ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

Р. И. ТРУХАЕВ, В. В. ХОМЕНЮК

ТЕОРИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА 1971

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Ленинградского университета

Книга посвящается развитию математической теории неклассических вариационных задач. Для этих задач получены условия оптимальности, рассмотрены методы учета ограничений и получения операторных уравнений, сформулированы алгоритмы численного решения.

Книга рассчитана на широкие круги научных работников и инженеров, занимающихся теоретическими и прикладными вопросами в области вариационных задач и оптимального управления, а также на студентов и аспирантов математико-механических факультетов.

Отв. ред. проф. В. И. Зубов

Трухаев Рудольф Иванович
Хоменюк Владимир Владимирович

ТЕОРИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Редактор *З. И. Царькова*
Техн. редактор *Л. И. Киселева*
Корректоры *Е. К. Терентьева, С. В Алексеев*

М-07209. Сдано в набор 20 XI 1970 г.
Подписано к печати 12 II 1971 г.
Формат бумаги 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 3.
Печ. л. 10,5. Уч.-изд. л. 10,16. Бум. л. 5,25.
Тираж 3885 экз. Заказ 490. Цена 1 р. 02 коп.
Издательство ЛГУ.
Ленинград, В-164. Университетская наб., 7/9.

Типография ЛГУ имени А. А. Жданова

2-2-3
52-70

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга содержит результаты авторов по развитию актуальных проблем математической теории оптимизации, которые возникают при анализе и синтезе систем управления. Это развитие заключается в фундаментальном исследовании условий оптимальности, способов учета ограничений и в разработке алгоритмов решения неклассических вариационных задач.

Отметим, что условия оптимальности, полученные одним из авторов в 1962 г., позволяют применить разнообразные методы численного решения операторных уравнений к исследованию неклассических вариационных задач.

Авторам книги принадлежат многочисленные теоретические и прикладные работы по разработке и применению развиваемых ими методов. Однако многие материалы этих работ не вошли в содержание настоящей книги. Тем не менее, именно их влиянием в большой степени обусловлена направленность книги на создание конструктивных методов решения прикладных задач оптимизации при наличии ограничений.

Несомненно, что эта книга будет являться полезным изданием, существенно дополняющим современную теорию оптимизации.

В. И. Зубов

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга посвящена математической теории неклассических вариационных задач. Основные результаты книги состоят в получении условий оптимальности, в разработке методов учета ограничений, в получении операторных уравнений и в формулировке методов численного решения вариационных задач и связанных с ними операторных уравнений. Целью исследований авторов являлось развитие такого математического аппарата теории неклассических вариационных задач, на основе которого можно было достаточно просто и эффективно разработать конструктивные методы численного решения этих задач.

Книга состоит из семи глав.

В первой главе получены условия оптимальности для неклассических вариационных задач. Эти условия являются обобщением известных из вариационного исчисления необходимых условий равенства нулю или знакоопределенности первой вариации функционала для классических вариационных задач с обычными или односторонними вариациями соответственно. Полученное условие оптимальности для неклассических вариационных задач можно условно назвать условием равенства нулю первой «квазивариации» функционала. Основной отличительной особенностью неклассических вариационных задач является наличие ограничений в форме неравенств как на искомые оптимальные функции, так и на функционалы от них.

Во второй главе рассматриваются методы учета ограничений в неклассических вариационных задачах. Для учета ограничений в форме неравенств исследуются четыре направления: освобождение от ограничений типа неравенства путем нелинейных преобразований искомых функций; сведение ограничений типа неравенства к ограничениям типа равенств; учет ограничений путем сведения вариационной задачи с ограничениями типа неравенств к минимаксной задаче; учет ограничений методом погружения.

Предлагаются новые формы нелинейных преобразований и преобразований неравенств в равенства. Дается строгое обоснование метода погружения и находится специальный вид коэффициентов функции штрафа. Применение методов учета ограничений позволяет сводить неклассические вариационные задачи к классическим, уменьшать количество ограничений и поэтому упрощать вид множества функций, к которому принадлежит решение исходной задачи оптимизации.

В третьей главе исследуются некоторые методы получения операторных уравнений, решения которых удовлетворяют условиям оптимальности неклассических вариационных задач. Так как полученные операторы в этих уравнениях не являются, вообще говоря, гладкими, то предложены два метода сглаживания операторов. Гладкость операторных уравнений существенно используется в большинстве известных методов их численного решения. Применение методов получения операторных уравнений позволяет использовать для исследования неклассических вариационных задач обширный арсенал численных методов решения операторных уравнений.

В четвертой главе разрабатываются численные методы решения неклассических вариационных задач. Все многообразие численных методов решения неклассических вариационных задач разбивается на два больших класса. К первому классу можно отнести численные методы решения неклассических вариационных задач без предварительного применения условий оптимальности и вывода операторных уравнений. Ко второму классу методов можно отнести методы решения операторных уравнений, полученных на основе применения условий оптимальности.

Несмотря на широкое использование некоторых из этих методов для решения классических вариационных задач, до сих пор почти не были разработаны вопросы пригодности их к решению неклассических вариационных задач.

На основе методов этой главы формулируются алгоритмы численного решения неклассических вариационных задач и доказывается их применимость. Исследуемые методы дают большие возможности для численного решения неклассических вариационных задач на электронно-вычислительных машинах.

В пятой главе проводится исследование одного класса так называемых динамических вариационных задач при наличии связей между переменными в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этих задач получены условия оптимальности в форме «линеаризованного принципа максимума» и операторные уравнения для нахождения решений, рассмотрены вопросы построения алгоритмов для численного нахождения решений динамических вариационных задач и связанных с ними операторных уравнений.

В шестой и седьмой главах рассматриваются проблемы оптимального синтеза в динамических вариационных задачах и игровые вариационные задачи при наличии ограничений на основе применения аппарата предыдущих глав.

В последней главе рассматриваются примеры применения развитого аппарата к решению прикладных задач оптимизации.

Работа авторов в направлении развития математического аппарата теории неклассических вариационных задач была тесно связана с 1961 г. с деятельностью семинара по теории оптимального управления на математико-механическом факультете ЛГУ под руководством профессора Владимира Ивановича Зубова.

Авторы выражают свою признательность участникам этого семинара и в особенности Николаю Ефимовичу Кирину.

Авторы благодарят профессора Виктора Сергеевича Новоселова за просмотр рукописи и сделанные замечания.

ГЛАВА I

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В этой главе предлагается один подход к получению условия оптимальности для задач неклассического вариационного исчисления, основанный на введении специального класса вариаций, так называемых квазивариаций [24].

§ 1. ПОСТАНОВКА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим следующую задачу, которую будем называть вариационной задачей или задачей оптимизации.

Задача 1

Пусть задано некоторое множество M элементов $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ n-мерного пространства $\mathfrak{M}$. Пусть, кроме того, на элементах $\varphi \in \mathfrak{M}$ определен функционал $V_0(\varphi)$, представляющий собой отображение $\mathfrak{M}$ на вещественную ось $R_1=(-\infty, +\infty)$. Требуется найти элемент $\varphi^0 \in M$ такой, что

$$V_0(\varphi^0)=\min_{\varphi \in M} V_0(\varphi). \tag{1.1}$$

Элемент φ^0, являющийся решением задачи 1, называется *минимизирующим* или *оптимальным*.

Таким образом, вариационная задача 1 является заданной, сформулированной или поставленной, если определены: 1) пространство $\mathfrak{M}$ элементов φ; 2) множество $M \subset \mathfrak{M}$ элементов φ; 3) функционал $V_0(\varphi)$ на элементах $\varphi \in \mathfrak{M}$ и 4) задано условие (1.1) нахождения минимизирующего элемента φ^0.

В этой книге ограничимся рассмотрением линейного метрического пространства $\mathfrak{M}$ вектор-функций $\varphi(x)=(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, определенных на элементах x из вещественного метрического пространства R, принимающих значения из ве-

щественного n-мерного евклидова пространства E_n и суммируемых на R с квадратом, т. е. таких, что

$$\int_R \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(x)\,dx < +\infty.$$

Предположим, что известны основные понятия функционального анализа и теории множеств [29]: открытость и замкнутость множества, метрика и норма, дифференцируемость, суммируемость в том или ином смысле, ограниченность, равностепенная непрерывность, потенциальность операторов, градиент функционалов, существование и единственность решений операторных уравнений и др.

Сформулированная задача 1 может не иметь решения, кроме того, часто на практике вместо точного решения задачи 1 достаточно иметь приближенное решение. Заметим также, что не имеет смысла искать точное решение задачи 1, если исходные данные задачи 1 заданы с некоторой погрешностью. Поэтому целесообразна следующая постановка вариационной задачи.

Задача 2

Пусть заданы вариационная задача 1 и число $\varepsilon > 0$. Требуется найти элемент $\varphi_\varepsilon^0 \in M$ такой, что

$$V_0(\varphi_\varepsilon^0) \leqslant \inf_{\varphi \in M} V_0(\varphi) + \varepsilon. \tag{1.2}$$

Элемент φ_ε^0, который является решением задачи 2, называется *ε-приближенным* решением задачи 1, или *ε-оптимальным*.

Если функционал $V_0(\varphi)$ ограничен снизу при $\varphi \in M$, то решение задачи 2 всегда существует, однако оно может быть неединственно,

Заметим, что если $\varphi_{\varepsilon_1}^0$ и $\varphi_{\varepsilon_2}^0 \in M$ являются ε_1- и ε_2-оптимальными для задачи 1 и если при этом $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $\varphi_{\varepsilon_1}^0$ является также и решением задачи 2 при любом $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$.

Целесообразность введения понятия ε-приближенного решения задачи 1 следует, помимо сказанного выше, еще из того, что при решении задачи 1 каким-либо численным методом необходимо осуществить, вообще говоря, бесконечную вычислительную процедуру, но это невозможно на практике.

Поэтому при практическом решении вариационных задач ограничиваются приближенным решением, т. е. по существу задают величину ε, характеризующую допустимую степень точности по отклонению значений минимизируемого функционала V_0 от минимально возможного значения этого функционала. Из этого следует, что ε-приближенное решение задачи 1 *не*

обязано быть близким по метрике в $\mathfrak{M}$ к точному решению задачи 1, даже если оно и существует.

Задачу 1 будем называть *классической вариационной задачей*, если множество M открыто или совпадает с $\mathfrak{M}$. В случае, если M не совпадает с $\mathfrak{M}$ и не является открытым множеством (например, замкнуто), задача 1 называется *неклассической вариационной задачей*.

В этой книге в основном будем рассматривать неклассические вариационные задачи, в которых M является выпуклым * замкнутым множеством. При этом в качестве основного примера будем рассматривать выпуклое замкнутое множество $M=M_1\cap M_2$ суммируемых с квадратом вектор-функций $\varphi(x)=(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, где

$$M_1=\{\varphi(x): 0\leqslant\varphi_j(x)\leqslant b_j \quad (j=1, \ldots, n)\}, \tag{1.3}$$

$$M_2=\{\varphi(x): V_i(\varphi)\leqslant c_i \quad (i=1, \ldots, m)\}, \tag{1.4}$$

$b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ — заданные вещественные числа. $V_1(\varphi), \ldots, V_m(\varphi)$ — заданные функционалы. Ограничения на $\varphi(x)$ вида

$$0\leqslant\varphi_j(x)\leqslant b_j \quad (j=1, \ldots, n), \tag{1.5}$$

$$V_i(\varphi)\leqslant c_i \quad (i=1, \ldots, m) \tag{1.6}$$

будем называть ограничениями первого и второго типов соответственно. Будем рассматривать функционалы $V_i(\varphi)$ $(i=0, 1, \ldots, m)$ в виде

$$V_i(\varphi)=\int\limits_R f_i(x, \varphi(x))dx, \tag{1.7}$$

причем будем считать, что функции $f_i(x, \varphi(x))$ $(i=0, 1, \ldots, m)$ непрерывны по $x\in R$ и непрерывно дифференцируемы по φ, $0\leqslant\varphi\leqslant b$.

Выпуклость множества M_1 очевидна.

Если функционалы $V_i(\varphi)$ $(i=1, \ldots, m)$ имеют вид (1.7), то множество M_2 выпукло [16], поэтому будет выпуклым множество $M=M_1\cap M_2$.

§ 2. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Будем предполагать, что в задаче 1 множество M совпадает с пространством $\mathfrak{M}$ всех суммируемых с квадратом вектор-функций $\varphi(x)$, т. е. рассмотрим следующую классическую вариационную задачу.

---

* Множество M называется выпуклым, если для любых двух элементов φ_1 и $\varphi_2\in M$ этому множеству принадлежит элемент φ^λ, равный $\varphi^\lambda=\lambda\varphi_1+(1-\lambda)\varphi_2$, при любом $\lambda\in[0, 1]$.

Задача 3

Найти вектор-функцию $\varphi^0(x)=(\varphi_1^0(x), \ldots, \varphi_n^0(x))$ такую, что

$$V_0(\varphi^0(x))=\min_{\varphi(x)\in\mathfrak{M}} V_0(\varphi(x)), \tag{1.8}$$

где

$$V_0(\varphi(x))=\int_R f_0(x, \varphi(x))\,dx. \tag{1.9}$$

Обозначим через $g_0(\varphi)$ градиент функционала $V_0(\varphi)$

$$g_0(\varphi)\equiv\operatorname{grad} V_0(\varphi)=\left(\frac{\partial f_0(x, \varphi)}{\partial\varphi_1}, \ldots, \frac{\partial f_0(x, \varphi)}{\partial\varphi_n}\right). \tag{1.10}$$

Необходимое условие оптимальности для задачи III формулируется в следующей теореме.

Теорема 1

Пусть $\varphi^0(x)\in\mathfrak{M}$ — *решение задачи* 3, *тогда*

$$g_0(\varphi^0(x))\equiv 0. \tag{1.11}$$

Доказательство. Выберем произвольную вектор-функцию $\varphi(x)\in\mathfrak{M}$ и определим $\varphi^\lambda(x)$ по формуле

$$\varphi^\lambda(x)=\varphi^0(x)+\lambda(\varphi(x)-\varphi^0(x)), \tag{1.12}$$

где λ — вещественное число. Ясно, что $\varphi^\lambda(x)\in\mathfrak{M}$ для любого конечного λ и $V_0(\varphi^\lambda(x))\geqslant V_0(\varphi^0(x))$. Отсюда следует, что скалярная вещественная функция $v(\lambda)=V_0(\varphi^\lambda)$ достигает своего наименьшего значения при $\lambda=0$. Из теории экстремумов функций одной переменной следует, что

$$v'(0)=\left.\frac{dv(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}=0. \tag{1.13}$$

Выражение для $v'(0)$ имеет вид

$$v'(0)=\int_R [g_0(\varphi^0(x)), \varphi(x)-\varphi^0(x)]\,dx=0, \tag{1.14}$$

где $[.,.]$ — скалярное произведение векторов. Отсюда при $\varphi(x)=\varphi^0(x)+g_0(\varphi_0(x))$ — получим

$$\int_R [g_0(\varphi^0(x)), g_0(\varphi^0(x))]\,dx=0, \tag{1.15}$$

что и означает справедливость (1.11).

Приведем теперь другое доказательство теоремы, которое несколько длиннее изложенного, но в методическом смысле це-

лесообразно (поскольку далее будет приведено аналогичное доказательство необходимого условия оптимальности для неклассической вариационной задачи).

Рассмотрим функционал $V_0(\varphi^\lambda(x))$. По формуле Тейлора получим

$$V_0(\varphi^\lambda(x)) = V_0(\varphi^0(x)) + \lambda \int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\,dx + r(\lambda), \tag{1.16}$$

где $\lim\limits_{\lambda\to 0} \frac{r(\lambda)}{\lambda} = 0$. Отсюда и из неравенства $V_0(\varphi^\lambda(x)) \geqslant V_0(\varphi^0(x))$ получим

$$\lambda \int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\,dx + r(\lambda) \geqslant 0, \tag{1.17}$$

или при $\lambda > 0$

$$\int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\,dx + \frac{r(\lambda)}{\lambda} \geqslant 0. \tag{1.18}$$

и при $\lambda < 0$

$$\int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\,dx + \frac{r(\lambda)}{\lambda} \leqslant 0. \tag{1.19}$$

Из (1.18) при $\lambda \to 0+$ получим, что

$$\int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\,dx \geqslant 0, \tag{1.20}$$

аналогично из (1.19) при $\lambda \to 0-$ следует

$$\int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\,dx \leqslant 0. \tag{1.21}$$

Таким образом, для любой $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$ имеем

$$\int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\,dx = 0. \tag{1.22}$$

В частности, при $\varphi(x) = \varphi^0(x) + g_0(\varphi^0(x))$ (1.22) примет вид

$$\int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ g_0(\varphi^0(x))]\,dx = 0. \tag{1.23}$$

Подынтегральная функция (1.23) неотрицательна при любом $x \in R$. Из равенства нулю интеграла от неотрицательной функции следует, что подынтегральная функция почти везде по $x \in R$ равна нулю, т. е.

$$[g_0(\varphi^0(x)),\ g_0(\varphi^0(x))] = 0 \text{ (п. в.)} \tag{1.24}$$

и, следовательно, при всех $x \in R$, за исключением множества меры нуль,

$$g_0(\varphi^0(x)) = 0. \tag{1.25}$$

Теорема доказана полностью.

Замечания. 1. При доказательстве условия (1.11) в курсах вариационного исчисления функцию $\varphi^\lambda(x)$ рассматривают в виде $\varphi^\lambda(x) = \varphi^0(x) + \lambda\varphi(x)$. При этом $\varphi^\lambda(x)$ называют вариацией $\varphi^0(x)$, а выражение $\int\limits_R [g_0(\varphi^0(x)), \quad \varphi(x)]\, dx$ — вариацией функционала $V_0(\varphi^0(x))$.

2. Функцию $\varphi^\lambda(x) = \varphi^0(x) + \lambda(\varphi(x) - \varphi^0(x))$ будем называть квазивариацией $\varphi^0(x)$, а выражение $\int\limits_R [g_0(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx$ — квазивариацией функционала $V_0(\varphi^0(x))$.

3. Совершенно естественно, что для задачи 3 использование вариации или квазивариации приводит к одному и тому же необходимому условию оптимальности (1.11).

Достаточность условия (1.11) устанавливается в следующих двух теоремах.

Теорема 2

Если существует единственная вектор-функция $\varphi^0(x)$, удовлетворяющая условию (1.11), и если решение задачи 3 существует, то $\varphi^0(x)$ — искомое решение задачи 3.*

Доказательство теоремы очевидно.

Теорема 3

*Пусть $\varphi^0(x) \in \mathfrak{M}$ удовлетворяет условию (1.11) и пусть функционал $V_0(\varphi)$ выпукл** по $\varphi \in \mathfrak{M}$, тогда $\varphi^0(x)$ — решение задачи 3.*

Доказательство. Пусть $\varphi^0(x) \in \mathfrak{M}$ таково, что выполнено (1.11). Возьмем произвольную вектор-функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$

---

* Единственность понимается здесь обычным образом в смысле метрики пространства функций, суммируемых с квадратом на множестве R [29].

** Функционал $V_0(\varphi)$ при $\varphi \in \mathfrak{M}$ называется выпуклым, если для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{M}$ и любого $\lambda \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$V_0(\varphi_1 + \lambda(\varphi_2 - \varphi_1)) \geqslant V_0(\varphi_1) + \lambda[V_0(\varphi_2) - V_0(\varphi_1)].$$

Для выпуклого функционала $V_0(\varphi)$ для любых φ_1 и $\varphi_2 \in \mathfrak{M}$ имеет место неравенство

$$V_0(\varphi_2) - V_0(\varphi_1) \geqslant \int\limits_R [g_0(\varphi_1(x)), \varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, dx.$$

и определим квазивариацию $\varphi^{\lambda}(x)$ по формуле (1.12). В силу выпуклости $V_0(\varphi)$ получим

$$V_0(\varphi^{\lambda}(x)) - V_0(\varphi^0(x)) \geqslant \lambda \int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx = 0. \tag{1.26}$$

Отсюда при $\lambda = 1$ получим, что

$$V_0(\varphi^0(x)) \leqslant V_0(\varphi(x)) \tag{1.27}$$

для любого $\varphi \in \mathfrak{M}$. Это и означает, что $\varphi^0(x)$ — решение задачи 3. Теорема доказана полностью.

Таким образом, в теоремах 1—3 получены необходимые и достаточные условия оптимальности.

Замечание. В курсах вариационного исчисления приводятся другие необходимые и достаточные условия оптимальности (условия Лежандра, Вейерштрасса и др.) для классической вариационной задачи.

Кроме того, следует отметить, что теоремы 1—3 остаются справедливыми, если вместо $\mathfrak{M}$ рассматривать любое открытое множество $M \subset \mathfrak{M}$.

§ 3. Необходимые условия оптимальности

В этом и следующем параграфах получены необходимые и достаточные условия оптимальности для задачи 1 на случай выпуклого множества $M \subset \mathfrak{M}$. Полученные результаты будут справедливы для любого выпуклого $M \subset \mathfrak{M}$, но в дальнейшем предполагается, что M — замкнутое ограниченное выпуклое множество (это предположение сделано для того, чтобы *всегда* существовало решение задачи минимизации линейного функционала).

Необходимые условия оптимальности для задачи 1 формулируются в следующих двух теоремах.

Теорема 4

Пусть $\varphi^0(x) \in M$ — решение задачи 1. Тогда для любой вектор-функции $\varphi(x) \in M$ имеет место неравенство

$$\int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx \geqslant 0. \tag{1.28}$$

Доказательство. Рассмотрим квазивариацию

$$\varphi^{\lambda}(x) = \varphi^0(x) + \lambda(\varphi(x) - \varphi^0(x))$$

при $\lambda \in [0, 1]$. В силу выпуклости M получим, что $\varphi^{\lambda}(x) \in M$ для любого $\lambda \in [0, 1]$, кроме того, $V_0(\varphi^{\lambda}(x)) \geqslant V_0(\varphi^0(x))$.

Используя разложение Тейлора функционала $V_0(\varphi^\lambda)$, получим

$$V_0(\varphi^\lambda) = V_0(\varphi^0) + \lambda \int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx + r(\lambda), \quad (1.29)$$

причем $\lim\limits_{\lambda \to 0+} \frac{r(\lambda)}{\lambda} = 0$.

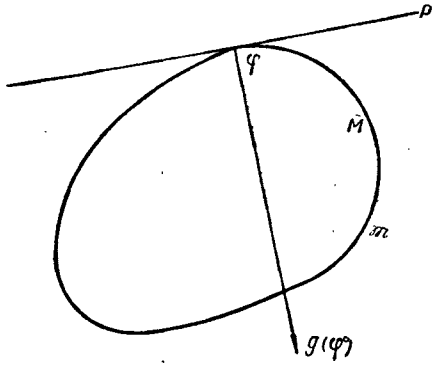

Рис. 1

Отсюда и из неравенства $V_0(\varphi^\lambda) \geqslant V_0(\varphi^0)$ следует, что квазивариация функционала $V_0(\varphi^0)$, равная

$$\int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx, \quad (1.30)$$

неотрицательна. Действительно, имеем

$$\int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx + \frac{r(\lambda)}{\lambda} \geqslant 0. \quad (1.31)$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0+$, получим требуемое неравенство (1.28).

Замечание. Условие (1.28) имеет следующую геометрическую интерпретацию (см. рис. 1). Для того чтобы вектор-функция $\varphi^0(x)$ была решением задачи 1, необходимо, чтобы гиперплоскость

$$P = \left\{ \varphi(x) \in \mathfrak{M} : \int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx = 0 \right\} \quad (1.32)$$

с нормалью $g_0(\varphi^0(x))$ в пространстве $\mathfrak{M}$, проходящая через точку $\varphi^0 \in M$, была опорной* для множества M.

* Здесь используется обычное определение опорной гиперплоскости (см., например, [6]).

Теорема 5

Пусть $\varphi^0(x) \in M$ — решение задачи 1, тогда имеет место соотношение

$$\min_{\varphi(x)\in M} \int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)-\varphi^0(x)]\,dx = 0. \qquad (1.33)$$

Доказательство. Соотношение (1.33) является следствием следующих двух неравенств. Из неравенства (1.28) имеем

$$\min_{\varphi(x)\in M} \int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)-\varphi^0(x)]\,dx \geqslant 0, \qquad (1.34)$$

кроме того,

$$\min_{\varphi(x)\in M} \int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)-\varphi^0(x)]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)-\varphi^0(x)]_{\varphi(x)=\varphi^0(x)}\,dx = 0. \qquad (1.35)$$

Это условие оптимальности было получено впервые в работах [30]. *

§ 4. Достаточные условия оптимальности

Достаточность условия (1.33) устанавливается в следующей теореме.

Теорема 6

Пусть $\varphi^0(x) \in M$ удовлетворяет условию (1.33) и пусть функционал $V_0(\varphi)$ выпукл по $\varphi(x) \in M$. Тогда $\varphi^0(x)$ — решение задачи 1.

Доказательство. Пусть $\varphi^0(x) \in M$ таково, что выполнено соотношение (1.33). Рассмотрим $\varphi^0(x) \in M$ и определим $\varphi^\lambda(x)$ при $\lambda \in [0, 1]$ по формуле (1.12). В силу выпуклости $V_0(\varphi)$ имеем из (1.29) (так как $r(\lambda) \geqslant 0$)

$$V_0(\varphi^\lambda(x)) - V_0(\varphi^0(x)) \geqslant \lambda \int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)-\varphi^0(x)]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\varphi(x)\in M} \lambda \int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)-\varphi^0(x)]\,dx = 0 \qquad (1.36)$$

для любого $\lambda \in [0, 1]$. Отсюда, в частности, при $\lambda = 1$ получим

$$V_0(\varphi(x)) \geqslant V_0(\varphi^0(x)) \qquad (1.37)$$

для любого $\varphi(x) \in M$, что означает оптимальность $\varphi^0(x)$. Теорема доказана полностью.

Таким образом, в теоремах 4—6 получено необходимое и (в случае выпуклости $V_0(\varphi)$) достаточное условие оптимальности (1.33) для решения $\varphi^0(x)$ задачи 1.

---

* Этот результат был также опубликован Демьяновым [10].

ГЛАВА II

МЕТОДЫ УЧЕТА ОГРАНИЧЕНИЙ

Вариационная задача 1 является вариационной задачей с ограничениями. В этой задаче такими ограничениями являются ограничения на вектор-функцию $\varphi(x)$

$$M_1 = \{0 \leqslant \varphi_j(x) \leqslant b_j \quad (j = 1, \ldots, n)\},$$

$$M_2 = \left\{\int_R f_i(x, \varphi(x))\,dx \leqslant c_i \quad (i = 1, \ldots, m)\right\}.$$

Ограничения первого и второго типов представляют собой неравенства.

В настоящей главе рассмотрены различные методы учета ограничений. Глава начинается с рассмотрения ограничений в форме равенств. Ограничения этого типа, свойственные задачам классического вариационного исчисления, учитываются при помощи неопределенных множителей Лагранжа. Для учета ограничений в форме неравенств исследуются пять направлений [28]:

1) освобождение от ограничений типа неравенств путем нелинейных преобразований искомых функций;

2) сведение ограничений типа неравенств к ограничениям типа равенств;

3) уменьшение числа ограничений;

4) учет ограничений путем сведения вариационной задачи с ограничениями типа неравенств к минимаксной задаче;

5) учет ограничений методом погружения.

§ 1. ТЕОРИЯ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Рассмотрим следующую варнационную задачу.

Задача 4

Найти вектор-функцию $\varphi(x) = (\varphi_1^0(x), \ldots, \varphi_n^0(x))$, доставляющую мнинмальное значение функционалу $V_0(\varphi^0(x))$, т. е.

$$V_0(\varphi^0(x)) = \min_{\varphi(x)\in\Gamma} V_0(\varphi(x)) =$$

$$= \min_{\varphi(x)\in\Gamma} \int_R f_0(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\,dx, \qquad (2.1)$$

где Γ — множество вектор-функций $\varphi(x)$ таких, что

$$\Phi_k(x, \varphi(x)) = c'_k \text{ при } x \in R \ (k = 1, \ldots, r), \qquad (2.2)$$

$$\int_R f_i(x, \varphi(x))\,dx = c''_i \ (i = 1, \ldots, m). \qquad (2.3)$$

Будем предполагать, что функции $\Phi_k(x, \varphi)$ $(k = 1, \ldots, r)$ и $f_i(x, \varphi)$ $(i = 1, \ldots, m)$ непрерывны по $x \in R$ и непрерывно-дифференцируемы по φ.

Составим функцию

$$H(x, \varphi(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_r(x), \psi_{r+1}, \ldots, \psi_{r+m}) =$$

$$= f_0(x, \varphi(x)) + \sum_{k=1}^{r} \psi_k(x)\left(\Phi_k(x, \varphi(x)) - c'_k\right) + \qquad (2.4)$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \psi_{r+1}\left(f_i(x, \varphi(x)) - c''_i\right),$$

которую в вариационном исчислении принято называть функцией Лагранжа. Учет ограничений (2.2) и (2.3) в поставленной задаче 4 дает хорошо известная в вариационном исчислении теорема [8, 9].

Теорема 7

Если существуют такие функции $\psi_k(x)$ $(k = 1, \ldots, r)$ *и постоянные числа* ψ_{i+1} $(i = 1, \ldots, m)$, *неравные тождественно нулю, что*

1) *функция* $\varphi^0(x)$ *доставляет наименьшее возможное значение функционалу*

$$\int_R H(x, \varphi(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_r(x), \psi_{r+1}, \ldots, \psi_{r+m})\,dx, \qquad (2.5)$$

2) *удовлетворяются равенства* (2.2) *и* (2,3), *то* $\varphi^0(x)$ — *решение задачи* 4.

Функции $\psi_k(x)$ $(k = 1, \ldots, r)$ и постоянные числа ψ_{r+i} $(i = 1, \ldots, m)$ называются множителями Лагранжа. Достаточные условия существования множителей Лагранжа приводятся в следующей теореме.

Теорема 8

Пусть функция $\varphi^0(x)$ *является решением задачи* 4, *причем*

1) *ни в одной точке поверхностей* (2.2) *ранг матрицы из*

частных производных $\frac{\partial \Phi_k(x, \varphi^0(x))}{\partial \varphi_j}$ $(k=1, \ldots, r;\ j=1, \ldots, n)$ *не равен нулю;*

2) $\varphi^0(x)$ *не является экстремалью Эйлера (определение см. в § 1 гл. III) ни для одного из функционалов* (2.3), *тогда существуют такие функции* $\psi_k(x)$ $(k=1, \ldots, r)$ *и постоянные числа* ψ_{r+i} $(i=1, \ldots, m)$, *что функционал* (2.5) *достигает своего наименьшего значения при* $\varphi(x)=\varphi^0(x)$.

