsilon_{\beta\alpha\gamma} q_\mu \langle p | V_\mu^\gamma | p \rangle = \\ = i\epsilon_{\beta\alpha\gamma} (\tau^\gamma/2) \nu. \quad (7.6)$$

Наконец, третий член в правой части (5.6) включает одновременной коммутатор тока с дивергенцией тока. Он не задается стандартной алгеброй токов и должен рассматриваться как модельно-зави-

симый. Тем не менее нечто полезное все же можно сказать об этих так называемых σ -членах. Очевидно, третий член четен по вектору \mathbf{q} и, следовательно, в первом порядке не зависит от \mathbf{q} :

$$\begin{aligned}\sigma^{\beta\alpha} &= (+i) \int d^3x \langle p | \left[A_0^\beta(\mathbf{x}, x_0), \frac{\partial A_\mu^\alpha}{\partial x_\mu}(0, x_0) \right] | p \rangle = \\ &= (+i) \int d^3x \langle p | \left[A_0^\beta(0, x_0), \frac{\partial A_\mu^\alpha}{\partial x_\mu}(\mathbf{x}, x_0) \right] | p \rangle = \\ &= (+i) \int d^3x \langle p | \left[A_0^\beta(\mathbf{x}, x_0), \frac{\partial A_0^\alpha}{\partial x_0}(0, x_0) \right] | p \rangle. \quad (7.7)\end{aligned}$$

Первое равенство можно получить, воспользовавшись трансляционной инвариантностью и сделав замену переменных: $x \rightarrow -x$. Второе — теорема Гаусса; здесь вновь использована трансляционная инвариантность. Далее:

$$\begin{aligned}\sigma^{\beta\alpha} &= +i \frac{\partial}{\partial x_0} \int d^3x \langle p | [A_0^\beta(\mathbf{x}, x_0), A_0^\alpha(0, x_0)] | p \rangle - \\ &- i \int d^3x \langle p | \left[\frac{\partial A_0^\beta(\mathbf{x}, x_0)}{\partial x_0}, A_0^\alpha(0, x_0) \right] | p \rangle.\end{aligned}$$

Второй член в правой части есть $\sigma_{\alpha\beta}$, откуда,

$$\sigma^{\beta\alpha} - \sigma^{\alpha\beta} = +i \frac{\partial}{\partial x_0} \int d^3x \langle p | [A_0^\beta(0, x_0), A_0^\alpha(\mathbf{x}, x_0)] | p \rangle.$$

Однако матричный элемент в правой части не зависит от времени. Следовательно,

$$\sigma^{\beta\alpha} = \sigma^{\alpha\beta}. \quad (7.8)$$

Разложим пион-нуклонную амплитуду на $M^{(e)}$ и $M^{(0)}$:

$$M^{\beta\alpha} = M^{(e)} \delta^{\beta\alpha} + i s^{\beta\alpha\nu} (\tau^\nu/2) M^{(0)}. \quad (7.9)$$

Антисимметричная амплитуда $M^{(0)}$ не содержит вклада от $\sigma^{\beta\alpha}$ -члена. Отсюда находим $M^{(0)}(\nu)/\nu \rightarrow 1/(2f_\pi^2)$, что с учетом соотношения $f_\pi = mg_A/g_r$ согласуется с (7.14). Точка $\nu = 0$ — нефизическая для реальных пионов. Чтобы применить полученную низкоэнергетическую теорему к реальному миру, необходимо продолжить амплитуду в точку $\nu = 0$, используя дисперсионные соотношения, которые возвращают к правилу сумм Адлера — Вайсбергера.

Существует и другой подход. Предположим, что это выражение для $M^{(0)}(\nu)/\nu$ в точке $\nu = 0$ справедливо вплоть до порога физического пион-нуклонного рассеяния, т. е.

$$\frac{M^{(0)}(\mu)}{\mu} \approx \frac{g_r^2}{2m^2 g_A^2}. \quad (7.10)$$

Точные дисперсионные соотношения на массовой поверхности имеют вид

$$\frac{M^{(0)}(\nu)}{\nu} = \frac{g_r^2}{2m^2} \frac{\mu^2}{\nu^2 - (\mu^2/2m)^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu'^2 - \nu^2} [\text{Im } M^{(-)}(\nu') - \text{Im } M^{(+)}(\nu')].$$

Положим $\nu = \mu$, опустим поправки порядка μ^2/m^2 , а в знаменателе $\nu'^2 - \mu^2$ пренебрежем мезонной массой. Тогда

$$\frac{M^{(0)}(\mu)}{\mu} = \frac{g_r^2}{2m^2} + \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu'^2} [\text{Im } M^{(-)}(\nu') - \text{Im } M^{(+)}(\nu')].$$

Сравним с (6.35) и положив $f_{\pi} = mg_A/g_r$, получим, что этот результат совпадает с (7.10).

Пороговую формулу (7.10) можно переписать в виде предсказаний для величин S -волновых длин рассеяния. Для этого воспользуемся соотношениями

$$\left. \begin{aligned} M^{(0)}(\mu) &= 4\pi (1 + \mu/m) a^{(0)}; \\ a^{(0)} &= (1/2) [a^{(-)} - a^{(+)}] = (1/3) [a_{1/2} - a_{3/2}]. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Индексы в последнем равенстве относятся к изоспину. При таком подходе получаем для длин πN -рассеяния

$$a^{(0)} = \frac{L}{1 + \mu/m}; \quad L = \left(\frac{\mu}{2m^2 g_A^2} \right) \left(\frac{g_r^2}{4\pi} \right) \approx 0,11\mu^{-1}. \quad (7.12)$$

На опыте $a^{(0)} \approx 0,086\mu^{-1}$, т. е. согласие вполне удовлетворительное.

До сих пор алгебра токов и РСАС использовались для получения предсказаний для нечетной амплитуды. Обратимся к изотопически-четной амплитуде $M^{(e)}$. Ее значение на пороге определяется σ -членом (7.7). Однако из условия самосогласованности Адлера (4.27) следует, что $M^{(e)}$ исчезает в точке $\nu = 0$. Малые сдвиги от $\nu = 0$ до порога должны приводить к неопределенностям порядка $(\mu/m)^2$, где m — масса протона. Следовательно, можно ожидать, что величина σ -члена того же порядка. Обобщим результаты на пороговое поведение амплитуд рассеяния π -мезонов на произвольной массивной мишени [16]. Систематически пренебрегая σ -членом, легко найти, что

$$M^{\beta\alpha} = -\frac{\mu}{f_{\pi}^2} (I_{\pi}^{\nu})_{\beta\alpha} \langle t | I^{\nu} | t \rangle. \quad (7.13)$$

Здесь I_{π}^{ν} — оператор изотопического спина в $SU(2)$ -пространстве пионов; I^{ν} — то же самое в изотопическом пространстве мишени t . Пусть I_t — изотопический спин мишени.

Тогда пороговое значение амплитуды M_I для рассеяния в состоянии с полным изоспином I равно

$$M^I(\mu) = \frac{\mu}{f_{\pi}^2} \left\{ \frac{I_t(I_t+1) + 2 - I(I+1)}{2} \right\}. \quad (7.14)$$

Аналогично для длины рассеяния

$$a_I = \frac{L}{1 + \mu/m_t} \{I_t(I_t+1) - 2 - I(I+1)\}. \quad (7.14a)$$

7.2. Подход Вайнберга к πN -рассеянию

При обсуждении формулы Адлера — Вайсбергера предполагалось, что результат, полученный для $M^{(0)}(\nu)/\nu$ в точке $\nu = 0$, применим и на пороге, т. е. $M^{(0)}(\nu)/\nu$ мало изменяется от точки $\nu = 0$ до порога $\nu = \mu$, который является ближайшей к $\nu = 0$ физической доступной точкой. Можно сказать, что мы разложили $M^{(0)}$ в ряд по степеням q и определили с помощью алгебры токов и РСАС линейный член, а далее предположили, что разложение до первого порядка достаточно точно описывает амплитуду вплоть до порога. Вайнберг привел аргументы в пользу именно такого подхода [16]. Действительно, наиболее интересные результаты получаются в пределе нулевого импульса π -мезона. Причем не только масса, но и другие величины принимают нефизические значения. Разложив амплитуду по степеням q , с помощью алгебры токов и РСАС можно найти коэффициенты первых членов разложения. Далее необходимо предположить, что первые члены — действительно хорошее приближение к амплитуде вплоть до порога, где инвариантные переменные, содержащие q , «малы», насколько это допускается кинематикой. В πN -рассеянии было выполнено разложение до первого порядка по q^* .

Особо интересное приложение эти идеи нашли в работе Вайнберга по πN -рассеянию. Рассмотрим реакцию $k(a) + p(c) \rightarrow q(b) + l(d)$, где k, p, q, l — импульсы пионов, а a, b, c, d — изотопические индексы. Если рассматривать все пионы на равном основании, то амплитуда должна раскладываться по степеням всех импульсов, при этом возникнут только четные степени. До каких пор следует проводить разложение? Очевидно, до тех пор, пока коэффициенты можно определить, и не далее.

Введем обычные мандельштамовские переменные:

$$\left. \begin{aligned} s &= (p+k)^2, \quad t = (k-q)^2, \quad u = (p-q)^2; \\ s + t + u &= p^2 + k^2 + q^2 + l^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

* Последовательный анализ низкоэнергетического разложения амплитуды πN -рассеяния в связи с проверкой предсказаний алгебры токов и РСАС см. в работе [29] и обзоре [31]. — *Прим. пер.*

Бозе-статистика, кроссинг и изотопическая инвариантность приводят к следующей структуре амплитуды рассеяния, разложенной до второго порядка по импульсам:

$$M_{cd}^{ba} = \delta_{ab} \delta_{cd} [A + B(s + u) + Ct] + \delta_{ad} \delta_{bc} [A + B(s + t) + Cu] + \delta_{ac} \delta_{bd} [A + B(u + t) + Cs], \quad (7.16)$$

где A, B, C — константы, не зависящие от импульсов. Проверим, удовлетворяет ли это выражение бозе-симметрии. Действительно, при замене $a \leftrightarrow c$ и $k \leftrightarrow p$ ($s \leftrightarrow s, t \leftrightarrow u$) амплитуда переходит сама в себя. Аналогично кроссинг-симметрия требует, чтобы амплитуда была четной по отношению к замене $c \leftrightarrow b$ и $p \leftrightarrow -q$ ($s \leftrightarrow t; u \leftrightarrow u$). Это свойство также выполняется.

Интересно, что (7.16) не зависит явно от массовых переменных p^2, q^2, k^2, l^2 , за исключением того, что $s + t + u = p^2 + q^2 + k^2 + l^2$. Выразим теперь s -волновые длины рассеяния a_l (l — полный изотопический спин) через A, B и C . Легко получить:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{32\pi\mu} [5A + 8\mu^2 B + 12\mu^2 C]; \\ a_2 &= \frac{1}{32\pi\mu} [2A + 8\mu^2 B]. \end{aligned} \right\} \quad (7.17)$$

Попытаемся определить коэффициенты A, B и C . Введем амплитуду

$$T_{\nu\mu} = (+i) \int dx \exp(iqx) \langle l(d) | \theta(x_0) [A_\nu^b(x), A_\mu^a(0)] | p(c) \rangle$$

и обратимся к уравнению (5.6). Первый член в правой части с точностью до множителя совпадает с π -амплитудой M_{cd}^{ba} . Третий член справа — это σ -член σ_{cd}^{ba} , симметричный по индексам b и a при $k = q \rightarrow 0$. Положим $q = k \rightarrow 0$, но оставим $p = l$ на массовой поверхности. В первом порядке по q и k левой частью уравнения (5.6) можно пренебречь, так как полюсные члены не дают вклада в π -рассеяние. Второй член справа — хорошо известный коммутатор

$$\begin{aligned} k_\mu \int dx \exp(ikx) \delta(x_0) \langle l(d) | [A_0^b(x), A_\mu^a(0)] | p(c) \rangle &= \\ = i\epsilon^{bav} \langle l(d) | V_\mu^v | p(c) \rangle k_\mu &= (i\epsilon^{bav}) (i\epsilon^{avc}) 2pk. \end{aligned}$$

Таким образом, при $k = q \rightarrow 0$ в первом порядке по $k = q$ имеем

$$M_{cd}^{ba} = \frac{1}{f_\pi^2} [\delta_{bc} \delta_{da} - \delta_{ba} \delta_{dc}] 2pk + \sigma_{dc}^{ba}. \quad (7.18)$$

Но в этом порядке

$$2pk \rightarrow (u - s)/2. \quad (7.19)$$

Первый член в правой части (7.18) антисимметричен по индексам a и b , тогда как σ_{cd}^{ba} симметричен. Сравнивая антисимметричные

части уравнений (7.16) и (7.18) и используя (7.19), находим

$$C - B = 1/f_{\pi}^2 = g_r^2 / (m^2 g_A^2).$$

Из уравнения (7.17) следует, что

$$2a_0 - 5a_2 = 6L; \quad L = \left(\frac{\mu}{2m^2 g_A^2} \right) \left(\frac{g_{\mu}^2}{4\pi} \right) \approx 0,11\mu^{-1}. \quad (7.20)$$

Рассмотрим, к чему приводит условие самосогласованности Адлера. Оно утверждает, что амплитуда должна исчезать, если импульс одного из пионов стремится к нулю, а остальные находятся на массовой поверхности. Кинематически это соответствует точке $s = t = u = \mu^2$. Из условия самосогласованности следует, что

$$A + \mu^2 (2B + C) = 0. \quad (7.21)$$

Для завершения анализа необходимо еще одно соотношение. Вайнберг ввел новое физическое предположение, касающееся σ -члена в (7.18). При $p = l$ на массовой поверхности и в нулевом порядке по $k = q$ σ -член симметричен по индексам a и b . Вайнберг предположил, что он вообще пропорционален $\delta_{ab}\delta_{cd}$. Это предположение справедливо по крайней мере в σ -модели Гелл-Мана и Леви. Таким образом, в нулевом порядке по $k = q$ имеем

$$M_{cd}^{ba} \sim \delta_{ba}\delta_{cd}; \quad s = u = \mu^2, \quad t = 0.$$

Тогда из уравнения (7.16) следует, что

$$A + \mu^2 (B + C) = 0. \quad (7.22)$$

Отсюда можно найти

$$B = 0; \quad A = -\mu^2 C; \quad C = g^2 / (m^2 g_A^2), \quad (7.23)$$

а для длин рассеяния

$$a_0 = (7/4) L; \quad a_2 = - (1/2) L. \quad (7.24)$$

Определение длины L , данное в (7.20), получено с помощью соотношения $f_{\pi} = mg_A/g_r$. Фактически $(f_{\pi})_{\text{exp}}$ больше mg_A/g_r приблизительно на 10%, поэтому если использовать значение $(f_{\pi})_{\text{exp}}$, то L уменьшается приблизительно на 20%. Но РСАС — довольно грубая теория, и не стоит придавать этому различию большого значения. В рассмотрении Вайнберга важно то, что оно приводит на первый взгляд к удивительно малым длинам рассеяния. К сожалению, прямая проверка этого факта возможна только в отдаленном будущем. Возможность косвенного определения пп-рассеяния, например, с помощью экстраполяционной процедуры Чу-Лоу для $(\pi N \rightarrow 2\pi N)$ -реакции широко обсуждалась в литературе. Но

оказывается, что этот метод мало подходит для определения лл-рассеяния в области низких энергий, которые нас интересуют. Измерить более точно параметры лл-рассеяния можно при анализе структуры спектра в K_{14} -распаде; эти сложные эксперименты находятся на стадии подготовки в нескольких лабораториях*.

ГЛАВА 8

ПОЛУЛЕПТОННЫЕ РАСПАДЫ

В приложениях алгебры токов к комптоновскому рассеянию и нейтринным реакциям токи проявлялись как токи взаимодействия. При выводе формулы Адлера — Вайсбергера токи вошли только из-за РСАС. В других случаях одни токи входят как токи взаимодействия, другие же только через РСАС для описания мягких пионов. Реакция фоторождения $\gamma + N \rightarrow N + \pi$ и тесно связанная с ней реакция электророждения $e + N \rightarrow e + N + \pi$ — очевидные примеры, когда пион можно считать мягким. Такие процессы широко обсуждались в литературе. Их обзор занял бы слишком много места**. Вместо этого рассмотрим два примера слабых распадов: $K \rightarrow \pi + l + \nu$ и $K \rightarrow \pi + \pi + l + \nu$.

8.1. Распад K_{13}

Для определенности рассмотрим реакцию $K^- \rightarrow \pi^0 + l + \tilde{\nu}$. Пусть K и q — импульсы K^- и π -мезона. В этой реакции участвует только векторный ток с изменением странности V_{μ}^{4+i5} . Поэтому амплитуда распада выражается как

$$\text{Amp} = \frac{G}{\sqrt{2}} \sin \theta_c \langle q | V_{\mu}^{4+i5} | K \rangle \bar{u}_l \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) u_{\nu}.$$

Адронный матричный элемент имеет структуру

$$M_{\mu} \equiv \langle q | V_{\mu}^{4+i5} | K \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ f_+ (K + q)_{\mu} + f_- (K - q)_{\mu} \}, \quad (8.1)$$

где форм-факторы f_{\pm} — скалярные функции переменной $Q^2 = (K - q)^2$. Если определить амплитуду за массовой поверхностью, то форм-факторы будут также зависеть от массы пиона q^2 .

* Анализ выполненных к настоящему времени экспериментов по K_{14} -распадам приводит к фазам лл-рассеяния, согласующимся с предсказанными Вайнбергом (см. [32]). — *Прим. пер.*

** Наиболее полный анализ фото- и электророждения пионов приведен в работе [33]. См. также обзор [31]. — *Прим. пер.*

Действительно, с учётом РСАС-определения поля π -мезона и стандартной редукционной формулы ЛШЦ можно написать

$$M_\mu = \lim_{q^2 \rightarrow \mu^2} i \frac{\mu^2 - q^2}{\mu^2 f_\pi} \int dx \exp(iqx) \langle 0 | \theta(x_0) \left[\frac{\partial A_\nu^3(x)}{\partial x_\nu}, V_\mu^{4+i5}(0) \right] | K \rangle. \quad (8.2)$$

Опустим значок $\lim_{q^2 \rightarrow \mu^2}$ и используем написанное выражение для определения амплитуды вне массовой поверхности. Интересные результаты могут быть получены только в нефизическом пределе $q \rightarrow 0$. Действительно, как и в (5.3), введем выражение

$$T_{\nu\mu} = +i \int dx \exp(iqx) \langle 0 | \theta(x_0) [A_\nu^3(x), V_\mu^{4+i5}(0)] | K \rangle$$

и заметим, что из (5.4) следует, что

$$-iq_\nu T_{\nu\mu} = \frac{\mu^2 f_\pi}{\mu^2 - q^2} M_\mu + i \int dx \exp(iqx) \delta(x_0) \times \\ \times \langle 0 | [A_0^3(x), V_\mu^{4+i5}(0)] | K \rangle.$$

В пределе $q \rightarrow 0$ левая часть исчезает (здесь нет вклада полюсных членов) и

$$M_\mu(K, q \rightarrow 0) = -\frac{i}{f_\pi} \int dx \delta(x_0) \langle d | [A_0^3(x), V_\mu^{4+i5}(0)] | K \rangle = \\ = -\frac{i}{2f_\pi} \langle 0 | A_\mu^{4+i5} | K \rangle. \quad (8.3)$$

Но

$$\langle 0 | A_\mu^{4+i5} | K \rangle = i\sqrt{2} f_K K_\mu \quad (8.4)$$

есть адронный матричный элемент, который появляется в $(K \rightarrow l + \nu)$ -распаде; параметр f_K играет здесь ту же роль, что и f_π в распаде $\pi \rightarrow l + \nu$. Таким образом, рассматривая K_{l3} -форм-факторы как функции импульсов K и π -мезонов, находим:

$$f_+(K, q=0) + f_-(K, q=0) = f_K/f_\pi. \quad (8.5)$$

Это основной результат стандартного РСАС-подхода к распаду K_{l3} . Остается, однако, вопрос об интерпретации этого результата. Проблема K_{l3} привлекает большое внимание. С нашей точки зрения, она очень важна, так как рассуждения, ведущие к (8.5), просты и вполне в духе алгебры токов и РСАС. Интересно, что при наиболее естественной интерпретации результат (8.5) противоречит современным экспериментальным данным*.

* Экспериментальная ситуация с соотношением (8.5) и форм-факторами K_{l3} -распадов вообще долгое время была крайне противоречивой, вплоть до наиболее точных экспериментов, выполненных в 1973 г. (см. [24]). Современные экспериментальные данные согласуются с соотношением (8.5) [34]. — Прим. пер.

Форм-факторы — скалярные функции K и q . Но в реальном мире $K^2 = m_K^2$ и $q^2 = \mu^2$ фиксированы; таким образом, есть только одна физическая переменная величина, в качестве которой обычно выбирают квадрат переданного импульса $Q^2 = (K - q)^2$. Однако форм-факторы были продолжены за массовую оболочку и стали зависеть от массовой переменной q^2 . Форм-факторы как функции Q^2 и q^2 были оценены в точке $Q^2 = m_K^2, q^2 = 0$. Эта точка — нефизическая по обоим переменным, так как физическая область определяется значениями $q^2 = \mu^2$ и $m_i^2 < Q^2 < (m_K - \mu)^2$. Однако форм-факторы — аналитические функции Q^2 , и их можно продолжить в точку $Q^2 = m_K^2$, т. е. можно считать $f_{\pm}(Q^2 = m_K^2, q^2 = \mu^2)$ известными. Однако для уравнения (8.5) требуются $f_{\pm}(Q^2 = m_K^2, q^2 = 0)$. До тех пор пока не установлено, как величины вне массовой поверхности связаны с величинами на массовой поверхности, уравнение (8.5) не имеет смысла. Для этой цели воспользуемся гипотезой РСАС, которая утверждает, что форм-факторы слабо зависят от q^2 . Возникает желание положить $f_{\pm}(Q^2, q^2 = 0) \approx f_{\pm}(Q^2, q^2 = \mu^2)$, т. е. вообще пренебречь зависимостью форм-факторов от q^2 . Но действительно ли форм-факторы слабо зависят от q^2 при фиксированном Q^2 или следует фиксировать какую-нибудь другую переменную, скажем, $2Kq = m_K^2 + q^2 - Q^2$? Если физические форм-факторы слабо изменяются при изменении Q^2 (в интересующей нас области), то они, конечно, будут слабо изменяться по Kq или любой другой переменной. В таком случае выбор переменных безразличен с точки зрения РСАС. Если же форм-факторы изменяются быстро, то выбор переменных становится существенным и РСАС теряет смысл. При изучении форм-факторов обычно используется линейная параметризация данных

$$f_{\pm}(Q^2, q^2 = \mu^2) = f_{\pm}(0, \mu^2) \left\{ 1 + \lambda_{\pm} \frac{Q^2}{\mu^2} \right\}. \quad (8.6)$$

Однако пока нет веских причин полагать, что линейная подгонка удовлетворительна, и этот вопрос до конца не ясен. Для f_+ параметр наклона равен примерно $\lambda_+ = 0,03$. Это небольшое значение, тем не менее оно приводит в f_+ к изменениям порядка 40% при возрастании Q^2 от нуля до $Q^2 = m_K^2$. Для f_- параметр наклона определен гораздо хуже, но экспериментальные данные согласуются с неравенством $|\lambda_-| \ll \lambda_+$.

Примем линейную параметризацию (8.6). Предположим также, что форм-факторы слабо меняются по q^2 при фиксированном Q^2 (что еще более сомнительно), т. е. применим РСАС, когда в качестве переменных выбраны q^2 и Q^2 . Тогда уравнение (8.5) переходит в (8.7):

$$\left(1 + \lambda_+ \frac{m_K^2}{\mu^2} \right) + \xi(0, \mu^2) \left(1 + \lambda_- \frac{m_K^2}{\mu^2} \right) = \frac{f_K}{f_{\pi} f_+(0, \mu^2)}, \quad (8.7)$$

где

$$\xi(0, \mu^2) = f_-(0, \mu^2) / f_+(0, \mu^2). \quad (8.8)$$

Напомним, что полная амплитуда K_{13} -распада содержит кабиббовский множитель $\sin \theta_c$. Но такой же множитель есть и в K_{12} распаде. Следовательно, отношение $f_K/f_+(0, \mu^2)$ экспериментально измеримо с точностью до знака независимо от кабиббовского множителя. С другой стороны, из π_{12} -распада можно найти $f_\pi \cos \theta_c$. Кабиббовский угол мал и довольно точно измерен, так что $\cos \theta_c$ не чувствителен к оставшимся неопределенностям. Итак, правая часть (8.7) хорошо известна (с точностью до знака). Теперь в пределе строгой $SU(3)$ -симметрии $f_- = 0$ и, следовательно, $\xi = 0$, а $f_+(0, \mu^2) = 1$ и $f_K = f_\pi$. Тогда правая часть (8.7) равнялась бы единице. Экспериментально это значение порядка 1,28, и можно верить в $SU(3)$ настолько, чтобы принять, что знак действительно положителен. Таким образом:

$$\frac{f_K}{f_\pi f_+(0, \mu^2)} \approx 1,28.$$

Если теперь принять, что $\lambda_+ \approx 0,03$ и $\lambda_- \approx 0$, то уравнение (8.7) приводит к значению $\xi(0, \mu^2) = -0,1$. Эксперименты [18], однако, согласуются со значением $\xi(0, \mu^2) = -1!$ *

Может случиться, что это большое различие исчезнет: параметр ξ , определенный из (8.7), весьма чувствителен к значениям параметров наклона и к предположению о линейной экстраполяции (8.6). Если же это значительное различие сохранится, то справедливость алгебры токов становится сомнительной — по крайней мере в той части, которая используется в K_{13} -распаде. Наиболее вероятно, что под сомнением окажется прежде всего РСАС. Неоднократно подчеркивалось, что понятие РСАС нельзя ввести с любой степенью точности. Действительно, без всяких изменений в основной идее можно получить для K_{13} -распада другие предсказания. Примем, что предполагаемая гладкость в экстраполяции за массовую поверхность имеет место, когда фиксирована некоторая величина, отличная от Q^2 , например $X = C_1(Q^2 + \rho q^2 + C_2)$, где C_1 , C_2 и ρ — некие константы. Простая арифметика показывает, что тогда в левой части (8.7) появляется поправочный множитель $\rho(\lambda_+ + \xi\lambda_-)$. Таким образом, при λ_+ или λ_- , отличных от нуля, ответ зависит от выбора переменных. Для уверенности в правильности результатов необходимо какая-то разумная идея. Обычно считают, что следует выбирать переменные так, чтобы другие сингулярности в плоскости q^2 (за исключением пионного полюса) были «отдалены», насколько возможно. Но такой выбор трудно сделать в общем виде. Удачное решение, найденное для одной задачи, обычно не подходит для других.

Выбор переменных — одна из неопределенностей. Но существуют и другие, возможно более глубокие, неопределенности. Вернемся к случаю пион-нуклонного рассеяния вперед: $q(\alpha) + p \rightarrow q(\beta) +$

* См. примечание к с. 53. — Прим. пер.

+ p . Используя выбор пионного поля по РСАС, можно легко представить амплитуду в виде

$$M_{\beta\alpha} = \frac{(\mu^2 - q^2)^2}{\mu^4 f_\pi^2} (+i) \int dx \exp(iqx) \langle p | \theta(x_0) \left[\frac{\partial A_\nu^\beta(x)}{\partial x_\nu}, \frac{\partial A_\mu^\alpha(0)}{\partial x_\mu} \right] | p \rangle. \quad (8.9)$$

Это выражение точное на массовой поверхности ($q^2 \rightarrow \mu^2$), но мы используем его для определения амплитуды вне массовой поверхности, предполагая, что она медленно меняется между $q^2 = \mu^2$ и $q^2 = 0$. В то же время можно перейти к окончательной формуле в две степени. Определим

$$\begin{aligned} \bar{M}^{\beta\alpha} &= \frac{\mu^2 - q^2}{\mu^2 f_\pi} \langle p; q(\beta) | \frac{\partial A_\mu^\alpha}{\partial x_\mu} | p \rangle = +i \frac{\mu^2 - q^2}{\mu^2 f_\pi} q_\mu \langle p; q(\beta) | A_\mu^\alpha | p \rangle = \\ &= - \frac{(\mu^2 - q^2)^2}{\mu^4 f_\pi^2} q_\mu \int dx \exp(iqx) \langle p | \theta(x_0) \left[\frac{\partial A_\nu^\beta(x)}{\partial x_\nu}, A_\mu^\alpha(0) \right] | p \rangle. \end{aligned} \quad (8.10)$$

На массовой поверхности это выражение также правильно и $\bar{M}^{\beta\alpha} = M^{\beta\alpha}$. Но вне массовой поверхности $M^{\beta\alpha}$ и $\bar{M}^{\beta\alpha}$ не совпадают, хотя каждое из выражений соответствует идеям РСАС. В точке $q^2 = 0$ эти два выражения отличаются только на σ -член:

$$\begin{aligned} \bar{M}^{\beta\alpha} - M^{\beta\alpha} &\xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} + \frac{i}{f_\pi^2} \int dx \exp(iqx) \delta(x_0) \times \\ &\times \langle p | \left[A_0^\alpha(x), \frac{\partial A_\nu^\beta(0)}{\partial x_\nu} \right] | p \rangle. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Разумеется, такое различие не имеет большого значения для пион-нуклонного рассеяния (так как σ -член мал). Но если бы разность была значительной, то встал бы вопрос, по какому же пути следовать. Напомним, что в рассмотрении Вайнбергом $\pi\pi$ -рассеяния σ -член был важен.

Аналогичные неопределенности появляются и в K_{13} -распаде. Мы определили амплитуду вне массовой поверхности с помощью (8.2) и пришли к интересным результатам для комбинации $f_+ + f_-$ в пределе $q \rightarrow 0$. Рассмотрим теперь скалярную амплитуду:

$$\begin{aligned} D &\equiv i \langle q | \frac{\partial V_\mu^{4+15}}{\partial x_\mu} | K \rangle = (K - q)_\mu \langle q | V_\mu^{4+15} | K \rangle = \\ &= (1/\sqrt{2}) [(m_K^2 - \mu^2) f_+ + Q^2 f_-]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Согласно стандартной редукционной формуле,

$$D(K, q) = -\frac{\mu^2 - q^2}{\mu^2 f_\pi} \int dx \exp(iqx) \times \\ \times \langle 0 \left| \theta(x_0) \left[\frac{\partial A_\nu^3(x)}{\partial x_\nu}, \frac{\partial V_\mu^{4+i5}(0)}{\partial x_\mu} \right] \right| K \rangle, \quad (8.13)$$

в которой для физических амплитуд следует перейти к пределу $q^2 \rightarrow \mu^2$. Однако опустим это требование и построим немассовое продолжение на основе этого выражения. Из уравнения (5.2) в пределе $q \rightarrow 0$ находим

$$D(K, q=0) = \frac{1}{f_\pi} \int dx \delta(x_0) \langle 0 \left[A_0^3(x), \frac{\partial V_\mu^{4+i5}(0)}{\partial x_\mu} \right] \right| K \rangle. \quad (8.14)$$

В отличие от прежней процедуры, мы теперь продолжили за массовую поверхность другие комбинации f_+ и f_- иным способом. Мы получили предсказание для величины

$$f_+^D(K, q=0) + \frac{m_K^2}{m_K^2 - \mu^2} f_-^D(K, q=0),$$

где индекс D напоминает, что вне массовой поверхности форм-факторы, определенные здесь, не обязаны совпадать с форм-факторами, определенными ранее, хотя на массовой поверхности они должны быть согласованы. Так как $m_K^2 \gg \mu^2$, комбинация, приведенная выше, очень близка к $f_+^D + f_-^D$; имеем

$$f_+^D(K, q=0) + f_-^D(K, q=0) = \\ = \frac{\sqrt{2}}{m_K^2 f_\pi} \int dx \delta(x_0) \langle 0 \left[A_0^3(x), \frac{\partial A_\mu^{4+i5}(0)}{\partial x_\mu} \right] \right| K \rangle. \quad (8.15)$$

Не говоря уже о проблеме выбора переменных, остается вопрос, какие из величин $f_+ + f_-$ или $f_+^D + f_-^D$ гладко продолжаются за массовую поверхность.

Процедура, ведущая к (8.5), имеет то преимущество, что правая часть определяется с помощью стандартных гипотез алгебры токов. В то же время правая часть (8.15) не определяется ни алгеброй токов, ни другими общими теориями. Но можно надеяться, что она имеет «правильное» значение f_K/f_π . Если бы существовал некоторый независимый способ определения правой части и он давал бы «неправильное» значение, тогда пришлось бы либо делать выбор между альтернативами, либо оставить эксперименту право выбора, либо предложить новые возможности.

Как уже отмечалось, коммутатор в (8.15) не входит в обычный аппарат алгебры токов. Но некоторые идеи, имеющие к нему отношение, активно обсуждаются в настоящее время. Обсуждение всех деталей увело бы нас слишком далеко в сторону. Но все же напомним

ним, что алгебра векторных зарядов $Q^\alpha = \int d^3x V_0^\alpha$ и аксиальных зарядов $\bar{Q}^\alpha = \int d^3x A_0^\alpha$ связана с группой $SU(3) \otimes SU(3)$: заряды $Q_R^\alpha \equiv Q^\alpha - \bar{Q}^\alpha$ коммутируют между собой как генераторы $SU(3)$; то же справедливо для $Q_L^\alpha \equiv Q^\alpha + \bar{Q}^\alpha$, но одновременные коммутаторы Q_R^α и Q_L^α равны нулю. Если бы сильные взаимодействия были инвариантны относительно $SU(3) \otimes SU(3)$, то эти заряды сохранились бы, а симметрия проявлялась как в существовании партнеров с противоположной четностью для всех частиц, так и в наличии октета безмассовых (голдстоуновских) бозонов. Хотя реальный мир не обладает, конечно, $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрией, можно надеяться, что некоторые «следы» симметрии все-таки сохранились.

Гелл-Ман [20] предположил, что гамильтониан сильных взаимодействий содержит инвариантную часть и часть \mathcal{H}' , нарушающую симметрию (возможно, очень сильно), но имеющую простую структуру. Именно, он предположил, что

$$\mathcal{H}' = a_0 u_0 + a_8 u_8, \quad (8.16)$$

где a_0 и a_8 — числовые параметры, а u_0 и u_8 — операторы, принадлежащие одному мультиплету скалярных операторов, которые преобразуются по отношению к $SU(3) \otimes SU(3)$ по представлению $(3, \bar{3}) + (\bar{3}, 3)$. Оператор u_0 сохраняет обычную $SU(3)$ -симметрию, тогда как u_8 преобразуется как восьмая компонента $SU(3)$ -октета. Мультиплет $(3, \bar{3}) + (\bar{3}, 3)$ содержит всего 18 членов: девять скалярных операторов u_α ($\alpha = 0, 1, \dots, 8$) и девять псевдоскалярных операторов v_α . Трансформационные свойства определяют одновременные коммутаторы зарядов с u_α и v_α , например

$$[Q^a(x_0), u_b(x, x_0)] = if_{abc} u_c \delta(\bar{x}).$$

Не будем выписывать здесь все коммутационные соотношения. Отметим только, что в отсутствие взаимодействий с производными те-перь можно определить дивергенции токов:

$$\frac{\partial V_\mu^\alpha(x)}{\partial x_\mu} = i[\mathcal{H}'(x), Q^\alpha(x_0)]; \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial A_\mu^\alpha(x)}{\partial x_\mu} = i[\mathcal{H}'(x), \bar{Q}^\alpha(x_0)]. \quad (8.18)$$

Из коммутационных соотношений можно найти, в частности:

$$\frac{\partial V_\mu^{4+i5}}{\partial x_\mu} = i \frac{\sqrt{3}}{2} a_8 u^{4+i5}; \quad (8.19)$$

$$[A_0^3(x, 0), u^{4+i5}(0)] = (i/2) V^{4+i5}(0) \delta(x); \quad (8.20)$$

$$\frac{\partial A_\mu^{4+i5}}{\partial x_\mu} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}} a_0 - \frac{1}{2\sqrt{3}} a_8 \right) V^{4+i5}(x). \quad (8.21)$$

Используя совместно эти результаты и учитывая, что

$$\langle 0 | \partial A_{\mu}^{4+i5} / \partial x_{\mu} | K \rangle = \sqrt{2} m_K^2 f_K,$$

находим выражение для правой части уравнения (8.15):

$$\left(\frac{f_K}{f_{\pi}} \right) \left(\frac{3a_8}{a_8 - 2\sqrt{2}a_0} \right). \quad (8.22)$$

Чтобы удовлетворить (8.5), нужно потребовать

$$a_8 \approx -\sqrt{2}a_0. \quad (8.23)$$

Но при таком выборе параметров уравнение (8.18) и основные коммутационные соотношения приводят к равенству $\partial A_{\mu}^i / \partial x_{\mu} = 0$; $i = 1, 2, 3$. Это означает, что отношение a_8/a_0 , определенное в (8.23), соответствует инвариантности по отношению к подгруппе $SU(2) \otimes SU(2)$, и аксиальные токи с сохранением странности имеют нулевую дивергенцию. Реальный мир, конечно, не совсем таков. Но вернемся к знакомому соотношению

$$\langle 0 | \partial A_{\mu}^i / \partial x_{\mu} | \pi^j \rangle = \mu^2 f_{\pi} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где в правой части появляется квадрат массы пиона. Пион — самый легкий из адронов, поэтому можно считать, что дивергенции аксиальных токов действительно малы, если совсем не исчезают. Таким образом, соотношение (8.23) обычно считается достаточным хорошим приближением $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии. Однако предположим, что все это неправильно и что $SU(2) \otimes SU(2)$ нарушена сильнее, чем $SU(3)$: $|a_8| \ll |a_0|$. В этом случае правая часть уравнения (8.15) близка к нулю! И уравнение (8.15) приводит к $\xi = -1$! Таким образом, при сильном нарушении $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии [по отношению к $SU(3)$] два подхода к распаду K_{13} , описанные здесь, приводят к совершенно различным результатам. Результат, содержащийся в (8.22), основан на специальной модели нарушения $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии, а в рамках модели количественные предсказания зависят от параметра a_8/a_0 , который можно априори выбрать свободно. Очевидно, необходимы независимые доказательства для обоих подходов. В нашу задачу не входит делать здесь выбор между (8.5) и (8.15) или фиксировать параметры в (8.15). Однако следует вновь подчеркнуть, что в понятии РСАС отсутствует четкость.

8.2. Распад K_{14}

Обсудим распад $K_{14}: K^- \rightarrow \pi^+ + \pi^- + l + \bar{\nu}$. В этот процесс дают вклад как аксиальная, так и векторная часть тока с изменением странности. Структура соответствующих адронных матричных элементов имеет вид:

$$\langle q^{(\pm)}, q^{(-)} | A_{\mu}^{4+i5} | K \rangle = (i/m_K) \{ F_1 (q^{(-)} + q^{(+)})_{\mu} + F_2 (q^{(-)} - q^{(+)})_{\mu} + F_3 (K - q^{(-)} - q^{(+)})_{\mu} \}; \quad (8.24)$$

$$\langle q^{(+)}, q^{(-)} | V_{\mu}^{4+i5} | K \rangle = \frac{1}{m_K} F_4 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} K_{\nu} q_{\rho}^{(+)} q_{\sigma}^{(-)}. \quad (8.25)$$

Форм-факторы F_i — скалярные функции импульсов K , q^+ , q^- ; таким образом, они зависят от трех физических переменных, скажем Kq^+ , Kq^- , $(q^- + q^+)^2$. Однако так как вскоре мы увидим с массовой поверхностью по пионным массам, то F_i будут зависеть также и от массовых переменных $q^{(+)^2}$ и $q^{(-)^2}$.

Все неопределенности РСАС, мешавшие нам в K_{13} -распаде, проявляются также и в K_{14} , и по отношению к выбору переменных (здесь их еще больше) и к способу продолжения за массовую поверхность. Не будем вновь указывать на необходимые предосторожности и обходные пути. Но так как в K_{14} -распаде участвуют два пиона, то возникают некоторые особенности. Можно трактовать как мягкий либо один пион, либо другой, либо оба; именно на этом следует специально остановиться. Матричный элемент векторного тока (8.25) исчезает, когда любой из пионов имеет нулевой импульс, и нельзя ничего узнать о нем нашими методами. Поэтому обратимся к матричному элементу аксиального тока. Как и прежде, встает вопрос, применять ли РСАС к этому матричному элементу или к другому, содержащему дивергенцию аксиального тока. Будем идти традиционным путем [17]. Нужно, однако, помнить, что альтернативная процедура априори ничуть не хуже.

Определим амплитуду

$$M_{\mu}^{(-)} = (i) \frac{\mu^2 - q^{(-)^2}}{\sqrt{2}\mu^3 f_{\pi}} \int dx \exp(iq^{(-)} x) \times \\ \times \langle q^{(+)} | \theta(x_0) \left[\frac{\partial A_{\nu}^{1+i2}(x)}{\partial x_{\nu}}, A_{\mu}^{4+i5}(0) \right] | K \rangle. \quad (8.26)$$

и заметим, что на массовой поверхности $q^{(-)^2} \rightarrow \mu^2$ и $M_{\mu}^{(-)} = \langle q^{(+)} q^{(-)} | A_{\mu}^{4+i5} | K \rangle$. Воспользуемся (8.26) для определения продолжения за массовую поверхность для π^- -мезона, оставив π^+ -мезон на массовой поверхности. Стандартным методом легко найти, что в пределе $q^{(-)} \rightarrow 0$

$$M_{\mu}^{(-)} \xrightarrow{q^{(-)} \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}f_{\pi}} \int dx \langle q^+ | [A_0^{1+i2}(x), A_{\mu}^{4+i5}(0)] | K \rangle \delta(x_0). \quad (8.27)$$

Но коммутатор в правой части равен нулю! Отсюда получаем

$$F_1(K, q^{(+)}, q^{(-)} = 0) = F_2(K, q^{(+)}, q^{(-)} = 0); \quad (8.28)$$

$$F_3(K, q^{(+)}, q^{(-)} = 0) = 0. \quad (8.29)$$

Теперь определим матричный элемент:

$$M_{\mu}^{(+)} = (+i) \frac{\mu^2 - q^{(+)^2}}{\sqrt{2}\mu^2 f_{\pi}} \int dx \exp(iq^{(+)} x) \times \\ \times \langle q^{(-)} | \theta(x_0) \left[\frac{\partial A_{\nu}^{1-12}(x)}{\partial x_{\nu}}, A_{\mu}^{4+15}(0) \right] | K \rangle, \quad (8.30)$$

который позволяет сделать продолжение за массовую поверхность π^+ -мезона. В пределе $q^{(+)} \rightarrow 0$ находим

$$M_{\mu}^{(+)} \xrightarrow{q^{(+)} \rightarrow 0} -\frac{i}{\sqrt{2}f_{\pi}} \int dx \delta(x_0) \langle q^{(-)} | [A_0^{1-12}(x), A_{\mu}^{4+15}(0)] | K \rangle = \\ = -\frac{i}{\sqrt{2}f_{\pi}} \langle q^{(-)} | V_{\mu}^{6+17} | K \rangle = -\frac{i}{f_{\pi}} \langle q^{(-)} | V_{\mu}^{4+15} | K \rangle. \quad (8.31)$$

Последний шаг следует из изотопической инвариантности и приводит к матричному элементу для K_{13}^- -распада с $q^{(-)}$, равным импульсу π^0 -мезона. Таким образом,

$$F_3(K, q^{(+)}=0, q^{(-)}) = \frac{-m_K}{\sqrt{2}f_{\pi}} [f_+(K, q^{(-)}) + f_-(K, q^{(-)})], \quad (8.32)$$

$$F_1(K, q^{(+)}=0, q^{(-)}) + F_2(K, q^{(+)}=0, q^{(-)}) = \\ = -\sqrt{2} \frac{m_K}{f_{\pi}} f_+(K, q^{(-)}). \quad (8.33)$$

Если $f_+ + f_- \neq 0$, то F_3 имеет совершенно различные значения в двух пределах $q^{(-)} \rightarrow 0$ и $q^{(+)} \rightarrow 0$. В то же время наш результат по крайней мере совместен с требованием, чтобы F_1 и F_2 были медленно меняющимися функциями своих аргументов. При умножении адронного матричного элемента на лептонный легко найти, что форм-фактор F_3 умножается на лептонную массу. Следовательно, F_3 совершенно неизмерим в распадах K_{14} и экспериментально о нем ничего не известно. Что касается F_1 и F_2 , то в самом грубом приближении будем считать их константами [пренебрегая малыми изменениями f_+ по переменной $(K - q^{(-)})^2$].

Отсюда

$$F_1 = F_2 \approx (-m_K/\sqrt{2}f_{\pi}) f_+. \quad (8.34)$$

Имеющиеся экспериментальные данные плохо согласуются с этим предсказанием, скажем на уровне 50%*. Хотя ничего неизвестно о форм-факторе F_3 , разные предсказания для разных пределов, которые обсуждались выше, требуют объяснения, хотя парадокса, вообще говоря, нет. Такое объяснение дал Вайнберг опять в рамках алгебры токов и PCAC. Он принял во внимание дополни-

* См., например, [32]. — Прим. пер.

тельную информацию, которую можно получить, когда оба пиона становятся мягкими. Не развивая довольно сложную технику, необходимую для такого анализа, разберем сущность подхода Вайнберга более наглядно. В действительности резкая зависимость от импульсов $q^{(+)}$ и $q^{(-)}$, проявляющаяся в F_3 , возникает из-за приведенной фейнмановской диаграммы (рис. 5). В вершине, где виртуальный мезон взаимодействует с током A_{μ}^{4+i5} , присутствует множитель $\sqrt{2} f_K (K - q^{(-)} - q^{(+)})_{\mu}$, где $(K - q^{(-)} - q^{(+)})$ — импульс виртуального K -мезона. Эта диаграмма дает вклад только в форм-фактор F_3 . K -мезонный пропагатор вносит фактор $\{(K - q^{(-)} - q^{(+)})^2 - m_K^2\}^{-1}$ и в пределе, когда оба импульса $q^{(+)}$ и $q^{(-)}$ малы,

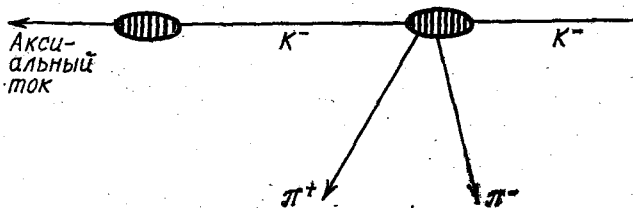


Рис. 5.

пропорционален $[2K(q^{(+)} + q^{(-)})]^{-1}$. Вершину $(KK\pi\pi)$ можно рассмотреть с помощью методов алгебры токов и РСАС. Как следует из условия самосогласованности Адлера, π -мезоны входят в вершину в p -волне. Следовательно, эта вершина содержит фактор, пропорциональный $K(q^{(-)} - q^{(+)})$.

Тогда в пределе $q^{(-)} \rightarrow 0$ и $q^{(+)} \rightarrow 0$ диаграмма вносит в F_3 вклад

$$C_1 \frac{K(q^{(-)} - q^{(+)})}{K(q^{(-)} + q^{(+)})},$$

где C_1 — некоторая константа. Заметим, что эта функция формально нулевого порядка по импульсам, но все же зависит от импульсов. Неполусные же диаграммы в нулевом порядке по импульсам дают постоянный вклад. Таким образом,

$$F_3 = C_1 \frac{K(q^{(-)} - q^{(+)})}{K(q^{(-)} + q^{(+)})} + C_2.$$

Константы C_1 и C_2 можно теперь подобрать так, чтобы связать это выражение с результатами, полученными ранее в двух разных пределах $q^{(-)} \rightarrow 0$ и $q^{(+)} \rightarrow 0$. Так, можно найти выражение для F_3 , которое является «интерполяцией» между этими пределами. Действительно, легко получить [21]:

$$F_3 = \frac{-m_K}{\sqrt{2}f_{\pi}} [f_+ + f_-] \frac{Kq^{(-)}}{K(q^{(-)} + q^{(+)})}. \quad (8.35)$$

НЕЛЕПТОННЫЕ РАСПАДЫ

Метод мягких пионов, описанный в гл. 8 для полуплептонных процессов, может быть формально перенесен на нелептонные реакции, которые содержат пионы. Но здесь мы встречаемся с коммутатором аксиального заряда с нелептонным гамильтонианом. Поэтому необходимо сделать некоторые предположения о структуре гамильтониана или во всяком случае о виде коммутатора, который входит в этот анализ. Как уже говорилось, наиболее популярная и привлекательная модель для нелептонного гамильтониана приписывает ему ток-токовую структуру. Однако чтобы получить правило $\Delta I = 1/2$ для взаимодействий с изменением странности, необходимо ввести взаимодействие не только заряженных токов, но и нейтральных. Если гамильтониан имеет октетную структуру, то, пока это касается $SU(3)$ -свойств, его форма полностью определена. Именно гамильтониан, меняющий странность, становится шестой компонентой \mathcal{H}^8 октета операторов \mathcal{H}^ν ($\nu = 1, 2, \dots, 8$), где

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}^\nu &= \text{const } d_{\nu\alpha\beta} j_\mu^\alpha j_\mu^\beta, \\ j_\mu^\alpha &= V_\mu^\alpha + A_\mu^\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Коэффициенты $d_{\nu\alpha\beta}$ полностью симметричны по индексам и определяются антикоммутационными соотношениями матриц λ^α :

$$(\lambda^\alpha/2, \lambda^\beta/2) = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} + d_{\nu\alpha\beta} \lambda^\nu/2. \quad (9.2)$$

Слабый нелептонный гамильтониан \mathcal{H}^8 , конечно, сохраняет заряд и приводит к переходам как с $\Delta S = 1$, так и с $\Delta S = -1$.

Рассмотрим теперь процесс $A \rightarrow B + \pi^\alpha$, где индекс α описывает изотопическое состояние пиона. Пусть q — импульс пиона. Амплитуда этого процесса в низшем порядке по слабому взаимодействию дается формулой

$$\begin{aligned} \text{Amp}(A \rightarrow B + \pi^\alpha) &= (+i) \frac{\mu^2 - q^2}{f_\pi \mu^2} \int dx \exp(iqx) \times \\ &\times \langle B | \theta(x_0) \left[\frac{\partial A_\nu^\alpha(x)}{\partial x_\nu}, \mathcal{H}^8 \right] | A \rangle, \end{aligned} \quad (9.3)$$

в которой необходимо перейти к пределу $q^2 \rightarrow \mu^2$. Опустив это требование, воспользуемся приведенным выражением для продолжения за массовую поверхность и найдем интересное предсказание в пределе $q \rightarrow 0$:

$$\text{Amp}(A \rightarrow B + \pi^\alpha) \xrightarrow{q \rightarrow 0} -\frac{i}{f_\pi} \int dx \delta(x_0) \langle B | [A_0^\alpha(x), \mathcal{H}^8(0)] | A \rangle. \quad (9.4)$$

В модели, принятой для слабого гамильтониана, этот коммутатор может быть легко установлен.* Находим

$$\int d^3 x [A_0^\alpha(\mathbf{x}, 0), \mathcal{H}^6(0)] = i f_{\alpha\sigma\beta} \mathcal{H}^\beta, \quad (9.5)$$

и, следовательно,

$$\text{Amr}(A \rightarrow B + \pi^\alpha) \xrightarrow{q \rightarrow 0} \frac{1}{f_\pi} f_{\alpha\sigma\beta} \langle B | \mathcal{H}^\beta | A \rangle. \quad (9.6)$$

Это основной результат. Он полезен, если удастся связать матричный элемент в правой части с каким-нибудь физическим процессом.

9.1. Распад $K \rightarrow 3\pi$

Начнем с обзора феноменологии этих реакций. Распады $K \rightarrow 3\pi$ довольно хорошо удовлетворяют правилу $\Delta I = 1/2$ и с еще большей точностью согласуются с CP -инвариантностью. Наша модель гамильтониана, конечно, удовлетворяет этим требованиям с самого начала. Поэтому если пренебречь небольшими нарушающими CP -добавками в состоянии K_S^0 и K_L^0 , то реакция $K_S^0 \rightarrow 3\pi^0$ запрещена, а в распаде $K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ пионы находятся в состоянии с $I=0$, которое полностью антисимметрично, и поэтому распад будет подавлен из-за центробежного барьера. Для оставшихся процессов $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$, $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0$, $K_L^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0$ и $K_L^0 \rightarrow 3\pi^0$ пионы находятся в состоянии с изоспином 1, и подавления не возникает. Кинематически реакция $K \rightarrow 3\pi$ полностью определяется заданием любых двух энергий пионов ω_1, ω_2 и ω_3 в системе покоя K -мезона. Конечно, $m_K = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. В хорошем приближении максимально возможная энергия любого пиона равна $\omega_{\text{макс}} = (2/3)Q + \mu$; $Q = m_K - 3\mu$.

Обычно предполагается, что амплитуду для любой реакции $K \rightarrow 3\pi$ можно хорошо описать первыми несколькими членами разложения по степеням ω_i ; действительно, феноменологическое разложение только до линейных членов работает довольно хорошо. В этом порядке правило $\Delta I = 1/2$ и бозе-статистика приводят к простой структуре, и амплитуды для всех четырех обсуждаемых

* Существует более эффективный метод расчета, не требующий обращения к $SU(3)$ -симметрии. Легко видеть, что в ток-токовых моделях $[\bar{Q}^i, \mathcal{H}^6(0)] = [Q^i, \mathcal{H}^6(0)]$. Последний коммутатор раскрывать не следует, а, пользуясь непосредственно определением коммутатора $[Q^i, \mathcal{H}^6(0)] = Q^i \mathcal{H}^6(0) - \mathcal{H}^6(0) Q^i$, надо действовать изотопическими генераторами Q^i на начальное и конечное состояния. При этом используются только изотопические соотношения, а $SU(3)$ -трансформационные свойства $\mathcal{H}^6(0)$ не существенны. Изложение этой техники см. в обзоре [31]. — *Прим. пер.*

процессов могут быть выражены только через два параметра. Именно:

$$\left. \begin{aligned} \text{Amp}(K^+ \rightarrow 2\pi^+ + \pi^-) &= 2\rho \left(1 + \frac{\lambda_{++-}}{2} t^- \right); \\ \text{Amp}(K^+ \rightarrow 2\pi^0 + \pi^+) &= \rho \left(1 + \frac{\lambda_{00+}}{2} t_+ \right); \\ \text{Amp}(K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0) &= -\rho \left(1 + \frac{\lambda_{+-0}}{2} t_0 \right); \\ \text{Amp}(K_L^0 \rightarrow 3\pi^0) &= 3\rho, \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

где

$$t_i \equiv \frac{3}{Q} (\omega_i - \mu) - 1; \quad (9.8)$$

$$\lambda_{00+} = \lambda_{+-0} = -2\lambda_{++-}. \quad (9.9)$$

Поскольку используемые РСАС-приближения предполагают справедливость этой феноменологии, то достаточно рассмотреть только один процесс, скажем $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$, чтобы определить оба независимых параметра ρ и λ_{++-} [17, 22].

Из (9.6), рассматривая пределы $q^- \rightarrow 0$, $q^+ \rightarrow 0$, можно получить два соотношения. В любом случае только один пион находится за массовой поверхностью.

Рассматривая $q^{(-)} \rightarrow 0$, получаем

$$\text{Amp}(K^+ \rightarrow 2\pi^+ + \pi^-) \xrightarrow{q^{(-)} \rightarrow 0} -\frac{i}{2\sqrt{2}f_\pi} \langle \pi^+ \pi^+ | \mathcal{H}^{4+15} | K^+ \rangle = 0. \quad (9.10)$$

Матричный элемент справа исчезает из-за сохранения странности. При $q^{(+)} \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned} \text{Amp}(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-) &\xrightarrow{q^{(+)} \rightarrow 0} \frac{i}{2\sqrt{2}f_\pi} \langle \pi^+ \pi^- | \mathcal{H}^{4-15} | K^+ \rangle = \\ &= \frac{1}{2f_\pi} \text{Amp}(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-). \end{aligned} \quad (9.11)$$

Второе равенство есть следствие изотопической инвариантности.

Как обычно в РСАС, эти результаты для амплитуд вне массовой поверхности остаются совершенно формальными до тех пор, пока не определим как они связаны с амплитудой $K \rightarrow 3\pi$ на массовой поверхности. Какие переменные должны быть фиксированы, чтобы обеспечить «мягкую» зависимость от пионной массы? Поскольку это приводит к хорошему результату, предположим, что зависимость от масс слабая, когда энергии пионов ω_i фиксированы. Пусть параметры ρ и λ_{++-} не зависят от массовых переменных. Из уравнения (9.10) находим $\text{Amp}(K^+ \rightarrow 2\pi^+ + \pi^-) = 0$, $\omega^- = 0$. Следовательно,

$$\lambda_{++-} = \frac{2Q}{m_K}. \quad (9.12)$$

В связи с (9.11.) заметим, что $q^{(+)} = 0$ соответствует $\omega_- = m_K/2$. Следовательно,

$$\rho = \frac{1}{6f_\pi} \text{Amp}(K_S^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-). \quad (9.13)$$

Результат, содержащийся в уравнениях (9.12) и (9.13), находится в очень хорошем согласии с экспериментом*. Конечно, наш выбор переменных при интерпретации РСАС был несколько произвольным, но не будем к этому придираться!

9.2. Распады гиперонов

Обсудим реакцию

$$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+ \quad (9.14)$$

и, в частности, ее s -волновую часть [23]. Возьмем пион вне массовой поверхности и перейдем к пределу $q = 0$. В этом пределе отличны от нуля только s -волны. Находим:

$$A_s(\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+) \xrightarrow{q \rightarrow 0} \frac{i}{2\sqrt{2}f_\pi} \langle n | \mathcal{H}^4 - [15] | \Sigma^+ \rangle = 0, \quad (9.15)$$

где исчезновение матричного элемента в правой части связано просто с сохранением странности. Сделав обычные предположения РСАС, что изменения при сходе с массовой поверхности малы, приходим к предсказанию, что в распаде $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$ есть только p -волна. Этот результат хорошо согласуется с экспериментами.

Приложения алгебры токов и РСАС не всегда столь удачны, как в предыдущих примерах. Но давайте не будем останавливаться на трудностях...

Список литературы

1. Gell-Mann M. «Physics», 1964, v. 1, p. 63.
2. Fubini S., Furlan G. «Physics», 1965, v. 1, p. 229.
3. Adler S. «Phys. Rev. B», 1965, v. 140, p. 736.
4. Weisberger W. «Phys. Rev.», 1966, v. 143, p. 1302.
5. Renner B. Current Algebras and Their Applications. Oxford, Pergamon Press, 1968.
6. Nambu Y. «Phys. Rev. Lett.», 1960, v. 4, p. 380; «Nuovo cimento», 1961, v. 17, p. 757. Auth.: J. Bernstein, S. Fubini, M. Gell-Mann, W. Thirring; Gell-Mann M. «Phys. Rev.», 1962, v. 125, p. 1067.

* Используя метод, упомянутый в примечании к с. 64, можно связать амплитуды распадов $K \rightarrow 3\pi$ с амплитудами распадов $K_2 \rightarrow 2\pi$ и $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ без привлечения гипотезы о точном выполнении правила $\Delta T = 1/2$. При этом предсказываются значительные, порядка 20—40%, отклонения от предсказаний правила $\Delta T = 1/2$ для наклонов спектров и относительных вероятностей распадов $K \rightarrow 3\pi$ (см. [31, 36]). Полученные таким методом предсказания очень хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными [35]. — *Прим. пер.*

** См. также Чжоу Гуан Чжао. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1960, т. 39, с. 703. — *Прим. пер.*

7. Cabibbo N. «Phys. Rev. Lett.», 1963, v. 10, p. 531.
8. Feynman R. P., Gell-Mann M. «Phys. Rev.», 1958, v. 109, p. 193.
9. Gell-Mann M., Levy M. «Nuovo cimento», 1960, v. 16, p. 705.
10. Goldberger M. L., Treiman S. B. «Phys. Rev.», 1958, v. 110, p. 1178.
11. Adler S. L. «Phys. Rev. B», 1964, v. 135, p. 963.
12. Adler S. L. «Phys. Rev. B», 1965, v. 137, p. 1022.
13. Cabibbo N., Radicati L. A. «Phys. Lett.», 1966, v. 19, p. 697.
14. Gilman F., Schnitzer H. «Phys. Rev.», 1966, v. 150, p. 1562.
15. Adler S. L. «Phys. Rev.», 1966, v. 143, p. 1144.
16. Weinberg S. «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 616.
17. Callan C. G., Treiman S. B. «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 16, p. 153.
18. Gaillard M. K., Chounet L. M. CERN Report 70-14, 1970. (Эта работа содержит подробный обзор данных по K_{13} до 1970 г.)
19. Gaillard M. K. «Nuovo cimento», 1969, v. 61, p. 1969. Brandt R. A., Preparata G. «Ann. Phys.», 1970, v. 61, p. 119.
20. Gell-Mann M. «Phys. Rev.», 1962, v. 125, p. 1067.
21. Weinberg S. «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 336.
22. Hara Y., Nambu Y. «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 16, p. 875; Elias D. K., Taylor J. C. «Nuovo cimento A», 1966, v. 44, p. 518; Abarbanel H. D. I. «Phys. Rev.», 1967, v. 153, p. 1547.
- 23*. Suzuki M. «Phys. Rev. Lett.», 1965, v. 15, p. 968.
24. Chounet L. M., Gaillard J. M., Gaillard M. K. «Phys. Reports C», 1972, v. 4, p. 5.
- 25*. Kleinknecht K. Proceedings of 17-th International Conference on High-Energy Physics. London, 1974.
- 26*. «Phys. Lett. B», 1973, v. 46, p. 121. Auth.: F. J. Hasert e. a.; «Phys. Letters», 1972, v. 6, p. 138. Auth.: F. J. Hasert e. a.; «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 32, p. 1454, 1457. Auth.: B. Aubert e. a.; «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 33, p. 448. Auth.: S. J. Barish e. a.
- 27*. Gaillard M. K., Lee B. W. «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 33, p. 108.
- 28*. Вайнштейн А. И., Хриплович И. Б. «Успехи физ. наук», 1974, т. 112, с. 685.
- 29*. Вайнштейн А. И., Захаров В. И. «Ядерная физика», 1969, т. 9, с. 1060.
- 30*. «Nucl. Phys. B», 1975, v. 85, p. 269. Auth.: H. Deelen e. a.
- 31*. Вайнштейн А. И., Захаров В. И. «Успехи физ. наук», 1970, т. 100, № 2, с. 225.
- 32*. «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 30, p. 399. Auth.: E. M. Beier e. a.
- 33*. Вайнштейн А. И., Захаров В. И. «Ядерная физика», 1970, т. 12, с. 610.
- 34*. «Phys. Rev. Lett.», 1973, v. 31, p. 337. Auth.: G. Donaldson e. a.; «Phys. Lett. B», 1974, v. 48, p. 393. Auth.: K. Albrecht e. a.
- 35*. «Phys. Lett. B», 1972, v. 38, p. 335. Auth.: W. T. Ford e. a.
- 36*. Долгов А. Д., Захаров В. И. «Ядерная физика», 1968, т. 8, с. 352; Bouchiat C., Meyer Ph. «Phys. Lett. B», 1967, v. 25, p. 282.

* Литература, помеченная звездочкой, добавлена при переводе.

ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В АЛГЕБРЕ ТОКОВ

Р. Джекив

ГЛАВА I ВВЕДЕНИЕ

Техника алгебры токов возникла из попыток обойти два основных препятствия прогрессу в физике частиц: 1) отсутствие знания точных законов, определяющих элементарные процессы, кроме электромагнитных; 2) невозможность решения реалистических моделей, предложенных для объяснения динамики сильных взаимодействий. Именно в этом контексте, блестяще развив идеи операторной квантовой механики, Гелл-Ман предложил [1] свою знаменитую алгебру зарядов, обобщенную затем на локальную алгебру плотностей зарядов и токов. Хорошо известно, что нерелятивистский коммутатор Гейзенберга между импульсом $p = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$ и координатой q [2], $[p, q] = 1$ не зависит от явного вида лагранжиана \mathcal{L} и приводит к независимым от взаимодействия точным результатам типа правила сумм Томаса — Райхе — Куна [3]. Точно так же и в релятивистской динамике должны существовать не зависящие от вида взаимодействия соотношения, дающие физическую информацию без явного решения теории. Развитие этих идей и привело к алгебре токов, которая успешно используется сейчас в двух широких областях — для доказательства низкоэнергетических теорем и вывода высокоэнергетических правил сумм.

В этом разделе рассматриваются исследования, выполненные в течение последних двух лет и прояснившие структуру коммутаторов в моделях теории поля, в рамках которых была сформулирована алгебра токов. Были получены важные результаты, продемонстрировавшие, что коммутаторы токов зависят от конкретного вида взаимодействия и что ряд предсказаний алгебры токов сомнителен. Разумеется, всегда можно просто постулировать соответствующие коммутаторы токов в их минимальной форме, предложенной Гелл-Маном, не принимая в расчет теоретические соображения, которые привлекались для их обоснования. Однако не стоит придерживаться этой точки зрения, поскольку постулирование не обосновывает справедливости соотношений алгебры токов. Более того, алгебра токов в минимальной форме приводит к ряду предсказаний, противоречащих эксперименту. В то же время аномальные поправки, обнаруженные при анализе моделей, позволяют разрешить ряд трудностей.

Остановимся на двух сомнительных результатах.

1. Теорема Сазерленда — Вельтмана [4] говорит, что эффективная константа распада $\pi^0 \rightarrow 2 \gamma$ должна обращаться в нуль при нулевой массе пиона в любой теории поля с минимальной и калибровочно-инвариантной электродинамикой, в которой выполняются алгебра токов и гипотеза РСАС*. Однако в σ -модели, где все эти условия выполнены, константа распада $\pi^0 \rightarrow 2 \gamma$ в нуль не обращается [5].

2. Правило сумм Каллана — Гросса гласит, что в широком классе кварковых моделей сечение электророждения на протонах за счет продольных фотонов исчезает в определенной кинематической области — в так называемом глубоконеупругом пределе [6]. Однако явные расчеты в соответствующих моделях приводят к неисчезающему сечению [7].

Подчеркнем, что те расчеты, в которых обнаружены противоречия с формальными аргументами канонической алгебры токов, не содержат никаких неопределенностей. Их результаты, полученные в рамках теории возмущений, являются хорошо определенными следствиями динамики теории. В этих расчетах не использовались формальные канонические свойства теории, приводящие к неправильным результатам.

Порядок дальнейшего изложения следующий. Нам придется часто пользоваться рядом теоретических результатов, относящихся к функциям Грина, коммутаторам и тождествам Уорда — Такаши. Поэтому сначала изучим канонические и пространственно-временные ограничения на структуру этих объектов и обсудим определение коммутатора с помощью разложения Бьёркена — Джонсона — Лоу. Затем проведем расчеты, относящиеся к двум упомянутым выше примерам противоречий. Будет также показано, как следует модифицировать минимальную алгебру токов, чтобы из нее не получались неправильные теоремы, подобные теоремам Сазерленда — Вельтмана и Каллана — Гросса. Будут рассмотрены теоретические и экспериментальные следствия этих модификаций. Наконец, в контексте нашего нового понимания алгебры токов изучим проблему нарушенной масштабной инвариантности.

Список литературы с комментариями

1. Отличным обзором по алгебре токов является книга Адлер С., Дашен Р. «Алгебра токов и их применение в физике частиц». М., «Мир», 1970.
2. В лекциях применяются система единиц $\hbar = c = 1$ и метрика

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

* Этот результат был получен ранее в работе А. Dolgov, А. Vainstein, V. Zakharov. — *Phys. Lett. B*, 1967, v. 24, p. 425. — *Прим. пер.*

Греческие индексы используются для 4-мерных величин, латинские — для 3-мерных.

3. Современное изложение этого «классического» правила сумм содержится в книге *Bethe H. A., Jackiw R.* «Intermediate Quantum Mechanics». N. Y., W. A. Benjamin, 1968.
- 3* См. также *Бере Г.* Квантовая механика. М., «Мир», 1965, с. 186, 187.
4. *Sutherland D. G.* «Nucl. Phys. B», 1967, v. 2, p. 433; *Velman M.* «Proc. Roy. Soc.», 1967, v. 301, p. 107.
- 4*. *Dolgov A. D., Vainstein A. I., Zakharov V. I.* «Phys. Lett. B», 1967, v. 24, p. 425.
5. *Bell J. S., Jackiw R.* «Nuovo cimento», 1969, v. 60, p. 47.
6. *Callan C. G., Jr., Gross D. J.* «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 156.
7. *Jackiw R., Preparata G.* «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 975; Erratum, 1969, v. 22, p. 1162; *Adler S. L., Wu-Ki-Tung.* «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 978.

ГЛАВА 2

КАНОНИЧЕСКИЕ И ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ В АЛГЕБРЕ ТОКОВ

2.1. Каноническая теория токов

Любая теория поля описывается плотностью лагранжиана \mathcal{L} , который мы считаем функцией набора независимых полей φ и их первых производных $\partial^\mu \varphi = \varphi^\mu$. Канонический формализм основан на следующих одновременных коммутаторах (ОВК) [1]:

$$\left. \begin{aligned} i [\pi^0(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{y})] &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \\ i [\pi^0(t, \mathbf{x}), \pi^0(t, \mathbf{y})] &= i [\varphi(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{y})] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Здесь π^0 — временная компонента канонического 4-импульса

$$\pi^\mu = \delta L / \delta \varphi_\mu. \quad (2.2)$$

Уравнения Эйлера — Лагранжа имеют вид

$$\partial_\mu \pi^\mu = \delta \mathcal{L} / \delta \varphi. \quad (2.3)$$

Рассмотрим теперь бесконечно малое преобразование полей $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \delta\varphi(x)$, считая, что явный вид $\delta\varphi(x)$ известен. Интересно выяснить, при каких условиях на лагранжиан это преобразование будет операцией симметрии теории. Для этого надо рассмотреть, как меняется \mathcal{L} при преобразовании:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^\mu} \delta \varphi^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta \varphi + \pi_\mu \partial^\mu \delta \varphi. \quad (2.4)$$

Если окажется, что и без явного использования уравнений движения $\delta \mathcal{L}$ — полная производная некоторого объекта Λ^μ

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta \varphi + \pi_\mu \partial^\mu \delta \varphi = \partial_\mu \Lambda^\mu, \quad (2.5)$$

то действие $I = \int d^4x \mathcal{L}(x)$ не меняется и преобразование является операцией симметрии теории. В этом случае можно ввести сохраняющийся ток следующим образом. *Используя явно уравнение движения* (2.3), выражение для $\delta \mathcal{L}$ можно переписать в альтернативном виде независимо от того, имеем мы дело с операцией симметрии или нет. Из (2.3) и (2.4) следует

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \pi^\mu \delta \varphi + \pi^\mu \partial_\mu \delta \varphi = \partial_\mu (\pi^\mu \delta \varphi). \quad (2.6a)$$

Сравнивая (2.6) с (2.5), получаем

$$0 = \partial_\mu [\pi^\mu \delta \varphi - \Lambda^\mu]. \quad (2.6b)$$

Так что

$$J_\mu = \pi_\mu \delta \varphi - \Lambda_\mu \quad (2.7)$$

сохраняющийся ток.