Для отыскания вектор-функции $\varphi^0(x)$ и множителей Лагранжа можно, например, использовать уравнение Эйлера (n-уравнений) и равенства (2.2) и (2.3) ($r+m$-уравнений).

§ 2. МЕТОДЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Для того чтобы учесть ограничения типа неравенств, используются различные методы сведения вариационной задачи с ограничениями типа неравенств к вариационной задаче без ограничений. При изложении некоторых из этих методов будем специально подчеркивать процедуры сведения отдельно для первого и второго типов ограничений в задаче 1, где ограничения первого типа имеют вид

$$0 \leqslant \varphi_j(x) \leqslant b_j \quad (j=1, \ldots, n), \tag{2.6}$$

ограничения второго типа

$$V_i(\varphi) \leqslant c_i \quad (i=1, \ldots, m). \tag{2.7}$$

а) Введем вместо функции $\varphi_j(x)$ другие функции $d_j(x)$, принимающие значения $d_j \in (-\infty, +\infty)$, связанные с $\varphi_j(x)$ равенствами

$$\varphi_j = F_j(d_j) \quad (j=1, \ldots, n), \tag{2.8}$$

причем функции преобразования F_j подбираются таким образом, чтобы при любых d_j функции φ_j не выходили из требуемых интервалов. Например, во многих задачах оптимизации систем автоматического управления для ограничений, имеющих вид

$$|\varphi_j| \leqslant B_j \quad (j=1, \ldots, n), \tag{2.9}$$

функции F_j можно выбрать в виде

$$F_j = B_j \sin d_j \quad (j=1, \ldots, n). \tag{2.10}$$

Замена (2.10) была применена для непрерывных систем Дезоэром [34].

Для ограничений (2.6) первого типа можно, например, предложить функции преобразования F_j, имеющие вид:

1) $F_j(d_j) = \frac{b_j}{2}(1+\sin d_j)$;

2) $F_j(d_j) = \frac{b_j}{2}(1+\cos d_j)$;

3) $F_j(d_j) = b_j|\sin d_j|$;

4) $F_j(d_j) = b_j|\cos d_j|$;

5) $F_j(d_j) = \frac{b_j}{2}\left(1 + \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} d_j\right)$;

6) $F_j(d_j) = \frac{b_j}{2}\left(1 + \frac{2}{\pi}\operatorname{arcctg} d_j\right)$;

7) $F_j(d_j) = \frac{2b_j}{\pi}|\operatorname{arctg} d_j|$;

8) $F_j(d_j) = \frac{2b_j}{\pi}|\operatorname{arcctg} d_j|$;

9) $F_j(d_j) = b_j e^{-d_j^2}$;

10) $F_j(d_j) = b_j\left(1 - e^{-d_j^2}\right)$;

11) $F_j(d_j) = b_j e^{-|d_j|}$;

12) $F_j(d_j) = b_j\left(1 - e^{-|d_j|}\right)$;

13) $F_j(d_j) = \frac{b_j}{2}(1 + \Phi(d_j))$;

14) $F_j(d_j) = b_j|\Phi(d_j)|$,

где в 5)—8) берется главное значение арктангенса и арккотангенса, $\Phi(a)$ — функция Лапласа (интеграл вероятности).

Здесь специально приведены только простейшие возможные преобразования, которые применимы к ограничениям первого типа (в преобразованиях 1)—12) использовались только элементарные функции). В действительности же можно предложить огромное число возможных функций преобразования F_j с использованием элементарных и специальных функций.

Функции преобразования в форме 5)—6) по существу использованы Миеле [35].

Таким образом, преобразование компонент вектор-функции $\varphi(x)$ по формулам 1)—14) позволяет убрать в вариационной задаче 1 ограничения первого типа. После применения преобразования (2.8) вместо задачи 1 получим следующую вариационную задачу.

Задача 5

Найти вектор-функцию $d^0(x) = (d_1^0(x), \ldots, d_n^0(x))$, доставляющую минимальное значение функционалу $V_0(F(d(x)))$, т. е.

$$V_0(d^0(x)) = \min_{-\infty < d_j(x) < +\infty} V_0(d(x)),$$
$$(j = 1, \ldots, n) \tag{2.11}$$

при ограничениях

$$V_i(d^0(x)) \leqslant c_i \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{2.12}$$

где $V_0(d(x)) = V_0(F(d(x)))$, $V_i(d(x)) = V_i(F(d(x)))$.

б) Общая идея сведения к вариационной задаче без ограничений второго типа, так же как и для первого типа (см. (2.8)), заключается в подборе функции преобразования F_j $(j=1, \ldots, n)$ таким образом, чтобы для любой вектор-функции $d(x)=(d_1(x), \ldots, d_n(x))$, принимающей значения из E_n (где E_n — вещественное n-мерное евклидово пространство), автоматически удовлетворялись ограничения второго типа.

Например, для линейных функционалов $V_i(\varphi)$, имеющих вид

$$V_i(\varphi)=\int_R p_i(x)\varphi_i(x)\,dx \leqslant c_i \quad (i=1, \ldots, m,\ m\leqslant n),$$

можно осуществить подстановку

$$\begin{aligned} &\varphi_i(x)=\frac{c_i}{\mu(R)\,p_i(x)}\left(1-e^{-d_i^2(x)}\right) \quad (i=1, \ldots, m),\\ &\varphi_i(x)=d_i(x) \quad (i=m+1, \ldots, n, \text{ если } m<n), \end{aligned} \tag{2.13}$$

где через $\mu(R)$ обозначена мера множества $R\subset E_n$.

При этой подстановке ограничения второго типа в вариационной задаче 1 удовлетворяются автоматически для любой вектор-функции $d(x)$, ограничения же первого типа остаются, имея уже другой характер, т. е. задача 1 сводится к следующей вариационной задаче.

Задача 6

Найти вектор-функцию $d^0(x)=(d_1^0(x), \ldots, d_n^0(x))$, для которой достигает своего наименьшего возможного значения функционал V_0:

$$V_0(d^0(x))=\min_{d(x)\in\Lambda} V_0(d(x)),$$

где Λ — множество вещественных вектор-функций $d(x)$, удовлетворяющих ограничениям

$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{-\ln\left(1-\frac{\mu(R)\,p_i(x)\,b_i}{c_i}\right)}\leqslant d_i(x)<+\infty,\\ &\qquad\text{если } \mu(R)\,b_ip_i(x)<c_i,\\ &-\infty<d_i(x)<+\infty, \text{ если } \mu(R)\,b_ip_i(x)\geqslant c_i\\ &\qquad (i=1, \ldots, m),\\ &0\leqslant d_i(x)\leqslant b_i \ (i=m+1, \ldots, n, \text{ если } m<n). \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Однако в общем случае применение преобразований вида (2.8) для сведения вариационной задачи 1 с ограничениями второго типа к задаче без ограничений второго типа затруднительно (так как требует решения функциональных и операторных неравенств) и является делом искусства исследователя в каждой конкретной задаче.

Итак, подводя итоги сказанному в пунктах а) и б), необходимо заметить, что хотя введение преобразований переменных в исходной вариационной задаче 1 и позволяет освободиться от ограничений, однако поиск вида и нелинейный характер этих преобразований могут значительно осложнить исследование и решение вариационной задачи.

§ 3. МЕТОДЫ УВЕЛИЧЕНИЯ ЧИСЛА НЕИЗВЕСТНЫХ ДЛЯ СВЕДЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ К РАВЕНСТВАМ

В этом параграфе рассматривается метод увеличения числа переменных для сведения вариационной задачи с ограничениями типа неравенств к вариационной задаче с ограничениями типа равенств. Так же как и ранее, изложение будет проводиться для ограничений первого и второго типов отдельно.

а) Валентайном [37] был предложен способ учета неравенств первого типа, имеющих вид

$$\varphi_{j\min}(x) \leqslant \varphi_j(x) \leqslant \varphi_{j\max}(x) \quad (j=1, \ldots, n), \tag{2.15}$$

в форме

$$(\varphi_j(x) - \varphi_{j\min}(x))(\varphi_{j\max}(x) - \varphi_j(x)) - \psi_j^2(x) = 0$$
$$(j=1, \ldots, n), \tag{2.16}$$

где $(\psi_j(x))$ — неизвестные вещественные функции $(-\infty \leqslant \psi_j(x) \leqslant +\infty)$, подлежащие определению.

Эквивалентность (2.15) и (2.16) может быть получена очевидными рассуждениями.

Отсюда для ограничений первого типа, имеющих вид (2.6), имеем

$$\varphi_j(x)(b_j - \varphi_j(x)) - \psi_j^2(x) = 0 \quad (j=1, \ldots, n). \tag{2.17}$$

Второй способ сведения ограничений первого типа вида (2.6) к ограничениям типа равенств можно представить в виде

$$\varphi_j(x) + \psi_j^2(x) - b_j = 0, \quad \varphi_j(x) - \eta_j^2(x) = 0 \quad (j=1, \ldots, n), \tag{2.18}$$

где $\psi_j(x)$ и $\eta_j(x)$ — неизвестные вещественные функции, подлежащие определению.

Докажем эквивалентность ограничений (2.6) и (2.18). Пусть, с одной стороны, для вектор-функции $\varphi(x)$ выполнены (2.6), тогда функции $\varphi_j(x)$, $\psi_j(x)$ и $\eta_j(x)$ будут удовлетворять (2.18), если положить

$$\psi_j(x) = \sqrt{b_j - \varphi_j(x)}, \quad \eta_j(x) = \sqrt{\varphi_j(x)} \quad (j=1, \ldots, n). \tag{2.19}$$

Теперь пусть, с другой стороны, вектор-функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\eta(x)$ удовлетворяют (2.18), тогда имеем

$$\varphi_j(x) = b_j - \psi_j^2(x) \leqslant b_j, \quad \varphi_j(x) = \eta_j^2(x) \geqslant 0 \ (j=1, \ldots, n), \tag{2.20}$$

т. е. выполнено (2.6).

Третий способ сведения ограничений первого типа вида (2.6) к ограничениям типа равенств заключается в том, что вводятся дополнительные функции $\psi_j(x)$, $\eta_j(x)$, $\xi_j(x)$, $\zeta_j(x)$ так, чтобы

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_j(x)+\psi_j(x)-b_j=0,\quad \varphi_j(x)-\eta_j(x)=0,\\ \psi_j(x)=\sigma(\xi_j(x))\,\xi_j^p(x),\quad \eta_j(x)=\sigma(\zeta_j(x))\,\zeta_j^p(x)\\ (j=1,\ \ldots,\ n),\end{array}\right\}\qquad (2.21$$

где p — целое положительное число, $\sigma(a)$ — символ Кронекера

$$\sigma(a)=\begin{cases}0 & \text{при } a<0,\\ 1 & \text{при } a\geqslant 0.\end{cases}$$

Такой способ предлагался для учета ограничений в работах по аналитическому конструированию регуляторов [12].

Эквивалентность условий (2.6) и (2.21) проверяется непосредственно так же, как и эквивалентность (2.6) и (2.18). Этот способ отличается от предыдущего тем, что введены произвольные вектор-функции $\xi(x)$ и $\zeta(x)$.

Заметим, что при $p\geqslant 1$ выражения в (2.21) дифференцируемы по ξ и ζ.

б) Аналогичный подход может быть применен для учета ограничений второго типа. В этом случае неравенства (2.7) могут быть представлены в виде равенств

$$V_i(\varphi)\,(c_i-V_i(\varphi))-\Psi_i^2=0\quad (i=1,\ \ldots,\ m),\qquad (2.22$$

где Ψ_i — неизвестные вещественные числа $(-\infty\leqslant\Psi_i\leqslant+\infty)$ подлежащие определению.

Аналогично (2.18) второй способ сведения ограничений второго типа к ограничениям типа равенства можно представить в виде

$$V_i(\varphi)+\Psi_i^2-c_i=0\quad (i=1,\ \ldots,\ m),\qquad (2.23$$

где Ψ_i — неизвестные вещественные числа $(-\infty<\Psi_i<+\infty)$ подлежащие определению. Вместо (2.23) иногда используют следующие выражения:

$$V_i(\varphi)+\Psi_i-c_i=0\quad (i=1,\ \ldots,\ m),\qquad (2.24)$$

где Ψ_i — неизвестные вещественные числа $(\Psi_i\geqslant 0)$, подлежащие определению. Введение дополнительных неизвестных по формулам (2.24) часто применяется при исследовании задач линейного и выпуклого программирования.

Аналогично (2.21) третий способ сведения ограничений второго типа вида (2.7) к ограничениям типа равенств можно представить в виде

$$V_i(\varphi)+\Psi_i-c_i=0,\quad \Psi_i=\sigma(\Xi_i)\,\Xi_i^p\quad (i=1,\ \ldots,\ m),\qquad (2.25)$$

где постоянные вектора Ψ и Ξ подлежат определению вместе с φ.

Характерной особенностью для учета ограничений в вариационных задачах, изложенных в этом параграфе, является увеличение числа неизвестных, что ведет к увеличению размерности задачи. Это иногда может служить существенной преградой на пути отыскания решения. Однако при решении некоторых задач оптимизации учет ограничений в виде неравенств ограничениями в форме равенств часто используется.

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ МЕТОДЫ СВЕДЕНИЯ ОГРАНИЧЕНИЙ ТИПА НЕРАВЕНСТВ К ОГРАНИЧЕНИЯМ ТИПА РАВЕНСТВ

В этом параграфе предлагаются методы сведения ограничений типа неравенств к ограничениям типа равенств без увеличения размерности задачи (без введения новых неизвестных). Как и ранее, изложение будем проводить раздельно для ограничений первого и второго типов.

а) Ограничения первого типа (2.6) можно представить в виде ограничения типа равенства, например, одним из следующих методов:

1) $1-\operatorname{sign}\varphi_j(x)=0,$
$1+\operatorname{sign}(\varphi_j(x)-b_j)=0;$

2) $\varphi_j(x)-|\varphi_j(x)|=0,$
$\varphi_j(x)-b_j+|\varphi_j(x)-b_j|=0;$

3) $\varphi_j(x)[\varphi_j(x)-|\varphi_j(x)|]=0,$
$(\varphi_j(x)-b_j)[\varphi_j(x)-b_j+|\varphi_j(x)-b_j|]=0;$

4) $\varphi_j^p(x)[\varphi_j(x)-|\varphi_j(x)|]=0,$
$(\varphi_j(x)-b_j)^q[\varphi_j(x)-b_j+|\varphi_j(x)-b_j|]^r=0;$

5) $1+\operatorname{sign}[\varphi_j(x)(\varphi_j(x)-b_j)]=0;$

6) $\varphi_j(x)(\varphi_j(x)-b_j)+|\varphi_j(x)(\varphi_j(x)-b_j)|=0;$

7) $\varphi_j^p(x)(\varphi_j(x)-b_j)^q[\varphi_j(x)(\varphi_j(x)-b_j)+|\varphi_j(x)(\varphi_j(x)-b|]^r=0,$

где $p>0$, $q>0$, $r>0$ — любые целые числа, $j=1, \ldots, n$.

б) Аналогичными методами могут быть преобразованы ограничения в виде неравенств второго типа (2.7) к ограничениям типа равенств без увеличения размерности задачи, например:

$$
\begin{aligned}
&1)\ 1+\operatorname{sign}[V_i(\varphi)-c_i]=0;\\
&2)\ V_i(\varphi)-c_i+|V_i(\varphi)-c_i|=0;\\
&3)\ (V_i(\varphi)-c_i)[V_i(\varphi)-c_i+|V_i(\varphi)-c_i|]=0;\\
&4)\ (V_i(\varphi)-c_i)^p[V_i(\varphi)-c_i+|V_i(\varphi)-c_i|]^q=0,
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

где $i=1, \ldots, m$, $p>0$, $q>0$ — любые целые числа.

Заметим, что

1) представление в форме 1) по существу использовалось в книге [12, стр. 282];

2) представление в форме 3) по существу использовалось в [17].

Таким образом, в этом параграфе рассмотрены некоторые методы сведения ограничений типа неравенств в вариационных задачах к ограничениям типа равенств, что позволяет применить хорошо развитый аппарат классического вариационного исчисления.

§ 5. МЕТОД УМЕНЬШЕНИЯ ЧИСЛА ОГРАНИЧЕНИЙ

В этом параграфе предлагается метод уменьшения числа ограничений в форме неравенств, использующий идею метода аналитического описания геометрических объектов [21]. Так же как и в предыдущих параграфах, изложение метода будем проводить для учета ограничений первого и второго типов раздельно.

а) Ограничения первого типа (2.6) можно записать в виде одного неравенства следующим образом.

Введем обозначения

$$F(\alpha, \beta)=\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad F(\alpha, \beta)=\alpha+\beta-|\beta-\alpha|. \tag{2.27}$$

Ясно, что неравенства $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ эквивалентны неравенству $F(\alpha, \beta) \geqslant 0$.

Первый шаг заключается в том, что неравенства типа (2.6) записываются в виде

$$F(j) \equiv F(\varphi_j(x), \ b_j-\varphi_j(x)) \geqslant 0 \quad (j=1, \ldots, n). \tag{2.28}$$

Второй шаг заключается в том, что неравенства (2.28) записываются при n четном в виде

$$F(j, j+1) \equiv F(F(j), F(j+1)) \geqslant 0 \quad (j=1, 3, 5, \ldots, n-1), \tag{2.29}$$

а при n нечетном

$$F(j, j+1) \equiv F(F(j), F(j+1)) \geqslant 0, \quad (j=1, 3, 5, \ldots, n-2), \quad F(n) \geqslant 0. \tag{2.30}$$

При этом число неравенств (2.28) для четного n уменьшилось на $n/2$ неравенств, а для нечетных n на $(n-1)/2$.

Третий шаг заключается в попарном объединении первого и второго, третьего и четвертого неравенств, входящих в (2.29) или в (2.30), аналогично тому как это сделано на втором шаге. Четвертый и следующие шаги выполняются аналогично. Общее число шагов, необходимое для сведения ограничений (2.6) к одному неравенству, равно $\left\{n-E\left[\frac{n}{2}\right]+1\right\}$, где $E[a]$ — целая часть числа a.

б) Ограничения второго типа (2.7) можно записать в виде одного неравенства способом, аналогичным изложенному для ограничений первого типа. Тогда вместо (2.28) при m четном будем иметь

$$\hat{F}(i) \equiv F(c_i - V_i(\varphi),\ c_{i+1} - V_{i+1}(\varphi)) \geqslant 0$$
$$(i = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ m-1), \tag{2.31}$$

при m нечетном

$$\hat{F}(i) \equiv F(c_i - V_i(\varphi),\ c_{i+1} - V_{i+1}(\varphi)) \geqslant 0 \quad (i = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ m-2),$$
$$V_m(\varphi) \leqslant c_m. \tag{2.32}$$

Последующие шаги проводятся аналогично, их число равно $m - E\left[\frac{m}{2}\right]\}$.

Замечание. Аналогичный метод может быть использован для уменьшения числа ограничений, заданных в форме равенств или в форме совместной системы равенств и неравенств.

§ 6. СВЕДЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ К МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ ВТОРОГО ТИПА

В этом параграфе предлагается метод учета ограничений типа неравенств в вариационных задачах, заключающийся в сведении вариационной задачи 1 к минимаксной задаче для функционала Лагранжа, при этом в задаче остаются только ограничения первого типа.

Вернемся к рассмотрению вариационной задачи 1 при ограничениях (2.6) и (2.7). Введем понятие функционала Лагранжа

$$h(\varphi(x),\ \psi) = V_0(\varphi(x)) + [\psi,\ V(\varphi(x)) - c], \tag{2.33}$$

где

$$[\psi,\ V(\varphi) - c] = \sum_{i=1}^{m} \psi_i (V_i(\varphi) - c_i), \tag{2.34}$$

вектор-функция $\varphi \in M_1$, а ψ — m-мерный вектор вещественных чисел

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{2.35}$$

Пару $\{\varphi^0(x),\ \psi^0\}$ будем называть седловой точкой функционала $h(\varphi(x),\ \psi)$ в области $\{\varphi(x) \in M_1,\ \psi \geqslant 0\}$, если

$$\varphi^0(x) \in M_1,\ \psi^0 \geqslant 0, \tag{2.36}$$

$$h(\varphi^0,\ \psi) \leqslant h(\varphi^0,\ \psi^0) \leqslant h(\varphi,\ \psi^0) \tag{2.37}$$

для всех $\varphi(x) \in M_1$ и $\psi \geqslant 0$. Это может быть записано в вид

$$h(\varphi^0(x), \psi^0) = \min_{\varphi(x) \in M_1} \max_{\psi \geqslant 0} h(\varphi(x), \psi) = \max_{\psi \geqslant 0} \min_{\varphi(x) \in M_1} h(\varphi(x), \psi). \tag{2.3}$$

Задача нахождения седловой точки формулируется следующи образом.

Задача 7

Найти седловую точку $\{\varphi^0(x), \psi^0\}$ функциона $h(\varphi(x), \psi)$, т. е. найти пару $\{\varphi(x), \psi^0\}$, удовлетв ряющую условию (2.38).

Сведение вариационной задачи 1 с ограничениями типа не равенств к минимаксной задаче основано на том, что есл $\{\varphi^0(x), \psi^0\}$ — решение задачи 7, то $\varphi^0(x)$ — решение задачи Это утверждение и составляет формулировку доказанной ниж теоремы 9. Будем предполагать, что седловая точка функцион ла Лагранжа $h(\varphi(x), \psi)$ существует, тогда справедливо сле дующее утверждение, которое является обобщением результа тов [31].

Теорема 9

Если пара $\{\varphi^0(x), \psi^0\}$ является решением задачи 7, то вектор функция $\varphi^0(x)$ является решением задачи 1, при этом выполнен условие

$$[\psi^0, V(\varphi^0(x)) - c] = 0. \tag{2.39}$$

Доказательство. Распишем условие (2.37) для фун ционала Лагранжа (2.33)

$$V_0(\varphi^0(x)) + [\psi, V(\varphi^0(x)) - c] \leqslant V_0(\varphi^0(x)) + \\ + [\psi^0, V(\varphi^0(x)) - c] \leqslant V_0(\varphi(x)) + [\psi^0, V(\varphi(x)) - c] \tag{2.4}$$

для всех $\varphi(x) \in M_1$, $\psi \geqslant 0$.

Поскольку левое неравенство имеет место для любого $\psi \geqslant$ то все компоненты вектора $V(\varphi^0) - c$ должны быть неположи тельны, причем $[\psi^0, V(\varphi^0(x)) - c]$ должны равняться нулю:

$$V(\varphi^0) - c \leqslant 0, \quad [\psi^0, V(\varphi^0(x)) - c] = 0. \tag{2.41}$$

Отсюда правое неравенство (2.40) можно записать в виде

$$V_0(\varphi^0) \leqslant V_0(\varphi) + [\psi^0, V(\varphi) - c] \tag{2.4}$$

для всех $\psi \geqslant 0$. Поскольку для любой вектор-функции $\varphi(x) \in M$ имеем $[\psi^0, V(\varphi(x)) - c] \leqslant 0$, то

$$V_0(\varphi^0) \leqslant V_0(\varphi) + [\psi^0, V(\varphi) - c] \leqslant V_0(\varphi), \tag{2.4}$$

это и доказывает оптимальность $\varphi^0(x)$, т. е. что $\varphi^0(x)$ являетс решением задачи 1.

Замечание. Для доказательства теоремы нигде не требовались свойства выпуклости функционалов $V_0(\varphi)$ и $V_i(\varphi)$ $(i=1, \ldots, m)$. Эти свойства наряду с условием Слейтера [31] (которое состоит в существовании вектор-функции $\varphi(x) \in M_1$ такой, что $V_i(\varphi(x))>0$ $(i=1, \ldots, m)$) являются необходимыми и достаточными условиями эквивалентности задач 1 и 7. Это утверждение было сформулировано и доказано в теореме Куна—Таккера и приведено в работе [31].

§ 7. СВЕДЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА НЕРАВЕНСТВ К МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ С ОДНИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ ВТОРОГО ТИПА

В этом параграфе предлагается другой подход к учету ограничений второго типа путем сведения исходной вариационной задачи с ограничениями в форме неравенств первого и второго типов к минимаксной задаче с одним ограничением второго типа.

Предположим, что в вариационной задаче 1 ограничения заданы в форме неравенств (2.6) и (2.7), сформулируем следующую минимаксную задачу.

Задача 8

Найти $\{\varphi^{00}(x), \psi^{00}\}$ такие, что

$$\max_{\substack{\psi_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{m} \psi_i = 1}} \min_{\varphi(x) \in M_1 \cap M_\psi} V_0(\varphi(x)) = \min_{\varphi(x) \in M_1 \cap M_{\psi^{00}}} V_0(\varphi(x)) = V_0(\varphi^{00}(x)). \tag{2.44}$$

В (2.44) через ψ обозначен m-мерный вектор вещественных чисел $\psi_1, \ldots, \psi_m$, M_ψ — множество вектор-функции $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i (V_i(\varphi(x)) - c_i) \leqslant 0. \tag{2.45}$$

Будем предполагать, что в задаче 1 для множества M_2 вектор-функций $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$, для которых $V_i(\varphi) \leqslant c_i$ $(i=1, \ldots, m)$, выполнено условие Слейтера: существует вектор-функция $\bar{\varphi}(x) \in M_1 \cap M_2$ такая, что

$$V_i(\bar{\varphi}(x)) < c_i \quad (i=1, \ldots, m). \tag{2.46}$$

При этих предположениях эквивалентность задач 1 и 8 доказывается в следующей теореме.

Теорема 10

Предположим, что решения задач 1 *и* 8 *существуют и обозначим эти решения через* $\varphi^0(x)$ *и* $\{\varphi^{00}(x), \psi^{00}\}$ *соответственно. Тогда задачи* 1 *и* 8 *эквивалентны, т. е.*

$$V_0(\varphi^0(x)) = V_0(\varphi^{00}(x)). \tag{2.47}$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$V(\varphi^{00}(x)) \leqslant V_0(\varphi^0(x)). \tag{2.48}$$

Действительно, так как $\varphi^0(x) \in M_1 \cap M_\psi$ для любого $\psi \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{m} \psi_i = 1$, то $\varphi^0(x) \in M_1 \cap M_{\psi^0}$, и следовательно, из неравенств

$$V_0(\varphi^{00}(x)) = \max_{\substack{\psi \geqslant 0 \\ \sum_{i=1}^{m} \psi_i = 1}} \min_{\varphi(x) \in M_1 \cap M_\psi} V_0(\varphi(x)) =$$

$$= \min_{\varphi(x) \in M_1 \cap M_{\varphi^{00}}} V_0(\varphi(x)) \leqslant V_0(\varphi(x)), \tag{2.49}$$

справедливого для любой вектор-функции $\varphi(x) \in M_1 \cap M_{\psi^{00}}$, при $\varphi(x) = \varphi^0(x)$ получим (2.48).

Докажем теперь справедливость следующего неравенства

$$V_0(\varphi^{00}(x)) \geqslant V_0(\varphi^0(x)). \tag{2.50}$$

Так как $\varphi^0(x)$ — решение задачи 1, то в M_1 система ограничений

$$V_0(\varphi) - V_0(\varphi^0) < 0, \quad V_i(\varphi) < c_i \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.51}$$

несовместна, т. е. множество вектор-функций $\varphi(x) \in M_1$, для которых выполнено (2.51), пусто.

Из условий несовместности* системы неравенств (2.51) (являющихся обобщением результатов [11]) следует существование такого вектора

$$\bar{\psi}^0 = \begin{pmatrix} \psi_0^0 \\ \psi_1^0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_m^0 \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad \psi_0^0 > 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \psi_i^0 = 1,$$

что пусто множество вектор-функций $\varphi(x) \in M_1$, удовлетворяющих ограничению

$$\left\{ \psi_0^0 [V_0(\varphi(x)) - V_0(\varphi^0(x))] + \sum_{i=1}^{m} \psi_i^0 [V_i(\varphi(x)) - c_i] < 0 \right\}.$$

---

* Система неравенств $v_l(\varphi) < 0$ $(l = 1, \ldots, k)$ несовместна тогда и только тогда, когда существуют такие $\alpha_l \geqslant 0$ $(l = 1, \ldots, k)$, что пусто множество вектор-функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенству $\sum_{l=1}^{k} \alpha_l v_l(\varphi) < 0$.

Далее обозначим через ψ^0 вектор с координатами ψ_i^0 $(i=1, \ldots, m)$. Очевидно, что $\varphi^0 \in M_1 \cap M_{\psi^0}$, и кроме того, имеем

$$V_0(\varphi^0(x)) = \min_{\varphi(x) \in M_1 \cap M_{\psi^0}} V_0(\varphi(x)). \tag{2.52}$$

Справедливость (2.52) следует из следующих рассуждений. Так как $\varphi^0 \in M_1 \cap M_{\psi^0}$, то

$$V_0(\varphi^0(x)) \geqslant \min_{\varphi(x) \in M_1 \cap M_{\psi^0}} V_0(\varphi(x)).$$

Предположим, что (2.52) невыполнено, это значит, что существует такое $\varphi^1(x) \in M_1 \cap M_{\psi^0}$, для которого $V_0(\varphi^1(x)) < V_0(\varphi^0(x))$. Тогда получим, что для $\varphi^1(x) \in M_1$ справедливо неравенство

$$\psi_0^0 [V_0(\varphi^1(x)) - V_0(\varphi^0(x))] + \sum_{i=1}^{m} \psi_i^0 [V_i(\varphi^1(x)) - c_i] < 0,$$

что противоречит пустоте множества вектор-функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих ограничению

$$\left\{ \psi_0^0 [V_0(\varphi(x)) - V_0(\varphi^0(x))] + \sum_{i=1}^{m} \psi_i^0 [V_i(\varphi(x)) - c_i] < 0 \right\}.$$

Полученное противоречие показывает, что неверно сделанное предположение о невыполнении (2.52). Итак, справедливость (2.52) доказана.

Выполнение неравенства (2.50) следует из того, что

$$V_0(\varphi^{00}(x)) = \max_{\substack{\psi > 0 \\ \sum_{i=1}^{m} \psi_i = 1}} \min_{\varphi(x) \in M_1 \cap M_\psi} V_0(\varphi(x)) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\varphi(x) \in M_1 \cap M_{\psi^0}} V_0(\varphi(x)) = V_0(\varphi^0(x)). \tag{2.53}$$

Из неравенств (2.48) и (2.50) следует (2.47). Теорема доказана полностью.

Сделаем несколько замечаний.

1) Из эквивалентности задач 1 и 8 не следует, вообще говоря, что $\varphi^0(x) \equiv \varphi^{00}(x)$.

Это означает, что значения функционала V_0 на решении задач 1 и 8 совпадают, но из того, что $\varphi^0(x)$ — решение задачи 1, не следует, что $\varphi^0(x)$ — решение задачи 8. Однако если $\varphi^{00}(x)$ — решение задачи 8 (для соответствующего ψ^{00}), то $\varphi^{00}(x)$ является решением задачи 1.