Возможны два различных случая. Если $\Lambda^\mu = 0$, то говорят о *внутренней симметрии*, в противном случае — о *пространственно-временной симметрии* [2]. Пример первой симметрии — $SU(3) \times SU(3)$ -токи Гелл-Мана:

$$\delta^a \varphi = T^a \varphi, \quad (2.8)$$

где T^a — матрица генератора группы, и предполагается, что поля φ преобразуются по определенному представлению. Индекс a обозначает различные матрицы группы внутренней симметрии. Ток, отвечающий внутренней симметрии,

$$J_\mu^a = \pi_\mu T^a \varphi. \quad (2.9)$$

Примером пространственно-временной симметрии может служить трансляция:

$$\left. \begin{aligned} \delta^a \varphi &= \partial^a \varphi; \\ \delta^a \mathcal{L} &= \partial^a \mathcal{L}; \end{aligned} \right\} \quad (2.10a)$$

$$\Lambda_\mu^a = g_\mu^a \mathcal{L}. \quad (2.10b)$$

Соответствующая трансляции сохраняющаяся величина есть канонический тензор энергии — импульса:

$$\theta_\mu^\alpha = \pi^\mu \varphi^\alpha - g^{\mu\alpha} \mathcal{L}. \quad (2.11)$$

В последующем символ J_μ и термин «ток» будем использовать для *внутренних симметрий*.

Ясно, что ток (2.9), хотя он и не сохраняется, можно определить и тогда, когда преобразование (2.8) не будет операцией симметрии. В силу канонических коммутационных соотношений плотность заряда удовлетворяет модельно-независимым ОВК независимо от того, сохраняется ток или нет [3]:

$$\begin{aligned} [J_0^a(t, \mathbf{x}), J_0^b(t, \mathbf{y})] &= [\pi_0(t, \mathbf{x}) T^a \varphi(t, \mathbf{x}), \pi_0(t, \mathbf{y}) T^b \varphi(t, \mathbf{y})] = \\ &= i\pi_0(t, \mathbf{x}) [T^a, T^b] \varphi(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -f_{abc} J_0^c(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь использовано групповое свойство матриц преобразования

$$[T^a, T^b] = if_{abc} T^c. \quad (2.13)$$

Аналогично заряды

$$Q^a(t) = \int d^3x J_0^a(t, x), \quad (2.14)$$

являющиеся лоренцевыми скалярами для сохраняющихся токов, есть генераторы соответствующих преобразований полей даже при несохраняющихся токах:

$$\begin{aligned} i [Q^a(t), \varphi(t, x)] &= i \int d^3y [\pi_0(t, y) T^a \varphi(t, y), \varphi(t, x)] = \\ &= T^a \varphi(x) = \delta^a \varphi(x). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Следует отметить, что хотя как сохраняющиеся, так и несохраняющиеся токи и заряды внутренних симметрий удовлетворяют ОВК (2.12) и (2.15), для пространственно-временных токов в общем случае не существует коммутаторов, которые были бы нечувствительны к сохранению тока (см. упражнение 2.5).

Соотношения (2.12) и (2.15) были получены без обращения к какому-либо специфическому лагранжиану \mathcal{L} , т. е. без всяких динамических ограничений. Складывается впечатление, что они справедливы всегда и что любое их следствие с необходимостью правильно. Однако уравнения (2.12) и (2.15) были получены формально, без учета всех трудностей локальной квантовой теории. Так, мы совсем не заботились ни о том, существуют ли произведения двух операторов в совпадающих точках пространства—времени, ни о том, существуют ли одновременные пределы коммутаторов при разных временах в (2.1), (2.12) или (2.15). Как будет видно, источники всех неудачных предсказаний алгебры тока — именно эти проблемы.

Несколько слов о несохраняющихся токах. В приложениях алгебры несохраняющихся токов приходится делать предположение и о дивергенциях токов. Чаще всего предполагается, что $\partial_\mu J_\mu$ — «гладкий» оператор, хотя точное определение «гладкости» и зависит от конкретной задачи. В дальнейшем будет детально рассмотрено понятие «гладкости», а сейчас ограничимся определением, относящимся к несохраняющимся токам, которые будут обсуждаться. Размерность тока в единицах массы равна 3. Это следует из безразмерности заряда, являющегося пространственным интегралом компоненты тока. Следовательно, $\partial_\mu J_\mu$ имеет размерность 4. Однако если динамика теории такова, что все операторы, возникающие в $\partial_\mu J_\mu$, имеют размерность меньше чем 4, будем говорить, что ток J_μ — «частично сохраняющийся» и «гладкий».

В качестве конкретного примера рассмотрим аксиальный ток, построенный из фермионных полей, $J_\mu^5 = i\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$, и предположим, что фермионы удовлетворяют уравнению движения

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = -m\psi + e\gamma^\mu A_\mu\psi + g\bar{\psi}\gamma^5\psi.$$

Здесь A^μ и φ — векторное и псевдоскалярное бозонные поля соответственно. Размерность фермионного поля равна 3/2, а размерность

бозонного поля 1. Это видно из лагранжиана, который всегда имеет размерность 4, так как действие $I = \int d^4x \mathcal{L}$ безразмерно. Лагранжиан фермионов содержит $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$, производная имеет размерность 1, так что размерность $\bar{\psi}\psi$ равна 3 и размерность ψ равна 3/2. Лагранжиан бозонов содержит член $\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$; две производные имеют размерность 2 и, следовательно, ϕ имеет размерность 1. Очевидно, что дивергенция \bar{J}_5^μ в этой модели равна $\partial_\mu J_5^\mu = 2m\bar{\psi}\gamma_5\psi + 2g\bar{\psi}\phi\psi$. Размерность $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ равна 3, а размерность $\bar{\psi}\phi\psi$ равна 4. Поэтому J_5^μ является частично сохраняющимся током только в отсутствие псевдоскалярной связи.

Хотя модельно-независимые коммутаторы для нулевых компонент токов были получены из теории канонических преобразований, использование их для физических предсказаний требует неявных динамических предположений, смысл которых будет сейчас выяснен. Дело в том, что в рамках теории преобразований всегда можно добавить к каноническому току дивергенцию антисимметричного тензора:

$$\left. \begin{aligned} J^\mu &\rightarrow Q^\mu + \partial_\lambda X^{\lambda\mu}; \\ X^{\lambda\mu} &= -X^{\mu\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Подобные добавки, называемые «суперпотенциалами», не меняют заряды. (Сохранение тока $\partial_\lambda X^{\lambda\mu}$ обеспечивается антисимметрией суперпотенциала. То, что суперпотенциалы не дают вклада в заряды, видно из следующего: $\int d^3x \partial_\lambda X^{\lambda 0} = \int d^3x \partial_i X^{i0} = 0$.) Может оказаться, что модифицированные токи имеют больший физический смысл, чем канонические. Такова ситуация с тензором энергии — импульса. По причинам, которые сейчас обсудим, каноническое выражение (2.11) обычно заменяется симметричной формой Белинфанте (см. упражнение 2.3):

$$\theta_B^{\mu\alpha} = \theta_c^{\mu\alpha} + \frac{1}{2} \partial_\lambda X^{\lambda\mu\alpha}; \quad (2.17a)$$

$$X^{\lambda\mu\alpha} = -X^{\mu\lambda\alpha} = \pi^\lambda \Sigma^{\mu\alpha} \phi - \pi^\mu \Sigma^{\lambda\alpha} \phi - \pi^\alpha \Sigma^{\lambda\mu} \phi. \quad (2.17b)$$

Модифицированные токи имеют в общем случае коммутационные соотношения, отличные от приведенных выше канонических. Поэтому, настаивая именно на канонических коммутаторах, а не на каких-либо других, фактически предполагаем, что канонические токи обладают выделенным физическим значением. Выделенность канонических токов можно усмотреть в том, что электромагнитные и слабые взаимодействия (это сейчас кажется хорошо установленным) определяются каноническими электромагнитными и $SU(3) \times SU(3)$ -токами соответственно. Физическая выделенность тензора Белинфанте следует из предположения о том, что гравитационное взаимодействие описывается общей теорией относительности Эйнштейна. В этой теории гравитоны связаны именно с $\theta_B^{\mu\nu}$, а не с $\theta_c^{\mu\nu}$ (при обсуждении масштабных преобразований в гл. 7

будет показано, что необходимо ввести новый, улучшенный тензор энергии—импульса и что соответственно должна быть модифицирована теория гравитации). Можно построить общий формализм, основанный непосредственно на динамической роли токов. В нем можно вывести коммутаторы токов без обращения к теории канонических преобразований. Результаты получаются, конечно, те же самые, поэтому не будем останавливаться здесь на таком подходе.

В заключение этого раздела выпишем еще один коммутатор, который может быть получен каноническими методами (см. упражнение 2.4):

$$i[\theta^{00}(t, \mathbf{x}), J_0^a(t, \mathbf{y})] = \partial^\mu J_\mu^a(x) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + J_i^a(x) \partial^i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.18)$$

Отсюда следует важный вывод о том, что дивергенцию тока можно записать как коммутатор:

$$i[\theta^{00}(t, \mathbf{x}), Q^a(t)] = \partial^\mu J_\mu^a(x). \quad (2.19)$$

Формулы (2.18) и (2.19) не чувствительны к выбору θ^{00} : и канонический тензор, и тензор Белинфанте ведут к одинаковым результатам. Можно получить и другие модельно-независимые ОВК между специально выбранными компонентами $\theta^{\alpha\beta}$ и J_μ^a . Не будем вдаваться в детали, которые можно найти в литературе [5].

2.2. Пространственно-временные ограничения на коммутаторы

Хотя интересные физические результаты можно получить уже из алгебры плотностей зарядов (2.12), для приложений, которые будем изучать, требуются коммутационные соотношения и между остальными компонентами токов. Их уже нельзя вывести каноническим методом в модельно-независимой форме. Например, J_k^a содержит π_k [см. (2.9)], а зависимость π_k от канонически-сопряженных величин π^0 и ϕ в общем случае неизвестна и коммутаторы, содержащие π_k , не удастся вычислить в общем виде.

Можно определить вид ОВК $[J_0^a, J_k^b]$, изучив пространственно-временные ограничения, следующие из того, что (2.12) предполагается выполняющимся в любой лоренцевой системе. Рассмотрим, например, проинтегрированный вариант соотношения (2.12) в случае сохраняющихся токов:

$$[Q^a, J_0^b(0)] = -f_{abc} J_0^c(0). \quad (2.20)$$

Действие преобразования Лоренца на (2.20) получается коммутацией обеих сторон равенства с генератором лоренцевых преобразований M^{0i} :

$$\begin{aligned} [M^{0i}, [Q^a, J_0^b(0)]] &= [[M^{0i}, Q^a], J_0^b(0)] + \\ + [Q^a, [M^{0i}, J_0^b(0)]] &= -f_{abc} [M^{0i}, J_0^c(0)]. \end{aligned} \quad (2.21a)$$

Второе из равенств в (2.21а) следует из первого после использования тождества Якоби. Все коммутаторы с M^{0i} можно вычислить, так как коммутаторы $M^{\alpha\beta}$ с J_μ^a определяются однозначно тем, что J_μ^a — вектор:

$$i [M^{\alpha\beta}, J_\mu^a(x)] = (x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha) J_\mu^a(x) + (g_\mu^\alpha g^{\beta\nu} - g^{\alpha\nu} g_\mu^\beta) J_\nu^a(x). \quad (2.21б)$$

Предполагая, что ток сохраняется, получаем

$$[Q^a, J_i^b(0)] = -f_{abc} J_i^c(0). \quad (2.22а)$$

Локальным вариантом (2.22а) является коммутационное соотношение

$$[J_0^a(t, x), J_i^b(t, y)] = -f_{abc} J_i^c(t, x) \delta(x - y) + S_{ij}^{ab} \partial^j \delta(x - y) + \dots \quad (2.22б)$$

В соотношение (2.22б) добавлена производная δ -функции, а многогочие относится к возможным высшим производным δ -функции. Разумеется, все эти производные исчезают после интегрирования по x , так что (2.22а) сохраняется. Подобные градиентные члены в ОВК называются, как отмечалось выше, швингеровскими членами (ШЧ) [6].

Можно получить новые ограничения, прокоммутировав *локальный* коммутатор (2.12) с P^0 или M^{0i} . Наиболее сильные ограничения следуют, однако, после коммутации (2.12) не с P^0 или M^{0i} , однократно проинтегрированными моментами θ^{00} ($P^0 = \int d^3x \theta^{00}(0, x)$, $M^{0i} = -\int d^3x x^i \theta^{00}(0, x)$), а непосредственно с θ^{00} . Рассмотрим поэтому

$$i [\theta^{00}(0, z), [J_0^a(0, x), J_0^b(0, y)]] = -f_{abc} \delta(x - y) i [\theta^{00}(0, z), J_0^b(0, x)]. \quad (2.23а)$$

Если переписать левую часть с помощью тождества Якоби, то можно использовать (2.18) для вычисления ОВК $[\theta^{00}, J_0^a]$. Для сохраняющихся токов получается

$$[J_a^b(0, y), J_k^a(0, z)] \partial^k \delta(x - z) + [J_0^a(0, x), J_k^b(0, z)] \partial^k \delta(z - y) = -f_{abc} \delta(x - y) J_k^c(0, z) \partial^k \delta(x - y). \quad (2.23б)$$

Наиболее общая форма ОВК $[J_0^a, J_i^b]$, согласующаяся с (2.23б), имеет вид (см. упражнение 2.6)

$$[J_0^a(0, x), J_i^b(0, y)] = -f_{abc} J_i^c(0, x) \delta(x - y) + S_{ij}^{ab}(0, y) \partial^j \delta(x - y); \quad (2.24а)$$

$$S_{ij}^{ab}(0, y) = S_{ji}^{ba}(0, y). \quad (2.24б)$$

Таким образом, ОВК $[J_0^a, J_i^b]$ определен с точностью до одной производной δ -функции; все высшие производные отсутствуют. Остающийся ШЧ обладает симметрией (2.246). Позже будет показано, что он не может обращаться в нуль. Аналогичные выводы справедливы и для частично сохраняющихся токов, если дивергенция тока достаточно гладкая и не возникает никаких ШЧ после коммутации дивергенции с J_a^a .

Изложенными методами можно получить еще дополнительные ограничения на коммутаторы токов. Для этого надо воспользоваться тождествами Якоби и модельно-независимыми коммутаторами между специально выбранными компонентами $\theta^{\alpha\beta}$ и J^μ . Не будем приводить все эти результаты, поскольку они представляют ограниченный интерес. Один из результатов, однако, достаточно красив, чтобы его упомянуть. Именно если $S_{ij}^{ab} = \delta_{ij} S^{ab}$, где S^{ab} — лоренцев скаляр, то ОВК $[J_i^a, J_j^b]$ вообще не содержат производных δ -функции [7].

2.3. Пространственно-временные ограничения на функции Грина

Рассмотрим пространственно-временные ограничения на функции Грина и на тождества Уорда. Эти ограничения важны тем, что теоремы алгебры токов формулируются обычно для функций Грина — амплитуд рассеяния, амплитуд распада и т. д., а при наиболее удобном способе их вывода используются тождества Уорда.

Рассмотрим T -произведение двух операторов A и B :

$$T(x) = TA(x)B(0) = \theta(x_0)A(x)B_{\pm}(0) + \theta(-x_0)B(0)A(x). \quad (2.25)$$

Матричные элементы $T(x)$ связаны с функциями Грина. Функции Грина должны быть лоренц-инвариантны, а $T(x)$ может и не удовлетворить этому требованию из-за упорядочения по времени. В общем случае, чтобы сумма была инвариантной, к $T(x)$ следует добавить еще один нековариантный член $\tau(x)$ — так называемый контактный член. Сумма упорядоченного по времени произведения с дополняющим его до ковариантного вида контактным членом называется T^* -произведением:

$$T^*(x) = T(x) + \tau(x). \quad (2.26)$$

При $x_0 \neq 0$ $T^*(x)$ и $T(x)$ должны совпадать, так что $\tau(x)$ должен быть отличным от нуля лишь при $x_0 = 0$ и, следовательно, содержать $\delta(x_0)$ и ее производные.

Выясним сейчас, при каких условиях $T(x)$ нековариантно и как надо строить соответствующий контактный член. Затем рассмотрим условия, при которых выполняется предположение Фейнмана о взаимной компенсации контактных и швингеровских членов (смысл

предположения Фейнмана будет объяснен при более подробном его обсуждении). Для такого анализа необходимо знание ОВК $[A, B]$:

$$[A(0, x), B(0)] = C(0) \delta(x) + S^i(0) \partial_i \delta(x), \quad (2.27)$$

причем для простоты предполагается только один ШЧ. Аналогично можно легко учесть более высокие производные.

Наш анализ [8] основан на записи нековариантных выражений в явно ковариантном, но зависящем от системы отсчета виде. Вводятся единичный времениподобный вектор n^μ и пространственно-подобный проекционный оператор $P^{\mu\nu}$:

$$\left. \begin{aligned} n^0 > 0; \quad n^2 = 1; \\ P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu. \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

В терминах вектора n T -произведение имеет вид

$$T(x; n) = \theta(xn) A(x) B(0) + \theta(-xn) B(0) A(x), \quad (2.29)$$

а ОВК соответственно вид

$$[A(x), B(0)] \delta(xn) = C(x) \delta^4(x) + S^{\alpha\beta}(n) P_{\alpha\beta} \partial^\beta \delta^4(x). \quad (2.30)$$

T^* -произведение от n не зависит:

$$T^*(x) = T(x; n) + \tau(x; n). \quad (2.31)$$

Изменим теперь n . Так как вектор n должен быть времениподобным, то разрешены только пространственно-подобные приращения n . Поэтому подействуем на (2.31) операцией $P^{\alpha\beta} \delta / (\delta n^\beta)$:

$$0 = P^{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta n^\beta} T(x; n) + P^{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta n^\beta} \tau(x; n). \quad (2.32)$$

Первый член в (2.32) можно найти из (2.29):

$$P^{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta n^\beta} T(x; n) = P^{\alpha\beta} x_\beta \delta(xn) [A(x), B(0)]. \quad (2.33a)$$

Подставляя сюда коммутатор из (2.30), получаем

$$P^{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta n^\beta} T(x; n) = -P^{\alpha\beta} S_\beta(n) \delta^4(x). \quad (2.33b)$$

Отсюда видно, что, если ОВК соответствующих операторов содержит ШЧ, то T -произведение нековариантно (зависит от n).

Для построения контактного члена (2.33b) следует подставить в (2.32), что приводит к дифференциальному уравнению для τ :

$$P^{\alpha\beta} S_\beta(n) \delta^4(x) = P^{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta n^\beta} \tau(x; n). \quad (2.34a)$$

Можно сократить обе части равенства (2.34a) на проекционный оператор $P^{\alpha\beta}$. При этом, вообще говоря, можно добавить к обеим частям равенства произвольные члены, пропорциональные n_β , так как $P^{\alpha\beta} n_\beta = 0$. Однако само $S_\beta(n)$ определено уравнением

(2.30) только с точностью до членов, пропорциональных n_β . Поэтому

$$S_\beta(n) \delta^4(x) = \frac{\delta}{\delta n^\beta} \tau(x; n). \quad (2.34б)$$

Решение уравнения (2.34б) имеет вид

$$\tau(x; n) = \int^n dn'_\beta S^\beta(n') \delta^4(x) + \tau_0(x). \quad (2.35)$$

Таким образом, построен контактный член из швингеровского члена. Конечно, контактный член не является однозначно определенным: к нему можно добавить любой лоренц-ковариантный член $\tau_0(x)$. Ниже увидим, как можно определить $\tau_0(x)$ с помощью тождеств Уорда (можно показать, что лоренц-ковариантность обеспечивает независимость интеграла в (2.35) от пути интегрирования [8]).

2.4. Пространственно-временные ограничения на тождества Уорда

Рассмотрим теперь случай, когда A и B — векторные операторы, например токи. Нас интересуют T - и T^* -произведения этих величин:

$$T^{\mu\nu}(x, y; n) = \theta([x - y] n) A^\mu(x) B^\nu(y) + \theta([y - x] n) B^\nu(y) A^\mu(x); \quad (2.36а)$$

$$T^{*\mu\nu}(x, y) = T^{\mu\nu}(x, y; n) + \tau^{\mu\nu}(x, y; n). \quad (2.36б)$$

(Здесь удобно ввести зависимость B^ν от координат.) В приложениях алгебры токов часто используются тождества Уорда для $T^{*\mu\nu}(x, y)$, т. е. нужно знать выражение для

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{*\mu\nu}(x, y) &= \theta([x - y] n) \partial_\mu A^\mu(x) B^\nu(y) + \theta([y - x] n) B^\nu(y) \times \\ &\times \partial_\mu A^\mu(x) + \delta([x - y] n) [n_\mu A^\mu(x), B^\nu(y)] + \frac{\partial}{\partial y^\mu} \tau^{\mu\nu}(x, y; n), \end{aligned} \quad (2.37а)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y^\nu} T^{*\mu\nu}(x, y) &= \theta([x - y] n) A^\mu(x) \partial_\nu B^\nu(y) + \theta([y - x] n) \times \\ &\times \partial_\nu B^\nu(y) A^\mu(x) + \delta([x - y] n) [n_\nu B^\nu(y), A^\mu(x)] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y^\nu} \tau^{\mu\nu}(x, y; n). \end{aligned} \quad (2.37б)$$

Для вычисления таких выражений необходимо знать явно ОВК $[A^0, B^\nu]$ и $[B^0, A^\nu]$, которые возникают в дивергенции T -произведения. Необходимо знать также дивергенцию контактного члена, входящую в дивергенцию T^* -произведения. Выше было показано,

что в специфическом случае $SU(3) \otimes SU(3)$ -токов, когда $A^\mu = J_a^\mu$, $B^\nu = J_b^\nu$, пропорциональный δ -функции член в ОВК $[J_a^0 J_b^0]$ явно известен. Однако пропорциональный градиенту δ -функции ШЧ не был найден [см. (2.12) и (2.24)]. Поэтому нельзя вычислить и контактный член, доопределяющий T -произведение до ковариантного выражения.

При выводе тождества Уорда мы наткнулись на препятствие. Обойти его можно, используя предположение Фейнмана. Именно, заметим, что если бы не было градиентных членов в ОВК, то тогда и все контактные члены были бы равны нулю. В таком воображаемом случае можно вывести и тождество Уорда, поскольку все, что нужно, — это известный коэффициент при δ -функции. По предположению Фейнмана, такая «наивная» процедура приводит к правильному ответу. Т. е. можно надеяться, что каким бы ни был ШЧ, связанный с ним контактный член обладает тем свойством, что его дивергенция всегда взаимно уничтожает вклад ШЧ в ОВК; таким образом, остаются только члены, пропорциональные δ -функции.

Ясно, что гипотеза Фейнмана является фундаментальной для приложений алгебры токов. Перейдем к ее анализу [8]. Ниже будут сформулированы условия, при которых обеспечивается справедливость гипотезы. Позднее, при переходе к аномалиям, будет видно, что причина противоречий между явными расчетами и предсказаниями алгебры токов — именно невыполнение гипотезы Фейнмана.

Вернемся к обсуждению T^* -произведения двух векторных операторов A^μ и B^ν . Запишем их коммутатор в общем виде:

$$[A^\mu(x), B^\nu(y)] \delta([x-y]n) = C^{\mu\nu}(y; n) \delta^4(x-y) + S^{\mu\nu\alpha}(y; n) P_{\alpha\beta} \partial^\beta \delta([x-y]n). \quad (2.38)$$

Для контактного члена сохранятся написанные выше формулы:

$$\left. \begin{aligned} \tau^{\mu\nu}(x, y; n) &= \tau^{\mu\nu}(y; n) \delta^4(x-y) + \tau_0^{\mu\nu}(x, y); \\ \tau^{\mu\nu}(y; n) &= \int^n dn'_\beta S^{\mu\nu\beta}(y; n'); \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

$$\frac{\delta}{\delta n^\beta} \tau^{\mu\nu}(y; n) = S^{\mu\nu\beta}(y; n). \quad (2.40)$$

Подставим теперь (2.38) в (2.37). Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} T^{*\mu\nu}(x, y) &= \theta([x-y]n) \partial_\mu A^\mu(x) B^\nu(y) + \theta([y-x]n) \times \\ &\times B^\nu(y) \partial_\mu A^\mu(x) + n_\mu C^{\mu\nu}(y; n) \delta^4(x-y) + n_\mu S^{\mu\nu\alpha}(y; n) P_{\alpha\beta} \times \\ &\times \partial^\beta \delta^4(x-y) + \tau^{\mu\nu}(y; n) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta^4(x-y) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tau_0^{\mu\nu}(x, y). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Для сохраняющихся токов из правой части (2.41) выпадает $T \partial_\mu A^\mu(x) B^\nu(y)$. Остающиеся члены должны быть ковариантны,

так как T^* -произведение в левой части обладает этим свойством. Следовательно, необходимо, чтобы

$$n_\mu C^{\mu\nu}(y; n) = I_1^\nu(y); \quad (2.42)$$

$$\tau^{\mu\nu}(y; n) + n_\beta S^{\beta\nu\alpha}(y; n) P_\alpha^\mu = I_1^{\mu\nu}(y). \quad (2.43)$$

Здесь $I_1^\nu(y)$ и $I_1^{\mu\nu}(y)$ — лоренц-ковариантные величины, не зависящие от n . Тот же результат получается и для частично сохраняющихся токов, если частичное сохранение понимать как гладкость оператора $\partial_\mu A^\mu$, так что при его коммутации с B^ν не появляется ШЧ. В этом случае T -произведение в (2.41) уже само по себе ковариантно и остающиеся члены удовлетворяют (2.42) и (2.43). Сходные результаты получаются и при вычислении дивергенции $\partial/\partial y^\nu$:

$$n_\nu C^{\mu\nu}(y; n) = I_2^\mu(y); \quad (2.44)$$

$$\tau^{\mu\nu}(y; n) + n_\beta S^{\mu\beta\alpha}(y; n) P_\alpha^\nu = I_2^{\mu\nu}(y). \quad (2.45)$$

Здесь $I_2^\mu(y)$ и $I_2^{\mu\nu}(y)$ — также ковариантные величины, но не обязательно совпадающие с $I_1^\nu(y)$ и $I_1^{\mu\nu}(y)$. Решение уравнения (2.42) можно записать в виде

$$C^{\mu\nu}(y; n) = n^\mu I_1^\nu + P_\alpha^\mu C^{\alpha\nu}(y; n). \quad (2.46)$$

В то же время из (2.43) и (2.45) следуют условия:

$$n_\mu \tau^{\mu\nu}(y; n) = n_\mu I_1^{\mu\nu}(y); \quad (2.47a)$$

$$n_\nu \tau^{\mu\nu}(y; n) = n_\nu I_2^{\mu\nu}(y). \quad (2.47b)$$

Уравнения (2.46) и (2.47) являются следующими из лоренц-ковариантности ограничениями, которым должны удовлетворять $C^{\mu\nu}(y; n)$ и $\tau^{\mu\nu}(y; n)$.

При каких условиях, наложенных на ОВК, может выполняться предположение Фейнмана, т. е. когда вклады дивергенции контактных членов уничтожаются вкладами ШЧ и, следовательно, в тождествах Уорда нет никаких градиентных членов? Очевидно, для этого в тождествах Уорда по индексу μ должны, согласно (2.41) и (2.43), отсутствовать градиенты δ -функции в следующей комбинации:

$$I_1^{\mu\nu}(y) \partial_\mu \delta^4(x-y) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tau_0^{\mu\nu}(x, y). \quad (2.48a)$$

Аналогично из тождества Уорда по индексу ν вытекает, что не должны возникать градиенты δ -функции в

$$-I_2^{\mu\nu}(y) \partial_\nu \delta^4(x-y) + \frac{\partial}{\partial y^\nu} \tau_0^{\mu\nu}(x, y). \quad (2.48b)$$

Уравнения (2.48 a, б) показывают, что всегда можно удовлетворить гипотезе Фейнмана хотя бы в одном из тождеств Уорда. Например, (2.48a) выполняется, если взять

$$\tau_0^{\mu\nu}(x, y) = -I_1^{\mu\nu}(y) \delta^4(x-y). \quad (2.49a)$$

Аналогично, чтобы удовлетворить (2.48b), нужно положить

$$\tau_0^{\mu\nu}(x, y) = -I_2^{\mu\nu}(y) \delta^4(x-y). \quad (2.49b)$$

Однако в общем случае может оказаться невозможным удовлетворить обоим требованиям, поскольку система (2.48) может оказаться переопределенной и не иметь решения. Достаточным условием решения обоих уравнений (2.48) является отсутствие ШЧ в коммутаторе временных компонент токов. Это видно из (2.43) и (2.47). Тогда имеем

$$\begin{aligned} n_\nu n_\rho S^{\beta\nu\alpha} (y; n) P_\alpha^\mu &= n_\nu I_1^{\mu\nu} (y) - n_\nu \tau^{\mu\nu} (y; n) = \\ &= n_\nu [I_1^{\mu\nu} (y) - I_2^{\mu\nu} (y)]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Левая часть равенства обращается в нуль, если нет ШЧ в ОВК временных компонент. Следовательно, (2.50) означает, что $I_1^{\mu\nu} (y) = I_2^{\mu\nu} (y)$ и два решения (2.49) тождественно совпадают, и оба тождества Уорда удовлетворяют гипотезе Фейнмана. [Можно сформулировать необходимые и достаточные условия существования решения уравнений (2.48) (см. [8]).]

Мы заключаем, что если алгебра временных компонент, полученная каноническим методом и не содержащая ШЧ, выживает в полной теории, то можно удовлетворить гипотезе Фейнмана. Напротив, если ШЧ возникают в алгебре временных компонент, то гипотеза не удовлетворяется. Как будет видно, именно такова ситуация в проблеме распада $\pi^0 \rightarrow 2 \gamma$.

2.5. Швингеровские члены

В заключение обсуждения пространственно-временных ограничений на коммутаторы токов покажем, что ШЧ, которые могут возникать в ОВК $[J_a^0, J_b^i]$, не могут быть равны нулю. Для простоты изучим только сохраняющийся электромагнитный ток, так что групповых индексов a и b нет.

Рассмотрим вакуумное среднее ОВК $[J^0, J^i]$:

$$\langle 0 | [J^0 (0, x), J^i (0, y)] | 0 \rangle = \langle 0 | C^i(x, y) | 0 \rangle, \quad (2.51)$$

где по определению член $C^i (x, y)$ есть ОВК $[J^0, J^i]$. Он отличен от нуля только при $x = y$ и, следовательно, состоит из δ -функции и ее производных. Однако из (2.22) видно, что члена, пропорционального δ -функции, нет, так как $a = b$. Следовательно, $C^i (x, y)$ отличен от нуля постольку, поскольку отличен от нуля ШЧ. Докажем сейчас, что $C^i (x, y)$ имеет отличное от нуля вакуумное среднее и, следовательно, ШЧ существует [для большей общности обсуждения не будем использовать здесь конкретный вид $C^i (x, y)$, полученный в (2.24)].

Чтобы начать анализ, продифференцируем (2.51) по y и используем сохранение тока:

$$\langle 0 | [J^0 (0, x), -\partial_0 J^0 (0, y) J^i] | 0 \rangle = \langle 0 | \frac{\partial}{\partial y^i} C^i (x, y) | 0 \rangle. \quad (2.52a)$$

Производная по времени может быть записана как коммутатор с гамильтонианом:

$$\begin{aligned} \langle 0 | [J^0(0, \mathbf{x}), \partial_0 J^0(0, \mathbf{y})] | 0 \rangle &= \langle 0 | [J^0(0, \mathbf{x}), i [H, J^0(0, \mathbf{y})]] | 0 \rangle = \\ &= i \langle 0 | J^0(0, \mathbf{x}) H J^0(0, \mathbf{y}) + J^0(0, \mathbf{y}) H J^0(0, \mathbf{x}) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.526)$$

Раскрывая коммутаторы в (2.526), учли, что энергия вакуума равна нулю. Умножим теперь (2.526) на $f(\mathbf{x}) f(\mathbf{y})$, где $f(\mathbf{x})$ — произвольная вещественная функция, и проинтегрируем по \mathbf{x} и \mathbf{y} . Тогда получим

$$\left. \begin{aligned} i \int d^3x d^3y \langle 0 | C^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | 0 \rangle f(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial y_i} f(\mathbf{y}) &= 2 \langle 0 | F H F | 0 \rangle; \\ F &= \int d^3x f(\mathbf{x}) J^0(0, \mathbf{x}). \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Правая часть (2.53) отлична от нуля. Дело в том, что оператор F имеет в общем случае отличные от нуля матричные элементы между вакуумом и другими состояниями, имеющими с необходимостью положительную энергию:

$$\begin{aligned} \langle 0 | F H F | 0 \rangle &= \sum_{n, m} \langle 0 | F | m \rangle \langle m | H | n \rangle \langle n | F | 0 \rangle = \\ &= \sum_n E_n |\langle 0 | F | n \rangle|^2 > 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

(Вакуум не может быть собственным состоянием F , так как J^0 имеет равное нулю вакуумное среднее.) Таким образом, $C^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ отлично от нуля и ШЧ не может исчезать [10]. Доказательство можно перенести и на несохраняющиеся токи, и, следовательно, ШЧ должны быть и в ОВК $[J_a^0, J_a^i]$, где a — любой индекс группы внутренней симметрии.

Существование ШЧ вызвало очень большой интерес, так как канонические вычисления ведут во многих случаях к исчезающему результату, который, как мы видели, противоречит другим свойствам локальной квантовой теории — положительности энергии и лоренц-ковариантности. Например, в спинорной электродинамике считается, что ток J^μ дается формулой $\psi \gamma^\mu \psi$ и что, далее, ОВК $[J^0, \psi]$ дается формулой

$$[J^0(0, \mathbf{x}), \psi(0)] = -\psi(0) \delta(\mathbf{x}). \quad (2.55)$$

А отсюда следует, что ОВК $[J^0, J^i]$ обращается в нуль. (С другой стороны, в скалярной электродинамике получается неисчезающий результат.) Аналогичные замечания относятся и к $SU(3) \otimes \otimes SU(3)$ -кварковым токам: и здесь канонические вычисления ведут к исчезающим величинам.

Мы имеем дело с примером аномалии в коммутаторе. Исторически аномалии появились раньше, чем на них обратили внимание в алгебре токов. В свое время их игнорировали, так как предполагали,

что физические предсказания нечувствительны к ШЧ. При этом исходили в основном из обсуждавшегося здесь предположения Фейнмана. Теперь ясно, что это был неоправданный оптимизм.

Приведенное выше доказательство существования ШЧ ничего не говорит о том, является ли этот объект c -числом или оператором. Было доказано лишь то, что его вакуумное среднее отлично от нуля. Аргументация с помощью модельных расчетов также неубедительна. В скалярной электродинамике и σ -модели каноническими методами получается q -число, в алгебре полей — c -число. В теориях, где канонические расчеты дают нуль, более тщательные оценки дают или квадратично расходящееся c -число в спинорной электродинамике, или q -число в кварковой модели со скалярными глюонами, или c -число в кварковой модели с векторными глюонами.

Чтобы разобраться в природе ШЧ, надо обратиться к эксперименту. К сожалению, до сих пор найдены только крайне ограниченные возможности экспериментальной проверки. Вакуумное среднее ШЧ в коммутаторе электромагнитных токов можно выразить в терминах интеграла по полному сечению аннигиляции лептонов [12]. Недавно было получено правило сумм, связывающее однонуклонный матричный элемент этой же величины с полным сечением электророждения [13]. В последнем случае проверяется, является ли электромагнитный ШЧ q -числом. Предварительные анализы показывают, что он является c -числом и, что крайне вероятно, расходится квадратично. Экспериментальные данные о природе $SU(3) \otimes SU(3)$ ШЧ еще более скудны. Сейчас можно сказать только то, что кажущееся выполнение первого $SU(2) \otimes SU(2)$ -правила сумм Вайнберга [14] — прямое указание на отсутствие члена с $I = 1$ в S_{ab}^{ij} , т. е. $S_{ab}^{ij} = S_{ba}^{ij}$ для векторных и аксиальных токов. Здесь $a, b = 1, 2, 3$.

Правило сумм для вакуумного среднего ШЧ можно найти в литературе*, поэтому не будем останавливаться на нем здесь (см. упражнение 3.2). Однопротонный матричный элемент ШЧ мы обсудим в гл. 5 в связи с правилом сумм Каллана — Гросса. Заметим, наконец, что существование неканонических структур, подобных ШЧ, было найдено и в ОВК между избранными компонентами $\theta^{\mu\nu}$ (см. первые две работы в ссылке [4]).

2.6. Обсуждение результатов

Ограничения, полученные в этой главе, следуют из весьма общего модельно-независимого рассмотрения. Тем не менее необходимо одно предостережение относительно справедливости наших результатов. Всякий раз, когда при выводе используются очень детальные и формальные свойства теории поля, нужно иметь в виду, что упоминавшиеся трудности локальной квантовой теории поля могут сделать незаконными наши аргументы. В то же время резуль-

* V. N. Gribov, B. L. Ioffe, I. Ya. Pomeranchuk. «Phys. Lett. B», 1967, v. 24, p. 554. — *Прим. пер.*

таты надежнее, когда используются общие свойства теории. С первой ситуацией мы столкнулись в параграфах 2.1 и 2.2, так что не следует удивляться невыполнению канонических ограничений. В параграфах 2.3 — 2.5 мы исходили только из лоренц-ковариантности, положительности и существования одновременных коммутаторов. До сих пор не было найдено ни одного примера, противоречащего полученным из этих принципов выводам.

Список литературы с комментариями

1. Мы оставляем здесь без внимания усложнения, возникающие для фермионных операторов: соотношения антикоммутации и т. д. Можно убедиться, что эти усложнения не меняют конечных выводов.
2. Так как к лагранжиану можно добавить полную производную без изменения динамики, то уточним разграничение между внутренними и пространственно-временными симметриями. Если даже $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \Lambda^\mu = 0$, то симметрия все равно называется внутренней, если можно найти динамически эквивалентный лагранжиан \mathcal{L}' , такой, что $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \chi^\mu$; $\delta\mathcal{L}' = \delta\mathcal{L} + \partial_\mu \delta\chi^\mu = \partial_\mu [\Lambda^\mu + \delta\chi^\mu] = 0$.
Если невозможно исключить $\partial_\mu \Lambda^\mu$ этим приемом, то мы имеем дело с пространственно-временной симметрией.
3. Более традиционной формой коммутаторов токов является
$$[J_0^a(t, \mathbf{x}), J_0^b(t, \mathbf{x})] = i f_{abc} J_0^c(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$
 Такая форма эквивалентна (2.12), если заменить J_0^a на iJ_0^a .
4. Данный формализм был предложен Швингером (Schwinger J. «Phys. Rev.», 1963, v. 130, p. 800). Различные приложения этой точки зрения можно найти в этой работе Швингера и работах Boulware D. G., Deser S. «J. Math. Phys.», 1967, v. 8, p. 1468; Gross D. J., Jackiw R. «Phys. Rev.», 1967, v. 163, p. 1688.
5. Gross D. J., Jackiw R. «Phys. Rev.», 1967, v. 163, p. 1688; Jackiw R. «Phys. Rev.», 1968, v. 175, p. 2058; Deser S., Morrison L. K. «J. Math. Phys.», 1970, v. 11, p. 596.
6. Schwinger J. «Phys. Rev. Lett.», 1959, v. 3, p. 296. Градиентные члены были впервые найдены в работе Goto T., Imamura I. «Progr. Theor. Phys.», 1955, v. 14, p. 196.
7. Приводимая аргументация была развита в работах Гросса и Джекива [5].
8. Изложенный анализ приведен в работе Gross D. J., Jackiw R. «Nucl. Phys. B», 1966, v. 14, p. 269.
9. Feynman R. P. Не опубликовано; см. также Bég M. A. B. «Phys. Rev. Lett.», 1966, v. 17, p. 333.
10. Приведенный вывод принадлежит Швингеру [6]. Гото и Имамура (см. [6]) получили ранее тот же результат другим способом.
11. Boulware D. G., Jackiw R. «Phys. Rev.», 1969, v. 186, p. 1442; Boulware D. G., Herbert J. — «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 1055, см. также гл. 4.
12. Bjorken J. D. «Phys. Rev.», 1966, v. 148, p. 1467; Gribov V. N., Ioffe B. L., Pomeranchuk I. Ya. «Phys. Lett.», 1967, v. 24B, p. 554; Jackiw R., Preparata G. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 975; «Phys. Rev. Lett. E», 1969, v. 22, p. 1162.
13. Jackiw R., Van Royen R., West G. B. «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 2473; см. также: Brown L. S. Lectures in Theoretical Physics. Ed by W. E. Brittin, B. W. Downs and J. Downs. N. Y., Interscience, 1970; Cornwall J. M., Corrigan D., Norton R. E. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 1141; * Иоффе Б. Л. Проблемы теоретической физики. — В сб.: Памяти И. Е. Тамма. М., «Наука», 1972, с. 200.
14. Weinberg S. «Phys. Rev. Lett.», 1967, v. 18, p. 507.

ТЕОРЕМА БЬЕРКЕНА—ДЖОНСОНА—ЛОУ

Понять причины невыполнения формальных предсказаний алгебры токов можно, вычислив ОВК и увидев, сохраняется или нет его канонический вид. Но здесь возникают трудности. Часто ОВК неоднозначны и получаемые результаты зависят от правил, принимаемых при работе с неоднозначными выражениями. Например, ответ может зависеть от способа перехода к совпадающим временам в коммутаторе для несовпадающих времен. При вычислении коммутаторов операторов, которые сами по себе — произведения других операторов, появляются бесконечности и неоднозначности уже при образовании этих произведений (например, построение токов, билинейных по фермионным полям). В литературе есть много вычислений коммутаторов с отличающимися результатами, и можно проследить, что расхождение возникает именно из-за различных способов обхода неоднозначностей.

К счастью, для наших целей можно ввести однозначный способ вычисления коммутаторов, так как здесь сравниваются предсказания алгебры токов с явными динамическими предсказаниями теории. Для последовательной проверки ОВК должны вычисляться по той же технике, что и все остальные величины в теории. Пока единственный способ вычисления физических величин — перенормированная теория возмущений, приводящая к конечным, хорошо определенным функциям Грина. Тогда и ОВК должны вычисляться из (известных) функций Грина, что достигается методом Бьёркена, Джонсона и Лоу (БДЛ), который сейчас обсудим.

Рассмотрим матричный элемент T -произведения двух операторов A и B :

$$T(q) = \int d^4x \exp(iqx) \langle \alpha | T A(x) B(0) | \beta \rangle. \quad (3.1)$$

Матричный элемент ОВК $[A, B]$ определяется по БДЛ как

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 T(q) = i \int d^3x \exp(-iqx) \langle \alpha | [A(0, x), B(0)] | \beta \rangle. \quad (3.2)$$

Альтернативное определение коммутатора — коэффициент при члене $1/q_0$ в разложении $T(q)$ при больших q_0 . Во всех последующих вычислениях будем определять коммутатор из известного T -произведения с помощью уравнения (3.2). Если предел (3.2) расходится, то это интерпретируется как утверждение о расходимости конкретного матричного элемента ОВК. Можно привести «выводы» формулы БДЛ, которые справедливы, если допустить ряд математических манипуляций. Выводы служат только для мотивировки результата и гарантии того, что в несингулярных случаях определение коммутатора по БДЛ совпадает с обычным. Приведем три вывода с возрастающей степенью строгости.

В первом выводе [3] сначала перепишем (3.1) как

$$T(q) = -\frac{i}{q_0} \int d^4x \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \exp(iqx) \right) \langle \alpha | T A(x) B(0) | \beta \rangle. \quad (3.3a)$$

Интеграл берется по частям, поверхностные члены опускаются, и получается

$$q_0 T(q) = i \int d^4x \exp(iqx) \langle \alpha | T \dot{A}(x) B(0) | \beta \rangle + \\ + i \int d^3x \exp(-i \mathbf{q} \mathbf{x}) \langle \alpha | [A(0, x), B(0)] | \beta \rangle. \quad (3.36)$$

Теперь заметим, что первый член в правой части (3.36) является фурье-образом величины, имеющей по переменной x_0 особенности не сильнее скачков. Следовательно, в соответствии с леммой Римана — Лебега этот член исчезает при $q_0 \rightarrow \infty$. Таким образом, в пределе $q_0 \rightarrow \infty$ (3.36) совпадает с (3.2). Данный вывод также показывает, как можно получить аномальный неканонический результат из определения БДЛ. Именно, может оказаться, что при каноническом вычислении \dot{A} с помощью операторных уравнений движения теории получается ответ, ведущий к сингулярному поведению $\int d^4x \exp(iqx) \langle \alpha | T \dot{A}(x) B(0) | \beta \rangle$. Тогда вопреки формальным соображениям этот член может остаться в пределе больших q_0 и дать неисчезающую добавку к каноническому значению $i \int d^3x \exp(i \mathbf{q} \mathbf{x}) \langle \alpha | [A(0, x), B(0)] | \beta \rangle$, что приводит к неканоническому значению предела $\lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 T(q)$ и, по определению, интерпретируется как неканоническое значение коммутатора.

Вторым выводом является оригинальный вывод Бьёркена [1]. Определим

$$\rho(q_0, q) = \int d^4x \exp(iqx) \langle \alpha | A(x) B(0) | \beta \rangle; \quad (3.4a)$$

$$\bar{\rho}(q_0, q) = \int d^4x \exp(iqx) \langle \alpha | B(0) A(x) | \beta \rangle. \quad (3.4b)$$

С помощью интегрального представления для θ -функции

$$\theta(x_0) = \frac{i}{2\pi} \int d\alpha \exp(-ix_0 \alpha) \frac{1}{\alpha + i\varepsilon} \quad (3.5)$$

T -произведение (3.1) можно записать в виде

$$T(q) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{\alpha + i\varepsilon} [\rho(q_0 - \alpha, q) + \bar{\rho}(q_0 + \alpha, q)] = \frac{i}{2\pi} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dq'_0 \left[\frac{\rho(q'_0, q)}{q_0 - q'_0 + i\varepsilon} - \frac{\bar{\rho}(q'_0, q)}{q_0 + q'_0 - i\varepsilon} \right]. \quad (3.6a)$$

Это так называемое представление Лоу для T -произведения.

Умножив на q_0 и перейдя к пределу $q_0 \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 T(q) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dq'_0 [\rho(q'_0, q) - \bar{\rho}(q'_0, q)]. \quad (3.6b)$$

Согласно определению (3.4), имеем, что (3.6б) совпадает с уравнением (3.2):

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 T(q) = i \int d^4 x \exp(-iqx) \delta(x_0) \langle \alpha | A(x) B(0) | \beta \rangle - \\ - \langle \alpha | B(0) A(x) | \beta \rangle = i \int d^3 x \exp(-iqx) \langle \alpha | [A(0, x), B(0)] | \beta \rangle. \quad (3.6в)$$

Этот вывод явно демонстрирует физический смысл ОВК, определенного согласно БДЛ. Именно в соответствии с (3.6б) коммутатор выражается через спектральные функции ρ и $\bar{\rho}$. А они, в свою очередь, связаны с непосредственно измеряемыми матричными элементами A и B :

$$\left. \begin{aligned} \rho(q_0, q) &= \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(p_\alpha + q - p_n) \langle \alpha | A(0) | n \rangle \langle B(0) | \beta \rangle; \\ \bar{\rho}(q_0, q) &= \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(q + p_n - p_\beta) \langle \alpha | B(0) | n \rangle \langle n | A(0) | \alpha \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Третий вывод принадлежит Джонсону и Лоу [2]. Рассмотрим T -произведение в координатном пространстве:

$$t(x) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \exp(-iqx) T(q). \quad (3.8)$$

Одновременный коммутатор можно определить как

$$C(0, x) = \lim_{x_0 \rightarrow +0} t(x) - \lim_{x_0 \rightarrow -0} t(x). \quad (3.9)$$

При $x_0 \rightarrow +0$ интеграл по q_0 в (3.8) можно перенести на комплексную плоскость q_0 , замыкая контур в нижней полуплоскости. Аналогично при $x_0 \rightarrow -0$ контур интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости. В пределе $x_0 \rightarrow \pm 0$ интегралы вдоль вещественной оси q_0 в двух членах (3.9) взаимно уничтожаются, и получается

$$C(0, x) = \oint \frac{dq_0}{2\pi} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \exp(iqx) T(q). \quad (3.10а)$$

Предположим теперь, что для $T(q)$ существует разложение по обратным степеням q_0 . Контурный интеграл $(q_0)^{-n}$ по часовой стрелке равен $-2\pi i \delta_{n,1}$, так что вклад в $T(q)$ дает только член $1/q_0$. Назовем эту часть $T_{-1}(q)$. Тогда

$$C(0, x) = -i \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \exp(iqx) T_{-1}(q). \quad (3.10б)$$

и его фурье-преобразование эквивалентно (3.2). Джонсон и Лоу далее показали, что изложенный вывод остается в силе и тогда, когда главная сингулярность $T(q)$ при больших q_0 имеет вид $q_0^{-1} \ln q_0$. Одновременный коммутатор в этом случае логарифмически расходится. Аналогично сингулярность вида $q_0 \ln q_0 = (1/q_0) (q_0^2 \ln q_0)$ интерпретируется как квадратичная расходимость коммутатора.

Отметим, что когда теорема БДЛ была впервые открыта, она во многих случаях применялась для вывода высокоэнергетического поведения амплитуд. Была идея записать

$$T(q) \sim \frac{i}{q_0} \int d^3 x \exp(-iqx) \langle \alpha | [A(0, x), B(0)] | \beta \rangle \quad (3.11)$$

и вычислить правую часть (3.11) каноническим методом. Однако, как было продемонстрировано еще в работе Джонсона и Лоу, использование для этого канонического коммутатора не оправдано. То, что в общем случае высокоэнергетическое поведение амплитуд не определяется таким способом, было недавно подтверждено вновь и описано как «нарушение теоремы БДЛ».

Заметим, что теорема БДЛ определяет коммутатор из T -произведения, а не из ковариантного T^* -произведения. В теории возмущений, однако, вычисляется ковариантная величина, и необходимо выделить T -произведение. Для этого вспомним, что разность между T - и T^* -произведениями локальна по координатам и, следовательно, является полиномом по q_0 в импульсном пространстве. Поэтому перед применением техники БДЛ к величинам, вычисленным в теории возмущений, необходимо отбросить все полиномиальные по q_0 величины.

Ясно, что разложение по обратным степеням q_0 можно обобщить и на более высокие порядки. Из (3.3а) легко видеть, что если ОВК $[A, B]$ исчезает, то

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0^2 T(q) = - \int d^3 x \exp(-iqx) \langle \alpha | [\dot{A}(0, x), B(0)] | \beta \rangle. \quad (3.12)$$

Если предел расходится, то матричный элемент ОВК $[A, B]$ бесконечен. Коммутаторы с достаточным числом производных по времени скорее всего бесконечны, поскольку маловероятно, чтобы разложение по обратным степеням q_0 можно было продолжить бесконечно.

Список литературы с комментариями

1. Bjorken J. B. «Phys. Rev.», 1966, v. 148, p. 1467.
2. Johnson K., Low F. E. «Prog. Theor. Phys.», 1966, v. 37—38, p. 74.
3. Этот метод возник в результате обсуждения с проф. А. Герштейном (I. Gerstein).

4.1. Вводная часть

Нейтральный пион распадается на два фотона с шириной порядка 10 эВ. Экспериментально измеряется матричный элемент распада $M(p, q) = \langle \pi, k, | \gamma, p, \gamma', q \rangle$, где p и q — 4-импульсы фотонов; $k = p + q$ — 4-импульс пиона. Этот элемент $M(p, q)$ имеет вид $\varepsilon_\mu(p) \varepsilon_\nu(q) T^{\mu\nu}(p, q)$ со следующей структурой тензора $T^{\mu\nu}$:

$$T^{\mu\nu}(p, q) = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta T(k^2). \quad (4.1)$$

Этот вид следует из лоренц-ковариантности и сохранения четности (пион псевдоскалярен, $T^{\mu\nu}$ должно быть псевдотензором, и отсюда возникает фактор $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$). Видно, что выполняются и калибровочная инвариантность ($p^\mu T^{\mu\nu} = 0 = q_\nu T^{\mu\nu}$), и бозе-симметрия [$T^{\mu\nu}(p, q) = T^{\nu\mu}(q, p)$].

Будем рассматривать фотонные переменные q^2 и p^2 на массовой поверхности фотона: $q^2 = p^2 = 0$. Пионная переменная k^2 равна квадрату массы пиона μ^2 , но для наших целей позволим ей отклоняться от этой точки. Продолжение с массовой поверхности можно провести обычным методом ЛШЦ:

$$T^{\mu\nu}(p, q) = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta T(k^2) = (\mu^2 - k^2) \langle 0 | \varphi(0) | \gamma, p, \gamma', q \rangle. \quad (4.2)$$

Здесь φ — интерполирующее поле для пиона. Конечно, нельзя сказать, что это каноническое поле пиона — оно может и не существовать. Это просто локальный оператор, имеющий неисчезающий матричный элемент между вакуумом и однопионным состоянием, нормированный на единицу: $\langle 0 | \varphi(0) | \pi \rangle = 1$.

4.2. Теорема Сазерленда—Вельтмана

Докажем, следуя Сазерленду и Вельтману [1], что если в качестве интерполирующего поля пиона используется дивергенция аксиального тока, то $T(0) = 0$ постольку, поскольку верны идеи обычной алгебры токов*. Это утверждение чисто математическое, не имеющее физического смысла. Однако если μ^2 мало по сравнению со всеми остальными массовыми параметрами задачи, то можно ожидать, что $T(\mu^2) \approx T(0)$. Эта гипотеза гладкости $T(k^2)$ основана на предположении, что дивергенция аксиального тока — гладкий оператор, матричные элементы которого не имеют никакого дополнительного, динамически не обязательного быстрого изменения. В этом и состоит смысл гипотезы PCAC, успешно используемой в других примерах. В данном случае, к сожалению, нельзя понять, почему в эксперименте $T(\mu^2) \neq (0)$.

После того как Сазерленд и Вельтман указали на такую экспериментальную неудачу с PCAC, наиболее широко распространенным

объяснением было то, что по непонятным причинам $T(k^2)$ меняется быстро. В самых первых приложениях РСАС, действительно, иногда упускали из виду возможность быстрого изменения ряда конкретных амплитуд. Время шло, но никакого объяснения этому искусственно введенному, быстрому изменению не появлялось.

В анализе Сазерленда — Вельтмана используется представление (4.2) для амплитуды распада вне массовой поверхности пиона:

$$T^{\mu\nu}(p, q) = e^2 (\mu^2 - k^2) \int d^4 x d^4 y \exp(-ipx) \exp(-iqy) \times \\ \times \langle 0 | T^* J^\mu(x) J^\nu(y) \phi(0) | 0 \rangle. \quad (4.3)$$

Здесь J^μ — электромагнитный ток. Пионное поле заменяется дивергенцией аксиального тока J_5^α :

$$\phi(0) = \partial_\alpha J_5^\alpha(0) / F\mu^2. \quad (4.4)$$

Здесь $F\mu^2$ — множитель, обеспечивающий должную нормировку пионного поля, определенного согласно (4.4):

$$\langle 0 | J_5^\alpha(0) | \pi \rangle = ip^\alpha F; \langle 0 | \partial_\alpha J_5^\alpha(0) | \pi \rangle = F\mu^2. \quad (4.5)$$

Тогда

$$T^{\mu\nu}(p, q) = \frac{e^2 (\mu^2 - k^2)}{F\mu^2} \int d^4 x d^4 y \exp(-ipx) \exp(-iqy) \times \\ \times \langle 0 | T^* J^\mu(x) J^\nu(y) \partial_\alpha J_5^\alpha(0) | 0 \rangle = \frac{e^2 (\mu^2 - k^2)}{F\mu^2} \int d^4 x d^4 y \times \\ \times \exp(-ipx) \exp(-iqy) \partial_\alpha \langle 0 | T^* J^\mu(x) J^\nu(y) J_5^\alpha(0) | 0 \rangle = \\ = \frac{\mu^2 - k^2}{F\mu^2} k_\alpha T^{\alpha\mu\nu}(p, q), \quad (4.6a)$$

где $T^{\alpha\mu\nu}(p, q)$ определено согласно

$$T^{\alpha\mu\nu}(p, q) = -ie^2 \int d^4 x d^4 y \exp(-ipx) \exp(-iqy) \times \\ \times \langle 0 | T^* J^\mu(x) J^\nu(y) J_5^\alpha(0) | 0 \rangle. \quad (4.6b)$$

При переходе от (4.6a) к (4.6b) в правой части (4.6a) используется алгебра токов: кроме возможных ШЧ токи J_5^α и J^μ коммутируют:

$$[J_5^\alpha(0, x), J^\mu(0)] = 0 + \text{ШЧ}. \quad (4.7)$$

С ШЧ можно обойтись тройко. Можно предположить, что его нет. Поскольку в соответствующий ОВК входят неодинаковые токи, то нельзя доказать, что ШЧ обязательно присутствует. Альтернативным, более слабым предположением является то, что ШЧ есть S -число. Так как вакуумное среднее тока равно нулю, легко видеть, что S -числовой ШЧ не мешает вынести производную из-под знака T^* -произведения. Наконец, самое слабое предположение — принять гипотезу Фейнмана и, не вдаваясь в природу каких бы то ни было возможных ШЧ, заявить, что правильна наивная процедура из-за взаимной компенсации ШЧ и дивергенции контактных членов.

Тензор $T^{\alpha\mu\nu}(p, q)$ должен иметь отрицательную четность, так как J_5^α — псевдовектор; должен удовлетворять бозе-симметрии: $T^{\alpha\mu\nu}(p, q) = T^{\alpha\mu\nu}(q, p)$; наконец, он должен быть поперечен p_μ и q_ν : $p_\mu T^{\alpha\mu\nu}(p, q) = q_\nu T^{\alpha\mu\nu}(p, q) = 0$. Последнее условие следует из сохранения J^μ и алгебры токов, которой удовлетворяют J^μ и J_5^α . Опять все возникающие коммутаторы равны нулю, кроме возможных ШЧ, игнорируемых в этом расчете:

$$[J^0(0, x), J^\mu(0)] = 0 + \text{ШЧ}, \quad (4.8a)$$

$$[J^0(0, x), J_5^\mu(0)] = 0 + \text{ШЧ}. \quad (4.8b)$$

Наиболее общим видом $T^{\alpha\mu\nu}(p, q)$, свободным от кинематических особенностей и удовлетворяющим сформулированным выше требованиям (напомним, что $p^2 = q^2 = 0$), является

$$T^{\alpha\mu\nu}(p, q) = \varepsilon^{\mu\nu\omega\varphi} p_\omega q_\varphi k^\alpha F_1(k^2) + (\varepsilon^{\alpha\mu\omega\varphi} q^\nu - \varepsilon^{\alpha\nu\omega\varphi} p^\mu) p_\omega q_\varphi F_2(k^2) + (\varepsilon^{\alpha\mu\omega\varphi} p^\nu - \varepsilon^{\alpha\nu\omega\varphi} p^\mu) p_\omega q_\varphi F_3(k^2) + \varepsilon^{\alpha\mu\nu\omega} (p_\omega - q_\omega) (1/2) k^2 F_3(k^2). \quad (4.9)$$

Отсюда следует, что

$$k_\alpha T^{\alpha\mu\nu}(p, q) = \varepsilon^{\mu\nu\omega\varphi} p_\omega q_\varphi k^2 [F_1(k^2) - F_3(k^2)]. \quad (4.10a)$$

И, сравнивая (4.10a) с (4.6) и (4.1), получаем наконец

$$T(k^2) = \frac{\mu^2 k^2}{F \mu^2} k^2 [F_1(k^2) - F_3(k^2)]. \quad (4.10b)$$

Как отмечалось, все F_i не имеют кинематических особенностей; так как мы рассматриваем низший порядок по электромагнетизму, они не имеют и динамических особенностей при $k^2 = 0$. Следовательно, как и ожидалось, $T(0) = 0$. Заметим, что при выводе математического утверждения $T(0) = 0$ не использовалась гипотеза PCAC. Она нужна, только когда $T(0)$ связывается с $T(\mu^2)$. А теперь покажем, что это математическое утверждение неправильно в σ -модели.

4.3. Модельное вычисление

Вычислим [2] константу распада пиона вне массовой поверхности $T(k^2)$ в σ -модели, где все условия теоремы Сазерленда — Вельтмана выполнены [3]. Лагранжиан модели имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i\gamma^\mu - \partial_\mu - m) \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \\ & - \frac{1}{2} (\mu^2 + 2\lambda F^2) \sigma^2 + e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu + g \bar{\psi} (\sigma + \varphi \gamma_5) \psi - \\ & - \lambda [(\varphi^2 + \sigma^2)^2 - 2F\sigma(\sigma^2 + \varphi^2)]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Здесь ψ , φ и σ — поля «протона», «пиона» и σ -частицы, имеющих массы m , μ и $(\mu^2 + 2\lambda F^2)^{1/2}$ соответственно. Протон взаимодействует с пионом и σ -частицей кирально-симметричным образом с константой g . Протон обладает также электромагнитным взаимо-

действием, но в наимизшем порядке по этому взаимодействию достаточно рассматривать электромагнитный потенциал A^μ как внешнее возмущение. Имеется также самодействие мезонов с константой λ , необходимое для самосогласованности модели. Но на расчеты оно не повлияет. Параметр F в модели равен $2 mg^{-1}$. Влиянием изоспина пренебрегаем, так как оно несущественно.

В модели имеется нейтральный аксиальный ток J_5^α , дивергенция которого в соответствии с уравнениями движения теории совпадает с пионным полем:

$$J_5^\alpha = i\bar{\psi}\gamma^\alpha\gamma^5\psi + 2(\sigma\partial^\alpha\varphi - \varphi\partial^\alpha\sigma) - F\partial^\alpha\varphi; \quad (4.12a)$$

$$\partial_\alpha J_5^\alpha = F\mu^2\varphi. \quad (4.12б)$$

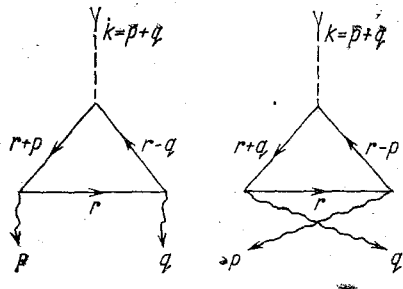


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана для амплитуды распада в наимизшем порядке теории (4.11)

Электромагнитный ток $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ и аксиальный ток удовлетворяют обычным коммутаторам токов. В алгебре временных компонент нет никаких ШЧ, так что нельзя удостовериться, выполняется или нет гипотеза Фейнмана.

В рассматриваемой теории пион может распадаться на два фотона, диссоциируя сначала на протон-антипротонную пару, которая затем испускает два фотона. Диаграммы наимизшего порядка приведены на рис. 1. Они имеют интегральное представление:

$$\left. \begin{aligned} T^{\mu\nu}(p, q) &= \Gamma^{\mu\nu}(p, q) + \Gamma^{\nu\mu}(q, p); \\ \Gamma^{\mu\nu}(p, q) &= ige^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma^5 [\gamma_\alpha r^\alpha + \gamma_\alpha p^\alpha - m]^{-1} \times \\ &\times \gamma^\mu [\gamma_\alpha r^\alpha - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\alpha r^\alpha - \gamma_\alpha q^\alpha - m]^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.13a)$$

Интеграл, на первый взгляд, расходится линейно; однако после вычисления следов остается конечное выражение

$$\Gamma^{\mu\nu}(p, q) = 4mige^2 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} [(r+p)^2 - m^2]^{-1} \times \\ \times [r^2 - m^2]^{-1} [(r-q)^2 - m^2]^{-1}. \quad (4.13б)$$

Последующие вычисления элементарны [4]. Ответ имеет вид

$$\Gamma^{\mu\nu}(p, q) = \frac{mge^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [m^2 - k^2 xy]^{-1}. \quad (4.13в)$$

В обозначениях (4.1)

$$\left. \begin{aligned} T(k^2) &= \frac{mge^2}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [m^2 - k^2 xy]^{-1}; \\ T(0) &= \frac{ge^2}{4\pi^2 m} = \frac{e^2}{2\pi_2 F} \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Для дальнейшего заметим, что при больших $m/T(k^2)$ меняется как $ge^2/4\pi^2 m$.

Наши вычисления продемонстрировали ошибочность *математической* части теоремы Сазерленда — Вельтмана. Так как $T(k^2)$ является совершенно гладкой при малых k^2 , $T(k^2) \approx T(0) \left(1 + \frac{1}{12} \frac{k^2}{m^2}\right)$, то видно, что в этой модели неправильна и *экспериментальная* часть теоремы. Причина совсем не в каком-либо неожиданно быстром изменении $T(k^2)$, а в невыполнении обычной алгебры токов.

4.4. Аномальное тождество Уорда

Для дальнейшего понимания создавшейся ситуации вычислим $T^{\alpha\mu\nu}(p, q)$, входящее в (4.6б). Соответствующие диаграммы Фейнмана приведены на рис. 2. В первых двух диаграммах (см. рис. 2, а) аксиальный ток связан непосредственно с фермионной петлей. В последних двух диаграммах (см. рис. 2, б) аксиальный ток связан сначала с пионом с константой $2mg^{-1}$, приобретая, таким образом, нужный пионный полюс.

Интегральное представление $T^{\alpha\mu\nu}(p, q)$ имеет вид:

$$T^{\alpha\mu\nu}(p, q) = T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q) + T_2^{\alpha\mu\nu}(p, q); \quad (4.15a)$$

$$T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q) = \Gamma^{\alpha\mu\nu}(p, q) + \Gamma^{\alpha\nu\mu}(q, p); \quad (4.15б)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{\alpha\mu\nu}(p, q) &= ie^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha [\gamma_\beta r^\beta + \gamma_\beta p^\beta - m]^{-1} \times \\ &\times \gamma^\mu [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1}; \end{aligned} \quad (4.15в)$$

$$T_2^{\alpha\mu\nu}(p, q) = -\frac{2mg^{-1}}{k^2 - \mu^2} k^\alpha T^{\mu\nu}(p, q). \quad (4.15г)$$

Очевидно, что проверка тождества Уорда

$$(F\mu^2)^{-1} (\mu^2 - k^2) k_\alpha T^{\alpha\mu\nu}(p, q) = T^{\mu\nu}(p, q), \quad (4.16a)$$

использованного при выводе теоремы Сазерленда — Вельтмана, эквивалентна доказательству того, что

$$k_\alpha T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q) = 2mg^{-1} T^{\mu\nu}(p, q). \quad (4.16б)$$

В выводе теоремы требуется также выполнение векторного тождества Уорда, т. е. калибровочная инвариантность. В наших обозначениях оно эквивалентно условию

$$p_\mu T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q) = q_\nu T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q) = 0. \quad (4.17)$$

Покажем, что и (4.16), и (4.17) не могут быть выполнены одновременно для $T_1^{\alpha\mu\nu}$, определенного уравнением (4.15).

Важным свойством диаграмм рис. 2, а, ответственным за это аномальное поведение, является их линейная расходимость. В отличие от $T^{\mu\nu}$, в (4.13) линейная расходимость не убирается вычислением следов. В линейно расходящихся интегралах незаконно сдвигать переменную интегрирования. Это легко увидеть в одномерном случае. Рассмотрим

$$\Delta(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [f(x+a) - f(x)]. \quad (4.18a)$$

Если можно сдвинуть переменную интегрирования в первом интеграле $x+a \rightarrow x$, то $\Delta(a) = 0$. Чтобы увидеть, что $\Delta(a)$ не обязательно равно нулю, разложим подынтегральное выражение:

$$\Delta(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [af'(x) + \frac{a^2}{2} \times \times f''(x) + \dots]. \quad (4.18б)$$

Рис. 2. Диаграммы Фейнмана для амплитуды $J_5^\alpha \rightarrow 2\gamma$ в наини́зшем порядке теории (4.11)

Проинтегрировав по частям, получаем:

$$\Delta(a) = a[f(+\infty) - f(-\infty)] + \frac{a^2}{2} [f'(\infty) - f'(-\infty)]. \quad (4.18в)$$

Когда интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ сходится (или расходится не более чем логарифмически), имеем $0 = f(\pm\infty) = f'(\pm\infty) \dots$ и $\Delta(a) = 0$. Однако для линейно расходящегося интеграла $0 \neq f(\pm\infty)$, $0 = f'(\pm\infty) = f''(\pm\infty) = \dots$ и $\Delta(a)$ не обязано исчезать:

$$\Delta(a) = a[f(\infty) - f(-\infty)]. \quad (4.18 г)$$

Эта величина называется *поверхностным членом*. Таково же положение и в 4-мерных интегралах по пространству Минковского.

Рассмотрим

$$\Delta^\mu(a) = i \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \left[\frac{r^\mu + a^\mu}{([r+a]^2 - m^2)^2} - \frac{r^\mu}{r^2 - m^2} \right], \quad (4.19a)$$

где a — произвольный 4-вектор. Поверхностный член может быть вычислен и результат отличен от нуля (см. упражнение (4.1):

$$\Delta^\mu(a) = -\frac{a^\mu}{32\pi^2}. \quad (4.19б)$$

В приложении к данной задаче отсюда следует, что интеграл (4.15в) для $\Gamma^{\alpha\mu\nu}$, дающий вклад в $T_1^{\alpha\mu\nu}$, не определен однозначно. Причина в том, что при записи (4.15в) был выбран импульс интегрирования r вполне определенным образом. Это импульс фермиона между двумя фотонными линиями. Однако его можно выбрать любым другим образом, так что этот фермион будет нести импульс $r + a$, где a — произвольный 4-вектор. Если бы интеграл не расходился линейно, то сдвигом переменной интегрирования можно было бы вернуться к старому выбору r . Однако в данном случае подобный сдвиг привел бы к поверхностным членам.

В обычных вычислениях расходящихся фейнмановских диаграмм такими неоднозначностями пренебрегают. Эти проблемы обходятся с помощью символического обрезания, а затем импульс обрезания устраняется из теории с помощью процедуры перенормировки. Для наших целей необходимо проследить за всеми возможными источниками неоднозначности. Для этого заменим выражение (4.15в) для $\Gamma^{\alpha\mu\nu}$ классом выражений, параметризованных произвольным 4-вектором a^μ :

$$\Gamma^{\alpha\mu\nu}(p, q | a) = \Gamma^{\alpha\mu\nu}(p, q) + \Delta^{\alpha\mu\nu}(p, q | a); \quad (4.20a)$$

$$\begin{aligned} \Delta^{\alpha\mu\nu}(p, q | a) = & i e^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma^5 \gamma^\alpha \{ [\gamma_\beta r^\beta + \gamma_\beta a^\beta + \gamma_\beta p^\beta - m]^{-1} \times \\ & \times \gamma^\mu [\gamma_\beta r^\beta + \gamma_\beta a^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta + \gamma_\beta a^\beta - \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1} - \\ & - [\gamma_\beta r^\beta + \gamma_\beta p^\beta - m]^{-1} \gamma^\mu [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1} \}. \end{aligned} \quad (4.20б)$$

Поверхностный член равен (см. упражнение 4.2)

$$\Delta^{\alpha\mu\nu}(p, q | a) = -\frac{e^2}{8\pi^2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} a_\beta. \quad (4.21)$$

Класс векторов a_β можно частично ограничить требованием, чтобы не вводились никакие дополнительные векторы, кроме уже имеющихся в задаче. Поэтому полагаем $a_\beta = (a + b) p_\beta + b q_\beta$. Классу функций $\Gamma^{\alpha\mu\nu}(p, q | a)$ отвечает класс функций $T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q | a)$. Из (4.15б) и (4.21)

$$T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q | a) = T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q) - \frac{e^2}{8\pi^2} a \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} (p_\beta - q_\beta). \quad (4.22)$$

Заметим, что бозе-симметрия соблюдена.

Можно считать «правильным» любой член семейства функций $T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q | a)$. Различные функции из семейства отличаются только полиномами от p и q , т. е. ковариантными контактными членами. Попытаемся теперь определить a из векторных и аксиально-векторных тождеств Уорда. Предположим, что для некоторого определенного a $T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q|a)$ будет удовлетворять этим тождествам. Как будет видно из дальнейшего, такого значения a не существует.

Можно вычислить $T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q|a)$, определенное согласно (4.15), и найти таким образом явную формулу для $T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q|a)$. Вычисление проводится обычными методами; следует лишь помнить, что сдвиги переменной интегрирования приводят к неисчезающим, но хорошо определенным членам. Замечательно то, что конечный результат сходится, так как при симметричном интегрировании выпадает не только линейная, но и следующая по важности логарифмическая расходимость. Таким образом, можно прийти к конечной, однозначной формуле для $T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q)$. (Незаконность сдвига переменной интегрирования следует только из формальной степени расходимости интеграла, даже если по случайной причине результат и конечен.) Подробные расчеты $T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q)$ имеются в литературе [5]; для проверки тождеств Уорда эта формула не понадобится; вполне достаточно интегрального представления (4.15).

Рассмотрим сначала аксиальное тождество Уорда. Найдем $k_\alpha T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q)$. Из (4.15в) следует, что

$$k_\alpha \Gamma^{\alpha\mu\nu}(p, q) = (p_\alpha + q_\alpha) \Gamma^{\alpha\mu\nu} = ie^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 (\gamma_\beta p^\beta + \gamma_\beta q^\beta) \times \\ \times [\gamma_\beta r^\beta + \gamma_\beta p^\beta - m]^{-1} \gamma^\mu [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1}. \quad (4.23a)$$

Переписав $\gamma_\beta p^\beta + \gamma_\beta q^\beta$ как

$$2m + (\gamma_\beta p^\beta + \gamma_\beta r^\beta - m) - (\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta q^\beta + m),$$

имеем

$$k_\alpha \Gamma^{\alpha\mu\nu}(p, q) = (2mg^{-1}) ig e^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 [\gamma_\beta r^\beta + \gamma_\beta p^\beta - m]^{-1} \times \\ \times \gamma^\mu [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1} + ie^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\mu \times \\ \times [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1} - ie^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 \times \\ \times [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta q^\beta + m]^{-1} [\gamma_\beta p^\beta + \gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} \gamma^\mu [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} \times \\ \times \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1}. \quad (4.23б)$$

Первый интеграл есть $\Gamma^{\mu\nu}(p, q)$, умноженное на $2mg^{-1}$ [см. (4.13)]. В третьем интеграле $\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta q^\beta + m$ можно переставить с γ^5 , меняя общий знак интеграла и знак m . Из-за циклич-

ности следа можно поставить этот член в конце выражения, сократив с последним из пропагаторов. Тогда мы остаемся с

$$\begin{aligned}
 k_\alpha \Gamma^{\alpha\mu\nu}(p, q) &= 2mg^{-1} \Gamma^{\mu\nu}(p, q) + \\
 &+ ie^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\mu [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1} + \\
 &+ ie^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 [\gamma_\beta p^\beta + \gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} \gamma^\mu [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu. \quad (4.23\text{в})
 \end{aligned}$$

Каждый из двух интегралов должен исчезать, поскольку нельзя составить двухиндексный псевдотензор, зависящий только от одного вектора. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned}
 k_\alpha T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q) &= 2mg^{-1} T^{\mu\nu}(p, q); \\
 k_\alpha T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q|a) &= 2mg^{-1} T^{\mu\nu}(p, q) + \frac{ae^2}{4\pi_2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} p^\alpha q_\beta.
 \end{aligned} \right\} (4.24)$$

Таким образом, для удовлетворения аксиальному тождеству Уорда переменная интегрирования должна быть выбрана, как на рис. 2, т. е. a надо положить равным нулю. Заметим, что при этой проверке не потребовалось никаких сдвигов переменной интегрирования. Векторное тождество Уорда, т. е. калибровочная инвариантность, как сейчас увидим, не может быть удовлетворена таким же образом.

Теперь надо найти $p_\mu T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q)$. Согласно (4.15),

$$\begin{aligned}
 p_\mu T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q) &= ie^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha [\gamma_\beta r^\beta + \gamma_\beta p^\beta - m]^{-1} \times \\
 &\times \gamma_\beta p^\beta [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1} + \\
 &+ ie^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha [\gamma_\beta r^\beta + \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta - m] \times \\
 &\times \gamma_\beta p^\beta [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta p^\beta - m]^{-1}. \quad (4.25\text{а})
 \end{aligned}$$

Используя тождества

$$\begin{aligned}
 [\gamma_\beta r^\beta + \gamma_\beta p^\beta - m]^{-1} \gamma_\beta p^\beta [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} &= [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} - \\
 &- [\gamma_\beta r^\beta + \gamma_\beta p^\beta - m]^{-1}; \\
 [\gamma_\beta r^\beta - m] \gamma_\beta p^\beta [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta p^\beta - m]^{-1} &= \\
 &= [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta p^\beta - m]^{-1} - [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1},
 \end{aligned}$$

(4.25а) можно записать как

$$\begin{aligned}
 p_\mu T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q) = & i e^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta - \\
 & - \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1} - i e^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha [\gamma_\beta r^\beta + \gamma_\beta p^\beta - m]^{-1} \times \\
 & \times \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1} + i e^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha [\gamma_\beta r^\beta + \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1} \times \\
 & \times \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta - \gamma_\beta p^\beta - m]^{-1} - i e^2 \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha [\gamma_\beta r^\beta + \\
 & + \gamma_\beta q^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\beta r^\beta - m]^{-1}.
 \end{aligned} \quad (4.25б)$$

Первый и последний интегралы в (4.25б) исчезают, так как они являются двухиндексными псевдотензорами, зависящими от одного вектора. Остающиеся два интеграла должны взаимно уничтожиться, если для них разрешены сдвиги переменной интегрирования. К сожалению, такие сдвиги ведут к конечным вкладам. Если вычислить поверхностный член, то получается (см. упражнение 4.3):

$$p_\mu T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q) = \frac{e^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} p_\mu q_\beta. \quad (4.25в)$$

Следовательно,

$$p_\mu T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q | a) = \frac{e^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} p_\mu q_\beta \left[1 + \frac{a}{2} \right]. \quad (4.26а)$$

Бозе-симметрия обеспечивает аналогичное тождество Уорда и по индексу ν :

$$q_\nu T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q | a) = -\frac{e^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} p_\nu q_\beta \left[1 + \frac{a}{2} \right]. \quad (4.26б)$$

Видно, что выбор $a = -2$, обеспечивающий векторное тождество Уорда, отличен от выбора $a = 0$, обеспечивающего аксиальное тождество Уорда. Отсюда следует, что не существует способа вычисления $T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q)$, при котором удовлетворялись бы оба тождества Уорда. Этот замечательный результат тем более поразителен, что в явных расчетах $\Gamma_1^{\alpha\mu\nu}(p, q)$ — сходящаяся величина.

Нельзя ли добавить к $T_1^{\alpha\mu\nu}$ контактный член, который восстановил бы оба тождества Уорда? Если бы такой член существовал, то все были бы рады включить его в определение $T_1^{\alpha\mu\nu}$, даже если он и не возникает «естественным образом» из интегрирования. Следует уяснить, что это невозможно. Любой контактный член, который можно добавить, должен быть трехиндексным псевдотензором, полиномиальным по p и q . Из бозе-симметрии следует, что он должен быть пропорционален $\varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} (p_\beta - q_\beta)$. Но это тот же произвол в $T_1^{\alpha\mu\nu}$, который допускался [см. (4.22)], и он недостаточен для удовлетворения обоим тождествам Уорда.

Столкнувшись с невозможностью сохранить оба тождества Уорда, надо решить, какое из них сохранить, а какое отбросить, т. е. нужно выбрать a . Векторное тождество Уорда—следствие калибровочной инвариантности, в то время как аксиальное следует из уравнения движения $\partial_\mu J_\mu^5 = F\mu^2\phi$. Ясно, что первый из принципов существенно важнее, и следует положить $a = -2$. Если бы существовал физический принцип, гарантирующий сохранение и аксиального тока, то ситуация была бы намного проблематичнее. Так что нам повезло, что в действительности пионы не являются безмассовыми. Таким образом, приходим к заключению, что причина нарушения теоремы Сазерленда — Вельтмана $T(0) = 0$ является нарушением аксиального тождества Уорда. Если используется модифицированное тождество Уорда, то меняется и теорема Сазерленда — Вельтмана, и новый вывод из нее согласуется с явными расчетами. При выборе, обеспечивающем калибровочную инвариантность, тождества Уорда имеют вид

$$p_\mu T^{\alpha\mu\nu}(p, q) = q_\nu T^{\alpha\mu\nu}(p, q) = 0; \quad (4.27a)$$

$$k_\alpha T^{\alpha\mu\nu}(p, q) = \frac{F\mu^2}{\mu^2 - k^2} T^{\mu\nu}(p, q) - \frac{e^2}{2\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta. \quad (4.27b)$$

Теорема Сазерленда — Вельтмана теперь меняется в наиболее существенном месте [см. (4.6a)]. Вместо этого уравнения получаем

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta T(k^2) = T^{\mu\nu}(p, q) = \frac{\mu^2 - k^2}{F\mu^2} \left[k_\alpha T^{\alpha\mu\nu}(p, q) + \frac{e^2}{2\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta \right]. \quad (4.28)$$

Первый член в скобках тот же, что и ранее. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} T(k^2) &= \frac{\mu^2 - k}{F\mu^2} \left[k^2 [F_1(k^2) - F_3(k^2)] + \frac{e^2}{2\pi^2} \right]; \\ T(0) &= \frac{e^2}{2\pi^2 F}. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Это согласуется с прямыми расчетами [см. (4.14)].

Явление нарушения тождества Уорда в теории возмущений известно уже из квантовой электродинамики. Например, тензор поляризации вакуума и амплитуда рассеяния фотона на фотоне, вычисленные в спиновой электродинамике по теории возмущений, не поперечны по импульсу фотона, как это должно быть. Обычным способом восстановления калибровочной инвариантности является техника регуляризации Паули — Вилларса. Покажем, как эта техника работает в обсуждаемом случае.

Напомним, что, согласно методу регуляризации Паули — Вилларса, амплитуда с интегрированиями по петлям рассматривается как функция массы частиц в петле. Регуляризованная амплитуда определяется как разность между данной амплитудой и той же амплитудой, вычисленной при внутренней массе, равной регуляризую-

шей массе. Физическая амплитуда определяется после перехода к пределу бесконечной регуляризующей массы. Для амплитуды распада пиона имеем, таким образом:

$$T_R^{\mu\nu}(p, q) = T^{\mu\nu}(p, q | m) - T^{\mu\nu}(p, q | M); \quad (4.30a)$$

$$T_{Ph}^{\mu\nu}(p, q) = \lim_{M \rightarrow \infty} T_R^{\mu\nu}(p, q). \quad (4.30b)$$

Здесь T_R — регуляризованная, а T_{Ph} — физическая амплитуда. Согласно (4.14), $T^{\mu\nu}(p, q | M)$ исчезает при больших M как $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta \frac{g^2}{4\pi^2 M}$, так что

$$T_{Ph}^{\mu\nu}(p, q) = T^{\mu\nu}(p, q | m). \quad (4.30b)$$

Это то, что и должно быть, так как $T^{\mu\nu}(p, q)$ вычисляется однозначно из конечного интеграла. В то же время для амплитуды с аксиальным током имеем:

$$T_{1,R}^{\alpha\mu\nu}(p, q | a) = T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q | a | m) - T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q | a | M); \quad (4.31a)$$

$$T_{1,Ph}^{\alpha\mu\nu}(p, q) = \lim_{M \rightarrow \infty} T_{1,R}^{\alpha\mu\nu}(p, q | a). \quad (4.31b)$$

Рассмотрим теперь векторное тождество Уорда. Согласно (4.26a),

$$\begin{aligned} p_\mu T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q | a) &= \frac{e^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} p_\mu q_\beta \left[1 + \frac{a}{2} \right] - \\ &- \frac{e^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} p_\mu q_\beta \left[1 + \frac{a}{2} \right] = 0; \end{aligned} \quad (4.32a)$$

$$p_\mu T_{1,Ph}^{\alpha\mu\nu}(p, q) = 0. \quad (4.32b)$$

Для аксиального тождества Уорда, согласно (4.24) и (4.30b),

$$\begin{aligned} k_\alpha T_{1,R}^{\alpha\mu\nu}(p, q | a) &= 2mg^{-1} T^{\mu\nu}(p, q | m) + \frac{ae^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta - \\ &- 2Mg^{-1} T^{\mu\nu}(p, q | M) - \frac{ae^2}{4\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta = \\ &= 2mg^{-1} T_{Ph}^{\mu\nu}(p, q) - 2Mg^{-1} T^{\mu\nu}(p, q | M); \end{aligned} \quad (4.33a)$$

$$k_\alpha T_{1,Ph}^{\alpha\mu\nu}(p, q) = 2mg^{-1} T_{Ph}^{\mu\nu}(p, q) - \lim_{M \rightarrow \infty} 2Mg^{-1} T^{\mu\nu}(p, q | M). \quad (4.33b)$$

Так как $\lim_{M \rightarrow \infty} 2Mg^{-1} T^{\mu\nu}(p, q | M) = \frac{e^2}{2\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta$, то остается

$$k_\alpha T_{1,Ph}^{\alpha\mu\nu}(p, q) = 2mg^{-1} T_{Ph}^{\mu\nu}(p, q) - \frac{e^2}{2\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta. \quad (4.33b)$$

Видно, что в технике Паули — Вилларса автоматически вычисляется калибровочно-инвариантное выражение для амплитуды. В этой технике $a = -2$, что ведет, как мы видели, к нарушению аксиального тождества Уорда.

Неприятности с матричным элементом аксиального тока не ограничиваются σ -моделью. Ясно, что к трудностям ведет треугольная диаграмма. Такая диаграмма возникает в спинорной электродинамике, в кварковой модели и вообще в любой модели, где имеется билинейный по фермионным полям аксиальный ток. Это позволяет обобщить полученные результаты за рамки конкретной σ -модели [6].

4.5. Аномальные коммутаторы

Итак, вычисление вектор-вектор-аксиально-векторной треугольной диаграммы приводит к формуле для $T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q)$, не удовлетворяющей тождествам Уорда, ожидаемым в наивном подходе. Следующая задача — понять нарушение тождеств Уорда в терминах аномальных коммутаторов, которые должны быть ответственны за такое положение дел [7].

Согласно теореме БДЛ, ОВК между различными токами можно вычислить из высокоэнергетического поведения треугольной диаграммы. Очевидно, необходимо выйти за массовую поверхность фотона $p^2 = q^2 = 0$, чтобы можно было менять произвольно временную компоненту 4-импульса фотона, как это необходимо в технике БДЛ. Нам достаточно сойти с массовой поверхности только одного фотона. Таким образом, надо рассмотреть

$$\begin{aligned} \bar{T}_1^{\alpha\mu}(p, q) &= -ie \int d^4x \exp(-ipx) \langle 0 | T J^\mu(x) \bar{J}_5^\alpha(0) | \gamma q \rangle = \\ &= \bar{T}_1^{\alpha\mu\nu}(p, q) \varepsilon_\nu(q); \end{aligned} \quad (4.34a)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_1^{\alpha\mu\nu}(p, q) &= -ie \int d^4x d^4y \exp(-ipx) \exp(-iqy) \times \\ &\times \langle 0 | T J^\mu(x) J^\nu(y) \bar{J}_5^\alpha(0) | 0 \rangle \Big|_{\substack{q^2=0 \\ p^2 \neq 0}} \end{aligned} \quad (4.34b)$$

Черточки над $\bar{T}_1^{\alpha\mu}$ и $\bar{T}_1^{\alpha\mu\nu}$ напоминают, что один из фотонов находится вне массовой поверхности. Черточка над \bar{J}_5^α указывает на то, что мы изучаем не полный аксиальный ток σ -модели (4.12a); а его часть, билинейную по нуклонным полям, так что матричный элемент низшего порядка содержит только треугольную диаграмму рис. 2, а. Заметим также, что в данном случае интересно не T^* -произведение, а T -произведение, так как именно второе дает ОВК, согласно определению БДЛ.

Согласно правилам гл. 3, можно вычислить ОВК по следующей формуле:

$$\lim_{p_0 \rightarrow 0} p_0 \bar{T}_1^{\alpha\mu}(p, q) = -e \int d^3x \exp(ipx) \langle 0 | [J^\mu(0, x), \bar{J}_5^\alpha(0)] | \gamma q \rangle. \quad (4.35)$$

Последовательность вычислений такова. Вычислим треугольную диаграмму, как и ранее, с тем исключением, что 4-импульс p фотона теперь находится вне массовой поверхности. Из явной формулы для ее вклада в амплитуду (она дает T^* -произведение, так как вычисляется из ковариантных правил Фейнмана) выделим нековариантное T -произведение, отбрасывая все контактные члены — все полиномы по q_0 . Это дает явные формулы для $\bar{T}_1^{\alpha\mu}(p, q) = \bar{T}_1^{\alpha\mu\nu}(p, q) \varepsilon'_\nu(q)$. Отметим, что при таком расчете несутсущественны неопределенности, которых было много в расчете $T_1^{\alpha\mu\nu}(p, q)$ в предыдущем разделе. Дело в том, что все трудности, которые встречались ранее, — это контактные члены, но ими сейчас пренебрежем.

Расчет соответствующей треугольной диаграммы есть в литературе [8]. Интеграл, как и прежде, приводит к конечному результату. Получающиеся коммутаторы после выполнения указанного в (4.35) предельного перехода имеют следующий вид:

$$[J^0(t, \mathbf{x}), J_5^0(t, \mathbf{y})] = 2c\tilde{F}^{0j} \partial_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (4.36a)$$

$$[J^0(t, \mathbf{x}), J_5^i(t, \mathbf{y})] = c\tilde{F}^{ij} \partial_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}); \quad (4.36b)$$

$$[J^i(t, \mathbf{x}), J_5^0(t, \mathbf{y})] = -c\partial_j \tilde{F}^{ij}(x) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + c\tilde{F}^{ij}(y) \partial_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.36b)$$

Здесь $c = ie/8\pi^2$, а $\tilde{F}^{\mu\nu}$ — антисимметричный сохраняющийся дуальный электромагнитный тензор; $\tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$. Предлагая запись (4.36), не подразумеваем, что вывели ОВК каким-либо операторным методом, а имеем в виду только то, что предел (4.35) неисчезающий и что это отличное от нуля выражение получается вновь после вычисления соответствующего матричного элемента от (4.36). Например, непосредственный расчет показывает:

$$\lim_{p_0 \rightarrow \infty} p_0 \bar{T}_1^{00}(p, q) = -\frac{e^2}{2\pi^2} \varepsilon^{0\nu\alpha} p_\mu q_\nu \varepsilon'_\alpha(q). \quad (4.37)$$

Правая часть (4.37) получается и тогда, когда (4.36a) подставляется в правую часть (4.35). Строго говоря, мы только показали, что ОВК (4.36) имеет неканонические вклады, матричные элементы которых между состояниями одного фотона и вакуума совпадают с теми же матричными элементами операторов в правой части (4.36).

Видно, что в ОВК между временными компонентами появился неканонический ШЧ [см. (4.36a)]. Следовательно, согласно проведенному в гл. 2 анализу, гипотеза Фейнмана не может выполняться для обоих тождеств Уорда. Чтобы убедиться в нарушении именно гипотезы Фейнмана [9], перепишем ОВК (4.36) в формализме гл. 2:

$$\begin{aligned} & [J^\mu(x), J_5^\nu(y)] \delta([x - y]n) = \\ & = c^{\mu\nu}(x; n) \delta^4(x - y) + S^{\mu\nu/\alpha}(y; n) p_{\alpha\beta} \partial^\beta \delta^4(x - y). \end{aligned} \quad (4.38a)$$

Согласно (4.36), ШЧ имеет вид

$$S^{\mu\nu/\alpha}(y; n) = c\tilde{F}^{\mu\nu}(y) [g_\gamma^\alpha n^\nu + g^{\alpha\nu} n_\gamma] + c\tilde{F}^{\nu\gamma} [g_\gamma^\alpha n^\mu + g^{\alpha\mu} n_\gamma]. \quad (4.38b)$$

Формулу (4.38б) можно переписать как полную дивергенцию:

$$S^{\mu\nu/\alpha}(y; n) = c\tilde{F}^{\mu\nu}(y) \frac{\delta}{\delta n_\alpha} [n_\nu n^\nu] + c\tilde{F}^{\nu\gamma}(y) \frac{\delta}{\delta n_\alpha} [n_\nu n^\mu]. \quad (4.38в)$$

Тогда контактный член, делающий ковариантным T -произведение J^μ и J_α^0 , дается уравнением

$$\left. \begin{aligned} \tau^{\mu\nu}(x, y; n) &= \int^n S^{\mu\nu/\alpha}(y; n') dn'_\alpha \delta^4(x-y) + \tau_0^{\mu\nu}(x, y) = \\ &= \tau^{\mu\nu}(y; n) \delta^4(x-y) + \tau_0^{\mu\nu}(x, y); \\ \tau^{\mu\nu}(y; n) &= c\tilde{F}^{\mu\nu}(y) n_\nu n^\nu + c\tilde{F}^{\nu\gamma}(y) n_\nu n^\mu. \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

Здесь, как и раньше, $\tau_0^{\mu\nu}(x, y)$ является ковариантным контактным членом, остающимся пока неопределенным. Теперь можно найти ковариантные величины $I_1^{\mu\nu}$ и $I_2^{\mu\nu}$, определяемые $\tau^{\mu\nu}(y; n)$, согласно (2.47):

$$\left. \begin{aligned} n_\mu \tau^{\mu\nu}(y; n) &= n_\mu I_1^{\mu\nu}(y) = c\tilde{F}^{\nu\gamma}(y) n_\nu; \\ n_\nu \tau^{\mu\nu}(y; n) &= n_\nu I_2^{\mu\nu}(y) = c\tilde{F}_\nu^{\mu\gamma}(y) n_\nu. \end{aligned} \right\} \quad (4.40а)$$

Очевидно,

$$I_2^{\mu\nu}(y) = -I_1^{\mu\nu}(y) = c\tilde{F}^{\mu\nu}(y). \quad (4.40б)$$

Наконец, найдем ковариантные контактные члены, используя соотношение (2.48). Они требуют отсутствия градиентов δ -функции в следующих комбинациях:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tau_0^{\mu\nu}(x, y) - c\tilde{F}^{\mu\nu}(y) \partial_\mu \delta^4(x-y); \quad (4.41а)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^\nu} \tau_0^{\mu\nu}(x, y) - c\tilde{F}^{\mu\nu}(y) \partial_\nu \delta^4(x-y). \quad (4.41б)$$

Первое из этих уравнений обеспечивает выполнение гипотезы Фейнмана для векторного тождества Уорда по μ , а второе делает то же самое для аксиального тождества Уорда по ν .

Можно проверить, что решением обоих уравнений (4.41) является

$$\tau_0^{\mu\nu}(x, y) = c\tilde{F}^{\mu\nu}(y) \delta^4(x-y) + 4c\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\alpha(y) \partial_\beta \delta^4(x-y). \quad (4.42)$$

Таким образом, оказывается, что гипотеза Фейнмана может быть удовлетворена по обоим индексам. Однако контактный член (4.42) неприемлем по следующим причинам. Явная зависимость его от векторного потенциала A_α указывает на исчезновение градиентной инвариантности. Вспомним, что все операторы, которые сейчас рассматриваем, должны быть вставлены между вакуумом и однофотонным состоянием. Если один из них — векторный потенциал, то этот матричный элемент не будет калибровочно-инвариантным. Следовательно, нужно отвергнуть этот контактный член и ограничиться таким, который позволяет удовлетворить гипотезе Фейнмана в од-

ном или другом из двух тождеств Уорда. Можно легко показать, что такой контактный член имеет вид

$$\tau_{\mu\nu}^{\mu\nu}(x, y) = -(1+a) c\tilde{F}^{\mu\nu}(y) \delta^4(x-y). \quad (4.43)$$

Здесь a — произвольный параметр, который определяется тем, какому из двух тождеств Уорда решим удовлетворить. Выбор $a = -2$ приводит к взаимному уничтожению вкладов ШЧ и контактных членов в векторном тождестве по μ , в то время как $a = 0$ делает это же в аксиальном тождестве по ν . Если остановиться на первом выборе, то

$$\frac{\partial}{\partial y^\nu} T^* J_\mu(x) J_5^\nu(y) = T^* J_\mu(x) \partial_\nu J_5^\nu(y) + 2c\tilde{F}^{\mu\nu}(y) \partial_\nu \delta^4(x-y). \quad (4.44)$$

Второй член в правой части (4.44) является аномальным.

Итак, причина невыполнения тождества Уорда в том, что ОВК между J_μ и J_5^ν отличается от своего канонического значения и приобретает неканоническую добавку. Подобные неканонические члены возникают из внутренних особенностей локальной квантовой теории. Они приводят к незаконности манипуляций обычной алгебры токов.

4.6. Аномальная дивергенция аксиального тока

Можно показать, что аномалии треугольной диаграммы, которые обсуждались в терминах неканонических коммутаторов и модифицированных тождеств Уорда, ведут также к модифицированному уравнению для дивергенции нейтрального калибровочно-инвариантного аксиального тока [10]:

$$\partial_\mu J_5^\mu = J_5 + \frac{e^2}{16\pi^2} F^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (4.45)$$

Здесь J_5 — наивное выражение для дивергенции, получаемое с помощью уравнений движения изучаемой модели.

Рассмотрим фермионную часть аксиального тока:

$$J_5^\mu(x) = i\bar{\psi}(x) \gamma^5 \gamma^\mu \psi(x). \quad (4.46)$$

Так как известно, что одновременной антикоммутирует ψ с $\bar{\psi}$ содержит трехмерную δ -функцию, то следует ожидать, что предел $\lim_{x \rightarrow y} \bar{\psi}(x)\psi(y)$ сингулярен. Поэтому определение (4.46) для J_5^μ заведомо сингулярно. Для регуляризации этой особенности вводится малая раздвижка аргументов в исходном определении J_5^μ :

$$J_5^\mu(x|\epsilon) = i\bar{\psi}(x + \epsilon/2) \gamma^5 \gamma^\mu \psi(x - \epsilon/2). \quad (4.47a)$$

При наличии электромагнетизма определение (4.47a) не является калибровочно-инвариантным. (При вычислениях в низшем порядке по электромагнетизму всегда считаем потенциал A^μ заданным внешним полем.) Если электромагнитный потенциал A^μ заменить

на $A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ с произвольным $\Lambda(x)$, а фермионные поля $\psi(x)$ заменить соответственно на $\exp[ie\Lambda(x)]\psi(x)$, то ничто не должно меняться в величинах, имеющих физический смысл. Формула (4.47а) не обладает этим свойством. Можно построить модифицированное выражение, которое будет калибровочно-инвариантным:

$$J_5^\mu(x|\varepsilon) = i\bar{\psi}(x + \varepsilon/2)\gamma^5\gamma^\mu\psi(x - \varepsilon/2)\exp\left[iea\int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} A_\alpha(y)dy_\alpha\right]. \quad (4.47б)$$

Для калибровочной инвариантности параметр a в (4.47б) следует положить равным единице. Однако временно сохраним его неопределенным. Локальный физический ток получается при малом ε после усреднения по направлениям ε и взятия предела $\varepsilon^2 = \varepsilon_\mu \varepsilon^\mu \rightarrow 0$. Этот метод определения сингулярных произведений операторов называется техникой раздвижки аргументов.

Вычислим теперь дивергенцию тока (4.47б). Для этого нужны уравнения движения для ψ . Будем считать, что есть взаимодействие только с внешним электромагнитным полем. Более общие взаимодействия рассмотрены в литературе [10]. Итак,

$$i\gamma_\mu \partial^\mu \psi = m\psi - e\gamma_\mu A^\mu \psi. \quad (4.48)$$

В силу (4.48) дивергенция $J_5^\mu(x|\varepsilon|a)$ равна

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_5^\mu(x|\varepsilon|a) &= J_5(x|\varepsilon|a) - ieJ_5^\mu(x|\varepsilon|a) \times \\ &\times \left[A_\mu(x + \varepsilon/2) - A_\mu(x - \varepsilon/2) - a\partial_\mu \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} A_\nu(y)dy^\nu \right] = \\ &= J_5(x|\varepsilon|a) - ieJ_5^\mu(x|\varepsilon|a)\varepsilon^\alpha [\partial_\alpha A_\mu(x) - a\partial_\mu A_\alpha(x)]. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Здесь $J_5(x|\varepsilon|a)$ — формула для регуляризованной наивной дивергенции тока $2m\bar{\psi}\gamma^5\psi$ в этой модели после введения раздвижки. Из (4.49) получается обычный наивный результат $\partial_\mu J_5^\mu = J_5$, если положить формально ε равным нулю и отбросить последний член в (4.49). Это вполне законно, когда $J_5^\mu(x|\varepsilon|a)$ имеет гладкое поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$. В то же время если матричный элемент $J_5^\mu(x|\varepsilon|a)$ расходится при $\varepsilon \rightarrow 0$, то может остаться конечная величина. Так как J_5^μ имеет размерность (длина)⁻³, то можно ожидать даже кубическую расходимость. Однако псевдовекторный характер J_5^μ уменьшает степень расходимости на два, и остается возможной только линейная расходимость. Покажем, что такая расходимость действительно существует и меняет наивную формулу для $\partial_\mu J_5^\mu(x|\varepsilon|a)$.

Рассмотрим вакуумное среднее $\partial_\mu J_5^\mu(x|\varepsilon|a)$:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \partial_\mu J_5^\mu(x|\varepsilon|a) | 0 \rangle &= \langle 0 | J_5(x|\varepsilon|a) | 0 \rangle - \\ &- ie\varepsilon^\alpha \langle 0 | J_5^\mu(x|\varepsilon|a) | 0 \rangle [\partial_\alpha A_\mu(x) - a\partial_\mu A_\alpha(x)] + 0(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Вакуумный матричный элемент $J_5^\mu(x|\varepsilon|a)$ не исчезает при наличии внешнего электромагнитного поля. Для последнего члена

В (4.50) имеем

$$\begin{aligned}
 & -ie\varepsilon^\alpha \langle 0 | J_\mu^\alpha(x | \varepsilon | a) | 0 \rangle = \\
 & = \varepsilon^\alpha \langle 0 | \bar{\psi}(x + \varepsilon/2) \gamma^5 \gamma^\mu \psi(x - \varepsilon/2) | 0 \rangle \exp(iea) \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} A^\alpha(y) dy_\alpha = \\
 & = \text{Sp} \gamma^5 \gamma^\mu \varepsilon^\alpha \langle 0 | T \psi(x - \varepsilon/2) \bar{\psi}(x + \varepsilon/2) | 0 \rangle \exp(iea) \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} A^\alpha(y) dy_\alpha = \\
 & = -\text{Sp} \gamma^5 \gamma^\mu \varepsilon^\alpha G(x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2) \exp \int_{x-\varepsilon/2}^{x+\varepsilon/2} A^\alpha(y) dy_\alpha. \quad (4.51)
 \end{aligned}$$

$$\overline{\frac{1}{x} \frac{1}{y}} = \frac{1}{x} \frac{1}{y} + \frac{z}{x} \frac{1}{y} +$$

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{x} \frac{1}{y} + \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}{x} \frac{1}{y} + \dots$$

Рис. 3. Пропагатор фермиона $G(x, y)$ во внешнем поле

Здесь введена функция распространения фермиона $G(x, y)$ во внешнем поле A_μ . При записи уравнения (4.51) ε_0 было взято положительным.

Для $G(x, y)$ имеется разложение по степеням A^μ , которое можно просуммировать графически (рис. 3).

Двойная линия изображает G , простая линия — свободный пропагатор фермиона S , а знак \times — взаимодействие с внешним полем. При $x \rightarrow 0$ S ведет себя как $1/x^3$. Поэтому последовательные члены в ряде для $G(x, y)$ ведут себя при $x \rightarrow y$ как $(x - y)^{-3}$, $(x - y)^{-2}$, $(x - y)^{-1}$, $\ln(x - y)$ и т. д. Для наших расчетов $G(x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2)$ нужны члены, не исчезающие при малых ε после умножения на ε . Следовательно, получаем:

$$\begin{aligned}
 G(x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2) = & S(-\varepsilon) + ie \int d^4 y S(x - \varepsilon/2 - y) \gamma^\alpha \times \\
 \times & S(y - x - \varepsilon/2) A_\alpha(y) - e^2 \int d^4 y d^4 z S(x - \varepsilon/2 - y) \gamma^\alpha S(y - z) \gamma^\beta \times \\
 \times & S(x - z - \varepsilon/2) A_\alpha(y) A_\beta(z) + 0(\ln \varepsilon); \quad (4.52a)
 \end{aligned}$$

$$S(x) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp(-ipx) [\gamma_\alpha p^\alpha - m]^{-1}. \quad (4.52b)$$

В силу C -инвариантности интересен только линейный по A^μ член в G . Он имеет следующее импульсное представление:

$$ie \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^8} \exp(i\varepsilon p) \exp(-ixq) S(p + q/2) \gamma^\alpha S(p - q/2) A_\alpha(q). \quad (4.53)$$

Следовательно, (4.51) приобретает вид

$$\begin{aligned}
 & - \text{Sp} [e^\alpha \gamma^5 \gamma^\mu G(x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2)] = \\
 & = -ie \text{Sp} \gamma^5 \gamma^\mu \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^7} e^\alpha \exp(i\varepsilon p) \exp(-ixq) \times \\
 & \quad \times S(p + q/2) \gamma^\nu S(p - q/2) A_\nu(q) + 0(\varepsilon \ln \varepsilon) = \\
 & = e \text{Sp} \gamma^5 \gamma^\mu \int \frac{d^4 p d^4 q}{(2\pi)^8} \exp(i\varepsilon p) \exp(-ixq) \times \\
 & \quad \times A_\nu(q) \frac{\partial}{\partial p_\alpha} S(p + q/2) \gamma^\nu S(p - q/2) + 0(\varepsilon \ln \varepsilon). \quad (4.54a)
 \end{aligned}$$

Последнее равенство получается после интегрирования по частям. Положим теперь ε равным нулю. Интеграл по p есть поверхностный член, и он легко вычисляется симметричным методом, рассмотренным в упражнениях. Остающийся интеграл по q является обратным преобразованием Фурье $A_\nu(q)$. Окончательным результатом для (4.54a) будет

$$- \text{Sp} [e^\alpha \gamma^5 \gamma^\mu G(x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2)]_{\varepsilon \rightarrow 0} = - \frac{e}{16\pi^2} \tilde{F}^{\mu\alpha}(x). \quad (4.54b)$$

Тогда, возвращаясь к (4.51) и устремляя ε к нулю, получаем

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \partial^\mu J_\mu^5(x|a) | 0 \rangle & = \langle 0 | J_5(x|a) | 0 \rangle + \\
 & + [e^2/(16\pi^2)] [(1+a)/2] \tilde{F}^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x). \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

Когда взято калибровочно-инвариантное определение тока с $a = 1$, дивергенция аксиального тока содержит аномальный член. Наивное уравнение для дивергенции аксиального тока получается, если поступиться калибровочной инвариантностью и взять $a = -1$. Можно привести простой эвристический аргумент, объясняющий происхождение этого аномального члена в дивергенции. Рассмотрим наивный аксиальный ток модели, обсуждаемой в этой главе. Чтобы обеспечить калибровочную инвариантность, введем регуляризующее поле Паули — Вилларса Ψ и соответственно регуляризованный аксиальный ток:

$$J_5^\mu |_R = J_5^\mu - j_5^\mu. \quad (4.56a)$$

Ток j_5^μ строится из регуляризующего поля так же, как ток J_5^μ построен из обычных полей. Физический аксиальный ток воспроизводится, если устремить массу M регуляризующего поля к бесконечности. Дивергенция (4.56a) равна

$$\partial_\mu J_5^\mu |_R = 2m\bar{\Psi}\gamma_5\Psi - 2M\bar{\Psi}\gamma_5\Psi. \quad (4.56b)$$

Когда $M \rightarrow \infty$, вклад регуляризующего поля в (4.56b) может иметь конечный остаток, если матричные элементы $\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$ ведут себя при больших M как M^{-1} . Подробные расчеты показывают, что именно так и происходит.

Заметим, что аномальная дивергенция не влияет непосредственно на предыдущий вывод теоремы Сазерленда — Вельтмана для распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$. Амплитуда $T^{\mu\nu}$, даваемая формулой (4.3), имеет порядок $O(e^2)$. Следовательно, в порядке e^2 не требуется никаких модификаций $\partial_\mu J_5^\mu$. Как было показано, аномалии возникают из коммутаторов и контактного члена. Несмотря на это, можно использовать аномальное уравнение дивергенции для альтернативного вывода правильной теоремы Сазерленда — Вельтмана [11]. При этом фотоны не редуцируются из начального состояния и (4.2) дает совместно с (4.45)

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(p, q) &= \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta T(k^2) = (\mu^2 - k^2) \langle 0 | \varphi(0) | \gamma, p; \gamma', q \rangle = \\ &= \frac{e^2}{16\pi^2 F \mu^2} (k^2 - \mu^2) \langle 0 | \tilde{F}^{\mu\nu}(0) F_{\mu\nu}(0) | \gamma, p; \gamma', q \rangle + \\ &+ \frac{1}{F \mu^2} (k^2 - \mu^2) \partial_\alpha \langle 0 | J_5^\alpha(0) | \gamma, p; \gamma', q \rangle. \end{aligned} \quad (4.57a)$$

Последний член в (4.57a) — дивергенция калибровочно-инвариантного трехиндексного псевдотензора. Следовательно, к нему применимы первоначальные аргументы Сазерленда — Вельтмана и он не дает вклада в $T(0)$. Заметим, что в этом выводе не нужно дифференцировать T^* -произведения и не нужно обращаться к коммутаторам. Матричный элемент аномалии можно вычислить в наименьшем порядке по электромагнетизму. Он равен

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{16\pi^2 E \mu^2} (k^2 - \mu^2) \langle 0 | \tilde{F}^{\mu\nu}(0) F_{\mu\nu}(0) | \gamma, p; q \rangle = \\ = \frac{e^2}{2\pi^2 F} \frac{\mu^2 - k^2}{\mu^2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_\alpha q_\beta. \end{aligned} \quad (4.57b)$$

Следовательно, как и раньше, $T(0) = (e/2\pi^2) F$.

Этот пример показывает, что аномалии в коммутаторах, которые присутствуют в исходном выводе, и аномальная дивергенция тесно связаны друг с другом.

4.7. Обсуждение результатов

Закончим изложение аномалий нейтрального аксиально-векторного тока обсуждением различных, не связанных с предыдущим, но важных вопросов.

1. Рассмотрим безмассовую спинорную электродинамику [12]. Приведенные выше аргументы показывают, что невозможно определить сохраняющийся калибровочно-инвариантный аксиальный ток, несмотря на киральную симметрию теории. Тем не менее существует сохраняющийся калибровочно-инвариантный аксиальный заряд [11], который строится следующим образом. Определим

$$\tilde{J}_5^\mu = J_5^\mu - \frac{e}{8\pi^2} \tilde{F}^{\mu\nu} A_\nu. \quad (4.58a)$$

Ток J_5^μ калибровочно-инвариантен, но его сохранение нарушено аномалией. В то же время ток \tilde{J}_5^μ сохраняется, но калибровочно-инвариантен. Заряд Q_5 , построенный из \tilde{J}_5^μ , не зависит от времени:

$$Q_5 = \int d^3 x \tilde{J}_5^0(x). \quad (4.58б)$$

Совершая калибровочное преобразование над Q_5 ($\delta A_\nu = \partial_\nu \Lambda$), видим, что заряд Q_5 калибровочно-инвариантен, хотя ток \tilde{J}_5^μ и неинвариантен:

$$\begin{aligned} \delta Q_5 &= \int d^3 x \left(-\frac{e^2}{8\pi^2} \tilde{F}^{0\nu}(x) \right) \partial_\nu \Lambda(x) = \\ &= \int d^3 x \left(-\frac{e^2}{8\pi^2} \tilde{F}^{0i}(x) \right) \partial_i \Lambda(0) = \\ &= \int d^3 x \frac{e^2}{8\pi^2} \Lambda(x) \partial_i \tilde{F}^{0i}(x) = 0. \end{aligned} \quad (4.58в)$$

Здесь использовались сохранение и антисимметрия $\tilde{F}^{\mu\nu}$.

Следовательно, несмотря на затруднения с локальным аксиальным током, глобальная аксиальная симметрия в модели может выполняться. Отсюда следует, что любое свойство теории, основанное на аксиальной симметрии, будет сохранено в теории возмущений. Например, аномалию в дивергенции нельзя использовать для генерации массы электрона [13].

В безмассовой электродинамике аномалию можно назвать столкновением между двумя принципами симметрии: калибровочной инвариантностью и киральной симметрией. В теории возмущений невозможно сохранить обе симметрии, хотя и можно удовлетворить какой-либо из них. Такое столкновение между сохранением двух симметрий было обнаружено ранее в модельной теории поля — двумерной спинорной электродинамике [12].

2. Возникает важный вопрос: меняют или нет аномалию эффекты высших порядков? Можно проследить, что в спинорной электродинамике и σ -модели высшие поправки аномалию не меняют [11]. Рассмотрим для определенности первую из теорий. В четвертом порядке по e треугольная вектор-вектор-аксиально-векторная треугольная диаграмма имеет вставки, представленные на рис. 4. Если интегрирование по импульсам фотона проводится после интегрирования по фермионной петле, то интеграл по фермионной петле полностью сходится. Поэтому можно безнаказанно сделать все сдвиги импульса интегрирования, нужные для установления тождеств Уорда. Отсюда делается вывод, что в этом или более высоких порядках нет никаких аномалий.

Можно критиковать подобный способ за формальность [15]. Правила перенормированной теории возмущений требуют сначала вычисления интегралов по импульсам фотона, а уже затем подстановки перенормированных вершин и пропагаторов в скелетную треугольную диаграмму. Непосредственные вычисления диаграмм (см. рис. 4) подтвердили формальный подход [16]. Правда, следует

отметить характерное для вычислений в четвертом порядке свойство: все указанные поправки являются вставками или собственной энергии, или поправки к вершине. Это не так в более высоких порядках, и, возможно, в них может появиться что-нибудь новое [17].

3. Модели, в которых была найдена аксиальная аномалия (спинорная электродинамика и σ -модель), не являются фундаментальными для динамики адронов. Однако, как подчеркивалось выше, любая теория с фермионными полями, из которых построен аксиально-векторный ток, будет обладать аномалией постольку, поскольку электромагнитное взаимодействие вводится минимальным образом.

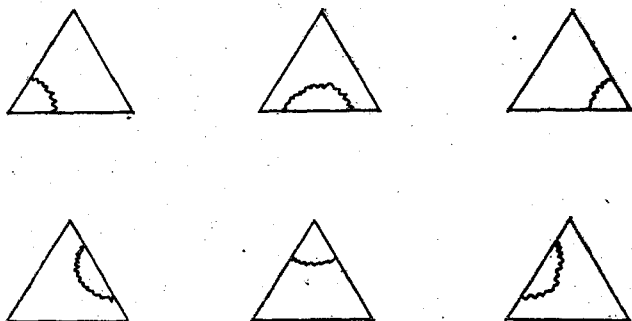


Рис. 4. Радиационные поправки к треугольной диаграмме с аксиальным и двумя векторными токами

Таким образом, при учете электродинамики следует ожидать в общем случае модификацию PCAC. Поэтому для нейтральной компоненты $F_{\frac{3}{2}}^{\mu}(x)$ октета аксиальных токов (ток $F_{\frac{3}{2}}^{\mu}$ отличается множителем $1/2$ от тока $J_{\frac{3}{2}}^{\mu}$) PCAC следует модифицировать как

$$\partial_{\mu} F_{\frac{3}{2}}^{\mu} = F_{\frac{3}{2}}^{\mu} \varphi^3 + c \frac{e^2}{16\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}.$$

Здесь c — константа, которую, конечно, нельзя получить теоретически в общем виде. Вклад треугольной диаграммы в c определяется константами связи фермионного поля с аксиальным и векторным токами. В σ -модели этот вклад равен $1/2$. В общей триплетной кварковой модели с зарядами кварков Q , $Q = 1$ и $Q = 1$ вклад треугольной диаграммы в c равен $Q = 1/2$ [11].

Используя гипотезу PCAC и модифицированную теорему Сазерленда — Вельтмана, можно найти c из эксперимента. По последним данным, значение ширины распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, равное $7,37 \pm 1,5$ эВ, дает $c = 0,44$. Дальнейший анализ эксперимента показывает, что вероятнее всего положительный знак c . Таким образом, теоретическое значение $c = 1/2$, получающееся в σ -модели, хорошо согласуется с экспериментом. Если в кварковых моделях значение c определяется полностью кварковой треугольной диаграммой (смелая гипотеза, если учесть незнание природы кварковой динамики), то пред-

почтительнее $Q = 1$, а обычная кварковая модель с $Q = 2/3$ отвергается*.

При современном уровне развития адронной физики нельзя вычислить c теоретически. Так же как коэффициент перед обычным членом в $\partial_\mu F_\mu^2$ берется из эксперимента, F_μ не вычисляется теоретически. Приходится ограничиться экспериментальным определением аномалии.

Если вычислить c из ширины пиона и принять модель нарушения $SU(3) \otimes SU(3)$ -симметрии, то можно вывести модифицированные теоремы Сазерленда — Вельтмана для распадов $\eta \rightarrow 2\gamma$, $X \rightarrow 2\gamma$. Подобные расчеты были выполнены в рамках $(\bar{3}, 3) \otimes (3, \bar{3})$ -схемы нарушения симметрии [18]. Результат для ширины η -мезона согласуется с экспериментом (~ 1 кэВ). Ширина X -мезона оказывается заметно выше 80 кэВ, что при существующем экспериментальном ограничении (меньше 360 кэВ) проверить невозможно. Подобная проверка была бы крайне интересна, поскольку столь большую ширину было бы трудно понять в любой другой модели.

4. Почему мы говорим о модификации PCAC? Разве нельзя по-прежнему использовать дивергенцию аксиального тока в качестве интерполирующего поля пиона? Ответ можно найти в той части вычислений, где показано, что член $\bar{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ явно негладок, когда его матричные элементы продолжают за массовую поверхность пиона. Именно это свойство является определяющим, и можно ожидать, что оно выполняется не только в моделях, но и в действительности. Так, размерность аномалии равна 4, и, следовательно, нет никаких причин полагать, что такой оператор гладкий. Наконец, с учетом подобных соображений удалось обойти экспериментально неудовлетворительное предсказание Сазерленда и Вельтмана.

5. Открытие аномального тождества Уорда в обсуждаемой задаче стимулировало систематический анализ всех полезных тождеств Уорда в $SU(3) \otimes SU(3)$ -моделях [19]. Хотя найдены и другие аномальные тождества Уорда, они менее интересны. Еще одной треугольной аномалией является вершина трех аксиально-векторных токов, но до сих пор не найдены возможности экспериментально проверить существование этой аномалии**.

* В работе W. A. Bardeen, H. Fritzsch, M. Gell-Mann. Preprint TH-1583-CE RN, 1972, замечено, что кварковые модели с $Q = 2/3$ также приводят к $c = 1/2$ в соответствии с экспериментом, если постулировать три триплета кварков, отличающихся новым квантовым числом — цветом. — Прим. пер.

** Важным примером является аномалия в амплитуде $\gamma \rightarrow 3\pi$, найденная в работах: М. В. Герентьев. — «Письма в «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1971, т. 14, с. 140; I. Wess, B. Zumino. «Phys. Lett. B», 1975, v. 37, p. 95; «Phys. Rev. D», 1971, v. 4, p. 3497. Auth.: S. Adler, B. W. Lee, S. Freeman, A. Zee.

В дальнейшем аномальные вклады были найдены и в других электромагнитных и слабых амплитудах пионов и каонов. Детальное изложение этой интересной проблемы и возможностей экспериментальной проверки существования аномалий см. в обзоре: В. М. Герентьев. «Успехи физ. наук», 1974, т. 112, с. 37. — Прим. пер.

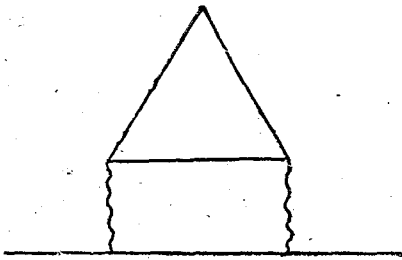


Рис. 5. Расходящийся вклад в вершинную функцию аксиального тока

6. В спинорной электродинамике электромагнитная вершинная функция перенормируется той же бесконечной константой, которая перенормирует волновую функцию электрона. Это следует из тождества Уорда для вершинной функции. До открытия аномального соотношения PCAC считалось, что вершинная функция аксиально-векторного тока также обладает таким свойством вследствие аксиального тождества Уорда [20]. Аномалия портит этот результат:

аксиально-векторная вершинная функция остается бесконечной после перенормировки волновой функции из-за вклада диаграммы (рис. 5). Отсюда следует, что радиационные поправки к упругому рассеянию нейтрино на лептоне бесконечны.

Список литературы с комментариями

1. Sutherland D. C. «Nucl. Phys. B», 1967, v. 2, p. 433; Veltman M. «Proc. Roy. Soc. A», 1967, v. 301, p. 107; Dolgov A. D., Vainstein A. I., Zakharov V. I. «Phys. Lett. B», 1971, v. 24, p. 425.
2. Здесь следуем работе Bell J. S., Jackiw R. «Nuovo cimento A», 1969, v. 60, p. 47.
3. Gell-Mann M., Lévy M. «Nuovo cimento», 1960, v. 16, p. 705.
4. Вычисление этой диаграммы было выполнено впервые в работе Steinberger J. «Phys. Rev.», 1949, v. 76, p. 1180. Он изучил распад пиона в старой $PS - PS$ -модели π -нуклонного взаимодействия. По этой теории пион распадается на два фотона (диаграммы низшего порядка приведены на рис. 1). По-видимому, чистая случайность, что такой совершенно неправдоподобный расчет приводит к результату, превосходно согласующемуся с экспериментом*.
5. Тщательные и однозначные вычисления приведены в работе [2].
6. Здесь уместны исторические замечания. Первым, кто рассчитал процесс $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ в теории поля, был Штайнбергер [4]. Кроме расчетов в $PS - PS$ -модели с πN -вершиной γ^5 он вычислил это же амплитуду в $PV - PS$ -модели с πN -вершиной $i\mathbf{k}_\alpha \gamma^5 \gamma^\alpha$. Второй из расчетов аналогичен нашему вычислению $T^{\alpha\mu\nu}$ в методе регуляризации Паули — Вилларса. Штайнбергер попытался проверить теорему эквивалентности $PS - PS$ - и $PS - PV$ -теорий, основанную на формальном тождестве Уорда (4.166), и, конечно, теорему подтвердить не смог. Он впал в замешательство и решил бросить теоретическую физику. Двумя годами позже Швингер («Phys. Rev.», 1951, v. 82, p. 664) проанализировал и решил проблему. Эта работа была по существу забыта и ее важность для современных идей алгебры токов и PCAC не была замечена. Проблема была открыта вновь в σ -модели Беллом и Джекивом [2] и независимо и одновременно в спинорной электродинамике в работе Adler S. L. «Phys. Rev.», 1969, v. 177, p. 2426. Анализ Швингера подобен проведенному в параграфе 4.5.

* Это замечание неправильно, поскольку использованная Штайнбергером модель по существу полностью эквивалентна обсуждаемой в тексте σ -модели. — Прим. пер.

7. Здесь мы следуем работе Jackiw R., Jonnson K. «Phys. Rev.», 1969, v. 182, p. 1459. Этот же аномальный коммутатор был получен в работе Adler S. L., Boulware D. G. «Phys. Rev.», 1969, v. 184, p. 1740.
8. Rosenberg L. «Phys. Rev.», 1963, v. 129, p. 2786. Формула Розенберга имеется также в статье Адлера [6].
9. То, что в распаде $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ нарушается именно гипотеза Фейнмана, было указано впервые Джекивом и Джонсоном [7]. В приведенном анализе следуем работе Gross D. J., Jackiw R. «Nucl. Phys. B», 1969, v. 14, p. 269.
10. Уравнение (4.45) было выведено впервые Швингером [3]. В той же форме оно получено Адлером [6], исходя из анализа спинорной электродинамики. Изложение в этой главе аналогично данному Швингером и в современной литературе было проведено Джекивом и Джонсоном [7], а также в работах Hagen C. R. «Phys. Rev.», 1969, v. 177, p. 2622; Zumino B. Proceedings of the Topical Conference on Weak Interactions. CERN, Geneva, 1969, p. 361.
11. Этот анализ принадлежит Адлеру [6].
12. Возможно, что такая теория имеет физический смысл. В работе Johnson K., Willey R., Baker M. «Phys. Rev.», 1967, v. 163, p. 1699, было предположено, что затравочная масса электрона равна нулю и что физическая масса полностью динамического происхождения.
13. Можно надеяться, например, что аномалия приведет к генерации массы в безмассовой теории без посредничества голдстоуновских бозонов. То, что это не так в теориях с абелевыми векторными мезонами, было показано Пейджсом (H. Pagels, частное сообщение).
- 13* Li L.-F., Pagels H. «Phys. Rev. Lett.», 1971, v. 26, p. 1204; Pagels H. «Phys. Rev. Lett.», 1972, v. 28, p. 1482.
14. Johnson K. «Phys. Lett.», 1963, v. 5, p. 253.
15. Jackiw R., Johnson K. [7].
16. Adler S. L., Bardeen W. «Phys. Rev.», 1969, v. 182, p. 1517.
17. Неоднозначности в тождествах Уорда с двухпетлевыми интегралами были найдены в работе Abers E., Dicus D., Teplitz V. «Phys. Rev. D», 1971, v. 3, p. 485.
18. Glashow S. L., Jackiw R., Shei S. «Phys. Rev.», 1969, v. 187, p. 1916. Другая трактовка нарушения $SU(3) \times SU(3)$ -симметрии совместно с аномалиями аксиального тока дана в работах Gounaris G. «Phys. Rev. D», 1970, v. 1, p. 1426; «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 2734. В теории Гунериса используются детальные феноменологические лагранжианы. Соответственно его результаты точнее, чем полученные в первой из цитируемых работ, хотя, конечно, и зависят от модели. Гунерис получил предсказания как для процессов, рассмотренных Глэшоу, Джекивом и Шаем, так и для процессов с фотоном вне массовой поверхности. Получено согласие для распадов $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, $\eta^0 \rightarrow 2\gamma$, но предсказываемая ширина распада $X^0 \rightarrow 2\gamma$ в 10 раз меньше.
19. Wilson K. «Phys. Rev.», 1969, v. 181, p. 1969; Gerstein I., Jackiw R. «Phys. Rev.», 1969, v. 181, p. 1955; Bardeen W. «Phys. Rev.», 1969, v. 184, p. 1849; Brown R. W., Shih C. C., Young B. L. «Phys. Rev.», 1969, v. 186, p. 1491; Amati D., Bouchiat G., Gervais J. L. «Nuovo cimento A», 1970, v. 65, p. 55.
20. Preparata G., Weisberger W. «Phys. Rev.», 1968, v. 175, p. 1965.

Г Л А В А 5

ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ ЭЛЕКТРОРОЖДЕНИЯ

5.1. Вводная часть

В экспериментах по электророждению электрон рассеивается на нуклонной мишени, обычно на протоне. Считается, что наблюдаемые адронные конечные состояния рождаются в наименьшем порядке

по электромагнетизму, при неупругом взаимодействии между фотоном вне массовой поверхности и протоном. Процесс изображен на рис. 6. Измеряя полное неупругое сечение, т. е. суммируя по всем конечным состояниям, можно определять однопротонный связный матричный элемент коммутатора электромагнитных токов [1]:

$$S^{\mu\nu}(p, q) = d^4x \exp(iqx) \langle p | [J^\mu(x) J^\nu(0)] | p \rangle. \quad (5.1).$$

Здесь $|p\rangle$ — вектор состояния мишени с 4-импульсом p^μ , $p^2 = m^2$. Считаем, что произведено усреднение по спиновым состояниям протона. Импульс q , переданный от лептонной пары к протону, пространственно-подобен: $q^2 < 0$, $q_0 > 0$.

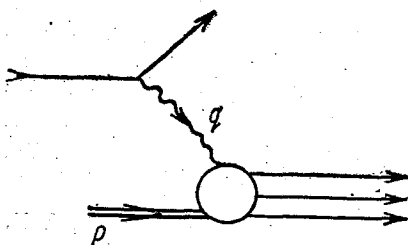


Рис. 6. Неупругое рассеяние электрона на протоне

Так как протон является наименее массовым состоянием, то $q^2 \geq -2pq$. Будем использовать обозначение ν для pq и ω для $-q^2/2pq$. Так как фотон находится вне массовой поверхности, он имеет продольную и поперечную компоненты. Соответственно говорят о двух полных сечениях: поперечном σ_T и продольном σ_L .

Так как J^μ сохраняется, то матричный элемент $S^{\mu\nu}(p, q)$ должен быть поперечным по q . Калибровочно-инвариантное и лоренц-ковариантное разложение для $S^{\mu\nu}(pq)$ имеет вид:

$$S^{\mu\nu}(pq) = - \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \tilde{F}_1 + \frac{1}{pq} \left(p^\mu - q^\mu \frac{pq}{q^2} \right) \left(p^\nu - q^\nu \frac{pq}{q^2} \right) \tilde{F}_2. \quad (5.2)$$

Обозначения здесь не совсем традиционные; в литературе \tilde{F}_1 обычно отвечает W_1 , а \tilde{F}_2 отвечает νW_2 . Лоренц-инвариантные функции \tilde{F}_i зависят от q^2 и ν ; часто в качестве независимых переменных будем выбирать ω и ν или q^2 и ω . Комбинацию $\tilde{F}_2 - 2\omega \tilde{F}_1$ обозначим \tilde{F}_L . Полные поперечные и продольные сечения выражаются непосредственно через \tilde{F}_i . Легко показать, что функции \tilde{F}_i безразмерны. \tilde{F}_2 и \tilde{F}_L четные по ω , а \tilde{F}_1 нечетная.

Из экспериментальных данных можно извлечь замечательный факт. При больших значениях ν и $q^2 \tilde{F}_i$ перестают зависеть от ν и q^2 в отдельности: они становятся функциями только отношения q^2/ν . (Это еще больше замечательно, когда обращаешь внимание на то, что энергии, при которых начинается такое явление, не особенно велики по сравнению с относящимися к задаче масштабами масс). Это явление называется «скейлинговым поведением» и ведет к следующей гипотезе. Предполагается, что при больших ν для фиксированных ω существует предел $\tilde{F}_i(\omega, \nu)$. Считаем эту гипотезу скей-

линг справедливой:

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \tilde{F}_i(\omega, \nu) = F_i(\omega) < \infty. \quad (5.3)$$

Можно показать, что $F_2(\omega) \geq 2\omega F_1(\omega) \geq 0$, так как F_i пропорциональны предельным значениям неотрицательных полных сечений. Область больших ν и q^2 при фиксированном их отношении называется глубоконеупругой областью.

Гипотеза о существовании скейлинговых функций $F_i(\omega)$ привела к ряду интересных приложений алгебры токов. Удалось получить правила сумм, связывающие свойства $F_i(\omega)$ с ОВК электромагнитных токов. Приведем сначала вывод этих правил сумм. Затем покажем, что соображения алгебры токов не подтверждаются непосредственными расчетами, и, таким образом, продемонстрируем существование аномалий коммутаторов в этом контексте.

5.2. Вывод правил сумм. Наивный метод

Выведем теперь два правила сумм, которые будут объектом нашего обсуждения. Рассмотрим $0i$ компоненту (5.2) в системе отсчета, где вектора \mathbf{q} и \mathbf{p} параллельны: $\mathbf{p} = |\mathbf{p}| \hat{\mathbf{q}}$. Так как исходное выражение и конечный результат ковариантны, то выбор определенной системы отсчета не приводит к потере общности. Перейдем теперь в глубоконеупругую область, устремив $p_0 \rightarrow \infty$ при $\omega = \text{const}$ с условием $p^2 = m^2$, так чтобы $p_0 \approx |\mathbf{p}|$. Тогда

$$\omega = -\frac{q_0^2 - q^2}{2(|\mathbf{p}|q_0 - |\mathbf{p}||\mathbf{q}|)} = -\frac{1}{2|\mathbf{p}|} (q_0 + |\mathbf{q}|);$$

$$q_0 = -2p_0\omega - |\mathbf{q}|.$$

В этом пределе ν растет как $-2p_0^2\omega$.

Из (5.2) имеем

$$C^{0i}(q, p) = -\frac{q^0 q^i}{2\omega\nu} \tilde{F}_1 + \frac{q^i}{\nu} \left(p_0 + \frac{q^0}{2\omega} \right) \left(\frac{|\mathbf{p}|}{|\mathbf{q}|} + \frac{1}{2\omega} \right) \tilde{F}_2. \quad (5.4a)$$

Здесь вектор p заменен вектором $|\mathbf{p}| \hat{\mathbf{q}}$. Во второй скобке член $|\mathbf{p}|/|\mathbf{q}|$ доминирует над $1/2\omega$, так как $|\mathbf{p}|$ растет, а $|\mathbf{q}|$ фиксировано. Также

$$p_0 + \frac{q^0}{2\omega} \sim -\frac{|\mathbf{q}|}{2\omega}.$$

Тогда в глубоконеупругом пределе можно использовать следующее выражение для C^{0i} :

$$C^{0i}(q, p) \rightarrow -\frac{q^0 q^i}{2\omega\nu} \tilde{F}_1 - \frac{q^i |\mathbf{p}|}{2\omega\nu} \tilde{F}_2. \quad (5.4b)$$

Далее, заменим q^0/ν на $1/p_0$ и $|\mathbf{p}|/\nu$ на $-1/2 p_0\omega$ и получим

$$2p_0 C^{0i}(q, p) \rightarrow 1/2 q^i F_L(\omega)/\omega^2. \quad (5.4b)$$

Альтернативная формула для $C^{0i}(q, p)$ в глубоконеупругой области следует из (5.1):

$$2 p_0 C^{0i}(q, p) \rightarrow 2 p_0 \int d^4 x \exp(-2 i p_0 \omega x_0) \exp(-i |q| x_0) \times \\ \times \exp(-i \mathbf{q} \mathbf{x}) \langle p | [J^0(x), J^i(0)] | p \rangle. \quad (5.5)$$

Комбинируя (5.5) с (5.4в) и интегрируя по ω , имеем

$$\lim_{p_0 \rightarrow \infty} \int d\omega 2 p_0 C^{0i}(q, p) = \frac{1}{2} q^i \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{F_L(\omega)}{\omega^2} = \\ = \lim_{p_0 \rightarrow \infty} 2\pi \int d^4 x 2 p_0 \delta(2 p_0 x_0) \exp(-i |q| x_0) \exp(-i \mathbf{q} \mathbf{x}) \langle p | [J^0(x), \\ J^i(0)] | p \rangle = 2\pi \int d^3 x \exp(i \mathbf{q} \mathbf{x}) \lim_{p_0 \rightarrow \infty} \langle p | [J^0(0, \mathbf{x}), I^i(0)] | p \rangle. \quad (5.6)$$

Это и есть то правило сумм [3] для ШЧ, которое упоминалось в гл. 2. Оно показывает, что для самосогласованного результата матричный элемент ШЧ должен быть лоренцевым скаляром, иначе предел расходится:

$$\langle p | [J^0(0, \mathbf{x}), J^i(0)] | p \rangle = i \langle p | S | p \rangle \partial^i \delta(\mathbf{x}); \quad (5.7a)$$

$$\langle p | S | p \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{F_L(\omega)}{\omega^2}. \quad (5.7b)$$

В интеграле захватывается область отрицательных ω , нефизических для электророждения. Однако если принять, что симметрия $\tilde{F}(\omega, \nu) = \tilde{F}(-\omega, -\nu)$ выполняется как при конечном, так и при бесконечном ν , то $F_L(\omega)$ четная по ω . А так как $q^2 + 2\nu > 0$ и интегрирование обрезается при $\omega = 1$, то

$$\langle p | S | p \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\omega \frac{F_L(\omega)}{\omega^2}. \quad (5.8)$$

С помощью этого правила сумм, если оно правильное, можно измерить q -числовой ШЧ (дает вклад только q -числовая часть ШЧ, так как рассматривается связный матричный элемент, из которого вычтено вакуумное среднее S). Имеющиеся данные согласуются с $F_L = 0$. Это прямое указание на то, что ШЧ является C -числом. Напротив, если известно, что ШЧ C -число, то из (5.8) предсказывается $F_L = 0$, так как F_L неотрицательно. Однако если $F_L(0)$ убывает недостаточно быстро, так что правило сумм расходится, то становится непонятным, бесконечен ли этот матричный элемент ШЧ или же просто правило сумм неправильно. Ниже будет рассмотрен вопрос о правильности правила сумм.

Второе правило сумм, которое мы здесь обсудим, — это соотношение Каллана — Гросса [4]. Берутся i, j -компоненты $C^{\mu\nu}$, а \mathbf{q} по-

лагается равным нулю:

$$C^{ij}(q, p) = \delta^{ij} \tilde{F}_1 - \frac{p^i p^j}{2\rho_0^2 \omega} \tilde{F}_2. \quad (5.9a)$$

В глубоконеупругой области ρ_0 устремляется к бесконечности

$$2\omega C^{ij}(q, p) \rightarrow \delta^{ij} 2\omega F_1(\omega) - \hat{p}^i \hat{p}^j F_2(\omega) \rightarrow -\hat{p}^i \hat{p}^j F_L(\omega) + (\delta^{ij} - \hat{p}^i \hat{p}^j) 2\omega F_1(\omega). \quad (5.9b)$$

Альтернативное выражение для C^{ij} следует из (5.1):

$$2\omega C^{ij}(qp) \rightarrow 2 \int d^4 x \omega \exp(-i2\omega x_0 p_0) \langle p | [J^i(x), J^j(k)] | p \rangle. \quad (5.10)$$

Комбинируя (5.9b) и (5.10) и интегрируя по ω , имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega 2\omega C^{ij}(q, p) &= (\delta^{ij} - \hat{p}^i \hat{p}^j) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega 2\omega F_1(\omega) - \\ - \hat{p}^i \hat{p}^j \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega F_L(\omega) &= i\pi \lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho_0^2} \int d^4 x \delta'(x_0) \langle p | [J^i(x), J^j(0)] | p \rangle = \\ &= -i\pi \lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho_0^2} \int d^3 x \langle p | [J^i(0, \mathbf{x}), J^j(0)] | p \rangle. \end{aligned} \quad (5.11a)$$

Окончательно правило сумм имеет вид

$$\begin{aligned} (\delta^{ij} - \hat{p}^i \hat{p}^j) \int_0^1 2\omega F_1(\omega) d\omega - \hat{p}^i \hat{p}^j \int_0^1 d\omega F_L(\omega) &= \\ = -i \frac{\pi}{2} \lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho_0^2} \int d^3 x \langle p | [J^i(0, \mathbf{x}), J^j(0)] | p \rangle. \end{aligned} \quad (5.11b)$$

При вычислении интеграла по области физических ω были использованы свойства симметрии F_i .

Заметим, что после интегрирования по x остается только коэффициент перед δ -функцией в ОВК; все ШЧ выпадают при интегрировании. В свою очередь, предельным переходом $\rho_0 \rightarrow \infty$ выделяются те части ОВК, которые являются компонентами лоренцева тензора второго ранга. Матричные элементы таких величин могут быть билинейны по p и остаются в этом пределе. Матричные элементы лоренцевых скаляров не должны зависеть от p и, следовательно, исчезают в пределе $\rho_0 \rightarrow \infty$ после умножения на ρ_0^{-2} . Для самосогласованности соотношения (5.11b) следует предположить, что в ОВК $\langle p | [J^i, J^j] | 0 \rangle$ не содержится никаких тензоров четвертого или более высокого ранга в коэффициенте перед δ -функцией. Такие тензоры вели бы себя как $|p|^4$, и уравнение (5.11b) расходилось бы.