2) Если решение задачи 1 единственно, то задачи 1 и 8 эквивалентны полностью, т. е. $\varphi^0(x) \equiv \varphi^{00}(x)$

3) Докажем, что $\psi_0^0 > 0$. Действительно, если $\psi_0^0 = 0$, то с одной стороны, множество вектор-функций $\varphi(x) \in M_1$, удовлетворяющих ограничению

$$\left\{\psi_0^0 [V_0(\varphi(x)) - V_0(\varphi^0(x))] + \sum_{i=1}^{m} \psi_i^0 [V_i(\varphi(x)) - c_i] < 0\right\},$$

пусто, а, с другой стороны, $\bar{\varphi}(x) \in M_1$ принадлежит этому множеству. Полученное противоречие и доказывает, что $\psi_0^0 > 0$.

4) В задаче 8 в отличие от задачи 1 число переменных на m больше (фактически на $(m-1)$), так как одно из ψ_i определяется через остальные из условия, что $\sum_{i=1}^{m} \psi_i = 1$, однако число ограничений второго типа становится равным 1. Оставшееся ограничение второго типа имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} \psi_i [V_i(\varphi(x)) - c_i] \leqslant 0.$$

5) Хотя в задаче 8 появились m новых переменных ψ_i, но функционал $V_0(\varphi)$ не зависит от них и, кроме того, они входят линейно в ограничения.

6) Можно было бы аналогичным методом сведения к минимаксной задаче учесть только часть ограничений второго типа.

§ 8. МЕТОД ПОГРУЖЕНИЯ

Изложенные в предыдущих параграфах методы можно отнести к точным методам учета ограничений в вариационных задачах. Метод погружения [2, 3, 15, 17, 33] (в противоположность точным методам) является приближенно-предельным методом учета ограничений (т. е. выполнение ограничений в методе погружения является приближенным, и в пределе точно удовлетворяются исходные ограничения в вариационной задаче). Название *метод погружения* связано с тем фактом, что вместо исходной вариационной задачи рассматривается другая вариационная задача, в которой множество вектор-функций $\varphi(x)$ шире (вообще говоря, значительно) множества вектор-функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих ограничениям исходной вариационной задачи.

Идея метода погружения была высказана Курантом в работе [33]. В данном параграфе дается обоснование метода погружения в общей форме и предлагается специальный выбор коэффициентов функции штрафа. Метод погружения использовался для решения задач оптимизации траекторий летательных аппаратов в работе [17].

Рассмотрим применение метода погружения для учета ограничений второго типа в задаче 1. Метод погружения заключается в замене задачи 1 решением следующей задачи без ограничений второго типа.

Задача 9

Найти вектор-функцию $\varphi_\psi^0(x) \in M_1$, доставляющую минимальное значение функционалу $V_\psi(\varphi^0)$, т. е.

$$V_\psi(\varphi_\psi^0(x)) = \min_{\varphi(x) \in M_1} V_\psi(\varphi(x)), \tag{2.54}$$

где

$$V_\psi(\varphi) = V_0(\varphi) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \psi_i (V_i(\varphi) - c_i) [V_i(\varphi) - c_i + | V_i(\varphi) - c_i |]. \tag{2.55}$$

Второе слагаемое в (2.55) называется функцией штрафа. Если коэффициенты функции штрафа $\psi_1, \ldots, \psi_m$ положительны и имеют достаточно большие численные значения, то решение задачи 9 будет сколь угодно близко к решению задачи 1.

В книге [17, стр. 255] приводятся два способа выбора коэффициентов $\psi_1, \ldots, \psi_m$ при использовании градиентного метода спуска для решения задачи:

1) по величине отношения значения i-го множителя Лагранжа (вычисленного на каком-то шагу градиентного метода) к величине ε_i $(i=1, \ldots, m)$;

2) по величине отношения отклонения значения i-го функционала (вычисленного на каком-то шагу градиентного метода) к допустимой (заранее задаваемой) величине отклонения $\varepsilon_i (i=1, \ldots, m)$.

Таким образом, сущность метода погружения заключается в приближенном характере выполнения ограничений второго типа при достаточно больших значениях коэффициентов $\psi_1, \ldots, \psi_m$.

Достоинством изложенного метода погружения (сводящего задачу 1 к задаче 9) является то, что в задаче 9 необходимо минимизировать функционал без ограничений второго типа. Каждая компонента

$$\frac{1}{2} \psi_i (V_i(\varphi) - c_i) [V_i(\varphi) - c_i + | V_i(\varphi) - c_i |] \quad (i = 1, \ldots, m)$$

функции штрафа в (2.55) неотрицательна для любого $\varphi \in M_1$ (при $\psi_i \geqslant 0$), причем она равна нулю тогда и только тогда, когда $V_i(\varphi) \leqslant c_i$.

Недостатком изложенных способов использования метода погружения [17] является необходимость дополнительного пе-

расчета коэффициентов $\psi_1, \ldots, \psi_m$ функции штрафа. В связи этим в работах [2—3] предлагается один способ выбора коэффициентов $\psi_1, \ldots, \psi_m$, ликвидирующий отмеченный выше недостаток метода погружения.

Приведем далее обоснование метода погружения и способ выбора коэффициентов $\psi_1, \ldots \psi_m$.

Предположим, что существует вектор-функция $\bar{\varphi}(x) \in M$ такая, что

$$V_i(\bar{\varphi}(x)) \leqslant c_i \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{2.5}$$

т. е. $\bar{\varphi}(x)$ является допустимой (в смысле удовлетворения ограничений второго типа) вектор-функцией. Тогда функция штраф в (2.55) равна нулю при $\varphi(x) = \bar{\varphi}(x)$.

Теорема 11

Для любых $\psi_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ *имеет место неравенство*

$$\min_{\varphi \in M_1} V_\psi(\varphi) \leqslant \min_{\varphi \in M_1 \cap M_2} V_0(\varphi). \tag{2.5}$$

Действительно, используя (2.55), получим

$$\min_{\varphi \in M_1} V_\psi(\varphi) = \min_{\varphi \in M_1} \left[V_0(\varphi) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \psi_i (V_i(\varphi) - c_i) \right] [V_i(\varphi) - c_i$$

$$+ |V_i(\varphi) - c_i|] \leqslant \min_{\varphi \in M_1 \cap M_2} \left[V_0(\varphi) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \psi_i (V_i(\varphi) - c_i) \right] \times$$

$$\times [V_i(\varphi) - c_i + |V_i(\varphi) - c_i|] = \min_{\varphi \in M_1 \cap M_2} V_0(\varphi). \tag{2.5}$$

Из теоремы 11 следует справедливость следующей теоремы

Теорема 12

Для любых $\psi_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ *решение задачи* 9 φ_ψ^0 (*удовлетворяет неравенству*

$$V_0(\varphi_\psi^0) \leqslant \min_{\varphi \in M_1 \cap M_2} V_0(\varphi). \tag{2.5}$$

Теорема 13

Пусть для любой вектор-функции $\varphi(x) \in M_1$

$$V_0(\varphi) \geqslant \bar{c} > -\infty. \tag{2.6}$$

Решение φ_ψ^0 *задачи* 9 *при* $\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_m = \psi$ $(\psi \geqslant \psi_e >$ *удовлетворяет* (2.59) *и неравенствам*

$$V_i(\varphi_\psi^0) \leqslant c_i + \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{2.6}$$

где $\varepsilon > 0$ — *любое (сколь угодно малое) заданное число,*

$$\psi_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2}\left(V_0(\bar{\varphi}) - \bar{c}\right) > 0 \qquad (2.62)$$

(если $V_0(\bar{\varphi}) \neq \bar{c}$*).*

Доказательство. Выполнение условия (2.59) следует из теоремы 12. Далее из теоремы 11 имеем после подстановки решения $\varphi_\psi^0(x)$ задачи 9 в функционал $V_\psi(\varphi(x))$.

$$V_\psi(\varphi_\psi^0) = V_0(\varphi_\psi^0) + \frac{\psi}{2}\sum_{i=1}^{m}(V_i(\varphi_\psi^0) - c_i)\left[V_i^0(\varphi_\psi) - \right.$$

$$\left. - c_i + |V_i(\varphi_\psi^0) - c_i|\right] \leqslant \min_{\varphi \in M_1 \cap M_2} V_0(\varphi) \leqslant V_0(\bar{\varphi}). \qquad (2.63)$$

Отсюда имеем

$$\frac{\psi}{2}\sum_{i=1}^{m}(V_i(\varphi_\psi^0) - c_i)\left[V_i(\varphi_\psi^0) - c_i + |V_i(\varphi_\psi^0) - c_i|\right] \leqslant$$

$$\leqslant V_0(\bar{\varphi}) - V_0(\varphi_\psi^0) \leqslant V_0(\bar{\varphi}) - \bar{c}, \qquad (2.64)$$

$$\sum_{i=1}^{m}(V_i(\varphi_\psi^0) - c_i)\left[V_i(\varphi_\psi^0) - c_i + |V_i(\varphi_\psi^0) - c_i|\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2(V_0(\bar{\varphi}) - \bar{c})}{\psi} \leqslant \frac{2(V_0(\bar{\varphi}) - \bar{c})}{\psi_\varepsilon} = \varepsilon^2. \qquad (2.65)$$

Из (2.65) и неотрицательности слагаемых $(V_i(\varphi_\psi^0) - c_i) \times$ $\times\left[V_i(\varphi_\psi^0) - c_i + |V_i(\varphi_\psi^0) - c_i|\right]$ $(i = 1, \ldots, m)$ получим

$$(V(\varphi_\psi^0) - c_i)\left[V_i(\varphi_\psi^0) - c_i + |V_i(\varphi_\psi^0) - c_i|\right] \leqslant \varepsilon^2 \quad (i = 1, \ldots, m), \qquad (2.66)$$

откуда

$$(V_i(\varphi_\psi^0) - c_i)|V_i(\varphi_\psi^0) - c_i| \leqslant \varepsilon^2 \quad (i = 1, \ldots, m). \qquad (2.67)$$

Из неравенства (2.67) следуют неравенства (2.61). Теорема доказана полностью.

В теореме 13 дается обоснование метода погружения и способ выбора коэффициентов ψ_i функции штрафа по значению функционала $V_0(\bar{\varphi})$, $\bar{c}$ и величине ε, определяющей требуемую на практике) точность выполнения ограничений второго типа.

Таким образом, решение φ_ψ^0 (при $\psi \geqslant \psi_\varepsilon$) задачи 9 дает значение функционалу $V_0(\varphi_\psi^0) \leqslant \min_{\varphi \in M_1 \cap M_2} V_0(\varphi)$ и удовлетворяет ограничениям второго типа с любой (наперед заданной) точностью $\varepsilon > 0$.

Замечание 1. Если в (2.62) будет иметь место равенство $V_0(\bar{\varphi}) = \bar{c}$, то $\bar{\varphi}$ есть искомое решение задач 1 и 9.

Замечание 2. Вместо задания одной величины ε можн задавать величины ε_i для i-го ограничения. Тогда в теореме 1 надо положить

$$\psi_i \geqslant \psi_{\varepsilon_i} \geqslant 0, \quad \psi_{\varepsilon_i} = \frac{2}{\varepsilon_i^2}\left(V_0(\bar{\varphi}) - \bar{c}\right) \ (i = 1, \ldots, m). \qquad (2.6$$

В частности, можно выбирать все величины $\psi_i \equiv$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\psi \geqslant \psi_\varepsilon$, где ψ_ε определяется формулой (2.6 при $\varepsilon = \min\limits_{i=1,\ldots,m} \{\varepsilon_i\}$.

Замечание 3. Если функционалы $V_0(\varphi), V_1(\varphi), \ldots, V_m(\varphi$ выпуклы (строго выпуклы) по φ, то функционал $V_\psi(\varphi)$ выпук (строго выпукл) по φ.

Замечание 4. Функционал $V_\psi(\varphi)$ вместо (2.55) можн задавать в виде

$$V_\psi(\varphi) = V_0(\varphi) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \psi_i (V_i(\varphi) - c_i)^p \left[V_i(\varphi) - c_i + |V_i(\varphi) - c_i|\right]^q \qquad (2.6$$

где $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ — любые целые числа, $p^2 + q^2 \neq 0$.

Метод погружения может быть применен и для учета огра ничений второго типа, заданных в виде равенств, так как ра венство $V_i(\varphi) = c_i$ можно представить в виде двух неравенст

$$V_i(\varphi) \leqslant c_i, \quad -V_i(\varphi) \leqslant -c_i. \qquad (2.70$$

Замечание 5. В принципе метод погружения примени и для учета ограничений первого типа. Однако до сих по никем этот подход не рассматривался. Здесь не будем при водить обоснования этого подхода, поскольку в этой книг ограничения первого типа рассматриваются в простейшей форм $(0 \leqslant \varphi(x) \leqslant b)$.

ГЛАВА III

МЕТОДЫ ПОЛУЧЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

В данной главе предлагаются некоторые методы получения операторных уравнений, решения которых удовлетворяют условиям оптимальности вариационных задач. Для нахождения решений операторных уравнений развиты различные методы численного решения (некоторые из них приведены в главе IV).

В начале главы получены операторные уравнения в форме классических уравнений Эйлера—Лагранжа для вариационной задачи минимизации функционала при наличии ограничений в виде равенств. После этого на основе применения условия оптимальности к вариационной задаче минимизации функционала при наличии ограничений первого типа получен вид операторного уравнения для $\varphi^0(x)$.

Далее получены операторные уравнения для решения $\varphi^0(x)$ вариационной задачи с ограничениями первого и второго типов, причем предварительно ограничения второго типа учитываются методом погружения или методом сведения к минимаксной задаче. Так как полученные операторы в этих уравнениях не являются, вообще говоря, гладкими (непрерывными, дифференцируемыми и т. п.), то предложен один метод сглаживания оператора. Гладкость операторов существенно используется в большинстве известных методов численного решения операторных уравнений (при формулировке и доказательстве сходимости), кроме того, гладкость операторов обеспечивает существование решений этих уравнений (см. теорему о неподвижной точке [29]).

§ 1. УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ЛАГРАНЖА ДЛЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

Рассмотрим вариационную задачу 4, в которой ограничения заданы в форме равенств (2.2) и (2.3). Учет ограничений в задаче 4 осуществляется введением неопределенных множите-

лей Лагранжа (§ 1, гл. II). Согласно теореме 7 решение задачи 4 может быть получено из задачи минимизации функционала

$$\int_R H(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_r(x), \psi_{r+1}, \ldots, \psi_{r+m})\, dx, \tag{3.1}$$

где H — функция Лагранжа (2.4).

Необходимые условия оптимальности $\varphi^0(x)$ (как решения задачи минимизации функционала (3.1)) формулируются на основе хорошо известной теоремы вариационного исчисления [8, 9].

Теорема 14

Если функция Лагранжа H непрерывно дифференцируема по $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, то для того чтобы функционал (3.1) *принимал наименьшее возможное значение на вектор-функции $\varphi^0(x) = (\varphi_1^0(x), \ldots, \varphi_n^0(x))$, необходимо, чтобы существовала такая отличная от тождественного нуля вектор-функция $\psi^0(x) = (\psi_1^0(x), \ldots, \psi_r^0(x), \psi_{r+1}^0, \ldots, \psi_{r+m}^0)$, что для $\varphi^0(x)$ и $\psi^0(x)$ удовлетворяются уравнения Эйлера—Лагранжа*

$$\left.\frac{\partial H}{\partial \varphi_j}\right|_{\substack{\varphi(x)=\varphi^0(x)\\ \psi(x)=\psi^0(x)}} = 0, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial \psi_s}\right|_{\substack{\varphi(x)=\varphi^0(x)\\ \psi(x)=\psi^0(x)}} = 0$$

$$(j = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, r+m). \tag{3.2}$$

Система $(n+r+m)$ уравнений (3.2), вообще говоря, содержит $(n+r+m)$ неизвестных. Вектор-функцию $\varphi^0(x)$, для которой выполнено уравнение (3.2), в вариационном исчислении принято называть экстремалью Эйлера.

§ 2. ПОЛУЧЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ ПЕРВОГО ТИПА

В данном параграфе исследуются вопросы получения операторных уравнений для оптимальной вектор-функции $\varphi^0(x)$ на основе условий оптимальности для вариационной задачи с ограничениями первого типа.

Оператор (входящий в правую часть операторных уравнений) определяется неединственным образом, если не выполнены условия «сильной регулярности» (определение дано ниже). Дается вид оператора при выполнении условия сильной регулярности, а также дан способ получения этого оператора в случае невыполнения условия сильной регулярности, при котором этот оператор оказывается единственным.

Рассмотрим следующую вариационную задачу.

Задача 10

Найти вектор-функцию $\varphi^0(x) = (\varphi_1^0(x), \ldots, \varphi_n^0(x)) \in M_1$, доставляющую минимум функционалу $V(\varphi)$, т. е.

$$V(\varphi^0(x)) = \min_{\varphi(x) \in M_1} V(\varphi). \tag{3.3}$$

Будем предполагать, что у функционала $V(\varphi)$ существует градиент $\operatorname{grad} V(\varphi) = (g^1(\cdot), \ldots, g^n(\varphi)) \equiv g(\varphi)$. Задача 10 может быть получена из вариационной задачи 1 при учете ограничений второго типа одним из методов, излагаемых в главе II.

По теореме 5 (см. (1.33)), если $\varphi^0(x) \in M_1$ — решение задачи 10, то имеет место равенство

$$\min_{\varphi(x) \in M_1} \int_R [g(\varphi^0(x)), (\varphi(x) - \varphi^0(x))]\, dx = 0. \tag{3.4}$$

Будем говорить, что функционал $V(\varphi)$ удовлетворяет условию *регулярности*, если

$$\sum_{j=1}^{n} [g^j(\varphi^0(x))]^2 \neq 0 \tag{3.5}$$

за исключением множества $x \in R$ нулевой меры. Условие регулярности означает, что вектор-функция $\varphi^0(x)$ не является экстремалью Эйлера. Будем говорить, что функционал $V(\varphi)$ удовлетворяет условию *сильной регулярности*, если

$$g^j(\varphi^0(x)) \neq 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{3.6}$$

за исключением множества $x \in R$ нулевой меры. Условие сильной регулярности означает, что для оптимальной вектор-функции $\varphi^0(x)$ ни на одном множестве точек $x \in R$ ненулевой меры не удовлетворяется ни одно из уравнений Эйлера $g^j(\varphi^0(x)) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ для задачи минимизации функционала $V(\varphi)$ без ограничений.

В случае выполнения условия регулярности вектор-функция $\varphi^*(x)$, доставляющая минимум линейному функционалу (3.4), определяется очевидным образом:

$$\varphi_j^*(x) = \frac{b_j}{2}[1 - \operatorname{sign} g^j(\varphi^0(x))] \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{3.7}$$

Теорема 15

Для того чтобы было выполнено условие оптимальности (3.4), *достаточно при выполнении условия регулярности, чтобы*

$$\varphi^0(x) = \varphi^*(x), \tag{3.8}$$

где $\varphi^*(x)$ *определяется по* (3.7).

Доказательство. Действительно, подставляя $\varphi^*(x) = \varphi^0(x)$ вместо $\varphi(x)$ в функционал $\int\limits_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)]\,dx$, получим по определению $\varphi^*(x)$ справедливость (3.4).

Теорема 16

Для того чтобы было выполнено условие оптимальности (3.4), *необходимо при выполнении условия строгой регулярности, чтобы* $\varphi^0(x) = \varphi^*(x)$, *где равенство двух вектор-функций понимается в смысле равенства нулю нормы разности этих вектор-функций, а вектор-функция* $\varphi^*(x)$ *определяется по* (3.7).

Доказательство. 1) Докажем сперва следующее утверждение.

Если выполнено условие сильной регулярности, то существует единственная вектор-функция $\varphi^*(x)$ в множестве M_1 вектор-функций из гильбертова пространства $L_{2;\,n}(R)$ такая, что

$$\int\limits_R [g(\varphi^0(x)),\ \varphi^*(x)]\,dx = \min_{\varphi(x)\in M_1} \int\limits_R [g(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)]\,dx. \qquad (3.9)$$

Действительно, вектор-функция $\varphi^*(x)$, удовлетворяющая (3.9), такова, что почти для всех $x \in R$ имеет место

$$g^j(\varphi^0(x))\,\varphi_j^*(x) = \min_{0\leqslant z_j\leqslant b_j} g^j(\varphi^0(x))\,z_j \quad (j = 1, \ldots, n). \qquad (3.10)$$

Отсюда получим

$$\varphi_j^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } g^j(\varphi^0(x)) > 0, \\ b_j & \text{при } g^j(\varphi^0(x)) < 0 \\ (j = 1, \ldots, n), \end{cases} \qquad (3.11)$$

если $g^j(\varphi^0(x)) = 0$, то $\varphi_j^*(x)$ выбирается произвольным образом и, в частности, можно положить $\varphi_j^*(x) = 0$. Поэтому можно записать $\varphi^*(x)$ в виде

$$\varphi_j^*(x) = \frac{b_j}{2}[1 - \operatorname{sign} g^j(\varphi^0(x))] \quad (j = 1, \ldots, n). \qquad (3.12)$$

Так как выполнено условие сильной регулярности, то $g^j(\varphi^0(x))$ $(j = 1, \ldots, n)$ может равняться нулю лишь на множестве $x \in R$ нулевой меры.

Таким образом, в силу введенного определения эквивалентности вектор-функции получим, что вектор-функция $\varphi^*(x)$ определяется единственным образом по формулам (3.12). Этим доказывается первое утверждение теоремы.

2) Представим условие оптимальности (3.4) в виде

$$\int\limits_R [g(\varphi^0(x)),\ \varphi^0(x)]\,dx = \min_{\varphi(x)\in M_1} \int\limits_R [g(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)]\,dx. \qquad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что минимум линейного функционала в правой части (3.13) достигается на вектор-функции $\varphi^0(x)$. С другой стороны, в силу утверждения первой части доказательства теоремы этот минимум достигается на единственной вектор-функции $\varphi^*(x)$, следовательно, имеем $\varphi^*(x) \equiv \varphi^0(x)$ всюду за исключением множества $x \in R$ меры нуль. Теорема доказана полностью.

Теорема 17

Если условия оптимальности (3.4) *являются достаточными, а также выполнено условие сильной регулярности, то вектор-функция* $\varphi^0(x)$, *определяемая из условия* $\varphi^0(x) = \varphi^*(x)$, *является оптимальной для задачи* 10, *где* $\varphi^*(x)$ *определяется по* (3.7).

Доказательство. Действительно, по теореме 15 при $\varphi^0(x) = \varphi^*(x)$ выполнено условие оптимальности (3.4) и поскольку условие оптимальности является достаточным, то $\varphi^0(x)$ является решением задачи 10.

Из анализа (3.11) следует, что в случае выполнения условия сильной регулярности $\varphi^*(x)$ определяется единственным образом из условия (3.9); в противных случаях $\varphi^*(x)$ неединственно. Далее дадим один способ устранения неединственности определения $\varphi^*(x)$ из условия (3.9).

Замечание. Для одномерного случая (т. е. при $n=1$) условия регулярности и сильной регулярности совпадают.

Таким образом, теоремы 15, 16 и 17 дают возможность искать решение задачи 10 из операторного уравнения.

$$\left.\begin{aligned} &\text{либо} \quad \varphi_j^0(x) = \frac{b_j}{2}\left[1 - \operatorname{sign} g^j(\varphi^0(x))\right], \\ &\text{либо} \quad g^j(\varphi^0(x)) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

Обозначим выражение для $\varphi^0(x)$ из первого уравнения (3.14) через оператор $\overline{\Phi}_j(\varphi^0(x), x)$, тогда выражение (3.14) можно записать в виде

$$\varphi_j^0(x) = \overline{\Phi}_j(\varphi^0(x), x) \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{3.15}$$

либо в векторной форме

$$\varphi^0(x) = \overline{\Phi}(\varphi^0(x), x). \tag{3.16}$$

В условиях теоремы 16 представление (3.16) является единственным. Оно будет единственным и для одномерного случая (для $n=1$) при выполнении условия регулярности. Вообще говоря, представление (3.16) является неединственным. Ниже дается один способ получения операторного уравнения вида (3.16), в котором оператор $\overline{\Phi} = \widetilde{\Phi}$ определяется единственным образом.

Обозначим через $S(\varphi^0(x))$ множество тех $\tilde{\varphi}(x) \in M_1$, на которых достигается минимум линейного функционала

$$\int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx,$$

т е.

$$S(\varphi^0(x)) = \left\{\tilde{\varphi}(x) \in M_1 : \int_R [g(\varphi^0(x)), \tilde{\varphi}(x) - \varphi^0(x)]\, dx = \right.$$

$$\left. = \min_{\varphi(x) \in M_1} \int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx \right\}. \qquad (3.17)$$

Из (3.17) следует, что множество $S(\varphi^0(x))$ представляет собой пересечение множества M_1 и гиперплоскости

$$L(\varphi^0(x)) = \left\{\varphi(x) \in \mathfrak{M} : \int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi(x)]\, dx = \right.$$

$$\left. = \int_R [g(\varphi^0(x)), \varphi^0(x)]\, dx \right\}.$$

В силу выпуклости и замкнутости M_1 множество $S(\varphi^0(x))$ выпукло и замкнуто.

Для того чтобы условие оптимальности (3.4) было выполнено, достаточно, чтобы

$$\varphi^*(x) = \tilde{\Phi}(\varphi^0(x), x), \qquad (3.18)$$

$$\varphi^0(x) = \tilde{\Phi}(\varphi^0(x), x), \qquad (3.19)$$

где оператор $\tilde{\Phi}$ определяется следующим образом:

$$\|\varphi^0(x) - \tilde{\Phi}(\varphi^0(x), x)\| = \min_{\tilde{\varphi}(x) \in S(\varphi^0)} \|\varphi^0(x) - \tilde{\varphi}(x)\|. \qquad (3.20)$$

Например, для случая $n=2$ на рис. 2 иллюстрируется определение оператора $\tilde{\Phi}(\varphi^0(x), x)$. Оператор $\tilde{\Phi}(\varphi^0(x), x)$ определяется из условия (3.20) единственным образом (в смысле введенного понятия эквивалентности вектор-функций), так как существует единственная точка из $S(\varphi^0(x))$, (называемая проекцией точки $\varphi_0(x)$ на $S(\varphi^0(x))$, расстояние от которой до точки $\varphi^0(x)$ равно наикратчайшему расстоянию от точек выпуклого множества $S(\varphi^0(x))$ до точки $\varphi^0(x)$. Очевидно, что в случае сильной регулярности операторы $\bar{\Phi}$ и $\tilde{\Phi}$ совпадают.

Определим теперь оператор

$$\Phi(\varphi^0(x), x) = (\Phi_1(\varphi^0(x), x), \ldots, \Phi_n(\varphi^0(x), x))$$

следующим образом:

$$\Phi_j(\varphi^0(x), x) = \begin{cases} \tilde{\Phi}_j(\varphi^0(x), x), & \text{если } g^j(\varphi^0(x)) \neq 0, \\ \varphi_j^0(x) + g^j(\varphi^0(x)), & \text{если } g^j(\varphi^0(x)) = 0 \\ \qquad (j = 1, \ldots, n). \end{cases} \qquad (3.21)$$

Операторное уравнение для нахождения $\varphi^0(x)$ имеет вид

$$\varphi^0(x) = \Phi(\varphi^0(x),\ x), \tag{3.22}$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_j^0(x) = \widetilde{\Phi}_j(\varphi^0(x),\ x), \quad \text{если} \quad g^j(\varphi^0(x)) \neq 0, \\ &\varphi_j^0(x) = [g^j]^{-1}(0), \quad \text{если} \quad g^j(\varphi^0(x)) = 0 \\ &\qquad (j = 1,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Операторное уравнение (3.23) можно представить в виде

$$\Theta(\varphi^0(x),\ x) = 0, \tag{3.24}$$

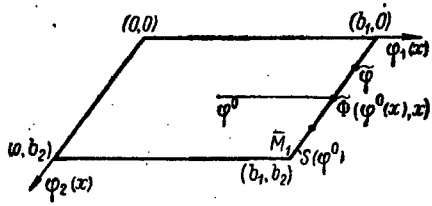

Рис. 2

где компоненты оператора Θ имеют вид

$$\Theta_j(\varphi^0(x),\ x) = \begin{cases} \varphi_j^0(x) - \widetilde{\Phi}_j(\varphi^0(x),\ x), & \text{если} \quad g^j(\varphi^0(x)) \neq 0, \\ g^j(\varphi^0(x)), & \text{если} \quad g^j(\varphi^0(x)) = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Таким образом, получено операторное уравнение для нахождения $\varphi^0(x)$ на основе использования условия оптимальности. Для решения операторных уравнений имеются различные численные методы, некоторые из них формулируются в главе IV.

Замечание. Если предполагать, что в задаче 10 $M_1 = \{\varphi(x) : \varphi(x) \geqslant 0\}$, т. е. $b = +\infty$, то операторы Φ и Θ имеют вид

$$\Phi_j(\varphi^0(x),\ x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad g^j(\varphi^0(x)) \neq 0, \\ \varphi_j^0(x) + g^j(\varphi^0(x)), & \text{если} \quad g^j(\varphi^0(x)) = 0, \end{cases}$$

$$\Theta_j(\varphi^0(x),\ x) = \begin{cases} \varphi_j^0(x), & \text{если} \quad g^j(\varphi^0(x)) \neq 0, \\ g^j(\varphi^0(x)), & \text{если} \quad g^j(\varphi^0(x)) = 0. \end{cases}$$

§ 3. ПОЛУЧЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПРИ УЧЕТЕ ОГРАНИЧЕНИЙ ВТОРОГО ТИПА МЕТОДОМ ПОГРУЖЕНИЯ

В данном параграфе на основе условий оптимальности исследуются вопросы получения операторных уравнений для оптимальной вектор-функции $\varphi_{\psi_0}^0(x)$ в вариационной задаче 9,

которая может быть получена из вариационной задачи 1 при учете ограничений второго типа на основе применения метода погружения. Операторное уравнение для решения $\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x)$ задачи 9 может быть получено так же, как и в предыдущем параграфе, поскольку задача 9 совпадает с задачей 10, если положить $V(\varphi)=V_{\psi_\varepsilon}(\varphi)$.