Правило сумм Каллана — Гросса можно использовать двояко. Оно переводит экспериментальные данные в информацию о коммутаторе. Если, напротив, известен коммутатор, то из него следуют предсказания для эксперимента. Каллан и Гросс выбрали второй

путь. Вычисляя $[J^i, J^j]$ во множестве кварковых моделей, они нашли, что (см. упражнение 5.1)

$$\int d^3x \langle p | [J^i(0, x), J^j(0)] | q \rangle = A(\delta^{ij} p^2 - p^i p^j) + B\delta^{ij}. \quad (5.12)$$

Таким образом, из (5.11б) следует, что интеграл $\int_0^1 d\omega F_L(\omega)$, и соответственно само $F_L(\omega)$ тождественно исчезают в этих кварковых моделях (к данному выводу можно прийти, конечно, и из правила сумм для ШЧ, если ОВК $[J^0, J^i]$ вычисляется канонически).

Ясно, что правило сумм Каллана — Гросса сходится при $\omega = 0$ лучше, чем правило сумм для ШЧ. К сожалению, оно менее строгое, так как необходимо знание коммутатора, для вычисления которого требуются как канонические уравнения движения, так и канонические коммутационные соотношения. Можно получить последующие правила сумм, связывающие интегралы от моментов $F_i(\omega)$ с ОВК токов и высших производных токов. С ростом степени ω сходимость интеграла по ω улучшается. Соответствующие коммутаторы могут быть найдены только после многократного использования уравнений движения.

Изложенные выводы, хотя и очень простые и прямые, являются эвристическими в том смысле, что они требуют предельного перехода под знаком интеграла. У нас нет способа проконтролировать эти математические манипуляции и оценить их справедливость. Кроме того, для перехода в глубоконеупругую область p_0 и q_0 устремляя к бесконечности при фиксировании q , что делало q^2 времениподобным и выводило за физическую область этого процесса. Приведем сейчас альтернативный вывод, где будут яснее видны некоторые из математических предположений.

5.3. Вывод правил сумм. Дисперсионный метод

Для второго вывода [5] рассмотрим амплитуду комптоновского рассеяния вперед, абсорбтивная часть которой есть коммутатор (5.1):

$$\begin{aligned} T^{*\mu\nu}(q, p) &= i \int d^4x \exp(iqx) \langle p | T^* J^\mu(x) J^\nu(0) | p \rangle = \\ &= - \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) T_1 + \left(p^\mu - q^\mu \frac{pq}{q^2} \right) \left(p^\nu - q^\nu \frac{pq}{q^2} \right) T_2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Первое из предположений, необходимых для вывода правил сумм, — лоренц-скалярность матричного элемента ШЧ (если он существует). Отсюда следует, что контактный член (если он существует) в T^* -произведении имеется только в i, j -компонентах (см. упражнение 2.7). В предыдущем выводе уже встречалось это условие.

Амплитуды T_i удовлетворяют дисперсионным соотношениям по ν при фиксированном q^2 . Эти дисперсионные соотношения можно

превратить в дисперсионные соотношения по ω при фиксированном q^2 заменой переменных $\nu = -q^2/2\omega$. Следовательно, T_i можно считать функцией q^2 и ω . Для вывода двух правил сумм необходимо принять безвычитательные дисперсионные соотношения для T_2 :

$$T_2(\omega, q^2) = \frac{2\omega^2}{\pi q^2} \int_0^1 d\omega' \frac{\tilde{F}_2(\omega', q^2)}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (5.14)$$

Чтобы вывести правило сумм для ШЧ, необходимо принять безвычитательные соотношения для комбинации $T_L = T_1 + \frac{\nu^2}{q^2} T_2$:

$$T_L(\omega, q^2) = \frac{\omega^2}{2\pi} \int_0^1 \frac{d\omega'}{\omega'^2} \frac{F_L(\omega', q^2)}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (5.15a)$$

Правило сумм Каллана — Гросса можно получить при более слабых гипотезах. Достаточно принять, что в соотношении для T_1 требуется не более одного вычитания, если вычитательный член не растет с ростом q^2 :

$$\left. \begin{aligned} T_1(\omega, q^2) &= T(q^2) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 d\omega' \frac{\omega' F_1(\omega', q^2)}{\omega^2 - \omega'^2}; \\ \lim_{q^2 \rightarrow \infty} T(q^2) &< \infty. \end{aligned} \right\} \quad (5.156)$$

Здесь $T(q^2)$ совпадает с T_1 при $\nu = 0$: $T(q^2) = T_1(\infty, q^2)$. Уравнение (5.156) заведомо верно, если выполняются (5.14) и (5.15a); оно может быть верно, даже если (5.15a) и нуждается в вычитании. Дисперсионные представления (5.14) и (5.156) согласуются с обычным реджевским подходом, предсказывающим конечные пределы как для \tilde{F}_2 , так и для $\omega\tilde{F}_1$ при $\omega \rightarrow 0$. Очевидно, что (5.15a) выполняется, если \tilde{F}_L убывает достаточно быстро при малых ω (больших ν).

Сделаем предельный переход БДЛ в избранных компонентах $T^{*\mu\nu}$. Рассмотрим вначале T^{*0i} . Поскольку в T^{*0i} нет контактных членов, то T^* -произведение совпадает с T -произведением. Следовательно, из (5.13) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 T^{0i}(q, p) &= - \int d^3x \exp(-iqx) \times \\ &\times \langle p | [J^0(0, \mathbf{x}), J^i(0)] | p \rangle = \lim_{q_0 \rightarrow \infty} \left[\frac{q_0^2 q^i}{q^2} T_1 + q_0 \times \right. \\ &\times \left. \left(p_0 - q_0 \frac{\nu}{q^2} \right) \left(p^i - q^i \frac{\nu}{q^2} T_2 \right) \right] = q^i \lim_{q_0 \rightarrow \infty} T_1 + p^i p q \lim_{q_0 \rightarrow \infty} T_2. \end{aligned} \quad (5.16a)$$

Так как по исходной гипотезе матричный элемент ШЧ не имеет никакой зависимости от p , то $\lim_{q_0 \rightarrow \infty} T_2$ должен быть нулем. К этому же выводу можно прийти и из (5.14) [в пределе БДЛ $\omega^2 \rightarrow \infty$,

$F_2(\omega^1, q^2) \rightarrow F_2(\omega^1)$. Уравнение (5.16а) теперь можно переписать как

$$-\int d^3x \exp(-iqx) \langle p | [J^0(0, x), J^i(0)] | p \rangle = \\ = q^i \lim_{q_0 \rightarrow \infty} \left(T_1 + \frac{v^2}{q^2} T_2 \right) = q^i \lim_{q_0 \rightarrow \infty} T_L. \quad (5.16б)$$

Предел БДЛ для T_L вычисляется из дисперсионной формулы (5.15а). Отсюда получаем правило сумм для ШЧ [6]:

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} T_L = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{d\omega'}{\omega'^2} F_L(\omega'). \quad (5.16в)$$

Для вывода правила сумм Каллана — Гросса рассмотрим T^{*ij} . Чтобы осталось T -произведение и можно было применять теорему БДЛ, надо извлечь контактный член. Нам достаточно исследовать T^{ij} в системе $q \rightarrow \infty$ [7]. Так как в пределе БДЛ $T_2 = 0$, то из (5.13) имеем

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} T^{*ij} |_{q=0} = -g^{ij} \lim_{q_0 \rightarrow \infty} T_1 |_{q=0}. \quad (5.17а)$$

Следовательно, контактный член — не исчезающая в пределе БДЛ часть T^* -произведения. Он равен

$$-g^{ij} \lim_{q_0 \rightarrow \infty} T_1 |_{q=0}. \quad (5.17б)$$

Согласно дисперсионному представлению для T_1 предел БДЛ для этой величины равен $\lim_{q_0 \rightarrow \infty} T(q^2)$. Вводя асимптотическое разложение для вычитательного члена

$$T(q^2) \approx a + b/q^2, \quad (5.17в)$$

получаем из (5.17а), что T -произведение равно

$$T^{ij} |_{q=0} = T^{*ij} |_{q=0} + g^{ij} a = -g^{ij} T_1 |_{q=0} + \\ + p^i p^j T_2 |_{q=0} + g^{ij} a. \quad (5.17г)$$

Применим теперь предельный переход БДЛ к $q_0^2 T^{ij}$:

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0^2 T^{ij} |_{q=0} = -g^{ij} \lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0^2 (T_1 - a) |_{q=0} + p^i p^j \lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0^2 T_2 |_{q=0} = \\ = -i \int d^3x \langle p | [J^i(0, x), J^j(0)] | p \rangle. \quad (5.18а)$$

Значение амплитуд, возникающих в (5.18а), в пределе БДЛ можно найти из соответствующих дисперсионных представлений:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0^2 T_2 |_{q=0} &= -\frac{2}{\pi} \int_0^1 d\omega F_2(\omega); \\ \lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0^2 (T_1 - a) |_{q=0} &= b + \frac{4}{\pi} p_0^2 \int_0^1 d\omega \omega F_1(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (5.18б)$$

Правила сумм Каллана — Гросса будут получены, если поделить (5.186) на p_0^2 и устремить p_0^2 к бесконечности.

Из разобранный вывода правил сумм непосредственно видно, что с высокоэнергетическими правилами сумм связаны именно определенные по БДЛ коммутаторы. Если необходимы вычитания сверх предположенных выше, то этим методом нельзя получить никакие правила сумм (см. упражнение 5.2).

5.4. Модельные расчеты

В кварковой модели с векторными глюонами полученные правила сумм, взятые в совокупности с каноническими значениями соответствующих коммутаторов, предсказывают исчезновение F_L . (Конечно, ШЧ нельзя вычислить канонически: однако известно, что

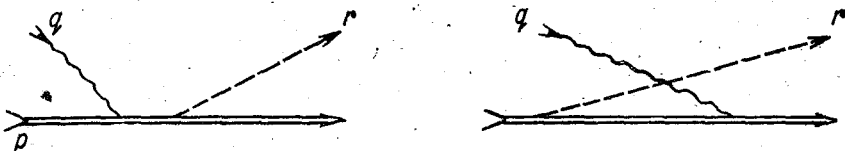


Рис. 7. Диаграммы наинизшего порядка для электророжения в модели с лагранжианом (5.19)

в этой модели неканонический ШЧ является c -числом, по крайней мере в низших порядках теории возмущений.) Для непосредственной проверки канонических методов и полученных правил сумм нужно вычислить F_L в низших порядках теории возмущений. Полученное F_L будет отлично от нуля.

Модель описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - 1/4 B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\mu^2 B^\mu B_\mu + g\bar{\psi}\gamma^\mu\psi B_\mu. \quad (5.19)$$

Массивный векторный мезон B_μ с массой μ взаимодействует с фермионом ψ с константой g ($B^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu$). Мезон взаимодействует с сохраняющимся током, так что теория перенормируема. Возможные внутренние симметрии опускаем. Поскольку здесь интересны высокоэнергетические пределы (неважно, глубокоэластичные пределы или пределы БДЛ), то можно пренебречь массой фермиона. Поэтому для упрощения всех вычислений положим $m = 0$.

Для проверки полученных формальных результатов необходимо знать сечение рождения мезона фотоном, находящимся вне массовой поверхности. Соответствующая одномезонная амплитуда наинизшего порядка теории возмущений представлена диаграммами рис. 7. Волнистой линией изображен фотон с импульсом q , сплошной линией — фермион с начальным импульсом p , а бозон, изображенный пунктирной линией, несет 4-импульс r . Усредненные по спинам поперечное и продольное сечения соответствующего про-

цесса можно вычислить с помощью обычных однозначных правил Фейнмана. Перейдя к глубоконеупругому пределу, можно найти

$$F_L(\omega) \sim g^2 \theta (1 - \omega^2) \omega^2, \quad (5.20)$$

Таким образом, вывод, сделанный из формальных соображений, не подтверждается: найдено, что $F_L(\omega)$ не исчезает. Это прямое следствие динамики. Заметим, что ни одно из правил сумм не расходится: $F_L(\omega)$ достаточно регулярно при малых ω .

В модели нет другой независимой скейлинговой функции. Можно найти, что

$$\lim_{\substack{\nu \rightarrow \infty \\ \omega = \cos st}} \tilde{F}_2(\omega, \nu) \sim g^2 \ln \nu / \mu^2 + \text{конечные члены}. \quad (5.21)$$

Можно возразить, что не имеет смысла сравнивать правила сумм, полученные с помощью гипотезы скейлинга, с моделью, в которой нет скейлинга. Но подобное возражение отпадает при ближайшем рассмотрении. В рассматриваемом порядке теории возмущений можно выделить эффекты нарушения гипотезы скейлинга и показать, что неприменимость формальных соображений обусловлена другими причинами. Действительно, продольная амплитуда сама по себе удовлетворяет скейлингу, и нет нужды обращаться к поперечной амплитуде, нарушающей его.

Невыполнение правила сумм для ШЧ легко понять. Проверка явного вида функции $\tilde{F}_L(\omega, q^2)$, полученной в теории возмущений, показывает, что в разобранном примере не выполняется гипотеза о безвычитательном соотношении. Т. е. хотя ШЧ, будучи вычислен из предела БДЛ, и в самом деле является s -числом, формула, связывающая его с интегралом от F_L , выведена неправильно [9, 10]. Следовательно, в данном случае ошибка связана не с аномальными коммутаторами. Тем не менее такой пример интересен, так как в глубоконеупругом рассеянии нет никаких экспериментальных указаний на необходимость вычитания, поскольку интеграл от F_L сходится. Не будем заниматься больше обсуждением правил сумм для ШЧ: это выходит за рамки основного вопроса. Правило сумм Каллана — Гросса нарушается из-за того, что ОВК $[J^i, J^j]$, вычисленный из предела БДЛ, не имеет канонического вида (5.12). Докажем это в следующем параграфе [11].

5.5. Аномальные коммутаторы

Для вычисления ОВК $[J^i, J^j]$ в низшем порядке теории возмущений нужно знать комптоновскую амплитуду $T^{*\mu\nu}$ в том же порядке. На рис. 8 приведены соответствующие перенормированные диаграммы.

Физические амплитуды получаются после умножения $T^{*\mu\nu}$ на Z^{-1} , где Z — константа перенормировки волновой функции. Хотя для правила сумм Каллана — Гросса требуется только амплитуда

комптоновского рассеяния вперед, вычислим ее для рассеяния также и на ненулевой угол. Очевидно, следует вычислить пропагатор и вершинную функцию во втором порядке. В дальнейших приложениях понадобится также и аксиально-векторная вершина. Вычисления проводятся в калибровке Ландау для пропагатора бозона

$$D^{\mu\nu}(p) = -i \frac{(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / p^2)}{p^2 - \mu^2}.$$

Как и раньше, будем считать фермионы безмассовыми. Удобное свойство этой модели — конечность перенормировки волновой функ-

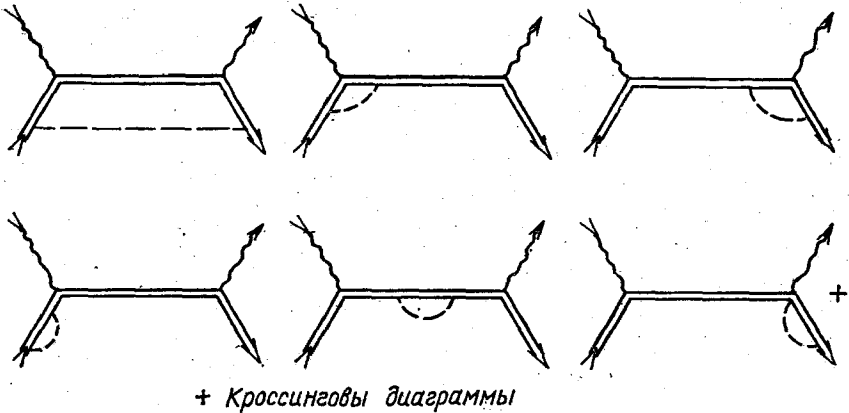


Рис. 8. Поправки высших порядков к комптоновской амплитуде

ции. Поэтому имеет смысл говорить о хорошо определенных неперенормированных фермионных полях.

В низшем нетривиальном порядке теории возмущений вычисляются следующие функции Грина.

1. Неперенормированный пропагатор фермиона

$$G(p) = \int d^4x \exp(i px) \langle 0 | T^* \psi(x) \bar{\psi}(0) | 0 \rangle, \quad (5.22)$$

2. Неперенормированная векторная вершинная функция

$$F^\mu(p, q) = \int d^4x d^4y \exp(i px) \exp(-i qy) \times \\ \times \langle 0 | T^* \psi(x) \psi(y) J^\mu(0) | 0 \rangle. \quad (5.23)$$

3. Неперенормированная аксиально-векторная вершинная функция

$$F_g^\mu(p, q) = \int d^4x d^4y \exp(i px) \exp(-i qy) \times \\ \times \langle 0 | T^* \psi(x) \bar{\psi}(y) J_g^\mu(0) | 0 \rangle. \quad (5.24)$$

4. Комптоновская амплитуда

$$T^{*\mu\nu} = i \int d^4x \exp(i qx) \langle p | T^* J^\mu(x) J^\nu(0) | p' \rangle. \quad (5.25)$$

Как только эти функции явно вычислены, можно найти ряд коммутаторов из предела БДЛ. Не все они имеют отношение к правилу

сумм Каллана — Гросса, но они достаточно интересны, чтобы их упомянуть. Контактных членов нет ни в одном из T^* -произведений, т. е. они совпадают с T -произведениями, и, следовательно, применима теорема БДЛ. Вычислим следующие коммутаторы [12]:

$$-i \lim_{p_0 \rightarrow \infty} p_0 G(p) = \int d^3 x \exp(-ipx) \langle 0 | [\psi(0, x), \bar{\psi}(0)] | 0 \rangle; \quad (5.26)$$

$$-i \lim_{p_0 \rightarrow \infty} p_0 F^\mu(p, q) |_{q=\text{const}} = \int d^3 x d^4 y \exp(-ipx) \exp(iqy) \times \\ \times \langle 0 | T [\psi(0, x), J^\mu(0)] \bar{\psi}(y) | 0 \rangle; \quad (5.27)$$

$$-i \lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 T^{\mu\nu}(q) = i \int d^3 x \exp(-iqx) \langle p | [J^\mu(0, x), J^\nu(0)] | p \rangle; \quad (5.28)$$

$$- \lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0^2 T^{ij}(q) |_{q=0, p=p', \text{ устр. по спинам}} = i \int d^3 x \times \\ \times \langle p | [J^i(0, x), J^j(0)] | p \rangle |_{\text{устр. по спинам}}. \quad (5.29)$$

Последний из них — коммутатор Каллана — Гросса. В амплитуде рассеяния вперед нет никаких членов $1/q_0$, так как матричный элемент ОВК $[J^i, J^j]$ между диагональными усредненными по спину состояниями исчезает. При вычислении правой части (5.28) для ij -компоненты возникает содержащий $\varepsilon^{ijk} J_k^5$ матричный элемент аксиального тока (5.24). После того как выполнены предельные переходы, получаем [13]:

$$[\psi(0, x), \bar{\psi}(0)] = \left(1 - \frac{3g^2}{32\pi^2}\right) \gamma^0 \delta(x); \quad (5.30)$$

$$[\psi(0, x), J^0(0)] = \psi(0, x) \delta(x); \quad (5.31a)$$

$$[\psi(0, x), J^i(0)] = \left(1 - \frac{g^2}{8\pi^2}\right) \gamma^0 \gamma^i \psi(0, x) \delta(x); \quad (5.31b)$$

$$\langle p | [J^0(0, x), J^0(0)] | p' \rangle = 0; \quad (5.32a)$$

$$\langle p | [J^0(0, x), J^i(0)] | p' \rangle = 0; \quad (5.32b)$$

$$\langle p | [J^i(0, x), J^j(0)] | p' \rangle = i\varepsilon^{ijk} \left(1 - \frac{3g^2}{16\pi^2}\right) \langle p | J_k^5(0, x) | p' \rangle \delta(x) \quad (5.32в)$$

и после усреднения по спинам

$$\int d^3 x \langle p | [J^i(0, x), J^j(0)] | p \rangle = A (\delta^{ij} p^2 - p^i p^j) + B \delta^{ij} + \\ + B' p^2 \delta^{ij}. \quad (5.33)$$

Видно, что большинство коммутаторов неканонические; они имеют поправки, зависящие от взаимодействия*. Примечательно то,

* То, что коммутаторы, вычисленные с помощью предельного перехода БДЛ, отличаются от канонических, было обнаружено впервые в работе А. И. Вайнштейна и Б. Л. Иоффе [13]. — *Прим. пер.*

что все неканонические поправки конечны. Уравнение (5.30) показывает, что меняется и канонический коммутатор (антикоммутатор) полевой переменной с сопряженным ей импульсом. Это не удивительно; вспомним, что поля ψ в данной задаче перенормируются и, что хорошо известно, коммутатор перенормированных полей вообще перестает существовать из-за бесконечной константы перенормировки волновой функции Z . Только в нашей специальной модели; где Z конечно, получается хорошо определенный результат. Однако хотя результат и конечен, он отличается от наивного. Уравнение (5.31б) показывает, что поле ψ имеет неканонический коммутатор с пространственной компонентой тока. В то же время плотность заряда имеет с полем канонический коммутатор (5.31а). ОВК $[J^0, J^0]$ и $[J^0, J^i]$ являются каноническими, что указывает на отсутствие в модели однофермионного матричного элемента ШЧ. Следовательно, правило сумм (5.8) для ШЧ, если оно правильное, предсказывает исчезновение F_L в этой модели. Из уравнения (5.32в) вытекает, что каноническая алгебра пространственных компонент токов не подтверждается в теории возмущений. Отсюда следует, что определенные радиационные поправки к β -распаду, которые считались конечными исходя из кварковой алгебры токов, в действительности бесконечны [14]. Наконец, член $B^i p^2 \delta^{ij}$ в (5.33) — неканонический. Благодаря множителю p^2 этот член дает вклад в правило сумм Каллана — Гросса и портит каноническое предсказание $F_L = 0$.

Рассмотрим канонический вывод коммутаторов, полученных выше, и укажем то место, которое при непосредственных расчетах оказалось незаконным. Возьмем для определенности ОВК $[\psi, J^i]$. Один способ канонического вычисления такого коммутатора — записать каноническое выражение для тока $\bar{\psi} \gamma^i \psi$ и использовать затем канонические (анти) коммутационные соотношения ψ с ψ и $\bar{\psi}$. Но так как хотелось бы свести к минимуму использование ненадежного канонического формализма, то предпочтем альтернативный вывод, использующий только надежные коммутаторы, в котором явно видны причины возникновения зависящих от взаимодействия поправок. Достаточно рассмотреть только пропорциональный δ -функции член в ОВК $[\psi, J^i]$; непосредственные расчеты, проведенные выше, не дают указаний на существование градиентных членов. Рассмотрим коммутатор:

$$\begin{aligned} \int d^3 y [\psi(t, x), J^i(t, y)] &= \int d^3 y y^i [\partial_t J^i(t, y), \psi(t, x)] = \\ &= \int d^3 y y^i (\psi(t, x), J^0(t, y)) = \int d^3 y y^i \frac{\partial}{\partial t} [\psi(t, x), J^0(t, y)] - \\ &\quad - \int d^3 y y^i [\dot{\psi}(t, x), J^0(t, y)]. \end{aligned} \quad (5.34a)$$

Для перехода от первого к последнему выражению в (5.34а) были использованы сохранение тока J^μ и интегрирование по частям. При вычислении первого из двух членов в последнем из равенств (5.34а) можно использовать теперь канонический результат для ОВК

$[J^0, \psi]$. Использование канонического значения здесь вполне закономерно; непосредственные расчеты также не порождают никаких сомнений. Чтобы найти последний член, возникающий в (5.34а), необходимо найти выражение для $\dot{\psi}$. По определению, уравнения движения для ψ имеет вид $i \gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi + g\eta$, $\dot{\psi} = -\gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi - im\gamma^0 \times \psi - i g \gamma^0 \eta$. Здесь η — источник фермионного поля, равный $B_\mu \gamma^\mu \psi$ в нашей модели. Но пока его можно сохранить неопределенным. Уравнение (5.34а) теперь эквивалентно

$$\int d^3y [\psi(t, \mathbf{x}), J^i(t, \mathbf{y})] = \int d^3y y^i [\dot{\psi}(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \gamma^0 \gamma^k \partial_k \psi(\mathbf{x}) \times \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \gamma^0 \gamma_k \psi(\mathbf{x}) \partial_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + im\gamma^0 \psi(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + i g \gamma^0 [\eta(t, \mathbf{x}), J^0(t, \mathbf{y})]]. \quad (5.34б)$$

Выполнив дифференцирование по времени и используя еще раз уравнение движения, преобразуем (5.34б) в

$$\int d^3y [\psi(t, \mathbf{x}), J^i(t, \mathbf{y})] = \gamma^0 \gamma^i \psi(\mathbf{x}) + i g \gamma^0 \int d^3y y^i [[\eta(t, \mathbf{x}), J^0(t, \mathbf{y})] - \eta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})]. \quad (5.34в)$$

Видно, что канонический результат получается только тогда, когда второй член в правой части (5.34в) исчезает. Он действительно исчезает, если взять каноническую формулу для $\eta(\mathbf{x})$:

$$\eta(\mathbf{x}) = B_\mu(\mathbf{x}) \gamma^\mu \psi(\mathbf{x}); [B_\mu(t, \mathbf{x}), \gamma^\mu \psi(t, \mathbf{x}) J^0(t, \mathbf{y})] = B_\mu(\mathbf{x}) \times \gamma^\mu \psi(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \eta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Однако выражение $B_\mu(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x})$ содержит произведение двух-квантовомеханических операторов в одной точке пространства — времени и в общем случае является неопределенным. Ясно, что «корректная» запись $\eta(\mathbf{x})$ отличается от канонической так, что ОВК $[\eta, J^0]$ меняется по сравнению с канонической формой. Легко видеть, что ОВК (5.13б) для $[\psi, J^i]$ воспроизводится при следующем виде ОВК $[\eta, J^0]$:

$$[\eta(t, \mathbf{x}), J^0(t, \mathbf{y})] = \eta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{i}{8\pi^2} g \gamma^i \psi(\mathbf{x}) \partial_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.35)$$

5.6. Обсуждение результатов

Выше было показано возникновение аномальных коммутаторов в кварковой модели. Использование взаимодействия с векторными глюонами несущественно; сходные результаты получаются и для скалярных или псевдоскалярных глюонов. Важно отметить, что локальная алгебра токов с временной компонентой хотя бы одного из токов не попала под сомнение. Тожества Уорда для функций Грина, содержащих токи J^μ , не модифицируются. Это, конечно следствие того, что симметрии, обусловленные сохранением J^μ , могут быть целиком сохранены в теории возмущений. Однако коммутаторы пространственных компонент, как и все высшие коммутаторы, под-

вергаются заисящим от взаимодействия модификациям. Коммутаторы пространственных компонент не используются при выводе тождеств Уорда и низкоэнергетических теорем и существенны только при выводе высокоэнергетических правил сумм. Таким образом, сейчас было показано, что ненадежны именно правила сумм.

Список литературы с комментариями

1. Превосходное изложение кинематики электророжения см. в работе **Brown L. S.** Lectures in Theoretical Physics. N. Y., Interscience, 1969. Ed. by: W. E. Brillin, B. W. Downs, J. Downs.
2. Эта гипотеза была сформулирована Бьёркеном: **Bjorken J.** «Phys. Rev.», 1969, v. 179, p. 1547.
3. Вывод принадлежит **Jackiw R., Van Royen B., West G. B.** «Phys. Rev. D» 1970, v. 2, p. 2473. См. также **Brown L. S.** [1] и **Cornwall J. M., Corrigan D., Norton R. E.** «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 1141.
- 3*. **Иоффе Б. Л.** Проблемы теоретической физики. В. сб.: Памяти И. Е. Тамма. М., «Наука», 1972, с. 200.
4. **Callan S. G., Jr., Gross D. J.** «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 156.
5. Дисперсионный вывод правила сумм для ШЧ приведен в работе Джекива, Ван Ройена, Веста (см. [3]). Правило сумм Каллана — Гросса было получено в [4] фактически этим же методом; разница только в том, что не учитывалась возможность q -числового ШЧ.
6. Техническое замечание: чтобы избежать манипуляции с \tilde{F}_i в нефизической области времениподобных q^2 , следует устремить q_0 к $i\infty$, а не к ∞ . Можно показать, что определение коммутатора по БДЛ справедливо и в этом пределе.
7. Здесь \tilde{F}_i в нефизической области не используется, так как q_0 может быть мнимым (см. [6]).
8. В изложении мы следуем работам **Jackiw R., Preparata G.** «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 975; «Phys. Rev. Lett. E», 1969, v. 22, p. 1162; «Phys. Rev.», 1969, v. 185, p. 1748. Эти же результаты были получены в работе **Adler S. L., Wu-Ki Tung** «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 978; «Phys. Rev. D», 1970, v. 1, p. 2846.
9. Наивный вывод правила сумм для ШЧ ошибочен, по-видимому, из-за неправильной перестановки порядка интегрирования.
10. Корнуолл, Корриген и Нортон смогли получить менее строгое правило сумм для ШЧ при более слабых гипотезах, чем гипотеза о безвычитательности. Однако когда $F_L(\omega^2)/\omega^2$ регулярно при $\omega = 0$, результаты Корнуолла и других авторов совпадают с правилом сумм для ШЧ, полученным здесь. Следовательно, рассмотренная модель дает контрпример и их аргументам. Этот вопрос был проанализирован Энтони Зи [**Zee A.** «Phys. Rev. D», 1971, v. 3, p. 2432].
11. Интересно то, что одна и та же модель приводит к $F_L(\omega)$, являющейся контрпримером сразу двум обычным предположениям о регулярности: безвычитательности дисперсионного соотношения и применимости канонических соображений. Это указывает на то, что эти две идеи можно связать друг с другом. Было бы крайне интересно исследовать эту связь.
12. Приведенное изложение вопроса принадлежит Джекиву и Препарате: **Jackiw R., Preparata G.** «Phys. Rev.», 1969, v. 85, p. 1929.
13. Уравнения (5.30), (5.31) и (5.33) были получены Джекивом и Препаратой [8, 12]. Одновременно Адлер и Ву-Ки Танг получили (5.32) и (5.33) [8]. Впервые коммутатор токов (5.32) был изучен в другой модели в работе А. И. Вайнштейна и Б. Л. Иоффе. «Письма в ЖЭТФ», 1967, т. 6, с. 917.
14. **Adler S. L., Wu-Ki Tung** (см. [8]).
15. Эти результаты принадлежат Джекиву и Препарате [12].

6.1. Аномалии в других задачах

Кроме представленных в последних двух главах много других коммутаторов было вычислено в теории возмущений с помощью определения БДЛ. Не будем обсуждать подробно эти вычисления, а просто приведем три особенно интересных вывода.

1. В введенной выше векторной глюонной модели связный матричный элемент ШЧ между однобозонными состояниями исчезает [1]:

$$\langle B | [J^0(t, x), J^i(t, y)] | B \rangle = 0. \quad (6.1)$$

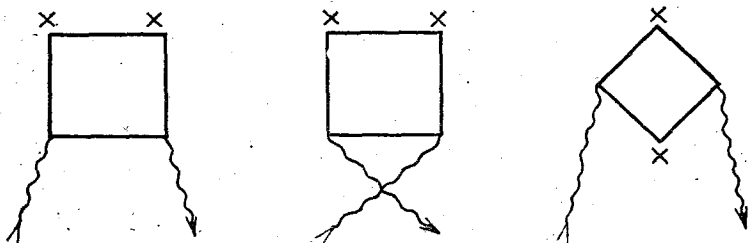


Рис. 9. Диаграммы, из которых определяется однобозонный матричный элемент ШЧ

Так как однофермионный матричный элемент ШЧ тоже равен нулю [см. (5.326)], это прямое указание на то, что ШЧ есть c -число. Соответствующая диаграмма (рис. 9), приводящая к (6.1) в высокоэнергетическом пределе, является амплитудой бозон-бозонного рассеяния вне массовой поверхности.

Более ранние расчеты методами, отличными от определения БДЛ, приводили к билинейному по бозонным полям q -числовому ШЧ [2]. Это показывает, что, как и предполагалось, разные расчеты ОВК могут приводить к отличающимся результатам. Однако только определение БДЛ представляется физически интересным.

2. В этой же модели было показано, что вакуумное среднее ШЧ — квадратично расходящаяся величина, пропорциональная первой производной δ -функции. Был также обнаружен конечный член, пропорциональный третьей производной δ -функции [3]:

$$[J^0(t, x), J^i(t, y)] = iS_1 \partial^i \delta(x - y) + iS_3 \partial^i \nabla^2 \delta(x - y), \quad (6.2)$$

где S_1 расходится квадратично; S_3 — конечная, хорошо определенная величина. Соответствующая диаграмма, приводящая к (6.2), является поляризацией вакуума (рис. 10).

Квадратичная расходимость S_1 связана с хорошо известной квадратичной расходимостью соответствующего фейнмановского интеграла. Существование конечного члена, включающего S_3 , также след-

стве квадратично расходящегося вклада. Член с тремя производными нарушает и операторное доказательство несуществования таких членов, приведенное в гл. 2 [см. (2.24)], и обычно применяемую формулу для вакуумного среднего ШЧ, выведенную в упражнении 3.2 (в этой формуле содержится только одна производная δ -функция) Ясно, что источник противоречий — квадратичная расходимость ОВК $[J^0, J^i]$. Когда коммутатор расходится, нельзя доказать ни равенство $S_{,3} = 0$, ни формулу упражнения 3.2 для вакуумного среднего ШЧ (см. упражнение 6.1).

Так как модель с векторным глюоном формально тождественна квантовой электродинамике при равной нулю массе бозона и так как ни один из обсуждавшихся здесь коммутаторов не зависит от массы бозона, то можно заключить, что в спиновой электродинамике ШЧ является c -числом, пропорциональным квадратично расходящемуся члену с первой производной δ -функции, и конечным c -числом, пропорциональным третьей производной δ -функции. Напомним, что все обсуждаемые расчеты выполнены в низшем нетривиальном порядке теории возмущений [4].

3. Тождество Якоби для трех пространственных компонент плотности тока не выполняется в общем случае в кварковой модели [5]. Непосредственные расчеты показывают, что

$$[J_a^\mu(t, x), [J_b^\nu(t, y), J_c^\omega(t, z)]] \neq [[J_a^\mu(t, x), J_b^\nu(t, y)], J_c^\omega(t, z)] + [J_b^\nu(t, y), [J_a^\mu(t, x), J_c^\omega(t, z)]] \quad (6.3)$$

Здесь μ, ν, ω — пространственные индексы. Двойной коммутатор также можно определить методом БДЛ (см. упражнение 6.2). Если бы тождества Якоби не нарушались аномалиями, то с их помощью можно было бы доказать, что ШЧ является q -числом [6]. Так как непосредственные расчеты показали, что ШЧ должен быть c -числом, приходится примириться теперь и с нарушением тождества Якоби.

6.2. Указания на существование аномалий вне рамок теории возмущений

Почти все расчеты, которые были проведены, чтобы установить существование коммутаторных аномалий, основаны на теории возмущений. Возникает важный вопрос: свойственны ли аномалии только теории возмущений или же они являются неотъемлемым свойством полной теории? Хотя наши знания о структуре полной локальной теории поля крайне ограничены, можно тем не менее утверждать, что все имеющиеся данные говорят о существовании аномалий и вне рамок теории возмущений.



Рис. 10. Диаграмма, из которой определяется вакуумное среднее ШЧ

Во-первых, необходимость существования ШЧ была установлена без обращения к теории возмущений. Следовательно, в теории с фермионами должны существовать по меньшей мере аномалии, связанные со ШЧ, хотя ШЧ и нельзя найти каноническими методами. Далее результаты пункта 3 параграфа 6.1 указывают на то, что аномалии должны быть достаточно сингулярны, так что или ШЧ является q -числом, или нарушается тождество Якоби.

Для существования других аномалий нет столь же общего обоснования, как для ШЧ. Однако ясно, что некоторые из аномалий должны присутствовать во всех порядках теории возмущений. Рассмотрим, например, амплитуду распада пиона вне массовой поверхности $T(k^2)$. В перенормированной теории возмущений это очень хорошо определенная и однозначная величина. Поэтому если $T(0)$ не исчезает в низшем порядке, то члены высших порядков не могут уничтожить первый неисчезающий результат при произвольной константе связи. Даже если ряд теории возмущений не сходится, трудно представить, чтобы полный ряд сходил к нулю для всех констант связи. Однако можно предположить существование другого решения теории, не имеющего аналога в теории возмущений. Подобную точку зрения нельзя отвергнуть, но ее обоснование требует дополнительных предположений. Важно то, что открытие аномалий доказало зависимость алгебры токов от непредвиденных, на первый взгляд, динамических предположений.

Что касается аномалий, связанных с высокоэнергетическими правилами сумм типа правила сумм Каллана — Гросса, то здесь вычисления в низших порядках менее надежны. Например, не исключено, что $\tilde{F}_L(\omega, \nu)$, которое должно исчезать при $\nu \rightarrow \infty$ в кварк-глюонной модели, ведет себя при больших ν как $g\omega^2\nu^{-a q^2}$, $a > 0$. В низшем порядке это исчезающая функция, но при $\nu \rightarrow \infty$ полная функция исчезает. Однако в проведенных в высших порядках расчетах $\tilde{F}_L(\omega, \nu)$ не было найдено никаких указаний на подобное затухание. Конечно, пока вычислены не все порядки, можно предполагать, что затухание все же возникает, но опять-таки это остается динамическим предположением*.

Другая группа аргументов в пользу аномалий возникает из нереалистических, но решаемых моделей. Было показано, что полные решения моделей Ли [8] и Тирринга [9] обладают аномалиями коммутаторов и дивергенций. Фундаментальной причиной возникновения аномалий в перенормируемой теории являются расходимости исходной неперенормированной теории. Никто не знает с определенностью, иллюзорны или нет эти расходимости, хотя все имеющиеся указания и говорят, что нет. Можно сослаться, например, на аксиоматический подход к теории поля. В рамках подхода найдено (хотя

* В неабелевых калибровочных теориях сильного взаимодействия $F_L(\omega, q^2)$ исчезает в скейлинговом пределе при $q^2 \rightarrow \infty$: $F_L(\omega, q^2)/F_2(\omega, q^2) \sim (\omega - 1)(\ln q^2/\mu^2)^{-1}$. (См. D. J. Gross, S. Treiman. «Phys. Rev. Lett.», 1974, v. 32, p. 1145). — *Прим. пер.*

и в нереалистическом двумерном пространстве — времени), что определенный тип расходимостей, существование которых строго доказано, правильно описывается теорией возмущений [10].

Возможно, некоторые аномалии действительно исчезают при специальной величине константы связи. Например, в спинорной электродинамике канонический коммутатор неперенормированных электромагнитных потенциалов

$$i [A^i(t, \mathbf{x}) - \partial^i A^0(t, \mathbf{x}), A^j(t, \mathbf{y})] = -g^{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (6.4)$$

можно сохранить и в полной теории, если неперенормированный заряд удовлетворяет некоторому соотношению [11]. Это соотношение записывается как условие исчезновения некоторой числовой функции неперенормированной константы (т. е. константа связи должна быть выбрана в нуле этой функции). К сожалению, неизвестно, имеется или нет нуль у соответствующей функции: вплоть до шестого порядка теории возмущений его нет. Более того, маловероятно, что все аномалии исчезнут, даже если соотношение для заряда и будет выполнено.

Можно надеяться, что нелинейные ограничения условия унитарности, которые не учитываются должным образом в теории возмущений, приводят к затуханию высокоэнергетического поведения различных функций Грина, так что разные неприятные результаты исчезают из полного решения. Предварительный анализ этой возможности привел к отрицательному выводу. Не было найдено никакого механизма затухания [12].

Возникновение аномалий в избранных тождествах Уорда можно понять следующим образом. Наивные тождества Уорда есть следствие соответствующих симметрий динамики. В теории поля, где динамика описывается лагранжианом, эти симметрии должны быть симметриями лагранжиана. Однако даже если функция Лагранжа, записанная через неперенормированные поля, и обладает соответствующей симметрией, решения теории могут и не обладать этой симметрией. Дело в том, что неперенормированный лагранжиан не является хорошо определенным из-за расходимостей неперенормированной теории. Хорошо определенная теория возникает только после регуляризации. Поэтому симметрия и тождества Уорда остаются только тогда, когда метод регуляризации не нарушает инвариантность. Типичная процедура регуляризации — введение в задачу регуляризующей массы, и необходимо предвидеть возможность нарушения симметрий, зависящих от отсутствия массовых членов, таких, как киральная симметрия или масштабная инвариантность (масштабная инвариантность обсуждается в следующей главе).

6.3. Модели без аномалий

Можно ли как-нибудь справиться с этими аномалиями, т. е. можно ли построить теорию, где все результаты совпадают с наивными? Этому вопросу были посвящены ограниченные исследования.

Анализ, проведенный в предыдущей главе в связи с ОВК $[\psi, J^i]$, указывает, как надо модифицировать теорию для сохранения наивного значения этого коммутатора. Очевидно, следует так модифицировать динамику, чтобы источник фермионного поля после коммутации с J^0 приводил не к градиентным членам, как в (5.35), а к наивному результату.

Другой пример возможной модификации относится к невыполнению теоремы Сазерленда — Вельтмана. Добавив прямое взаимодействие пиона с электромагнитным полем вида $\phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$, можно уничтожить отличную от нуля амплитуду распада для безмассового пиона, получив тем самым равную нулю амплитуду, как этого требуют формальные канонические правила. Альтернативой является введение нестандартной техники регуляризации, устраняющей отличную от нуля амплитуду. Но, по-видимому, все эти модификации ведут к неперенормируемым рядам теории возмущений [13].

6.4. Обсуждение результатов

Таким образом, если алгебра токов выводится из локальной теории поля, нельзя считать, что вычисления каноническими методами дают правильные результаты для коммутаторов токов и уравнений движения. Возможны аномалии двух типов: одни могут быть настолько сильными, что не только нарушается каноническая форма коммутаторов, но и должны быть модифицированы тождества Уорда; другие аномалии изменяют всего лишь коммутаторы. Открыты, вероятно, все такие случаи; они всегда связаны с аксиальным током [14]. Более слабые аномалии, которые не нарушают наивных тождеств Уорда, возникают, по-видимому, во всех коммутаторах, за исключением алгебры временных компонент. Поэтому результаты алгебры токов, следующие только из ОВК $[J_a^0, J_b^0]$, представляются надежными. В то же время правила сумм, основанные на алгебре пространственных компонент, были опровергнуты.

В конечном счете ответ на вопрос, существуют ли аномалии и в действительности, а не только в формальных построениях, следует искать экспериментально. Полученные экспериментальные предсказания крайне ограничены. Аномалии в тождествах Уорда используют гипотезу РСАС, и всегда остается опасность, что ошибка в гипотезе РСАС, а не в коммутаторах. Возможно, что экспериментальное невыполнение теоремы Сазерленда — Вельтмана обусловлено быстрым изменением $T(k^2)$ [15]. Тем не менее были предложены некоторые модельно-зависимые проверки, и было бы крайне интересно посмотреть, как они выполняются (см. параграф 4.7).

Как показывают правило сумм Каллана — Гросса и правило сумм для ПЧ, матричные элементы коммутаторов можно измерить экспериментально. К сожалению, если не считать нарушений тождеств Уорда, аномалиям подвергаются только те коммутаторы, которые были модельно-зависимыми на каноническом уровне. Поэтому если F_L экспериментально не исчезает, все равно нельзя узнать,

связано ли это с неканоническим значением ОВК или же кварковая модель, дающая канонически $F_L = 0$, неправильно отображает лежащую в ее основе динамику.

Наиболее положительным следствием аномалий остается то, что теорему Сазерленда — Вельтмана для распада π^0 -мезона можно обойти без введения загадочно быстрого изменения $T(k^2)$. В то же время не видно, чтобы аномалии имели какое-либо отношение к другим сомнительным предсказаниям алгебры токов и PCAC-распадам $\eta \rightarrow 3\pi$ и K_{l3} [16].

По-видимому, аномалии коммутаторов могут отсутствовать только в том случае, если коммутаторы токов входят в теорию независимо от лагранжевой теории поля. В настоящее время развиваются схемы нелагранжевого подхода к алгебре токов [17]:

Список литературы с комментариями

1. Boulware D. G., Jackiw R. «Phys. Rev.», 1969, v. 186, p. 1442.
2. Brandt R. A. «Phys. Rev.», 1968, v. 166, p. 1795. Брандт вычислил таким методом аномальный коммутатор (4.36), относящийся к теореме Сазерленда — Вельтмана, и получил результат, отличный от даваемого теоремой БДЛ: Brandt R. A. «Phys. Rev.», 1969, v. 180, p. 1490. Брандт использует технику раздвижки. Ток определяется через поля введением раздвижки ε : $J_\varepsilon^\mu(x) = \psi(x + \varepsilon/2)\gamma^\mu\psi(x - \varepsilon/2)$. Коммутатор вначале вычисляется для конечного ε , а затем ε кладется равным нулю:

$$[J^\mu(t, x), J^\nu(t, y)] = \lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0} [J_\varepsilon^\mu(t, x), J_{\varepsilon'}^\nu(t, y)].$$

Причина расхождения между этим расчетом и расчетом методом БДЛ была объяснена недавно в работе Chanowitz M. «Phys. Rev. D.», 1970, v. 2, p. 3016. Шеновиц заметил, что в обычных расчетах с раздвижкой к нулю устремляются вначале *временные* компоненты ε и ε' . После этого можно использовать канонические коммутаторы для вычисления коммутаторов токов, где токи определены все еще при *пространственной* раздвижке. Наконец, кладется равной нулю пространственная раздвижка. В то же время если коммутатор вначале вычисляется для неравных времен $\varepsilon_0 = \varepsilon'_0 \neq 0$, а затем ε_0 и ε'_0 кладутся равными нулю *после* исключения пространственной раздвижки, то получается результат БДЛ. Таким образом, согласно Шеновицу,

$$\begin{aligned} [J^\mu(t, x), J^\nu(t, y)]_{\text{БДЛ}} &= \lim_{\varepsilon_0, \varepsilon'_0 \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0} [J_\varepsilon^\mu(t, x), J_{\varepsilon'}^\nu(t, y)] \neq \\ &\neq \lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon_0, \varepsilon'_0 \rightarrow 0} [J_\varepsilon^\mu(t, x), J_{\varepsilon'}^\nu(t, y)]. \end{aligned}$$

Заметим, что в (4.47) техника раздвижки была использована для вычисления дивергенции аксиального тока, а не коммутатора. Возможность использования метода раздвижки в таких расчетах никогда не вызывала сомнений. Техника раздвижки критиковалась в работах Bell J. S., Jackiw R. «Nuovo cimento», 1969, v. 60, p. 47; Boulware D. G., Jackiw R. (см. [1]).

3. Boulware D. G., Jackiw R. (см. [1]), Brandt R. A. (см. [2]) тоже получили член с третьей производной, используя метод раздвижки.
4. Отсутствие q -числового ШЧ в спинорной электродинамике было отмечено также NagyIaki T. «Phys. Rev.», 1967, v. 158, p. 1534, и Boulware D. G., Herbert J. «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 1055.

5. Johnson K., Low F. E. «*Progr. Theor. Phys.*», Suppl., 1966, v. 37-38, p. 74. При всех временных компонентах $\mu = \nu = \omega = 0$ до сих пор не найдено никаких нарушений тождества Якоби.
6. «*Phys. Rev.*», 1966, v. 149, p. 1268. Auth.: Bucella F., Veneziano G., Catto R., Okubo S.
7. Jackiw R., Preparata G. «*Phys. Rev.*», 1969, v. 185, p. 1748; Adler S. L., Wu-Ki-Tung. «*Phys. Rev. D*», 1970, v. 1, p. 2846.
8. Bell J. S. «*Nuovo cimento A*», 1967, v. 47, p. 616.
9. Wilson K. «*Phys. Rev. D*», 1970, v. 2, p. 1473; Georgi H., Rawls J. «*Phys. Rev. D*», 1971, v. 3, p. 874; Shroer B., Lowenstein J. «*Phys. Rev. D*», 1971, v. 3, p. 1981.
10. См., например, обзор Hepp K. *Proceedings of the 8-th Nobel Symposium*. Ed. by N. Svartholm. Interscience, N. Y., Wiley, 1969.
11. Gell-Mann M., Low F. E. «*Phys. Rev.*», 1954, v. 95, p. 1300; Baker M., Johnson K. «*Phys. Rev.*», 1969, v. 183, p. 1292.
12. Bitar K., Khuri N. «*Phys. Rev. D*», 1971, v. 3, p. 462.
13. Нестандартная техника регуляризации обсуждалась Беллом и Джекивом [2]. Наблюдение, что эти методы могут привести к бесконечностям, принадлежат Адлеру: Adler S. L. «*Phys. Rev.*», 1969, v. 177, p. 2426. Неминимальная связь введена в работе Jackiw R., Johnson K. «*Phys. Rev.*», 1969, v. 182, p. 1459. См. также Dolgov A. D., Zakharov V. I. «*Nucl. Phys. B*», 1971, v. 27, p. 525.
14. Wilson K. «*Phys. Rev.*», 1969, v. 181, p. 1909; Gerstein I., Jackiw R. «*Phys. Rev.*», 1969, v. 181, p. 1955; Bardeen W. «*Phys. Rev.*», 1969, v. 184, p. 1849; Brown R. W., Shih C.-C., Young B.-L. «*Phys. Rev.*», 1969, v. 186, p. 1491; Amati D., Bouchiat G., Gervais J. L. «*Nuovo cimento A*», 1970, v. 65, p. 55.
15. Brandt R. A., Preparata G. «*Ann. Phys*» (N. Y.), 1970, v. 61, p. 119, предложили необычную интерпретацию PCAC, в которой столь быстрые изменения возможны.
16. Для обоих процессов алгебра токов и PCAC предсказывают подавление определенных величин. Экспериментально же нет никакого подавления. О распаде $\eta \rightarrow 3\pi$ см. Sutherland D. G. «*Nucl. Phys. B*», 1967, v. 2, p. 433; о распадах K_L см. Callan C. G., Treiman S. B. «*Phys. Rev. Lett.*», 1966, v. 16, p. 153. Недавно Вилсоном было предложено новое специфическое объяснение невыполнения PCAC в проблеме η -распада; об этом см. Wilson K. «*Phys. Rev.*», 1969, v. 179, p. 1499. Брандт и Препарата (см. [15]) и «*Nuovo cimento Lett.*», 1970, v. 4, p. 80) предложили необычную трактовку PCAC и нарушения $SU(3) \times SU(3)$ -симметрии, которая позволяет избежать этих проблематичных предсказаний. Критику такой модели см. в работе Weinstein M. «*Phys. Rev. D*», 1971, v. 3, p. 481.
17. Wilson K. (см. [16]).
- 17*. Поляков А. М. «*Журн. эксперим. и теор. физ.*», 1974, т. 66, с. 23.

ГЛАВА 7

ПРИБЛИЖЕННАЯ МАСШТАБНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

7.1. Вводная часть

Экспериментальное обнаружение скейлинга в электророждении пробудило новый интерес к старой идее о том, что при высоких энергиях можно пренебречь массами, и поэтому возникает новая симметрия — симметрия относительно скейлинговых или масштабных преобразований. Посмотрим, как экспериментальные данные могут привести к обсуждению масштабных преобразований.

Как было показано в гл. 5, в электророждении измеряется коммутаторная функция:

$$C^{\mu\nu}(q, p) = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} \exp(iqd) \langle p | [J^\mu(x), J^\nu(0)] | p \rangle = \\ = - \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \tilde{F}_1 + \left(p^\mu - q^\mu \frac{pq}{q^2} \right) \left(p^\nu - q^\nu \frac{pq}{q^2} \right) \frac{\tilde{F}_2}{pq}. \quad (7.1)$$

Можно убедиться, что \tilde{F}_i безразмерны (см. упражнение 7.1) (напомним, что все величины измеряются в единицах размерности массы: $\hbar = c = 1$). \tilde{F}_i зависят от кинематических переменных q^2 и ν . Их можно считать также функциями размерных параметров, определяющих фундаментальную динамику процесса. Примерами таких дополнительных параметров являются массы фундаментальных частиц теории. Может быть и так, что фундаментальная теория, определяющая физические процессы, характеризуется размерной константой связи. Однако гипотеза, позволяющая перейти от экспериментального скейлинга в функциях \tilde{F}_i к теоретическому обсуждению масштабной инвариантности, состоит в том, что в теории нет никаких размерных констант связи. В этом случае функции \tilde{F}_i зависят только от q^2 , ν и масс m^2 ; так как эти функции безразмерны, они должны зависеть от этих переменных только в виде безразмерных отношений: $\tilde{F}_i = \tilde{F}_i(q^2/m^2, \nu/m^2, \dots)$. Здесь m^2 — любая из масс задачи, и многоточие обозначает отношения других возможных масс. Говорят, что m^2 «устанавливает масштаб» в задаче.

Когда кинематические переменные q^2 и ν велики, то удобно предположить, что зависимость \tilde{F}_i от масс незначительна. Тогда глубокоупругий предел (когда и q^2 , и ν велики) эквивалентен пределу равной нулю массы. В этом случае \tilde{F}_i становятся функциями только безразмерного отношения q^2/ν , и именно это наблюдается экспериментально. Когда нет других размерных параметров, кроме кинематических величин q^2 и ν , то нет и масштаба для измерения q^2 и ν . Ясно, что одновременное изменение масштаба q^2 и ν оставляет q^2/ν неизменным. В координатном пространстве это отвечает изменению масштаба длины x ; в отсутствие размерных параметров подобное изменение масштаба оставляет теорию инвариантной. Таким образом, приходим к преобразованиям растяжения или скейлинга: $x^\mu \rightarrow \exp(-\rho) x^\mu$.

В следующем разделе будет сформулирована каноническая теория как этих, так и связанных с ними конформных преобразований. Будут вычислены токи, сохраняющиеся в случае симметрии. Затем будет показано, что каноническая теория ведет к тождествам Уорда, которые можно использовать для вывода теорем о высокоэнергетическом поведении функций Грина. Наконец, будет показано, что в теории возмущений эти результаты неверны — имеются аномалии, нарушающие их [1].

7.2. Каноническая теория масштабных и конформных преобразований

Масштабное преобразование координат меняет x^μ на $x^\mu \exp(-\rho)$. Это преобразование того же класса, что и трансляция $x^\mu \rightarrow x^{\mu 1} = x^\mu + a^\mu$, или преобразование Лоренца $x^\mu \rightarrow x^{\mu 1} = \Lambda^{\mu\nu} x^\nu$. По причинам, которые вскоре будут очевидны, рассмотрим также конформное преобразование координат $x^\mu \rightarrow x^{\mu 1} = (x^\mu - c^\mu x^2) \times \times (1 - 2cx + c^2 x^2)^{-1}$. Здесь ρ , a^μ , $\Lambda^{\mu\nu}$ и c^μ — параметры, определяющие дилатацию (растяжение), трансляцию, преобразование Лоренца и конформное преобразование соответственно. В инфинитезимальной форме эти преобразования имеют вид:

$$\text{трансляция: } \delta_T^\alpha x^\mu = g^{\alpha\mu}; \quad (7.2a)$$

$$\text{преобразование Лоренца: } \delta_L^{\alpha\beta} x^\mu = g^{\alpha\mu} x^\beta - g^{\beta\mu} x^\alpha; \quad (7.2б)$$

$$\text{дилатация: } \delta_D x^\mu = -x^\mu; \quad (7.2в)$$

$$\text{конформное преобразование: } \delta_c^\alpha x^\mu = 2x^\alpha x^\mu - g^{\alpha\mu} x^2. \quad (7.2г)$$

При записи формул (7.2) опущены сами бесконечно малые параметры преобразований (аналогично будем поступать и в дальнейшем).

Набор из 15 преобразований (7.2) образует 15-параметрическую группу Ли, называемую конформной группой. Она является обобщением 10-параметрической группы Пуанкаре, образуемой 10 преобразованиями (7.2a) и (7.2б). Рассмотрев действие преобразований в различных порядках, можно построить алгебру Ли группы. Обозначив P^α , $M^{\alpha\beta}$, D и K^α соответственно генераторы трансляции, преобразований Лоренца, дилатаций и конформных преобразований, получаем:

$$i [P^\alpha, P^\beta] = 0; \quad (7.3a)$$

$$i [M^{\alpha\beta}, P^\nu] = g^{\alpha\nu} P^\beta - g^{\beta\nu} P^\alpha; \quad (7.3б)$$

$$i [M^{\alpha\beta}, M^{\mu\nu}] = g^{\alpha\mu} M^{\beta\nu} - g^{\beta\mu} M^{\alpha\nu} + g^{\alpha\nu} M^{\mu\beta} - g^{\beta\nu} M^{\mu\alpha}; \quad (7.3в)$$

$$i [D, P^\alpha] = P^\alpha; \quad (7.3г)$$

$$i [D, K^\alpha] = -K^\alpha; \quad (7.3д)$$

$$i [M^{\alpha\beta}, K^\nu] = g^{\alpha\nu} K^\beta - g^{\beta\nu} K^\alpha; \quad (7.3е)$$

$$i [P^\alpha, K^\beta] = -2g^{\alpha\beta} D + 2M^{\alpha\beta}; \quad (7.3ж)$$

$$i [D, D] = i [D, M^{\alpha\beta}] = i [K^\alpha, K^\beta] = 0. \quad (7.3з)$$

Первые три коммутатора определяют алгебру Ли группы Пуанкаре. При записи коммутаторов (7.3д) — (7.3з) вовсе не утверждаем, что они реализуются в природе. Они попросту отражают правила комбинирования преобразований (7.2). Действительно, коммутатор (7.3г) противоречит обычной физике. Если бы равенство (7.3г) выполнялось в действительности, то $\exp(i\alpha D) P^2 \exp(i\alpha D) = \exp(2\alpha) P^2$, а это означает, что либо спектр масс непрерывен, либо все массы исчезают. Ни то, ни другое неприемлемо [3].

Прежде чем получить условия, при которых лагранжиан \mathcal{L} , зависящий от полей φ , масштабно- или конформно-инвариантен, нужно решить, как преобразовывать поля φ при растяжении и конформном преобразовании. Для трансляций и преобразований Лоренца правила обычные:

$$\delta_T^\alpha v(x) = i [P^\alpha, \varphi(x)] = \partial^\alpha \varphi(x); \quad (7.4a)$$

$$\delta_L^{\alpha\beta} \varphi(x) = i [M^{\alpha\beta}, \varphi(x)] = (x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha + \Sigma^{\alpha\beta}) \varphi(x). \quad (7.4б)$$

Для остальных операций примем следующие преобразования, согласующиеся с (7.3):

$$\delta_D \varphi(x) = (d + x^\alpha \partial_\alpha) \varphi(x); \quad (7.4в)$$

$$\delta_C^\alpha \varphi(x) = (2x^\alpha x^\nu - g^{\alpha\nu} x^2) \partial_\nu \varphi(x) + 2x_\nu (g^{\nu\alpha} d - \Sigma^{\nu\alpha}) \varphi(x). \quad (7.4г)$$

Здесь d — константа, называемая размерностью поля φ .

Теперь легко, следуя правилам, сформулированным в гл. 2, найти изменение \mathcal{L} :

$$\delta_D \mathcal{L} = \partial_\nu [x^\nu \mathcal{L}] = 4\mathcal{L} + \pi_\mu (d+1) \varphi^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} d\varphi; \quad (7.5a)$$

$$\delta_C^\alpha \mathcal{L} = \partial_\nu [(2x^\alpha x^\nu - g^{\alpha\nu} x^2) \mathcal{L}] + 2x^\alpha \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} d\varphi + \pi_\mu (d+1) \varphi^\mu - \right. \\ \left. - 4\mathcal{L} \right] + V^\mu. \quad (7.5б)$$

V^μ называется вириалом поля и дается формулой

$$V^\mu = \pi_\alpha [g^{\alpha\mu} d - \Sigma^{\alpha\mu}] \varphi. \quad (7.6)$$

При выводе (7.5) использовалась инвариантность \mathcal{L} относительно трансляций и преобразований.

Из (7.5a) видно, что инвариантность относительно растяжений требует

$$-4\mathcal{L} + \pi_\mu (d+1) \varphi^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} d \cdot \varphi = 0. \quad (7.7)$$

Если d выбрано равным $3/2$ для фермионного поля и 1 для бозонного, то кинетические части лагранжианов удовлетворяют (7.7). Эти значения d отвечают естественным размерностям полей в единицах массы. Как легко видеть, (7.7) требует, чтобы размерность \mathcal{L} равнялась 4, т. е. в \mathcal{L} не должно быть никаких размерных параметров. Ясно, что массовые члены нарушают (7.7). Примерами взаимодействий, удовлетворяющих (7.7), являются φ^4 или $\psi\psi\varphi$.

Уравнение (7.5б) показывает, что для конформной инвариантности нужны два условия. Во-первых, должна выполняться масштабная инвариантность. Это видно уже из (7.3): если P^α , K^β и $M^{\alpha\beta}$ являются генераторами симметрии, то же относится и к D . Во-вторых, вириал поля должен быть полной дивергенцией:

$$V^\mu = \partial_\alpha \sigma^{\alpha\mu}. \quad (7.8)$$

Примечательно, что (7.8) справедливо во всех перенормируемых теориях, хотя масштабная инвариантность, конечно, нарушается. Уравнение (7.8) выполняется также во всех теориях со спинами меньше 1 без градиентных связей. Следовательно, как только принята модель нарушения масштабной симметрии, автоматически получается и модель нарушения конформной симметрии.

Токи, связанные с этими преобразованиями, определяются теперь с помощью общей техники (см. гл. 2). Канонический дилатационный ток D_C^μ и канонический конформный ток $K_C^{\alpha\mu}$ равны:

$$D_C^\mu = x_\alpha \theta_C^{\mu\alpha} + \pi^\mu d\varphi; \quad (7.9a)$$

$$K_C^{\alpha\mu} = (2x^\alpha x_\nu - g_\nu^\alpha x^2) \theta_C^{\nu\mu} + 2x_\nu \pi^\mu (g^{\nu\alpha} d - \Sigma^{\nu\alpha}) - 2\sigma_C^{\alpha\mu}. \quad (7.9b)$$

Заметим, что токи выражаются через канонический тензор энергии — импульса $\theta_C^{\alpha\mu}$. Как показано в гл. 2, тензор Белинфанте $\theta_B^{\mu\beta}$ имеет больший физический смысл, чем $\theta_C^{\mu\alpha}$, так что (7.9) надо переписать через $\theta_B^{\mu\alpha}$. Подставляя в (7.9) формулу для $\theta_C^{\mu\alpha}$ через $\theta_B^{\mu\alpha}$ и соответствующий суперпотенциал (2.17), получаем после длинных выкладок:

$$D_C^\mu = x_\alpha \theta_B^{\mu\alpha} + V_\mu^\dagger + \partial_\beta X^{\beta\mu}; \quad (7.10a)$$

$$K_C^{\alpha\mu} = (2x^\alpha x_\nu - g_\nu^\alpha x^2) \theta_B^{\nu\mu} + 2x^\alpha \partial_\nu \sigma_{\dagger}^{\nu\mu} - 2\sigma_{\dagger}^{\alpha\mu} + \partial_\beta X^{\beta\mu\alpha}. \quad (7.10b)$$

Здесь $\sigma_{\dagger}^{\mu\nu}$ — симметричная часть $\sigma^{\mu\nu}$; $X^{\beta\mu}$ и $X^{\beta\mu\alpha}$ — величины, которые можно записать явно. Так как и $X^{\beta\mu}$, и $X^{\beta\mu\alpha}$ антисимметричны по β и μ , их можно опустить без всякой потери физического содержания токов. Таким образом, конформный и дилатационный токи Белинфанте имеют вид:

$$D_B^\mu = x_\alpha \theta_B^{\mu\alpha} + V_\mu; \quad (7.11a)$$

$$K_B^{\alpha\mu} = (2x^\alpha x_\nu - g_\nu^\alpha x^2) \theta_B^{\nu\mu} + 2x^\alpha \partial_\nu \sigma_{\dagger}^{\nu\mu} - 2\sigma_{\dagger}^{\alpha\mu}. \quad (7.11b)$$

Их можно еще упростить: Вместо тензора Белинфанте при обсуждении трансляционной и лоренц-инвариантностей можно использовать новый, улучшенный тензор $\theta^{\mu\alpha}$ [2]. Эта величина получается, если добавить к $\theta_B^{\mu\alpha}$ суперпотенциал:

$$\theta^{\mu\alpha} = \theta_B^{\mu\alpha} + (1/2) \partial_\lambda \partial_\rho X^{\alpha\rho\mu\nu}; \quad (7.12a)$$

$$X^{\alpha\rho\mu\nu} = g^{\lambda\rho} \sigma_{\dagger}^{\mu\nu} - g^{\lambda\mu} \sigma_{\dagger}^{\rho\nu} - g^{\lambda\nu} \sigma_{\dagger}^{\mu\rho} + g^{\mu\nu} \sigma_{\dagger}^{\rho\lambda} - (1/3) g^{\lambda\rho} g^{\mu\nu} \sigma_{\dagger}^{\alpha}{}_{+\alpha} + (1/3) g^{\lambda\mu} g^{\rho\nu} \sigma_{\dagger}^{\alpha}{}_{+\alpha}. \quad (7.12b)$$

Дополнительный суперпотенциал не меняет ни сохранения, ни свойст симметрии $\theta^{\mu\alpha}$ и не дает вклада в генераторы трансляции и преобразований Лоренца. Поэтому $\theta^{\mu\alpha}$ можно использовать вместо $\theta_B^{\mu\alpha}$ как ток Пуанкаре. Для записи дилатационного и кон-

формного токов $\theta^{\mu\alpha}$ удобнее, чем $\theta_B^{\mu\alpha}$. Токи Белинфанте записываются через $\theta^{\mu\alpha}$ как

$$D_B^\mu = x_\alpha \theta^{\mu\alpha} + \partial_\beta Y^{\beta\mu}; \quad (7.13a)$$

$$K_B^{\alpha\mu} = [2x^\alpha x_\nu - g_\nu^\alpha x^2] \theta^{\nu\mu} + \partial_\beta Y^{\beta\mu\alpha}. \quad (7.13b)$$

Полные дивергенции в (7.13) являются суперпотенциалами, их можно опустить. Тогда получим окончательное выражение для токов:

$$D^\mu = x_\alpha \theta^{\mu\alpha}; \quad (7.14a)$$

$$K^{\mu\alpha} = [2x^\alpha x_\nu - g_\nu^\alpha x^2] \theta^{\nu\mu}. \quad (7.14b)$$

Кроме простоты записи токов через $\theta^{\nu\alpha}$ новый тензор обладает еще одним преимуществом. Можно показать, что в перенормированной теории возмущений его матричные элементы менее сингулярны, чем у $\theta_B^{\nu\alpha}$ [2].

Дивергенция этих токов выражается через след $\theta^{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu D^\mu = \theta_\mu^\mu; \quad (7.15a)$$

$$\partial_\mu K^{\mu\alpha} = 2x^\alpha \theta_\mu^\mu = 2x^\alpha \partial_\mu D^\mu. \quad (7.15b)$$

Таким образом, отличие θ_μ^μ от нуля нарушает как масштабную, так и конформную симметрию (в теориях, где $V^\mu = \partial_\alpha \sigma^{\alpha\mu}$). В последующем всегда считаем θ_μ^μ отличным от нуля благодаря массовым членам в \mathcal{L} . Поэтому конформная и масштабная симметрии нарушены, как и должно быть во избежание физически бессмысленного спектра масс [3].

Непосредственные расчеты показывают, что V^μ и $\sigma^{\alpha\mu}$ — тождественные нули для полей со спином 1/2 и 1. Для полей со спином нуль

$$V^\mu = \pi^\mu \phi = \phi^\mu \phi = (1/2) \partial^\mu \phi^2; \quad (7.16a)$$

$$\sigma^{\alpha\mu} = (1/2) g^{\alpha\mu} \phi^2. \quad (7.16b)$$

Теперь можно написать явную формулу для $\theta^{\mu\nu}$:

$$\theta^{\mu\nu} = \theta_B^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{\text{поля со} \\ \text{спином} \\ \text{нуль}}} (\partial^\mu \partial^\nu - g^{\mu\nu} \square) \phi^2. \quad (7.17)$$

Суммирование идет только по полям со спином нуль. Их выделенная роль до сих пор остается непонятной.

В теории преобразований можно использовать любой из тензоров энергии — импульса: $\theta_C^{\mu\alpha}$, $\theta_B^{\mu\alpha}$ или $\theta^{\mu\alpha}$. Использование именно $\theta^{\mu\alpha}$ придает особое значение этой величине. Как обсуждалось в гл. 2, тензор энергии — импульса играет особую роль в теории гравитационных взаимодействий. В обычной теории гравитации Эйнштейна источником гравитонов является $\theta_B^{\mu\alpha}$. Если работать с $\theta^{\mu\alpha}$, то следует изменить теорию, чтобы источником был $\theta^{\mu\alpha}$. По-

добная модификация была проделана, и модифицированная теория согласуется со всеми имеющимися проверками теории относительности [4].

Заряды

$$D(t) = \int d^3x x_\mu \theta^{\mu 0}(x); \quad (7.18a)$$

$$K^\alpha(t) = \int d^3x [2x^\alpha x_\nu - g_\nu^\alpha x^2] \theta^{\nu 0}(x) \quad (7.18b)$$

в отсутствие симметрии не являются лоренц-ковариантами. Они также не удовлетворяют алгебре (7.3) (см. упражнение 7.2). Несмотря на это, $D(t)$ и $K^\alpha(t)$ дают соответствующие преобразования полей и в отсутствие симметрии (см. упражнение 7.3):

$$i [D(t), \varphi(x)] = \delta_D \varphi(x); \quad (7.19a)$$

$$i [K^\alpha(t), \varphi(x)] = \delta_K^\alpha \varphi(x). \quad (7.19b)$$

7.3. Тождества Уорда и соотношения для следа

Выше предполагалось, что θ_μ^μ дается в лагранжевой модели массовыми членами: так, когда имеются фермион с массой m и бозон с массой μ , то $\theta_\mu^\mu = m\bar{\psi}\psi + \mu^2\varphi^2$. Очевидно, что дивергенция дилатационного тока — гладкий оператор; размерность операторов, возникающих в θ_μ^μ , не выше трех. Сейчас возможны два приложения к физике обсуждаемых идей. Можно попытаться повторить успех РСАС: предположить доминантность вклада скалярных мезонов в матричные элементы θ_μ^μ и объяснить низкоэнергетическую динамику этих мезонов [5]. Не будем обсуждать эту точку зрения, а обратимся ко второму из возможных приложений: определению высокоэнергетического поведения функций Грина. Для определенности рассмотрим двухточечную функцию — перенормированный пропагатор.