Рассмотрим вариационную задачу 9, в которой требуется найти вектор-функцию $\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x)$, доставляющую минимальное значение функционалу $V_{\psi_\varepsilon}(\varphi(x))$, т. е.

$$V_{\psi_\varepsilon}\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x)\right)=\min_{\varphi(x)\in M_1} V_{\psi_\varepsilon}(\varphi(x)), \tag{3.26}$$

где

$$V_{\psi_\varepsilon}(\varphi)=V_0(\varphi)+\frac{\psi_\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{m}(V_i(\varphi)-c_i)\left[V_i(\varphi)-c_i+|V_i(\varphi)-c_i|\right],$$

а ψ_ε (согласно теореме 13) имеет вид

$$\psi_\varepsilon=\frac{2}{\varepsilon^2}\left(V_0(\overline{\varphi})-\overline{c}\right)>0. \tag{3.27}$$

Будем предполагать, что функции $f_0(x, \varphi)$, $f_i(x, \varphi)$ непрерывно дифференцируемы по $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Определим градиенты $g_0(\varphi)$, $g_i(\varphi)$ функционалов $V_0(\varphi)$, $V_i(\varphi)$ $(i=1, \ldots, m)$ следующим образом:

$$g_0(\varphi)=\operatorname{grad} V_0(\varphi)\equiv\left(\frac{\partial f_0(x, \varphi(x))}{\partial\varphi_1}, \ldots, \frac{\partial f_0(x, \varphi(x))}{\partial\varphi_n}\right), \tag{3.28}$$

$$g_i(\varphi)=\operatorname{grad} V_i(\varphi)\equiv\left(\frac{\partial f_i(x, \varphi(x))}{\partial\varphi_1}, \ldots, \frac{\partial f_i(x, \varphi(x))}{\partial\varphi_n}\right)$$
$$(i=1, \ldots, m). \tag{3.29}$$

Тогда функционал $V_{\psi_\varepsilon}(\varphi(x))$ имеет непрерывный градиент $g_{\psi_\varepsilon}(\varphi)=\left(g^1_{\psi_\varepsilon}(\varphi), \ldots, g^n_{\psi_\varepsilon}(\varphi)\right)$, который можно представить в виде

$$g_{\psi_\varepsilon}(\varphi)\equiv\operatorname{grad} V_{\psi_\varepsilon}(\varphi)=$$
$$=g_0(\varphi)+\psi_\varepsilon\sum_{i=1}^{m}\left[V_i(\varphi-c_i)+|V_i(\varphi)-c_i|\right]g_i(\varphi). \tag{3.30}$$

По теореме 5 для того чтобы $\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x)$ было решением задачи 9, необходимо (а в случае выпуклости функционалов $V_0(\varphi)$, $V_i(\varphi)$ $(i=1, \ldots, m)$ и достаточно), чтобы

$$\min_{\varphi\in M_1}\int_R\left[g_{\psi_\varepsilon}\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x)\right), \varphi(x)-\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x)\right]dx=0. \tag{3.31}$$

В слунае, если для функционала $V_{\psi_\varepsilon}(\varphi(x))$ выполнено условие сильной регулярности, то операторное уравнение для оптимального решения $\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x)$ задачи 9 будет иметь вид

$$\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x) = \overline{\Phi}\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x),\ x\right), \tag{3.32}$$

где

$$\overline{\Phi}_j\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x),\ x\right) = \frac{b_j}{2}\left[1 - \operatorname{sign} g^j_{\psi_\varepsilon}\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x)\right)\right] \quad (j = 1, \ldots, n).$$

В общем случае (см. § 2 этой главы) операторное уравнение будет иметь вид

$$\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x) = \Phi\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x),\ x\right), \tag{3.33}$$

где оператор $\Phi\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x),\ x\right) = \left(\Phi_1\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x),\ x\right), \ldots, \Phi_n\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x),\ x\right)\right)$ определяется следующим образом:

$$\Phi_j\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x),\ x\right) = \begin{cases} \widetilde{\Phi}_j\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x),\ x\right), & \text{если } g^j_{\psi_\varepsilon}\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x)\right) \neq 0, \\ \varphi^0_{j\psi_\varepsilon} + g^j_{\psi_\varepsilon}\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x)\right); & \text{если } g^j_{\psi_\varepsilon}\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x)\right) = 0, \end{cases}$$

или в общей форме

$$\Theta\left(\varphi^0_{\psi_\varepsilon}(x),\ x\right) = 0, \tag{3.34}$$

где оператор Θ определяется аналогично тому, как это сделано в конце § 2 этой главы.

§ 4. ПОЛУЧЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ УЧЕТЕ ОГРАНИЧЕНИЙ ВТОРОГО ТИПА ПУТЕМ СВЕДЕНИЯ ИСХОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ К МИНИМАКСНОЙ

В этом параграфе на основе условий оптимальности для решения минимаксной задачи рассматриваются вопросы получения операторных уравнений для решения $\varphi^0(x)$ вариационной задачи при наличии ограничений первого и второго типов. При этом ограничения второго типа сперва учитываются путем сведения задачи 1 к минимаксной задаче. Подробно рассмотрен случай линейных функционалов $V_i(\varphi)$ $(i = 1, \ldots, m)$, после чего дается краткое обобщение на общий случай.

Рассмотрим вариационную задачу 1, в которой требуется найти вектор-функцию $\varphi^0(x)$, доставляющую минимальное значение функционалу $V_0(\varphi)$, т. е.

$$V_0(\varphi^0(x)) = \min_{\varphi(x) \in M_1} V_0(\varphi(x)), \tag{3.35}$$

и удовлетворяющую ограничениям

$$V_i(\varphi^0(x)) \leqslant c_i \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{3.36}$$

Будем предполагать, что функционал $V_0(\varphi)$ обладает свойством сильной регулярности.

Условия оптимальности вектор-функции $\varphi^0(x)$, минимизирующей функционал $V_0(\varphi)$ без учета ограничений (3.36), имеют вид

$$\min_{\varphi(x)\in M_1} \int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)-\varphi^0(x)]\,dx=0, \tag{3.37}$$

где

$$\operatorname{grad} V_0(\varphi(x))\equiv g_0(\varphi^0(x))=(g_0^1(\varphi^0(x)),\ \ldots,\ g_0^n(\varphi^0(x))).$$

Вектор-функция $\varphi^*(x)$, доставляющая минимум (по φ) линейного функционала (3.37), в силу сильной регулярности определяется следующим образом:

$$\varphi_j^*(x)=\frac{b_j}{2}\,[1-\operatorname{sign} g_0^j(\varphi^0(x))] \quad (j=1,\ \ldots,\ n). \tag{3.38}$$

По теореме 16 оптимальную вектор-функцию $\varphi^0(x)$ можно искать как решение операторного уравнения

$$\varphi(x)=\overline{\Phi}(\varphi(x),\ x), \tag{3.39}$$

где оператор $\overline{\Phi}=(\overline{\Phi}_1,\ \ldots,\ \overline{\Phi}_n)$ имеет вид

$$\overline{\Phi}_j(\varphi(x),\ x)=\frac{b_j}{2}\,[1-\operatorname{sign} g_0^j(\varphi(x))] \quad (j=1,\ \ldots,\ n). \tag{3.40}$$

Предположим, что вектор-функция $\varphi^{00}(x)$ как решение операторного уравнения (3.39) нам известна. Вычислим значения функционалов $V_i(\varphi^{00}(x))$ $(i=1,\ \ldots,\ m)$:

$$V_1(\varphi^{00}(x))=c_1^0,\ V_2(\varphi^{00}(x))=c_2^0,\ \ldots,\ V_m(\varphi^{00}(x))=c_m^0. \tag{3.41}$$

Будем теперь предполагать, что вектор-функция $\varphi^0(x)$ должна удовлетворять условиям (3.36).

Если при этом окажется, что

$$c_1^0\leqslant c_1,\ \ldots,\ c_m^0\leqslant c_m, \tag{3.42}$$

то эта вектор-функция $\varphi^{00}(x)$ — искомое решение $\varphi^0(x)$ вариационной задачи 1. Если хотя бы одно из неравенств (3.42) не выполнено, то в условии (3.37) необходимо еще учесть дополнительно условия (3.36).

Предположим, что хотя бы одно из неравенств (3.42) не имеет места. Тогда вместо (3.37) получим

$$\min_{\substack{\varphi(x)\in M_1\\ V_i(\varphi(x))<c_i\\ (i=1,\ \ldots,\ m)}} \int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)-\varphi^0(x)]\,dx=0. \tag{3.43}$$

Обозначим через $L(\varphi(x))$ линейный (по $\varphi(x)$) функционал

$$L(\varphi(x))=\int_R [g_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)]\,dx, \tag{3.44}$$

тогда вектор-функция $\varphi^{**}(x)$, доставляющая минимум линейного функционала $L(\varphi(x))$, по теореме 9 определяется из решения следующей минимаксной задачи:

$$\min_{\varphi(x)\in M_1}\max_{\psi\geqslant 0}\{L(\varphi(x))+[\psi,\ V(\varphi(x))-c]\},\tag{3.45}$$

где $\psi=(\psi_1,\ \ldots,\ \psi_n)$, $\psi_i\geqslant 0$ $(i=1,\ \ldots,\ m)$, $V(\varphi(x))-c=$ $=(V_i(\varphi(x))-c_1,\ \ldots,\ V_m(\varphi(x))-c_m)$.

При этом должно быть выполнено условие

$$[\psi^0,\ V(\varphi^{**}(x))-c]=0,\tag{3.46}$$

где пара $\{\psi^0,\ \varphi^{**}(x)\}$ является седловой точкой для функционала Лагранжа

$$h_z(\varphi(x),\ \psi)=L(\varphi(x))+[\psi,\ V(\psi(x))-c].\tag{3.47}$$

Обозначим через

$$g_\psi(\varphi(x))=g_0(\varphi(x))+\sum_{i=1}^{m}\psi_i g_i(\varphi(x))\tag{3.48}$$

градиент функционала $h_L(\varphi(x),\ \psi)$ в (3.47), где $g_0(\varphi(x))$ — градиент функционала $V_0(\varphi)$, $g_i(\varphi(x))$ — градиент функционала $V_i(\varphi(x))$.

$$g_i(\varphi(x))=\left(\frac{\partial V_i(\varphi(x))}{\partial\varphi_1},\ \ldots,\ \frac{\partial V_i(\varphi(x))}{\partial\varphi_n}\right)\ (i=1,\ \ldots,\ m).$$

Используя условия оптимальности, получим

$$\min_{\varphi\in M_1}\max_{\psi\geqslant 0}\left\{\int_R[g_\psi(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)-\varphi^0(x)]\,dx+\right.$$
$$\left.+[V(\varphi^0(x))-c,\ \psi-\psi^0]\right\}=0.\tag{3.49}$$

Вектор-функция $\varphi^{**}(x)$ и постоянные числа ψ_i^0 как решение (3.49) должны (согласно теореме 9) удовлетворять дополнительному условию

$$\int_R[\psi^0,\ f(x,\ \varphi^{**}(x))]\,dx-[\psi^0,\ c]=0,\tag{3.50}$$

где

$$f(x,\ \varphi^{**}(x))=(f_1(x,\ \varphi^{**}(x)),\ \ldots,\ f_m(x,\ \varphi^{**}(x))).$$

Будем предполагать, что выполнено условие сильной регулярности, т. е. при $x\in R$

$$g_0^j(\varphi^0(x))+\sum_{i=1}^{m}\psi_i^0 g_i^j(\varphi^0(x))\neq 0\quad(j=1,\ \ldots,\ n)$$

за исключением множества меры нуль; тогда если $\varphi^{**}(x)$ и ψ^0 — решение задачи (3.49), то

$$\varphi_j^{**}(x)=\frac{b_j}{2}\left\{1-\operatorname{sign}\left[g_0^j(\varphi^0(x))+\sum_{i=1}^{m}\psi_i^0 g_i^j(\varphi^0(x))\right]\right\}$$
$$(j=1,\ \ldots,\ n). \tag{3.51}$$

Для определения чисел $\psi_1^0, \ldots, \psi_m^0$, как и в предыдущем случае, возможны $\left(2+\sum_{l=1}^{m-1}C_m^l\right)=2^m$ взаимоисключающих случая.

В случае, если $\psi_{k_1}^0\neq 0,\ \psi_{k_2}^0\neq 0,\ \ldots,\ \psi_{k_s}^0\neq 0\quad (1\leqslant s\leqslant m)$, $\psi_l^0=0$ при $l\neq k_1, \ldots, k_s$, где $k_1<k_2<\ldots<k_s$ — целые числа из $\{1, 2, \ldots, m\}$, получим

$$\left.\begin{aligned}&\varphi^0(x)=\overline{\Phi}(\varphi^0(x),\ \psi^0,\ x),\\&\psi_l^0=0\quad (l\neq k_1,\ \ldots,\ k_s),\\&V_{k_i}(\varphi^0(x))=c_{k_i}\quad (i=1,\ \ldots,\ s),\end{aligned}\right\} \tag{3.52}$$

где оператор $\overline{\Phi}=(\overline{\Phi}_1, \ldots, \overline{\Phi}_n)$ определяется в виде

$$\overline{\Phi}_j(\varphi^0(x),\ \psi^0,\ x)=\frac{b_j}{2}\left\{1-\operatorname{sign}\left[g_0^j(\varphi^0(x))+\sum_{i=1}^{m}\psi_i^0 g_i^j(\varphi^0(x))\right]\right\}$$
$$(j=1,\ \ldots,\ n). \tag{3.53}$$

Систему уравнений (3.52) будем записывать в виде

$$\Theta_{k_1+k_2+\ldots+k_s}(\varphi^0(x),\ \psi^0,\ x)=0. \tag{3.54}$$

На базе исследований, проведенных в конце § 2 данной главы, эти результаты могут быть обобщены на случай отсутствия сильной регулярности. Вывод операторных уравнений в этом случае опускаем.

§ 5. СГЛАЖИВАНИЕ ОПЕРАТОРА

Полученные в предыдущих двух параграфах операторные уравнения для оптимальной вектор-функции $\varphi^0(x)$ содержат операторы, не являющиеся гладкими. Численные методы решения такого класса операторных уравнений разработаны менее численных методов решения гладких операторных уравнений. Поэтому естественно попытаться применить методы решения операторных уравнений с гладкими операторами к решению уравнений с негладкими операторами на основе сглаживания операторов. Решение операторного уравнения после сглаживания оператора, вообще говоря, обладает свойствами гладкости

в большей степени по сравнению с решением исходного операторного уравнения. Возможность такого подхода обусловлена тем, что на практике вместо точного решения задачи используется приближенное решение. В книге этот подход основан на введении понятия ε-оптимального решения вариационной задачи, которое может принадлежать более узкому классу вектор-функций по сравнению с классом вектор-функций, к которому принадлежит искомое оптимальное решение вариационной задачи. Впервые эта идея была сформулирована и применена к задаче терминального управления в работе [1]. Другой подход — метод регуляризации в применении к оптимальным процессам управления — предложен в работе [23]. При решении практических задач сглаживание операторных уравнений может быть использовано без значительных изменений физической сущности задачи.

Рассмотрим вариационную задачу 10 определения вектор-функции $\varphi^0(x) \in M_1$, удовлетворяющей условию

$$V(\varphi^0(x)) = \min_{\varphi(x) \in M_1} V(\varphi(x)). \tag{3.55}$$

Условием оптимальности $\varphi^0(x)$ как решения задачи (3.55) является условие

$$\min_{\varphi(x) \in M_1} \int_R [g(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx = 0. \tag{3.56}$$

Если функционал $V(\varphi(x))$ обладает свойством сильной регулярности, то из (3.56) вектор-функция $\varphi^0(x)$ определяется как решение операторного уравнения

$$\varphi_j^0(x) = \frac{b_j}{2}[1 - \operatorname{sign} g^j(\varphi^0(x))] \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{3.57}$$

или в соответствии с введенными ранее обозначениями

$$\varphi^0(x) = \overline{\Phi}(\varphi^0(x),\ x), \tag{3.58}$$

где $\overline{\Phi}$ — негладкий оператор. Поскольку обоснование методов решения операторных уравнений обычно требует гладкость оператора $\overline{\Phi}$, то далее предлагается один метод получения гладкого оператора вместо $\overline{\Phi}$, который обозначен через $\overline{\Phi}_\varepsilon$.

Вектор-функцию $\varphi_\varepsilon^0(x)$ будем называть ε-оптимальным решением задачи 10, если

$$V(\varphi_\varepsilon^0(x)) \leqslant \min_{\varphi(x) \in M_1} V(\varphi(x)) + \varepsilon, \tag{3.59}$$

где $\varepsilon > 0$ — некоторое малое число. Ясно, что ε-оптимальное решение $\varphi_\varepsilon^0(x)$ задачи 10 неединственно. Это позволяет надеяться, что среди ε-оптимальных решений найдется непрерывное.

Рассмотрим множество N_1 вектор-функций $\eta(x)=(\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x)) \in L_{2;n}(R)$ таких, что $0 \leqslant \eta_j(x) \leqslant b_j$ $(j=1, \ldots, n)$, т. е. $N_1=M_1$. Определим вектор-функцию $\omega(x)=(\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x), \omega_{n+1}(x), \ldots, \omega_{2n}(x))$ как пару $\{\varphi(x), \eta(x)\}$, $\omega(x) \in M_1 \times M_1$. Далее рассмотрим множество $\Omega_1 \subset M_1 \times M_1$, $\Omega_1=\bigcup\limits_{x \in R} \Omega_1(x)$, вектор-функций $\omega(x)$, удовлетворяющих условию (см. рис. 3)

$$\Omega_1(x)=\left\{\left(\varphi_j(x)-\frac{b_j}{2}\right)^2+\left(\eta_j(x)-\frac{b_j}{2}\right)^2 \leqslant \frac{b_j^2}{4},\ (j=1, \ldots, n)\right\}. \tag{3.60}$$

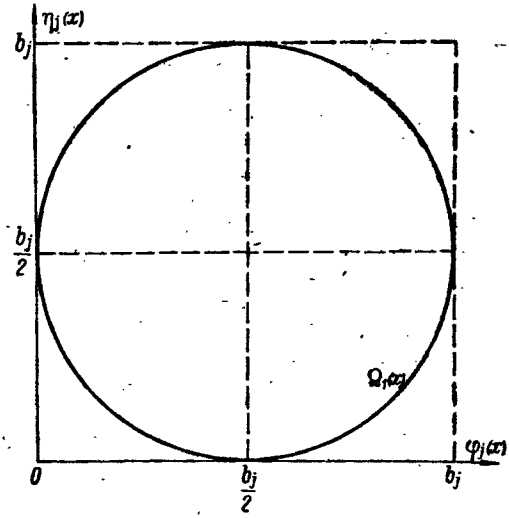

Рис. 3

Множество Ω_1 обладает следующими свойствами:

1) если $\omega(x)=\{\varphi(x), \eta(x)\} \in \Omega_1(x)$, то $\varphi(x) \in M_1$, $\eta(x) \in M_1$;

2) если $\varphi(x) \in M_1$, то существует $\eta(x) \in M_1$ такое, что $\{\varphi(x), \eta(x)\} \in \Omega_1(x)$;

3) если $\varphi(x) \in M_1$, то $\left\{\varphi(x), \frac{b}{2}\right\} \in \Omega_1(x)$.

Введем в рассмотрение следующую вариационную задачу, которую будем называть ε-задачей.

Задача 11 (ε-задача)

Для заданного $\varepsilon>0$ найти вектор-функцию $\omega_\varepsilon^0(x)=\{\varphi_\varepsilon^0(x), \eta_\varepsilon^0(x)\} \in \Omega_1$ такую, что

$$V_\varepsilon(\omega_\varepsilon^0(x))=\min_{\omega(x) \in \Omega_1} V_\varepsilon(\omega(x)), \tag{3.61}$$

где

$$V_\varepsilon(\omega(x)) = V(\varphi(x)) + \\ + \frac{2\varepsilon}{\mu(R)\,n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{b_j} \int_R \left(\eta_j(x) - \frac{b_j}{2}\right) dx. \qquad (3.62)$$

Решение ε-задачи является ε-оптимальным решением задачи 10, что устанавливается в следующей теореме.

Теорема 18

Если $\omega_\varepsilon^0(x) = \{\varphi_\varepsilon^0(x),\ \eta_\varepsilon^0(x)\}$ — *решение* ε-*задачи* 11, *то* $\varphi_\varepsilon^0(x)$ — ε-*оптимальное решение задачи* 10.

Доказательство. Пусть $\omega_\varepsilon^0(x) = \{\varphi_\varepsilon^0(x),\ \eta_\varepsilon^0(x)\}$ — решение ε-задачи 11. Тогда очевидно, что

$$V_\varepsilon(\omega_\varepsilon^0(x)) = \min_{\omega(x)\in\Omega_1} V_\varepsilon(\omega(x)) \leqslant \min_{\left\{\varphi(x),\ \frac{b}{2}\right\}\in\Omega_1} V_\varepsilon\left(\left\{\varphi(x),\ \frac{b}{2}\right\}\right) = \\ = \min_{\varphi(x)\in M_1} V(\varphi(x)). \qquad (3.63)$$

Далее имеем

$$V(\varphi_\varepsilon^0(x)) = V_\varepsilon(\omega_\varepsilon^0(x)) - \frac{2\varepsilon}{\mu(R)\,n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{b_j} \int_R \left(\eta_{\varepsilon j}^0(x) - \frac{b_j}{2}\right) dx \leqslant \\ \leqslant \min_{\varphi(x)\in M_1} V(\varphi(x)) + \varepsilon, \qquad (3.64)$$

что и означает ε-оптимальность $\varphi_\varepsilon^0(x)$.

В следующей теореме получено операторное уравнение для $\omega_\varepsilon^0(x)$ на основе условий оптимальности для ε-задачи 11.

Теорема 19

Решение ε-*задачи* 11 *определяется из операторного уравнения*

$$\omega_\varepsilon^0(x) = \Phi_\varepsilon(\omega_\varepsilon^0(x),\ x), \qquad (3.65)$$

или в развернутой форме

$$\varphi_\varepsilon^0(x) = \overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0(x),\ x), \qquad (3.66)$$

$$\eta_\varepsilon^0(x) = \hat{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0(x),\ x), \qquad (3.67)$$

где

$$\overline{\Phi}_{\varepsilon j}(\varphi_\varepsilon^0(x),\ x) = \frac{b_j}{2}\left\{1 - \frac{g^j(\varphi_\varepsilon^0(x))}{\sqrt{\left[g^j(\varphi_\varepsilon^0(x))\right]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2(\mu(R))^2 b_j^2}}}\right\} \\ (j = 1,\ \ldots,\ n), \qquad (3.68)$$

$$\hat{\Phi}_{\varepsilon j}(\varphi_\varepsilon^0(x),\ x)=\frac{\varepsilon}{n\mu(R)\sqrt{[g^j(\varphi_\varepsilon^0(x))]^2+\frac{4\varepsilon^2}{n^2(\mu(R))^2 b_j^2}}}$$

$$(j=1,\ \ldots,\ n). \tag{3.69}$$

Доказательство. Условие оптимальности для ε-задачи 11 имеет вид

$$\min_{\omega(x)\in\Omega_1}\int_R [\operatorname{grad} V_\varepsilon(\omega_\varepsilon^0(x)),\ \omega(x)-\omega_\varepsilon^0(x)]\,dx=0, \tag{3.70}$$

где

$$\operatorname{grad} V_\varepsilon(\omega(x))=\left\{g(\varphi(x)),\ \frac{2\varepsilon}{n\mu(R)\,b}\right\},\ \frac{1}{b}=\left(\frac{1}{b_1},\ \ldots,\ \frac{1}{b_n}\right). \tag{3.71}$$

Выражение (3.70) можно представить в виде

$$\min_{\substack{\left(\varphi_i(x)-\frac{b_i}{2}\right)^2+\left(\eta_i(x)-\frac{b_i}{2}\right)^2<\frac{b_i^2}{2}\\(i=1,\ \ldots,\ m)}}\left\{\sum_{j=1}^{n}\int_R\left[g^j(\varphi_\varepsilon^0(x))(\varphi_{\varepsilon j}(x)-\varphi_{\varepsilon j}^0(x))+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2\varepsilon}{n\mu(R)\,b_j}(\eta_{\varepsilon j}(x)-\eta_{\varepsilon j}^0(x))\right]dx\right\}=0. \tag{3.72}$$

Почти для всех $x\in R$ из (3.72) получим

$$\min_{\left(\varphi_j(x)-\frac{b_j}{2}\right)^2+\left(\eta_j(x)-\frac{b_j}{2}\right)^2<\frac{b_j^2}{4}}\left\{g^j(\varphi_\varepsilon^0(x))(\varphi_{\varepsilon j}(x)-\varphi_{\varepsilon j}^0(x))+\right.$$

$$\left.+\frac{2\varepsilon}{n\mu(R)\,b_j}(\eta_{\varepsilon j}(x)-\eta_{\varepsilon j}^0(x))\right\}=0\quad(j=1,\ \ldots,\ n). \tag{3.73}$$

Поскольку линейная функция на строго выпуклом множестве достигает своего наименьшего значения на границе этого множества, то задача (3.73) сводится к следующей:

$$\min_{\left(\varphi_j(x)-\frac{b_j}{2}\right)^2+\left(\eta_j(x)-\frac{b_j}{2}\right)^2=\frac{b_j^2}{4}}\left\{g^j(\varphi^0(x))(\varphi_{\varepsilon j}(x)-\varphi_{\varepsilon j}^0(x))+\right.$$

$$\left.+\frac{2\varepsilon}{n\mu(R)\,b_j}(\eta_{\varepsilon j}(x)-\eta_{\varepsilon j}^0(x))\right\}\quad(j=1,\ \ldots,\ n). \tag{3.74}$$

Применяя к решению этой задачи метод множителей Лагранжа, получим доказываемые равенства (3.68)—(3.69).

Из вида операторов $\bar{\Phi}_\varepsilon$ и $\hat{\Phi}_\varepsilon$ по формулам (3.68) и (3.69) следует их гладкость, если градиент $g(\varphi(x))$ функционала $V(\varphi(x))$ в задаче 10 достаточно гладкий. Кроме того, операторы $\bar{\Phi}_\varepsilon$ и $\hat{\Phi}_\varepsilon$ не зависят от $\eta_\varepsilon^0(x)$. Так как нас интересует решение $\varphi_\varepsilon^0(x)$ задачи 11 (ε-задачи), то будем рассматривать уравнение (3.66) как операторное уравнение для нахождения ε-оптимальных решений задачи 10, причем оператор $\bar{\Phi}_\varepsilon$ гладкий.

Изложим теперь другой подход к получению сглаженного операторного уравнения, который основан на формальной замене оператора $\overline{\Phi}$ для вариационной задачи 10 оператором $\overline{\Phi}_{\varepsilon,\delta}$. Оператор $\overline{\Phi}_{\varepsilon,\delta}(\varphi(x), x)$ можно считать в какой-то мере сглаженным для оператора $\overline{\Phi}(\varphi(x), x)$. При этом обоснование такого подхода опускается и этот метод приводится лишь потому, что на его основе могут быть получены удовлетворительные результаты для решения конкретных задач оптимизации.

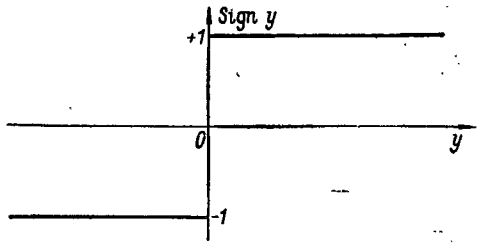

Рис. 4

Изложим идею этого метода. Рассмотрим оператор $\overline{\Phi}(\varphi^0(x), x)$ в (3.57), (3.58). Оператор $\operatorname{sign} g(\varphi^0(x)) = (\operatorname{sign} g^1(\varphi^0(x)), \ldots, \operatorname{sign} g^n(\varphi^0(x))$, входящий в оператор $\overline{\Phi}$, имеет вид, показанный на рис. 4.

Для сглаживания скалярной функции $\operatorname{sign} y$ подберем такую функцию $F^0_{\varepsilon,\delta}(y)$ из класса $C_{\varepsilon,\delta}$ функций $F_{\varepsilon,\delta}(y)$, которые удовлетворяют условиям

а) $F_{\varepsilon,\delta}(-y) = -F_{\varepsilon,\delta}(y)$, $F_{\varepsilon,\delta}(0) = 0$;

б) $|F_{\varepsilon,\delta}(y)| \leqslant 1$, $F_{\varepsilon,\delta}(\varepsilon) = 1 - \delta$;

в) $\lim\limits_{y \to +\infty} F_{\varepsilon,\delta}(y) = 1$, $\lim\limits_{y \to -\infty} F_{\varepsilon,\delta}(y) = -1$;

г) $F_{\varepsilon,\delta}(y_1) < F_{\varepsilon,\delta}(y_2)$, если $y_1 < y_2$;

д) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\{ \lim\limits_{\delta \to 0} \int^{\infty} [1 - F_{\varepsilon,\delta}(y)]\, dy \right\} = 0.$

Кроме того, класс функций $C_{\varepsilon,\delta}$ характеризуется свойствами гладкости. Возможный вид функции $F_{\varepsilon,\delta}(y)$ из класса $C_{\varepsilon,\delta}$ представлен на рис. 5.

В качестве функции $F^0_{\varepsilon,\delta}(y)$ (см. рис. 6) возьмем интеграл от плотности нормального распределения вероятности случайной величины, математическое ожидание которой равно нулю, а среднеквадратическое отклонение σ определяется через ε и δ,

$$F^0_{\varepsilon,\delta}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\, dt, \tag{3.75}$$

где $\sigma=\sigma(\varepsilon, \delta)$ определим как функцию от ε и δ из уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\int_0^{\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt=1-\delta. \tag{3.76}$$

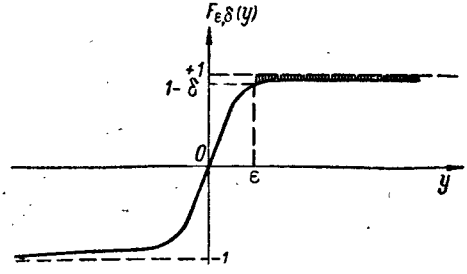

Рис. 5

Сглаженное операторное уравнение можно тогда представить в виде

$$\varphi^0_{\varepsilon j}(x)=\frac{b_j}{2}\{1-F^0_{\varepsilon,\delta}[g^j(\varphi^0_{\varepsilon}(x))]\} \quad (j=1, \ldots, n). \tag{3.77}$$

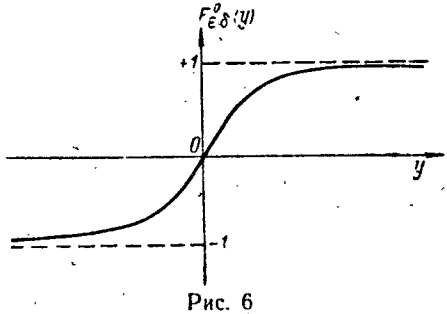

Рис. 6

Для решения $\varphi^0_{\varepsilon,\delta}(x)$ операторного уравнения (3.77) будем иметь при естественных обозначениях для векторной формы записи

$$\varphi^0_{\varepsilon,\delta}(x)=\frac{b}{2}\{1-F^0_{\varepsilon,\delta}[g(\varphi^0_{\varepsilon,\delta}(x))]\}=\overline{\Phi}_{\varepsilon,\delta}(\varphi^0_{\varepsilon,\delta}(x)). \tag{3.78}$$

Из вида (3.75) получим

$$\varphi^0_{\varepsilon,\delta,j}(x)=$$

$$=\frac{b_j}{2}\left\{1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma(\varepsilon,\delta)}\int_0^{g^j(\varphi^0_{\varepsilon,\delta}(x))} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2(\varepsilon,\delta)}}\,dt\right\} \quad (j=1, \ldots, n). \tag{3.79}$$

Для приближенного определения $\sigma(\varepsilon, \delta)$ может быть использована следующая процедура. Вычисляя интеграл (3.76) по теореме о среднем значении интеграла в точке $t=\frac{\varepsilon}{2}$ и производя замену $\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}\sigma}=z$, получим уравнение относительно z

$$\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}=\frac{\alpha}{z}, \tag{3.80}$$

где $\alpha=\frac{1-\delta}{4}$. Выражение в левой части (3.80) является плот-

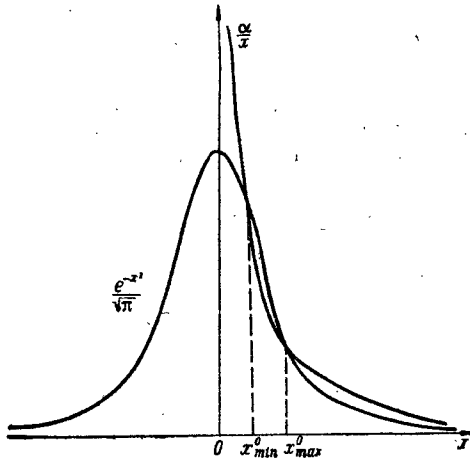

Рис. 7

ностью нормального распределения случайной величины с математическим ожиданием, равным нулю, и среднеквадратическим отклонением, равным $\frac{1}{\sqrt{2}}$, а выражение в правой части (3.80) суть гипербола. Решение (3.80) может быть легко найдено по таблице значений плотности нормального распределения и графически (рис. 7, $x \sim z$). Окончательное значение $\sigma(\varepsilon, \delta)$ определяется как наибольший корень (3.80). Для более грубой оценки корней (3.80) можно воспользоваться уравнением

$$z^2-\beta z+1=0, \quad \beta=\frac{4}{\sqrt{\pi}(1-\delta)}, \tag{3.81}$$

наибольший корень которого равен

$$z^0_{\max}=\frac{\beta}{2}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2-1}. \tag{3.82}$$

В качестве другого примера сглаживания функции $\operatorname{sign} y$ можно было бы взять $\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} y$ и другие специальные функции.

В заключение этого параграфа отметим, что метод сглаживания операторных уравнений фактически позволяет сводить решение неклассических вариационных задач к решению операторных уравнений с гладкими операторами, для которых имеется обширная теория методов численного решения. Искусство исследователя заключается здесь в том, чтобы заменить оператор $\overline{\Phi}$ оператором $\overline{\Phi}_\varepsilon$ таким образом, чтобы оператор $\overline{\Phi}_\varepsilon$ обладал различными свойствами, которые требуются и желательны для использования тех или иных методов решения операторных уравнений. Как правило, для сходимости и оценки скоростей сходимости численных методов решения операторных уравнений используется гладкость оператора $\overline{\Phi}_\varepsilon$.

В следующей главе формулируются некоторые методы численного решения вариационных здач, причем некоторые из них основаны именно на методах решения гладких операторных уравнений.

ГЛАВА IV

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В данной главе рассматриваются некоторые методы численного решения неклассических вариационных задач. Все многообразие численных методов решения разбивается на два больших класса.

К первому классу можно отнести численные методы решения вариационных задач при наличии лишь ограничений первого типа без предварительного применения условий оптимальности и вывода операторных уравнений. Одним из методов этого класса является градиентный метод условного наискорейшего спуска который излагается в § 1 данной главы. При этом условия оптимальности используются для проверки пригодности полученного решения.

Ко второму классу методов можно отнести методы решения операторных уравнений для вектор-функции $\varphi^0(x)$ — решения вариационной задачи. В этой главе исследуются следующие методы, которые можно отнести ко второму классу:

а) градиентные (итерационные и непрерывные) методы спуска;

б) методы дифференцирования по параметру, сводящиеся к решению дифференциальных уравнений;

в) аналитические методы.

В силу того, что эти методы весьма многочисленны и их обоснование требует более тщательного и глубокого анализа численных методов вычислительной математики вообще, здесь приводится только краткое изложение методов численного решения неклассических вариационных задач.

Несмотря на обширное использование этих методов для решения классических вариационных задач, до сих пор не были разработаны вопросы пригодности их к решению неклассических вариационных задач.

В этой главе для решения неклассических вариационных задач помимо градиентных методов спуска исследуется большой класс числеиных методов таких, как метод дифференцирования по

параметру, методы Ритца и Бубнова-Галеркина, метод сеток и др.

В силу ограниченности объема многие широко известные численные методы (методы Ньютона, Гаусса—Зайделя, ортогональных проекций и др.) не рассматриваются. Несколько иное направление в методах численного решения рассмотрено в работе [14].

§ 1. ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД УСЛОВНОГО НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

В данном параграфе дается формулировка и обоснование градиентного метода условного наискорейшего спуска для решения вариационной задачи без предварительного применения условий оптимальности и вывода операторного уравнения.

Рассмотрим вариационную задачу 10, в которой требуется найти вектор-функцию $\varphi^0(x) \in M_1$, минимизирующую выпуклый функционал $V(\varphi(x))$, т. е.

$$V(\varphi^0(x)) = \min_{\varphi(x) \in M_1} V(\varphi(x)). \tag{4.1}$$

Сущность метода условного наискорейшего спуска заключается в том, что вместо решения вариационной задачи (4.1) решается ряд вспомогательных задач, структура которых одинакова, и каждый раз уточняются полученные решения.

Алгоритм метода условного наискорейшего спуска формулируется следующим образом.

1. Возьмем в качестве первого приближения любую вектор-функцию $\varphi^1(x) \in M_1$; если при этом окажется, что

$$\operatorname{grad} V(\varphi^1(x)) = g(\varphi(x))|_{\varphi(x)=\varphi^1(x)} = 0, \tag{4.2}$$

то $\varphi^1(x)$ — оптимальная вектор-функция задачи (4.1) и процесс нахождения решения (4.1) окончен.

2. В противном случае обозначим через $\bar{\varphi}^1(x) \in M_1$ вектор-функцию, которая доставляет наименьшее возможное значение линейному функционалу

$$\int_R [g(\varphi^1(x)),\ \varphi(x)]\, dx, \tag{4.3}$$

$$\int_R [g(\varphi^1(x),\ \bar{\varphi}^1(x)]\, dx = \min_{\varphi(x) \in M_1} \int_R [g(\varphi^1(x)),\ \varphi(x)]\, dx. \tag{4.4}$$

Если предположить, что функционал $V(\varphi)$ обладает свойством регулярности, то $\bar{\varphi}^1(x)$ определяется в виде

$$\bar{\varphi}_j^1(x) = \frac{b_j}{2}[1 - \operatorname{sign} g^j(\varphi^1(x))] \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{4.5}$$

При этом, если окажется, что

$$\int_R [g(\varphi^1(x)),\ \bar{\varphi}^1(x) - \varphi^1(x)]\, dx = 0, \tag{4.6}$$

то вектор-функция $\varphi^1(x)$ является решением задачи (4.1) (см. теорему 20) и процесс нахождения оптимальной вектор-функции $\varphi^0(x)$ для задачи (4.1) закончен.

3. В противном случае вектор-функцию $\varphi^2(x)$ (второе приближение) определяем следующим образом:

$$\varphi^2(x) = \varphi^1(x) + \lambda_1 (\bar{\varphi}^1(x) - \varphi^1(x)), \tag{4.7}$$

где вещественное число $\lambda_1 \geqslant 0$ находится из условия

$$V(\varphi^1(x) + \lambda_1 (\bar{\varphi}^1(x) - \varphi^1(x))) = \\ = \min_{\lambda \in [0,1]} V(\varphi^1(x) + \lambda (\bar{\varphi}^1(x) - \varphi^1(x))). \tag{4.8}$$

Из (4.7) следует, что $\varphi^2(x) \in M_1$, а из (4.8)

$$V(\varphi^2(x)) \leqslant V(\varphi^1(x)). \tag{4.9}$$

4. Пусть вектор-функция $\varphi^k(x) \in M_1$ (k-е приближение) уже определена. Если вектор-функция $\varphi^k(x)$ удовлетворяет условию

$$g(\varphi(x))|_{\varphi(x)=\varphi^k(x)} = 0, \tag{4.10}$$

то $\varphi^k(x)$ — решение задачи (4.1) и процесс нахождения оптимальной вектор-функции $\varphi_0(x)$ окончен.

5. В противном случае определим вспомогательную вектор-функцию $\bar{\varphi}^k(x)$ по формуле

$$\bar{\varphi}_i^k(x) = \frac{b_j}{2} [1 - \operatorname{sign} g^j(\varphi^k(x))] \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{4.11}$$

Вспомогательная вектор-функция $\bar{\varphi}^k(x)$ доставляет наименьшее по $\varphi(x) \in M_1$ возможное значение линейному функционалу

$$\int_R [g(\varphi^k(x)), \ \varphi(x)]\, dx. \tag{4.12}$$

При этом если окажется, что

$$\int_R [g(\varphi^k(x)), \ \bar{\varphi}^k(x) - \varphi^k(x)]\, dx = 0, \tag{4.13}$$

то вектор-функция $\varphi^k(x)$ является решением задачи (4.1) (см. теорему 20) и процесс нахождения оптимальной вектор-функции $\varphi^0(x)$ для задачи (4.1) закончен.

6. В противном случае вектор-функцию $\varphi^{k+1}(x)$ — $(k+1)$-е приближение определяем следующим образом:

$$\varphi^{k+1}(x) = \varphi^k(x) + \lambda_k (\bar{\varphi}^k(x) - \varphi^k(x)), \tag{4.14}$$

где вещественное число $\lambda_k \geqslant 0$ находится из условия

$$V(\varphi^k(x) + \lambda_k (\bar{\varphi}^k(x) - \varphi^k(x))) = \min_{\lambda \in [0,1]} V(\varphi^k(x) + \lambda (\bar{\varphi}^k(x) - \varphi^k(x))). \tag{4.15}$$

Из (4.14) следует, что $\varphi^{k+1}(x) \in M_1$, а из (4.15)

$$V(\varphi^{k+1}(x)) \leqslant V(\varphi^k(x)). \tag{4.16}$$

Таким образом, можно построить две последовательности вектор-функций $\{\varphi^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\bar{\varphi}^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, причем

$$V(\varphi^{k+1}(x)) \leqslant V(\varphi^k(x)). \tag{4.17}$$

Из формулировки метода следует, что если при каком-нибудь конечном целом $k \geqslant 0$ имеет место равенство (4.10) или (4.13), то $\varphi^k(x)$ — оптимальная вектор-функция (т. е. решение задачи (4.1)) и метод сходится.

Будем теперь предполагать, что процесс нахождения оптимальной вектор-функции $\varphi^0(x)$ в задаче (4.1) по формулам (4.14) бесконечен. Прежде чем переходить к доказательству сходимости метода, докажем справедливость следующих двух теорем.

Теорема 20

Пусть функционал $V(\varphi)$ выпукл по φ и $\varphi^0(x)$ — решение задачи (41). *Тогда для любого целого $k \geqslant 1$ справедлива оценка*

$$0 \geqslant V(\varphi^0(x)) - V(\varphi^k(x)) \geqslant \int_R [g(\varphi^k(x)),\ \bar{\varphi}^k(x) - \varphi^k(x)]\, dx. \tag{4.18}$$

Доказательство теоремы следует из того, что функционал $V(\varphi)$ выпукл по φ и из неравенства

$$V(\varphi^0(x)) - V(\varphi^k(x)) \geqslant \int_R [g(\varphi^k(x)),\ \varphi^0(x) - \varphi^k(x)]\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\varphi(x) \in M_1} \int_R [g(\varphi^k(x)),\ \varphi(x) - \varphi^k(x)]\, dx =$$

$$= \int_R [g(\varphi^k(x)),\ \bar{\varphi}^k(x) - \varphi^k(x)]\, dx.$$

Заметим, что неравенства (4.18) дают удобную для практики апостериорную оценку «близости» k-го приближения к оптимальному.

Определим диаметр D множества M_1 следующим образом:

$$D = \sup_{\tilde{\varphi}(x),\ \bar{\varphi}(x) \in M_1} \|\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)\|, \tag{4.19}$$

где

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \int_R \varphi_j^2(x)\, dx}.$$

Далее будем предполагать, что существует такое вещественное число $m > 0$, $m < +\infty$, что

$$[G(\varphi(x))\, z(x),\ z(x)] \leqslant m \|z(x)\|^2, \tag{4.20}$$

где $G(\varphi(x))$ — матрица $\left\{\frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial\varphi_j\, \partial\varphi_k}\right\}_{j,\,k=1}^{n}$, из вторых производных функционала $V(\varphi(x))$.

Теорема 21

Имеет место соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \int_R [g(\varphi^k(x)),\ \bar{\varphi}^k(x) - \varphi^k(x)]\, dx = 0. \tag{4.21}$$

Доказательство. Так как последовательность $\{V(\varphi^k(x))\}$ не возрастает и ограничена снизу, то существует

$$\lim_{k\to\infty} V(\varphi^k(x)) = \bar{q} > -\infty. \tag{4.22}$$

Из определения вектор-функции $\bar{\varphi}^k(x)$ следует, что для любого целого $k \geqslant 1$

$$\int_R [g(\varphi^k(x)),\ \bar{\varphi}^k(x) - \varphi^k(x)]\, dx \leqslant 0. \tag{4.23}$$

Так как последовательность

$$\left\{\int_R [g(\varphi^k(x)),\ \bar{\varphi}^k(x) - \varphi^k(x)]\, dx\right\}_{k=1}^{\infty}$$

ограничена сверху и снизу, то из нее можно извлечь сходящиеся подпоследовательности.

Предположим, что теорема неверна, т. е. существует такая постоянная $\gamma > 0$ и последовательность индексов $k_r \to \infty$ при $r \to +\infty$, что

$$\lim_{r\to+\infty} \int_R [g(\varphi^{k_r}(x)),\ \bar{\varphi}^{k_r}(x) - \varphi^{k_r}(x)]\, dx = -\gamma < 0, \tag{4.24}$$

причем для достаточно большого $r_0 > 0$ при целых $r \geqslant r_0$ имеет место неравенство

$$\int_R [g(\varphi^{k_r}(x)),\ \bar{\varphi}^{k_r}(x) - \varphi^{k_r}(x)]\, dx \leqslant -\frac{\gamma}{2}. \tag{4.25}$$

Поэтому получим, что для $\lambda \in [0,1]$ (единого для всех индексов $r \geqslant r_0$) выполняются неравенства

$$V(\varphi^{k_r+1}(x)) \leqslant V(\varphi^{k_r}(x) + \lambda(\bar{\varphi}^{k_r}(x) - \varphi^{k_r}(x))) =$$
$$= V(\varphi^{k_r}(x)) + \lambda \int_R [g(\varphi^{k_r}(x)),\ \bar{\varphi}^{k_r}(x) - \varphi^{k_r}(x))]\, dx +$$
$$+ \frac{\lambda^2}{2} \int_R [G(y(x))(\bar{\varphi}^{k_r}(x) - \varphi^{k_r}(x)),\ (\bar{\varphi}^{k_r}(x) - \varphi^{k_r}(x))]\, dx,$$

где обозначено $y(x) = \varphi^{k_r}(x) + \theta\lambda(\bar{\varphi}^{k_r}(x) - \varphi^{k_r}(x))$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Используя (4.19) и (4.20), получим

$$\int_R [G(y(x))(\bar{\varphi}^{k_r}(x) - \varphi^{k_r}(x)), (\bar{\varphi}^{k_r}(x) - \varphi^{k_r}(x))]\, dx \leqslant m\mu(R) D^2. \tag{4.26}$$

Оценим сверху величину D:

$$D \leqslant B\sqrt{\mu(R)\, n}, \tag{4.27}$$

где $B = \max\limits_{j=1,\ldots,n} \{b_j\}$.

Таким образом, имеем, что для любого $\lambda \in [0,1]$ при $r \geqslant r_0$ выполняется неравенство

$$V(\varphi^{k_r+1}(x)) \leqslant V(\varphi^{k_r}(x)) - \frac{\lambda\gamma}{2} + \frac{\lambda^2}{2} nmB(\mu(R))^2.$$

Отсюда при $r \to +\infty$

$$\bar{q} \leqslant \bar{q} + \frac{\lambda}{2}(-\gamma - \lambda nmB(\mu(R))^2); \tag{4.28}$$

(4.28) невозможно при

$$0 < \lambda < \min\left\{1, \frac{\gamma}{nmB(\mu(R))^2}\right\}. \tag{4.29}$$

Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение (о невыполнимости (4.21)) неверно. Теорема доказана полностью.

Таким образом, из этой теоремы следует, что при достаточно больших $k > 0$ удовлетворяется условие оптимальности (полученное в главе I) при решении задачи (4.1) методом условного наискорейшего спуска. Заметим, что при доказательстве теоремы 21 не используется выпуклость $V(\varphi)$.

Теорема 22

Последовательность вектор-функций $\{\varphi^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *„минимизирующая“ для задачи* (4.1), *т. е.*

$$\lim_{k \to +\infty} V(\varphi^k(x)) = V(\varphi^0(x)) = \min_{\varphi(x) \in M_1} V(\varphi(x)). \tag{4.30}$$

Справедливость теоремы 22 следует из оценок (4.18) и равенства (4.21).

На рис. 8 приведена блок-схема решения задачи (4.21) на ЭВМ при использовании изложенного в настоящем параграфе метода условного наискорейшего спуска.

§ 2. НЕПРЕРЫВНЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД СПУСКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данном параграфе рассматривается применение непрерывного градиентного метода спуска для нахождения решения $\varphi_\varepsilon^0(x)$ операторного уравнения

$$\varphi(x) = \bar{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x), x), \tag{4.31}$$

полученного из рассмотрения вариационной задачи 11 (ε-задачи).

Будем предполагать, что существует неособый линейный оператор $D(\varphi(x), x)$ из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$ такой, что:

1) оператор

$$P_\varepsilon(\varphi(x), x) = D(\varphi(x), x) \times \times \left(\varphi(x) - \overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x), x)\right) \quad (4.32)$$

непрерывный и потенциальный;

2) оператор $D(\varphi(x), x)$ положительно определен и ограничен, т. е. существуют такие постоянные числа $m^1 > 0$, $m_2 > 0$, что

$$m_1 \|\varphi(x)\|^2 \leqslant [D(\varphi(x), x)\varphi(x), \varphi(x)] \leqslant \leqslant m_2 \|\varphi(x)\|^2. \quad (4.33)$$

Потенциал $F_\varepsilon(\varphi(x))$ оператора $P_\varepsilon(\varphi(x), x)$ с точностью до постоянного слагаемого имеет вид [7]

$$F_\varepsilon(\varphi(x)) = = \int_0^1 [P_\varepsilon(\theta\varphi(x), x), \varphi(x)]\, d\theta = = \int_0^1 [D(\theta\varphi(x), x)(\theta\varphi(x)) - - \overline{\Phi}_\varepsilon(\theta\varphi(x), x)), \varphi(x)]\, d\theta. \quad (4.34)$$

Теорема 23

Функционал $F_\varepsilon(\varphi(x))$ ограничен снизу.

Доказательство. Из (4.34) с учетом (4.33) получим

$$F_\varepsilon(\varphi(x)) = \int_0^1 [D(\theta\varphi(x), x) \times \times \theta\varphi(x), \theta\varphi(x)] \frac{d\theta}{\theta} - - \int_0^1 [D(\theta\varphi(x), x)\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x), x), \varphi(x)]\, d\theta, \quad (4.35)$$

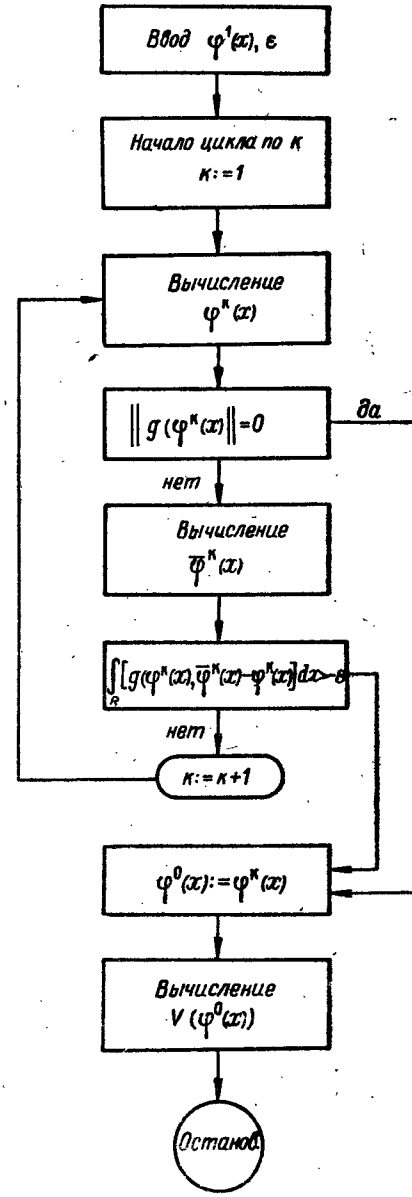

Рис. 8

$$\int_0^1 [D(\theta\varphi(x),\ x)\theta\varphi(x),\ \theta\varphi(x)]\frac{d\theta}{\theta} \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 m_1 \|(\theta\varphi(x))\|^2 \frac{d\theta}{\theta} = m_1 \|\varphi(x)\|^2 \int_0^1 \theta d\theta = \frac{m_1}{2}\|\varphi(x)\|^2. \quad (4.36)$$

Так как $\varphi(x) \in M_1$, то $\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x),\ x) \in M_1$ и поскольку множество M_1 ограничено, то существует такое вещественное число $c > 0$, что

$$\int_0^1 [D(\theta\varphi(x),\ x)\overline{\Phi}_\varepsilon(\theta\varphi(x),\ x),\ \varphi(x)]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi(x)\| \int_0^1 \|D(\theta\varphi(x);\ x)\overline{\Phi}_\varepsilon(\theta\varphi(x),\ x)\|\,d\theta \leqslant c\|\varphi(x)\|. \quad (4.37)$$

Следовательно, для любого $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$ имеем

$$F_\varepsilon(\varphi(x)) \geqslant \frac{m_1}{2}\|\varphi(x)\|^2 - c\|\varphi(x)\| = \|\varphi(x)\|\left\{\frac{m_1}{2}\|\varphi(x)\| - c\right\}.$$

Отсюда получим, что

$$F_\varepsilon(\varphi(x)) \geqslant 0, \text{ если } \|\varphi(x)\| \geqslant \frac{2C}{m^1},$$

$$F_\varepsilon(\varphi(x)) \geqslant -\frac{2c^2}{m_1} > -\infty, \text{ если } \|\varphi(x)\| < \frac{2c}{m_1}.$$

Это и означает ограниченность $F_\varepsilon(\varphi(x))$ снизу. Теорема доказана полностью.

На основе сделанных предположений получим справедливость следующей теоремы.

Теорема 24

Пусть функционал $V(\varphi(x))$ в задаче (4.1) *строго выпукл и существует оператор $D(\varphi(x),\ x)$, для которого выполнены условия* (4.32) *и* (4.33). *Для того чтобы вектор-функция $\varphi_\varepsilon^0(x)$ была решением уравнения* (4.31) *и, следовательно, ε-оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi_\varepsilon^0(x)$ была точкой минимума функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$, причем функционал $F_\varepsilon(\varphi(x))$ имеет единственную стационарную точку — точку минимума.*

Доказательство. В силу строгой выпуклости $V(\varphi(x))$ и неособенности оператора $D(\varphi(x),\ x)$ получим, что градиент $P_\varepsilon(\varphi(x),\ x)$ функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$ равен нулю только на единственном решении $\varphi_\varepsilon^0(x)$ задачи 11. Это значит, что $\varphi_\varepsilon^0(x)$ является единственной критической точкой функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$. В силу ограниченности снизу функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$

получим, что $\varphi_\varepsilon^0(x)$ — точка минимума F_ε. Будем далее предполагать, что:

1) функционал $V(\varphi(x))$ строго выпукл;

2) существует оператор $D(\varphi(x), x)$, обладающий свойствами (4.32) и (4.33);

3) оператор $\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x), x)$ удовлетворяет условию Липшица ($L > 0$)

$$\|\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x)+\hat{\varphi}(x), x)-\overline{\Phi}_\varepsilon(\hat{\varphi}(x), x)\| \leqslant L\|\varphi(x)\|. \tag{4.38}$$

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 12.

Найти вектор-функцию $\varphi_\varepsilon^0(x) \in \mathfrak{M}$ такую, что (4.39)

$$F_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0(x)) = \min_{\varphi(x)\in\mathfrak{M}} F_\varepsilon(\varphi(x)).$$

Из теоремы 24 следует эквивалентность задач 11 и 12. Задача 12 является простейшей задачей классического вариационного исчисления.

Приведем формулировку непрерывного градиентного метода нахождения минимума функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$. Будем рассматривать вектор-функцию $\varphi_\tau(x)$ как абстрактную вектор-функцию параметра τ, определенную на $[0, +\infty]$, со значениями в $\mathfrak{M}$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\varphi_\tau(x)}{d\tau} = -\alpha(\tau) P_\varepsilon^*(\varphi_\tau(x), x), \tag{4.40}$$

где $\alpha(\tau)$ — суммируемая ограниченная скалярная неотрицательная функция.

Теорема 25

В непрерывном градиентном методе:

1) $\varphi_\tau(x) \to \varphi_\varepsilon^0(x)$ *при* $\tau \to +\infty$, *где* $\varphi_\varepsilon^0(x)$ — *точка минимума функционала* $F_\varepsilon(\varphi(x))$;

2) $F_\varepsilon(\varphi_\tau(x)) \to F_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0(x))$ *при* $\tau \to +\infty$, *монотонно убывая, при произвольном выборе функции* $\alpha(\tau)$, $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha(\tau) \leqslant \alpha_1 < +\infty$ *при* $\tau \geqslant 0$, *и начального приближения* $\tilde{\varphi}(x) = \varphi_\tau(x)|_{\tau=0}$, $F_\varepsilon(\tilde{\varphi}(x)) < +\infty$.

Доказательство. Так как в силу (4.40) имеем

$$\frac{dF_\varepsilon(\varphi_\tau(x))}{d\tau} = \left[P_\varepsilon(\varphi_\tau(x), x), \frac{d\varphi_\tau(x)}{d\tau}\right] = -\alpha(\tau)\|P_\varepsilon(\varphi_\tau(x), x)\|^2 \leqslant 0, \tag{4.41}$$

и по теореме 23 $F_\varepsilon(\varphi(x))$ ограничен снизу, то существует вещественное число $F^0 > -\infty$ такое, что

$$F_\varepsilon(\varphi_\tau(x)) \to F^0 \text{ при } \tau \to +\infty, \tag{4.42}$$

монотонно убывая. Отсюда получим, что существует такое конечное число $\bar{\mu} > 0$, что для любого $\tau \geqslant 0$

$$\|\varphi_\tau(x)\| \leqslant \bar{\mu}. \tag{4.43}$$

Действительно, если бы $\|\varphi_\tau(x)\|$ при $\tau \geqslant 0$ была неограничена, то совокупность значений $F_\varepsilon(\varphi_\tau(x))$ была бы неограничена сверху, что противоречит неравенству $F_\varepsilon(\varphi_\tau(x)) \leqslant \leqslant F_\varepsilon(\tilde{\varphi}(x)) < +\infty$, которое справедливо для любого $\tau \geqslant 0$.

Интегрируя (4.41), получим, что

$$-\int_0^\tau \|P_\varepsilon(\varphi_\theta(x), x)\|^2 d\theta = F_\varepsilon(\varphi_\tau(x)) - F_\varepsilon(\tilde{\varphi}(x)) \geqslant$$

$$\geqslant F^0 - F_\varepsilon(\tilde{\varphi}(x)).$$

Так как $\alpha(\tau) \geqslant \alpha_0 > 0$ при $\tau \geqslant 0$ и

$$\int_0^\tau \|P_\varepsilon(\varphi_\theta(x), x)\|^2 d\theta \leqslant \frac{F_\varepsilon(\tilde{\varphi}(x)) - F^0}{\alpha_0} < +\infty, \tag{4.44}$$

то интеграл, стоящий в левой части (4.44), сходится при $\tau \to +\infty$. Из сходимости интеграла (4.44) при $\tau \to +\infty$ и выполнения неравенств (4.33) получим, что

$$\int_0^{+\infty} \|\varphi_\theta(x) - \bar{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\theta(x), x)\|^2 d\theta < +\infty. \tag{4.45}$$

Докажем теперь, что

$$\|\varphi_\tau(x) - \bar{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\tau(x), x)\|^2 \to 0 \text{ при } \tau \to +\infty. \tag{4.46}$$

Предположим противное, т. е. пусть существует такая последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{+\infty}$ и такие числа $K \geqslant 0$, $\Delta > 0$, что при $k \geqslant K$

$$\left\|\varphi_{\tau_k}(x) - \Phi_\varepsilon\left(\varphi_{\tau_k}(x), x\right)\right\| \geqslant \Delta > 0, \tag{4.47}$$

причем $\tau_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Далее имеем

$$\left|\|\varphi_\tau(x) - \bar{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\tau(x), x)\| - \left\|\varphi_{\tau_k}(x) - \bar{\Phi}_\varepsilon\left(\varphi_{\tau_k}(x), x\right)\right\|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\left(\varphi_\tau(x) - \bar{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\tau(x), x) - \left(\varphi_{\tau_k}(x) - \bar{\Phi}_\varepsilon\left(\varphi_{\tau_k}(x), x\right)\right)\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi_\tau(x) - \varphi_{\tau_k}(x)\| + \|\bar{\Phi}_\varepsilon(\varphi_{\tau_k}(x), x) - \bar{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\tau(x), x)\| \leqslant$$

$$\leqslant (1+L)\|\varphi_\tau(x)-\varphi_{\tau_k}(x)\| \leqslant (1+L)\left\|\int_{\tau_k}^{\tau} \alpha(\theta) P_\varepsilon(\theta\varphi(x),\ x)\, d\theta\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_1\beta(1+L)|\tau-\tau_k|,$$

где конечное число $\beta > 0$ таково, что при $\tau \geqslant 0$

$$\|P_\varepsilon(\varphi_\tau(x),\ x)\| \leqslant \beta < +\infty.$$

Существование такой постоянной следует из (4.33), (4.39) и (4.43).