Вывод следствий из гипотез о нарушении масштабной и конформной инвариантностей проще всего достигается с помощью тождеств Уорда, которым удовлетворяют D^μ и $K^{\mu\alpha}$. Так как эти токи связаны простым образом с тензором энергии — импульса, то полезно рассмотреть тождества Уорда для матричных элементов $\theta^{\mu\nu}$. Выведем эти тождества.

Для этого понадобится коммутатор $\theta^{\mu\nu}$ с перенормированным полем размерности d . При весьма общих предположениях можно показать, что

$$i [\theta^{30}(0, x), \varphi(0)] = \partial^0 \varphi(0) \delta(x) + \Sigma^{0i} \varphi(0) \partial_i \delta(x); \quad (7.20a)$$

$$i [\theta^{0i}(0, x), \varphi(0)] = \partial^i \varphi(0) \delta(x) - (d/3) \varphi(0) \partial^i \delta(x) + \\ + (1/2) \Sigma^{ij} \varphi(0) \partial_j \delta(x). \quad (7.20b)$$

Это формальные канонические коммутаторы. Нельзя утверждать, что они справедливы в теории возмущений. Так как коммутатор

$\theta^{\mu\nu}$ с φ с необходимостью содержит градиентные части, то T -произведение $\theta^{\mu\nu}$ и φ нековариантно. Для получения ковариантного T^* -произведения необходимо добавить контактный член.

Рассмотрим

$$F_{ij}^{\mu\nu}(p, q) = \int d^4x d^4y \exp(iqx) \exp(ipy) \langle 0 | T^* \theta^{\mu\nu}(x) \varphi_i(y) \varphi_j(0) | 0 \rangle = \\ = \int d^4x d^4y \exp(iqx) \exp(ipy) \langle 0 | T \theta^{\mu\nu}(x) \varphi_i(y) \varphi_j(0) | 0 \rangle + \tau_{ij}^{\mu\nu}(p, q); \quad (7.21)$$

$$F_{ij}(p, q) = \int d^4x d^4y \exp(iqx) \exp(ipy) \langle 0 | T \theta_{\mu}^{\mu}(x) \varphi_i(y) \varphi_j(0) | 0 \rangle \quad (7.22).$$

Здесь индексы i и j обозначают поля, они могут быть как пространственно-подобными индексами, так и внутренними. Предполагается, что в силу гладкости θ_{μ}^{μ} в его матричных элементах контактные члены не требуются. Контактный член можно выразить через известные коммутаторы (7.20) методами, изложенными в гл. 2. Как только он определен, можно вывести тождество Уорда. Опустим детали вывода и запишем результат [6]:

$$q_{\mu} F_{ij}^{\mu\nu}(p, q) = ip^{\nu} G(p) - i(p+q)^{\nu} G(p+q) + \\ + \frac{i}{2} q_{\mu} \Sigma_{ii'}^{\mu\nu} G_{i'j}(p+q) + \frac{i}{2} q_{\mu} \Sigma_{jj'}^{\mu\nu} G_{ij'}(p). \quad (7.23)$$

Тождество для следа имеет вид

$$g_{\mu\nu} F_{ij}^{\nu\mu}(p, q) = F_{ij}(p, q) - i d G_{ij}(p+q) - i d G_{ij}(p). \quad (7.24)$$

Дополнительные к F_{ij} члены в (7.24) возникают из следа $\tau_{ij}^{\mu\nu}$. В уравнениях (7.23) и (7.24) G_{ij} является перенормированным пропагатором:

$$G_{ij}(p) = \int d^4x \exp(ipx) \langle 0 | T \varphi_i(x) \varphi_j(0) | 0 \rangle. \quad (7.25)$$

Формулы (7.23) и (7.24) содержат все ограничения, которые различные пространственно-временные преобразования (лоренцевы, масштабное и конформное) накладывают на пропагатор. (Для изучения n -частичной функции Грина надо было бы рассмотреть матричный элемент $\theta^{\mu\nu}$ с n полями.) Как только будет выбрана модель нарушения масштабной симметрии, можно получить теоремы для $G(p)$. Покажем, как из (7.23) и (7.24) получаются ограничения на пропагатор.

1. Лоренцевы преобразования. Продифференцируем (7.23) по q_{α} и положим $q = 0$. Тогда

$$F_{ij}^{\alpha\nu}(p, 0) = -i g^{\alpha\nu} G_{ij}(p) - ip^{\nu} \frac{\partial}{\partial p^{\alpha}} G_{ij}(p) + \frac{i}{2} \Sigma_{ii'}^{\alpha\nu} G_{i'j}(p) + \\ + \frac{i}{2} \Sigma_{jj'}^{\alpha\nu} G_{ij'}(p). \quad (7.26)$$

Так как $F_{ij}^{\alpha\nu}$ симметрично по α и ν , то из (7.26) видно, что

$$\left[p^\nu \frac{\partial}{\partial p_\alpha} - p^\alpha \frac{\partial}{\partial p_\nu} \right] G_{ij}(p) = \Sigma_{ii'}^{\alpha\nu} G_{i'j}(p) + \Sigma_{jj'}^{\alpha\nu} G_{ij'}(p). \quad (7.27)$$

Это хорошо известное и тривиальное ограничение лоренц-ковариантности.

Масштабные преобразования. Образует след (7.26) и, опуская индексы, запишем

$$g_{\mu\nu} F^{\mu\nu}(p, 0) = -4iG(p) - ip^\alpha \frac{\partial}{\partial p^\alpha} G(p). \quad (7.28a)$$

Комбинируя (7.28a) и (7.24) при $q = 0$, имеем

$$F(p, 0) = i(2d - 4)G(p) - ip^\alpha \frac{\partial}{\partial p^\alpha} G(p). \quad (7.28б)$$

Это накладывает ограничение на $G(p)$, если известно $F(p, 0)$, т. е. если имеется модель нарушения скейлинговой симметрии.

3. Конформные преобразования. Вычислим производную

$$2 \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \frac{\partial}{\partial q^\nu} - g_{\alpha\nu} \frac{\partial}{\partial q^\beta} \frac{\partial}{\partial q_\beta}$$

и положим $q = 0$. Тогда получим

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial q_\alpha} g_{\mu\nu} F_{ij}^{\mu\nu}(p, q) \Big|_{q=0} &= -8i \frac{\partial}{\partial p_\alpha} G_{ij}(p) - 2ip_\beta \frac{\partial}{\partial p_\beta} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} G_{ij}(p) = \\ &= ip^\alpha \frac{\partial}{\partial p^\beta} \frac{\partial}{\partial p_\beta} G_{ij}(p) + 2i \Sigma_{ii'}^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial p_\beta} G_{i'j}(p). \end{aligned} \quad (7.29a)$$

Левая часть (7.29a) может быть найдена из (7.24). После перегруппировки членов имеем

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial q_\alpha} F_{ij}(p, q) \Big|_{q=0} &= i(2d - 8) \frac{\partial}{\partial p_\alpha} G_{ij}(p) - 2ip_\beta \frac{\partial}{\partial p_\beta} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} G_{ij}(p) + \\ &+ ip^\alpha \frac{\partial}{\partial p^\beta} \frac{\partial}{\partial p_\beta} G_{ij}(p) + 2i \Sigma_{ii'}^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial p_\beta} G_{i'j}(p). \end{aligned} \quad (7.29б)$$

Это уравнение можно упростить с помощью (7.27) и (7.28б). Сначала при переходе от (7.28б) к (7.29б) исключается d :

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial q_\alpha} F_{ij}(p, q) \Big|_{q=0} - \frac{\partial}{\partial p_\alpha} F_{ij}(p, 0) &= \\ = i \frac{\partial}{\partial p^\beta} \left[p^\alpha \frac{\partial}{\partial p_\beta} G_{ij}(p) - p^\beta \frac{\partial}{\partial p_\alpha} G_{ij}(p) + 2 \Sigma_{ii'}^{\alpha\beta} G_{i'j}(p) \right]. \end{aligned} \quad (7.29в)$$

Затем используем (7.27):

$$2 \frac{\partial}{\partial q_\alpha} F_{ij}(p, q) \Big|_{q=0} - \frac{\partial}{\partial p_\alpha} F_{ij}(p, 0) = \\ = i \frac{\partial}{\partial p_\beta} \left[\sum_{i'j'}^{\alpha\beta} G_{i'j'}(p) - \sum_{j'j''}^{\alpha\beta} G_{ij''}(p) \right]. \quad (7.29)$$

Уравнение (7.29г) накладывает ограничения на G , следующие из модели нарушения конформной симметрии.

7.4. Ошибочные теоремы

Ограничения (7.28б) и (7.29г) бессодержательны, пока не выбрана F , нарушающее симметрию. Покажем, что если для F принята каноническая модель θ_μ^μ , содержащего только массовые члены, и если, более того, для d взято каноническое значение, то получается теорема для G , которая противоречит прямым расчетам. Обсудим только нарушенную масштабную инвариантность, без всяких ссылок на конформные преобразования.

Рассмотрим для определенности пропагатор бесспинового поля с массой μ и масштабнo-инвариантным взаимодействием $\lambda\phi^4$. Пропагатор можно записать как

$$G(p) = (i/p^2) g(p^2/\mu^2). \quad (7.30)$$

Из (7.28б) найдем, что g удовлетворяет уравнению

$$(p^2/2) F(p, 0) = (p^2/\mu^2) g'(p^2/\mu^2) + (1-d) g(p^2/\mu^2). \quad (7.31)$$

Можно ожидать, что при $\mu^2 \rightarrow 0$ левая часть (7.31) исчезает, так как она является матричным элементом θ_μ^μ , формально равного $\mu^2\phi^2$. Для правой части равенства предел $\mu^2 \rightarrow 0$ эквивалентен пределу $p^2 \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\lim g(p^2/\mu^2) \sim (p^2/\mu^2)^{d-1}. \quad (7.32)$$

Так как для бозонного поля $d = 1$, то пропагатор бозона ведет себя как $1/p^2$ при больших p^2 .

Этот результат заведомо ошибочен в теории возмущений, где в асимптотической области есть логарифмические члены. Следовательно, надо отвергнуть те шаги, которые привели из правильного (по определению) уравнения (7.31) к ошибочному результату, т. е. нельзя считать, что $d = 1$ и что F исчезает с массой.

7.5. Правильные теоремы

Подробные расчеты в теории возмущений в низшем нетривиальном порядке по взаимодействию приводят к следующим результатам. Возможность исчезновения F с массой сохраняется. Однако d отличается от своего канонического значения $d = 1$. Чтобы показать

изменение d , рассмотрим определение этой величины:

$$i [D(0), \varphi(0)] = i \int d^3x x_i [\theta^{0i}(0, \mathbf{x}), \varphi(0)] = d\varphi(0). \quad (7.33)$$

Коммутатор вычисляется согласно определению БДЛ. Применив технику БДЛ к $F^{\mu\nu}(p, q)$, получим

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial q^i} q_0 F^{0i}(p, q) \Big|_{q=0} = idG(p). \quad (7.34)$$

Правильное значение d можно найти из высокоэнергетического поведения $F^{\mu\nu}$. Непосредственный расчет в низшем порядке дает

$$d = 1 + c\lambda^2, \quad (7.35)$$

где c — хорошо определенная числовая константа. Подставляя это значение d в уравнение (7.32), которое остается справедливым в низшем порядке, так как F исчезает с массами, получаем

$$\lim_{p^2 \rightarrow \infty} g(p^2/\mu^2) \sim (p^2/\mu^2)^{c\lambda^2} \sim 1 + c\lambda^2 \ln p^2/\mu^2. \quad (7.36)$$

Расчеты пропагатора в этом порядке приводят к (7.36) с тем же коэффициентом c . Были проведены расчеты для нескольких моделей, и во всех случаях в низшем порядке вывод один и тот же: хотя нарушающий скейлинг член исчезает с массами, размерность меняется, и коэффициент c в формуле (7.35) всегда совпадает с коэффициентом c в формуле (7.36) для логарифмической поправки к пропагатору [7].

Асимптотики функций Грина в высших порядках были изучены как с помощью прямых расчетов, так и с помощью общего анализа структуры диаграмм Фейнмана [8]. Общие результаты сводятся к тому, что d отлично от своего канонического значения*. Однако F не исчезает с массами, т. е. масштабная симметрия нарушается членами, отличными от массовых. Это «аномальное», неканоническое нарушение скейлинга можно понять следующим образом. При вычислениях матричных элементов $\theta^{\mu\nu}$ необходимо, чтобы они сохранялись (требование пуанкаре-ковариантности). В непосредственных расчетах, однако, получаются несохраняющиеся матричные элементы, и сохранение достигается, например, регуляризацией Паули — Вилларса. Соответственно вводится регуляризованный тензор энергии — импульса $\theta_R^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} - \theta_M^{\mu\nu}$, где $\theta_M^{\mu\nu}$ строится из регуляризирующего поля φ с массой M . Физические, сохраняющиеся матричные элементы получаются после перехода $M \rightarrow \infty$. Рассмотрим теперь след $\theta_R^{\mu\nu}$, нарушающий масштабную инвариантность. Очевидно, имеем

$$g_{\mu\nu} \theta_R^{\mu\nu} = \mu^2 \varphi^2 - M^2 \bar{\varphi}^2. \quad (7.37)$$

* Решения моделей теорий поля с аномальными размерностями впервые были построены в работе: В. Н. Грибов, А. А. Мигдал. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1968, т. 55, с. 1498. См. также: В. Н. Грибов, Е. М. Левин, А. А. Мигдал. «Журн. эксперим. и теор. физ.» 1970, т. 59, с. 2140. — *Прим. пер.*

Тогда если матричные элементы $\bar{\varphi}^2$ ведут себя как M^{-2} при больших M , то вклад регуляризующего поля в (7.37) остается даже в физическом пределе $M \rightarrow \infty$. Прямые вычисления показывают, что $\bar{\varphi}^2$ действительно ведет себя подобным образом. Следовательно, даже если μ^2 равно нулю, $g_{\mu\nu}\theta_R^{\mu\nu}$ не исчезает. Аналогия с аномальной дивергенцией аксиального тока очевидна.

В настоящее время основное внимание уделяется определению точного вида неканонических нарушающих скейлинг членов. Полагают, что их нет при конечной перенормировке константы. В теории возмущений перенормировка бесконечна; все еще неизвестно, может ли она быть конечной в полной теории. Если будет установлено, что в локальной квантовой теории поля нет скейлинга при высоких энергиях, то придется обратиться к нелагранжевым моделям, чтобы использовать эту привлекательную с точки зрения физики идею скейлинга.

Список литературы с комментариями

1. В изложении следуем работам Callan C. G., Jr., Coleman S., Jackiw R. «Ann. Phys.» (N. Y.), 1970, v. 59, p. 42; Coleman S., Jackiw R. «Ann. Phys.» (N. Y.), 1971, v. 67, p. 552. Менее общее обсуждение и ссылки на более ранние работы см. в работе Mack G., Salam A. «Ann. Phys.» (N. Y.), 1969, v. 53, p. 174.
2. Callan C. G., Jr., Coleman S., Jackiw R. (см. [1]).
3. Вполне возможно, что эти симметрии точны на уровне лагранжиана, а нетривиальный спектр масс возникает из-за вырождения вакуума. Этот пример явления Голдстоуна был изучен в работе Salam A., Strathdee J. «Phys. Rev.», 1969, v. 184, p. 1750 и 1760. Не будем рассматривать этот подход.
4. Callan C. G., Jr., Coleman S., Jackiw R. (см. [2]); см. также работы Gursey F. «Ann. Phys.» (N. Y.), 1963, v. 24, p. 211 и Penrose R. «Proc. Roy. Soc. A», 1965, v. 284, p. 159.
5. Этот подход был использован Гелл-Маном: Gell-Mann M. Hawaii Summer School Lectures, и Карузерсом: Carruthers P. «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 2265. Основное препятствие быстрому развитию в этом направлении — экспериментальный факт, что нет никаких легких скалярных мезонов.
6. Подробный вывод (7.23) и (7.24) приведен в первой из двух статей ссылки [1].
7. Обсуждаемые расчеты проведены Коулменом и Джекивом (см. [1]). Аналогичные расчеты для теории $\lambda\varphi^4$ были выполнены Вилсоном: Wilson K. «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 1478.
8. Coleman S., Jackiw R. (см. [1]); Wilson K. (см. [7]); Callan C. G., Jr. «Phys. Rev. D», 1970, v. 2, p. 1541; Symanzik K. «Comm. Math. Phys.», 1970, v. 18, p. 227.
- 8*. Оригинальный бутстрапный подход к конформно-инвариантной теории поля развит в работах А. М. Полякова и А. А. Мигдала: Поляков А. М. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1970, т. 59, с. 542; 1972, т. 63, с. 24; 1974, т. 66, с. 23; Поляков А. М. «Письма в ЖЭТФ», 1970, т. 12, с. 538; Migdal A. A. «Phys. Lett. B», 1971, v. 37, p. 98, 386.

ПРИЛОЖЕНИЕ

А. УПРАЖНЕНИЯ

Упражнения к гл. 2

2.1. Используя только канонические коммутационные соотношения (2.1), покажите, что пространственно-временные «заряды» P^α , связанные с током трансляций $\theta_C^{\mu\alpha}$, $P^\alpha = \int d^3x \theta_C^{\mu\alpha}(t, x)$, дают правильное преобразование полей:

$$i [P^\alpha, \varphi(x)] = \partial^\alpha \varphi(x) = \delta_T^\alpha \varphi(x).$$

2.2. Рассмотрите преобразование Лоренца

$$\delta_L^{\alpha\beta} \varphi(x) = (x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha + \Sigma^{\alpha\beta}) \varphi(x).$$

Здесь $\Sigma^{\alpha\beta}$ — спиновая матрица для поля $\varphi(x)$, характеризующая представление группы Лоренца, по которому преобразуется $\varphi(x)$. Для бесспиновых бозонов $\Sigma^{\alpha\beta} = 0$, для фермионов со спином $1/2$ $\Sigma_{(ij)}^{\alpha\beta} = \frac{i}{2} \sigma_{ij}^{\alpha\beta}$ (i, j — спинорные индексы 4-компонентного поля фермионов); для векторных бозонов $\Sigma_{(\mu\nu)}^{\alpha\beta} = g_{\mu\beta}^{\alpha\nu} - g_{\nu\beta}^{\alpha\mu}$ (μ, ν — пространственно-временные индексы векторного поля). При каких условиях на трансляционно-инвариантный лагранжиан \mathcal{L} преобразование Лоренца является преобразованием симметрии теории? Покажите, что сохраняющийся канонический пространственно-временной ток преобразований Лоренца равен

$$M_C^{\mu\alpha\beta}(x) = x^\alpha \theta_C^{\mu\beta}(x) - x^\beta \theta_C^{\mu\alpha}(x) + \pi^\mu(x) \Sigma^{\alpha\beta} \varphi(x).$$

С помощью канонических коммутаторов (2.1) проверьте, что «заряды» $M^{\alpha\beta} = \int d^3x M_C^{\mu\alpha\beta}(t, x)$ генерируют правильные преобразования полей:

$$i [M^{\alpha\beta}, \varphi(x)] = \delta_L^{\alpha\beta} \varphi(x).$$

2.3. Рассмотрите тензор Белифанте $\theta_B^{\mu\alpha}$, определенный согласно (2.17). Покажите, что он сохраняется, если сохраняется $\theta_C^{\mu\alpha}$. Затем покажите, что заряд P^α , введенный в упражнении 2.1, один и тот же независимо от того, построен ли он из $\theta_B^{\mu\alpha}$ или $\theta_C^{\mu\alpha}$. Следовательно, для описания трансляций можно использовать $\theta_B^{\mu\alpha}$ вместо $\theta_C^{\mu\alpha}$. Тензор $\theta_B^{\mu\alpha}$ обладает дополнительным преимуществом. С помощью уравнений движения и условий лоренц-ковариантности, выведенных в упражнении 2.2, покажите, что $\theta_B^{\mu\alpha}$ симметрично по μ и α , в то время как $\theta_C^{\mu\alpha}$ обладает этим свойством только для бесспиновых полей с $\Sigma^{\alpha\beta} = 0$.

При переходе к току, связанному с преобразованиями Лоренца, тензор Белифанте выгоднее канонического тензора. Рассмотрим

$$M_B^{\mu\alpha\beta}(x) = x^\alpha \theta_B^{\mu\beta}(x) - x^\beta \theta_B^{\mu\alpha}(x).$$

Покажите, что $M_B^{\mu\alpha\beta}(x)$ сохраняется, когда сохраняется $M_C^{\mu\alpha\beta}(x)$, определенный в упражнении 2.2. Покажите также, что $M_B^{\mu\alpha\beta}(x)$ ведет к тем же зарядам $M^{\alpha\beta}$, что и $M_C^{\mu\alpha\beta}(x)$. Поэтому $M_B^{\mu\alpha\beta}$ можно использовать вместо

$M_C^{\mu\alpha\beta}$ в качестве пространственно-временного тока преобразований Лоренца; однако $M_B^{\mu\alpha\beta}$ существенно проще, чем $M_C^{\mu\alpha\beta}$, так как не содержит явно спиновых членов $\pi^\mu \Sigma^{\alpha\beta}$ ф. Полностью роль тензора Белинфанте становится ясна, если учесть, что гравитоны в теории гравитации Эйнштейна связаны именно с этим тензором энергии — импульса.

2.4. Используя канонические выражения для θ_C^{00} и J_0^a и канонические коммутаторы, получите одновременный коммутатор (2.18) между этими двумя операторами. Проверьте, что результат не меняется от замены θ_C^{00} на θ_B^{00} .

2.5. Рассмотрите лагранжиан скалярного поля

$$\mathcal{L}(x) = (1/2) \varphi^\mu(x) \varphi_\mu(x) + g x^2 \varphi(x).$$

Постройте тензор энергии—импульса по формуле (2.11) и покажите, что он сохраняется. Вычислите коммутатор $[P^0(t), P^i(t)]$ и проверьте, что он не исчезает (этот коммутатор исчезает, когда имеется трансляционная инвариантность). Постройте ток преобразований Лоренца и убедитесь, что он сохраняется.

2.6. Проверьте, что (2.24) — наиболее общее решение уравнений (2.23б). Рекомендация: умножьте (2.23б) на y_i и проинтегрируйте по y .

2.7. Рассмотрите ОВК электромагнитных токов в скалярной электродинамике:

$$[J^0(0, x), J^0(0)] = 0;$$

$$[J^0(0, x), J^i(0)] = S(0) \partial^i \delta(x);$$

$$[J^i(0, x), J^j(0)] = 0.$$

Здесь $S(y)$ — скалярный оператор. Перепишите этот коммутатор лоренц-ковариантным образом с помощью единичного времени — подобного вектора n^μ . Рассмотрите также $TJ^\mu(x) J^\nu(0) = T^{\mu\nu}(x; n)$. Покажите, что $T^{\mu\nu}(x; n)$ нековариантен, и постройте дополняющий до ковариантного выражения контактный член $\tau^{\mu\nu}(x; n)$. Определите контактный член, требуя, чтобы $T^{*\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}(x; n) + \tau^{\mu\nu}(x; n)$ сохранялось.

Упражнения к гл. 3

3.1. Рассмотрите свободный пропагатор бозона $D(q) = i/(q^2 - m^2)$. С помощью теоремы БДЛ проверьте канонические коммутационные соотношения:

$$i [\varphi(0, x), \varphi(0)] = i [\dot{\varphi}(0, x), \dot{\varphi}(0)] = 0;$$

$$i [\varphi(0, x), \varphi(0)] = \delta(x).$$

Затем рассмотрите полный пропагатор перенормированных полей. Его можно записать в виде

$$G(q) = i \int_0^\infty da^2 \frac{\rho(a^2)}{q^2 - a^2}.$$

Можно показать, что спектральная функция не отрицательна. Что можно сказать про вакуумное среднее канонических коммутаторов в полной теории?

3.2. Рассмотрите тензор поляризации вакуума, который (формально) может быть записан как

$$T^{*\mu\nu}(q) = \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | T^* J^\mu(x) J^\nu(0) | 0 \rangle = \\ = (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \int_0^\infty da^2 \frac{\sigma(a^2)}{q^2 - a^2}.$$

Можно показать, что $\sigma(a^2)$ имеет определенный знак.

Выделите T -произведение из $T^{*\mu\nu}(q)$ и выразите $\langle 0 | [J^0(0, x), J^i(0)] | 0 \rangle$ через $\sigma(a^2)$ (здесь можно не заботиться о сходимости; проблемы сходимости будут обсуждаться в упражнении 6.1).

Упражнения к гл. 4

4.1. Покажите, что

$$\Delta^\mu(a) = i \int \frac{d^4r}{(2\pi)^4} \left[\frac{r^\mu + a^\mu}{[(r+a)^2 - m^2]^2} - \frac{r^\mu}{(r^2 - m^2)^2} \right] = -\frac{a^\mu}{32\pi^2}.$$

Этим подтверждается (4.19б).

4.2. Покажите, что

$$\Delta^{\alpha\mu\nu}(p, q|a) = i \int \frac{d^4r}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma^5 \gamma^\alpha [r_\beta \gamma^\beta + a_\beta \gamma^\beta + p_\beta \gamma^\beta - m]^{-1} \gamma^\mu \times \\ \times [r_\beta \gamma^\beta + a_\beta \gamma^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [r_\beta \gamma^\beta + a_\beta \gamma^\beta + q_\beta \gamma^\beta - m]^{-1} - \\ - [r_\beta \gamma^\beta + p_\beta \gamma^\beta - m]^{-1} \gamma^\mu [r_\beta \gamma^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [r_\beta \gamma^\beta - q_\beta \gamma^\beta - m]^{-1} = \\ = -\frac{1}{8\pi^2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} a_\beta.$$

Этим проверяется (4.21).

4.3. Покажите, что

$$i \int \frac{d^4r}{(2\pi)^4} \text{Sp} \gamma^5 \gamma^\alpha [r_\beta \gamma^\beta + q_\beta \gamma^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [r_\beta \gamma^\beta - p_\beta \gamma^\beta - m]^{-1} - \\ - [r_\beta \gamma^\beta + p_\beta \gamma^\beta - m]^{-1} \gamma^\nu [r_\beta \gamma^\beta - q_\beta \gamma^\beta - m]^{-1} = \frac{1}{4\pi^2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} p_\mu q_\beta.$$

Этим проверяется (4.25в).

Упражнения к гл. 5

5.1. Вычислите каноническим методом симметричную часть коммутатора $\int d^3x [J^i(0, x), J^l(0)]$ в кварковой модели с векторными глюонами, где $i\gamma_\mu \partial^\mu \psi = m\psi - g\gamma^\mu \psi B_\mu$.

Проверьте, что усредненный по спину матричный элемент этого коммутатора между диагональными однопротонными состояниями имеет вид $A(\delta^{ij} p^2 - p^i p^j) + B\delta^{ij}$.

5.2. Пусть в дисперсионном соотношении для T_L необходимо одно вычитание, выполняемое при $\nu = 0$ ($\omega = \infty$). Покажите, что тогда правило сумм для ШЧ вырождается в неинформативное соотношение между вычитательным членом и ШЧ.

Упражнения к гл. 6

6.1. Когда спектральная функция $\sigma(a^2)$ тензора поляризации вакуума $T^{*\mu\nu}$ не исчезает при $a^2 \rightarrow \infty$, то дисперсионное представление для $T^{*\mu\nu}$ в упражнении 3.2 не сходится. Предполагая, что $\lim_{a^2 \rightarrow \infty} \sigma(a^2) = A$; $\lim_{a^2 \rightarrow \infty} [\sigma(a^2) - A] = B$, можно записать $T^{*\mu\nu}$ с вычитанием:

$$T^{*\mu\nu}(q) = \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | T^* J^\mu(x) J^\nu(0) | 0 \rangle = \\ = (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \left[C + q^2 \int_{4m^2}^{\infty} da^2 \frac{\sigma(a^2)}{a^2(q^2 - a^2)} \right].$$

Здесь C — константа вычитания; $4m^2$ — порог в дисперсионном интеграле. Вычислите вакуумное среднее ОВК $[J^0, J^i]$ и покажите, что возникает член, пропорциональный третьей производной δ -функции. Рекомендация: введите $\tilde{\sigma}(a^2) = \sigma(a^2) - A - B/a^2$.

6.2. Рассмотрите $T(q, p)$, определенное как

$$T(p, q) = \int d^4x d^4y \exp(ipx) \exp(iqy) \langle \alpha | T A(x) B(y) C(0) | \beta \rangle,$$

где α и β — произвольные состояния. Покажите, что

$$\lim_{q^0 \rightarrow \infty} \lim_{p_0 \rightarrow \infty} -p_0 q_0 T(p, q) = \\ = \int d^3x d^3y \exp(-ipx) \exp(-iqy) \langle \alpha | [B(0, y) [A(0, x), C(0)]] | \beta \rangle.$$

Каков результат для противоположного порядка перехода к пределу

$$\lim_{p_0 \rightarrow \infty} \lim_{q_0 \rightarrow \infty} -p_0 q_0 T(p, q)?$$

Упражнения к гл. 7

7.1. Покажите, что инвариантные функции \tilde{F}_i , определенные согласно

$$C^{\mu\nu}(q, p) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \exp(iqx) \langle p | J^\mu(x), J^\nu(0) | p \rangle = \\ = - \left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \tilde{F}_1 + \left(p^\mu - q^\mu \frac{pq}{q^2} \right) \left(p^\nu - q^\nu \frac{pq}{q^2} \right) \frac{\tilde{F}_2}{pq},$$

являются безразмерными. Вектор состояния $|p\rangle$ нормирован ковариантно.

7.2. Вычислите $i[D(t), P^\mu]$ и $i[D(t), M^{\mu\nu}]$, где $D(t)$ — дилатационный заряд.

7.3. Используя канонические ОВК, покажите, что

$$i[D(t), \varphi(x)] = \delta_D \varphi(x); \\ i[K^\alpha(t), \varphi(x)] = \delta_C^\alpha \varphi(x).$$

Здесь $D(t)$ и $K^\alpha(t)$ — соответственно дилатационные и конформные заряды. Рекомендация: используйте канонические формулы для токов.

7.4. Рассмотрите лагранжиан скалярного поля \mathcal{L} , зависящий от φ и $\partial^\mu \varphi$. Каков общий вид \mathcal{L} , когда он масштабно-инвариантен? Каков общий вид \mathcal{L} , когда он конформно-инвариантен? Найдите $\theta_C^{\mu\nu}$ для этой конформно-инвариантной теории. Так как это бесспиновая теория, то $\theta_C^{\mu\nu} = \theta_B^{\mu\nu}$. Чему равно $\theta^{\mu\nu}$?

Б. Решения

2.1. Ясно, что значение аргумента $\varphi(x)$ несущественно. Поэтому рассмотрим

$$i [P^\alpha, \varphi(0)] = \int d^3 y i [\theta_C^{0\alpha}(0, y), \varphi(0)].$$

а. $\alpha = i$:

$$\begin{aligned} i [P^i, \varphi(0)] &= \int d^3 y i [\pi^0(0, y) \varphi^i(0, y), \varphi(0)] = \\ &= \int d^3 y i [\pi^0(0, y) \varphi(0)] \varphi^i(0, y) = \int d^3 y \delta(y) \varphi^i(0, y) = \varphi^i(0). \end{aligned}$$

б. $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} i [P^0, \varphi(0)] &= \int d^3 y i [\pi^0(0, y) \varphi^0(0, y) - \mathcal{L}(0, y), \varphi(0)] = \\ &= \varphi^0(0) + \int d^3 y (\pi^0(0, y) i [\varphi^0(0, y) \varphi(0)] - i [\mathcal{L}(0, y), \varphi(0)]). \end{aligned}$$

Покажем теперь, что второй член в последнем соотношении равен нулю. Для этого используем технику функционального дифференцирования по $\varphi(0)$ и $\pi^0(0)$. По определению:

$$\begin{aligned} \frac{\delta' \varphi(0, x)}{\delta' \varphi(0)} &= \delta(x); & \frac{\delta' \varphi^i(0, x)}{\delta' \varphi(0)} &= \partial^i \delta(x); \\ \frac{\delta' \pi^0(0, x)}{\delta' \varphi(0)} &= 0; & \frac{\delta' \varphi(0, x)}{\delta' \pi^0(0)} &= 0; \\ \frac{\delta' \partial^i \varphi(0, x)}{\delta' \pi^0(0)} &= 0; & \frac{\delta' \pi^0(0, x)}{\delta' \pi^0(0)} &= \delta(x). \end{aligned}$$

Величина φ^0 считается функционалом π^0 и φ . Для любого функционала F , зависящего от φ и φ^μ , выполняется правило дифференцирования функции от функции:

$$\begin{aligned} \frac{\delta' F(0, x)}{\delta' \varphi(0)} &= \frac{\delta F(0, x)}{\delta \varphi} \delta(x) + \frac{\delta F(0, x)}{\delta \varphi^i} \partial^i \delta(x) + \frac{\delta F(0, x)}{\delta \varphi^0} \frac{\delta' \varphi^0(0, x)}{\delta' \varphi(0)}; \\ \frac{\delta' F(0, y)}{\delta' \pi^0(0)} &= \frac{\delta F(0, x)}{\delta \varphi^0} \frac{\delta' \varphi^0(0, x)}{\delta' \pi^0(0)}. \end{aligned}$$

Здесь δ — обычная вариационная производная; δ' — функциональная производная. Применяя этот формализм, получаем

$$\begin{aligned} &\pi^0(0, y) i [\varphi^0(0, y), \varphi(0)] - i [\mathcal{L}(0, y), \varphi(0)] = \\ &= \pi^0(0, y) \frac{\delta' \varphi^0(0, y)}{\delta' \pi^0(0)} - \frac{\delta' \mathcal{L}(0, y)}{\delta' \pi^0(0)} = \pi^0(0, y) \frac{\delta' \varphi^0(0, y)}{\delta' \pi^0(0)} - \\ &\quad - \frac{\delta \mathcal{L}(0, y)}{\delta \varphi^0} \frac{\delta' \varphi^0(0, y)}{\delta' \pi^0(0)} = 0. \end{aligned}$$

(Использовано определение π^0 : $\pi^0 = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^0}$.)

Заметим, что было установлено более сильное соотношение

$$i [\theta_C^{\alpha\alpha}(t, y), \varphi(t, x)] = \varphi^\alpha(x) \delta(x-y).$$

2.2

$$\begin{aligned} \text{а. } \delta_L^{\alpha\beta} \mathcal{L} &= \pi_\mu \delta_L^{\alpha\beta} \varphi^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta_L^{\alpha\beta} \varphi = \pi_\mu \partial^\mu \delta_L^{\alpha\beta} \varphi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \delta_L^{\alpha\beta} \varphi = \\ &= \pi_\mu (g^{\mu\alpha} \varphi^\beta - g^{\mu\beta} \varphi^\alpha + (x^\alpha \partial^\beta - x^\beta \partial^\alpha) \varphi^\mu + \Sigma^{\alpha\beta} \varphi^\mu) + \\ &+ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} (x^\alpha \partial^\beta \varphi - x^\beta \partial^\alpha \varphi) + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \Sigma^{\alpha\beta} \varphi. \end{aligned}$$

В силу трансляционной инвариантности $\delta_L^{\alpha\mu} \mathcal{L}$ можно записать как

$$\begin{aligned} \delta_L^{\alpha\beta} \mathcal{L} &= x^\alpha \partial^\beta \mathcal{L} - x^\beta \partial^\alpha \mathcal{L} + \pi_\mu \Sigma^{\alpha\beta} \varphi^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \Sigma^{\alpha\beta} \varphi + \pi^\alpha \varphi^\beta - \pi^\beta \varphi^\alpha = \\ &= \partial_\mu [g^{\mu\beta} x^\alpha \mathcal{L} - g^{\mu\alpha} x^\beta \mathcal{L}] + \pi_\mu \Sigma^{\alpha\beta} \varphi^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \Sigma^{\alpha\beta} \varphi + \pi^\alpha \varphi^\beta - \pi^\beta \varphi^\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, условие лоренц-ковариантности теории имеет вид

$$\pi_\mu \Sigma^{\alpha\beta} \varphi^\mu + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \Sigma^{\alpha\beta} \varphi = \pi^\beta \varphi^\alpha - \pi^\alpha \varphi^\beta.$$

б. В обозначениях гл. 2

$$\Lambda^{\mu\alpha\beta} = x^\alpha g^{\mu\beta} \mathcal{L} - x^\beta g^{\mu\alpha} \mathcal{L},$$

и канонически сохраняющимся током является

$$\begin{aligned} M_C^{\mu\alpha\beta} &= \pi^\mu \delta_L^{\alpha\beta} \varphi - \Lambda^{\mu\alpha\beta} = \pi^\mu (x^\alpha \varphi^\beta - x^\beta \varphi^\alpha + \Sigma^{\alpha\beta} \varphi) - \\ &- x^\alpha g^{\mu\beta} \mathcal{L} - x^\beta g^{\mu\alpha} \mathcal{L} = x^\alpha \theta_C^{\mu\beta} - x^\beta \theta_C^{\mu\alpha} + \pi^\mu \Sigma^{\alpha\beta} \varphi. \end{aligned}$$

в. Рассмотрим

$$\begin{aligned} i [M_C^{0\alpha\beta}(t, y), \varphi(t, x)] &= iy^\alpha [\theta_C^{0\beta}(t, y), \varphi(t, x)] - \\ &- iy^\beta [\theta_C^{0\alpha}(t, y), \varphi(t, x)] + i [\pi^0(t, y) \Sigma^{\alpha\beta} \varphi(t, y), \varphi(t, x)]. \end{aligned}$$

Коммутаторы с $\theta_C^{0\alpha}$ были вычислены в упражнении 2.1. Следовательно,

$$\begin{aligned} i [M_C^{0\alpha\beta}(t, y), \varphi(t, x)] &= (x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) - x^\beta \partial^\alpha \varphi(x) + \Sigma^{\alpha\beta} \varphi(x)) \delta(x-y) = \\ &= \delta_L^{\alpha\beta} \varphi(x) \delta(x-y). \end{aligned}$$

Получен желаемый результат.

2.3

$$\text{а. } \theta_B^{\mu\alpha} = \theta_C^{\mu\alpha} + (1/2) \partial_\lambda X^{\lambda\mu\alpha};$$

$$X^{\lambda\mu\alpha} = -X^{\mu\lambda\alpha} = \pi^\lambda \Sigma^{\mu\alpha} \varphi - \pi^\mu \Sigma^{\lambda\alpha} \varphi - \pi^\alpha \Sigma^{\lambda\mu} \varphi.$$

Так как $X^{\lambda\mu\alpha}$ явно антисимметрично по λ и μ , то $\partial_\lambda X^{\lambda\mu\alpha}$ не дает вклада ни в дивергенцию $\theta_B^{\mu\alpha}$ по μ , ни в заряды $\int d^3x \theta_B^{0\alpha}(x)$.

$$\text{б. } \theta_B^{\mu\alpha} = \pi^\mu \varphi^\alpha - g^{\mu\alpha} \mathcal{L} + (1/2) \partial_\lambda [\pi^\lambda \Sigma^{\mu\alpha} \varphi - \pi^\mu \Sigma^{\lambda\alpha} \varphi - \pi^\alpha \Sigma^{\lambda\mu} \varphi].$$

Единственным членом, не симметричным явно по $\mu\alpha$, является

$$\begin{aligned} \pi^\mu \varphi^\alpha + (1/2) \partial_\lambda [\pi^\lambda \Sigma^{\mu\alpha} \varphi] &= \pi^\mu \varphi^\alpha + (1/2) \partial_\lambda \pi^\lambda \Sigma^{\mu\alpha} \varphi + (1/2) \pi^\lambda \Sigma^{\mu\alpha} \varphi_\lambda = \\ &= \pi^\mu \varphi^\alpha + \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi} \Sigma^{\mu\alpha} \varphi + \frac{1}{2} \pi^\lambda \Sigma^{\mu\alpha} \varphi_\lambda. \end{aligned}$$

Здесь использованы уравнения движения. Используем далее ограничения на \mathcal{L} , накладываемые лоренц-ковариантностью (см. упражнение 2.2). Тогда

$$\begin{aligned} \pi^\mu \varphi^\alpha + (1/2) \partial_\lambda [\pi^\lambda \Sigma^{\mu\alpha} \varphi] &= \pi^\mu \varphi^\alpha - (1/2) \pi^\mu \varphi^\alpha + (1/2) \pi^\alpha \varphi^\mu = \\ &= (1/2) \pi^\mu \varphi^\alpha + (1/2) \pi^\alpha \varphi^\mu. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в. } M_B^{\mu\alpha\beta} &= x^\alpha \theta_B^{\mu\beta} - x^\beta \theta_B^{\mu\alpha} = x^\alpha \theta_C^{\mu\beta} - x^\beta \theta_C^{\mu\alpha} + x^\alpha (1/2) \partial_\lambda x^{\lambda\mu\beta} - \\ &- x^\beta (1/2) \partial_\lambda x^{\lambda\mu\alpha} = M_C^{\mu\alpha\beta} + (1/2) \partial_\lambda [x^{\lambda\mu\beta} x^\alpha - x^{\lambda\mu\alpha} x^\beta] + \\ &+ (1/2) x^{\beta\mu\alpha} - (1/2) x^{\alpha\mu\beta} - \pi^\mu \Sigma^{\alpha\beta} \varphi. \end{aligned}$$

Из явного вида $x^{\lambda\mu\alpha}$ следует, что последние три члена взаимно уничтожаются. Член с полной производной есть дивергенция по λ тензора, антисимметричного по $\mu\lambda$. Поэтому этот член не дает вклада ни в дивергенцию по μ , ни в заряды.

2.4

$$\begin{aligned} \text{а. } i [\theta_C^{00}(t, x), J_0^a(t, y)] &= i [\theta_C^{00}(t, x), \pi^0(t, y) T^a \varphi(t, y)] = \\ &= \pi^0(t, y) T^a i [\theta_C^{00}(t, x), \varphi(t, y)] + i [\theta_C^{00}(t, x), \pi^0(t, y)] T^a \varphi(t, y). \end{aligned}$$

Первый коммутатор вычисляется так же, как в упражнении 2.1, второй выражается через функциональные производные. В результате

$$\begin{aligned} i [\theta_C^{00}(t, x), J_0^a(t, y)] &= \pi^0(t, y) T^a \varphi^0(t, y) \delta(x-y) - \\ &- \frac{\delta' \theta_C^{00}(t, x)}{\delta' \varphi(t, y)} T^a \varphi(t, y). \end{aligned}$$

Функциональная производная теперь вычисляется по формуле для $\theta_C^{00}(t, x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\delta' \theta_C^{00}(t, x)}{\delta' \varphi(t, y)} &= \pi^0(t, x) \frac{\delta' \varphi^0(t, x)}{\delta' \varphi(t, y)} - \frac{\delta' \mathcal{L}(t, x)}{\delta' \varphi(t, x)}; \\ \frac{\delta' \mathcal{L}(t, x)}{\delta' \varphi(t, y)} &= \frac{\delta \mathcal{L}(t, x)}{\delta \varphi} \delta(x-y) + \frac{\delta \mathcal{L}(t, x)}{\delta \varphi^0} \frac{\delta' \varphi^0(t, x)}{\delta' \varphi(t, y)} + \\ &+ \frac{\delta \mathcal{L}(t, x)}{\delta \varphi^i} \partial^i \delta(x-y) = \partial_\lambda \pi^\lambda(t, x) \delta(x-y) + \pi^0(t, x) \frac{\delta' \varphi^0(t, x)}{\delta' \varphi(t, y)} + \\ &+ \pi_i(t, x) \partial^i \delta(x-y). \end{aligned}$$

(Здесь использовались уравнение движения и определение π^μ .)

Отсюда следует, что

$$\frac{\delta' \theta_C^{00}(t, \mathbf{x})}{\delta' \varphi(t, \mathbf{y})} = -\partial_\lambda \pi^\lambda(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \pi_i(t, \mathbf{x}) \partial^i \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y});$$

$$\begin{aligned} & i[\theta_C^{00}(t, \mathbf{x}), J_0^a(t, \mathbf{y})] = \pi^0(t, \mathbf{x}) T^a \varphi^0(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \\ & + \partial_\lambda \pi^\lambda(t, \mathbf{x}) T^a \varphi(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \pi^i(t, \mathbf{x}) T^a \varphi(t, \mathbf{y}) \partial_i \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \\ & = \partial_0 [\pi^0(t, \mathbf{x}) T^a \varphi(t, \mathbf{x})] \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \partial_i [\pi^i(t, \mathbf{x}) T^a \varphi(t, \mathbf{x})] \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \\ & + \pi^i(t, \mathbf{x}) T^a \varphi(t, \mathbf{x}) \partial_i \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \partial_\mu J_\mu^a(x) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + J_i^a(x) \partial^i \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \end{aligned}$$

В последней формуле использовалось определение тока

$$J_\mu^a = \pi_\mu T^a \varphi.$$

б. Разность между θ_B^{00} и θ_C^{00} равна

$$(1/2) \partial_\lambda X^{\lambda 00} = (1/2) \partial_i X^{i00} = \partial_i [\pi^0 \Sigma^{0i} \varphi].$$

Так как Σ^{0i} и T^a коммутируют (они действуют в различных пространствах), то J_0^a коммутирует с $(1/2) \partial_i X^{i00}$.

2.5

$$а. \quad \theta_C^{\mu\nu} = \pi^\mu \varphi^\nu - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \varphi^\mu \varphi^\nu - g^{\mu\nu} \mathcal{L};$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \theta_C^{\mu\nu} &= \partial_\mu \varphi^\mu \varphi^\nu + \varphi^\mu \partial_\mu \varphi^\nu - \partial^\nu \mathcal{L} = g x^2 \varphi^\nu + \varphi^\mu \partial_\mu \varphi^\nu - \\ & - \varphi^\mu \partial^\nu \varphi_\mu - 2g x^\nu \varphi - g x^2 \varphi^\nu = -2g x^\nu \varphi. \end{aligned}$$

(Здесь использовалось уравнение движения $\partial_\mu \varphi^\mu = g x^2$.)

$$\begin{aligned} б. \quad i[P^0(t), P^i(t)] &= \int d^3 x d^3 y i [\theta_C^{00}(t, \mathbf{x}), \theta_C^{0i}(t, \mathbf{y})] = \\ &= \int d^3 x d^3 y i \left[\frac{1}{2} \varphi^0(t, \mathbf{x}) \varphi^0(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{2} \varphi^j(t, \mathbf{x}) \varphi_j(t, \mathbf{x}) - \right. \\ & \left. - g x^2 \varphi(t, \mathbf{x}), \varphi^0(t, \mathbf{y}) \varphi^i(t, \mathbf{y}) \right] = \int d^3 x d^3 y \left\{ \varphi^0(t, \mathbf{x}) \varphi^0(t, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_i} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \right. \\ & \left. + \varphi^j(t, \mathbf{x}) \varphi^i(t, \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x^j} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + g x^2 \varphi^i(t, \mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \right\} = \\ &= \int d^3 x \{ -\varphi^0(t, \mathbf{x}) \partial^i \varphi^0(t, \mathbf{x}) + \varphi^j(t, \mathbf{x}) \partial_j \varphi^i(t, \mathbf{x}) + g x^2 \varphi^i(t, \mathbf{x}) \} = \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3 x x^i \{ \varphi^0(t, \mathbf{x}) \varphi^0(t, \mathbf{x}) - \varphi^j(t, \mathbf{x}) \varphi_j(t, \mathbf{x}) - \\ & - 2g x^2 \varphi(t, \mathbf{x}) \} - g \int d^3 x x^i \varphi(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Первый член — поверхностный интеграл, и его можно опустить. После этого остается

$$i[P^0(t), P^i(t)] = -g \int d^3 x x^i \varphi(t, \mathbf{x}).$$

в. Так как $\Sigma^{\alpha\beta} = 0$ для бесспиновых полей, то

$$M_C^{\mu\alpha\beta}(x) = x^\mu \theta_C^{\mu\beta} - x^\beta \theta_C^{\mu\alpha};$$

$$\partial_\mu M_C^{\mu\alpha\beta}(x) = \theta_C^{\alpha\beta} + x^\alpha \partial_\mu \theta_C^{\mu\beta} - \theta_C^{\beta\alpha} - x^\beta \partial_\mu \theta_C^{\mu\alpha} = x^\alpha \partial_\mu \theta_C^{\mu\beta} - x^\beta \partial_\mu \theta_C^{\mu\alpha}.$$

(Здесь была использована симметрия $\theta_C^{\mu\nu}$.) Учитывая соотношения пункта а, получаем:

$$\partial_\mu M_C^{\mu\alpha\beta}(x) = 2g(x^\beta x^\alpha - x^\alpha x^\beta) = 0.$$

2.6

$$\begin{aligned} [J_0^b, J_k^a(t, z)] \partial^k \delta(x-z) + [J_0^a(t, x), J_k^b(t, z)] \partial^k \delta(z-y) = \\ = -f_{abc} \delta(x-y) J_k^c(t, z) \partial^k \delta(z-x). \end{aligned}$$

Умножив на y_i и проинтегрировав по y , получим

$$\begin{aligned} [J_0^a(t, x), J_i^b(t, z)] = -f_{abc} x_i J_k^c(t, z) \partial^k \delta(z-x) - \\ - \int d^3 y y_i [J_0^b(t, y), J_k^a(t, z)] \partial^k \delta(x-z) = \\ = -f_{abc} J_i^c(t, z) \delta(z-x) - f_{abc} z_i J_k^c(t, z) \partial^k \delta(z-x) - \\ - \int d^3 y y_i [J_0^b(t, y), J_k^a(t, z)] \partial^k \delta(x-z). \end{aligned}$$

Очевидно, это выражение имеет вид

$$[J_0^a(t, x), J_i^b(t, z)] = -f_{abc} J_i^c(t, z) \delta(z-x) + S_{ij}^{ab}(t, z) \partial^j \delta(x-z).$$

Подставляя его в исходное уравнение, получаем:

$$\begin{aligned} f_{abc} J_k^c(t, z) \delta(y-z) \partial^k \delta(x-z) + S_{kl}^{ba}(t, z) \partial^l \delta(y-z) \partial^k \delta(x-z) - \\ - f_{abc} J_k^c(t, z) \delta(x-z) \partial^k \delta(z-y) + S_{kl}^{ba}(t, z) \partial^l \delta(x-z) \partial^k \delta(z-y) = \\ = -f_{abc} J_k^c(t, z) \delta(x-y) \partial^k \delta(z-y). \end{aligned}$$

Так как

$$-\delta(y-z) \partial^k \delta(x-z) + \delta(x-z) \partial^k \delta(z-y) = \delta(x-y) \partial^k \delta(z-x),$$

то остается

$$S_{kl}^{ba}(t, z) \partial^l \delta(y-z) \partial^k \delta(x-z) + S_{lk}^{ab}(t, z) \partial^k \delta(x-z) \partial^l \delta(z-y) = 0$$

или

$$S_{kl}^{ba} = S_{lk}^{ab}.$$

2.7 Ковариантная, но зависящая от системы отсчета формула для ОВК имеет вид

$$[J^\mu(x), J^\nu(0)] \delta(xn) = S(0) (n^\mu g^{\nu\alpha} + n^\nu g^{\mu\alpha}) P_{\alpha\beta} \partial^\beta \delta^4(x).$$

Так как $S^{\mu\nu\alpha}(n) = (n^\mu g^{\nu\alpha} + n^\nu g^{\mu\alpha}) S(0)$ есть ШЧ, то T -произведение нековариантно. Заметим, что

$$S^{\mu\nu\alpha}(n) = S(0) \frac{\delta}{\delta n^\alpha} (n^\mu n^\nu).$$

Так что контактный член равен $\tau^{\mu\nu}(x; n) = S(0) n^\mu n^\nu \delta^4(x)$ и

$$T^{*\mu\nu}(x) = T J^\mu(x) J^\nu(0) + n^\mu n^\nu S(0) \delta^4(x) + \tau_0^{\mu\nu}(x)$$

ковариантно. Ковариантный контактный член $\tau_0^{\mu\nu}$ можно взять таким, чтобы $T^{*\mu\nu}$ сохранялась:

$$\partial_\mu T^{*\mu\nu}(x) = 0 = \delta(xn) n_\mu [J^\mu(x), J^\nu(0)] + n^\mu n^\nu S(0) \partial_\mu \delta^4(x) + \partial_\mu \tau_0^{\mu\nu}(x)$$

или

$$-\partial_\mu \tau_0^{\mu\nu}(x) = S(0) P^{\nu\beta} \partial_\beta \delta^4(x) + S(0) n^\nu n^\beta \partial_\beta \delta^4(x) = S(0) \partial^\nu \delta^4(x).$$

Таким образом, выбор $\tau_0^{\mu\nu}(x) = -g^{\mu\nu} S(0) \delta^4(x)$ обеспечивает сохранение

$$T^{*\mu\nu}(x) = T^{\mu\nu}(x) - P^{\mu\nu} S(0) \delta^4(x).$$

Отметим, что контактный член есть только в ij -компоненте $T^{*\mu\nu}$.

3.1

$$a. D(q) = \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | T\phi(x) \phi(0) | 0 \rangle.$$

Согласно теореме БДЛ и каноническим ОВК:

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 D(q) = i \int d^3x \exp(-iqx) \langle 0 | [\phi(0, \mathbf{x}), \phi(0)] | 0 \rangle = 0;$$

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0^2 D(q) = - \int d^3x \exp(-iqx) \langle 0 | [\dot{\phi}(0, \mathbf{x}), \phi(0)] | 0 \rangle = i;$$

$$\begin{aligned} \lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0^3 \left[D(q) - \frac{i}{q_0^2} \right] &= -i \int d^3x \exp(-iqx) \langle 0 | [\ddot{\phi}(0, \mathbf{x}), \phi(0)] | 0 \rangle = \\ &= -i \int d^3x \exp(-iqx) \{ \partial_0 \langle 0 | [\dot{\phi}(0, \mathbf{x}), \phi(0)] | 0 \rangle - \langle 0 | [\dot{\phi}(0, \mathbf{x}), \dot{\phi}(0)] | 0 \rangle \} = 0. \end{aligned}$$

Так как $D(q)$ имеет разложение $D(q) = i/q_0^2 + O(1/q_0^4)$, то пределы БДЛ выполняются.

Формально $G(q)$ можно разложить как

$$G(q) = \frac{i}{q_0^2} \int_0^\infty da^2 \rho(a^2) + O(i/q_0^4).$$

Отсюда получаем, что:

$$\langle 0 | [\tilde{\phi}(0, \mathbf{x}), \tilde{\phi}(0)] | 0 \rangle = 0;$$

$$\langle 0 | [\dot{\tilde{\phi}}(0, \mathbf{x}), \dot{\tilde{\phi}}(0)] | 0 \rangle = 0;$$

$$i \langle 0 | [\ddot{\tilde{\phi}}(0, \mathbf{x}), \tilde{\phi}(0)] | 0 \rangle = \int_0^\infty da^2 \rho(a^2) \delta(\mathbf{x}).$$

Если $\int_0^\infty da^2 \rho(a^2)$ расходится, как это происходит в теории возмущений, то нельзя говорить об ОВК перенормированных полей. В то же время если эта величина конечна, то:

$$i \langle 0 | [\dot{\tilde{\phi}}(0, \mathbf{x}), \dot{\tilde{\phi}}(0)] | 0 \rangle = \delta(\mathbf{x});$$

$$\tilde{\phi} = Z^{-1/2} \phi;$$

$$Z^{-1} = \int_0^\infty da^2 \rho(a^2).$$

Спектральная функция $\rho(a^2)$ неотрицательна. В нее дает вклад одночастичное состояние $\delta(a^2 - m^2)$. Следовательно, $\rho(a^2) = \delta(a^2 - m^2) + \tilde{\rho}(a^2)$, $\tilde{\rho}(a^2) \geq 0$. Тогда

$$0 < Z^{-1} \leq 1.$$

3.2

$$T^{*\mu\nu}(q) = (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \int \frac{da^2 \sigma(a^2)}{q^2 - a^2};$$

$$T^{*00}(q) = -q^2 \int \frac{da^2 \sigma(a^2)}{q^2 - a^2}; \quad T^{*00}(q) \xrightarrow{q_0 \rightarrow \infty} 0;$$

$$T^{*0i}(q) = -q^0 q^i \int \frac{da^2 \sigma(a^2)}{q^2 - a^2}, \quad T^{*0i}(q) \xrightarrow{q_0 \rightarrow \infty} 0;$$

$$T^{*ij}(q) = (g^{ij} q^2 - q^i q^j) \int \frac{da^2 \sigma(a^2)}{q^2 - a^2};$$

$$T^{*ij}(q) \xrightarrow{q_0 \rightarrow \infty} g^{ij} \int da^2 \sigma(a^2).$$

Следовательно, контактный член есть только в ij -компоненте. Тогда

$$T^{\mu\nu}(q) = T^{*\mu\nu}(q) - P^{\mu\nu} \int da^2 \sigma(a^2).$$

Наконец,

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 T^{0i} = i \int d^3 x \exp(iqx) \langle 0 | [J^0(0, x), J^i(0)] | 0 \rangle =$$

$$= \lim_{q_0 \rightarrow \infty} -q_0^2 q^i \int \frac{da^2 \sigma(a^2)}{q^2 - a^2} = -q^i \int da^2 \sigma(a^2).$$

Отсюда

$$\langle 0 | [J^0(0, x), J^i(0)] | 0 \rangle = i \partial^i \delta(x) \int da^2 \sigma(a^2).$$

Так как $\sigma(a^2)$ имеет определенный знак, то вакуумное среднее ШЧ не может исчезать. Это еще один аргумент в пользу необходимости существования ШЧ. Отметим, однако, что такой вывод формален, так как нет гарантий законности ни для одного из шагов в выводе. Расходимость интегралов по спектральным функциям изменяет результат. В частности, нет никаких гарантий, что имеется только первая производная δ -функции (см. упражнение 6.1). Так как $\sigma(a^2)$ пропорционально полному сечению аннигиляции лептонов в адроны, то вакуумное среднее ШЧ есть измеряемая величина.

4.1

$$\Delta^\mu(a) = i \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \left[\frac{r^\mu + a^\mu}{([r+a]^2 - m^2)^2} - \frac{r^\mu}{(r^2 - m^2)^2} \right] = i \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \left\{ \exp\left(a^\nu \frac{\partial}{\partial r^\nu}\right) - 1 \right\} \frac{r^\mu}{(r^2 - m^2)^2} = i \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} a^\nu \frac{\partial}{\partial r^\nu} \left\{ [1 + O(r^{-1})] \frac{r^\mu}{(r^2 - m^2)^2} \right\}.$$

Подынтегральное выражение является полной производной. Если оно убывает достаточно быстро при больших r , то из теоремы Гаусса следует, что интеграл равен нулю. Проинтегрируем его симметрично до поверхности $r = R$. Используя то, что

$$\int_{r=R} d^4 r \partial^\nu f_L(r) = i 2\pi^2 R^\nu R^2 f(R),$$

получаем

$$\Delta^\mu(a) = -\frac{1}{8\pi^2} a^\nu \lim_{R \rightarrow \infty} R_\nu R^2 [1 + O(R^{-1})] \frac{R^\mu}{(R^2 - m^2)^2}$$

Переход к пределу должен быть симметричным:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \{R_{\nu_1} \dots R_{\nu_{2k+1}}\} = 0;$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^\mu R^\nu}{R^2} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu}.$$

Следовательно,

$$\Delta^\mu(a) = -\frac{a^\mu}{32\pi^2}.$$

4.2

$$\begin{aligned} \Delta^{\alpha\mu\nu}(p, q|a) &= i \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha \left\{ \exp\left(a^\beta \frac{\partial}{\partial r^\beta}\right) - 1 \right\} \times \\ &\times (\gamma_\delta r^\delta + \gamma_\delta p^\delta - m)^{-1} \gamma^\mu (\gamma_\delta r^\delta - m)^{-1} \gamma^\nu (\gamma_\delta r^\delta + \gamma_\delta q^\delta - m)^{-1} = \\ &= i \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} a^\beta \frac{\partial}{\partial r^\beta} \{ [1 + O(r^{-1})] \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha (\gamma_\delta r^\delta + \gamma_\delta p^\delta - m)^{-1} \times \\ &\quad \times \gamma^\mu (\gamma_\delta r^\delta - m)^{-1} \gamma^\nu (\gamma_\delta r^\delta + \gamma_\delta q^\delta - m)^{-1} \} = \\ &= -\frac{a^\beta}{8\pi^2} \lim_{R \rightarrow \infty} R_\beta R^2 [1 + O(R^{-1})] \times \\ &\quad \times [\text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha \gamma_\delta R^\delta \gamma_e R^e \gamma^\nu \gamma_\varphi R^\varphi R^{-6} + O(R^{-4})]. \end{aligned}$$

След равен $4\varepsilon^{\alpha\omega\mu\nu} R_\omega/R^4$. Следовательно,

$$\Delta^{\alpha\mu\nu}(p, q|a) = -\frac{1}{8\pi^2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} a_\beta.$$

4.3

$$\begin{aligned} &i \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha \{ [\gamma_\delta r^\delta + \gamma_\delta q^\delta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\delta r^\delta - \gamma_\delta p^\delta - m]^{-1} - \\ &\quad - [\gamma_\delta r^\delta + \gamma_\delta p^\delta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\delta r^\delta - \gamma_\delta p^\delta - m]^{-1} \} = \\ &= i \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha \left\{ \exp\left[(q-p)^\beta \frac{\partial}{\partial r^\beta}\right] - 1 \right\} \times \\ &\quad \times [\gamma_\delta r^\delta + \gamma_\delta p^\delta - m]^{-1} \gamma^\nu [\gamma_\delta r^\delta - \gamma_\delta q^\delta - m]^{-1} = \\ &= i \int \frac{d^4 r}{(2\pi)^4} (q-p)^\beta \frac{\partial}{\partial r^\beta} \{ [1 + O(r^{-1})] \text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha [\gamma_\delta r^\delta + \gamma_\delta p^\delta - m]^{-1} \times \\ &\quad \times \gamma^\nu [\gamma_\delta r^\delta - \gamma_\delta q^\delta - m]^{-1} \} = -\frac{(q-p)^\beta}{8\pi^2} \lim_{R \rightarrow \infty} R_\beta R^2 \times \\ &\quad \times \frac{\text{Sp } \gamma^5 \gamma^\alpha [\gamma_\delta R^\delta + \gamma_\delta p^\delta + m] \gamma^\nu [\gamma_e R^e - \gamma_e q^e - m]}{([R+p]^2 - m^2)([R-q]^2 - m^2)}. \end{aligned}$$

След равен $-4\varepsilon^{\alpha\varphi\nu\omega}R_{\omega}(q_{\varphi} + p_{\varphi}) +$ величина, не зависящая от энергии. Таким образом, предел равен

$$\frac{(q-p)\omega}{8\pi^2} \varepsilon^{\alpha\varphi\nu\omega} (q_{\varphi} + p_{\varphi}) = \frac{1}{4\pi^2} \varepsilon^{\alpha\mu\nu\beta} p_{\mu} q_{\beta}.$$

5.1

$$J^i = \bar{\psi} \gamma^i \psi;$$

$$J^i = \bar{\psi} \gamma^i \psi + \text{э. с.} = -i \bar{\psi} \gamma^i \gamma^0 i \gamma^0 \psi + \text{э. с.}$$

Из уравнений движения $i \gamma_{\mu} \partial^{\mu} \psi = m\psi - gB_{\mu} \gamma^{\mu} \psi$ следует, что

$$i \gamma^0 \psi = -i \gamma^k \partial_k \psi + m\psi - gB_{\mu} \gamma^{\mu} \psi.$$

Тогда

$$J^i = -\bar{\psi} \gamma^i \gamma^0 \gamma^k \partial_k \psi - i m \bar{\psi} \gamma^i \gamma^0 \psi + i g B_{\mu} \bar{\psi} \gamma^i \gamma^0 \gamma^{\mu} \psi + \text{э. с.}$$

Теперь можно вычислить коммутатор с помощью канонических коммутаторов между полями. После длинных вычислений получаем для симметричной части коммутатора

$$\int d^3 x [J^i(0, x), J^j(0)] = \bar{\psi}(0) [\gamma^i \overset{\leftrightarrow}{\partial}^j + \gamma^j \overset{\leftrightarrow}{\partial}^i - 2g^{ij} \gamma^k \overset{\leftrightarrow}{\partial}_k - \\ - 2ig(\gamma^i B^j + \gamma^j B^i - 2g^{ij} \gamma^k B_k) - 4img^{ij}] \psi(0) + \\ + \text{член, антисимметричный по } (i, j).$$

Для вычисления диагонального, усредненного по спинам, однопротонного матричного элемента введем:

$$\langle p | \bar{\psi} \gamma^{\mu} \overset{\leftrightarrow}{\partial}^{\nu} \psi | p \rangle = g^{\mu\nu} i A_1 + p^{\mu} p^{\nu} i A_2;$$

$$\langle p | \bar{\psi} \gamma^{\mu} B^{\nu} \psi | p \rangle = g^{\mu\nu} B_1 + p^{\mu} p^{\nu} B_2;$$

$$\langle p | \bar{\psi} \psi | p \rangle = C.$$

Тогда получим

$$\int d^3 x \langle p | [J^i(0, x), J^j(0)] | p \rangle = A(\delta^{ij} p^2 - p^i p^j) + B\delta^{ij};$$

$$A = -2i(A_2 - 2g B_2);$$

$$B = 4i(A_1 - 2g B_1 + mC).$$

5.2. Когда в дисперсионном соотношении по ν при фиксированном q^2 необходимо вычитание, то дисперсионное соотношение по ω имеет вид

$$T_L(\omega, q^2) = T_L(q^2) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\omega' \frac{\tilde{F}_L(\omega', q^2)}{\omega'^2 - \omega^2}.$$

Здесь $T_L(q^2)$ — вычитательный член, взятый при $\nu = 0$ ($\omega = \infty$). Это уравнение заменяет уравнение (5.15а). Очевидно, получаем

$$-\int d^3 x \exp(-iqx) \langle p | [J^0(0, x), J^i(0)] | p \rangle = \lim_{q_0 \rightarrow \infty} q^i T_L.$$

Однако из дисперсионного соотношения теперь можно прийти только к соотношению

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} T_L(q^2, \omega) = T_L(\infty),$$

не дающему никакой новой информации.

6.1. Введем $\tilde{\sigma}(a^2) = \sigma(a^2) - A - B/a^2$, $\lim_{a^2 \rightarrow \infty} a^2 \tilde{\sigma}(a^2) = 0$. Тогда $T(q^2)$ можно представить как

$$\begin{aligned} T(q^2) &= C + q^2 \int_{4m^2}^{\infty} da^2 \frac{\tilde{\sigma}(a^2)}{a^2(q^2 - a^2)} + Aq^2 \int_{4m^2}^{\infty} da^2 \frac{1}{a^2(q^2 - a^2)} + \\ &+ Bq^2 \int_{4m^2}^{\infty} da^2 \frac{1}{a^4(q^2 - a^2)} = \tilde{C} + \int_{4m^2}^{\infty} da^2 \frac{\tilde{\sigma}(a^2)}{q^2 - a^2} + \tilde{A} \ln\left(1 - \frac{q^2}{4m^2}\right) + \\ &+ \frac{B}{q^2} \ln\left(1 - \frac{q^2}{4m^2}\right); \\ \tilde{C} &= C + \int_{4m^2}^{\infty} da^2 \frac{\tilde{\sigma}(a^2)}{a^2} + \frac{B}{4m^2}. \end{aligned}$$

Для больших q_0

$$\begin{aligned} T(q^2) \xrightarrow{q_0 \rightarrow \infty} \tilde{C} + A \ln\left(1 - \frac{q_0^2}{4m^2}\right) + \frac{B}{q_0^2} \ln\left(1 - \frac{q_0^2}{4m^2}\right) - \frac{A}{q_0^2} (4m^2 + q^2) + \\ + \frac{1}{q_0^2} \int_{4m^2}^{\infty} da^2 \tilde{\sigma}(a^2). \end{aligned}$$

Очевидно, что \tilde{C} — ковариантный контактный член, и его можно опустить. Таким образом, T -произведение при больших q_0 имеет вид

$$\begin{aligned} q^0 T^{0i}(q) = -q_0^2 q^i T(q^2) \xrightarrow{q_0 \rightarrow \infty} -q^i \left[Aq_0^2 \ln\left(-\frac{q_0^2}{4m^2}\right) + B \ln\left(-\frac{q_0^2}{4m^2}\right) - \right. \\ \left. - A(4m^2 + q^2) + \int_{4m^2}^{\infty} da^2 \tilde{\delta}(a^2) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что членами, пропорциональными первой производной δ -функции, являются: квадратично расходящийся при $q_0 \rightarrow \infty$ член $Aq_0^2 \ln(-q_0^2/4m^2)$; логарифмически расходящийся член $B \ln(-q_0^2/4m^2)$

и конечные члены $-4m^2 A + \int_{4m^2}^{\infty} da^2 \tilde{\sigma}(a^2)$. Кроме этих членов есть третья производная δ -функция (член $q^i q^2$ в импульсном пространстве) с хорошо определенным коэффициентом A . Таким образом, существование квадратично расходящегося пропорционального $\partial^i \delta(x)$ члена в ОВК $[J^0, J^i]$ с необходимостью означает существование члена, пропорционального $\partial^i \nabla^2 \delta(x)$ с конечным коэффициентом,

6.2.

$$T(p, q) = \int d^4 x d^4 y \exp(ipx) \exp(iqy) \langle \alpha | TA(x) B(y) C(0) | \beta \rangle;$$

$$\lim_{p_0 \rightarrow \infty} p_0 T(p, q) = i \int d^3 x d^3 y \exp(-ipx) \exp(iqy) \times \\ \times \langle \alpha | TB(y) [A(0, x), C(0)] | \beta \rangle;$$

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 \lim_{p_0 \rightarrow \infty} p_0 T(p, q) = - \int d^3 x d^3 y \exp(-ipx) \exp(-ipy) \times \\ \times \langle \alpha | [B(0, y), [A(0, x), C(0)]] | \beta \rangle;$$

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 T(p, q) = i \int d^4 x d^3 y \exp(ipx) \exp(-iqy) \times \\ \times \langle \alpha | TA(x), [B(0, y), C(0)] | \beta \rangle;$$

$$\lim_{p_0 \rightarrow \infty} p_0 \lim_{q_0 \rightarrow \infty} q_0 T(p, q) = - \int d^3 x d^3 y \exp(-ipx) \exp(-iqy) \times \\ \times \langle \alpha | [A(0, x), [B(0, y), C(0)]] | \beta \rangle.$$

7.1

$$C^{\mu\nu}(q, p) = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} \exp(iqx) \langle p | [J^\mu(x), J^\nu(0)] | p \rangle.$$

Вектора состояния нормированы ковариантно

$$\langle p | p' \rangle = 2p_0 \delta(p - p'),$$

так что размерность векторов состояний равна m^{-2} . Размерность $[J^\mu(x), J^\nu(0)]$ равна m^6 . Наконец, $d^4 x$ имеет размерность m^{-4} . Следовательно, $C^{\mu\nu}$ безразмерно. Так как тензоры, появляющиеся в разложении $C^{\mu\nu}$, также безразмерны, то же относится и к \tilde{F}_i .