Таким образом, если $|\tau-\tau_k| \leqslant \frac{\Delta\delta}{2\alpha_1\beta(1+L)}$, где $0<\delta<1$, то имеем

$$\left|\|\varphi_\tau(x)-\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\tau(x),\ x)\| - \|\varphi_{\tau_k}(x)-\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi_{\tau_k}(x),\ x)\|\right| \leqslant \frac{\Delta}{2}.$$

Отсюда в силу (4.47) получим

$$\|\varphi_\tau(x)-\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\tau(x),\ x)\| \geqslant \|\varphi_{\tau_k}(x)-\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi_{\tau_k}(x),\ x)\| - \frac{\Delta}{2} \geqslant \frac{\Delta}{2} > 0.$$

Введем обозначение

$$S_k = \left\{\tau : \tau \geqslant 0,\quad |\tau-\tau_k| \leqslant \frac{\Delta\delta}{2\alpha_1\beta(1+L)}\right\}. \tag{4.48}$$

Для любого достаточно малого $\delta\,(0<\delta<1)$ существует такая подпоследовательность индексов $\{k_r\}_{r=1}^{+\infty}$, что $\tau_{k_r} \to +\infty$ при $r \to +\infty$ и что пересечение множеств S_{k_r} и S_{k_l} при $r \neq l$ пусто, т. е. $S_{k_r} \cap S_{k_l} = \Lambda$, где Λ — пустое множество. Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \|\varphi_\tau(x)-\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\tau(x),\ x)\|^2 d\tau \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k_r>K} \int_{S_{k_r}} \|\varphi_\tau(x)-\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\tau(x),\ x)\|^2 d\tau \geqslant \sum_{k_r>K} \frac{\Delta^3\delta}{4\alpha_1\beta(1+L)} = +\infty. \tag{4.49}$$

Неравенство (4.49) противоречит (4.45). Это означает, что сделанное предположение о невыполнении (4.46) неверно и поэтому справедливость условия (4.46) доказана полностью.

Докажем теперь сходимость $\varphi_\tau(x)$ к $\varphi_\varepsilon^0(x)$ при $\tau \to +\infty$, где $\varphi_\varepsilon^0(x)$ — точка минимума функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$.

Предположим противное, т. е. пусть существует такое число $\gamma > 0$ и такая последовательность $\{\tau_k\}_{k=1}^{+\infty}$, что

$$\|\varphi_{\tau_k}(x)-\varphi_\varepsilon^0(x)\| \geqslant \gamma > 0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots), \tag{4.50}$$

причем $\tau_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Так как функционал

$\|\varphi(x)-\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x), x)\|$ непрерывен и обращается в нуль только при $\varphi(x)=\varphi_\varepsilon^0(x)$, то существует $\delta=\delta(\gamma)>0$ такое, что

$$\|\varphi_{\tau_k}(x)-\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi_{\tau_k}(x), x)\|\geqslant\delta>0 \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{4.51}$$

Полученное неравенство противоречит (4.46). Теорема доказана полностью.

§ 3. МЕТОД УСЛОВНОГО НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСГЛАЖЕННОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

В данном параграфе излагается метод условного наискорейшего спуска для решения несглаженного операторного уравнения.

Рассмотрим операторное уравнение

$$\overline{P}(\varphi(x), x)\equiv\varphi(x)-\overline{\Phi}(\varphi(x), x)=0, \tag{4.52}$$

в котором оператор $\overline{\Phi}$ имеет вид

$$\overline{\Phi}_j(\varphi(x), x)=\frac{b_j}{2}[1-\operatorname{sign} g^j(\varphi(x))] \quad (j=1, \ldots, n).$$

Возьмем в качестве оператора $D(\varphi(x), x)$ матрицу из вторых производных $\left\{\frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial\varphi_l\partial\varphi_s}\right\}_{l,\,s=1}^n$ функционала $V(\varphi)$, т. е. $D(\varphi(x), x)\equiv\equiv G(\varphi(x))$. Предполагая строгую выпуклость функционала $V(\varphi)$, получим, что оператор $D(\varphi(x), x)$ положительно определенный. Умножая обе части уравнения (4.52) на матрицу $G(\varphi(x))$, получим операторное уравнение

$$P(\varphi(x), x)\equiv G(\varphi(x))(\varphi(x)-\overline{\Phi}(\varphi(x), x))=0. \tag{4.53}$$

Определим в E_n функционал $F(\varphi(x))$:

$$F(\varphi(x))=\int\limits_R\left[g(\varphi(x)), \varphi(x)-\frac{b}{2}\right]dx-V(\varphi)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_R[b, |g(\varphi(x))|]\,dx, \tag{4.54}$$

где $|g|=(|g^1|, \ldots, |g^n|)$. После несложных выкладок можно показать, что градиент функционала $F(\varphi(x))$ совпадает с $P(\varphi(x), x)$. Функционал $F(\varphi(x))$ недостаточно гладкий ввиду присутствия модулей в (4.54).

Алгоритм метода условного наискорейшего спуска для нахождения стационарных точек функционала $F(\varphi(x))$ формулируется следующим образом.

1. В качестве первого приближения возмем любой вектор $\varphi^1(x)\in M_1$. Если $\overline{P}(\varphi^1(x), x)=(\varphi^1(x)-\Phi(\varphi^1(x), x))=0$, то $\varphi^1(x)$ — решение уравнения (4.52) и процесс окончен.

2. В противном случае ($\overline{P}(\varphi^1(x), x) \neq 0$) второе приближение $\varphi^2(x)$ определяется в виде

$$\varphi^2(x) = \varphi^1(x) - \lambda_1 \overline{P}(\varphi^1(x), x), \tag{4.55}$$

где вещественное число λ_1 находится из условия

$$V(\varphi^1(x) - \lambda_1 \overline{P}(\varphi^1(x), x)) = \min_{\lambda \in [0,1]} V(\varphi^1(x) - \lambda \overline{P}(\varphi^1(x), x)). \tag{4.56}$$

3. Пусть k-е приближение — вектор-функция $\varphi^k(x)$ уже найдена. Если $\overline{P}(\varphi^k(x), x) = 0$, то $\varphi^k(x)$ — искомая вектор-функция и процесс окончен.

4. В противном случае $(k+1)$-е приближение $\varphi^{k+1}(x)$ определяется в виде

$$\varphi^{k+1}(x) = \varphi^k(x) - \lambda_k \overline{P}(\varphi^k(x), x), \tag{4.57}$$

где вещественное число λ_k находится из условия

$$V(\varphi^k(x) - \lambda_k \overline{P}(\varphi^k(x), x)) = \min_{\lambda \in [0,1]} V(\varphi^k(x) - \lambda \overline{P}(\varphi^k(x), x)). \tag{4.58}$$

Таким образом, можно построить последовательность вектор-функций $\{\varphi^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, причем

$$V(\varphi^{k+1}(x)) \leqslant V(\varphi^k(x)). \tag{4.59}$$

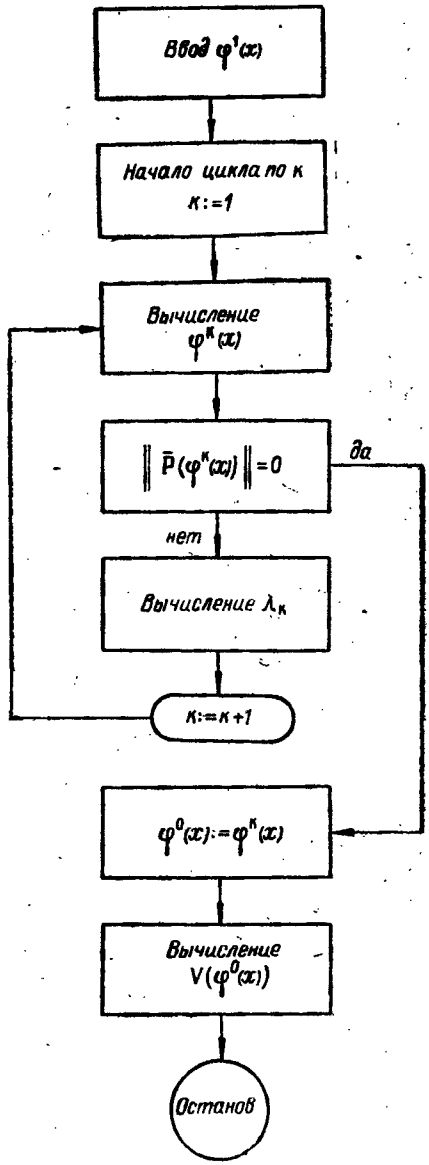

Рис. 9

Заметим, что вектор-функция $\varphi^k(x)$ совпадает с вектор-функцией $\varphi^k(x)$, определяемой в § 1 данной главы, причем $\overline{\varphi}^k(x) = \varphi^k(x) - \overline{P}(\varphi^k(x), x)$. Следовательно, изложенный метод условного наискорейшего спуска для нахождения стационарных точек функционала $F(\varphi(x))$ сходится в силу доказанной

в § 1 этой главы сходимости метода условного наискорейшего спуска. На рис. 9 приведена блок-схема решения на ЭВМ операторного уравнения (4.52) изложенным методом.

§ 4. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данном параграфе рассматриваются итерационные методы нахождения решения $\varphi_\varepsilon^0(x)$ операторного уравнения

$$\varphi(x) = \overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x), x).$$

Сущность итерационных методов заключается в построении последовательности вектор-функций $\varphi^1(x)$, $\varphi^2(x)$, ..., $\varphi^k(x)$, $\varphi^{k+1}(x)$, ..., определяемых по рекуррентной формуле

$$\varphi^{k+1}(x) = \varphi^k(x) - \lambda_k P_\varepsilon(\varphi^k(x), x), \tag{4.60}$$

где величина шага $\lambda_k \geqslant 0$ выбирается из дополнительных условий различными способами, например:

1) в методе простой итерации

$$\lambda_k = \lambda = \text{const}; \tag{4.61}$$

2) в методе условного наискорейшего спуска $\lambda_k \geqslant 0$ находится из условия

$$F(\varphi^k(x) - \lambda_k P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)) = \\ = \min_{\lambda \in [0, 1]} F(\varphi^k(x) - \lambda P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)); \tag{4.62}$$

3) в методе наискорейшего спуска $\lambda_k \geqslant 0$ находится из условия

$$F_\varepsilon(\varphi^k(x) - \lambda_k P_\varepsilon(\varphi^x(x), x)) = \min_{\lambda \geqslant 0} F_\varepsilon(\varphi^k(x) - \lambda P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)); \tag{4.63}$$

4) в методе минимальных невязок $\lambda_k \geqslant 0$ находится из условия

$$\| P_\varepsilon(\varphi^k(x) - \lambda_k P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)), x) \| = \\ = \min_{\lambda \geqslant 0} \| P_\varepsilon((\varphi^k(x) - \lambda P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)), x) \|. \tag{4.64}$$

Будем предполагать, что выполнены условия (4.32)—(4.33) § 2 этой главы и имеет место для любых $\varphi(x)$ и $\hat{\varphi}(x)$ из $\mathfrak{M}$ следующее неравенство:

$$\| P_\varepsilon(\varphi(x) + \hat{\varphi}(x), x) - P_\varepsilon(\hat{\varphi}(x), x) \| \leqslant \nu \| \varphi(x) \|. \tag{4.65}$$

Тогда справедливы следующие две теоремы.

Теорема 26

Последовательность $\{\varphi^k(x)\}_{k=1}^\infty$ *в методе простой итерации сходится к* $\varphi_\varepsilon^0(x)$ — *решению задачи (точке минимума*

функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$) *при выборе величины шага* $\lambda_k = \lambda = \text{const}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *из условия:*

$$0 < \lambda < \frac{2}{\nu} \tag{4.66}$$

для любого $\varphi^1(x)$, $F_\varepsilon(\varphi^1(x)) < +\infty$.

Доказательство. Для любых $\varphi(x)$ и $\hat{\varphi}(x)$ из $\mathfrak{M}$ имеем

$$F_\varepsilon(\varphi(x) + \hat{\varphi}(x)) - F_\varepsilon(\varphi(x)) =$$
$$= \int_0^1 [P_\varepsilon(\varphi(x) + \theta\hat{\varphi}(x), x), \hat{\varphi}(x)]\, d\theta, \tag{4.67}$$

отсюда для любого целого $k \geqslant 1$ получим

$$F_\varepsilon(\varphi^{k+1}(x)) - F_\varepsilon(\varphi^k(x)) =$$
$$= -\lambda \int_0^1 [P_\varepsilon((\varphi^k(x) - \theta\lambda P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)), x), P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)]\, d\theta =$$
$$= -\lambda \| P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)\|^2 + \lambda \int_0^1 [P_\varepsilon(\varphi^k(x), x) - P_\varepsilon((\varphi^k(x) -$$
$$- \theta\lambda P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)), x), P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)]\, d\theta \leqslant -\lambda \| P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)\|^2 +$$
$$+ \lambda^2 \| P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)\|^2 \nu \int_0^1 \theta d\theta = \lambda\left(\frac{\lambda\nu}{2} - 1\right) |P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)^2\| \leqslant 0. \tag{4.68}$$

Таким образом, последовательность $\{F_\varepsilon(\varphi^k(x))\}_{k=1}^{+\infty}$ — монотонно невозрастающая и ограниченная снизу, поэтому существует конечное вещественное число F^0 такое, что

$$F_\varepsilon(\varphi^k(x)) \to F^0 \text{ при } k \to +\infty, \tag{4.69}$$

причем

$$F_\varepsilon(\varphi^{k+1}(x)) - F_\varepsilon(\varphi^k(x)) \to 0 \text{ при } k \to +\infty. \tag{4.70}$$

Из неравенства (4.68) имеем

$$\| P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)\|^2 \leqslant \frac{F_\varepsilon(\varphi^k(x)) - F_\varepsilon(\varphi^{k+1}(x))}{\lambda\left(1 - \frac{\lambda\nu}{2}\right)}, \tag{4.71}$$

отсюда, учитывая (4.70), получим, что

$$\| P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)\| \to 0 \text{ при } k \to +\infty. \tag{4.72}$$

Покажем теперь, что $\varphi^k(x) \to \varphi_\varepsilon^0(x)$ при $k \to +\infty$, где $\varphi_\varepsilon^0(x)$ — точка минимума функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$. Предположим противное, т. е. пусть существует такое число $\Delta > 0$ и такая бесконечная последовательность индексов k_r $(r = 1, 2, \ldots)$, что

$$\| \varphi^{k_r}(x) - \varphi_\varepsilon^0(x)\| \geqslant \Delta > 0 \quad (r = 1, 2, \ldots), \tag{4.73}$$

причем $k_r \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Так как градиент P_ε функционала F_ε непрерывен и обращается в нуль только при $\varphi(x) = \varphi_\varepsilon^0(x)$, то существует такое число $\delta > 0$, что

$$\|P_\varepsilon(\varphi^{k_r}(x), x)\| \geqslant \delta > 0 \quad (r = 1, 2, \ldots). \tag{4.74}$$

Полученное неравенство противоречит тому, что

$$\lim_{k \to +\infty} \|P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)\| = 0. \tag{4.75}$$

Теорема доказана полностью.

Теорема 27

Последовательность $\{\varphi^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* $\varphi_\varepsilon^0(x)$ — *точке минимума функционала* $F_\varepsilon(\varphi(x))$ *при выборе* λ_k *любым способом из любого (наперед выбранного) отрезка* $[\alpha, \beta] \subset \left(0, \frac{2}{\nu}\right)$ *для любого* $\varphi^1(x)$, $F_\varepsilon(\varphi^1(x)) < +\infty$, *при этом* $F_\varepsilon(\varphi^k(x)) \to F_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0(x))$ *при* $k \to +\infty$, *монотонно невозрастая.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы, причем вместо неравенств (4.68) и (4.71) используются неравенства

$$F_\varepsilon(\varphi^{k+1}(x)) - F_\varepsilon(\varphi^k(x)) \leqslant \lambda_k\left(\frac{\lambda_k \nu}{2} - 1\right) \cdot \|P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)\|^2 \leqslant 0, \tag{4.76}$$

$$\|P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)\|^2 \leqslant \frac{F_\varepsilon(\varphi^k(x)) - F_\varepsilon(\varphi^{k+1}(x))}{\lambda_k\left(1 - \frac{\lambda_k \nu}{2}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{F_\varepsilon(\varphi^k(x)) - F_\varepsilon(\varphi^{k+1}(x))}{\alpha\left(1 - \frac{\beta\nu}{2}\right)}. \tag{4.77}$$

Далее будем предполагать, что имеет место следующее неравенство при $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$:

$$\|P_\varepsilon(\varphi(x), x)\|^2 \geqslant 2p\,[F_\varepsilon(\varphi(x)) - F^0], \quad p > 0. \tag{4.78}$$

Теорема 28

Итерационные методы сходятся, если $\lambda_k \in [\alpha, \beta] \subset \left(0, \frac{2}{\nu}\right)$ *при* $k = 1, 2, \ldots$, *причем*

$$F_\varepsilon(\varphi^{k+1}(x)) - F^0 \leqslant q^k\,[F_\varepsilon(\varphi^1(x)) - F^0], \tag{4.79}$$

$$\|\varphi^{k+1}(x) - \varphi_\varepsilon^0(x)\|^2 \leqslant c_0 q^k, \tag{4.80}$$

$$0 < q < 1. \tag{4.81}$$

Доказательство. Обозначим $Q(\varphi(x)) = F_\varepsilon(\varphi(x)) - F^0$. Из (4.76) получим, что

$$Q(\varphi^k(x)) - Q(\varphi^{k+1}(x)) = F_\varepsilon(\varphi^k(x)) - \\ - F_\varepsilon(\varphi^{k+1}(x)) \geqslant \alpha\left(1 - \frac{\beta\nu}{2}\right)\|P_\varepsilon(\varphi(x), x)\|^2 \geqslant \\ \geqslant \alpha(2 - \beta\nu)pQ(\varphi^k(x)), \tag{4.82}$$

отсюда следует неравенство

$$Q(\varphi^{k+1}(x) \leqslant qQ(\varphi^k(x)), \tag{4.83}$$

где

$$q = 1 - \alpha(2 - \beta\nu)p. \tag{4.84}$$

Докажем, что q удовлетворяет (4.81). Действительно, $\beta < \frac{2}{\nu}$, поэтому $\alpha(2 - \beta\nu)p > 0$ и, следовательно, $q < 1$. Далее имеем

$$2pQ(\varphi^k(x)) \leqslant \|P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)\|^2 \leqslant \\ \leqslant \frac{F_\varepsilon(\varphi^k(x)) - F_\varepsilon(\varphi^{k+1}(x))}{\alpha\left(1 - \frac{\beta\nu}{2}\right)} \leqslant \frac{Q(\varphi^k(x))}{\alpha\left(1 - \frac{\beta\nu}{2}\right)}; \tag{4.85}$$

отсюда $2p \leqslant \frac{1}{\alpha\left(1 - \frac{\beta\nu}{2}\right)}$, или

$$q = 1 - \alpha(2 - \beta\nu)p \geqslant 0. \tag{4.86}$$

Из (4.83) получим, что для любого целого $k \geqslant 1$

$$Q(\varphi^{k+1}(x)) \leqslant q^k Q(\varphi^1(x)), \tag{4.87}$$

т. е. неравенство (4.79) доказано полностью. Из (4.60) получим

$$\|\varphi^{k+1}(x) - \varphi^k(x)\|^2 = \lambda_k^2 \|P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)\|^2 \leqslant \\ \leqslant \frac{\lambda_k [F_\varepsilon(\varphi^k(x)) - F_\varepsilon(\varphi^{k+1}(x))]}{1 - \frac{\lambda_k \nu}{2}} \leqslant \\ \leqslant \frac{\beta Q(\varphi^k(x))}{1 - \frac{\beta\nu}{2}} \leqslant \frac{\beta[F_\varepsilon(\varphi^1(x)) - F^0]}{1 - \frac{\beta\nu}{2}} q^{k-1} = c_1 q^k. \tag{4.88}$$

Следовательно, для всех целых $l \geqslant k \geqslant 1$ получим

$$\|\varphi^l(x) - \varphi^k(x)\|^2 \leqslant \sum_{r=k}^{l-1} \|\varphi^{r+1}(x) - \varphi^r(x)\|^2 \leqslant \\ \leqslant c_1 \sum_{r=k}^{l-1} q^r \leqslant c_1 q^k \sum_{r=1}^{\infty} q^r = \frac{c_1 q^k}{1 - q}, \tag{4.89}$$

т. е. последовательность $\{\varphi^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $\varphi_\varepsilon^0(x)$ (см. теорему 23), причем, переходя к пределу при $l \to +\infty$, получим

$$\| \varphi_\varepsilon^0(x) - \varphi^k(x) \| \leqslant \frac{c_1}{1-q} q^k = c_0 q^k. \tag{4.90}$$

Теорема доказана полностью.

Далее на основе полученного в главе III вида оператора $\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x), x)$ по формулам (3.98) приводится вид операторов $D(\varphi(x), x)$, $P_\varepsilon(\varphi(x), x)$ и функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$.

Рассмотрим сглаженное операторное уравнение

$$\overline{P}_\varepsilon(\varphi(x), x) \equiv \varphi(x) - \overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x), x) = 0, \tag{4.91}$$

где $\overline{\Phi}_\varepsilon = (\overline{\Phi}_{\varepsilon 1}, \ldots, \overline{\Phi}_{\varepsilon n})$ имеет вид

$$\overline{\Phi}_{\varepsilon j}(\varphi(x), x) = \frac{b_j}{2}\left\{1 - \frac{g^j(\varphi(x))}{\sqrt{[q^j(\varphi(x))]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2(\mu(R))^2 b_j^2}}}\right\}. \tag{4.92}$$

Возьмем в качестве оператора $D(\varphi(x), x)$ матрицу из вторых производных по φ функционала $V(\varphi)$, т. е. $D(\varphi(x), x) \equiv G(\varphi(x))$. Обозначим

$$P_\varepsilon(\varphi(x)) \equiv G(\varphi(x))\left[\varphi(x) - \overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x), x)\right]. \tag{4.93}$$

Функционал $F_\varepsilon(\varphi(x))$ определяется в виде

$$F_\varepsilon(\varphi(x)) = \int_R \left[g(\varphi(x)), \varphi(x) - \frac{b}{2}\right] dx -$$

$$- V(\varphi(x)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{2} \int_R \sqrt{[g^j(\varphi(x))]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2(\mu(R))^2 b_j^2}}\, dx. \tag{4.94}$$

Оператор $P_\varepsilon(\varphi(x), x)$ совпадает с градиентом функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$ Так как матрица $G(\varphi(x))$ положительно определенная, то операторное уравнение (4.91) равносильно условию равенства нулю градиента $P_\varepsilon(\varphi(x), x)$ функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$.

Алгоритм метода итераций формулируется следующим образом. Для нахождения минимума функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$ (задача 12) применим градиентный метод (см. [1,30]), который заключается в построении минимизирующей последовательности вектор-функций $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \ldots, \varphi^k(x), \ldots$, по рекуррентной формуле

$$\varphi^{k+1}(x) = \varphi^k(x) - \lambda_k P_\varepsilon(\varphi^k(x), x), \tag{4.95}$$

причем первое приближение $\varphi^1(x)$ выбирается произвольно.

Величина шага $\lambda_k \geqslant 0$ может выбираться различными способами. Например, в методе простой итерации полагаем

$$\lambda_k = \lambda = \text{const} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{4.96}$$

а в методе наискорейшего спуска λ_k выбираются из условия

$$F_\varepsilon(\varphi^k(x) - \lambda_k P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)) = \min_{\lambda \geqslant 0} F_\varepsilon(\varphi^k(\lambda) - \lambda P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)). \tag{4.97}$$

Согласно ранее сделанным предположениям и доказанным теоремам последовательность $\{\varphi^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в методе итераций сходится к $\varphi^0(x)$ — решению задачи 12 (точке минимума функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$) при выборе λ_k любым способом из любого (наперед выбранного) отрезка $[\alpha, \beta]$, содержащегося внутри промежутка $\left(0, \frac{2}{\nu}\right)$, для любого первого приближения $\varphi^1(x)$, $F_\varepsilon(\varphi^1(x)) < +\infty$, при этом $F_\varepsilon(\varphi^k(x)) \to F_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0(x))$ при $k \to +\infty$, монотонно невозрастая.

Если имеются дополнительные ограничения на функционал $F_\varepsilon(\varphi(x))$ (например, такие же, как (4.78), то можно получить оценку скорости сходимости итерационных методов. Однако на практике выполнение этих ограничений не всегда имеет место. Удобную апостериорную оценку „близости" k-го приближения $\varphi^k(x)$ к $\varphi_\varepsilon^0(x)$ можно получить, используя неравенство

$$\|P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)\|^2 \leqslant \frac{F_\varepsilon(\varphi^k(x)) - F_\varepsilon(\varphi^{k+1}(x))}{\lambda_k\left(1 - \frac{\lambda_k \nu}{2}\right)}.$$

Так как $\|P_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^k(x), x)\| \to 0$ при $k \to +\infty$, то эта апостериорная оценка определяет „близость" $\|P_\varepsilon(\varphi^k(x), x)\|$ к нулю.

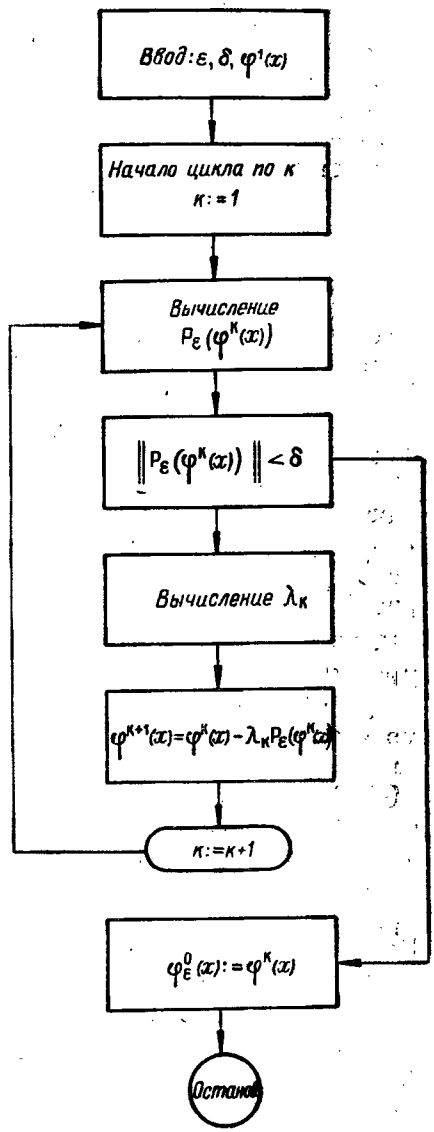

Рис. 10

На рис. 10 приведена блок-схема решения сглаженного операторного уравнения (4.91) на ЭВМ.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данном параграфе рассматривается применение метода дифференцирования по параметру для решения операторных уравнений, полученных в главе III. Идея метода дифференцирования по параметру заключается в замене задачи отыскания решения операторного уравнения

$$\overline{P}_\varepsilon(\varphi(x),\ x) \equiv \varphi(x) - \overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x),\ x) = 0 \tag{4.98}$$

задачей нахождения решения операторного уравнения

$$B(\varphi(x),\ x,\ \lambda) = 0. \tag{4.99}$$

Здесь оператор $B(.,\ x,\ \lambda)$ зависит от вещественного параметра λ таким образом, что

$$B(\varphi(x),\ x,\ 1) = \overline{P}_\varepsilon(\varphi(x),\ x), \tag{4.100}$$

а решение операторного уравнения $B(\varphi(x),\ x,\ 0) = 0$ существует и легко находится. Обозначим это решение через $\check{\varphi}(x)$, а решение операторного уравнения (4.99) через $\varphi_\varepsilon^0(x,\ \lambda)$. Тогда для нахождения решения уравнения (4.98) можно почленно продифференцировать равенство (4.99) по λ (которое удовлетворяется для $\varphi_\varepsilon^0(x,\ \lambda)$ при всех $\lambda \in [0,\ 1]$) и искать решение задачи Коши при $\lambda = 1$ для полученного дифференциального уравнения с начальным условием $\varphi_\varepsilon^0(x,\ 0) = \check{\varphi}(x)$.

Для обоснования такого метода решения операторных уравнений требуется доказать, что полученная задача Коши имеет решение (и притом единственное) во всем промежутке $\lambda \in [0,1]$. Ниже при определенных предположениях на оператор $\overline{P}_\varepsilon(\varphi(x),\ x)$ устанавливается справедливость этого утверждения для двух способов введения параметра λ. Обозначим через $\overline{P}'_\varepsilon(\varphi(x),\ x)$ производную Гато от оператора $\overline{P}_\varepsilon(\varphi(x),\ x)$ при фиксированном λ, а через $B'(\varphi(x),\ x,\ \lambda)$ — производную Гато от оператора $B(\varphi(x),\ x,\ \lambda)$ при фиксированном λ.

Пусть $S(\check{\varphi}(x),\ \rho)$ — сфера в $\mathfrak{M}$ с центром $\check{\varphi}(x)$ и радиусом ρ (т. е. множество вектор-функций $\varphi(x)$ из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих неравенству $\|\varphi(x) - \check{\varphi}(x)\| \leqslant \rho$). Справедливы следующие утверждения (доказательство которых для нелинейных трансцендентных уравнений можно найти в работе [32]).

Теорема 29

Пусть $\check{\varphi}(x) \in \mathfrak{M}$ *и число* $\rho > 0$ *такие, что:*

а) *при* $\varphi(x) \in S(\check{\varphi}(x),\ \rho)$ *оператор* $\overline{P}'_\varepsilon(\varphi(x),\ x)$ *неособый, т. е. существует* $[\overline{P}'_\varepsilon(\varphi(x),\ x)]^{-1}$;

б) $\|[\overline{P}'_\varepsilon(\varphi(x),\ x)]^{-1}\| \leqslant d$ *при* $\varphi(x) \in S(\check{\varphi}(x),\ \rho)$;

в) $\rho > d\|\overline{P}_\varepsilon(\check{\varphi}(x),\ x)\|$.

Тогда существует решение $\varphi_\varepsilon^0(x)$ *операторного уравнения* $\overline{P}_\varepsilon(\varphi(x), x)=\mathbf{0}$ *и*

$$\|\varphi_\varepsilon^0(x)-\check{\varphi}(x)\|\leqslant d\,\|\overline{P}_\varepsilon(\check{\varphi}(x), x)\|<\rho. \tag{4.101}$$

Теорема 30

Пусть $\check{\varphi}(x)$ *и* $\rho>0$ *такие, что:*

а) *оператор* $B'(\varphi(x), x, \lambda)$ *неособый при* $\varphi(x)\in S(\check{\varphi}(x), \rho)$, $\lambda\in[0, 1]$ *и* $\|[B'(\varphi(x), x, \lambda)^{-1}\|\leqslant\mathbf{B}$;

б) $\rho>\mathbf{B}\|B(\check{\varphi}(x), x, \lambda)\|$ *при* $\lambda\in[0, 1]$;

в) *при некотором* $\lambda_0\in[0, 1]$ $B(\check{\varphi}(x), x, \lambda_0)=\mathbf{0}$.

Тогда существует (и притом единственная) вектор-функция $\varphi_\varepsilon^0(x, \lambda)$, *удовлетворяющая при* $\lambda\in[0, 1]$ *уравнению*

$$B(\varphi(x), x, \lambda)=\mathbf{0}, \tag{4.102}$$

и условиям

$$\varphi_\varepsilon^0(x, \lambda_0)=\check{\varphi}(x), \tag{4.103}$$

$\varphi_\varepsilon^0(x, \lambda)$ *из класса* $C^1[0, 1]$;

$\|\check{\varphi}(x)-\varphi_\varepsilon^0(x, \lambda)\|\leqslant\mathbf{B}\,\|B(\check{\varphi}(x), x, \lambda)\|<\rho$ *при* $\lambda\in[0, 1]$;

$$\frac{d\varphi_\varepsilon^0(x, \lambda)}{d\lambda}=-\left[B'(\varphi_\varepsilon^0(x, \lambda), x, \lambda)\right]^{-1}B_\lambda(\varphi_\varepsilon^0(x, \lambda), x, \lambda), \tag{4.104}$$

где $B_\lambda[\cdot, x, \lambda]$ — *производная от оператора* $B(\cdot, x, \lambda)$ *по* λ.

Ниже приводятся основные результаты по единственности решения задачи Коши для двух специальных способов введения параметра λ, т. е. для двух видов зависимости от λ оператора $B(\cdot, x, \lambda)$.

Теорема 31

Пусть оператор $B(\cdot, x, \lambda)$, *имеет вид*

$$B(\varphi(x), x, \lambda)=\varphi(x)-\check{\varphi}(x)+\lambda\left[\overline{P}_\varepsilon(\varphi(x), x)-\varphi(x)+\check{\varphi}(x)\right] \tag{4.105}$$

и выполнены следующие условия:

а) $\int\limits_R\left[\overline{P}_\varepsilon'(\varphi(x), x)\,z(x), z(x)\right]dx\geqslant l\int\limits_R[z(x), z(x)]\,dx$ *при* $\varphi(x)\in S(\check{\varphi}(x), \rho)$ *и* $z(x)\in\mathfrak{M}$, $l>0$;

б) $\rho>\dfrac{\|\overline{P}_\varepsilon(\check{\varphi}(x), x)\|}{l^*}$, *где* $l^*=\min\{l, 1\}$.

Тогда задачи Коши для уравнения (4.104) *с начальным условием* $\varphi_\varepsilon^0(x, 0)=\check{\varphi}(x)$ *имеет решение (и притом единственное) во всем промежутке* $0\leqslant\lambda\leqslant1$ *для любой заранее выбранной* $\check{\varphi}(x)\in\mathfrak{M}$, *например,* $\check{\varphi}(x)=\mathbf{0}$.

Доказательство. Имеем

$$\int_R [B'(\varphi(x),\ x,\ \lambda)z(x),\ z(x)]\,dx =$$

$$= (1-\lambda)\int_R [z(x),\ z(x)]\,dx + \lambda\int_R [\overline{P}_\varepsilon'(\varphi(x),\ x)z(x),\ z(x)]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant l\int_R [z(x),\ z(x)]\,dx$$

при любых $\varphi(x)\in S(\check{\varphi}(x),\ \rho)$, $\lambda\in[0,\ 1]$ и $z(x)\in\mathfrak{M}$. Отсюда следует, что оператор B' неособый, т. е. $[B'(\varphi(x),\ x,\ \lambda]^{-1}$ существует для любой

$$\varphi(x)\in S(\check{\varphi}(x),\ \rho) \text{ и } \|[B'(\varphi_\varepsilon^0(x,\ \lambda),\ x,\ \lambda)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{l^*} \equiv \mathbf{B}.$$

Далее получим при $\lambda\in[0,\ 1]$

$$\rho > \frac{\|P_\varepsilon(\check{\varphi}(x),\ x)\|}{l^*} \geqslant \frac{\lambda\|\overline{P}_\varepsilon(\check{\varphi}(x),\ x)\|}{l^*} = \mathbf{B}\|B(\check{\varphi}(x),\ x,\ \lambda)\|,$$

$$\mathbf{B}(\check{\varphi}(x),\ x,\ 0) = \mathbf{0}.$$

Таким образом, для оператора $B(\varphi(x),\ x,\ \lambda)$ выполнены все условия теоремы 30 и поэтому существует веткор-функция $\varphi_\varepsilon^0(x,\ \lambda)$ (притом единственная), удовлетворяющая дифференциальному уравнению (4.104).

$$\frac{d\varphi_\varepsilon^0(x,\ \lambda)}{d\lambda} = -[B'(\varphi_\varepsilon^0(x,\ \lambda),\ x,\ \lambda)]^{-1}\,B_\lambda(\varphi_\varepsilon^0(x,\ \lambda),\ x,\ \lambda)$$

и начальному условию $\varphi_\varepsilon^0(x,\ 0) = \check{\varphi}(x)$. Теорема доказана полностью.

Теорема 32

Пусть $\int_R [\overline{P}_\varepsilon'(\varphi(x),\ x)z(x),\ z(x)]\,dx \geqslant l\int_R [z(x), z(x)]\,dx$ *при* $l>0$ *для всех* $\varphi(x),\ z(x)\in\mathfrak{M}$. *Тогда задача Коши для уравнения* (4.104) *с начальным условием* $\varphi_\varepsilon^0(x,\ 0) = \check{\varphi}(x)$ *имеет решение (и притом единственное) во всем промежутке* $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ *при* $\check{\varphi}(x)\in\mathfrak{M}$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теорем 30 и 31. Для вида оператора B по формуле (4.105) дифференциальное уравнение (4.104) представим в форме

$$\frac{d\varphi_\varepsilon^0(x,\ \lambda)}{d\lambda} = -[(1-\lambda)\mathrm{I} + \lambda\overline{P}_\varepsilon'(\varphi_\varepsilon^0(x,\ \lambda),\ x)]^{-1}\times$$

$$\times[\overline{P}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0(x,\ \lambda),\ x) - \varphi_\varepsilon^0(x,\ \lambda) + \check{\varphi}(x)], \qquad (4.106)$$

где I — тождественный (единичный) оператор.

Рассмотрим другой способ введения параметра λ.

Теорема 33

Пусть оператор B определен в виде

$$B(\varphi(x),\ x,\ \lambda)=\overline{P}_\varepsilon(\varphi(x),\ x)-(1-\lambda)\overline{P}_\varepsilon(\check{\varphi}(x),\ x)=0 \quad (4.107)$$

и выполнены следующие условия:

а) *оператор* $\overline{P}'_\varepsilon(\varphi(x),\ x)$ *неособый для* $\varphi(x)\in S(\check{\varphi}(x),\ \rho)$;

б) $\|[\overline{P}'_\varepsilon(\varphi(x),\ x)]^{-1}\|\leqslant d$ *при* $\varphi(x)\in S(\check{\varphi}(x),\ \rho)$;

в) $\rho>d\|\overline{P}_\varepsilon(\check{\varphi}(x),\ x)\|$.

Тогда задача Коши для уравнения

$$\frac{d\varphi^0_\varepsilon(x,\lambda)}{d\lambda}=-[\overline{P}'_\varepsilon(\varphi^0_\varepsilon(x,\lambda),\ x)]^{-1}\overline{P}_\varepsilon(\check{\varphi}(x),\ x) \quad (4.108)$$

с начальным условием $\varphi^0_\varepsilon(x,\ 0)=\check{\varphi}(x)$ *имеет решение, и притом единственное, во всем промежутке* $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ *для любой заранее выбранной* $\check{\varphi}(x)\in\mathfrak{M}$, *например,* $\check{\varphi}(x)\equiv 0$.

Доказательство. Имеем

$$B'(\varphi(x),\ x,\ \lambda)=\overline{P}'_\varepsilon(\varphi(x),\ x)$$

и поэтому оператор $B'(\varphi(x),\ x,\ \lambda)$ неособый при $\varphi(x)\in S(\check{\varphi}(x),\rho)$, $\lambda\in[0,\ 1]$, и так как

$$\|[B'(\varphi(x),\ x,\ \lambda)]^{-1}\|=\|[\overline{P}'_\varepsilon(\varphi(x),\ x)]^{-1}\|,$$

то $d=\mathrm{B}$.

Далее получим

$$\rho>d\|\overline{P}_\varepsilon(\check{\varphi}(x),\ x)\|\geqslant \mathrm{B}\lambda\|\overline{P}_\varepsilon(\check{\varphi}(x),\ x)\|=\mathrm{B}\|B(\check{\varphi}(x),\ x,\ \lambda)\|$$

при $\lambda\in[0,\ 1]$. Наконец, очевидно $B(\check{\varphi}(x),\ x,\ 0)=0$.

Таким образом, для оператора $B(\varphi(x),\ x,\ \lambda)$ вида (4.107) выполнены все условия теоремы 30 и, следовательно, существует вектор-функция $\varphi^0_\varepsilon(x,\ \lambda)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (4.108) и условию $\varphi^0_\varepsilon(x,\ 0)=\check{\varphi}(x)$.

Единственность решения задачи Коши для уравнения (4.108) с начальным условием $\varphi^0_\varepsilon(x,\ 0)=\check{\varphi}(x)$ следует (как и в предыдущей теореме) из эквивалентности этой задачи уравнению (4.107) в некоторой окрестности $\check{\varphi}(x)$ и единственности определения оператора $B(\varphi(x),\ x,\ \lambda)$ через $\overline{P}_\varepsilon$. Теорема доказана полностью.

Уравнение (4.108) представимо в форме

$$\frac{d\varphi^0_\varepsilon(x,\lambda)}{d\lambda}=-[\mathbf{I}-\overline{\Phi}'_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(x,\lambda),\ x)]^{-1}(\check{\varphi}(x)-\overline{\Phi}_\varepsilon(\check{\varphi}(x),\ x)), \quad (4.109)$$

где $\overline{\Phi}'_\varepsilon(\varphi(x),\ x)$ — производная Гато по $\varphi(x)$ от оператора $\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x),\ x)$. Заметим, что уравнение (4.109) явно не зависит

от параметра λ. Требование гладкости оператора $\overline{\Phi}_\varepsilon$ позволяет получить вектор-функцию $\varphi_\varepsilon^0(x, \lambda)$ из класса непрерывных функций.

Исследуемый в этом параграфе метод дифференцирования по параметру для решения операторных уравнений тесно связан с такими разделами теории нелинейных операторов, как:

1) непрерывные ветви положительных решений операторных уравнений, зависящих от параметров;

2) точки бифуркации операторов;

3) спектральный анализ операторов и т. д.

В связи с этим использование результатов этих разделов теории операторов, а также их дальнейшее развитие может внести существенный вклад в решение неклассических вариационных задач.

И наконец, отметим, что для решения задачи Коши для дифференциальных уравнений (4.106) и (4.109) можно использовать хорошо известные методы численного решения дифференциальных уравнений, такие как метод Эйлера, методы Рунге—Кутта, Адамса, Штермера и др.

§ 6. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ И ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе рассматриваются аналитические методы решения вариационных задач и связанных с ними операторных уравнений. Под аналитическими методами будем понимать методы нахождения решений вариационных задач и операторных уравнений в аналитической форме (т. е. в виде определенной аналитической зависимости). К таким аналитическим методам можно отнести метод Ритца, метод Бубнова — Галеркина, методы разложения в ряд по собственным вектор-функциям оператора, методы разложения по степеням независимой переменной, а также по степеням произвольных параметров и др. Рассмотрим кратко эти методы.

Первые два метода основаны на построении последовательности вектор-функций, являющейся минимизирующей * для рассматриваемого функционала. Если минимизирующая последовательность сходится, то ее любой достаточно далекий член можно принять за приближенное решение.

Рассмотрим задачу о минимизации функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$ при $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$, эквивалентную задаче нахождения решения

---

* Последовательность вектор-функций $\varphi^1(x), \ldots, \varphi^N(x), \ldots$ из $\mathfrak{M}$ называют минимизирующей для функционала $F(\varphi(x), x)$, определенного на вектор-функциях из того же пространства $\mathfrak{M}$, если $\lim\limits_{N\to\infty} F(\varphi^N(x)) = \inf\limits_{\varphi(x)\in\mathfrak{M}} F(\varphi(x)) = F^0 > -\infty$.

операторного уравнения $P_\varepsilon(\varphi(x), x)=0$, поскольку оператор $P_\varepsilon(\varphi(x), x)$ является градиентом функционала $F_\varepsilon(\varphi(x))$. Рассмотрим последовательность элементов (вектор-функций)

$$\pi_1(x), \quad \pi_2(x), \ldots, \quad \pi_N(x) \ldots, \tag{4.110}$$

которую будем называть координатной системой, если выполнены следующие условия:

1) $\pi_N(x) \in \mathfrak{M}$ при $N=1, 2, \ldots$;

2) элементы $\pi_1(x), \ldots, \pi_N(x)$ линейно независимы при любом $N \geqslant 1$, т. е.

$$\int_R \pi_s(x)\pi_r(x)\,dx=0 \text{ при } s \neq r \quad (s, r=1, \ldots, N);$$

3) система вектор-функций полна в $\mathfrak{M}$, т. е. множество всевозможных конечных линейных комбинаций элементов системы (4.110) плотно в $\mathfrak{M}$.

1°. Метод Ритца состоит в том, что приближенное решение операторного уравнения

$$P_\varepsilon(\varphi(x), x)=0 \text{ при } \varphi(x) \in \mathfrak{M}, \tag{4.111}$$

или (что одно и то же) приближенное значение вектор-функции $\varphi_\varepsilon^0(x)$, на которой функционал $F_\varepsilon(\varphi(x))$ достигает минимального значения, ищется в виде

$$\varphi_\varepsilon^N(x)=\sum_{s=1}^{N} a_s\pi_s(x). \tag{4.112}$$

Вектор-функции $\varphi_\varepsilon^N(x)$ будем называть приближенным по Ритцу решением операторного уравнения для оператора P_ε, или приближенным по Ритцу решением задачи минимизации функционала F_ε. Коэффициенты a_s будем называть коэффициентами Ритца.

Допустим, что функционал F_ε непрерывно дифференцируем на любой конечномерной гиперплоскости в $\mathfrak{M}$, тогда коэффициенты Ритца a_s $(s=1, \ldots, N)$, $\{a_s\}_{s=1}^N=a$, определяются из условия минимума функции

$$F_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^N(x))=F_\varepsilon\left(\sum_{s=1}^{N} a_s\pi_s(x)\right)=y(a_1, \ldots, a_N)=y(a),$$

т. е. из системы уравнений

$$\frac{\partial y(a)}{\partial a_s}=Y_s(a)=0 \quad (s=1, \ldots, N), \tag{4.113}$$

или в векторной форме $Y(a)=0$, т. е.

$$Y(a)=\begin{pmatrix} Y_1(a_1, \ldots, a_N) \\ Y_2(a_2, \ldots, a_N) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ Y_N(a_1, \ldots, a_N) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}=0. \qquad (4.114)$$

Таким образом, задача минимизации функционала F_ε сводится к решению системы N нелинейных уравнений с N неизвестными $a_s (s=1, \ldots, N)$. Это задача более простая, нежели задача минимизации функционала F_ε и при определенных условиях (см. теорему 34) [36] имеет единственное решение.

Теорема 34

Пусть оператор $P_\varepsilon(\varphi(x), x)$ имеет производную Гато $P'_\varepsilon(\varphi(x), x)$ такую, что

$$\int_R [P'_\varepsilon(\varphi(x), x) z(x), z(x)]\, dx \geqslant l \int_R [z(x), z(x)]\, dx \qquad (4.115)$$

$$\text{при } \varphi(x), z(x) \in \mathfrak{M},$$

где $l>0$. Поэтому матрица Якоби системы (4.114) *уравнений метода Ритца равномерно положительно определена, т. е.*

$$\left[Y'(\tilde{h})h, h\right]_{R^N} \geqslant l\lambda_N [h, h]_{R^N}, \quad \tilde{h}, h \in R^N, \qquad (4.116)$$

где R^N — вещественное N-мерное пространство, l определено в (4.115), *а λ_N — наименьшее собственное значение матрицы Грамма $\left\{\int_R \pi_s(x)\pi_r(x)\,dx\right\}_{s,r=1}^N$ системы $\{\pi_s(x)\}_{s=1}^N$ в $\mathfrak{M}$. Тогда система* (4.114) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Имеем

$$Y'(a)=\left\{\int_R [P'_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^N(x), x)\pi_k(x), \pi_s(x)]\,dx\right\}_{k,s=1}^N, \qquad (4.117)$$

$$[Y'(a)h, h]_{R^N}=\int_R [P'_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^N(x), x) z_N(x), z_N(x)]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant l\int_R [z_N(x), z_N(x)]\,dx, \qquad (4.118)$$

где

$$z_N(x)=\sum_{s=1}^N h_s\pi_s(x), \quad h=\{h_s\}_{s=1}^N \in R^N.$$

Далее

$$\int_R [z_N(x),\ z_N(x)]\,dx = [\Pi h,\ h]_{R^N}, \tag{4.119}$$

где Π — матрица Грамма системы $\{\pi_s(x)\}_{s=1}^N$ в $\mathfrak{M}$, т. е.

$$\Pi = \left\{\int_R [\pi_k(x),\ \pi_s(x)]\,dx\right\}_{k,\ s=1}^N.$$

Отсюда получим

$$[Y'(a)h,\ h]_{R^N} \geqslant l\,[\Pi h,\ h]_{R^N} \geqslant l\lambda_N\,[h,\ h]_{R^N}, \tag{4.120}$$

где λ_N — наименьшее собственное значение матрицы Π, которое больше нуля в силу линейной независимости системы

$$\{\pi_s(x)\}_{s=1}^N \text{ в } \mathfrak{M}.$$

Наконец, при этих условиях существование и единственность решения системы (4.114) являются следствием известных теорем существования и единственности решения нелинейных уравнений.

Для численного решения системы (4.114) могут быть использованы различные численные методы. Например, если предположить, что функция $y(a)$ имеет вторые производные, непрерывные в любой ограниченной области пространства R^N, то для решения системы Ритца

$$Y(a) = 0$$

могут быть применены итерационные методы, рассматриваемые в § 4 данной главы.

В практике численного решения систем Ритца часто используют такие методы, как метод Ньютона, метод дифференцирования по параметру, методы спуска и др. Идея метода дифференцирования по параметру рассматривалась нами в предыдущем параграфе, техника же применения метода Ньютона весьма проста и заключается в следующем.

Пусть $F_\varepsilon\left(\sum_{s=1}^N a_s\pi_s(x)\right) = y(a_1, \ldots, a_N)$. Возьмем некоторое начальное приближение $a_0 = (a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{N0})$ и построим следующее приближение $a_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{N1})$ как решение линейной системы

$$\sum_{s=1}^N \frac{\partial^2 y}{\partial a_k \partial a_s}\bigg|_{a=a_0} (a_{s1} - a_{s0}) = \frac{\partial y}{\partial a_k}\bigg|_{a=a_0} \quad (k = 1, \ldots, N). \tag{4.121}$$

И вообще, если построено p-е приближение $a_p = (a_{1p}, a_{2p}, \ldots, a_{Np})$,

то $(p+1)$-е приближение $a_{p+1}=(a_{1p+1}, a_{2p+1}, \ldots, a_{Np+1})$ находится как решение линейной системы

$$\sum_{s=1}^{N} \frac{\partial^2 y}{\partial a_k \partial a_s}\bigg|_{a=a_p} (a_{s\,p+1}-a_{sp}) = \frac{\partial y}{\partial a_k}\bigg|_{a=a_p} \quad (k=1, \ldots, N). \quad (4.122)$$

Условия сходимости этого метода и оценка быстроты сходимости достаточно подробно изложены в [13]. Заметим здесь, что применение этого метода к системам Ритца наталкивается на ту трудность, что далеко не всегда можно дать простой способ надежного выбора начального приближения, между тем от этого выбора зависит сходимость процесса.

Сделаем еще одно замечание относительно того, что не всегда возможно вычислить точно функции $y(a)$ и $Y(a)$, в частности это может быть связано с невозможностью точного вычисления входящих в выражения для этих функций интегралов. В этом случае интегралы обычно вычисляются по формулам квадратур, причем вопрос о разрешимости получающихся при этом уравнений и возможности применения к их решению различных численных методов также требует своего обоснования.

Изложенное выше является одной стороной вопросов, связанных с методом Ритца. Другой важной стороной являются вопросы о возможности построения минимизирующей последовательности при различных предположениях о минимизируемом функционале. Исследование этих вопросов при предположении о непрерывности рассматриваемого функционала и условии, что приближенные решения по Ритцу составляются из координатных функций, проводится в работе [8]. При более сильных условиях на рассматриваемый функционал, а именно при предположении о том, что функционал является возрастающим и полунепрерывным сверху, получены аналогичные результаты в [18].

2°. Метод Бубнова—Галеркина состоит в том, что приближенное решение операторного уравнения $P_\varepsilon(\varphi(x), x)=$ при $\varphi(x)\in\mathfrak{M}$ или (что одно и то же) приближенное значение вектор-функции $\varphi_\varepsilon^0(x)$, на которой функционал F_ε достигает минимального значения, ищется как и в методе Ритца в виде

$$\varphi_\varepsilon^N(x)=\sum_{s=1}^{N} a_s \pi_s(x).$$

Однако в методе Бубнова—Галеркина коэффициенты a_s $(s=1, \ldots, N)$ определяются из системы уравнений

$$\int_R [P_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^N(x), x), \pi_s(x)]\, dx = 0 \quad (s=1, \ldots, N). \quad (4.123)$$

Если предположить, что оператор P_ε имеет производную Гато P'_ε и справедливо неравенство

$$\int_R [P'_\varepsilon(\varphi(x),\ x)z(x),\ z(x)]\,dx \geqslant l\int_R [z(x),\ z(x)]\,dx$$

для любых $\varphi(x)$, $z(x)\in\mathfrak{M}$ при $l>0$, то матрица Якоби системы (4.123) представима в виде

$$I(a)=\int_R \left\{[P'_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^N(x),\ x)\pi_h(x),\ \pi_s(x)]\right\}_{h,\ s=1}^N dx \quad (4.124)$$

и обратима при всех $a=\{a_s\}_{s=1}^N\in R^N$, причем

$$[I(a)h,\ h]\geqslant l\lambda_N[h,\ h], \quad (4.125)$$

где λ_N — наименьшее собственное значение матрицы Грамма системы $\{\pi_s(x)\}_{s=1}^N$, $h\in R^N$. Следовательно, система (4.123) имеет единственное решение. Для численного решения системы (4.123) могут быть использованы методы, указанные в предыдущем пункте, и др.

Относительно вопроса сходимости приближенных решений (даваемых методом Бубнова—Галеркина) к точному решению уравнения (4.111) справедлива следующая теорема, доказательство которой приводить не будем.

Теорема 35

Если последовательность $\pi_1(x),\ldots,\pi_N(x)\ldots$ является „координатной системой" в $\mathfrak{M}$ и оператор $P_\varepsilon(\varphi(x),\ x)$ удовлетворяет условию Липшица и условию

$$\int_R [P'_\varepsilon(\varphi(x),\ x)z(x),\ z(x)]\,dx \geqslant l\int_R [z(x),\ z(x)]\,dx$$

при любых $\varphi(x)$, $z(x)\in\mathfrak{M}$, $l>0$, то последовательность приближенных решений $\varphi_\varepsilon^N(x)$ операторного уравнения (4.111), *даваемая методом Бубнова—Галеркина, сходится к $\varphi_\varepsilon^0(x)$, т. е.*

$$\|\varphi_\varepsilon^N(x)-\varphi_\varepsilon^0(x)\|\to 0 \ \textit{при}\ N\to\infty, \quad (4.126)$$

где $\varphi_\varepsilon^0(x)$ — точное решение уравнения (4.111).

3°. Метод моментов состоит в том, что приближенное решение операторного уравнения $\overline{P}_\varepsilon(\varphi(x),x)=0$ при $\varphi(x)\in\mathfrak{M}$, так же как и в двух предыдущих методах, ищется в виде

$$\varphi_\varepsilon(x)=\sum_{s=1}^N a_s\pi_s(x),$$

где $\pi_s(x) \in \mathfrak{M}$, а коэффициенты a_s $(s=1, \ldots, N)$ определяются из алгебраической системы

$$\int_R \left[\overline{P}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^N(x), x), A(\pi_s(x))\right] dx = 0 \quad (s=1, \ldots, N), \quad (4.127)$$

где A — линейный оператор, определенный на элементах из $\mathfrak{M}$.

При определенных предположениях на операторы $\overline{P}_\varepsilon$ и A (см. [19]) существует единственное решение системы (4.127) и последовательность приближенных решений $\varphi_\varepsilon^N(x)$ операторного уравнения (4.111), построенная по методу моментов, сходится к единственному решению операторного уравнения (4.111) (при предположении о единственности решения операторного уравнения (4.111). Иными словами справедлива следующая теорема.

Теорема 36.

Если операторное уравнение (4.111) *имеет единственное решение* $\varphi_\varepsilon^0(x)$, $\{\pi_s(x)\}_{s=1}^N$ — *„координатная система", а оператор* A *такой, что*:

1) *оператор* A^{-1} *ограничен и определен на всем пространстве* $\mathfrak{M}$;

2) *оператор* $(\overline{P}_\varepsilon - A) A^{-1}$ *вполне непрерывен в* $\mathfrak{M}$;

3) *система* $\{A(\pi_s(x))\}_{s=1}^N$ *полна в* $\mathfrak{M}$; *то для достаточно больших* N *система* (4.127) *имеет единственное решение и справедливы соотношения*

$$\|\varphi_\varepsilon^N(x) - \varphi_\varepsilon^0(x)\| \to 0 \text{ при } N \to \infty. \quad (4.128)$$

$$\|\overline{P}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^N(x), x)\| \to 0 \text{ при } N \to \infty. \quad (4.129)$$

Заметим, что в некоторых частных случаях реализациями метода моментов являются методы Ритца и Бубнова—Галеркина.

4°. Метод наименьших квадратов состоит в том, что решение операторного уравнения $\overline{P}_\varepsilon(\varphi(x), x) = 0$ при $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$ заменяется задачей отыскания минимума функционала

$$\|\overline{P}_\varepsilon(\varphi(x), x)\| \quad (4.130)$$

или (что равносильно) задачей минимума функционала

$$\int_R \left[\overline{P}_\varepsilon(\varphi(x), x), \overline{P}_\varepsilon(\varphi(x), x)\right] dx. \quad (4.131)$$

Решением задачи минимизации функционала (4.131) является вектор-функция $\varphi_\varepsilon^0(x)$, которая удовлетворяет операторному уравнению (4.111), если существует $[\overline{P}_\varepsilon'(\varphi(x))]^{-1}$. Для

нахождения решения $\varphi_\varepsilon^0(x)$ из условия минимума (4.131) можно использовать различные методы, например, градиентные методы спуска (изложенные в предыдущих параграфах этой главы), метод Ритца и др.

5°. Метод сеток для отыскания решения $\varphi_\varepsilon^0(x)$ операторного уравнения

$$\varphi(x)=\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x),\ x) \tag{4.132}$$

или эквивалентного операторного уравнения $\overline{P}_\varepsilon(\varphi(x),\ x)=0$ при $\varphi(x)\in\mathfrak{M}$ заключается в том, что выбирается система узлов

$$x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^k\in R, \tag{4.133}$$

находятся значения

$$\varphi^1,\ \varphi^2,\ \ldots,\ \varphi^k \tag{4.134}$$

искомой функции $\varphi_\varepsilon^0(x)$ в узлах этой сетки и по ним, т. е. по x^i и φ^i $(i=1,\ \ldots,\ k)$, определяется вектор-функция $\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x)$ (при помощи интерполяционных формул Лагранжа, Ньютона, Бернштейна, Фейера и т. д.), которая представляет собой приближенное решение операторного уравнения (4.132).

Для отыскания значений (4.134) можно использовать один из следующих трех методов:

1) метод удовлетворения уравнения (4.132) в узлах сетки;

2) метод удовлетворения операторного уравнения (4.132) для функции $\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x)$;

3) метод удовлетворения операторного уравнения

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x)=\widetilde{\Phi}_\varepsilon\left(\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x),\ x\right), \tag{4.135}$$

где оператор $\widetilde{\Phi}_\varepsilon\left(\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x),\ x\right)$ определяется при помощи интерполяционных формул по значениям оператора $\overline{\Phi}_\varepsilon$:

$$\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi^1,\ x^1),\ \overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi^2,\ x^2),\ \ldots,\ \overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi^k,\ x^k). \tag{4.136}$$

Далее дадим краткое изложение этих методов.

Первый метод заключается в том, что значения $\varphi^1,\ \varphi^2,\ \ldots,\ \varphi^k$ определяются из системы уравнений

$$\varphi^i=\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi^i,\ x^i)\quad (i=1,\ \ldots,\ k). \tag{4.137}$$

Система уравнений (4.137) представляет собой обычную систему трансцендентных уравнений для нахождения k неизвестных. Имеется большое количество методов численного решения нелинейных уравнений вида (4.137), например, методы Ньютона, Гаусса — Зайделя, наискорейшего спуска и т. д. После нахождения значений $\varphi_i(i=1,\ldots,\ k)$ при помощи интерполяционных формул определяется вектор-функция

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x)\equiv\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x\,|\,x^1,\ \ldots,\ x^k;\ \varphi^1,\ \ldots,\ \varphi^k). \tag{4.138}$$

Например, при использовании интерполяционной формулы Лагранжа вектор-функция $\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)$ имеет вид

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(x \mid x^1, \ldots, x^k; \varphi^1, \ldots, \varphi^k) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \frac{\varphi^l (x - x^1)(x - x^2) \ldots (x - x^{l-1})(x - x^{l+1}) \ldots (x - x^k)}{(x^l - x^1)(x^l - x^2) \ldots (x^l - x^{l-1})(x^l - x^{l+1}) \ldots (x^l - x^k)}. \quad (4.139)$$

Второй метод заключается в том, что значения $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ определяются из условия

$$\min_{\varphi^1, \ldots, \varphi^k} I(\varphi^1, \ldots, \varphi^k), \quad (4.140)$$

где

$$I(\varphi^1, \ldots, \varphi^k) = \Big\| \varphi_\varepsilon(x \mid x^1, \ldots, x^k; \varphi^1, \ldots, \varphi^k) -$$

$$- \tilde{\Phi}_\varepsilon\Big(\tilde{\varphi}_\varepsilon(x \mid x^1, \ldots, x^k; \varphi^1, \ldots, \varphi^k), x\Big) \Big\|. \quad (4.141)$$

Из (4.140) получаем следующую систему уравнений для нахождения $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$:

$$\frac{\partial I(\varphi^1, \ldots, \varphi^k)}{\partial \varphi_l} = 0 \quad (l = 1, \ldots, k). \quad (4.142)$$

Для нахождения решения системы уравнений (4.142) также можно использовать методы решения систем нелинейных уравнений.