7.2.

$$a. \quad i [D(t), P^\mu] = i \int d^3 x x_\alpha [\theta^{\alpha 0}(x), P^\mu] = - \int d^3 x x_\alpha \partial^\mu \theta^{\alpha 0}(x).$$

Возьмем $\mu = 0$:

$$i [D(t), P^0] = - \int d^3 x x_\alpha \partial^0 \theta^{\alpha 0}(x) = \int d^3 x x_\alpha \partial_i \theta^{\alpha i} = \int d^3 x x \partial_i \theta^{ii}(x) = \\ = - \int d^3 x x \theta_i^i(x) = \int d^3 x x \theta^{00}(x) - \int d^3 x x \theta_\mu^\mu(x) = P^0 - \int d^3 x x \theta_\mu^\mu(x).$$

(Здесь использовались сохранение $\theta^{\mu\nu}$ и теорема Гаусса.) Положим теперь $\mu = i$:

$$i [D(t), P^i] = - \int d^3 x x_\alpha \partial^i \theta^{\alpha 0}(x) = - \int d^3 x x x_j \partial^i \theta^{j0}(x) = \\ = \int d^3 x x \theta^{i0}(x) = P^i.$$

Видно, что алгебра коммутаторов $i [D, P^\mu]$ не замыкается при $\mu = 0$, когда дилатационный ток не сохраняется: $\theta_\mu^\mu \neq 0$.

$$б. \quad i [D(t), M^{\mu\nu}] = i \int d^3 x x_\alpha [\theta^{\alpha 0}(x), M^{\mu\nu}] = \\ = - \int d^3 x x x_\alpha (x^\mu \partial^\nu \theta^{\alpha 0} + g^{\alpha\mu} \theta^{\nu 0} + g^{0\mu} \theta^{\alpha\nu}) - \{\mu \leftrightarrow \nu\}.$$

Коммутатор с $M^{\mu\nu}$ вычислен явно, так как при преобразованиях Лоренца $\theta^{\alpha\beta}$ преобразуется как тензор второго ранга. Возьмем сначала $\mu = 0$, $\nu = i$:

$$\begin{aligned} i [D(t), M^{0i}] &= -\int d^3x \{x_\alpha x^0 \partial^i \theta^{\alpha 0}(x) + x^0 \theta^{i0}(x) + \\ &+ x_\alpha \theta^{\alpha i}(x) - x_\alpha x^i \partial_0 \theta^{\alpha 0}(x) - x^i \theta^{00}(x)\} = -\int d^3x \{x_j x^0 \partial^i \theta^{j0}(x) + \\ &+ 2x^0 \theta^{i0}(x) + x_j \theta^{ji}(x) + x_\alpha x^i \partial_j \theta^{\alpha i}(x) - x^i \theta^{00}(x)\} = \\ &= -\int d^3x \{x^0 \theta^{i0}(x) + x_j \theta^{ji}(x) - x^0 \theta^{0i}(x) - x_j \theta^{ij}(x) - \\ &- x^i \theta_j^j(x) - x^i \theta^{00}(x)\} = \int d^3x x x^i \theta_\mu^\mu(x). \end{aligned}$$

(Здесь использовались сохранение $\theta^{\mu\nu}$ и теорема Гаусса.) Рассмотрим случай $\mu = i$, $\nu = j$:

$$\begin{aligned} i [D(t), M^{ij}] &= -\int d^3x \{x_\alpha x^i \partial^j \theta^{\alpha 0}(x) + x^i \theta^{j0}(x) - \{i \leftrightarrow j\}\} = \\ &= -\int d^3x \{-x^i \theta^{j0}(x) + x^i \theta^{j0}(x) - \{i \leftrightarrow j\}\} = 0. \end{aligned}$$

Т. е. как и ожидалось, из общих принципов, $D(t)$ не является лоренцевым скаляром, когда $\theta_\mu^\mu \neq 0$, хотя $D(t)$ и инвариантно относительно вращений.

7.3.

$$\begin{aligned} \text{а. } i [D(t), \varphi(x)] &= i \int d^3y y_\alpha [\theta_C^{0\alpha}(t, y), \varphi(t, x)] + \\ &+ i \int d^3y [\pi^0(t, y) d\varphi(t, y), \varphi(t, x)]. \end{aligned}$$

(Здесь использовалась каноническая формула для D_C^μ) $D(t)$ не чувствительно к выбору тока. ОВК $[\theta_C^{0\alpha}, \varphi]$ был найден в упражнении 2.1. Таким образом,

$$\begin{aligned} i [D(t), \varphi(x)] &= \int d^3y y_\alpha \varphi^\alpha(t, y) \delta(x-y) + d\varphi(x) = \\ &= x_\alpha \varphi^\alpha(x) + d\varphi(x) = \delta_D \varphi(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б. } i [K^\alpha(t), \varphi(x)] &= i \int d^3y [(2y^\alpha y_\nu - g_\nu^\alpha y^2) \theta_C^{0\nu}(t, y) + \\ &+ 2y_\nu \pi^0(t, y) (g^{\nu\alpha} d - \Sigma^{\nu\alpha}) \varphi(t, y) - 2\sigma^{\alpha 0}(t, y), \varphi(t, x)]. \end{aligned}$$

(Здесь опять использовалась каноническая формула для конформного тока.) Коммутаторы φ с первыми двумя членами в выражении для $K_C^{\alpha 0}$ вычисляются тривиально. Для вычисления коммутатора φ с $\sigma^{\alpha 0}$ заметим, что $\sigma^{\mu\nu}$ не зависит от производных полей, так как в противном случае $\partial_\mu \sigma^{\mu\nu}$ зависело бы от вторых производных полей. Это невозможно, если сам \mathcal{L} не зависит от вторых производных, поскольку

$$\partial_\nu \sigma^{\mu\nu} = \nu^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^\beta} [g^{\beta\alpha} d - \Sigma^{\beta\alpha}] \varphi.$$

Следовательно, коммутатор φ с $\sigma^{\alpha 0}$ исчезает, и остается

$$\begin{aligned} i [K^\alpha(t), \varphi(x)] &= \int d^3y [(2y^\alpha y_\nu - g_\nu^\alpha y^2) \varphi^\nu(t, y) + \\ &+ 2y_\nu (g^{\nu\alpha} d - \Sigma^{\nu\alpha}) \varphi(t, y)] \delta(x-y) = (2x^\alpha x_\nu - g_\nu^\alpha x^2) \varphi^\nu(x) - \\ &- 2x_\nu (g^{\nu\alpha} d - \Sigma^{\nu\alpha}) \varphi(x) = \delta_C^\alpha \varphi(x). \end{aligned}$$

7.4. Для масштабной инвариантности необходимо, чтобы $4\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi^\mu} (d+1)\varphi^\mu + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi} d\varphi$, $d=1$. Так как \mathcal{L} пуанкаре-инвариантен, то он может зависеть от φ^μ только через комбинацию $\varphi_\mu\varphi^\mu$. Поэтому без потери общности положим $\mathcal{L}(\varphi_\mu, \varphi) = f\left(\frac{\varphi_\mu\varphi^\mu}{\varphi^4}, \varphi\right)\varphi^4$.

Приведенное выше условие дает теперь для f дифференциальное уравнение: $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0$. Таким образом, наиболее общий масштабно-инвариантный лагранжиан имеет вид $\mathcal{L}(\varphi^\mu, \varphi) = \varphi\left(\frac{\varphi^\mu\varphi_\mu}{\varphi^4}\right)\varphi^4$, где f — произвольная функция.

Для конформной инвариантности лагранжиана вириал поля $V^\mu = \pi^\mu\varphi$ должен быть полной производной. Для этого потребуем, чтобы $2\varphi^\mu\varphi f'\left(\frac{\varphi^\alpha\varphi_\alpha}{\varphi^4}\right) = \partial_\alpha\sigma^{\alpha\mu}$.

Величина $\sigma^{\alpha\mu}$ является функцией φ и φ^μ . Однако она не может зависеть от φ^μ , так как тогда при дифференцировании в правой части равенства возникла бы вторая производная φ , которой нет в левой части. Таким образом, $\sigma^{\alpha\mu} = g^{\alpha\mu}\sigma(\varphi^2)$; $\partial_\alpha\sigma^{\alpha\mu} = 2\sigma'(\varphi^2)\varphi^\mu\varphi$, и условие на вириал приобретает вид $f'\left(\frac{\varphi^\alpha\varphi_\alpha}{\varphi^4}\right) = \sigma'(\varphi^2)$.

Теперь видно, что f' должно быть константой, так как $\sigma'(\varphi^2)$ не может зависеть от φ^μ . Следовательно, наиболее общим однобозонным конформно-инвариантным лагранжианом является $\mathcal{L} = (1/2)\varphi^\mu\varphi_\mu - [\lambda/(4!)]\varphi^4$. При этом:

$$\theta_C^{\mu\nu} = \varphi^\mu\varphi^\nu - g^{\mu\nu}\mathcal{L};$$

$$\sigma^{\mu\nu} = (1/2)g^{\mu\nu}\varphi^2;$$

$$\theta^{\mu\nu} = \varphi^\mu\varphi^\nu - g^{\mu\nu}\mathcal{L} + (1/2)(g^{\mu\nu}\square - \partial^\mu\partial^\nu)\varphi^2.$$

ЛЕКЦИЯ 3

ПОВЕДЕНИЕ СЛАБЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

Д. Гросс

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПРОЦЕССЫ И КИНЕМАТИКА

1.1. Введение

В этих лекциях обсуждается поведение слабых и электромагнитных процессов при высоких энергиях. Основное внимание будет уделено области глубокой неупругости в лептон-адронном рассеянии. Эта тема интересна и еще далека от завершения. Можно даже надеяться, что использование именно слабых и электромагнитных взаимодействий в качестве «зонда» для исследования структуры адронов на малых расстояниях даст решающую информацию об адронах.

Основное преимущество рассеяния лептонов на адронах перед другими процессами состоит в том, что, по крайней мере в низшем порядке, известно, как устроены слабые и электромагнитные взаимодействия лептонов. Рассмотрим, например, рассеяние электронов (позитронов, мюонов) на нуклоне. В низшем порядке по α (постоянной тонкой структуры) амплитуда рассеяния определяется однофотонным обменом (рис. 1). Ее можно разделить на две части: чисто лептонную и адронную вершины. Вообще говоря, следует также учесть радиационные поправки: но наиболее важные из них относятся к лептонам, и их можно вычислить точно. Если предположить, что в амплитуде доминирует однофотонный обмен и лептонная вершина известна (эти предположения можно проверить экспериментально), то можно непосредственно из эксперимента найти амплитуду рассеяния фотона с импульсом q (см. рис. 1) на адронной мишени.

То же справедливо для рассеяния нейтрино на адронах, где в низшем порядке по константе связи амплитуда описывается эффективным лагранжианом \mathcal{L} (l -лептонный, h — адронный):

$$\mathcal{L} = (G/\sqrt{2})j_{\mu}^l J_{\mu}^h + \text{э. с.}$$

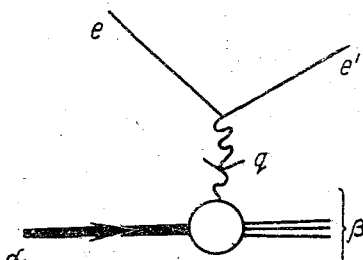


Рис. 1

Таким образом, нейтринные эксперименты определяют амплитуды «рассеяния» слабых токов J_μ^h на адронах (рис. 2). Однако в этом случае анализ реакции зависит от того, существует или нет промежуточный векторный бозон (W -бозон). В дальнейшем будем предполагать, что его нет.

В обоих случаях (электронного и нейтринного рассеяния) изменяются матричные элементы оператора тока между адронными состояниями: $\langle \alpha | J_\mu^{em} | \beta \rangle$ или $\langle \alpha | J_\mu^w | \beta \rangle$, где $|\alpha \rangle$ ($|\beta \rangle$) обозначают начальные (конечные) адронные состояния. Особенность этих экспериментов состоит в том, что знание лептонных вершин

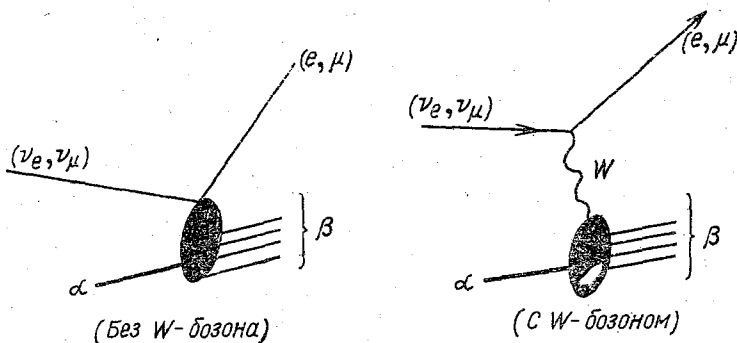


Рис. 2

позволяет варьировать «массу» тока, т. е. массу фотона или W -бозона, а предположение о локальности, т. е. о том, что j_μ^l связан локально с адронным током, позволяет экспериментально определять локальный оператор адронного тока и исследовать структуру адронов на малых расстояниях. Эту ситуацию следует сравнить с чисто адронными реакциями, в которых невозможно ни факторизовать амплитуды, ни измерить локальные операторы вне массовой поверхности.

Хотя здесь и обсуждаются слабые и электромагнитные процессы, основное внимание будет уделяться сильным взаимодействиям. Конечно, эти процессы можно использовать и для проверки наших гипотез относительно слабых и электромагнитных взаимодействий. Так, можно искать поправки к фотонному пропагатору, исследовать T -инвариантность лептонных взаимодействий; проверять CVC и т. д. Однако наибольший интерес представляют именно сильные взаимодействия.

1.2. Перечень возможных экспериментов

Полезно рассмотреть эксперименты, которые следует провести для исследования асимптотического поведения амплитуд. Грубо их можно разделить на две группы: рассеяние реальных фотонов и лептон-адронное рассеяние.

1. **Рассеяние реальных фотонов.** Эти эксперименты включают фоторождение и комптоновское рассеяние: $\gamma + N \rightarrow \pi + N$, $\pi + N^*$, $\rho + N$ и т. д. или $\gamma + N \rightarrow \gamma + (\text{адроны})$. Так как в них фотоны остаются на массовой поверхности, можно ожидать, что поведение таких процессов при высоких энергиях аналогично поведению чисто адронных процессов. Есть, однако, и существенные различия, на которых остановимся ниже.

2. **Лептон-адронное рассеяние.** В этих экспериментах можно изучать зависимость от больших энергий и больших виртуальных масс в «ток-адронном рассеянии». Такие процессы включают:

а. **Упругие форм-факторы.** Здесь измеряется зависимость от переданного импульса электромагнитных (или слабых)

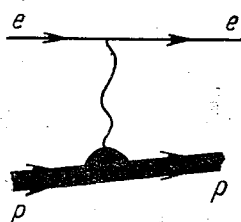


Рис. 3

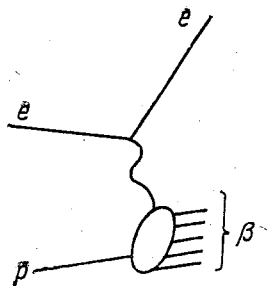


Рис. 4

форм-факторов адронов при упругом электронном (или нейтринном) рассеянии на адронной мишени (рис. 3).

б. Полные «ток-адронные» сечения рассеяния и я. Если измерять сечение рассеяния лептон + адрон \rightarrow лептон + (все что угодно), то можно определить зависимость полного сечения поглощения виртуального фотона (или W -бозона) на адронах от энергии и «массы» фотона (или W -бозона) (рис. 4).

в. **Неупругие форм-факторы.** При измерении сечений, например (лептон) + $N \rightarrow$ (лептон) + (N^* , или $N\pi$, или $N\rho$ и т. д.), можно определить форм-факторы соответствующих токов между однонуклонным состоянием и заданным конечным состоянием (рис. 5).

г. **Процессы аннигиляции.** Эти эксперименты включают $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$, $N\bar{N}$ или (все что угодно) и определяют форм-факторы для времениподобных передач импульса (рис. 6).

д. **Рождение виртуального фотона:** Наблюдая процесс $p + p \rightarrow X + (\mu^+\mu^-)$, можно определить электромагнитные форм-факторы для времениподобных передач импульса (рис. 7).

1.3. Кинематика лептон-адронного рассеяния

Рассмотрим рассеяние лептонов на нуклоне (см. рис. 8), когда конечное состояние не фиксируется. Для описания амплитуды рассеяния будем использовать следующие переменные:

p (p') — начальный (конечный) импульс лептонов;
 P (P_n) — начальный (конечный) импульс адронов;
 $q = p - p'$;
 $\nu = q \cdot P = M(E - E')$, E — энергия в лабораторной системе
 (Л-системе);
 θ — угол рассеяния лептонов в Л-системе;
 $Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2(\theta/2)$ (в пределе $m_l = 0$);
 $s = (q + P)^2 = 2\nu + q^2 + M^2$;
 $x = 1/\omega = Q^2/2\nu$ — скейлингова переменная,

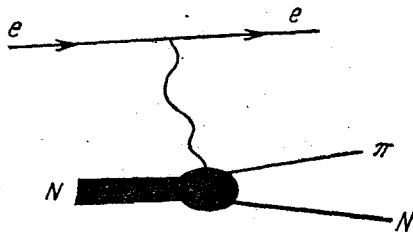


Рис. 5

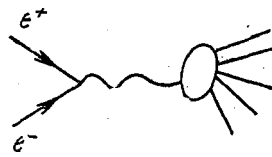


Рис. 6

Адронная вершина зависит от P , q и P_n . Структурные функции, которые определены ниже, зависят от ν и Q^2 .

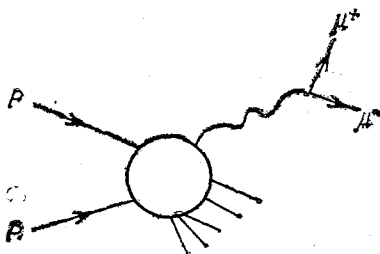


Рис. 7

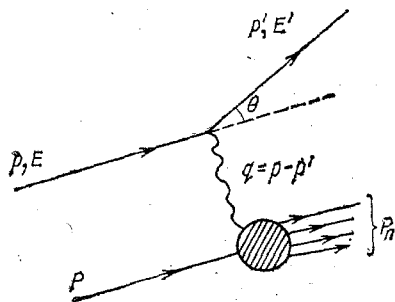


Рис. 8

Обозначения: наша метрика определяется тензором

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \text{ так что } P^2 = P_0^2 - \mathbf{P}^2 = M^2,$$

спиноры нормированы условием $\bar{u}u = 1$, фермионные состояния нормированы так, что

$$\langle p, \sigma | p', \sigma' \rangle = (E/M) (2\pi)^3 \delta^3(p - p').$$

Амплитуда перехода в данное конечное состояние $|n\rangle$ описывается, очевидно, матричными элементами:

$$M = \bar{u}(p', \lambda') \gamma_\mu u(p, \lambda) \frac{e^2}{Q^2} \langle n | J_\mu^{em}(0) | P, \sigma \rangle \quad (1.1)$$

для ep -рассеяния;

$$M = \bar{u}(p', \lambda') \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u(p, \lambda) \frac{G}{\sqrt{2}} \langle n | J_\mu^w(0) | P, \sigma \rangle$$

для νp -рассеяния, где

$$J_\mu^{em} = V_\mu^3 + (1/\sqrt{3}) V_\mu^8; \\ J_\mu^w = (V_\mu^{1+12} + A_\mu^{1+12}) \cos \theta_c + (V_\mu^{4+15} + A_\mu^{4+15}) \sin \theta_c. \quad (1.2)$$

Угол Кабиббо θ_c равен приблизительно 15° , и в большинстве приложений будем полагать, что $\theta_c = 0$.

В экспериментах по глубоконеупругому рассеянию конечные состояния обычно не наблюдаются. Дифференциальные сечения такого типа инклюзивных реакций определяются суммой вероятностей перехода во все адронные состояния и усреднением по начальным спиновым состояниям, т. е. пропорциональны

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda'} [\bar{u}(p', \lambda') O_\mu u(p, \lambda)]^* [\bar{u}(p', \lambda') O_\nu u(p, \lambda)] \times \\ \times \frac{1}{2} \sum_{\sigma, n} \langle P, \sigma | J_\mu^+(0) | n \rangle \langle n | J_\nu(0) | P, \sigma \rangle,$$

где $O_\mu = \gamma_\mu$ для электромагнитных взаимодействий (ep) и $O_\mu = = \gamma_\mu (1 + \gamma_5)$ для слабых взаимодействий (νp).

Усреднение и суммирование по спину лептонов приводят к тензору

$$\omega_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \text{Sp} [\hat{p}' O_\mu \hat{p} O_\nu] = \\ = 4 [p'_\mu p_\nu + p'_\nu p_\mu - g_{\mu\nu} p p' - i \varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} p_\sigma p'_\lambda] \\ \text{для слабого взаимодействия;} \\ 2 [p_\mu p'_\nu + p'_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p p'] \\ \text{для электромагнитного взаимодействия.} \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

Всюду мы пренебрегаем лептонными массами, так что слабый лептонный ток сохраняется. Член $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda}$ нарушает четность и возникает из-за интерференции между векторным и аксиальным токами, следовательно, он не должен присутствовать в случае ep -рассеяния.

Аналогично определим адронный тензор

$$W_{\mu\nu}^{ab} = \frac{1}{2} \sum_{n, \sigma} \langle P, \sigma | J_\mu^a(0) | n \rangle \langle n | J_\nu^b(0) | P \rangle (2\pi)^3 \delta^4(P + q - P_n) \quad (1.4)$$

для произвольных $SU(3)$ -токов. Здесь a и b есть $SU(3)$ -индексы. Выразим теперь тензор $W_{\mu\nu}^{ab}$ через коммутатор двух токов. Для этой цели представим δ -функцию в (1.4) в виде $(2\pi)^{-4} \int \exp[i(P_n - P - q)x] dx$ и воспользуемся трансляционной инвариантностью, чтобы записать

$$\begin{aligned} \langle P, \sigma | J_{\mu}^a(x) | n \rangle &= \langle P, \sigma | \exp(+i \mathcal{P}x) J_{\mu}^a(0) \exp(-i \mathcal{P}x) | n \rangle = \\ &= \exp\{-i(P_n - P)x\} \langle P | J_{\mu}^a(0) | n \rangle. \end{aligned}$$

Теперь, используя полноту состояния $|n\rangle$, можно переписать (1.4) следующим образом:

$$W_{\mu\nu}^{ab}(P, q) = \int d^4x \frac{\exp(iqx)}{2\pi} \langle P | J_{\mu}^a(x) J_{\nu}^b(0) | P \rangle. \quad (1.5)$$

(Здесь подразумевается усреднение по спину.)

Иногда удобно записать (1.5) через коммутатор двух токов. Это возможно потому, что

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^4x}{2\pi} \exp(iqx) \langle P | J_{\nu}^b(0) J_{\mu}^a(x) | P \rangle = \\ &= \sum_n \langle P | J_{\nu}^b(0) | n \rangle \langle n | J_{\mu}^a(0) | P \rangle (2\pi)^3 \delta(P - q - P_n) \end{aligned}$$

исчезает, так как в Л-системе $E_n = M - q_0 \leq M$, а барионных состояний с массой меньше нуклонной массы нет. Для $q_0 > 0$ можно, следовательно, вычесть этот член из (1.5), и

$$W_{\mu\nu}^{ab}(P, q) = \int \frac{d^4x}{2\pi} \exp(iqx) \langle P | [J_{\nu}^a(x) J_{\nu}^b(0)] | P \rangle. \quad (1.6)$$

Тензор $W_{\mu\nu}^{ab}$ обладает следующими свойствами.

1. Кроссинг-симметрией.

$$W_{\mu\nu}^{ab}(P, q) = -W_{\nu\mu}^{ba}(P, -q). \quad (1.7)$$

Это свойство легко получить из (1.6).

2. Положительностью. Если ток J_{μ}^a — эрмитов, то $W_{\mu\nu}^{ab}$ — положительно определенная форма, т. е.

$$\eta_{\mu}^* W_{\mu\nu}^{ab} \eta_{\nu} \geq 0 \quad (1.8)$$

для произвольного 4-вектора η_{μ} . Это непосредственно следует из определения (1.4).

3. Поперечностью. Если J^a (J^b) — сохраняющийся ток (например, электромагнитный ток), то $q_{\mu} W_{\mu\nu}^{ab}$ ($W_{\mu\nu}^{ab} q_{\nu}$) исчезает.

Определим теперь инвариантные амплитуды для двух интересных случаев. Для электромагнитных взаимодействий

$$W_{\mu\nu}(P, q) = \frac{1}{M^2} \left(P_\mu - \frac{\mathbf{v}}{q^2} q_\mu \right) \left(P_\nu - \frac{\mathbf{v}}{q^2} q_\nu \right) W_2(q^2, \mathbf{v}) - \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) W_1(q^2, \mathbf{v}), \quad (1.9)$$

где

$$W_i(q^2, \mathbf{v}) = -W_i(q^2, -\mathbf{v}).$$

Для слабых взаимодействий

$$W_{\mu\nu}^{(-+)}(P, q) = \frac{1}{M^2} P_\mu P_\nu W_2\left(\frac{\mathbf{v}}{\tilde{\mathbf{v}}}\right)(q^2, \mathbf{v}) - g_{\mu\nu} W_1\left(\frac{\mathbf{v}}{\tilde{\mathbf{v}}}\right)(q^2, \mathbf{v}) - i\varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} (P_\sigma q_\lambda / 2M^2) W_3\left(\frac{\mathbf{v}}{\tilde{\mathbf{v}}}\right)(q^2, \mathbf{v}) + \dots, \quad (1.10)$$

где знаки « $-$ » и « $+$ » обозначают $(1 - i2)$ - и $(1 + i2)$ -компоненты токов. Теперь токи не сохраняются, и возникает шесть структурных функций. Члены, содержащие q_μ или q_ν , опущены, так как при умножении на лептонный тензор $\omega_{\mu\nu}$ они дают нуль в приближении нулевых лептонных масс. Кроссинг-симметрия (1.7) означает, что

$$W_i^{\mathbf{v}}(q^2, \mathbf{v}) = -W_i^{\tilde{\mathbf{v}}}(q^2, -\mathbf{v}).$$

Легко выразить дифференциальное сечение (зависящее от угла и энергии лептона) через структурные функции. Приведем результат:

$$\frac{d^2 \sigma^{ep}}{d\Omega' dE'} = \frac{EE'}{\pi} \frac{d^2 \sigma}{dQ^2 d\nu} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\alpha^2 \cos^2(\theta/2)}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \left[W_2^{em}(q^2, \mathbf{v}) + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} W_1^{em}(q^2, \mathbf{v}) \right] \text{ для } ep; \\ \frac{G^2 (E')^2}{2\pi^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[W_2\left(\frac{\mathbf{v}}{\tilde{\mathbf{v}}}\right)(q^2, \mathbf{v}) + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} W_1\left(\frac{\mathbf{v}}{\tilde{\mathbf{v}}}\right)(q^2, \mathbf{v}) \mp \right. \\ \left. \mp \frac{E + E'}{2M} W_3\left(\frac{\mathbf{v}}{\tilde{\mathbf{v}}}\right)(q^2, \mathbf{v}) \right] \text{ для } \left(\frac{\mathbf{v}}{\tilde{\mathbf{v}}}\right) p. \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Заметим, что выражения, вынесенные за скобки, совпадают с дифференциальными сечениями рассеяния на точечных частицах; в случае ep -рассеяния это моттовское сечение. При фиксированных Q^2 и ν и больших E величины $\sin^2(\theta/2) = Q^2/4EE' \rightarrow 0$ и $\cos^2(\theta/2) \rightarrow 1$, и, следовательно,

$$\frac{d^2 \sigma^{ep}}{d\Omega' dE'} \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^2(\theta/2)} \right) W_2(q^2, \mathbf{v}) + \dots \quad (1.12)$$

Отметим следующие свойства (1.11),

1. **Локальность.** Приведенная зависимость сечений рассеяния (1.11) от θ — следствие локальной связи слабых и электромагнитных токов и предположения об однофотонном обмене. Таким образом, проверка того, действительно ли отношение

$$\frac{d^2 \sigma / d\Omega' dE'}{(d\sigma/d\Omega')_{\text{Mott}}} = W_1(q^2, \nu) + 2 \operatorname{tg}^2(\theta/2) W_2(q^2, \nu)$$

линейно по $\operatorname{tg}^2(\theta/2)$ при фиксированных q^2 и ν (график Розенблюта), есть проверка именно этих предположений.

2. **Положительность.** Условие положительности (1.8) приводит к различным неравенствам между W_i . Эти неравенства выражают положительность полных сечений рассеяния виртуальных фотонов (или W -бозонов) с различными спиральностями. Их можно легко получить, если в качестве η выбрать вектор поляризации фотона или W -бозона.

Вне массовой поверхности фотон описывается как поперечным, так и продольным вектором поляризации ε . Для поперечных фотонов $\varepsilon q = 0$, $\varepsilon^2 = -1$ и [в Л-системе, где $P = (M, 0)$] $\sigma_T \sim \varepsilon_i^* W_{ij} \varepsilon_j = W_1$. Для продольных фотонов $\varepsilon \parallel \mathbf{q}$ и

$$\sigma_S \sim q_i W_{ij} q_j = \frac{1}{M^2} \frac{\nu^2}{(Q^2)^2} W_2(q^2)^2 + \left(q^2 - \frac{q^2}{Q^2} \right) W_1.$$

Так как $q^2 = Q^2 + \nu^2/M^2$, то $\sigma_S \sim (1 + \nu^2/M^2 Q^2) W_2 - W_1$.

Выбирая нормировку, предложенную Хэндом, получаем

$$\sigma_T(\nu, q^2) = \frac{4\pi\alpha M}{\nu - q^2/2} W_1(q^2, \nu) \xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} \sigma_\nu(\nu), \quad (1.13)$$

где $\sigma_\nu(\nu)$ — сечение поглощения реальных фотонов, и

$$\sigma_S(\nu, q^2) = \frac{4\pi\alpha M}{\nu - q^2/2} \left[\left(1 + \frac{\nu^2}{Q^2 M^2} \right) W_2 - W_1 \right] \xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} 0. \quad (1.14)$$

Исчезновение σ_S для реальных фотонов не очевидно из (1.14); чтобы убедиться в правильности этого утверждения, нужно вернуться к (1.9) и найти кинематические нули W_2 и W_1 , исключая бесконечности из $W_{\mu\nu}$ при $q^2 = 0$. Положительность этих сечений рассеяния приводит к неравенствам

$$0 \leq W_1 \leq \left(1 + \frac{\nu^2}{M^2 Q^2} \right) W_2. \quad (1.15)$$

В случае нейтрино нужно учесть различие между правой и левой поляризациями. Член W_3 , не сохраняющий четности, дает разные вклады в эти сечения. Вид σ_S остается прежним,

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \sigma_R \\ \sigma_L \end{array} \right) &\sim \varepsilon_i^* W_{ij} \varepsilon_j = |\varepsilon|^2 W_1 \mp \frac{i}{2M} (\bar{\varepsilon}^* \times \varepsilon) \mathbf{q} W_3 = \\ &= \left(W_1 \mp \frac{1}{2M} \sqrt{\frac{\nu^2}{M^2} - q^2} W_3 \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$0 \leq \frac{1}{2M} \sqrt{v^2 + M^2 Q^2} |W_3| \leq W_1 \leq \left(1 + \frac{v^2}{M^2 Q^2}\right) W_2. \quad (1.16)$$

В пределе $q^2 \rightarrow 0$ лептонный ток пропорционален q_μ , и он выделяет дивергенцию аксиального тока. Если предположить, что при $q^2 = 0$ в дивергенции аксиального тока доминирует вклад пионного полюса, то сечение рассеяния может быть связано с сечением рассеяния π -мезонов. Это позволяет проверить РСАС независимо от предположений, касающихся коммутаторов токов.

3. Изотопический спин. Рассмотрим рассеяние ν или $\bar{\nu}$ на протоне p или нейтроне n . Нейтрино взаимодействует с J^{1-12} (W^- -мезоном), а антинейтрино — с J^{1+12} (W^+ -мезоном). Зарядовая симметрия требует, чтобы сечения рассеяния WN удовлетворяли соотношению $\sigma_i(W^\pm p) = \sigma_i(W^\mp n)$, где индекс i обозначает R , L или S . Если вспомнить, что в выражении для νN -сечения рассеяния вклад W_3 меняет знак при переходе от ν к $\bar{\nu}$ и что $W_3 \sim \sigma_R - \sigma_L$, то получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\nu p) &= \alpha\sigma_S(W^- p) + \beta\sigma_R(W^- p) + \gamma\sigma_L(W^- p); \\ \sigma(\bar{\nu} p) &= \alpha\sigma_S(W^+ p) + \beta\sigma_L(W^+ p) + \gamma\sigma_R(W^+ p); \\ \sigma(\nu n) &= \alpha\sigma_S(W^+ p) + \beta\sigma_R(W^+ p) + \gamma\sigma_L(W^+ p); \\ \sigma(\bar{\nu} n) &= \alpha\sigma_S(W^- p) + \beta\sigma_L(W^- p) + \gamma\sigma_R(W^- p). \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Таким образом, $\sigma(\nu p) - \sigma(\bar{\nu} n)$ определяет $\sigma_R(W^- p) - \sigma_L(W^- p) \sim W_3^{\nu p}$. Аналогично $\sigma(\nu n) - \sigma(\bar{\nu} p) \sim \sigma_R(W^+ p) - \sigma_L(W^+ p) \sim W_3^{\bar{\nu} p}$. Изоскалярную часть W_3 можно найти, измеряя разность дифференциальных сечений рассеяния ν и $\bar{\nu}$ на тяжелых ядрах, которые содержат приблизительно равные числа p и n . Аналогично сумма $\sigma(\nu p) + \sigma(\nu n) + \sigma(\bar{\nu} p) + \sigma(\bar{\nu} n)$ — изоскаляр; она пропорциональна $\sigma_L + \sigma_R + \sigma_S$, т. е. не содержит W_3 .

ГЛАВА 2

УПРУГИЕ ФОРМ-ФАКТОРЫ И ФОТОН-АДРОННОЕ РАССЕЯНИЕ

2.1. Кинематические области

В этой главе будут обсуждаться экспериментальные и теоретические вопросы, касающиеся упругого ep -рассеяния, фоторождения и комптоновского рассеяния. Эти процессы лежат на границе физических областей для неупругого лептон-адронного рассеяния. Этот факт иллюстрируется рис. 9, на котором показаны различные физические процессы в плоскости (Q^2, ν) . Физическая область ep -рассеяния определяется условием $s = (p + q)^2 \geq M^2$.

Остановимся подробнее на различных процессах, приведенных на рис. 9:

а) упругое рассеяние соответствует $2\nu = Q^2$ (вдоль этой прямой измеряется упругий форм-фактор как функция Q^2);

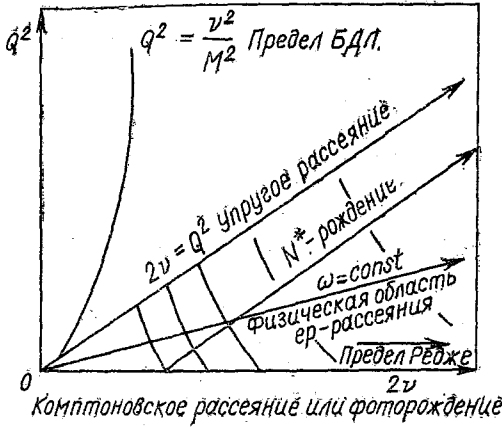


Рис. 9

б) фоторождение и комптоновское рассеяние соответствуют $Q^2 = 0$;

в) неупругое рождение определенных состояний идет вдоль линии с фиксированным $s = 2\nu - Q^2$.

Теоретиками обсуждаются различные асимптотические пределы: а) реджевский предел, т. е. большие ν при фиксированной внешней массе Q^2 ; б) скейлинговый предел (или предел Бьёркена), соответствующий большому ν и Q^2 при фиксированном $x = Q^2/2\nu$; в) предел Бьёркена — Джонсона — Лоу (БДЛ), соответствующий большому q_0 и фиксированным q и p .

В этом пределе $|q^2| \approx |q_0^2| \sim |\nu/M|^2$, и возникающая парабола лежит вне физической области. Однако именно в этом пределе из алгебры токов получают интересные следствия.

2.2. Электромагнитные форм-факторы

Структурные функции для упругого электрон (или мюон-)нуклонного рассеяния определяются зарядовыми или магнитными форм-факторами:

$$\left. \begin{aligned} W_2(q^2, \nu) &= M\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2}\right) \frac{[G_E(q^2)]^2 - \frac{q^2}{4M^2} [G_M(q^2)]^2}{1 - \frac{q^2}{4M^2}}; \\ W_1(q^2, \nu) &= -M\delta\left(\nu + \frac{q^2}{2}\right) \frac{q^2}{4M^2} [G_M(q^2)]^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Зарядовый и магнитный форм-факторы отвечают соответственно продольной и поперечной поляризациям фотонов и в терминах дираковских форм-факторов имеют вид

$$\left. \begin{aligned} G_E(q^2) &= F_1(q^2) - (q^2/4M^2)\mu F_2(q^2); \\ G_M(q^2) &= F_1(q^2) + \mu F_2(q^2), \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где $F_1(0) = F_2(0) = 1$, а μ — аномальный магнитный момент,

Все экспериментальные данные о форм-факторах можно свести к дипольной формуле и «масштабному» закону:

$$\left. \begin{aligned} G_E^p(q^2) &= \frac{G_M^p(q^2)}{\mu_p} = \frac{G_M^n(q^2)}{\mu_n} = \frac{1}{[1 - q^2/(0,71 \text{ ГэВ}^2)]^2}; \\ G_E^n(q^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Эти подгонки хорошо согласуются с данными вплоть до $|q^2| \sim 40 \text{ ГэВ}^2$, хотя при самых больших q^2 наблюдаются некоторые отклонения как от масштабного закона, так и от дипольной формулы. О других электромагнитных форм-факторах до сих пор мало что из-

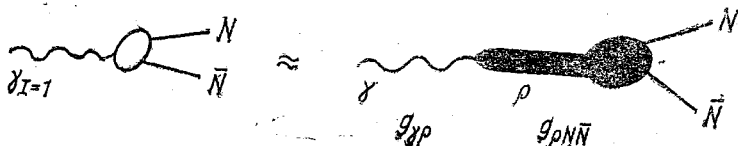


Рис. 10

вестно. Есть, однако, недавние данные СЛЯК, указывающие на то, что форм-факторы перехода нуклона в нуклонные резонансы при больших q^2 ведут себя как $1/(q^2)^2$.

В нерелятивистской квантовой механике форм-факторы представляют собой фурье-преобразования от пространственного распределения заряда. Быстрое падение по q^2 означает, следовательно, что нуклонный заряд размазан. Большинство попыток объяснить q^2 -поведение форм-факторов основано на безвычитательных дисперсионных соотношениях. Обычно $G(q^2)$ записывают в виде

$$G(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds \rho(s)}{s - q^2 - i\epsilon}$$

и предполагают, что скачок $\rho(s)$ определяется в основном ближайшими сингулярностями. Исторически гипотеза о существовании векторных мезонов возникла именно из таких попыток описать электромагнитные форм-факторы. Если предположить «векторную доминантность», т. е. что вклад известных векторных мезонов (ρ , ω , ϕ) доминирует в дисперсионном соотношении (рис. 10), то

$$G^{I=1}(q^2) \sim \frac{g_{\gamma\rho} g_{\rho NN}}{1 - q^2/m_\rho^2}$$

Быстрое падение форм-факторов при больших q^2 объясняется тогда как «хвост» от вклада ρ -полюса.

Из дипольной формулы очевидно, что векторная доминантность не приводит к количественному описанию зависимости от q^2 . Было

сделано множество попыток улучшить положение введением дополнительных полюсов. Ни одна из них не была особенно успешной, и до сих пор нет адекватной теории электромагнитных форм-факторов.

2.3. Фотон-адронное рассеяние

1. Фоторождение. Обычно считается, что сечения реакций фоторождения подобны адронным сечениям. Действительно, двухчастичные реакции фоторождения как вперед, так и назад носят дифракционный характер и имеют угловое распределение, аналогичное распределению в адронных процессах.

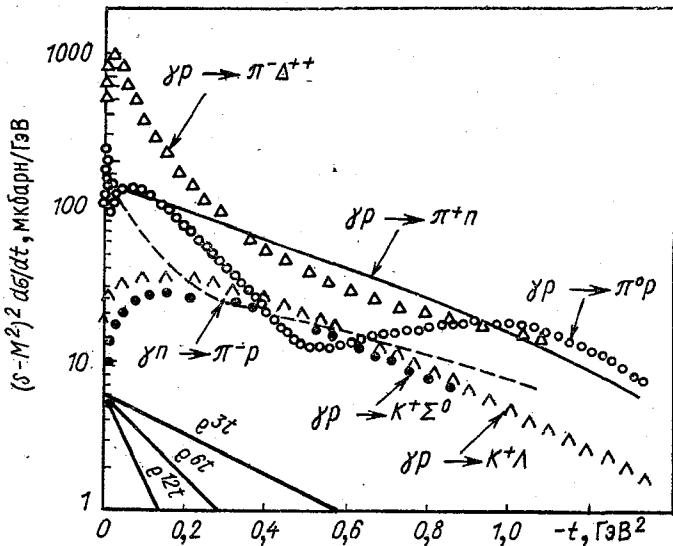


Рис. 11

В этих реакциях можно обнаружить следующие закономерности.

а. Для фоторождения ρ , ω и ϕ сечения рассеяния ведут себя как $d\sigma/dt \sim f(t)$. Этого и следует ожидать, так как квантовые числа t -канала совпадают с вакуумными.

б. Сечения фоторождения вперед πN , $\pi \Delta$, ηN , $K\Sigma$, $K\Delta$ падают степенным образом (рис. 11):

$$\frac{d\sigma}{dt} \approx s^{\alpha-2} f(t); f(t) \sim \exp(3t) \quad (2.4)$$

$\alpha - 0,2 \leq \alpha \leq 0,2$. Во всех этих реакциях в t -канале можно обменяться пионом или другими псевдоскалярными мезонами. Поведение s^{-2} соответствует как раз простому обмену мезонами,

в. Рассеяние назад, например $\gamma + N \rightarrow N + \pi$, ведет себя как

$$d\sigma/du \approx \frac{1}{s^3} f(u). \quad (2.5)$$

Степень s^{-3} не соответствует тому, что можно было бы ожидать от обмена нуклоном в u -канале, приводящего к зависимости s^{-1} .

2. Комptonовское рассеяние. Полное сечение фотопоглощения измерено вплоть до 20 ГэВ. Результаты измерений соответствуют утверждению, что сечения рассеяния фотонов с фиксированной массой аналогичны адронным сечениям. Полное сечение фотопоглощения, определяющее мнимую часть амплитуды комптоновского рассеяния вперед, при высоких энергиях выходит на постоянное значение, приблизительно равное 125 мкбарн (рис. 12).

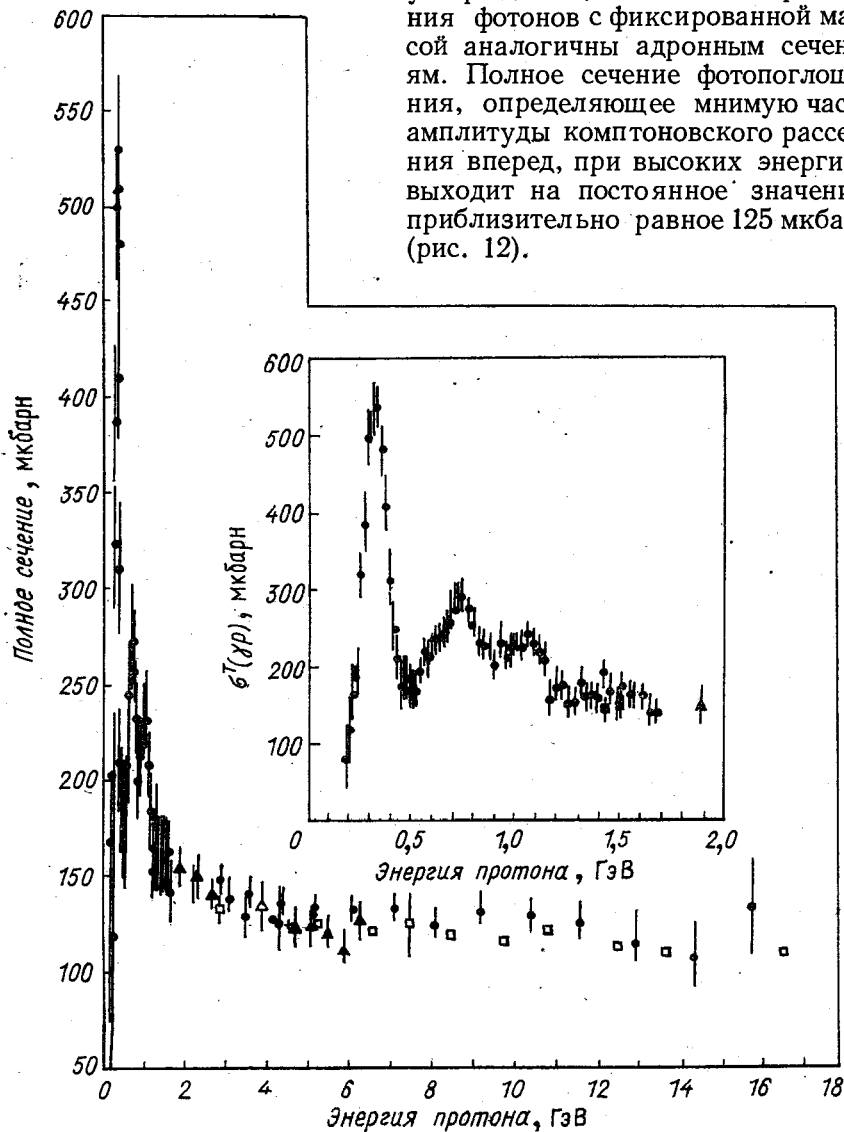


Рис. 12

2.4. Полюса Редже и фиксированные полюса в слабых амплитудах*

Есть много указаний на то, что при высоких энергиях сильные взаимодействия описываются полюсами Редже в плоскости углового момента. Хотя экспериментально и не доказано, что эти полюса объясняют все особенности поведения адронов при высоких энергиях, однако в настоящее время считаются общепринятыми следующие положения.

1. В неупругих процессах с обменом невакуумными квантовыми числами (например, $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$) доминируют движущиеся полюса Редже. Так что дифференциальное сечение рассеяния ведет себя как

$$\frac{d\sigma}{dt} \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \beta(t) s^{[2\alpha(t)-1]},$$

где траектория Редже $\alpha(t) = \alpha_0 + \alpha't$ приблизительно линейна и $\alpha_0 \approx 1/2$ для октетных траекторий (на них лежат векторные и тензорные мезоны) и меньше нуля для процессов с экзотическими квантовыми числами в t -канале (например, для $I = 2$ или 27-плета).

2. Сечения упругих процессов, в которых квантовые числа в t -канале совпадают с вакуумными (например, $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$), при высоких энергиях выходят на постоянное значение $\frac{d\sigma}{dt} \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \text{const}$; $\sigma_{\text{tot}} \underset{s \rightarrow \infty}{\rightarrow} \text{const}$. Природа вакуумной сингулярности до сих пор не ясна.

Даже если принять модель полюсов Редже для адронных процессов, остается вопрос об асимптотическом поведении слабых процессов, т. е. о рассеянии слабых или электромагнитных токов на адронах. Есть ли основания думать, что $W_i(q^2, \nu)$ при фиксированных q^2 и больших ν описываются полюсами Редже? На этот вопрос можно дать два ответа. Мы ожидаем, что если некоторый полюс появляется в адронной парциальной амплитуде при $j = \alpha(t)$, то он должен проявиться и во всех слабых парциальных амплитудах с теми же квантовыми числами. В то же время, поскольку слабые амплитуды (в низшем порядке по константе связи α или G) не ограничены нелинейным условием унитарности, они могут содержать сингулярности по j , запрещенные для сильных амплитуд.

Рассмотрим слабый процесс $W + A \rightarrow B + C$, где W — фотон или слабый ток с фиксированной массой, а A, B, C — адроны. Покажем, что в этих процессах должны появиться полюса Редже. Действительно, рассмотрим уравнение Бете — Солпитера, схематически изображенное на рис. 13. Ядро этого интегрального уравнения — сильная амплитуда и поэтому должно также входить в уравнение Бете — Солпитера для сильных процессов с теми же кванто-

* Здесь и далее под слабыми амплитудами понимают амплитуды, вычисленные в первом порядке по слабому или электромагнитному взаимодействию — *Прим. пер.*

выми числами в t -канале. Сингулярности по угловому моменту в t -канале в сильных амплитудах возникают из-за нулей детерминанта Фредгольма этого ядра при $j = \alpha(t)$. Поэтому они должны появиться и в слабых амплитудах.

Более строгие аргументы в пользу этого утверждения следуют из условия унитарности в t -канале

$$\text{Im } A_j(W + B \rightarrow A + C) = \sum_n A_j^*(W + B \rightarrow n) A_j(n \rightarrow A + C), \quad (2.6)$$

где n — адронное состояние. Если предположить, что слабые амплитуды аналитичны в некоторой области j -плоскости, то можно

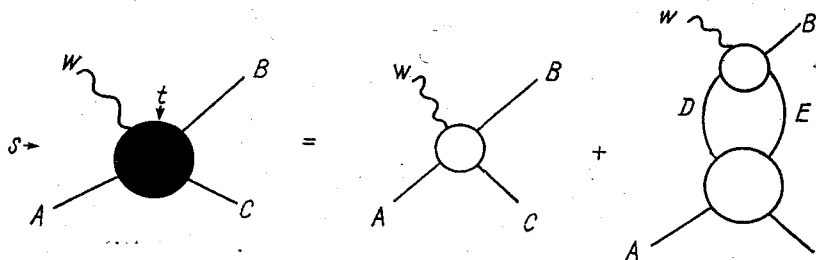


Рис. 13

продолжить (2.6) на комплексные j . Тогда если сильная амплитуда $A_j(n \rightarrow A + C)$ имеет полюс при $j = \alpha(t)$, то он войдет и в слабую амплитуду $A_j(W + B \rightarrow A + C)$.

Слабые амплитуды могут содержать, однако, сингулярности, которых нет в сильных амплитудах. В частности, если условие унитарности для сильных амплитуд, например

$$a^\pm(j, t) - a^\pm(j^*, t)^* = \rho(t) a^\pm(j, t) a^\pm(j^*, t)^*, \quad (2.7)$$

не согласуется с существованием фиксированного полюса при $j = j_0$ в адронных парциальных амплитудах, то для слабых амплитуд (в низшем порядке по константе связи) оно является линейным соотношением и не исключает фиксированных полюсов по j . Чтобы понять, где эти фиксированные полюса могут проявиться, рассмотрим формулы Редже для бесспиновых частиц.

Разложим амплитуду рассеяния $A(s, t)$ в ряд по парциальным волнам в t -канале. Используя преобразование Зоммерфельда—Ватсона, ее можно записать в виде

$$A(s, t) = -\frac{1}{2\pi} \oint dj \frac{2j+1}{\sin \pi j} \{a^+(j, t) [P_j(-Z_t) + P_j(Z_t)] + a^-(j, t) [P_j(-Z_t) - P_j(Z_t)]\}, \quad (2.8)$$

где контур интегрирования охватывает положительную полуось, а Z_t — косинус угла рассеяния в системе центра инерции в t -ка-

нале. Парциальные волны с данной сигнатурой определяются формулой

$$a^{\pm}(j, t) = \frac{1}{\pi} \int_{Z_0}^{\infty} dZ_t Q_j(Z_t) [A_s(t, Z_t) \pm A_u(t, Z_t)], \quad (2.9)$$

где A_s (A_u) — абсорбтивная часть $A(s, t)$ в s (u)-канале. Это определение парциальных амплитуд Грибова — Фруассара приводит к полюсам при $j = -1, -2, -3, \dots$, так как Q_j имеет простые полюса при отрицательных целых значениях j . Такие нефизические значения j называются попсепсе-значениями. Для частиц со спином попсепсе-значения j могут сдвигаться на целые положительные j .

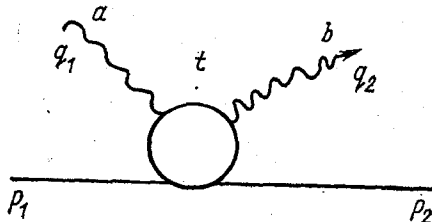


Рис. 14

Фактически они возникают для отрицательных значений орбитального момента, и если s — максимальный спин в t -канале, то попсепсе-значениями будут $j = s - 1, s - 2, \dots$. Фиксированный полюс не может находиться при физическом значении j в парциальной амплитуде с правильной сигнатурой, так как тогда физическая парци-

альная волна обращалась бы в бесконечность. Например, в случае (вектор) + (скаляр) \rightarrow (вектор) + (скаляр) максимальный спин в t -канале есть 2, поэтому могут возникнуть фиксированные полюса при $j = 1, 0, -1$. Так как для исключения этих фиксированных полюсов нет веских оснований, посмотрим, к каким следствиям они приводят. Возможны два случая.

1. Правильная сигнатура. Такие фиксированные полюса, например в $a^-(s, t)$ при $j = -1$, приводят к степенной асимптотике с фиксированной степенью $A(s, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \frac{\beta(t)}{s}$. Они не дают

вклада в асимптотическое поведение абсорбтивной части, если только не пересекаются с движущимися полюсами при некоторых значениях t .

2. Неправильная сигнатура. Такие фиксированные полюса, например $j = -1$ для $a^+(j, t)$, не дают вклада в асимптотическое поведение амплитуды при больших s .

Имеются ли основания предполагать, что эти полюса действительно существуют? Классическим примером необходимости фиксированных полюсов служит «рассеяние» изовекторных токов. Рассмотрим рассеяние изотопического тока (с виртуальной массой q^2) на адроне с нулевым спином (рис. 14). Из одновременных коммутационных соотношений для плотностей изотопических зарядов можно

получить правило сумм Адлера — Фубини — Дашена — Гелл-Мана:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv \operatorname{Im} A^{ab}(q_1^2, q_2^2, \nu, t) = \varepsilon_{abc} \langle P_1 | J^c(0) | P_2 \rangle = \varepsilon_{abc} f^c(t), \quad (2.10)$$

где абсорбтивная часть амплитуды дается следующим выражением: $P_\mu P_\nu \operatorname{Im} A^{ab} + \dots$, где $P = P_1 + P_2$, $\nu = (P_1 + P_2)(q_1 + q_2)$, $t = (P_1 - P_2)^2$. Отсюда можно получить, что разложение по парциальным амплитудам A^{ab} содержит фиксированный полюс при $j = 1$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что вычет парциальной амплитуды с отрицательной сигнатурой (2.9) при $j = -1$, где

$$Q_j \approx \frac{1}{j+1},$$

дается формулой, совпадающей с (2.10). Для амплитуды A^{ab} , которая есть спин-флипповая амплитуда в t -канале, $J = +1$ является поппепсе-значением, соответствующим $l = -1$. В то же время можно убедиться в существовании фиксированного полюса в амплитуде с правильной сигнатурой при $J = 1$, исследуя асимптотическое поведение $A^{ab}(\nu, t, q_1^2, q_2^2)$ при $\nu \rightarrow \infty$. Сингулярность при $j = \alpha(t)$ в $A_j^{ab(\pm)}(t, q_1^2, q_2^2)$ дает вклад в A^{ab} , убывающий как $\nu^{\alpha(t)-2}$ (из-за двух импульсов в определении A^{ab}). Но

$$\begin{aligned} A^{ab}(\nu, t, q_1^2, q_2^2) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{\operatorname{Im} A^{ab}(\nu', t, q_1^2, q_2^2) d\nu'}{\nu' - \nu} \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{1}{\pi\nu} \int \operatorname{Im} A^{ab}(\nu', t, q_1^2, q_2^2) d\nu' = -\frac{\varepsilon_{abc} f^c(t)}{\pi\nu}. \end{aligned}$$

Таким образом, получена зависимость, отвечающая вкладу фиксированного полюса в $A_j^{ab(-)}(t, q_1^2, q_2^2)$ с вычетом, пропорциональным $\varepsilon_{abc} f^c(t)$.

Заметим также, что вычет $f^c(t)$ не зависит от q_1^2 и q_2^2 . Это соответствует тому, что скачки A^{ab} по q_1^2 и q_2^2 связаны с амплитудами адронных процессов, которые не содержат фиксированных полюсов. Так, при $q_1^2 \approx q_2^2 \approx m_\rho^2$

$$A^{ab} = \frac{T^{ab}}{(q_1^2 - m_\rho^2)(q_2^2 - m_\rho^2)},$$

где T^{ab} — амплитуда рассеяния ρ -мезона.

К сожалению, амплитуду A^{ab} нельзя наблюдать непосредственно, так как нет заряженных фотонов, а в комптоновском рассеянии правая часть (2.10) исчезает и не может поэтому дать информацию о вкладе неподвижного полюса при $j = 1$. Фиксированный полюс может быть существенным в комптоновском рассеянии только для амплитуды с положительной сигнатурой при $j = 1$.

Если мы хотим, чтобы полюс Померанчука был связан с фотонами, то необходимо вводить либо фиксированный полюс с неправильной сигнатурой при $j = 1$, либо сингулярный реджевский вычет, чтобы сократить кинематический нуль.

Другие фиксированные полюса могут проявиться в следующих процессах.

1. В комптоновском рассеянии. Гилман утверждает, основываясь на анализе дисперсионных соотношений, что в комптоновском рассеянии необходим фиксированный полюс при $j = 0$ с большим вычетом. Однако аргументом против существования фиксированных полюсов в спиральных амплитудах рассеяния фотонов на нуклонах является успешная проверка правила сумм Дрелла — Хёрна — Герасимова. Это правило сумм фактически является свёрхсходящимся соотношением, и его вывод основан на предположении об отсутствии фиксированного полюса при $j = 0$.

2. При фоторождении. Для процессов, включающих только один ток, нет теоретических аргументов в пользу существования фиксированных полюсов. Однако в экспериментальных данных есть некоторые указания на степенное поведение сечений с фиксированной степенью в реакциях $\gamma + N \rightarrow (\text{мезон}) + N$, отвечающее особенности при $j = 0$ (обмен π -мезоном) и в рассеянии назад $\gamma + N \rightarrow N + (\text{мезон})$ с особенностью при $j = 3/2$, которая не сводится к нуклонному обмену.

В приложениях алгебры токов и при выводе правил сумм будут необходимы дополнительные предположения об асимптотическом поведении слабых амплитуд. Можно полагать (это мы и будем делать в дальнейшем), что слабые амплитуды ограничены s^1 при обмене вакуумной особенностью $s^{1/2}$ для $I = 1$ и квантовых чисел октета в t -канале и $s^{-\nu}$ для $I = 2$ и обмена 27-плетом.

ГЛАВА 3

НЕУПРУГОЕ ЭЛЕКТРОН-АДРОННОЕ РАССЕЯНИЕ

3.1. Теоретические ожидания

Рассмотрим в этой главе результаты недавних экспериментов МТИ — СЛАК по глубоконеупругому электрон-протонному рассеянию и неупругому рассеянию нейтрино в ЦЕРНе. Однако сначала хотелось бы остановиться на теоретических предсказаниях, высказанных до проведения этих экспериментов. Цель такого перечисления прошлых неудач двояка. Во-первых, оно поможет понять, почему данные СЛАК вызвали удивление у большого числа теоретиков. Ведь было получено совсем не то, что ожидали, основываясь на экстраполяциях простых моделей. Во-вторых, полезно сравнить наивные предсказания (под этим понимаются предсказания, которые могли быть сделаны или были сделаны до того, как закон-

чились эксперименты) в различных теоретических моделях. Многие из этих моделей, наивная экстраполяция которых противоречила полученным данным, оказались потом в состоянии приспособиться к эксперименту. Однако исторический обзор позволит нам правильно оценить их способность к предсказаниям.

Рассмотрим поведение структурных функций $W_i(q^2, \nu)$ в области, где q^2 и ν велики. Единственной экспериментальной информацией о поведении структурных функций при больших q^2 , которой мы обладали, были сведения о форм-факторах, т. е. о точке $2\nu + q^2 = 0$. Они быстро убывают с ростом q^2 . Структурные функции пропорциональны сумме неупругих форм-факторов:

$$W_i(q^2, \nu) \sim \sum_n \langle p | J | n \rangle|^2. \quad (3.1)$$

Хотя каждый отдельный неупругий форм-фактор скорее всего так же быстро падает с ростом q^2 , как и упругий, бесконечная сумма может вести себя совсем по-другому. Тем не менее при планировании экспериментов в СЛАК многие экспериментаторы и теоретики опасались, что структурные функции будут падать так быстро, что число событий в глубоконаупругой области будет ничтожно мало. Рассмотрим более подробно некоторые результаты.

1. Теория Редже. Выше были приведены аргументы в пользу реджевского поведения слабых амплитуд. Что говорит теория Редже о поведении $W_i(q^2, \nu)$? Естественная переменная для реджевского разложения — косинус угла рассеяния в системе центра инерции t -канала z_t . Легко видеть, что при больших ν и больших Q^2 косинус z_t определяется формулой

$$z_t = \frac{\nu}{M \sqrt{Q^2}}. \quad (3.2)$$

Таким образом, согласно теории Редже

$$W_i(Q^2, \nu) = \sum_i \beta_i(Q^2) \left(\frac{\nu}{M \sqrt{Q^2}} \right)^{\alpha_i} + \text{фон}, \quad (3.3)$$

где сумма берется по всем полюсам Редже. Это разложение полезно только при фиксированных Q^2 и $\nu \rightarrow \infty$. Чтобы получить какие-либо данные об области, в которой и ν , и Q^2 велики, необходима информация, относящаяся к скейлингову пределу, где отношение ν/Q^2 фиксировано. В этом случае для больших ν косинус z_t действительно велик; однако из разложения

$$W_i(Q^2, \nu) = \sum_i \beta_i(Q^2) (Q^2)^{\alpha_i/2} \left(\frac{\nu}{MQ^2} \right)^{\alpha_i} + \text{фон}$$

нельзя сделать никаких выводов, пока неизвестно поведение фона и $\beta_i(Q^2)$ при больших Q^2 . Скорее всего сторонники реджевских схем до проведения экспериментов сказали бы, что $\beta_i(Q^2)$ — быстро убывающие функции Q^2 и ведут себя как форм-факторы, так что для

больших и фиксированных значений ν/Q^2 функции W_i будут убывать с ростом Q^2 .

2. Векторная доминантность. Идея векторной доминантности состоит в том, что матричные элементы электромагнитного тока определяются вкладом полюсов, отвечающих векторным мезонам:

$$\begin{array}{c} q^2 \end{array} \text{---} \bigcirc \text{---} \begin{array}{c} \rho \end{array} \approx \begin{array}{c} \rho \end{array} \text{---} \bigcirc \text{---} \begin{array}{c} \rho \end{array} = \left(\frac{\delta_\rho}{q^2 - m_\rho^2} \right) \times \begin{array}{c} \rho \end{array} \text{---} \bigcirc \text{---} \begin{array}{c} \rho \end{array}$$

По этой гипотезе структурные функции в электророжении можно выразить через амплитуду ρ -мезон-нуклонного рассеяния на массовой поверхности, а зависимость от q^2 возникает только из пропагатора ρ -мезона. Не ясно, почему такое приближение должно быть хорошим вдали от мезонного полюса при $q^2 \approx m_\rho^2$. Действительно, как мы уже видели, для упругого форм-фактора нуклона оно не работает.

Модель векторной доминантности (МВД) приводит к весьма определенным предсказаниям о поведении сечения фотопоглощения $\sigma(q^2, \nu)$. Рассмотрим сечение рассеяния для поперечных фотонов с массой q^2 :

$$\sigma_T(q^2, \nu) = \frac{M}{\nu + Q^2/2} W_1(q^2, \nu).$$

В МВД оно определяется сечением рассеяния ρ -мезона

$$\sigma_{\nu N}(q^2, \nu) = \gamma_\rho^2 \left(\frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - q^2} \right)^2 \sigma_{\rho N}(2\nu + q^2 + M^2), \quad (3.4)$$

где ρ — N -сечение рассеяния зависит только от энергии в центре инерции $s = M^2 + 2\nu + q^2$. Для больших ν и q^2 имеем

$$\sigma_T(q^2, \nu) \rightarrow \gamma_\rho^2 \frac{m_\rho^4}{q^4} \sigma_{\rho N}(\infty)$$

или

$$W_1(q^2, \nu) \rightarrow \frac{\gamma_\rho^2 m_\rho^4 (\nu - q^2/2)}{Mq^4} \sigma_{\rho N}(\infty). \quad (3.5)$$

Сложнее предсказать поведение $\sigma_S(q^2, \nu)$, так как это сечение должно исчезать при $q^2 = 0$. Сакураи после экспериментов в СЛАК заявил, что правильная формулировка МВД приводит к выражению

$$\sigma_S(q^2, \nu) = \gamma_\rho^2 \frac{m_\rho^4}{(m_\rho^2 - q^2)^2} \frac{q^2}{m^2 \rho} \sigma_{\rho N} \sim \frac{\gamma_\rho^2 m_\rho^2}{q^2} \sigma(\infty).$$

Отсюда следует, что

$$\left(W_2 - \frac{Q^2 M^2}{\nu^2} W_1 \right) \rightarrow \frac{1}{\nu} \sigma(\infty). \quad (3.6)$$

Введение дополнительного множителя $\sim q^2$ позволяет получить согласие с экспериментальными данными для $W_2(\nu, q^2)$. Однако предсказание для отношения

$$R = \frac{\sigma_S(q^2, \nu)}{\sigma_T(q^2, \nu)} \xrightarrow{q^2/\nu = \text{const}} \text{const} \cdot q^2, \quad (3.7)$$

по-видимому, противоречит опыту.

3. Алгебра токов. Алгебра токов приводит к прямым предсказаниям для асимптотического поведения слабых амплитуд. Например, правило сумм Адлера для рассеяния нейтрино на нуклонах (вывод можно найти в лекциях Треймана или в гл. 4)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^{\bar{\nu}p}}{dq^2} - \frac{d\sigma^{\nu p}}{dq^2} \xrightarrow{E \rightarrow \infty} \frac{G^2}{2\pi} \int \frac{d\nu}{M} [W_2^{\bar{\nu}p}(\nu, q^2) - W_2^{\nu p}(\nu, q^2)] = \\ = \frac{G^2}{\pi} [\cos^2 \theta_c + 2 \sin^2 \theta_c] \end{aligned} \quad (3.8)$$

показывает, что при высоких энергиях сечение рассеяния нейтрино на нуклоне в некотором смысле аналогично точечному сечению. На голых, точечных частицах с $I = I_3 = 1/2$ рассеивается только $\bar{\nu}$, а на $I = -I_3 = 1/2$ — только ν , и сечение рассеяния равно G^2/π . Таким образом, если при больших q^2 рассматривать нуклон как коллектив точечных составляющих (скажем, кварков) со спином $1/2$ и $I = 1/2$, то можно ожидать, что

$$\frac{d\sigma^{\bar{\nu}p}}{dq^2} - \frac{d\sigma^{\nu p}}{\pi} = \frac{G^2}{\pi} \langle N \uparrow - N \downarrow \rangle = \frac{G^2}{\pi}, \quad (3.9)$$

где $N \uparrow$ ($N \downarrow$) — число составляющих с $I_3 = 1/2$ ($-1/2$). Это согласуется с (3.8) в случае $\theta_c = 0$.

Бёркен в рамках алгебры токов рассмотрел предел $\nu, Q^2 \rightarrow \infty$ при фиксированном отношении $x = Q^2/\nu$. Он показал, что алгебра токов совместно с некоторыми предположениями о гладкости определенных пределов приводит к следующим соотношениям:

$$F_1(Q^2, x) = M W_1(Q^2, \lambda) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} F_1(x); \quad (3.10)$$

$$F_2(Q^2, x) = (\nu/M) W_2(Q^2, \nu) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} F_2(x) \quad (3.11)$$

для рассеяния электрона и нейтрино на нуклоне и

$$F_3(Q^2, x) = (\nu/M) W_3(Q^2, \nu) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} F_3(x) \quad (3.12)$$

для нейтринного рассеяния. Такое скейлинговое поведение согласуется со всеми правилами сумм и объясняет, почему $d\sigma^{\bar{\nu}p}/dq^2 - d\sigma^{\nu p}/dq^2$ не зависит от q^2 при больших q^2 , так как (3.8) можно переписать в виде

$$\frac{G^2}{2\pi} \int_0^1 dx [F_2^{\bar{\nu}p}(x, q^2) - F_2^{\nu p}(x, q^2)] = \frac{G^2}{\pi} (\cos^2 \theta_c + 2 \sin^2 \theta_c), \quad (3.13)$$

4. Модели составных частиц. Еще до экспериментов в СЛАК существовали некоторые соображения, развившиеся впоследствии в партонную модель. Их основная идея состояла в том, что при рассеянии лептонов на составном объекте с большой передачей энергии измеряется мгновенное распределение заряда в этом объекте, т. е. можно «наблюдать» заряженные составляющие объекта.

Для такой интерпретации уже были прецеденты в рассеянии электронов на атомах и ядрах. Рассмотрим, например, электронное

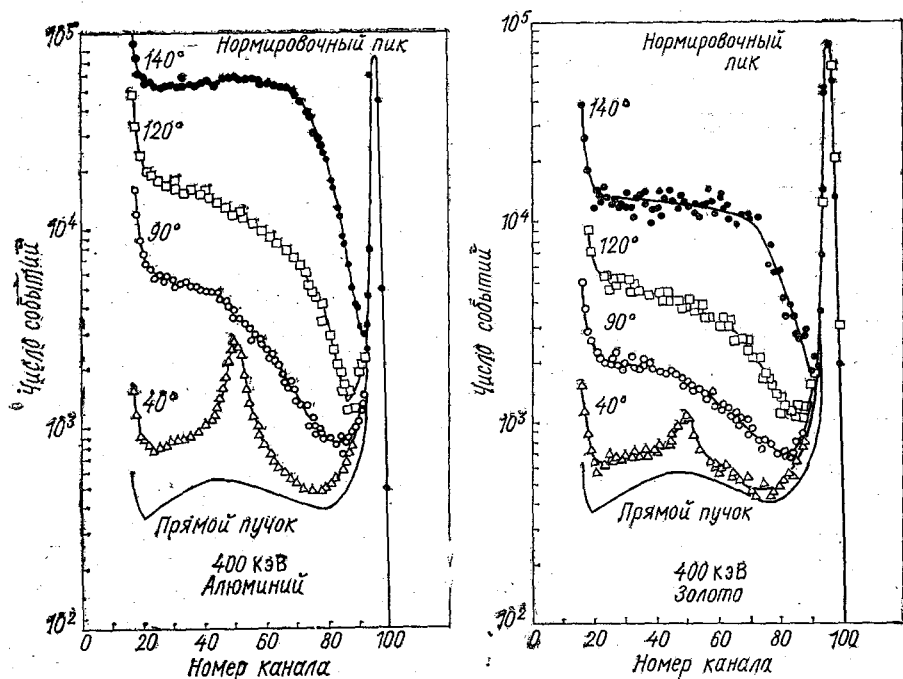


Рис. 15

рассеяние на атоме. На рис. 15 сечение рассеяния изображено как функция номера канала анализатора сигналов счетчика электронов, который пропорционален конечной энергии электрона. Можно различать две области. Первая — упругое рассеяние и рассеяние с возбуждением атома как целого в дискретном спектре. Здесь лептоны «видят» атом как единую когерентную систему с зарядом, равным сумме зарядов составляющих $\sum Q_i$, и полное сечение пропорционально $(\sum Q_i)^2$. При увеличении переданной энергии (возрастание канального числа) будет достигнут квазиупругий пик, где падающий электрон рассеивается на электронах атома некогерентно. В этой области сечение рассеяния пропорционально $\sum Q_i^2$. Важными возбужденными состояниями оказываются те, в которых переданная энергия q_0 связана классическим соотношением с переданным им-

пульсом $q_0 = q^2/(2m)$, где m — масса составляющих. Таким образом, наивная кварковая модель нуклона предполагает квазиупругое рассеяние для больших q_0 и q^2 , сосредоточенное около $\nu/M \approx \approx q^2/(2M_Q)$ (M_Q — масса кварка).

3.2. Экспериментальные результаты

1. Электрон-нуклонное рассеяние. Электроны в СЛАК имеют максимальную энергию 18 ГэВ. Таким образом, в эксперименте МТИ — СЛАК $\nu_{\text{макс}} \approx 18 \text{ ГэВ}^2$. Так как сечение рассеяния быстро падает с ростом переданного импульса (из-за фотонного пропада-

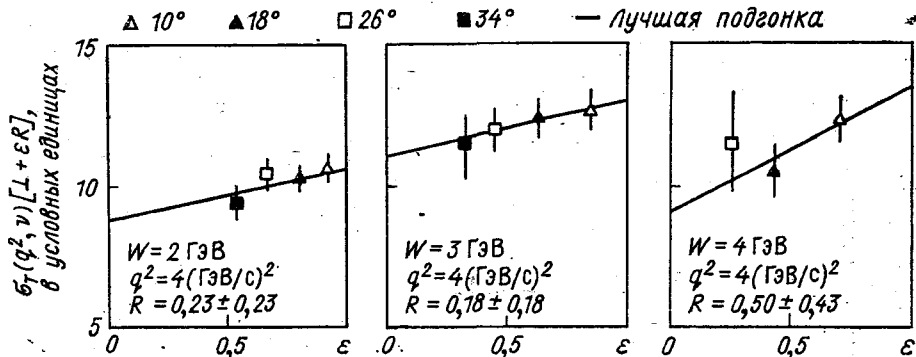


Рис. 16

тора), рассеяние на большие углы не происходит. Наибольший угол рассеяния в эксперименте составлял 34° , $Q^2_{\text{макс}} = 14 \text{ ГэВ}^2$. Сечение рассеяния измерялось при фиксированном угле θ и различных начальных энергиях электрона, т. е. $\sin^2\theta = Q^2/[4E(E - \nu/M)]$ был фиксирован. Изменяя углы и начальную энергию, можно получить данные при фиксированных Q^2 и ν , но разных углах и, таким образом, разделить вклады от W_2 и W_1 . Напомним:

$$\frac{d^2\sigma}{dQdE'} = \left(\frac{d^2\sigma}{dQdE'} \right)_{\text{Mott}} [W_2(q^2, \nu) + 2 \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} W_1(q^2, \nu)], \quad (3.14)$$

поэтому, чтобы определить отношение

$$\frac{W_1(q^2, \nu)}{W_2(q^2, \nu)} = \frac{q^2 + \nu^2/M^2}{q^2} \frac{\sigma_T}{\sigma_T + \sigma_S} = \left(1 + \frac{\nu^2}{M^2 q^2} \right) \frac{1}{1+R}, \quad (3.15)$$

необходимо достигнуть больших значений $\text{tg}^2(\theta/2) (1 + \nu^2/M^2 q^2)$ (т. е. либо больших углов, либо больших значений $\nu^2/M^2 q^2$). Очевидно, такое разделение необходимо провести еще до обсуждения поведения $W_i(q^2, \nu)$. Рис. 16 иллюстрирует результаты для R .

Здесь ордината равна $\sigma_T(q^2, \nu) [1 + \varepsilon R]$, а $\varepsilon^{-1} = 1 + 2(1 + \nu^2/M^2 q^2)$, $W = \sqrt{2\nu - Q^2 + M^2}$. Ясно, что R меньше единицы и почти не меняется. При подгонке данных в настоящее время обычно полагают $R = 0,18 \pm 0,18$.

Интересный график представлен на рис. 17, где структурные функции [в основном $W_2(q^2, \nu)$] приведены в зависимости от q^2 при фиксированном W , т. е. фиксированной массе рожденных адронов.

Можно убедиться, что в то время как упругий форм-фактор быстро падает (для $W = M$), неупругие форм-факторы при фиксированном $W > M$ меняются значительно медленнее с ростом Q^2 . Это согласуется со скейлингом, так как

$$\begin{aligned}
 W_2(Q^2, W^2 = 2\nu - Q^2 + M^2) &= \frac{1}{\nu} F\left(\frac{Q^2}{2\nu}\right) = \\
 &= \frac{2}{W^2 + Q^2 - M^2} \times \\
 &\times F\left(\frac{1}{1 + (W^2 - M^2)/Q^2}\right).
 \end{aligned}$$

Приведем также зависимость $(\nu/M) W_2$ и MW_1 от $2\nu/Q^2$ и Q^2 . Рис. 18

и 19 показывают, как меняются структурные функции от $\omega = 2\nu/Q^2$ для различных значений Q^2 . Скейлинг кажется совершенно строгим, т. е. никакой зависимости от Q^2 не наблюдается. Более точно можно проверить его, если изобразить зависимость νW_2 от Q^2 при фиксированных ω , как это сделано на рис. 20. При $\omega = 2\nu/Q^2 = 4$ не видно никакой зависимости от Q^2 для $Q^2 \geq 1 \text{ ГэВ}^2$. Сформулируем результаты экспериментов МТИ — СЛАК.

а. Как $(\nu/M) W_2$, так и MW_1 являются функциями только ω , начиная с удивительно малых значений Q^2 . Скейлинг хорошо выполняется для $3,5 < \omega \leq 10$ и $10 \geq Q^2 \geq 1 \text{ ГэВ}^2$.

б. Отношение продольного сечения к поперечному $R = \sigma_S / \sigma_T$ оказывается малым: $R = 0,18 \pm 0,18$ и почти не изменяется (в пределах погрешностей) для $Q^2 \geq 1 \text{ ГэВ}^2$. Однако нельзя исключить возможность $R = 0$ или того, что R слабо растет с Q^2 .

в. Энергетическая зависимость скейлинговых структурных функций носит дифракционный характер. Так, $(\nu/M) W_2(\nu, q^2) =$

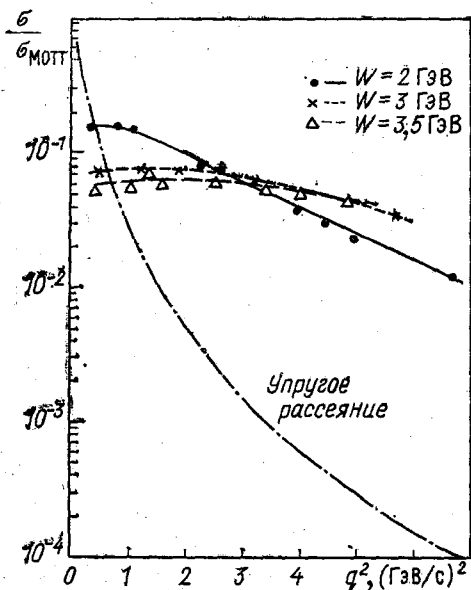


Рис. 17

$= F_2 (2\nu/Q^2)$ быстро возрастает от порога ($2\nu/Q^2 = 1$) до значения, приблизительно равного 0,33 при $2\nu/Q^2 = 4$, и после этого остается постоянной. Таким образом, при больших $2\nu/Q^2$ можно ожидать для F_2 поведения $(2\nu/Q^2)^{\alpha-1}$. Такое поведение согласуется с $\alpha = \alpha_P = 1$. Аналогично $MW_1 = F_1 (2\nu/Q^2)$ линейно по $(2\nu/Q^2)$ и согласуется с $F_1 (2\nu/Q^2) \approx (2\nu/Q^2)^{\alpha_P}$. Указаний на квазиупругие пики пока нет.

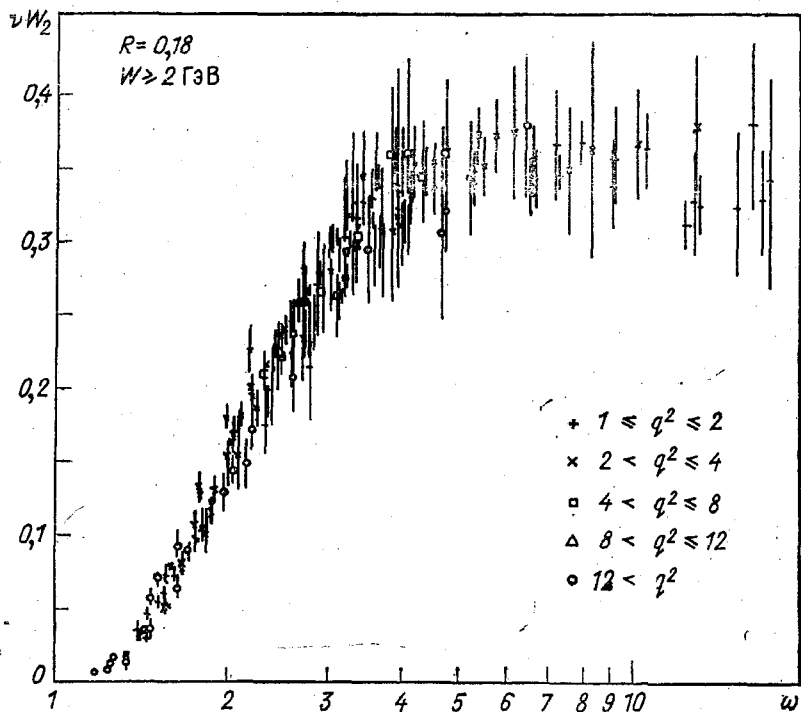


Рис. 18

г. Недавние эксперименты, включающие глубоконеупругое рассеяние электронов на дейтерии, дали информацию об изотопической зависимости структурных функций. Предварительные результаты указывают на то, что поведение нейтронных структурных функций и отношение их к протонным удовлетворяют скейлингу. На рис. 21 это отношение приведено в зависимости от ω . Видно, что оно близко к 1/2 около порога ($2\nu = Q^2$) и возрастает, достигая почти единицы для больших ν/Q^2 , как и должно быть по реджевской теории, где $(\nu W_2^p - \nu W_2^n) \approx (\nu/Q^2)^{\alpha_{A_2}} - 1 \rightarrow 0$.

2. Рассеяние нейтрино на нуклоне. Нейтринные эксперименты гораздо сложнее, так как сечение рассеяния меньше и трудно оп-

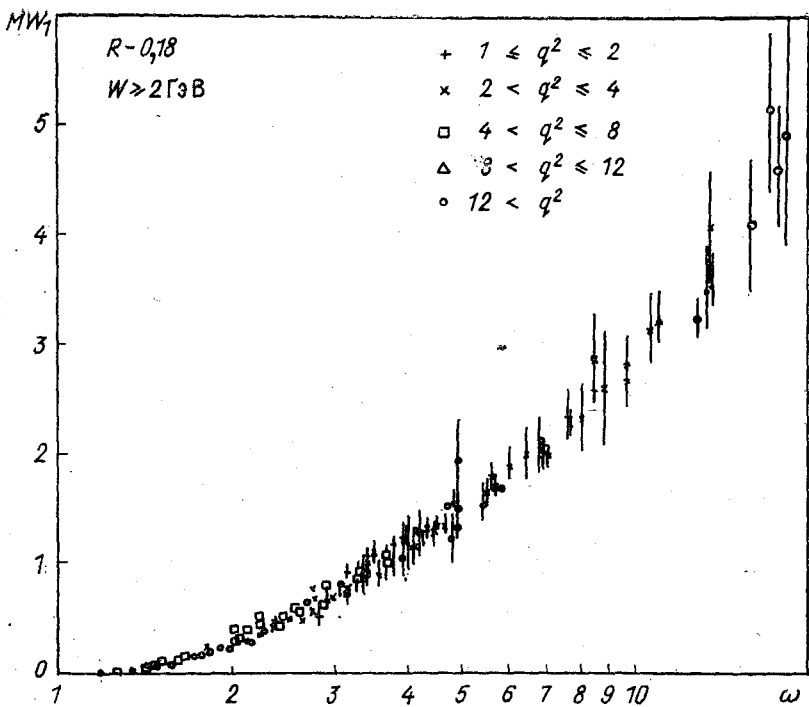


Рис. 19

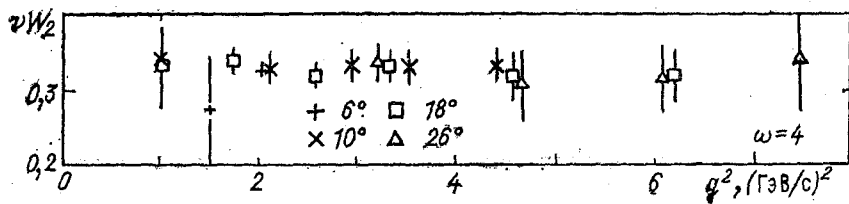


Рис. 20

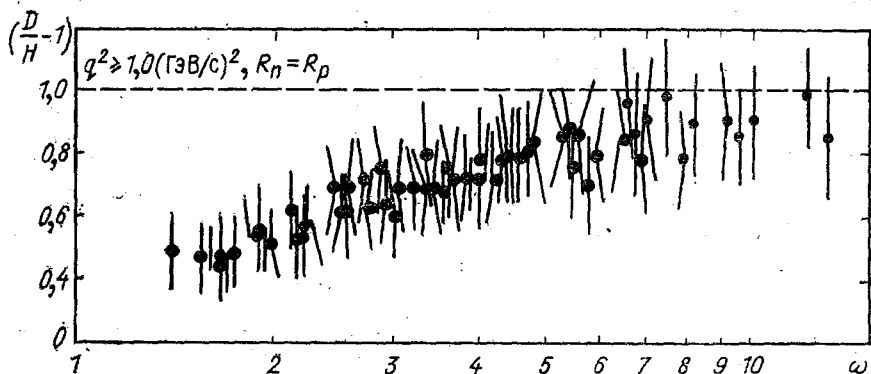


Рис. 21

ределить поток и энергию падающих нейтрино. Преимущество же неупругого рассеяния нейтрино в том, что можно легко измерять сечения рассеяния назад и что существует дополнительная структурная функция W_3 . В экспериментах ЦЕРНа рассеивались нейтрино с энергией 2—12 ГэВ на ядрах ($n \approx p$). Их результаты указывают на то, что поведение структурных функций слабых токов не сильно отличается от поведения структурных функций для электромагнитных токов. Лучшее доказательство скейлинга состоит в обнаружении линейной зависимости сечения рассеяния нейтрино на нуклоне от энергии нейтрино (рис. 22). Это, как будет видно, —

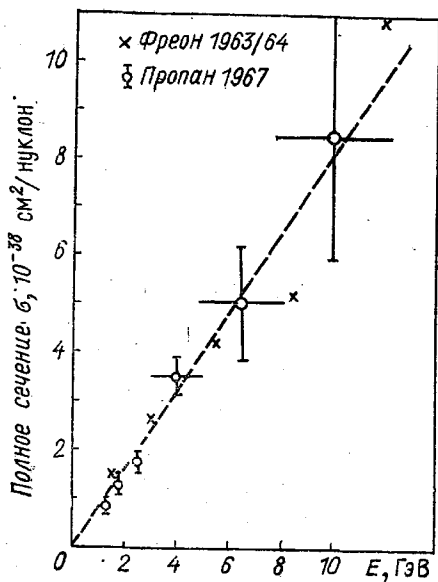


Рис. 22

— прямое следствие скейлинга для F_1 , F_2 и F_3^* .

ГЛАВА 4

ПРИЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРЫ ТОКОВ

4.1. Предположения о коммутаторах

Ясно, что предположения об одновременных коммутационных соотношениях (ОВКС) для токов должны играть важную роль при определении амплитуд в области высоких энергий. Поведение амплитуд при больших импульсах связано с поведением соответствующих токов на малых расстояниях. Классические приложения алгебры токов основывались на низкоэнергетических теоремах. В них использовались не локальные ОВКС, а алгебра зарядов, которая приводила к тождествам Уорда. Большинство из этих тождеств (за исключением тех, которые относятся к фотонам и гравитонам) для связи с реальным миром требуют использования РСАС.

Приложения, которыми мы будем заниматься, основываются на локальных коммутационных соотношениях для токов. Они дают

* Недавно было, однако, показано, что в широком классе теорий, допускающих отклонение от скейлинга, сечения нейтринного рассеяния также растут линейно с энергией (см. М. А. Шифман. «Письма в ЖЭТФ», 1975, т. 21, с. 499—503). — Прим. пер.

некоторую информацию об асимптотическом поведении амплитуд для токов и могут быть связаны с рассеянием лептонов на адронах при высоких энергиях без использования РСАС. Однако эти результаты будут менее надежны, чем полученные из тождеств Уорда. Это связано отчасти с необходимостью делать более сильные предположения об ОВКС. Чтобы получить информацию о физических величинах, недостаточно предположить справедливость только проинтегрированных КС, составляющих алгебру зарядов Гелл-Мана, т. е.

$$[\int dx J_0^\alpha(x, t), \int dy J_0^\beta(y, t)] = i f_{\alpha\beta\gamma} \int dz J_0^\gamma(z, t). \quad (4.1)$$

Необходимо потребовать также выполнения соотношений типа

$$[J_0^\alpha(x, t), J_0^\beta(y, t)] = i f_{\alpha\beta\gamma} J_0^\gamma(x, t) \delta^{(3)}(x-y) + \text{ШЧ} \quad (4.2)$$

и

$$[J_0^\alpha(x, t), J_i^\beta(y, t)] = i f_{\alpha\beta\gamma} J_i^\gamma(x, t) \delta^{(3)}(x-y) + S_{ik}^{\alpha\beta} \partial^k \delta^{(3)}(x-y). \quad (4.3)$$

Соотношения (4.1) лишь наводят на мысль о справедливости (4.2) и (4.3), но вовсе их не доказывают. Кроме того, иногда требуется знание модельно-зависимых ОВКС типа

$$[J_i^\alpha(x, t), J_k^\beta(y, t)] = \begin{cases} i [\delta_{ik} f_{\alpha\beta\gamma} J_0^\gamma \delta^3(x-y) - \\ - \varepsilon_{ikh} d_{\alpha\beta\gamma} J_5^\gamma \delta^3(x-y)] \\ \text{(в кварковой модели);} \\ 0 \text{(в алгебре полей).} \end{cases} \quad (4.4)$$

Последние ОВКС получаются в кварковой модели, в которой токи строятся как

$$J_\mu^\alpha = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \lambda^\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_5 \end{pmatrix} \psi(x), \quad \alpha = \begin{cases} 1 \dots 8 \text{ для векторных токов;} \\ 9 \dots 16 \text{ для аксиальных токов,} \end{cases} \quad (4.5)$$

где $\psi(x)$ — поле кварков, удовлетворяющее каноническим ОВКС. В алгебре полей J_i^α идентифицируется с векторными или аксиально-векторными полями Янга — Миллса. Иногда делаются предположения о виде коммутаторов $[\partial_i J_\mu^\alpha(x, t), J_\nu^\beta(y, t)]$. Эти предположения еще более зависят от модели, так как временная производная от тока определяется гамильтонианом взаимодействия.

4.2. Предел Бьёркена—Джонсона—Лоу

Бьёркен, Джонсон и Лоу первыми заметили, что поведение T -произведения операторов при высоких энергиях определяется ОВКС этих операторов. Джонсон и Лоу в рамках конкретных моделей теории поля вычислили в теории возмущений асимптотику T -произ-

ведений (в частности, они исследовали треугольные диаграммы в глюонной модели), и проверили, действительно ли они определяются именно каноническими коммутаторами. Подход Бьёркена был совершенно иным. Он использовал канонические или предполагаемые ОВКС для вывода соотношений для рассеяния лептонов на адронах и для выяснения вопроса о конечности радиационных поправок. Будем следовать подходу Бьёркена.

Рассмотрим матричный элемент для рассеяния двух токов (операторов) между произвольными состояниями (см. рис. 23). Этот процесс описывается фурье-преобразованием от T^* -произведения токов $\langle \alpha | T^* [J_1(x), J_2(y)] | \beta \rangle$. Здесь вместо T -произведения входит T^* -произведение, так как первое не является лоренц-инвариантным. Действительно, когда ОВКС содержат производные от δ -функций (швингерские члены), операция упорядочения по времени зависит от системы отсчета.

Чтобы восстановить лоренц-инвариантность, следует добавить к T (...) локальный [пропорциональный $\delta^{(4)}(x-y)$ или производным от $\delta^{(4)}(x-y)$]

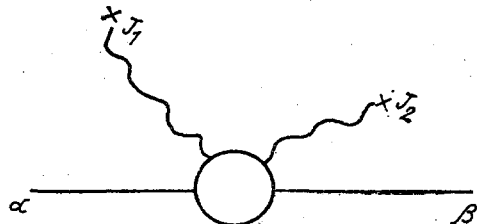


Рис. 23

«сигналл» или контактный член, который переводит T в T^* . Контактный член можно легко выразить через ШЧ, ответственный за его появление. Чтобы это сделать, ШЧ должен удовлетворять определенным условиям. Однако если ОВКС операторов определить как граничное значение причинных коммутаторов при равных временах, то такие условия удовлетворяются автоматически. Пока рассматривается матричный элемент в импульсном пространстве, эти члены добавляются к T -произведению токов полином по импульсам, так что

$$i S \exp(iqx) \langle \alpha | T^* \{J_1(x), J_2(y)\} | \beta \rangle d^4x = \\ = i \int \exp(iqx) \langle \alpha | T \{J_1(x), J_2(y)\} | \beta \rangle d^4x + (\text{полином по } q) \quad (4.6)$$

или $T^*(q) = T(q) + (\text{полином по } q)$. Таким образом, контактный член не появляется в скачке T^* -произведения, который определяется фурье-преобразованием коммутаторов токов.

Предел БДЛ определяет поведение $T(q)$ при больших q_0 . Его можно получить из уравнения Лоу для $T(q)$. Выведем уравнение Лоу, используя следующее представление для ступенчатой функции $\theta(x_0)$:

$$\exp(iq_0 x) \theta(\pm x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq'_0}{(2\pi i)} \frac{\exp(\pm iq'_0 x_0)}{q'_0 \mp (q_0 + i\epsilon)}$$

Перепишем $T(q)$ в виде

$$\begin{aligned}
 T(q_0, \mathbf{q}) &= i \int d^4 x \exp(iqx) [\theta(x_0) J_1(x, x_0) J_2(\mathbf{0}) + \\
 &+ \theta(-x_0) J_2(0) J_1(x, x_0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq'_0 \int d^4 x \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) \times \\
 &\times \left[J_1(x) J_2(0) \frac{\exp(iq'_0 x_0)}{q'_0 - q_0 - i\varepsilon} + J_2(0) J_1(x) \frac{\exp(-iq'_0 x_0)}{q'_0 + q_0 + i\varepsilon} \right] = \\
 &= \int_0^{\infty} dq'_0 \left[\frac{W_{12}(q_0, \mathbf{q})}{q'_0 - q_0 - i\varepsilon} + \frac{\overline{W}_{21}(q_0, -\mathbf{q})}{q'_0 + q_0 + i\varepsilon} \right], \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

где

$$W_{12}(q_0, \mathbf{q}) = \int \frac{d^4 x}{2\pi} \exp(iqx) \langle \alpha | J_1(x) J_2(0) | \beta \rangle;$$

$$\overline{W}_{21}(q_0, \mathbf{q}) = \int \frac{d^4 x}{2\pi} \exp(iqx) \langle \alpha | J_2(0) J_1(x) | \beta \rangle.$$

Теперь перейдем к пределу $|q_0| \rightarrow \infty$ по любому направлению (за исключением положительной полуоси):

$$\begin{aligned}
 T(q) &\rightarrow -\frac{1}{q_0} \int_0^{\infty} dq'_0 [W_{12}(q'_0, \mathbf{q}) - \overline{W}_{21}(q'_0 - \mathbf{q})] - \\
 &- \frac{1}{q_0^2} \int_0^{\infty} dq'_0 [W_{12}(q'_0, \mathbf{q}) + \overline{W}_{21}(q'_0, -\mathbf{q})] + \dots \rightarrow \\
 &\rightarrow -\frac{1}{q_0} \int d^3 x \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) [J_1(x, 0) J_2(0)] + \frac{i}{q_0^2} \int d^3 x \times \\
 &\times \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) [J_1(x, 0), J_2(0)] + \dots
 \end{aligned}$$

Здесь использованы равенства $\int dq_0 \exp(iq_0 x_0) = 2\pi \delta(x_0)$ и $\int dq_0 q_0 \exp(\pm iq_0 x_0) = (\mp i) 2\pi \delta(x_0)$. Окончательно имеем для T^* -произведения

$T^*(q) \rightarrow$ (полином по q) —

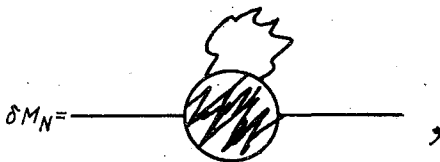
$$-\frac{1}{q_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{q_0}\right)^n \int d^3 x (-i\mathbf{q}\mathbf{x}) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n J_1(x, 0), J_2(0) \right]. \quad (4.8)$$

Все выкладки были проделаны крайне формально. Однако не ясно даже, допустимо ли вообще разложение по $1/q_0$. Оно требует по крайней мере конечности коэффициентов разложения. В частности, может оказаться, что разложение БДЛ имеет смысл только для нескольких первых членов. Действительно, из теории возмущений известно, что теорема БДЛ в общем случае не выполняется. Детальнее эти вопросы будут обсуждаться в гл. 5.

Как можно использовать теорему БДЛ? За исключением специального случая электрон-позитронной аннигиляции, предел БДЛ достигается в нефизической области. Прямое измерение скачка амплитуды по q_0 невозможно. Например, $W_{1,2}(q^2, \nu)$ можно измерить лишь в области $-q^2 \leq 2\nu$, тогда как для прямой проверки теоремы БДЛ требуется знание $W_{1,2}(q^2, \nu)$ при $q_0 \rightarrow \infty$, т. е. при $q^2 \approx q_0^2 \approx \nu^2/\rho_0^2$. Таким образом, теорема БДЛ может быть использована лишь косвенно. Одним из первых ее приложений было исследование электромагнитного расщепления масс, радиационных поправок и второго порядка по слабым взаимодействиям. Мы проиллюстрируем эти приложения, рассмотрев протон-нейтронную разность масс.

4.3. Применение теоремы БДЛ к вычислению радиационных поправок и устойчивость расходимостей

Рассмотрим электромагнитный сдвиг масс нуклонов. В низшем порядке по α он определяется приведенной собственно энергетической диаграммой



где черный блок включает все сильные взаимодействия и где выделена одна внутренняя фотонная линия. Разрезав фотонную линию, можно выразить сдвиг масс в терминах амплитуды виртуального комптоновского рассеяния вперед:

$$\delta M_N = \alpha \int d^4 q T_{\mu\nu}(q, p) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} = \alpha \int \frac{d^4 q}{q^2} \int d^4 x \exp(iqx) \times \\ \times \langle p | T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | p \rangle. \quad (4.9)$$

Протон-нейтронная разность масс дается тогда выражением

$$\Delta M_N = \delta M_p - \delta M_n = \alpha \int \frac{d^4 q}{q^2} T_{\mu\nu}^I = 1(q, p) g_{\mu\nu}. \quad (4.10)$$

Хорошо известно, что в теории возмущений электромагнитный сдвиг масс логарифмически расходится и поэтому его нельзя вычислить. (В КЭД масса перенормируется и значение физической массы электрона входит как независимый параметр.) Однако надеялись, что такого не произойдет в случае разности масс ΔM_N (которая экспериментально наблюдаема, в отличие от сдвига масс электрона или протона), по порядку величины равной αM_N . Отмечалось, что причина расходимостей в теории возмущений связана с отсутствием форм-факторов при взаимодействии фотона с частицами, а сильные

взаимодействия приведут к обрезанию интегралов и результат будет сходящимся.

Действительно, записав дисперсионное соотношение по $\nu = q\rho$ для $T_{\mu\nu}$ [после виковского поворота q^2 в (4.10) становится пространственно-подобным], можно получить определенную разность масс, если учесть в дисперсионном соотношении только вклад ближайших резонансов. В частности, такие вычисления дали удовлетворительные результаты для разностей масс $\Sigma^+ + \Sigma^- - 2\Sigma^0$ и $\pi^\pm - \pi^0$, отвечающих $\Delta I = 2$. Разность масс нуклонов в рамках такого подхода осталась необъясненной, и причину неудачи можно понять. Для $\Delta I = 1$ одна из инвариантных амплитуд в $T_{\mu\nu}$ ведет себя при больших ν как $\nu^{1/2}$, и в дисперсионном соотношении необходимо вычитание. Пока не определена вычитательная константа, нельзя вычислить и разность масс нуклонов; не удивительно, что безвычитательное дисперсионное соотношение привело к неправильному результату.

Теорема БДЛ, однако, указывает на то, что сходимость интеграла в (4.10) маловероятна. Из нее следует, что при $|q_0| \rightarrow \infty$

$$T_{\mu\nu}(q, \rho) \rightarrow \frac{1}{q_0^3} \int \exp(-iqx) \langle N | [J_\mu(x, 0) J_\nu(0)] | N \rangle d^3x. \quad (4.11)$$

(Заметим, что члена $1/q_0$ нет, так как $T_{\mu\nu}$ — четная функция q_0 .) Почти во всех моделях для коммутаторов токов с $I = 1$ ОВКС отличны от нуля, и если поведение $T_{\mu\nu}(q, \rho)$ при больших q^2 одинаково для всех направлений q , то $\delta M \sim \int d^4q/q^4$, и интеграл расходится логарифмически.

Таким образом, локальные ОВКС токов при больших энергиях приводят к точечно-подобному поведению и отвергают возможность обрезания интегралов сильными взаимодействиями. Аналогичные расходимости в пределе БДЛ возникают также при вычислении других радиационных поправок и для второго порядка по слабому взаимодействию, где расходимости даже сильнее логарифмических.

Для устранения расходимости нужно потребовать, чтобы $[J_\mu, J_\nu]^{I=1} = 0$. Это, конечно, возможно, но такое ad hoc предположение не оправдывается ни в какой разумной модели. Более того, все расходимости в высших порядках по слабому взаимодействию нельзя устранить таким путем, если только вообще не отказываться от алгебры Гелл-Мана. В то же время можно просто сказать, что предел БДЛ (4.11) некорректен. Однако нарушение теоремы БДЛ в моделях теории поля возникает только из-за сингулярного характера теории возмущений. Действительно, в этих моделях теорема БДЛ иногда не выполняется, однако всегда присутствуют расходимости.

Кроме того, если структурные функции $W_{1,2}$, как это получено в СЛАК, действительно масштабно-инвариантны, то легко понять, что интеграл в (4.10) логарифмически расходится (если только нет мистических сокращений) даже без обращения к теореме БДЛ.

Скейлинг (точечно-подобное поведение) приводит (отвлекаясь от возможных вычитаний) к такому же асимптотическому поведению амплитуд для токов, что и теорема БДЛ.

Радикальное предложение для устранения таких расходимостей было сделано Ли и Виком. Они предложили модификацию фотонного пропагатора, вводя состояния с отрицательной метрикой так, чтобы заменить $1/q^2$ на $1/q^2 - 1/(q^2 - M^2)$.

В заключение хотелось бы подчеркнуть серьезность проблем, связанных с этими расходимостями. Возможно, нужно проявлять скептицизм по отношению к экстраполяции предположений о локальных ОВКС на произвольно большие энергии (малые расстояния), хотя для этого и не видно оснований. Однако раньше или позже конечность высших поправок по электромагнитному и слабому взаимодействиям должна быть объяснена.

4.4. Применение теоремы БДЛ к лептон-адронному рассеянию

Теорема БДЛ позволяет получить правила сумм для рассеяния лептонов на адронах при высоких энергиях. Рассмотрим, например, матричный элемент виртуального комптон-эффекта. Хотя предел БДЛ выходит за физическую область этого процесса, можно вычислить амплитуду в этой области с помощью дисперсионных соотношений. Для этого нужно знать абсорбтивную часть амплитуды (в физической области). Но именно абсорбтивную часть виртуального комптон-эффекта мы измеряем в лептон-адронном рассеянии. Сравнив поведение дисперсионного соотношения при больших q_0 с тем, что получается из теоремы БДЛ, получим правило сумм, связывающее интеграл от измеримых величин с параметрами ОВКС.

Рассмотрим усредненную по спине амплитуду рассеяния вперед для тока J^a . В ep -рассеянии J^a будет электромагнитным током, а в νp - и $\bar{\nu} p$ -рассеянии — слабым. Обозначим эрмитово сопряжение следующим образом: $J^{\bar{a}} = (J^a)^+$. Тогда

$$T_{\mu\nu}^{*a\bar{a}}(q_0, \mathbf{q}, p) = i \int d^4x \exp(iqx) \langle p | T^* \{ J_\mu^a(x) \bar{J}_\nu^{\bar{a}}(0) \} | p \rangle. \quad (4.12)$$

В большинстве моделей (например, в кварковой модели и в алгебре полей) ШЧ есть c -число. В этом случае ШЧ не вносит вклада в связную часть амплитуды:

$$\langle p | T^*(J^a, \bar{J}^{\bar{a}}) | p \rangle_{\text{связ}} = \langle p | T^*(J^a, \bar{J}^{\bar{a}}) | p \rangle - \langle 0 | T^*(J^a, \bar{J}^{\bar{a}}) | 0 \rangle.$$

Так как контактные члены — также c -числа, то для связанных матричных элементов $T^* = T$. Многие выводы не изменятся, даже если ШЧ будут операторами, но для удобства в настоящий момент будем полагать, что ШЧ суть c -числа.

T -Произведение можно разложить по инвариантным амплитудам:

$$T_{\mu\nu}^{\bar{a}\bar{a}}(q_0, \mathbf{q}, p) = \frac{1}{M^2} \left(p_\mu - \frac{\nu}{q_3} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{\nu}{q^2} q_\nu \right) T_2^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, \nu) - \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) T_1^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, \nu) - i \varepsilon_{\mu\nu\sigma\lambda} \frac{p_\sigma q_\nu}{2M^2} T_3^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, \nu) + \dots \quad (4.13)$$

(В случае слабых токов мы опустили члены, пропорциональные q_μ , а в случае электромагнитных токов — $T_3 \equiv 0$). Абсорбтивные части $T_i^{\bar{a}\bar{a}}$ для $q^2 < 0$ и $2\nu + q^2 \geq 0$ совпадают с функциями, определенными в (1.9) и (1.10):

$$\text{Im } T_i^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, \nu) = \pi W_i^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, \nu). \quad (4.14)$$

Запишем для T_i дисперсионное соотношение по ν при фиксированных q^2 . Для больших ν при фиксированных q^2 можно ожидать, как обсуждалось ранее, что $T_{\mu\nu} \sim \nu^\alpha$, где α — подходящий полюс Редже. Если зафиксировать q и устремить $\nu = pq$ к бесконечности, то $p_\mu \sim \nu$, и тогда

$$T_1 \approx \nu^\alpha; T_2 \approx \nu^{\alpha-2}; T_3 \approx \nu^{\alpha-1}. \quad (4.15)$$

Какие показатели степени α возможны? Для T_1 и T_2 , где дает вклад вакуумный полюс, $\alpha = 1$. Но T_3 возникает из-за интерференции вектора с аксиалом и имеет поэтому отрицательную G -четность [($\rho - A_2$)-интерференция], таким образом, $\alpha \approx 1/2$. Поэтому следует ожидать, что при больших ν $T_1 \sim \nu$, $T_2 \sim \nu^{-1}$, $T_3 \sim \nu^{-1/2}$, т. е. T_2 и T_3 удовлетворяют безвычитательным дисперсионным соотношениям, а для T_1 требуется одно вычитание:

$$T_{2,3}^{\bar{a},\bar{a}}(q^2, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu' - \nu} W_{2,3}^{\bar{a},\bar{a}}(q^2, \nu) = \int_{-q^2/2}^{\infty} d\nu' \left[\frac{W_{2,3}^{\bar{a},\bar{a}}(q^2, \nu)}{\nu' - \nu} + \frac{W_{2,3}^{\bar{a},\bar{a}}(q^2, \nu')}{\nu' + \nu} \right]; \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} T_1^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, \nu) &= T_1^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, 0) + \nu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu'(\nu - \nu')} W_1^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, \nu) = \\ &= T_1^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, 0) + \nu \int_{-q^2/2}^{\infty} \frac{d\nu'}{\nu'} \left[\frac{W_1^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, \nu')}{\nu' - \nu} - \frac{W_1^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, \nu')}{\nu' + \nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Здесь было использовано преобразование кроссинга.

$$W_i^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, \nu) = -W_i^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, -\nu). \quad (4.18)$$

Рассмотрим поведение $T_i^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, \nu)$ в пределе БДЛ $|q_0| \rightarrow \infty$, т. е. когда q^2 и ν стремятся к бесконечности. Удобно сделать замену

переменных и работать с q^2 и $\xi = -q^2/2 v^*$, так как пределы интегрирования при этом фиксированы. Напомним определения: $F_1^{a\bar{a}} = M W_1^{a\bar{a}}$; $F_2^{a\bar{a}} = (v/M) \cdot W_2^{a\bar{a}}$; $F_3^{a\bar{a}} = (v/M) W_3^{a\bar{a}}$. Тогда имеем:

$$\left. \begin{aligned} T_1(q^2, \xi) &= T_1(q^2, \infty) - \frac{1}{M} \int_0^1 d\xi' \left[\frac{F_1^{a\bar{a}}(\xi', q^2)}{\xi' - \xi} + \frac{F_1^{a\bar{a}}(\xi', q^2)}{\xi' + \xi} \right]; \\ T_{2,3}(q^2, \xi) &= \frac{2\xi M}{q^2} \int_0^1 d\xi' \left[\frac{F_{2,3}^{a\bar{a}}(\xi', q^2)}{\xi' - \xi} - \frac{F_{2,3}^{a\bar{a}}(\xi', q^2)}{\xi' + \xi} \right]. \end{aligned} \right\} (4.19)$$

Теперь можно вывести правила сумм. Оценим поведение (4.19) при больших q_0 и сравним его с пределом БДЛ. Удобно работать в системе, где $q = (q_0, 0)$, $p = (E, p)$ и $v = Eq_0$; $q^2 = q_0^2$, $\xi = -q_0/2E$. В этой системе $T_{0i}^{a\bar{a}} = T_{00}^{a\bar{a}} = 0$ (мы пренебрегли членами, пропорциональными q_μ) и

$$\begin{aligned} T_{ij}^{a\bar{a}}(q, p) &\rightarrow -\frac{1}{q_0} \int d^3x \langle p | [J_i^a(x, 0), J_j^{\bar{a}}(0)] | p \rangle + \\ &+ \frac{i}{q_0^2} \int d^3x \langle p | \left[\frac{\partial}{\partial t} J_i^a(x, 0), J_j^{\bar{a}}(0) \right] | p \rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

В то же время из (4.13) и (4.19) следует:

$$\begin{aligned} T_{ij}^{a\bar{a}}(q, p) &\rightarrow \delta_{ij} \left\{ T_1^{a\bar{a}}(q^2, \infty) + \frac{2E}{Mq_0} \int_0^1 d\xi' [F_1^{a\bar{a}}(\xi', q^2) - F_1^{\bar{a}a}(\xi', q^2)] + \right. \\ &+ \frac{4E_2}{Mq_0^2} \int_0^1 d\xi' \xi' [F_1^{a\bar{a}}(\xi', q^2) + F_1^{\bar{a}a}(\xi', q^2)] - \\ &- \frac{1}{M} p_i p_j \frac{2}{q_0^2} \int_0^1 d\xi' [F_2^{a\bar{a}}(\xi', q^2) + F_2^{\bar{a}a}(\xi', q^2)] + \\ &+ \frac{i \varepsilon_{ijk} p_k}{M} \left\{ \frac{1}{q_0} \int_0^1 d\xi' [F_3^{a\bar{a}}(\xi', q^2) + F_3^{\bar{a}a}(\xi', q^2)] - \right. \\ &\left. - \frac{2E}{q_0^2} \int_0^1 d\xi' \xi [F_3^{a\bar{a}}(\xi', q^2) - F_3^{\bar{a}a}(\xi', q^2)] \right\} + O\left(\frac{1}{q_0^3}\right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Предположим, что $F_i^{a\bar{a}}(\xi, q^2)$ приближаются к конечному пределу при $q^2 \rightarrow -\infty$, тогда можно сравнить коэффициенты при $1/q_0$ и $1/q_0^2$ в (4.21) и (4.20) и получить отсюда правило сумм для F_i .

* Чтобы избежать путаницы между переменной Фейнмана x и пространственной координатой, в этой и следующей главах для отношения $-q^2/2v$ используется обозначение ξ . — Прим. пер.

Перейдем теперь к выводу правил сумм для частных случаев ep - и $\begin{pmatrix} \nu \\ \bar{\nu} \end{pmatrix}$ -рассеяния и для различных моделей ОВКС. Однако сначала обсудим возможные эффекты от операторных ШЧ. Если ОВКС содержит операторный ШЧ, то предел БДЛ (4.20) относится к T -произведению, а предел дисперсионных соотношений (4.21) — к ковариантному T^* -произведению. Чтобы сравнить (4.20) и (4.21), надо добавить к (4.20) подходящий контактный член. Если ШЧ — лоренцевский скаляр, т. е.

$$[J_0^a(x, t), \bar{J}_i^a(0)] = \dots + S^{\bar{a}\bar{a}}(0) \partial^i \delta^{(3)}(x),$$

то контактный член, который следует ввести для восстановления лоренц- и калибровочной инвариантностей, добавляет к T_{0j} член $q_j \langle p | S^{\bar{a}\bar{a}} | p \rangle$. Этот член может быть включен в неизвестную вычитательную константу $T_1^{\bar{a}\bar{a}}(q^2, \infty)$ и не изменит правила сумм. Это не так для операторного ШЧ со спином 2 $[J_0^a(x, t), \bar{J}_i^a(0)] = \dots + [S_{ij}^{\bar{a}\bar{a}}(0)] \partial^i \delta^{(3)}(x)$, который вносит в $T_{0i}^{\bar{a}\bar{a}}$ член, пропорциональный $(qr)p_i$. Единственный способ согласовать такой ШЧ с безвычитательными дисперсионными соотношениями по ν для T_2 — это потребовать, чтобы $F_2^{\bar{a}\bar{a}}(\xi, q^2) \xrightarrow{q^2 \rightarrow \infty} q^2$.

4.5. Правила сумм для электрон-нуклонного рассеяния

В случае электрон-нуклонного рассеяния $J^{em} = J^a = \bar{J}^a$. Первый член в разложении БДЛ исчезает после усреднения по спину, так как ОВКС для J_i^{em} и J_k^{em} должны быть антисимметричны по i и k , но такого тензора нельзя построить только из p . Отсюда следует

$$\begin{aligned} & \frac{8E^2}{M} \int_0^1 d\xi \left[\xi F_1(\xi) \delta_{ij} + (F_2(\xi) - 2\xi F_1(\xi)) \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{E^2} \right) \right] = \\ & = -i \int d^3x \langle p | \left[\frac{\partial}{\partial t} J_i^{em}(x, 0) J_j^{em}(0) \right] | p \rangle. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Члены переставлены таким образом потому, что $\xi F_1(\xi)$ пропорциональна σ_T , а $F_2(\xi) - 2\xi F_1(\xi)$ пропорциональна σ_S , и поэтому обе комбинации положительно определены.

Чтобы получить определенные предсказания, нужно иметь сведения об ОВКС в правой части (4.22). Эти ОВКС существенно зависят от моделей. Вычислим их в двух случаях.

1. **Кварковая модель.** В этой модели $J_\mu^{em} = \bar{\psi} \gamma_\mu Q \psi$, где Q — зарядовая матрица кварков. Рассмотрим взаимодействие \mathcal{L}_I , связывающее кварки друг с другом:

$$\mathcal{L}_I = g_1 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi B_\mu + g_2 \bar{\psi} \gamma_5 \psi \phi + g_3 \bar{\psi} \psi \sigma, \quad (4.23)$$

где B_μ — нейтральное векторное поле (глюон); φ (σ) — псевдоскалярное (скалярное) поле. Это взаимодействие включает только нейтральные мезоны и поэтому не влияет ни на форму J_μ^{em} , ни на ОВКС для J_μ^{em} . Однако оно меняет ОВКС для производной по времени от \dot{J} с J . С помощью уравнений движения выразим производные по времени через пространственные производные, а затем используем канонические ОВКС. Тогда получим

$$\begin{aligned} -i \langle p | \int d^3x \left[\frac{\partial}{\partial t} J_i^{em}(x, 0), J_j^{em}(0) \right] | p \rangle_{\langle S \rangle} &= C_{ij}(p) = \\ &= -i \langle p | \bar{\psi}(0) [\gamma_i \overleftrightarrow{\partial}_j - \gamma_j \overleftrightarrow{\partial}_i - 2\delta_{ij} \gamma_k \overleftrightarrow{\partial}_k + 2ig_1 (\gamma_i B_j + \\ &+ \gamma_j B_i - 2\delta_{ij} \gamma_k B_k) - 4iM\delta_{ij} + \delta_{ij} (g_2 \gamma_5 \varphi + g_3 \sigma)] Q^2 \psi(0) | p \rangle_{\langle S \rangle}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где M — массовая матрица кварков, а

$$Q^2 = (4/9) B - (1/6) Y + (1/3) I_3. \quad (4.25)$$

Это точное выражение для ОВКС на первый взгляд не дает никакой полезной информации, так как неизвестен, например, матричный элемент от $\bar{\psi} \gamma_i \overleftrightarrow{\partial}_j \psi$. Однако кое-что из (4.24) можно извлечь, например тензорную структуру $C_{ij}(p)$. Предположим, что произведения операторов в (4.24) не слишком сингулярны, тогда получим:

$$\begin{aligned} i \langle p | \bar{\psi} (\gamma_\mu \partial_\nu - g_1 \gamma_\mu B_\nu) \psi | p \rangle_{\langle S \rangle} &= A p_\mu p_\nu + B g_{\mu\nu}; \\ i \langle p | \bar{\psi} (-4iM + g_2 \varphi + g_3 \sigma) \psi | p \rangle_{\langle S \rangle} &= C, \end{aligned}$$

где A, B, C — лоренцевы скаляры и, следовательно, зависят только от $p^2 = M^2$, т. е. константы. Таким образом,

$$C_{ij}(p) = 2A (p_i p_j - \delta_{ij} p^2) + \delta_{ij} (4B - C). \quad (4.26)$$

Поделив (4.22) на E^2 и рассмотрим предел $E \rightarrow \infty$, получим

$$(8/M) \int_0^1 d\xi \xi F_1(\xi) = 2A; \quad (4.27)$$

$$p_i p_j \int_0^1 d\xi [F_2(\xi) - 2\xi F_1(\xi)] = 0. \quad (4.28)$$

Правило сумм (4.27) бесполезно, так как константа A неизвестна, но из (4.28) можно получить некоторые сведения, так как $F_2(\xi) - 2\xi F_1(\xi)$ положительно определено и, следовательно,

$$F_2(\xi) - 2\xi F_1(\xi) = \lim_{q^2 \rightarrow -\infty} [F_2(\xi, q^2) - 2\xi F_1(\xi, q^2)] = 0 \quad (4.29)$$

или с учетом (1.13) — (1.14)

$$R = \frac{\sigma_S(q^2, \xi)}{\sigma_T(q^2, \xi)} \xrightarrow{q^2 \rightarrow -\infty} 0. \quad (4.30)$$

Этот результат — следствие того, что токи строились из полей со спином $1/2$ минимальным образом. Если бы мы добавили аномальный магнитный момент к току, то отношение R не исчезло бы.

2. Алгебра полей. В этой модели $SU(3) \otimes SU(3)$ -токи задаются янг-миллсовскими полями. ОВКС для самих токов и для $\frac{\partial}{\partial t} J_i$ и J_j являются каноническими и равны

$$[J_i(x, 0), J_k(0)] = 0; \quad (4.31)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} J_i^a(x, 0), J_k^b(0) \right] = i\delta^{(3)}(x) C_{ab} J_i^a(0) J_k^b(0), \quad (4.32)$$

где C_{ab} — числовая матрица; a и b пробегают по всем индексам $SU(3) \otimes SU(3)$. Опять значение $C_{ij}(\mathbf{p})$ неизвестно, но тензорная структура определена:

$$C_{ij}(\mathbf{p}) = \langle p | C_{ab} J_i^a J_k^b | p \rangle_{\langle S \rangle} = A^1 p_i p_j + B^1 \delta_{ik}. \quad (4.33)$$

Аналогичная тензорная структура возникает в том случае, когда токи билинейны по скалярным мезонным полям. Так, если

$$J_\mu = \varphi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi, \text{ то}$$

$$\int d^3x \left[\frac{\partial}{\partial t} J_i(x, 0) J_k(0) \right] = \partial_i \varphi^*(0) \partial_k^j \varphi(0) + (i \longleftrightarrow k)$$

и $C_{ij}(p)$ имеет ту же структуру, что и (4.33). В этом случае получаем правила сумм:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{M} \int_0^1 d\xi [F_2(\xi) - 2\xi F_1(\xi)] &= A'; \\ \int_0^1 d\xi \xi F_1(\xi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Следовательно, для скалярных мезонов и алгебры полей получаем результат, противоположный (4.29) и (4.30), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \xi F_1(\xi) &= \lim_{q^2 \rightarrow \infty} \xi F_1(\xi, q^2) = 0; \\ R &= \frac{\sigma_S(q^2, \xi)}{\sigma_T(q^2, \xi)} \xrightarrow{q^2 \rightarrow -\infty} \infty. \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Новые правила сумм можно получить, если отбросить усреднение по спину или сделать дополнительные предположения об ОВКС. Для рассеяния электронов на поляризованной мишени Бьёркен

получил правило сумм для зависящей от спина части сечения рассеяния в терминах коммутатора:

$$[J_i^{em}(x, 0) J_k^{em}(0)] = \begin{cases} 2i\varepsilon_{ijk} A_j & \text{кварковая модель,} \\ 0 & \text{алгебра полей.} \end{cases}$$

К сожалению, это правило сумм очень сложно проверить.

Сикорелло, Гатто, Сартори, Тонин и Мак предложили модель для $C_{ij}(\mathbf{p})$. Следуя идеям Вильсона, они утверждали, что единственный оператор со спином 2 и размерностью, равной 4, который дает вклад в C_{ij} , есть тензор энергии—импульса $\theta_{\mu\nu}$ и поэтому

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} J_i^a(x, 0), J_k^b(0) \right] = \delta^3(x) \delta_{ab} [a\theta_{ik}(0) + b g_{ik} \theta_{00}(0)] + (\text{спин нуль}).$$

Это предположение может быть полезным, так как диагональный, усредненный по спину матричный элемент θ_{ik} известен: $\langle p | (\theta_{\mu\nu}) | p \rangle = (1/M) p_\mu p_\nu$. Непосредственное следствие такого предположения состоит в том, что в правила сумм (4.27) и (4.34) дают вклад только изотопические скаляры, так как $\theta_{\mu\nu}$ — изоскаляр. Другими словами, интеграл от $(F_2^a - F_2^b)$ должен равняться нулю. Это находится в противоречии с последними данными СЛАК, по которым $F_2^p > F_2^n$ во всем промежутке $0 \leq \xi \leq 1$. В то же время, как легко видеть из (4.24) и (4.25), в кварковой модели C_{ij} содержит и изоскалярную, и изовекторную часть.

4.6. Правила сумм для рассеяния нейтрино на нуклонах

В случае нейтринных реакций можно, в дополнение к правилам сумм, включающим $\left[\frac{\partial}{\partial t} J_i, J_k \right]$, проверять ОВКС для самих слабых токов. Во-первых, (0-0)-компоненты ОВКС не равны нулю. Это приводит к правилу сумм Адлера. Во-вторых, наличие W_3 позволяет проверить ОВКС для пространственных компонент.

Соответствующие ОВКС для $J_\mu^+ = J_\mu^+ = V_\mu^+ - A_\mu^+$, $V_\mu^+ = V_\mu^{1+12}$, если положить $\theta_c = 0$, в кварковой модели равны:

$$[J_0^+(x, 0), J_\mu^-(0)] = 4 [V_\mu^3(0) - A_\mu^3(0)] \delta^3(x) + \dots; \quad (4.36)$$

$$[J_i^+(x, 0), J_k^-(0)] = \{4\delta_{ik} [V_0^3(0) - A_0^3(0)] + 4i\varepsilon_{ijk} [\sqrt{2/3} (V_j^{(0)}(0) - A_j^{(0)}(0)) + (1/\sqrt{3}) (V_j^8(0) - A_j^8(0))]\} \delta^3(x). \quad (4.37)$$

В алгебре полей (4.36) остается без изменений, но (4.37) обращается в нуль.

1. **Правило сумм Адлера.** Правила сумм Адлера основаны на (4.36) и могут быть получены без использования теоремы БДЛ. Один из способов вывода состоит в переходе в систему с $p \rightarrow \infty$, тогда

$$\int dq_0 W_{00}^{\pm} (q_0, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \\ = \int d^3 x \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) \langle N | [J_0^+ (\mathbf{x}, 0), J_0^- (0)] | N \rangle.$$

В этом пределе $v = q_0 |\mathbf{p}|$ и $W_{00} = p_0^2 W_2 + (1 - q_0^2/q^2) W_1$. Таким образом,

$$\lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \int \frac{dv}{|\mathbf{p}|} \left[\frac{|\mathbf{p}|^2}{M^2} W_2^{\pm} \left(v, \frac{v^2}{|\mathbf{p}|^2} - q^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{q^2}{\frac{v^2}{|\mathbf{p}|^2} - q^2} W_2^{\pm} \left(v, -\frac{v^2}{|\mathbf{p}|^2} - q^2 \right) \right] = \frac{4p_0}{M} \langle I_3 \rangle.$$

Если поменять местами переход к пределу и интегрирование, то получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{M} [W_2^{\pm} (v, -q^2)] = \int_{-q^2/2}^{\infty} \frac{dv}{M} [W_2^{\bar{v}} (v, q^2) - W_2^v (v, q^2)] = 4 \langle I_3 \rangle. \quad (4.38)$$

или, делая замену переменных,

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} [F_2^{\bar{v}} (\xi, q^2) - F_2^v (\xi, q^2)] = 4 \langle I_3 \rangle = \begin{cases} 2 & \text{для } p \\ -2 & \text{для } n \end{cases}. \quad (4.39)$$

Это правило сумм намного жестче правил сумм, полученных из теоремы БДЛ, так как оно справедливо для всех q^2 . Оно требует измерения разности неупругого сечения рассеяния нейтрино и антинейтрино на нуклоне (или тяжелом ядре). Воспользовавшись результатами гл. 1, можно получить, что $F_2^{\bar{v}p} - F_2^{vp} = F_2^{\bar{v}n} - F_2^{vn} = F_2^{vn} - F_2^{vp}$ и, следовательно, достаточно измерить разность между рассеянием нейтрино на протоне и нейтроне. До сих пор проверка этого правила сумм не проведена*.

2. ОВКС между пространственными компонентами. Для проверки ОВКС между пространственными компонентами необходимо

* См. примечание на с. 42. — Прим. пер.

вновь вернуться к пределу БДЛ. Сравним (4.21) с (4.20) и используя ОВКС (4.37), получим два правила сумм:

$$\int_0^1 d\xi [F_1^{\tilde{\nu}}(\xi) - F_1^{\nu}(\xi)] = \frac{M}{2E} \langle p | 4V_0^3(0) | p \rangle_{\langle S \rangle} = 2 \langle I_3 \rangle \quad \text{(правило сумм Бьёркена);} \quad (4.40)$$

$$i \int_0^1 d\xi [F_3^{\nu}(\xi) + F_3^{\tilde{\nu}}(\xi)] \varepsilon_{ijk} p_k / M = \\ = -4i \varepsilon_{ijk} \langle p | [\sqrt{2/3} (V_k^0 - A_k^0) + (1/\sqrt{3}) (V_k^3 - A_k^3)] | p \rangle_{\langle S \rangle},$$

или, представив ток барионного заряда как $B_\mu = \sqrt{2/3} V_\mu^0$, а ток гиперзаряда как $Y_\mu = (2\sqrt{3}) V_\mu^3$, получаем

$$\int_0^1 d\xi [F_3^{\nu}(\xi) + F_3^{\tilde{\nu}}(\xi)] = -4 \langle B + Y/2 \rangle = \{-6 \text{ для нуклонов}\} \quad (4.41)$$

(правило сумм Гросса — Левеллина-Смита).

Правило сумм (4.40) на самом деле зависит от правила сумм Адлера. Действительно, как было видно в кварковой модели, $F_2(\xi) = 2\xi F_1(\xi)$, и тогда (4.40) совпадает с (4.39). Это правило сумм с помощью вращений в изотопическом пространстве переходит в неравенство для eN -рассеяния:

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} [F_2^{\nu p} + F_2^{\tilde{\nu} n}] \geq \frac{1}{2}. \quad (4.42)$$

Неравенство (4.42), по-видимому, тривиально, так как F_2 при малых ξ приближается к константе и, следовательно, левая часть логарифмически расходится.

Правило сумм (4.41) полезно, поскольку включает изоскалярные комбинации F :

$$F_2^{\nu p} + F_3^{\tilde{\nu} p} = F_3^{\tilde{\nu} n} + F_3^{\nu n} = F_3^{\nu p} + F_3^{\nu n}$$

и, следовательно, может быть проверено при рассеянии нейтрино на тяжелых ядрах. Его правая часть очень велика по сравнению с экспериментальным значением:

$$\left(\int_0^1 d\xi F_2^{\nu p}(\xi) \right)_{exp} \approx 0,36.$$

В отличие от остальных ОВКС между токами оно сильно зависит от специального представления токов, так как содержит зависящие от представления компоненты d_{abc} .

В алгебре полей правые части (4.40) и (4.41) должны быть заменены нулями. Однако тогда F_1 и F_3 тождественно равны нулю.

3. $[J_i, J_k]$ -правила сумм. Как и в случае электрон-нуклонного рассеяния, можно получить правило сумм для W_i , связав их с коммутатором $\left[\frac{\partial}{\partial t} J_i, J_k\right]$. Эти правила выводятся, как и предыдущие. В результате получаем: $F_1 = F_3 = 0$ и

$$\frac{\sigma_R(q^2, \xi) + \sigma_L(q^2, \xi)}{\sigma_S(q^2, \xi)} \xrightarrow{q^2 \rightarrow -\infty} 0 \quad (\text{в алгебре полей}); \quad (4.43)$$

$$F_2 - 2\xi F_1 = 0 \quad \text{и}$$

$$\frac{\sigma_S(q^2, \xi)}{\sigma_R(q^2, \xi) + \sigma_L(q^2, \xi)} \xrightarrow{q^2 \rightarrow -\infty} 0 \quad (\text{в модели кварков}). \quad (4.44)$$

4. Соотношения между структурными функциями в электророжении и нейтринных реакциях. Так как изовекторная часть электромагнитного тока и часть слабого тока с $\Delta S=0$ связаны друг с другом киральной симметрией, можно связать величины структурных функций для электромагнитного и нейтринного рассеяний. В пределе точной симметрии вклад А-А в F_2^Y совпадает, конечно, с вкладом V-V. Однако даже в случае нарушения симметрии можно связать эти два вклада. Если предположить (следуя Бьёркену и Пашосу), что член, нарушающий симметрию, преобразуется как $(\bar{3}, 3) + (3, \bar{3})$, т. е. как массовый член кварков в глюонной модели, то легко показать, что

$$\langle p \left| \left[\frac{\partial}{\partial t} (V_i - A_i), (V_j + A_j) \right] \right| p \rangle_{\langle S \rangle} = 0. \quad (4.45)$$

Отсюда следует, что вклады векторных и аксиальных токов в моменты от F_2 или $F_2 - 2\xi F_1$, которые задаются ОВКС $[J, J]$, равны. Это позволяет получить равенство

$$\int_0^1 d\xi \left(\frac{F_2^{Vp}(\xi) + F_2^{Vn}(\xi)}{2} \right)^{\Delta S=0} = 2 \int_0^1 d\xi \left[\frac{F_2^{Vp}(\xi) + F_2^{Vn}(\xi)}{2} \right]_V^{\Delta S=0}.$$

Произведя поворот в изотопическом пространстве, перейдем к моментам от F_2^{Vn} :

$$4 \int_0^1 d\xi \left(\frac{F_2^{Vp} + F_2^{Vn}}{2} \right)^{I=1} \leq 4 \int_0^1 d\xi \left(\frac{F_2^{Vp} + F_2^{Vn}}{2} \right). \quad (4.46)$$

Левая часть не определена экспериментально, но, зная полное нейтринное сечение $\sigma_{tot}^{vA} = \frac{G^2 ME}{\pi} (0,6 \pm 0,15)$ (см. ниже), можно ее оценить. Она должна лежать между 0,6 и 1,2. Предполагая, что

$F_2^{\gamma n} < F_2^{\gamma p}$, получаем, что правая часть меньше, чем $4 \cdot 0,18 = 0,72$. Таким образом, неравенство не противоречит имеющимся данным.

В глюонной модели можно получить дополнительное соотношение, связанное с коммутатором $[I_i, I_k]$, появляющимся в электронном и нейтринном рассеяниях. Это соотношение имеет вид

$$12 \int_0^1 d\xi \xi [F_1^{\gamma p}(\xi) - F_1^{\gamma n}(\xi)] = \int_0^1 d\xi \xi [F_3^{\gamma p}(\xi) - F_3^{\gamma n}(\xi)]. \quad (4.47)$$

(правило сумм Ллевеллина-Смита)

Выразим, наконец, нейтринное сечение через моменты структурных функций. Запишем формулу (1.11) для $d\sigma(\frac{\nu}{\bar{\nu}})/dQ^2 dv$ через безразмерные переменные: $\xi = Q^2/2\nu$ и $y = \nu/ME$. Имеем

$$\frac{d^2 \sigma(\frac{\nu}{\bar{\nu}})}{dy dx} = \frac{G^2 ME}{\pi} \left[\left(1 - y - \frac{My\xi}{2E} \right) F_2(\frac{\nu}{\bar{\nu}}) + \xi y^2 F_1(\frac{\nu}{\bar{\nu}}) \mp y \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{y}{2} \right) \xi F_3(\frac{\nu}{\bar{\nu}}) \right]. \quad (4.48)$$

В пределе, когда энергия нейтрино E много больше массы M , физическая область рассеяния определяется неравенствами $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. В этом пределе полное сечение равно

$$\sigma_{tot}(\frac{\nu}{\bar{\nu}})(E) = \frac{G^2 ME}{\pi} \int_0^1 d\xi \left[\frac{1}{2} F_2(\frac{\nu}{\bar{\nu}})(\xi) + \frac{1}{3} F_1(\frac{\nu}{\bar{\nu}})(\xi) \xi \mp \frac{1}{3} F_3(\frac{\nu}{\bar{\nu}})(\xi) \xi \right], \quad (4.49)$$

или

$$\sigma_{tot}(\frac{\nu}{\bar{\nu}})(E) = \frac{G^2 ME}{\pi} \int_0^1 d\xi F_2(\frac{\nu}{\bar{\nu}})(\xi) A(\frac{\nu}{\bar{\nu}})(\xi),$$

где

$$\frac{1}{3} \leq A(\frac{\nu}{\bar{\nu}}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma^{(L)}(R) - \frac{1}{3} \sigma^{(R)}(L)}{\sigma_R + \sigma_L + 2\sigma_S} \right) \leq 1. \quad (4.50)$$

То, что $\sigma_{tot}(E)$ линейно по энергии нейтрино E , — прямое следствие скейлинга, и наоборот, в настоящее время это лучшее экспериментальное доказательство скейлинга в нейтринном рассеянии*. Коэффициент при E выражается через моменты функций F_i и может быть представлен в терминах коммутаторов токов. Заметим, что разность $\sigma^{\nu N} = \delta^{\nu N}$ определяется F_3 и в общем случае не должна

исчезать. Наконец, если существует W -бозон, то при больших энергиях линейный рост σ_{tot} обрежется и в асимптотике

$$\sigma_{tot}^{\gamma} = \frac{G^2 M_W^2}{2\pi} \ln \left(\frac{2EM}{M_W^2} \right) F_2^{\gamma}(0). \quad (4.51)$$

Таким образом, линейность σ_{tot}^{γ} по E есть экспериментальное доказательство отсутствия W -бозона.

4.7. Правила сумм для аннигиляции

Для аннигиляции электронов и позитронов в адроны можно получить правило сумм для ШЧ в ОВКС электромагнитных токов. Рассмотрим вакуумное среднее от коммутатора:

$$(1/2\pi) \int d^4x \exp(iqx) \langle 0 | [J_{\mu}(x), J_{\nu}(0)] | 0 \rangle = \varepsilon(q_0) (g_{\mu}^{\nu} q^2 - q_{\mu} q_{\nu}) \rho(q^2). \quad (4.52)$$

Разложим (4.52) по промежуточным адронным состояниям, тогда будет видно, что $\rho(q^2)$ пропорциональна полному сечению для $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow$ адроны:

$$\sigma_{tot}^{\gamma \rightarrow \text{адроны}}(q^2) = \frac{32\pi^3 \alpha^2 \rho(q^2)}{q^2}. \quad (4.53)$$

Интеграл от пространственно-временной компоненты в (4.52) равен

$$-q_i \int_0^{\infty} dq_0^2 \rho(q_0^2 - q^2) = \int d^3x \exp(-iqx) \langle 0 | [J_0(x, 0), J_i(0)] | 0 \rangle = -iq_i \langle 0 | S(0) | 0 \rangle, \quad (4.54)$$

где $S(0)$ — скалярный ШЧ;

$$[J_0(x, 0), J_i(0)] = iS(0) \partial_i \delta^{(3)}(x).$$

Таким образом, мы получили правило сумм для сечения аннигиляции

$$\int_0^{\infty} dq^2 \frac{q^2 \sigma_{tot}(q^2)}{32\pi^3 \alpha^2} = \langle 0 | S(0) | 0 \rangle. \quad (4.55)$$

Что можно сказать о вакуумном среднем от ШЧ? В алгебре полей этот член — конечное c -число, следовательно, $\sigma_{tot}^{\gamma \rightarrow \text{адроны}} \leq M^2/q^4$.

Это очень быстрое падение по сравнению с сечением аннигиляции в лептоны, которое ведет себя как $1/q^2$. В кварковой модели ШЧ нельзя вычислить канонически, и приходится обращаться к теории возмущений. В теории возмущений сечения рассеяния ведут себя

как $1/q^2$, и соответствующий ШЧ расходится квадратично*. Такое поведение совпадает с тем, что можно ожидать с точки зрения масштабной инвариантности, поскольку в теории без размерных параметров полное сечение должно быть пропорционально $1/q^2$.

ГЛАВА 5

СКЕЙЛИНГ, АНОМАЛИИ И ПОВЕДЕНИЕ НА СВЕТОВОМ КОНУСЕ

5.1. Скейлинг и предел БДЛ

Впервые предположение о том, что структурные функции должны быть масштабно-инвариантными, было высказано Бьёркенем на основе анализа правил сумм в электророждении. Рассмотрим правило сумм (4.22) для $W_2(\nu, q^2)$

$$\lim_{q^2 \rightarrow -\infty} \int_0^1 d\xi F_2(\xi, q^2) = \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \left\{ \frac{M_i}{4|\mathbf{p}|^2} \int d^3x \{ \langle \mathbf{p} | [J_{\parallel}^{em}(\mathbf{x}, 0), J_{\parallel}^{em}(0)] - [J_T^{em}(\mathbf{x}, 0), J_T^{em}(0)] | \mathbf{p} \rangle \} \right\}, \quad (5.1)$$

где J_{\parallel} (J_T) — пространственные компоненты J_i , параллельные (поперечные) вектору \mathbf{p} . Предположим, что ОВКС, появившиеся в правиле сумм, имеют конечные матричные элементы и, следовательно, левая часть (5.1) имеет конечный предел. Тогда можно показать, что все правила сумм высшего порядка, т. е. те, которые включают компоненты коммутаторов $\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{2n+1} J_i^{em}(\mathbf{x}, 0), J_k^{em}(0) \right]$, также выполняются. Они имеют вид

$$\lim_{q^2 \rightarrow -\infty} \int_0^1 d\xi F_2(\xi, q^2) \xi^{2n} \sim \lim_{|\mathbf{p}| \rightarrow \infty} \frac{1}{|\mathbf{p}|^{2+n}} \times \langle \mathbf{p} | \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{2n+1} J_i^{em}(\mathbf{x}, 0), J_k^{em}(0) \right] | \mathbf{p} \rangle. \quad (5.2)$$

Так как $F_2(\xi, q^2)$ положительна, а ξ всегда меньше единицы, то

$$\int_0^1 d\xi \xi^{2n} F_2(\xi, q^2) \leq \int_0^1 d\xi F_2(\xi, q^2),$$

* Более общее доказательство зависимости $\sigma_{tot} \sim 1/q^2$ получено в работе В. Н. Грибова, Б. Л. Иоффе, И. Я. Померанчука «Ядерная физика», 1967, т. 6, с. 587. См. также Б. Л. Иоффе, В. А. Хозе. «Ядерная физика», 1971, т. 13, с. 381; А. М. Поляков. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1970, т. 59, с. 542. — *Прим. пер.*

и, следовательно, существование предела в (5.1) гарантирует конечность предела в (5.2) (в худшем случае возможны, конечно, осцилляции).

Бьёркен указал на то, что существование предела (5.1) эквивалентно скейлингу. Такое утверждение не абсолютно строгое, так как необходимо предположить равномерность, чтобы поменять местами предел и интеграл. Однако естественно считать, что если (5.1) имеет конечный ненулевой предел, то и $F_2(\xi, q^2)$ имеет предел. Справедливы и обратные утверждения. Именно из существования скейлинга предела следует существование предела БДЛ в системе с бесконечным импульсом $|p| \rightarrow \infty$. Убедимся в этом, рассмотрев предел дисперсионного соотношения для $T_2(q^2, \xi)$ при $|q_0| \rightarrow \infty$; оставим только ведущий член по $p_0 = -q_0/2\xi$:

$$T_2(q^2, \xi) \xrightarrow{|q_0| \rightarrow \infty} -\frac{4M}{q_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2p_0}{q_0}\right)^{2n} \int_0^1 F_2(\xi) \xi^{2n} d\xi. \quad (5.3)$$

С учетом скейлинга и предположения о безвычитательных дисперсионных соотношениях можно разложить $T_2(q^2, pq)$ по обратным степеням q_0 в системе с $p = \infty$. Коэффициенты разложения, которые по БДЛ связаны с ОВКС временных производных от тока с самим током, оказываются конечными. Если необходимо конечное число вычитаний, например $F_2(\xi) \approx \xi^{-N}$, то несколько первых правил сумм не будут выполняться. Однако для $2n > N - 1$ все правила сумм $\int_0^1 d\xi \xi^{2n} F(\xi)$ существуют.

5.2. Аномалии в теории возмущений

В предыдущих главах при доказательстве правил сумм мы пренебрегали всеми возможными трудностями. Мы предполагали справедливость асимптотического разложения $T_{\mu\nu}(q, p)$ по обратным степеням q_0 (предел БДЛ), предполагали также, что коэффициенты этого разложения можно получить из уравнений движения и канонических ОВКС-полей. Корректны ли такие предположения? Единственный способ проверить их — это обратиться к теории возмущений. Первое исследование предела БДЛ в теории возмущений было проведено Джонсоном и Лоу, которые предложили рассматривать его как способ определения ОВКС. Они обнаружили, что ОВКС, определенные таким способом, вообще говоря, не совпадают с ОВКС, вычисленными с помощью канонических соотношений. После того как были получены правила сумм для лептон-адронного рассеяния и выдвинуто предположение о скейлинге, этот вопрос был вновь пересмотрен. Так как аномалии в теории возмущений подробно обсуждались в предыдущих лекциях, мы лишь коротко остановимся на результатах.

Аномалии в теории возмущений возникают уже при вычислении структурных функций во втором порядке. Если оценить мнимую

часть квадрата (см. рис. 24; пунктирная линия означает либо нейтральный векторный мезон, либо пион), то можно найти, что νW_2 при $q^2 \rightarrow -\infty$ и фиксированных x не является масштабной инвариантной. Нарушение скейлинга логарифмическое, т. е. в νW_2 присутствуют члены типа $\ln(q^2/M^2)$. Это означает, что правило сумм (5.1) не удовлетворяется во втором порядке теории возмущений и T -произведение не убывает как $1/q_0$ при больших q_0 . В этом порядке теории возмущений наивные вычисления ОВКС для токов также неверны. Так, например, тензорная структура сингулярного произведения $C_{ab} J_i^a J_k^b$ отлична от ожидаемого из простых соображений. Поэтому в модели взаимодействующих кварков неправильно считать, что $F_2 - 2xF_1$ исчезает как $1/\nu$. Аналогичные трудности возникают при вычислении ОВКС для пространственных компонент, которые хотя и конечны, но отличаются от канонических.

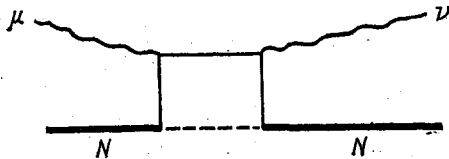


Рис. 24

Сверхперенормируемые теории несколько лучше, чем просто перенормируемые.

Структурные функции в $\lambda\phi^3$ -теории масштабны и не нарушают наивной тензорной структуры ОВКС. Однако даже в сверхперенормируемых теориях не все хорошо. Правило сумм (5.1) расходится, но не потому, что νW_2 не масштабна при больших q^2 , а потому, что для бесконечных q^2 возникает полюс при $\xi = 1$. Это отражение логарифмической расходимости матричного элемента $[J_i, J_k] \sim \partial_i \phi \partial_k \phi$ в теории возмущений.

В то же время реальный мир менее сингулярен, чем на это указывает теория возмущений. Конечно, всегда существует вероятность, что при более высоких энергиях эксперименты укажут на отклонение от скейлинга; однако прямая экстраполяция современных данных показывает, что предел БДЛ действительно правилен и правила сумм конечны. Природа ведет себя в некотором смысле как свободная теория поля и не дает доказательств сингулярного характера взаимодействующих полей. В принципе можно построить модель теории поля, в которой есть скейлинг и отсутствуют аномалии. Для этого нужно искусственно ввести в теорию ультрафиолетовое обрезание, что как раз и делается в партонной модели, основанной на идее о том, что в глубоконеупругой области нуклоны можно рассматривать как коллектив свободных частиц. Чтобы согласовать эту идею с локальной теорией поля, необходимо ввести фиксированное обрезание по импульсу; тогда легко получить все наивные предсказания алгебры токов.

Важный урок, который можно извлечь из обсуждения теории возмущений, состоит в том, что правила сумм для неупругого лептон-адронного рассеяния, вытекающие из алгебры токов, сильно зависят от динамики. Вообще говоря, нет особых причин ожидать,

что теория возмущений дает хорошее приближение для глубоконо-упругой области. Кроме того, эксперимент согласуется с предположением о пределе БДЛ. Поэтому можно надеяться в будущем найти оправдание существованию таких правил сумм. Однако связь между структурой ОБКС и правилами сумм в теории взаимодействующих полей может быть уже не такой тривиальной.

5.3. Световой конус и разложение произведений операторов

Обсудим теперь, что означает скейлинг в координатном пространстве, в частности, какая область в пространстве — времени исследуется в скейлинговом пределе*? Для ответа на этот вопрос рассмотрим скейлинговый предел для коммутаторов токов $\int d^4x \exp(iqx) \times \times \langle p | [J_\mu(x) J_\nu(0)] | p \rangle$ в системе покоя мишени, где $p = (M, 0)$, $q = (q_0, 0, 0, q_3)$. В этой системе

$$q_0 = v/M, \quad q_3 = \sqrt{v^2/M^2 - q^2} = v/M + MW, \quad (5.4)$$

и, следовательно, коммутатор можно записать как

$$\int d^4x \exp\{i[(2v/M + MW)(t - z) + MW(t + z)]\} C_{\mu\nu}(x^2, x_0, M). \quad (5.5)$$

Таким образом, для больших v в этом фурье-преобразовании важна область, где $t - z \lesssim M/2v$ и $t + z \lesssim 1/2 MW$, так что

$$x^2 \lesssim t^2 - z^2 \lesssim 1/4 vW = -1/2 \partial^2, \quad (5.6)$$

Коммутатор равен нулю для пространственных интервалов между токами ($x^2 < 0$); следовательно, в скейлинговом пределе исследуется поведение коммутаторов тока на световом конусе. В реджевском пределе (высокие энергии при фиксированных внешних массах) изучается область, где

$$x^2 \leq t^2 - z^2 \lesssim -1/2 q^2 = \text{const}, \quad (5.7)$$

и, следовательно, основной вклад в структурные функции идет от x , находящихся на конечном расстоянии от светового конуса.

Бьёркеновское представление структурных функций в виде «почти одновременных коммутаторов» — другой способ продемонстрировать, как происходит приближение к световому конусу. Рассмотрим структурную функцию F_1 , которая в системе, где $p = (p_0, 0, 0, p_3)$ и $q = (q_0, 0, 0, 0)$, выражается как

$$F_1(\xi, q^2) = \frac{1}{M} \int \frac{d^4x}{2\pi} \exp(iqx) \langle p | [J_x(x, t), J_x(0)] | p \rangle. \quad (5.8)$$

* Впервые этот вопрос был исследован в работе В. Л. Иоффе «Phys. Lett. В», 1969, т. 30, с. 123; «Письма ЖЭТФ», 1969, т. 10, с. 143. — *Прим. пер.*

Скейлингова предела можно достигнуть, положив $q_0 \rightarrow \infty$, $p_0 \rightarrow \infty$ и оставив $\xi = -q^2/2$ $pq = -q_0^2/2p_0$ фиксированным. Запишем F_1 в виде

$$F_1(\xi) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \int \frac{d\tau d^3x}{2\pi} \exp(-i2\xi\tau) \times \\ \times \frac{1}{p_0} \left\langle p \left[J_x \left(x, \frac{\tau}{p_0} \right), J_x(0) \right] \middle| p \right\rangle, \quad (5.9)$$

где $\tau = tp_0$.

Из выражения (5.9) можно получить все правила сумм, обращая преобразование Фурье и раскладывая обе части по степеням τ . Кроме того, видно, как происходит подход к световому конусу, так как интервал $(\tau/p_0)^2 - x^2 \geq 0$, дающий вклад в (5.9), исчезает при больших p_0 .

Вильсон предложил обобщение ОВКС, относящееся к поведению коммутаторов токов на световом конусе. Обобщение состоит в том, что произведение двух локальных операторов для малых пространственно-временных интервалов можно разложить по системе независимых локальных операторов:

$$A(x/2) B(-x/2) \approx \sum_{x_\mu \approx 0} C_n(x) O_n(0). \quad (5.10)$$

Функции $C_n(x)$ зависят от четырехвектора x и имеют сингулярности вблизи $x \approx 0$ типа $[x^2 - i\epsilon x_0]^{-1}$ и, возможно, $\ln(x^2 m^2)$. Существенная черта схемы Вильсона — понятие масштабной инвариантности. С каждым локальным оператором O_n связывается «размерность» d_n , которая фиксирует зависимость C_n от x с точностью до логарифмов. Если бы масштабная инвариантность была строгой симметрией, тогда существовал бы унитарный оператор $U(s)$, такой, что

$$O_n(x) \rightarrow U^+(s) O_n(x) U(s) = s^{d_n} \theta_n(sx). \quad (5.11)$$

Применяя это преобразование к разложению (5.10), получаем

$$C_n(sx) = s^{d_n - d_A - d_B} C_n(x). \quad (5.12)$$

Отсюда следует, что $C_n(x)$ — однородная функция x порядка $d_n - d_A - d_B$.

В теории свободного поля разложение произведений операторов корректно, а операторы θ_n — упорядоченные по Вику произведения полей и их производных. Размерность операторов в этом случае равна физической размерности в единицах массы (скалярное поле имеет размерность m^1 , спинорное поле — $m^{3/2}$, ток — m^3 и т. д.). Однако при включении взаимодействия размерность может измениться. Вильсон привел аргументы в пользу того, что единственными опе-

раторами, размерность которых совпадает с канонической, будут те, которые удовлетворяют нелинейным ОВКС, а именно векторные токи и тензор энергии—импульса.

Разложение произведений операторов — весьма полезное обобщение ОВКС. Оно, конечно, определяет все ОВКС двух операторов; однако даже если коммутаторы бесконечны, разложение всегда существует для малых, но конечных x_μ [расходимости возникают только в S -числовых функциях $C_n(x)$].

Приведем пример разложения коммутаторов двух токов:

$$\left[J_\mu^a \left(\frac{x}{2} \right), J_\nu^b \left(-\frac{x}{2} \right) \right]_{x_\mu \approx 0} = \delta_{ab} x_\mu x_\nu \left[\frac{1}{(x^2 - i\epsilon x_0)^3} - \frac{1}{(x^2 + i\epsilon x_0)^3} \right] + f_{abc} \left[\frac{1}{(x^2 - i\epsilon x_0)^4} - \frac{1}{(x^2 + i\epsilon x_0)^4} \right] (x^\mu J_\nu^c(0) + x^\nu J_\mu^c(0)), \quad (5.13)$$

где первый член приводит к квадратично расходящемуся s -числовому ШЧ в $[J_0^a(x, 0), J_i(0)]$, а второй приводит к $f_{abc} J_\nu^c(0)$ в $[J_0^a(x, 0), J_\nu^b(0)]$ (использовалось равенство $\partial_0 \delta(x^2) x_0 \approx 0 \delta^3(x)$).

Зафиксируем теперь свойства O_n по отношению к преобразованию Лоренца. В качестве O_n можно выбрать симметричный тензор n -го ранга с нулевым следом, тогда

$$A(x/2) B(-x/2) \underset{x \approx 0}{\approx} \sum_n C_n(x^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} O_{\mu_1 \dots \mu_n}^n. \quad (5.14)$$

На малых расстояниях тензор $O_{\mu_1 \dots \mu_n}$ размерности D_n вносит в разложение вклад, который ведет себя как $(x)^{D_n - d_A - d_B}$. Следовательно, основной вклад дают операторы с размерностью D_n меньшей, чем $d_A + d_B - 1$.

Теперь обобщим разложение произведений операторов на световой конус. Тогда x_μ не обязательно мало, и $O_{\mu_1 \dots \mu_n}^n$ вносит вклад, который ведет себя как $(x^2)^{D_n - d_A - d_B - n}$ при малых x^2 . Таким образом, в разложение вблизи светового конуса вносит вклад бесконечное число операторов, размерность которых минус спин меньше, чем $d_A + d_B + 1$. В свободной теории поля существуют определенные соотношения между наименьшей размерностью операторов и их спином. В модели свободных кварков, например, операторы наименьшей размерности (исключая полные производные локальных операторов) имеют вид

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \psi; \quad \bar{\psi} (\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial}_\nu) \psi \dots \sum_{\{\mu_1 \dots \mu_n\}} \bar{\psi} \gamma_{\mu_1} \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_2} \dots \overleftrightarrow{\partial}_{\mu_n} \psi, \quad (5.15)$$

и они удовлетворяют соотношению

$$\text{размерность} = \text{спин} + 2.$$

Таким образом, они будут вносить одинаковый вклад в разложение на конусе.

Применим теперь разложение на световом конусе к диагональному матричному элементу коммутатора токов, выделив коэффициент при $P_\mu P_\nu$:

$$\begin{aligned} \langle p | [J_\mu(x/2), J_\nu(-x/2)] | p \rangle_{x^2} \approx 0 \approx \\ \approx \sum_n C_n(x^2) x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} \langle p | O_{\mu, \nu, \mu_1 \dots \mu_n}^{n+2} | p \rangle. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Если операторы в разложении удовлетворяют каноническому соотношению (5.15), то $C_n(x^2)$ будет иметь размерность $3 + 3 + n - (4 + n) = 2$. Отсюда следует

$$C_n(x^2) = C_n \left[\frac{1}{x^2 + i\epsilon x_0} - \frac{1}{x^2 - i\epsilon x_0} \right] = C_n \delta(x^2) \varepsilon(x_0) \pi.$$

Таким образом, канонические размерности предполагают, что сингулярность на световом конусе есть δ -функция. Если от приведенного выражения взять фурье-преобразование, то такая сингулярность приводит к скейлинговым структурным функциям. Наоборот, существование нетривиального масштабно-инвариантного предела требует бесконечного числа операторов с возрастающим спином n и размерностью (спин + 2).

Что это за операторы? Если записать матричный элемент от O^{n+2} как $\langle p | O_{\mu, \nu, \mu_1 \dots \mu_n}^{n+2} | p \rangle = O^{n+2}(0) p_\mu p_\nu p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n} + \dots$, то

$$\langle p | [J_\mu(x/2), J_\nu(-x/2)] | p \rangle = p_\mu p_\nu \delta(x^2) \varepsilon(x_0) \sum_n C_n(p x)^n O^{n+2}(0) + \dots \quad (5.17)$$

Возьмем от (5.17) фурье-преобразование. Тогда

$$O^{n+2} = \text{const} \int_0^1 d\xi \xi^n F_2(\xi). \quad (5.18)$$

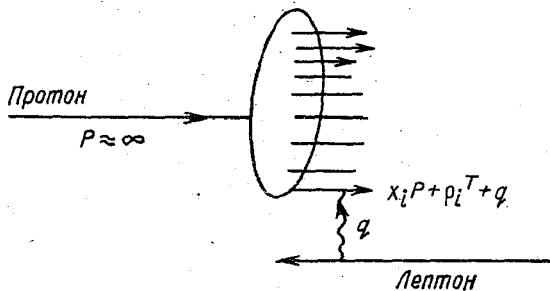
Правую часть (5.18) можно рассматривать как правило сумм для компонент с высшим спином в ОВКС $\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_0} \right)^{n+1} J_\mu(x, 0), J_\nu(0) \right]$. Произвести такое сравнение можно непосредственно, взяв предел $x_0 \rightarrow 0$ в последовательности производных по времени от (5.17).

В рамках разложения произведения операторов можно ввести гипотезы, непосредственно ведущие к ранее полученным правилам сумм. Так, если предположить, что тензорная структура произведений вблизи светового конуса та же, что и в модели свободных кварков, то $\sigma_L/\sigma_T = 0$. Однако потребуется еще много работы, чтобы понять, почему поведение на световом конусе такое же, как в свободной теории, и чтобы найти новые приложения такого разложения.

6.1. Партонная модель Фейнмана

Партонная модель возникла под влиянием точно-подобного поведения структурных функций, обнаруженного в СЛАК. Как уже говорилось, любая модель, в которой нуклон рассматривается как система, состоящая из точно-подобных объектов (бесструктурных объектов, т. е. без форм-факторов), приводит к скейлингу. Основные идеи партонной модели были высказаны Фейнманом и в деталях разработаны Бьёркеном, Пашосом и Дреллом, Леви и Яном. Важная особенность модели Фейнмана для релятивистского лептон-адронного рассеяния состоит в выделенности системы отсчета с бесконечным импульсом. Именно в этой системе нуклон имеет простую структуру и к нему применимо импульсное приближение. Идея Фейнмана заключалась в том, что в системе с бесконечным импульсом движение составляющих нуклона (с этого момента будем называть их партонами) замедляется из-за эффекта растяжения времени, поэтому падающий лептон мгновенно и некогерентно (так как времени на перераспределение не хватает) рассеивается на партонах, составляющих нуклон.

Рассмотрим систему с бесконечным импульсом $\mathbf{P} \rightarrow \infty$, которая эквивалентна системе центра инерции лептона и адрона при асимптотических энергиях. Предположим, что протон составлен из партонов, не имеющих структуры (т. е. из свободных частиц). Пусть виртуальное состояние протона состоит из N партонов, где i -й партон имеет продольный импульс $x_i \mathbf{P}$ ($\sum x_i = 1$) и поперечный импульс \mathbf{P}_i^T ($\sum \mathbf{P}_i^T = 0$):



Если время взаимодействия много меньше времени жизни виртуального состояния, то партоны можно рассматривать как голые частицы. Из-за принципа неопределенности время жизни виртуального состояния равно

$$T_v^{-1} \approx E_f - E_p = \sum_{i=1}^N \left(\sqrt{[x_i \mathbf{P} + \mathbf{P}_i^T]^2 + \mu_i^2} \right) - \sqrt{\mathbf{P}^2 + m_p^2} =$$

$$= |\mathbf{P}| \left[-1 + \sum_i x_i \right] + \sum_i \frac{\mu_i^2 + (\mathbf{P}_i^T)^2}{2|x_i \mathbf{P}|} - \frac{m_p^2}{2|\mathbf{P}|},$$

где μ_i — «масса» i -го кварка. Сделаем следующие предположения: а) распределение по поперечным импульсам ограничено; б) массы партонов ограничены. Тогда

$$T_v \approx 2|P|/(Масса)^2. \quad (6.1)$$

С другой стороны, время взаимодействия с лептонами должно быть в системе центра инерции порядка

$$T_{int} \approx \frac{1}{q_0} \approx \frac{4P}{2v+q^2} = \frac{2P}{2v(1-\omega)}. \quad (6.2a)$$

Тогда

$$\frac{T_{int}}{T_v} \approx \frac{(\text{характерная масса})^2}{2v(1-\omega)}. \quad (6.2б)$$

Следовательно, если $2v(1-\omega) \gg (\text{масса})^2$, то партоны могут рассматриваться как голые частицы. Заметим, что это несправедливо вблизи $\omega \simeq 1$. Таким образом, можно надеяться, что в течение времени взаимодействия партоны можно рассматривать как свободные частицы. Если $-q^2 \gg m^2$, то переданный партону импульс очень велик $q_T \simeq \sqrt{-q^2}$, и можно ожидать, что рассеяние будет некогерентным.

Для вычисления структурных функций в партонной модели предположим, что: а) при $P \approx \infty$ нуклон состоит с вероятностью P_N из N партонов, так что $\sum_N P_N = 1$; б) продольный импульс i -го партона есть $P_i = x_i P$ с распределением $F_i^N(x_i)$; в) «масса» партона до и после столкновения мала; г) поперечный импульс партонов до столкновения много меньше поперечного импульса $\sqrt{-q^2}$, передаваемого в столкновении. Просуммируем сечения рассеяния, соответствующие лептонному рассеянию на отдельном партоне, по всем возможным конфигурациям.

В заданной конфигурации каждый партон с импульсом xP вносит в $W_{\mu\nu}$ вклад

$$\begin{aligned} & \int \langle xP | J_\mu(y) J_\nu(0) | xP \rangle \frac{\exp(iqy)}{2\pi} dy = \\ & = (2\pi)^3 \{ xP | J_\mu(0) | xP+q \rangle \langle xP+q | J_\nu(0) | xP \rangle \} \delta[(xP+q)^2 - \mu^2]. \end{aligned} \quad (6.3a)$$

Так как предполагалось, что партон ведет себя подобно голой частице, в промежуточных состояниях дают вклад только состояния с одним партоном. Тогда

$$W_{\mu\nu}^i = \frac{2P_\mu P_\nu x_i^2 Q_i^2 M}{x_i} \delta(q^2 + 2x_i v) + \dots, \quad (6.3б)$$

где опущенные члены дают вклад в W_1 и зависят от спина партонов. Обратим внимание на x_i в знаменателе. Этот множитель должен

быть введен из-за нормировки состояния, так как $\langle xP | xP \rangle = x \langle P | P \rangle$. Правильность (6.36) можно понять, если заметить, что при бесконечной энергии лептона дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma/dq^2$ приближается к моттовскому сечению $\frac{4\pi\alpha^2}{q^4} Q_i^2$. Тогда для больших q^2 и ν имеем

$$W_2(x, \nu) = \sum_N P(N) \int_0^1 dx_i \sum_{i=1}^N \frac{Mx_i Q_i^2}{\nu} \delta(x_i - x) f_N^i(x_i) \quad (6.4)$$

или

$$F_2(x) = x \sum_n P(N) \sum_{i=1}^N Q_i^2 f_N^i(x). \quad (6.5)$$

Аналогичные вычисления для W_1 убеждают, что партоны со спином 0 не дают вклада в W_1 (т. е. $\sigma_T = 0$), а партоны со спином 1/2 приводят к $W_1 = (1/2 x) W_2$ (т. е. $\sigma_L = 0$). Экспериментальное значение $R = \sigma_L/\sigma_T$ невелико, т. е. партоны имеют спин 1/2 (кварки?).

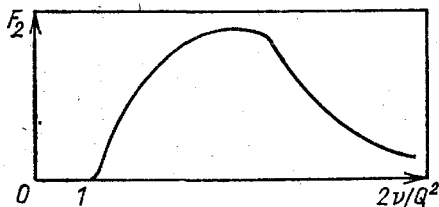


Рис. 25

То, что в такой модели получен скейлинг, не должно вызывать удивления. В действительности мы внесли скейлинг в модель, предположив точечноподобные форм-факторы и ограниченность по поперечным импульсам и массам.

Одной из привлекательных черт партонной модели является физическая интерпретация масштабной переменной $x = Q^2/2\nu$ как доли продольного импульса, который несет партон, взаимодействующий с лептоном в системе с бесконечным импульсом. Так, $F_2(x)/x$ определяет распределение заряженных партонов по продольному импульсу.

Чтобы продвинуться дальше, необходимо сделать предположения о распределении $f_N^i(x)$ для данной конфигурации N и о распределении в нуклоне данных конфигураций P_N . Обсудим подробнее соотношение (6.5).

1. Предел высоких энергий. При конечном числе конфигураций из (6.5) вытекает, что если $x \rightarrow 0$ (т. е. $\nu \rightarrow \infty$), то $F_2(\omega)$ зануляется как x , поскольку f_N^i нормированы так, что $\int_0^1 f_N^i(x) dx = 1$. Такое поведение структурных функций находится в противоречии с экспериментом, который согласуется с $F_2(\omega) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \text{const}$ (рис. 25). Единственный способ удовлетворить требованию $F(\omega) \rightarrow \text{const} \rightarrow \omega \rightarrow \infty$

допустить возможность бесконечного числа партонов. Действительно,

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{F_2(x)}{x} dx \approx \ln \varepsilon \approx \sum_{N=1}^{\infty} P(N) \sum_{i=1}^N Q_i^2.$$

Теперь $\sum_{i=1}^N Q_i^2 = N$, так что $\sum_{N=1}^{\infty} P(N) N$ расходится логарифмически.

Таким образом, требуются конфигурации с произвольным числом партонов и

$$P(N) \sim 1/N^2 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (6.6)$$

2. Средний заряд партона. Можно получить правила сумм для структурных функций без какой-либо детальной информации о природе распределения по импульсам. Если предположить, что каждый партон имеет одно и то же распределение по импульсам, то

$$f_N(x_1) = f_N(x_1) = \int dx_2 \dots dx_N f_N(x_1 \dots x_N) \delta(1 - \sum x_i),$$

где $f_N(x_1 \dots x_N)$ — вероятность найти партоны с импульсами $x_1 P, x_2 P, \dots, x_N P$. Поэтому $f_N(x_1 \dots x_N)$ должна быть симметричной функцией $x_1 \dots x_N$ и, следовательно,

$$\int_0^1 x_N f_N(x_1) dx_1 = \frac{1}{N} \int dx_1 \dots dx_N \sum x_i f_N(x_1 \dots x_N) \delta(1 - \sum x_i) = \frac{1}{N}. \quad (6.7)$$

Окончательно имеем

$$\int_0^1 F_2(\omega) d\omega = \sum_N P(N) \sum_{i=1}^N (Q_i^2/N) = \langle Q^2 \rangle = \text{средний заряд на партон} \quad (6.8)$$

Экспериментальное значение левой части (6.8) приблизительно равно 0,16. Это число кажется слишком малым, если считать, что партоны совпадают с кварками. Например, если партон состоит из трех кварков с обычными зарядами ($2/3, -1/3, -1/3$, для p, n, λ кварков, соответственно), то

$$\langle Q^2 \rangle_p = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] = \frac{1}{3} \text{ для протона;} \quad (6.9)$$

$$\langle Q^2 \rangle_n = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] = \frac{2}{9} \text{ для нейтрона.}$$

Однако уже было показано, что необходимы конфигурации с большим числом партонов, чтобы воспроизвести правильную зависимость от энергии. Если предположить, что конфигурация из $N+3$ партонов состоит из трех кварков, εN заряженных пар

$\bar{q}\bar{q}$ и $(1-\varepsilon)N$ нейтральных партонов, и что средний квадрат заряда в облаке кварк-антикварковых пар определяется статистически:

$$\frac{\Sigma Q_i^2}{N\varepsilon} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] = \frac{2}{9},$$

то
$$\Sigma(Q_i^2) N = 1 + \frac{2}{9}(N\varepsilon - 3).$$

Средний заряд на один партон равен

$$\langle Q_i^2 \rangle = \sum_N P(N) \left[\frac{1}{3N} + \frac{2\varepsilon}{9} \right] = \frac{2\varepsilon}{9} + \frac{1}{3} \langle \frac{1}{N} \rangle = 0,16. \quad (6.10)$$

Следовательно, $\varepsilon \leq 0,71$ и $\langle 1/N \rangle \leq 0,48$, так что необходимы состояния с большим числом нейтральных партонов.

Подведем некоторые итоги. Эксперимент заставил нас рассматривать состояния с бесконечным числом заряженных и нейтральных партонов. Полученная картина сильно отличается от описания неупругого лептонного рассеяния на ядрах как квазиупругого рассеяния на отдельных нуклонах. Там можно, конечно, видеть «партоны» (нуклоны), просто наблюдая за частицами в конечном состоянии. В глубоконеупругом лептон-адронном рассеянии продукты распада суть адроны, совсем непохожие на партоны. Что же тогда представляют собой партоны? Возможно, лучше всего это можно понять, если представить голые адронные состояния. Нуклон можно рассматривать как суперпозицию бесконечного числа состояний голых частиц, которые после мгновенного, некогерентного столкновения с лептоном распадаются и превращаются в физические частицы в конечном состоянии. Фактически именно так партонная модель реализована Дреллом, Леви и Яном.

Некоторые результаты партонной модели основаны на предположениях о квантовых числах партонов. Так, если партоны включают кварки и, возможно, $SU(3)$ -синглеты (глюоны), то для структурных функций данного $SU(3)$ -тока J имеем

$$F_2 = 2xF_1 \doteq x \sum_N P(N) \sum_q f_q^N(x) n_q^N Q_q^2, \quad (6.11)$$

где в N -частичном состоянии есть n_q^N партонов типа q ($q = p, n, \lambda$) и $Q_q = \langle q|J|q \rangle$ — среднее значение тока для голого кварка q . Так как есть шесть независимо измеримых функций F_2 для лептон-адронного рассеяния на нуклонах (т. е. $\gamma p, \gamma n, \nu p, \nu n, \bar{\nu} p$ и $\bar{\nu} n$) и только пять неизвестных функций в данном состоянии [т. е. $f_p^N n_p^N; f_n^N n_n^N; f_p^N n_p^N; f_n^N n_n^N$ и $(f_\lambda^N + f_{\bar{\lambda}}^N) n_\lambda^N$, так как $n_\lambda^N = n_{\bar{\lambda}}^N$ из-за нулевой странности в нуклонах], то существует одно соотношение между структурными функциями:

$$6[F_2^{\nu p} - F_2^{\nu n}] = x[F_3^{\nu p} - F_3^{\nu n}]. \quad (6.12)$$

Первый момент от (6.12) совпадает с формулой (4.47), полученной нами в глюонной модели. Более того, если потребовать, чтобы квантовые числа всякого промежуточного состояния совпадали с нуклонными (барионное число, заряд), то можно получить правила сумм Адлера (4.3а) и Гросса — Ллевеллин—Смита (4.41). Поучительно рассмотреть в партонной модели функцию W_3 . Как было видно, интеграл от W_3 (4.41) связан с барионным зарядом мишени. Это легко объяснить в кварковой партонной модели.

Рассмотрим рассеяние нейтрино и антинейтрино на партоне в системе центра инерции. Так как нейтрино и партоны левовинтовые [из-за $(V - A)$ -взаимодействия], то из рис. 26 понятно, что

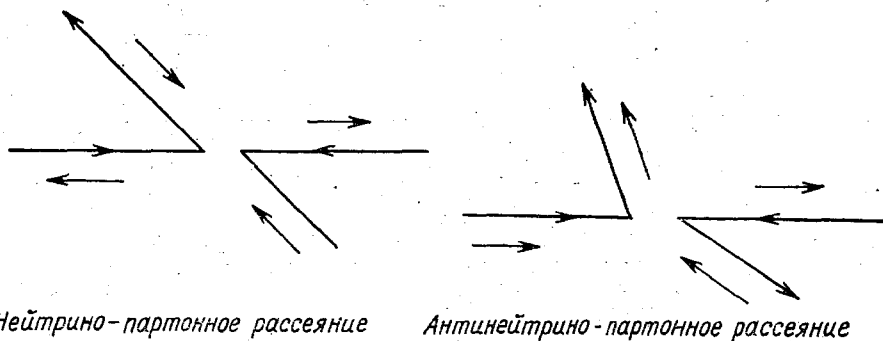


Рис. 26

угловой момент не может сохраняться при рассеянии антинейтрино на партоне назад (стрелки обозначают спиральности партона и нейтрино). Следовательно, рассеяние антинейтрино на партоне и аналогично нейтрино на антипартоне должно исчезать при рассеянии назад. Поэтому в Л-системе распределение партонов в антинейтрино-нуклонном рассеянии должно исчезать, когда $\theta_{LAB} = \pi$, $E' = 0$, а $\nu = E \rightarrow \infty$. Из (1.11) и (1.16) видно, что партоны дают вклад только в σ_L , а антипартоны — в σ_R . Структурная функция W_3 пропорциональна $\sigma_R - \sigma_L$, следовательно, она определяется барионным зарядом.

Если в структурные функции дают вклад только партоны (барионы), находим

$$F_3\left(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\right) = \mp 2F_1\left(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\right) = \mp \frac{1}{x} F_2\left(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\right). \quad (6.13)$$

Отсюда получаются интересные следствия. Если положить $W_2 \sim \sim \nu^{\alpha-2}$, то $W_3 \sim \nu^{\alpha-1}$. Однако вакуумная траектория ($\alpha = 1$) может давать вклад в W_2 , но не может давать вклад в W_3 ; таким образом, соотношение (6.13) несовместимо с реджевским поведением. Более того, из приведенных выше результатов и (4.50) следует

$$\sigma^{\nu}(E) = 3\sigma^{\tilde{\nu}}(E). \quad (6.14)$$

Однако можно ожидать, что антипартоны (ангибарионы) изменят этот результат. В частности, море пар $\bar{q}q$ не дает вклада в W_3 (так как q и \bar{q} вносят равный, но противоположный по знаку вклад), но вносит вклад в W_1 и W_2 . Если принять это во внимание, то W_3 окажется подавленной и (6.14) перестанет быть правильным, хотя всегда справедливо соотношение $\sigma^v > \sigma^{\bar{v}}$.

Из других приложений партонной модели интересна гипотеза Бьёркена и Пашоса о применимости партонной модели для инклюзивного комптоновского рассеяния $\gamma + p \rightarrow \gamma + X$. Грубо их результат сводится к предсказанию

$$\frac{(d^2 \sigma / d\Omega dE')_{\gamma p}}{(d^2 \sigma / d\Omega dE')_{e p}} = (\text{кинематический фактор}) \cdot \frac{\langle \sum Q_i^4 \rangle}{\langle \sum Q_i^2 \rangle}.$$

6.2. Теоретико-полевая реализация партонной модели

В предыдущем разделе были исследованы основные черты партонной модели. Чтобы сделать ее совместной с экспериментом, пришлось рассматривать нуклон как конфигурацию из бесконечного числа точечных партонов. Этот факт можно понять, если партоны есть голые состояния релятивистской квантовой теории поля. В данном параграфе мы опишем именно такую реализацию партонной модели, принадлежащую Дреллу, Леви и Яну (ДЛЯ). Эти авторы исследовали амплитуду $\gamma(q^2) + P \rightarrow \gamma(q^2) + P$ в пределе скейлинга в рамках теории поля с лагранжианом взаимодействия $\mathcal{L}_I = g\bar{\Psi}\gamma_5\Psi\pi$, где Ψ — поле нуклонов; π — поле пионов.

Как уже говорилось, основная идея партонной модели Фейнмана в том, что нуклон можно рассматривать как совокупность свободных голых частиц в системе с бесконечным импульсом. В модели ДЛЯ партоны идентифицируются с голым нуклоном и пионом. Чтобы выделить эти состояния, необходимо перейти от гейзенберговского представления для тока к представлению взаимодействия

$$J_\mu^H(x) = U^{-1}(t) j_\mu(x) U(t), \quad (6.15)$$

где j_μ — ток в представлении взаимодействия

$$j_\mu = \bar{\Psi}_p \gamma_\mu \Psi_p + i \pi^+ \overleftrightarrow{\partial}_\mu \pi^-, \quad (6.16)$$

записанный в терминах Ψ_p и π свободных («in») полей. Матрица преобразования $U(t)$ равна $U(t) = T \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} H_I(t) dt \right]$. Тогда для $W_{\mu\nu}$ имеем

$$W_{\mu\nu} = \sum_n \langle UP | j_\mu(0) U(0) | n \rangle \langle n | U^{-1}(0) j_\nu(0) | UP \rangle \delta(P + q - P_n), \quad (6.17)$$

где $|UP\rangle = U(0)|P\rangle$.

Выражение (6.17) зависит от системы отсчета. Воспользуемся этим и попробуем упростить его, перейдя в систему с $P = \infty$. Однако вначале нужно ввести обрезание по поперечному импульсу, необходимое для того, чтобы можно было считать партоны «замороженными» в течение времени взаимодействия с лептоном. Для постулировали существование области, где $\sqrt{-q^2}$ много больше поперечного импульса всех виртуальных частиц в протоне, входящих в состояние $U|P\rangle$. Технически это достигается введением обрезания по поперечному импульсу $k_{\perp \text{ макс}}$ в каждой вершине, так что $|UP\rangle = |P\rangle + g|P\pi\rangle + g^2|P\pi\pi\rangle + \dots$ состоит из частиц с ограниченными поперечными импульсами. Далее потребуем, чтобы в пределе скейлинга состояния $U|P\rangle$ и $U|n\rangle$ были собственными векторами гамильтониана с собственными значениями E_P и E_n . Рассмотрим вклад в $\langle UP|j_{\mu}(0), U(0), |n\rangle$, изображенный на рис. 27. Падающий нуклон с импульсом P переходит в состояние $U|P\rangle$, содержащее нуклон с импульсом $x_1 P + P_{\perp}^1$ и пион с импульсом $(1-x)P + K_{\perp}^1$. Далее лептон взаимодействует через голый ток с нуклоном, передавая ему импульс q [$q_{\parallel} \approx 1/P, q_{\perp} \approx \sqrt{Q^2}$] и переводя его в состояние $U|n\rangle$. Наконец, нуклон и пион переходят в состояние $|n\rangle$, содержащее нуклон с импульсом $x_2 P_1 + P_{\perp}^2$, пион с импульсом $(1-x_2)P + K_{\perp}^2$ и пион с импульсом K_1 . Оценим

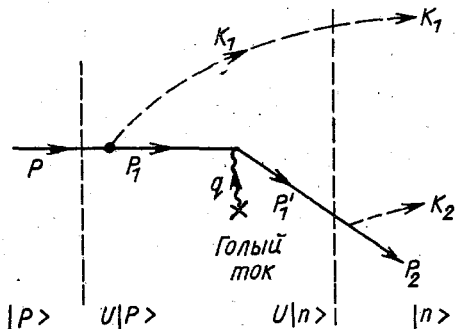


Рис. 27

$$E_P - E_{U|P\rangle} = E_P - E_{P_1} - E_{K_1} = (P + M^2/2P) - |x_1|P - (1-x_1)P - [(P_{\perp}^1)^2 + M^2 + (K_{\perp}^1)^2 + \mu^2]/2P.$$

При $P \rightarrow \infty$ и ограниченных P_{\perp}^1 и K_{\perp}^1

$$E_P - E_{U|P\rangle} \approx P(1 - |x_1| - (1-x_1)) + O(1/P). \quad (6.18)$$

Так как эта разность энергий входит в амплитуду в знаменателе (из-за интегрирования по времени в разложении $U(t)$), данное состояние дает заметный вклад, только если $1 \geq x_1 \geq 0$. В этом случае $E_P - E_{U|P\rangle} \sim O(1/P)$. То же самое справедливо для $E_n - E_{U|n\rangle} = P(1 - |x_2| - |1-x_2|) \approx O(1/P)$. Так как $U|n\rangle$ и $U|P\rangle$ — собственные состояния H , можно записать $W_{\mu\nu}$ в системе с бесконечным импульсом в виде

$$W_{\mu\nu} = \int d^4x \exp(iqx) \sum_n \langle UP | \exp(iPx) J_{\mu}(0) \exp(-iPx) U(0) | n \rangle \times \langle n | U^{-1}(0) J_{\nu}(0) | UP \rangle = \int d^4x \exp(iqx) \langle UP | J_{\mu}(x) J_{\nu}(0) | UP \rangle. \quad (6.19)$$

Такое представление справедливо только для так называемых хороших компонент J_μ , т. е. для временных и параллельных P . Однако этого достаточно, чтобы восстановить $W_{\mu\nu}$.

Уравнение (6.19) — теоретико-полевая реализация партонной модели. Нуклон до взаимодействия испускает и поглощает пионы и нуклон-антинуклонные пары с импульсом, близким к импульсу нуклона. Голый ток рассеивается на одной из этих голых составляющих, передавая ей большой поперечный импульс. Рассеянная частица испускает и поглощает затем пионы в нуклонные пары, но не интерферирует с другими состояниями.

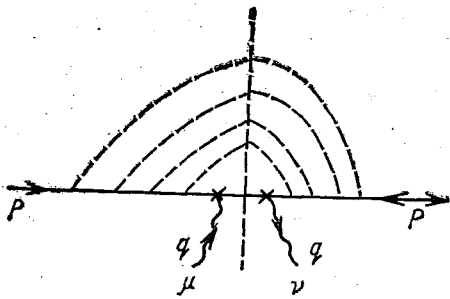


Рис. 28

Более детальную информацию можно получить для больших значений ν/q^2 . В этой области ДЛЯ показали, что:

1. В главном порядке по $g^2 \ln \nu/q^2$ в амплитуде доминирует вклад диаграмм типа изображенных на рис. 28.

Другими словами, вершинные и собственно энергетические поправки имеют меньшую степень $\ln \nu/q^2$ в данном порядке по g .

2. В том же приближении ток взаимодействует только с партонами со спином $1/2$. Следовательно,

$$\sigma_S = 0, \text{ т. е. } F_1(x) = (1/2 x) F_2(x).$$

3. Эти графики при суммировании дают степенное поведение νW_2 :

$$\nu W_2 = \text{const} \cdot x^{1-\lambda}; \quad \lambda = \frac{3}{4\pi} \frac{g^2}{4\pi} \ln \left[1 + \frac{K_{\perp \text{ макс}}^2}{\mu^2} \right]. \quad (6.20)$$

4. В случае рассеяния нейтрино аналогичные рассуждения приводят к $\sigma_S = 0$ (ток взаимодействует только со спином $1/2$) и $\sigma_R = 0$ (ток взаимодействует только с барионами). Таким образом, в этой модели при больших ν/q^2 , где барион-антибарионные пары моря подавлены фактором $\ln \nu/q^2$, выполняется (6.13).

Наиболее серьезная трудность в модели ДЛЯ состоит в том, что искусственно вводится обрезание по поперечному импульсу. Если устранить его, то пропадет скейлинг вместе со всеми остальными предсказаниями партонной модели. Хотя маловероятно, что такое обрезание возникнет в самой теории поля, модель полезна с эвристической точки зрения. Она может быть использована для детального анализа и других реакций. Так, Дрелл, Леви и Ян применили свою модель к описанию процессов аннигиляции, связи между

упругими электромагнитными форм-факторами и пороговым поведением νW_2 при $x \rightarrow 1$, а также к описанию эксперимента Ледермана по рождению тяжелых лептонных пар в нуклон-нуклонных столкновениях.

ГЛАВА 7

ПОЛЮСА РЕДЖЕ И ДУАЛЬНОСТЬ В ОБЛАСТИ СКЕЙЛИНГА

7.1. Полюса Редже

Как мы уже видели, совсем не очевидно, что полюса Редже определяют поведение сечения фоторождения в области, где виртуальная масса фотона очень велика. Хотя угол рассеяния в t -канале для комптоновского рассеяния растет как $\cos \theta \approx \approx \nu/p_t q_t \sim \nu/M \sqrt{Q^2}$, когда $\nu \rightarrow \infty$, $Q^2 \rightarrow \infty$ и ν/Q^2 фиксировано, сказать о поведении

$$F_2\left(\frac{\nu}{Q^2}, Q^2\right) = \frac{\nu}{M} W_2 = \sum \nu \beta_j(Q^2) \left(\frac{\nu}{M \sqrt{Q^2}}\right)^{\alpha_j - 2} + \text{фон} \quad (7.1)$$

ничего нельзя, пока нет сведений о зависимости реджевских вычетов и фона от Q^2 . Заметим, что можно согласовать скейлинг, т. е. существование $\lim_{Q^2 \rightarrow \infty} F_2(\nu/Q^2, Q^2) = F_2(\nu/Q^2)$, и реджевское поведение, т. е. существование $\lim_{\nu \rightarrow \infty} F_2(\nu/Q^2, Q^2) = \gamma(Q^2) \nu^{\alpha-1}$, не требуя, чтобы ведущая реджевская траектория (α) определяла поведение $F_2(\nu/Q^2)$ для больших ν/Q^2 . Можно привести пример такой функции:

$$F_2(\nu/Q^2, Q^2) = \frac{Q^2 (\nu/Q^2)^{\alpha-1}}{1 + Q^2 (Q^2/\nu)^\beta},$$

которая при больших ν и фиксированном Q^2 равна $(Q^2)^{2-\alpha} \nu^{\alpha-1}$ и приближается к $(\nu/Q^2)^{\alpha+\beta-1}$ для больших Q^2 и фиксированных ν/Q^2 .

Экспериментальные данные, представленные в предыдущих главах, можно согласовать с реджевским поведением по переменной ν/Q^2 . Структурные функции νW_2 и W_1 ведут себя как $(\nu/Q^2)^0$ и $(\nu/Q^2)^1$ соответственно, как если бы в области скейлинга доминировал вакуумный полюс Редже (померон). Поэтому разумно предположить, что для больших значений Q^2 реджевские полюса приводят к скейлингу при больших ν/Q^2 и дают основной вклад в структурные функции. В рамках этих предположений можно предсказать асимптотическое поведение структурных функций для фиксированных, но больших значений ν/Q^2 . Так, разность между протонными и нейтронными структурными функциями определяется A_2 -траекторией [$I = 1, G = -1$]:

$$\nu W_2^p - \nu W_2^n \approx (\nu/Q^2)^{\alpha_{A_2(0)} - 1} \approx (\nu/Q^2)^{-1/2}, \quad (7.2)$$

а структурная функция W_3 для нейтринного рассеяния на ядрах определяется ω -траекторией [$I = 0, G = -1$]:

$$\nu W_3^{(p+n)} \approx_{\nu/Q^2 \gg 1} (\nu/Q^2)^{\alpha_{\omega(0)} - 1} \approx (\nu/Q^2)^{-1/2}. \quad (7.3)$$

Предварительные данные СЛАК по электрон-дейтонному рассеянию согласуются с (7.2), по крайней мере они указывают на то, что разность $\nu W^{\gamma p} - \nu W^{\gamma n}$ масштабно-инвариантна для фиксированных ν/Q^2 и исчезает при $\nu/Q^2 \rightarrow \infty$ (см. рис. 21).

Предположение о доминантности полюсов Редже в области скейлинга приводит на первый взгляд к странной зависимости вычетов от массы виртуального фотона. Вычет $\beta_i(Q^2)$, определенный в (7.1), должен вести себя как

$$\beta_i(Q^2) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} (1/\sqrt{Q^2})^{\alpha(0)}. \quad (7.4)$$

Можно ли понять, почему зависимость реджевских вычетов от внешней массы скоррелирована таким образом с траекторией $\alpha(t)$? Этот вопрос был поставлен Абарбанелом, Голдбергером и Трейманом. Ясно, что ответить на него можно только тогда, когда будет предложена детальная модель реджевского поведения. Эти авторы исследовали зависимость от массы в сумме лестничных диаграмм в теории скалярных мезонов с $\mathcal{L}_I = \lambda \phi^3$. Хорошо известно, что сумма этих лестниц реджезуется для фиксированных внешних масс:

$$\sum_{\text{лестницы}} \approx \beta(q^2)(\rho q)^{\alpha(0)}, \quad (7.5)$$

$\rho q \rightarrow \infty; \rho^2 = \text{const}; q^2 = \text{const}.$

Абарбанел, Голдбергер, Трейман рассмотрели мнимую часть суммы по всем лестницам, заменив фотон скалярным мезоном в пределе $q^2 \rightarrow \infty$, — $(\nu/q^2) \gg 1$, и нашли, что

$$\text{Im} \sum \approx \frac{1}{(-q^2)} \left(\frac{\rho q}{-q^2} \right)^{\alpha(0)},$$

$\rho^2 = m^2, \rho q \gg m^2, -q^2 \gg m^2, \frac{\rho q}{-q^2} \gg 1.$

(Для $m = 0$ сумма может быть просто вычислена.) Это не совсем скейлинг из-за дополнительной зависимости от $1/q^2$, однако они

предположили, что это просто отражение того, что фотон был заменен скалярным мезоном. Данное предположение было проверено Альтарели и Рубинштейном, которые вычислили мнимую часть фотон-мезонного рассеяния в лестничном приближении и нашли, что

$$\text{Im} \left\{ \sum_{\text{Лестницы}} \right\} = \left\{ \begin{aligned} & \nu W_2(\nu, q^2) \rightarrow \left(\frac{\nu}{-q^2} \right)^{\alpha-1}, \\ & W_1(\nu, q^2) \rightarrow \frac{1}{(-q^2)} \left(\frac{\nu}{-q^2} \right)^\alpha \ln \left(\frac{-q^2}{M^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Для фиксированных значений $-\nu/q^2$ возникает скейлинг, и, как можно было ожидать для бесспиновых частиц, $\sigma_T/\sigma_L \rightarrow 0$ (как $\ln q^2/q^2$).

Однако можно привести следующие возражения. Во-первых, если для фиксированных q^2 известно, что лестничные диаграммы в данном порядке по g действительно дают основной вклад, то для скейлингового предела это не показано. Дополнительная трудность состоит в том, что обсуждаемые графики не калибровочно-инвариантны. Однако можно показать, что в пределе скейлинга каждая лестничная диаграмма калибровочно-инвариантна с точностью до $(\ln \nu/q^2)^{-1}$. Такие результаты получены в сверхсходящейся $\lambda\phi^3$ -теории. Так как в этой модели ток взаимодействует только со скалярными мезонами, то с необходимостью имеем $\sigma_T/\sigma_S = 0$. Более реалистической моделью будет перенормируемая теория нуклонов и мезонов. Однако в ней, если не вводить обрезание по поперечным импульсам, скейлинг в теории возмущений нарушается.

Были и другие попытки определить асимптотическое поведение скейлинговых структурных функций $F_i(\nu/Q^2)$ для больших ν/Q^2 , используя причинные представления Дезера — Гильберта — Судармана или Йоста — Лемана — Дайсона для коммутаторов тока. Эти исследования, однако, показали только, что данные представления $F_i(\nu/Q^2)$ совместимы с реджевским поведением. Предположения, необходимые для доказательства того, что реджевские полюса доминируют в F_i , по существу эквивалентны предположениям о том же реджевском поведении $\beta(Q^2)$ по Q^2 , что, в свою очередь, эквивалентно конечному результату.

7.2. Дуальность

В области сильных взаимодействий реджевское асимптотическое поведение вместе с идеей о насыщении дисперсионных соотношений резонансами привело к полезной концепции дуальности. Напомним,

как получаются правила сумм при конечной энергии. Если амплитуда рассеяния $A(v, t)$ при высоких энергиях определяется полюсами Редже и если из нее вычесть вклад этих полюсов, то получится амплитуда, быстро убывающая при $v \rightarrow \infty$, именно $A(v, t) - \sum v^{\alpha_i(t)} \beta_i(t)$. Следовательно, такая комбинация удовлетворяет сверхсходящемуся соотношению (предполагается, что мы вычли достаточно полюсов, чтобы оставшаяся комбинация убывала быстрее чем $1/v$). Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \text{Im} \left[A(v, t) - \sum_i v^{\alpha_i(t)} \beta_i(t) \right] dv = 0, \quad (7.7)$$

и отсюда

$$\int_0^N \text{Im} A_B(v, t) dv + \int_0^N \text{Im} A_R(v, t) dv = \text{померон} + \sum_i \frac{N^{\alpha_i+1} \beta_i(t)}{\alpha_i+1}. \quad (7.8)$$

В правиле сумм (7.8) мнимая часть разделена на вклад резонансов и нерезонансный фон. Соответствующее разделение сделано и в кросс-канале между помероном и другими реджевскими полюсами. Дуальность состоит в том, что (7.8) удовлетворяется уже при достаточно низких энергиях и что вклад померона равен вкладу интеграла от мнимой части фона, а остальные полюса определяются средним вкладом резонансов. Эти предположения оказались полезными при корреляции реджевских параметров с параметрами резонансов в прямом канале и привели к многим интересным предсказаниям.

Исследуем правила сумм при конечной энергии для структурных функций в электророждении, предположив, что их асимптотика определяется полюсами Редже. Рассмотрим только резонансный вклад:

$$\int_{v_0}^{v_M} [v W_2(v, q^2)]_{Res} dv \approx \sum \frac{v_M^{\alpha_i} \beta_i(q^2)}{\alpha_i}. \quad (7.9)$$

Зависимость вклада каждого резонанса от q^2 в (7.9) дается квадратом форм-фактора перехода, который быстро убывает с ростом q^2 . Следовательно, вычеты всех реджевских полюсов, за исключением вакуумного, также быстро падают с q^2 . Это фактически совпадает с гипотезой, выдвинутой Харари, предположившего, что зависимость от q^2 для померона отлична от зависимости вычетов всех остальных полюсов и может быть согласована со скейлингом. Данная гипотеза не объясняет скейлинг и скорее делает свойства померона еще более непонятными, но приводит к интересным предсказаниям для недифракционной части структурных функций — именно, она должна быстро падать при фиксированном $x = -q^2/2v$ и больших q^2 , что противоречит почти всем правилам

сумм, полученным из алгебры токов. Например, правило сумм Адлера (4.39)

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} [F_2^{\bar{\nu}}(x, q^2) - F_2^{\nu}(x, q^2)] = 4 \langle I_s \rangle$$

не будет удовлетворяться, так как интеграл определяется вкладом траектории с $I = 1$. Аналогично другие правила сумм, такие, как (4.27) и (4.41), также нарушатся, так как соответствующий коммутатор содержит компоненты с $I = 0$ и с $I = 1$. Большее значение имеет, однако, то, что эксперимент указывает на масштабную инвариантность разности структурных функций для протона и нейтрона. Поэтому нужно пересмотреть правила сумм при конечных энергиях.

Заметим, что если обрезать интегралы в этих правилах сумм при данном значении $S = M^2 + 2\nu + q^2$, скажем в резонансной области, $\sqrt{S} = 3$ ГэВ, то $\nu_M = (S_M - M^2 - q^2)/2$. Перепишем (7.9) в терминах скейлинговой переменной $\omega = 1/x = 2\nu/Q^2$. Отсюда имеем

$$\frac{Q^2}{2} \int_1^{1+(S_M-M^2)/Q^2} F_2(\omega, Q^2) d\omega = \sum_i \frac{\nu_M^{\alpha_i} \beta_i(Q^2)}{\alpha_i}. \quad (7.10)$$

Если зафиксировать S_M и увеличить Q^2 , то левую часть можно насытить конечным числом резонансов; однако они дают вклад при больших Q^2 только от области вблизи $\omega \approx 1$. Так как структурные функции исчезают на пороге $\omega \approx 1$, то нет противоречия между быстрым падением по Q^2 резонансных форм-факторов и скейлингом в области $\omega \approx 1$. Для исследования области, где $\omega > 1$, необходимо зафиксировать в (7.10) верхний предел интегрирования, т. е. положить $S_M(Q^2) \approx Q^2$. В этом случае при возрастании Q^2 все больше и больше резонансов дают вклад в интеграл, и хотя каждый из них быстро падает с Q^2 , полный вклад вполне может быть масштабно-инвариантным.

Блум и Гилман в недавней работе, показали, что резонансы вблизи порога действительно приводят к скейлингу. Если нанести экспериментальные данные для νW_2 как функции переменной $\omega' = (2\nu + M^2)/Q^2 = \omega + M^2/Q^2$ (которая а priori ничем не хуже переменной ω), то резонансы перемещаются при увеличении Q^2 к точке $\omega' = 1$ и приводят к плавной скейлинговой кривой. Это согласуется и с дуальностью, и с существованием невакуумной компоненты в νW_2 . Блум и Гилман далее предположили, что локальное усреднение по резонансам приводит к скейлингу в случае νW_2 . Вклад данного резонанса равен

$$\nu W_2^{Res} = 2\nu [G(q^2)]^2 \delta(s - M_R^2) \approx Q^2 [G(Q^2)]^2 \delta(s - M_R^2), \quad (7.11)$$

$$Q^2 \rightarrow \infty$$

где форм-фактор перехода падает, как $G(Q^2) \sim [1/Q^2]^{n/2}$. Это можно согласовать с пороговым поведением $\nu W_2 \approx (\omega' - 1)^P$, если

$$n = P + 1. \quad (7.12)$$

Следовательно, если резонансы приводят к скейлингу, то все форм-факторы перехода должны падать с одинаковой степенью, которая должна быть связана со степенью убывания νW_2 на пороге. Экспериментальные данные согласуются с $n = 4$, $p = 3$, Блум и Гилман применили эти идеи для упругого нуклонного пика. Так как магнитный форм-фактор доминирует над электрическим при больших Q^2 , получаем, что $R = \sigma_S/\sigma_T$ исчезает на пороге, а отношение нейтронного сечения к протонному рассеянию равно отношению квадратов магнитных моментов

$$\frac{\nu W_{2n}}{\nu W_{2p}} \Big|_{\omega'=1} = \left(\frac{\mu_n}{\mu_p} \right)^2 \approx \frac{1}{2}. \quad (7.13)$$

Оба предсказания согласуются с экспериментом.

Можно надеяться, что динамические концепции, развитые для адронных процессов, — реджевское асимптотическое поведение, правила сумм при конечных энергиях, дуальность — действительно применимы и к области глубокой неупругости в лептон-адронном рассеянии.

С п и с о к л и т е р а т у р ы

1. Экспериментальные работы

1. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 23, p. 930. Auth.: Bloom E. D. e. a. (Данные по рассеянию электронов при угле 6 и 10° .)
2. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 23, p. 935. Auth.: Bloom E. D. e. a. (Обсужденные экспериментальные данные.)
3. «Phys. Lett. B», 1969, y. 30, p. 364. Auth.: Budagov I. e. a. (Данные по рассеянию нейтрино на нуклонах.)
4. Обзоры: а. Taylor R. E. Invited paper at International Conference on Particle Reactions at the New Accelerators (SLAC-PUB-746). б. Proceedings of the 4-th International Conference on Electron and Photon Interactions at High Energies. Liverpool, 1969.

2. Приложения алгебры токов

1. Adler S. «Phys. Rev.», 1969, v. 143, p. 1144 (Получено правило сумм для W_2 в νN -расстоянии.)
2. Bjorken J. D. «Phys. Rev.», 1969, v. 148, p. 1467 (Предел БДЛ, приложения к лептон-адронному рассеянию и вычислению радиационных поправок.)
3. Bjorken J. D. «Phys. Rev.», 1969, v. 163, p. 1967. (Получены правила сумм для рассеяния назад.)
4. Bjorken J. D. «Phys. Rev.», 1969, v. 179, p. 1547. (Скейлинг в бьёркеновском пределе, почти одновременные коммутаторы.)
5. Johnson K., Low F. E. «Progr. Theor. Phys.», 1969, Suppl. 37, 38. (Предел БДЛ, аномалии от треугольных диаграмм.)
6. Gross D., Jackiw R. «Nucl. Phys. B», 1969, v. 14, p. 269. (Необходимые и достаточные условия для построения T^* -произведений и взаимной компенсации вкладов контактных членов и ШЧ.)

7. Cornwall J., Norton R. «Phys. Rev.», 1969, v. 177, p. 2587. (Предел БДЛ и правила сумм.)
8. Callan C. G., Gross D. «Phys. Rev. Lett.», 1968, v. 21, p. 311. (Получены правила сумм с использованием $[J, J]$ -коммутаторов, определенных в модели Сугавары.)
9. Callan C. G., Gross D. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 156. (Получены правила сумм для σ_L/σ_T в модели кварков и алгебре полей)
10. Gross D., Llewellyn-Smith C. H. «Nucl. Phys. B», 1969, v. 14, p. 337. (Правило сумм для W_3 , партоны и алгебра токов в рассеянии нейтрино.)
11. Jackiw R., Preparata G. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 975; «Phys. Rev.», 1969, v. 185, p. 1748; Adler S., Tung W.-K. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 978.
- 11* Вайнштейн А. И., Иоффе Б. Л. «Письма ЖЭТФ», 1967, т. 6, с. 917. (Нарушение теоремы БДЛ в теории возмущений.)
12. Llewellyn-Smith C. H. «Nucl. Phys. B», 1970, v. 17, p. 277 (Получены правила сумм в партонной модели и алгебре токов.)
13. Bjorken J. D., Paschos E. A. «Phys. Rev.», 1970, v. 1, p. 3151. (Кинематический анализ нейтринного рассеяния, обзор правил сумм.)
14. Cornwall J. UCLA prepr., 1970. (Модель для одновременных коммутаторов с высокими производными по времени.)

3. Произведение операторов на малых расстояниях и сингулярности на световом конусе

1. Wilson K. «Phys. Rev.», 1969, v. 179, p. 1499. (Предложено «операторное разложение» для произведения операторов на малых расстояниях.)
- 1*. Поляков А. М. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1969, т. 57, с. 1499. (Независимо введено операторное разложение в задаче о фазовых переходах аналогичной теории поля.)
2. «Phys. Lett. B», 1969, v. 30, p. 549. Auth.: Ciccariella S., Gatto R., Sartori G., Tonin M. (Правила сумм, основанные на специальных предположениях об операторах, возникающих в разложении произведений операторов.)
3. Brandt R. «Phys. Rev Lett.», 1969, v. 23, p. 1260. (Модель поведения операторов на световом конусе.)
4. Leutwyler H., Stern J. «Nucl. Phys. B», 1970, v. 20, p. 77; Jackiw R., Van Royen B., West G. B. «Phys. Rev. D», 1972, v. 2, p. 2473; Cornwall J., Corrigan D., Norton R. «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 1141; *Ioффе В. Л. «Phys. Lett. B.», 1969, v. 30, p. 123; *Иоффе Б. Л. Проблемы теоретической физики. В сб.: Памяти И. Е. Тамма. М., «Наука», 1972, с. 200. (Сингулярности на конусе и скейлинг.)
- 5*. Поляков А. М. «Журн. эксперим. и теор. физ.», 1972, т. 59, с. 542; т. 63, с. 24. (Конформная симметрия в аннигиляции $e^+e^- \rightarrow$ адроны.)

4. Партонная модель

1. Bjorken J. D., Paschos E. «Phys. Rev.», 1969, v. 185, p. 1975. (Приложение партонной модели к электророжждению.)
2. Drell S., Levy D., Yan T. M. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 744; «Phys. Rev.», 1969, v. 187, p. 2159. (Реализация партонной модели в теории поля); «Phys. Rev. D», 1970, v. 1, p. 1035; v. 1, p. 1617; v. 1, p. 2402. (Детализация модели); «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 855. (Природа конечных состояний в электророждении.)
3. Cheng H., Wu T. T. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 1409. (Структурные функции в КЭД, нарушение скейлинга.)
4. Chang S. T., Fishbane P. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 24, p. 847. (Критика модели ДЛЯ, исчезновение скейлинга при введении обрезания.)
- 5*. Грибов В. Н., Липатов Л. Н. «Ядерная физика», 1972, т. 15, с. 781, с. 1218; Липатов Л. Н. «Ядерная физика», 1974, т. 20, с. 112. (Проблема

скейлинга в глубоконеупругом рассеянии и аннигиляции $e^+e^- \rightarrow$ адроны в рамках теории возмущений; связь электророждения с аннигиляцией.)

6*. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами. М., «Мир», 1975.

5. Полюса Редже и дуальность

1. Abarbanel H., Goldberger M., Treiman S. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 500. (Сделано предположение, что полюса Редже доминируют в скейлинговом пределе, приведены аргументы в пользу того, что реджевские вычеты должны быть масштабными.)
2. Harari H. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 1078; «Phys. Rev. Lett.», 1970, v. 24, p. 286. (Применение дуальности в скейлинговой области.)
3. Altarelli G., Rubinstein H. R. «Phys. Rev.», 1969, v. 187, p. 2111. (Исследование функций W_1 и W_2 в лестничном приближении в $\lambda\Phi^3$.)

6. Векторная доминантность

1. Sakurai J. J. «Phys. Rev. Lett.», 1969, v. 22, p. 981; Sakurai J. J., Schildknecht D. «Phys. Rev. Lett. B», 1972, v. 40, p. 121; 1972, v. 42, p. 216. (Предсказания модели векторной доминантности для структурных функций.)

7. Разное

1. Abarbanel H. Review paper on J -plane phenomena in Weak Interactions.— In: Conference on Regge Poles. California, Irvine, 1969.
2. Review Talks by J. Bjorken and A. Pais. In: Conference «Expectations for Particle Reactions at the New Accelerators». University of Wisconsin Madison, Wisconsin, 1970.

АЛФАВИТНО-ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адлера правило сумм 40—42
 — соотношение для нейтринных реакций 25—26
 — условие самосогласованности 27, 29
 Адлера — Вайсбергера соотношение 43—47
 Адлера — Фубини — Дашена — Гелл-Мана правило сумм 179
 Аннигиляция $e+e \rightarrow$ адроны 206
 Аномалии в теории возмущений 208—209
 — вне рамок теории возмущений 129
 Аномальная дивергенция аксиального тока 104—108
 Аномальные коммутаторы 101—104, 122—125
 — размерности 144
 — тождества Уорда 93—97
 Белифанте тензор 73
 Бьёркена скейлинг 183, 186—188, 207
 — правило сумм 203
 Бьёркена — Джонсона — Лоу предел 85—88, 190—197, 207
 Блума — Гилмана соотношение 227
 Вайнберга подход к $\pi\pi$ -рассеянию 49—51
 Гелл-Мана одновременные коммутационные соотношения 18—20
 Гольдбергера — Треймана соотношение 25
 Гросса — Ллевеллина-Смита правило сумм 203
 Дуальность 225—226
 Изотопические свойства
 — — электромагнитных адронных токов 10, 17—18
 — — слабых адронных токов 13, 14, 17—18
 — — лептонных слабых взаимодействий 16
 — — структурных функций 171
 Кабиббо модель 17—19
 — угол 13
 Кабиббо — Радикати правило сумм 37—39
 Каллана — Гросса соотношение 116—119, 198—199
 Контактные члены 76—79, 191—192
 Конформные преобразования 136—139, 142
 Ллевеллина-Смита правило сумм 205
 Модель векторной доминантности (МВД) 173—182
 Масштабные преобразования 134, 136—139, 142, 211
 Нелептонные слабые взаимодействия 15—16
 — распады K -мезонов 64—65
 — — гиперонов 66
 Неупругое рассеяние лептонов на адронах 195—205, 113—118, 165—171
 Обобщенные токи 17—18
 — заряды 17
 Октет адронных токов 17—18
 Партоновая модель 214—216, 220
 Правило $T=1/2$ 16
 Полулептонные распады K -мезонов
 Редукционные формулы 23
 Редже полюса 176—179, 226
 Разложение произведений операторов 210—213
 Световой конус 207—213
 Сазерленда — Вельтмана теорема 89
 Сохранение векторного тока 13—14, 17
 Скейлинг 114, 134—135, 183, 186—189
 Структурные функции 113—114, 168—181
 Томаса — Райхе — Куна правило сумм 21
 Упорядоченное по времени произведение операторов 32, 76, 195
 Унитарные свойства адронных токов 18—19
 Уорда тождества 76, 78—79, 95
 Форм-фактор нуклонов 171—173
 — — в модели векторной доминантности 173
 Фоторождение 174—176
 Фиксированные полюса 176—179
 Швингеровские члены 20, 76—77, 81—82, 195, 206, 191—192
 Частичное сохранение аксиального тока 21—25

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому переводу	3
Предисловие	6

ЛЕКЦИЯ 1

Алгебра токов и PCAC. С. Трейман	7
Глава 1. Предварительные сведения	7
Глава 2. Физические токи	9
Глава 3. Коммутационные соотношения для токов	17
Глава 4. Частичное сохранение аксиального тока (PCAC)	21
Глава 5. Методы алгебры токов	31
Глава 6. Некоторые приложения алгебры токов	37
Глава 7. Обобщение формул Адлера — Вайсбергера	45
Глава 8. Полулептонные распады	52
Глава 9. Нелептонные распады	63

ЛЕКЦИЯ 2

Теоретико-полевые исследования в алгебре токов. Р. Джекив	68
Глава 1. Введение	68
Глава 2. Канонические и пространственно-временные ограничения в алгебре токов	70
Глава 3. Теорема Бьёркена — Джонсона — Лоу	85
Глава 4. Проблема распада $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$	89
Глава 5. Правила сумм для электророждения	113
Глава 6. Обсуждение аномалий в алгебре токов	128
Глава 7. Приближенная масштабная инвариантность	134
Приложение: А. Упражнения	146
В. Решения	150

ЛЕКЦИЯ 3

Поведение слабых и электромагнитных процессов при высоких энергиях Д. Гросс	163
Глава 1. Основные процессы и кинематика	163
Глава 2. Упругие форм-факторы и фотон-адронное рассеяние	171
Глава 3. Неупругое электрон-адронное рассеяние	180
Глава 4. Приложения алгебры токов	189
Глава 5. Скейлинг, аномалии и поведение на световом конусе	207
Глава 6. Партоновая модель	214
Глава 7. Полоса Редже и дуальность в области скейлинга	223
Алфавитно-предметный указатель	231

ИБ № 440

Сэм Трейман, Роман Джекив, Дэвид Гросс

ЛЕКЦИИ ПО АЛГЕБРЕ ТОКОВ

Редактор Н. Е. Никитина. Художественный редактор А. Т. Кирьянов
Переплет художника Б. Л. Николаева. Технический редактор И. Н. Подшебякин
Корректор Н. А. Смирнова

Сдано в набор 13/IV 1976 г.	Подписано к печати 23/XII 1976 г.		
Формат 60×90 ^{1/16} .	Бумага типографская № 2.	Усл. печ. л. 14,5.	Уч.-изд. л. 15,24.
Тираж 3700 экз.	Зак. изд. 74055	Зак. тип. 934	Цена 1 р. 68 к.
	Атомиздат, 103031, Москва, К-31, Жданова, 5		

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Москва, И-41, Б. Переяславская, 46.