Третий метод заключается в том, что значения $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ определяются из условия:

$$\min_{\varphi^1, \ldots, \varphi^k} \tilde{I}(\varphi^1, \ldots, \varphi^k), \quad (4.143)$$

где

$$\tilde{I}(\varphi^1, \ldots, \varphi^k) = \Big\| \tilde{\varphi}_\varepsilon(x \mid x^1, \ldots, x^k; \varphi^1, \ldots, \varphi^k) -$$

$$- \tilde{\Phi}_\varepsilon\Big(\tilde{\varphi}_\varepsilon(x \mid x^1, \ldots, x^k; \varphi^1, \ldots, \varphi^k), x\Big) \Big\|, \quad (4.144)$$

причем $\tilde{\Phi}_\varepsilon$ определяется при помощи интерполяционных формул по значениям (4.136). Например, при использовании интерполяционной формулы Лагранжа

$$\tilde{\Phi}_\varepsilon\Big(\tilde{\varphi}_\varepsilon(x \mid x^1, \ldots, x^k; \varphi^1, \ldots, \varphi^k), x\Big) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \frac{\bar{\Phi}_\varepsilon(\varphi^l, x^l)(x - x^1)(x - x^2) \ldots (x - x^{l-1})(x - x^{l+1}) \ldots (x - x^k)}{(x^l - x^1)(x^l - x^2) \ldots (x^l - x^{l-1})(x^l - x^{l+1}) \ldots (x^l - x^k)}$$

$$(4.145)$$

из (4.143) получим следующую систему уравнений для нахождения $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$:

$$\frac{\partial \tilde{I}(\varphi^1, \ldots, \varphi^k)}{\partial \varphi^i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{4.146}$$

Дадим определение шага сетки (4.133). Шаг сетки Δ_s по s-й координате вычисляется по формуле

$$\Delta_s = \max_{i=1, \ldots, k-1} |\bar{x}_s^{i+1} - \bar{x}_s^i| \quad (s = 1, \ldots, l), \tag{4.147}$$

где l — размерность пространства R; числа $\bar{x}_s^1, \bar{x}_s^2, \ldots, \bar{x}_s^k$ являются перестановкой чисел $x_s^1, x_s^2, \ldots, x_s^k$ в возрастающем порядке. Шаг сетки (4.133) вычисляется по формуле

$$\Delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_l^2}. \tag{4.148}$$

При выполнении некоторых дополнительных предположений о свойствах решений $\varphi_\varepsilon^0(x)$ операторного уравнения (4.132) и оператора $\bar{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x), x)$ справедливы следующие теоремы.

Теорема 37

Для любого шага сетки Δ значения $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ могут быть найдены любым из указанных методов с любой наперед заданной точностью $\gamma > 0$.

Теорема 38

Если шаг сетки Δ достаточно мал, то искомая вектор-функция $\varphi_\varepsilon^0(x)$ сколь угодно точно определяется любым методом в узлах сетки (4.133), *т. е. по $\bar{\Delta} > 0$ существует такое $\delta > 0$, что*

$$\max_{i=1, \ldots, k} \|\varphi_\varepsilon^0(x^i) - \varphi^i\| \leqslant \bar{\Delta} \text{ при } \Delta \leqslant \delta. \tag{4.149}$$

Теорема 39

Если вектор-функция $\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)$ определена при помощи одной из интерполяционных формул (например, Лагранжа), то $\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)$ сколь угодно точно приближает $\varphi_\varepsilon^0(x)$, т. е. по $\bar{\Delta} > 0$ существуют $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$\left\|\varphi_\varepsilon^0(x) - \tilde{\varphi}_\varepsilon(x)\right\| \leqslant \bar{\Delta} \tag{4.150}$$

при условии, что $\Delta \leqslant \delta$ и значения $\varphi^1, \ldots, \varphi^k$ найдены с точностью $\gamma > 0$,

$$\|\varphi^i - \bar{\Phi}_\varepsilon(\varphi^i, x^i)\| < \gamma \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{4.151}$$

Для доказательства теорем 37—39 используются свойства гладкости оператора $\overline{\Phi}_\varepsilon(\cdot, x)$.

Вопросы сходимости метода сеток тесно связаны с вопросами устойчивости разностных схем и с вопросами выбора шага сетки. Этому посвящена многочисленная литература, например [22].

6°. Метод разложения решения операторного уравнения по собственным вектор-функциям оператора заключается в следующем. Рассмотрим операторное уравнение (4.132). Будем говорить, что ненулевой элемент $\varphi_\varepsilon(x) \in \mathfrak{M}$ называется собственной вектор-функцией оператора $\overline{\Phi}_\varepsilon(\cdot, x)$, если

$$\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(x), x) = \mu\varphi_\varepsilon(x), \tag{4.152}$$

где μ — некоторое вещественное число, которое будем называть собственным значением оператора $\overline{\Phi}_\varepsilon$.

Предположим, что заданы последовательность собственных значений

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k, \ldots \tag{4.153}$$

и соответствующая последовательность собственных вектор-функций оператора $\overline{\Phi}_\varepsilon$

$$\varphi_\varepsilon^1(x), \varphi_\varepsilon^2(x), \ldots, \varphi_\varepsilon^k(x), \ldots \tag{4.154}$$

Сущность метода заключается в том, что решение операторного уравнения (4.132) ищется в виде

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_\varepsilon^k(x), \tag{4.155}$$

причем коэффициенты a_k подбираются таким образом, чтобы $\tilde{\varphi}_\varepsilon(x)$ было решением (4.132). Рассмотрим следующие два метода получения систем уравнений для нахождения a_k $(k \geqslant 1)$.

Первый метод заключается в том, что вектор-функцию $\overline{\Phi}_\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_\varepsilon^k(x), x\right)$ представляют в виде

$$\overline{\Phi}_\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_\varepsilon^k(x), x\right) = \sum_{p=1}^{\infty} e_p(a_1, a_2, \ldots)\varphi_\varepsilon^p(x), \tag{4.156}$$

после этого из уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_\varepsilon^k(x) = \overline{\Phi}_\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_\varepsilon^k(x), x\right) = \sum_{p=1}^{\infty} e_p(a_1, a_2, \ldots)\varphi_\varepsilon^p(x), \tag{4.157}$$

приравнивая коэффициенты справа и слева в (4.157) при $\varphi_\varepsilon^k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$, получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов a_k:

$$a_k = e_k(a_1, a_2, \ldots) \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{4.158}$$

Для нахождения приближенного решения (4.132) берется конечный отрезок ряда (4.155), т. е. решение (4.132) ищется в виде

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon^K(x) = \sum_{k=1}^{K} a_k \varphi^k(x). \tag{4.159}$$

Тогда, поступая аналогично изложенному выше, получим следующую систему нелинейных уравнений для нахождения $a_1, a_2, \ldots, a_K$:

$$a_k = e_k(a_1, \ldots, a_K) \quad (k=1, 2, \ldots, K). \tag{4.160}$$

Второй метод заключается в том, что коэффициенты a_k в (4.155) находятся из условия

$$\min_{a_1, a_2, \ldots} I(a_1, a_2, \ldots), \tag{4.161}$$

где

$$I(a_1, a_2, \ldots) = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_\varepsilon^k(x) - \bar{\Phi}_\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_\varepsilon^k(x), x\right) \right\|. \tag{4.162}$$

Из (4.162) получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов a_k:

$$\frac{\partial I(a_1, a_2, \ldots)}{\partial a_k} = 0 \quad (k=1, 2, \ldots). \tag{4.163}$$

Для нахождения приближенного решения операторного уравнения (4.132) берется конечный отрезок ряда (4.155), т. е. решение (4.132) ищется в виде (4.159). Тогда коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_K$ находятся из условия

$$\min_{a_1, \ldots, a_K} \left\| \sum_{k=1}^{K} a_k \varphi_\varepsilon^k(x) - \bar{\Phi}_\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{K} a_k \varphi_\varepsilon^k(x), x\right) \right\|. \tag{4.164}$$

Отсюда аналогично (4.163) получим систему уравнений для нахождения коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_K$. При выполнении некоторых дополнительных предположений справедливы следующие теоремы.

Теорема 40

Для любого числа K коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_K$ могут быть найдены одним из указанных способов.

Теорема 41

При достаточно большом $K>0$ вектор-функция $\tilde{\varphi}_\varepsilon^K(x)$ является приближенным решением операторного уравнения (4.132), *т. е. по любому $\gamma>0$ найдется число $K>0$ такое, что*

$$\left\|\tilde{\varphi}_\varepsilon^K(x)-\bar{\Phi}_\varepsilon\left(\tilde{\varphi}_\varepsilon^K(x),\ x\right)\right\|\leqslant\gamma \quad \text{при } K\geqslant K(\gamma). \qquad (4.165)$$

При доказательстве теорем 40—41 в основном используются свойства системы собственных вектор-функций оператора $\bar{\Phi}_\varepsilon(\cdot,\ x)$ (полнота) и свойства решений операторного уравнения (4.132) (существование, единственность, гладкость и т. п.).

Заметим, что численное выражение собственных значений оператора $\bar{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(x),\ x)$ не используется при нахождении коэффициентов a_k. Заметим, что если от системы вектор-функций $\{\varphi_\varepsilon^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ потребовать только полноту и линейную независимость, но не требовать, чтобы каждая $\varphi_\varepsilon^k(x)$ была собственной вектор-функцией оператора $\bar{\Phi}_\varepsilon(\cdot,\ x)$, то получим еще один метод решения операторных уравнений, идейно примыкающий к методам Ритца, Бубнова — Галеркина и т. д.

ГЛАВА V

ДИНАМИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

В этой главе проводится исследование одного класса вариационных задач (так называемых динамических) при наличии связей между переменными в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этих задач получены условия оптимальности в форме линеаризованного принципа максимума и операторные уравнения для нахождения решений, рассмотрены вопросы построения алгоритмов для численного нахождения решений вариационных задач и связанных с ними операторных уравнений.

§ 1. ПОСТАНОВКА ДИНАМИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(x)}{dx} = F(y(x), \varphi(x), x), \tag{5.1}$$

$$y(0) = y^{\circ}. \tag{5.2}$$

Система (5.1) описывает динамику изменения фазовых координат $y = (y_1, \ldots, y_k)$ оптимизируемого процесса (объекта, явления), причем $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ — вектор-функция из множества M линейного метрического пространства $\mathfrak{M}$ всех суммируемых на $[0, a]$ с квадратом вектор-функций, x — независимая скалярная переменная, принимающая значения из $[0, a]$. Равенство (5.2) представляет собой задание начальных условий на фазовые координаты $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Считаем, что вектор-функция $F(y, \varphi, x) = (F_1(y, \varphi, x), \ldots, F_k(y, \varphi, x))$ непрерывно дифференцируема по y и φ в сфере достаточно большого радиуса из $E_k \times E_n$ (на произведении евклидовых пространств E_k и E_n) и непрерывна по $x \in [0, a]$, где $a > 0$ — заданное число. Будем предполагать, что множество M, как и в предыдущих главах, является подмножеством простран-

ства $\mathfrak{M}$ вектор-функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам первого и второго типов соответственно

$$0 \leqslant \varphi_j(x) \leqslant b_j \quad (j=1, \ldots, n), \tag{5.3}$$

$$V_i(\varphi) \leqslant c_i \quad (i=1, \ldots, m). \tag{5.4}$$

Задачу оптимизации можно сформулировать следующим образом.

Задача 13

Найти вектор-функцию $\varphi^0(x) \in M$ такую, что при выполнении уравнений связи (5.1)—(5.2) и ограничений (5.3)—(5.4) функционал $V_0(\varphi)$ достигает своего наименьшего возможного значения по $\varphi \in M$ для $\varphi(x) = \varphi^0(x)$:

$$V_0(\varphi^0(x)) = \min_{\varphi \in M} V_0(\varphi(x)). \tag{5.5}$$

В этой главе будем предполагать, что функционалы $V_i(\varphi)$ имеют вид

$$V_i(\varphi) = \int_0^a f_i(y(x), \varphi(x), x)\,dx \quad (i=0, 1, \ldots, m), \tag{5.6}$$

где функции $f_i(y, \varphi, x)$ непрерывны по $x \in [0, a]$ и непрерывно дифференцируемы по y и φ. Будем предполагать, что множество M вектор-функций $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющих ограничениям (5.3)—(5.4), замкнуто, ограничено и выпукло (так же как и в § 3 первой главы это предположение сделано для того, чтобы всегда существовало решение задачи минимизации линейного по φ функционала).

§ 2. УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ

Предположим, что множество M совпадает с множеством M_1 вектор-функций $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющих ограничениям (5.3), т. е. ограничения (5.4) на функционалы $V_i(\varphi)$ отсутствуют.

Прежде чем переходить к формулировке условий оптимальности, найдем выражение для функционального градиента $G_0(\varphi^0(x))$ функционала $V_0(\varphi)$ по φ при $\varphi(x) = \varphi^0(x)$ в силу системы (5.1).

Теорема 42

Градиент $G_0(\varphi^0(x))$ функционала $V_0(\varphi)$ на вектор-функции $\varphi^0(x)$ вычисляется по формуле

$$G_0(\varphi^0(x)) = \frac{\partial f_0(y(x, \varphi^0), \varphi^0(x), x)}{\partial \varphi} - B^*(\varphi^0, x)\,p(x, \varphi^0), \tag{5.7}$$

где матричная функция $B(\varphi^0, x)$ и вектор-функция $p(x, \varphi^0)$ определяются ниже.

Доказательство. Пусть $\varphi^0(x)$ — некоторая функция из $\mathfrak{M}$. Возьмем произвольно другую функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$ и найдем производную $\frac{\partial V_0(\varphi^0)}{\partial \varphi}$ функционала $V_0(\varphi)$ на функции $\varphi^0(x)$ по направлению $\varphi(x)$ [13]

$$\frac{\partial V_0(\varphi^0)}{\partial \varphi} = \frac{1}{\|\varphi\|} \frac{dV_0(\varphi^0 + \lambda\varphi)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}, \tag{5.8}$$

где

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \int_0^a \varphi_j^2(x)\, dx. \tag{5.9}$$

Имеем из (5.8)

$$\frac{\partial V_0(\varphi^0)}{\partial \varphi} = \frac{1}{\|\varphi\|} \int_0^a \frac{df_0(y(x, \varphi^0 + \lambda\varphi), \varphi^0(x) + \lambda\varphi(x), x)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} dx, \tag{5.10}$$

отсюда после дифференцирования f_0 по λ как сложной функции найдем

$$\frac{\partial V_0(\varphi^0)}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{1}{\|\varphi\|} \int_0^a \left\{ \left[\frac{\partial f_0(y(x, \varphi^0 + \lambda\varphi), \varphi^0(x) + \lambda\varphi(x), x)}{\partial y}, \frac{dy(x, \varphi^0 + \lambda\varphi)}{d\lambda} \right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial f_0(y(x, \varphi^0 + \lambda\varphi), \varphi^0(x) + \lambda\varphi(x), x)}{\partial \varphi}, \varphi(x) \right] \right\}\bigg|_{\lambda=0} dx, \tag{5.11}$$

причем $y(x, \varphi^0 + \lambda\varphi)$ — решение системы (5.1) с начальными данными (5.2) при $\varphi = \varphi^0 + \lambda\varphi$.

В (5.10)—(5.11) обозначено

$$\frac{\partial f_0(y, \varphi^0 + \lambda\varphi, x)}{\partial y} = \left(\frac{\partial f_0(y, \varphi^0 + \lambda\varphi, x)}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f_0(y, \varphi^0 + \lambda\varphi, x)}{\partial y_k} \right), \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial f_0(y, \varphi^0 + \lambda\varphi, x)}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial f_0(y, \tilde{\varphi}, x)}{\partial \varphi_1}, \ldots, \frac{\partial f_0(y, \tilde{\varphi}, x)}{\partial \varphi_n} \right)\bigg|_{\tilde{\varphi} = \varphi^0 + \lambda\varphi}. \tag{5.13}$$

Из системы (5.1) после замены порядка дифференцирования по x и λ получим, что

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy(x, \varphi^0 + \lambda\varphi)}{d\lambda} \right) = \left[\frac{\partial F(y(x, \varphi^0 + \lambda\varphi), \varphi^0 + \lambda\varphi, x)}{\partial y}, \frac{dy(x, \varphi^0 + \lambda\varphi)}{d\lambda} \right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial F(y(x, \varphi^0 + \lambda\varphi), (\varphi^0 + \lambda\varphi, x)}{\partial \varphi}, \varphi \right], \tag{5.14}$$

где обозначено

$$\frac{\partial F(y, \varphi^0+\lambda\varphi, x)}{\partial y}=\left(\frac{\partial F_l(y, \varphi^0+\lambda\varphi, x)}{\partial y_s}\right)_{s, l=1, \ldots, k}, \tag{5.15}$$

$$\frac{\partial F(y, \varphi^0+\lambda\varphi, x)}{\partial \varphi}=\left(\frac{\partial F_l(y, \tilde{\varphi}, x)}{\partial \varphi_j}\right)_{\substack{l=1, \ldots, k\\ j=1, \ldots, n}}\Bigg|_{\tilde{\varphi}=\varphi^0+\lambda\varphi}. \tag{5.16}$$

Кроме того, из (5.2) имеем

$$\frac{dy(0, \varphi^0+\lambda\varphi)}{d\lambda}=0. \tag{5.17}$$

Обозначим через $z(x\,|\,\varphi^0, \varphi)$ решение следующей системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz(x\,|\,\varphi^0, \varphi)}{dx}=A(\varphi^0, x)\,z(x\,|\,\varphi^0, \varphi)+B(\varphi^0, x)\,\varphi(x) \tag{5.18}$$

с начальными условиями

$$z(0\,|\,\varphi^0, \varphi)=0, \tag{5.19}$$

где A и B-матрицы $k\times k$ и $k\times n$ соответственно:

$$A(\varphi^0, x)=\left(\frac{\partial F_l(y(x, \varphi^0), \varphi^0(x), x)}{\partial y_s}\right)_{s, l=1, \ldots, k} \tag{5.20}$$

$$B(\varphi^0, x)=\left(\frac{\partial F_l(y(x, \varphi^0), \varphi^0(x), x)}{\partial \varphi_j}\right)_{\substack{l=1, \ldots, k\\ s=1, \ldots, n}}. \tag{5.21}$$

Совершенно очевидно в силу введенных обозначений, что

$$z(x\,|\,\varphi^0, \varphi)\equiv\frac{dy(x, \varphi^0+\lambda\varphi)}{d\lambda}\Bigg|_{\lambda=0}, \tag{5.22}$$

поэтому получим

$$\frac{\partial V_0(\varphi^0)}{\partial \varphi}=\frac{1}{\|\varphi\|}\int_0^a\left\{\left[\frac{\partial f_0(y(x, \varphi^0), \varphi^0(x), x)}{\partial y}, z(x\,|\,\varphi^0, \varphi)\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\partial f_0(y(x, \varphi^0), \varphi^0(x), x)}{\partial \varphi}, \varphi(x)\right]\right\}dx. \tag{5.23}$$

Через $W(\varphi^0, x)$ обозначим фундаментальную матрицу решений системы

$$\frac{dW}{dx}=A(\varphi^0, x)\,W, \tag{5.24}$$

удовлетворяющую начальному условию

$$W(\varphi^0, 0)=E, \tag{5.25}$$

где E — единичная матрица $k\times k$. Тогда решение $z(x\,|\,\varphi^0, \varphi)$ системы (5.18) с начальными условиями (5.19) можно представить по формуле Коши в виде

$$z(x\,|\,\varphi^0, \varphi)=W(\varphi^0, x)\int_0^x(W(\varphi^0, \xi))^{-1}B(\varphi^0, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{5.26}$$

Подставляя найденное выражение для $z(x|\varphi^0, \varphi)$ в (5.23), получим

$$\frac{\partial V_0(\varphi^0)}{\partial\varphi}=\frac{1}{\|\varphi\|}\int_0^a\left\{\left[\frac{\partial f_0(y(x,\varphi^0),\varphi^0(x),x)}{\partial\varphi},\ \varphi(x)\right]+\right.$$

$$+\left[\frac{\partial f_0(y(x,\varphi^0),\varphi^0(x),x)}{\partial y},\ W(\varphi^0,x)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\int_0^x(W(\varphi^0,\xi))^{-1}B(\varphi^0,\xi)\varphi(\xi)d\xi\right]\right\}dx. \qquad (5.27)$$

После интегрирования второго слагаемого (5.27) по частям будем иметь

$$\int_0^a\left[\frac{\partial f_0(y(x,\varphi^0),\varphi^0(x),x)}{\partial y},\ W(\varphi^0,x))\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^x(W(\varphi^0,\xi))^{-1}B(\varphi^0,\xi)\varphi(\xi)d\xi\right]dx=\int_0^a\left[(W^*(\varphi^0,x))^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\int_x^a W^*(\varphi^0,\xi)\frac{\partial f_0(y(\xi,\varphi^0),\varphi^0(\xi),\xi)}{\partial y}d\xi,\ B(\varphi^0,x)\varphi(x)\right]dx=$$

$$=-\int_0^a[p(x,\varphi^0),\ B(\varphi^0,x)\varphi(x)]\,dx, \qquad (5.28)$$

где через $p(x,\varphi^0)$ обозначено решение системы

$$\frac{dp(x,\varphi^0)}{dx}=-A^*(\varphi^0,x)p(x,\varphi^0)+C(\varphi^0,x), \qquad (5.29)$$

удовлетворяющее условию

$$p(a,\varphi^0)=0. \qquad (5.30)$$

В (5.28) звездочкой обозначается транспонирование матриц, $p=(p_1,\ldots p_k)$ — k-мерный вектор решений сопряженной системы (5.29)—(5.30), в которой

$$C(\varphi^0,x)=-\frac{\partial f_0(y(x,\varphi^0),\varphi^0(x),x)}{\partial y}. \qquad (5.31)$$

Таким образом, получим, что

$$\frac{\partial V_0(\varphi^0)}{\partial\varphi}=\frac{1}{\|\varphi\|}\int_0^a\left\{\left[\frac{\partial f_0(y(x,\varphi^0),\varphi^0(x),x)}{\partial\varphi},\ \varphi(x)\right]-\right.$$

$$\left.-[p(x,\varphi^0),\ B(\varphi^0,x)\varphi(x)]\right\}dx. \qquad (5.32)$$

Градиент $G_0(\varphi^0(x))$ функционала $V_0(\varphi)$ на функции $\varphi^0(x)$ вычисляется по формуле

$$G_0(\varphi^0(x))=\frac{\partial f_0(y(x,\varphi^0),\varphi^0(x),x)}{\partial\varphi}-B^*(\varphi^0,x)p(x,\varphi^0). \qquad (5.33)$$

Выражение для $G_0(\varphi^0(x))$ в форме (5.33) получается из определения градиента функционала V_0: направлением градиента функционала $V_0(\varphi)$ при $\varphi=\varphi^0$ называется то направление $\bar{\varphi}(x)\in\mathfrak{M}$, для которого достигает своего наибольшего возможного значения выражение для $\frac{\partial V_0(\varphi^0)}{\partial\varphi}$, т. е.

$$\max_{\varphi\in\mathfrak{M}}\frac{1}{\|\varphi\|}\int_0^a\left[\frac{\partial f_0(y(x,\varphi^0),\ \varphi^0(x),\ x)}{\partial\varphi}-B^*(\varphi^0,x)\,p(x,\varphi^0),\ \varphi(x)\right]dx \tag{5.34}$$

достигается при $\bar{\varphi}(x)\equiv G_0(\varphi^0(x))$. Итак, теорема доказана полностью.

Необходимое условие оптимальности для решения задачи 13 формулируется следующим образом.

Теорема 43

Пусть $\varphi^0(x)\in M$ — *решение задачи* 13, *тогда справедливо соотношение*

$$\min_{\varphi\in M}\int_0^a[G_0(\varphi^0(x)),\ (\varphi(x)-\varphi^0(x))]\,dx=0, \tag{5.35}$$

где $G_0(\varphi^0(x))$ — *функциональный градиент* $V_0(\varphi)$ *по* φ *при* $\varphi=\varphi^0(x)$ *в силу системы* (5.1).

Доказательство. Пусть $\varphi^0(x)\in M$ — решение задачи 13. Выберем произвольную вектор-функцию $\varphi(x)\in M$ и рассмотрим квазивариацию

$$\varphi^\lambda(x)=\varphi^0(x)+\lambda(\varphi(x)-\varphi^0(x)) \tag{5.36}$$

при $\lambda\in[0,1]$. В силу выпуклости M получим, что $\varphi^\lambda(x)\in M$ для любого $\lambda\in[0,1]$ и, кроме того,

$$V_0(\varphi^\lambda(x))\geqslant V_0(\varphi^0(x)). \tag{5.37}$$

Используем разложение Тейлора функционала $V_0(\varphi^\lambda(x))$ по λ, тогда получим

$$V_0(\varphi^\lambda(x))=V_0(\varphi^0(x))+$$
$$+\lambda\int_0^a[G_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)-\varphi^0(x)]\,dx+r(\lambda), \tag{5.38}$$

причем

$$\lim_{\lambda\to0+}=\frac{r(\lambda)}{\lambda}=0. \tag{5.39}$$

Отсюда и из неравенства (5.37) имеем

$$\int_0^a[G_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x)-\varphi^0(x)]\,dx+\frac{r(\lambda)}{\lambda}\geqslant0$$

и после перехода к пределу по $\lambda \to 0+$

$$\int_0^a [G_0(\varphi^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx \geqslant 0, \tag{5.40}$$

откуда следует справедливость доказываемого равенства (5.35) (аналогично доказательству теоремы 5 главы I).

Функционал $V_0(\varphi)$ будем называть *выпуклым* в динамических задачах оптимизации, если для любого $\lambda \in [0,1]$ и любых $\varphi^1(x)$ и $\varphi^2(x)$ справедливо неравенство

$$V_0(\varphi^1 + \lambda(\varphi^2 - \varphi^1)) \leqslant V_0(\varphi^1) + \lambda(V_0(\varphi^2) - V_0(\varphi^1)). \tag{5.41}$$

Достаточность условия (5.35) для выпуклого устанавливается аналогично теореме 6 главы I.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Будем по-прежнему предполагать, что в задаче 13 отсутствуют ограничения на функционалы $V_i(\varphi)$, т. е. множество M совпадает с множеством M_1 вектор-функций $\varphi(x) \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant \varphi_j(x) \leqslant b_j \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{5.42}$$

Применим в этом случае к задаче 13 принцип максимума Понтрягина [20]. Будем через $y(x, \varphi)$ и $p(x, \varphi)$ обозначать решения систем

$$\frac{dy}{dx} = F(y, \varphi, x), \quad y(0) = y^0, \tag{5.43}$$

$$\frac{dp}{dx} = -A^*(y, \varphi, x)p + C(y, \varphi, x), \quad p(a) = 0, \tag{5.44}$$

где

$$A(y, \varphi, x) = \left(\frac{\partial F_l(y, \varphi, x)}{\partial y_s}\right)_{s,\, l = 1, \ldots, k}, \tag{5.45}$$

$$C(y, \varphi, x) = \frac{\partial f_0(y, \varphi, x)}{\partial y}. \tag{5.46}$$

Кроме того, введем в рассмотрение функцию $H(p, y, \varphi, x)$ в виде

$$H(p, y, \varphi, x) = -f_0(y, \varphi, x) + [p, F(y, \varphi, x)]. \tag{5.47}$$

Справедливо [20] следующее утверждение.

Теорема 44

Пусть $\varphi^0(x)$ — решение задачи 13, тогда существуют такие вектор-функции $y^0(x)$ и $p^0(x)$ (решение краевой задачи (5.43)—(5.44) при $\varphi = \varphi^0(x)$), что

$$H(p^0, y^0, \varphi^0, x) = \max_{\substack{0 < \varphi_j(x) < b_j \\ (j = 1, \ldots, n)}} H(p^0, y^0, \varphi, x). \tag{5.48}$$

Введем обозначения

$$\hat{H}(p, y, \varphi, \tilde{\varphi}, x) = -\left[\frac{\partial f_0(y, \varphi, x)}{\partial \varphi} - B^*(y, \varphi, x)p, \tilde{\varphi}\right], \quad (5.49)$$

где

$$B(x, \varphi, x) = \left(\frac{\partial F_l(y, \varphi, x)}{\partial \varphi_j}\right)_{\substack{l=1, \ldots, k \\ j=1, \ldots, n}}. \quad (5.50)$$

Из теоремы 43 в случае $M = M_1$ получим, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 45

Пусть $\varphi^0(x)$ — *решение задачи* 13, *тогда существуют такие вектор-функции* $y^0(x)$ *и* $p^0(x)$ — *решения систем* (5.1)—(5.2) *и* (5.29)—(5.30), *что*

$$\hat{H}(p^0, y^0, \varphi^0, \varphi^0, x) = \max_{\substack{0 < \varphi_j(x) < b_j \\ (j=1, \ldots, n)}} \hat{H}(p^0, y^0, \varphi^0, \varphi, x^0). \quad (5.51)$$

Заметим, что в силу введенных обозначений

$$\hat{H}(p, y, \varphi, \tilde{\varphi}, x) = \left[\frac{\partial H(p, y, \varphi, x)}{\partial \varphi}, \tilde{\varphi}\right].$$

Отсюда следует, что

$$H(p, y, \varphi, x) = \hat{H}(p, y, \varphi, \varphi, x) \quad (5.52)$$

в случае, если правые части F системы (5.1) и подынтегральная функция f_0 функционала V_0 линейны по φ.

Таким образом, условия оптимальности в теоремах 43 и 45 совпадают с условиями оптимальности по принципу максимума Понтрягина, полученными в теореме 44, если F и f_0 линейны по φ.

В общем случае (F или f_0 нелинейны по φ) справедливость условия оптимальности в теоремах 43 и 45 следует из выполнения условий оптимальности в теореме 44 по принципу максимума. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, так как множество вектор-функций $\varphi^0(x)$, удовлетворяющих условию (5.48) в теореме 44, содержится во множестве вектор-функций $\varphi^0(x)$, для которых справедливы условия (5.35) или (5.51) в теоремах 43 и 45 соответственно.

Однако задача нахождения вектор-функции $\varphi^0(x)$ из условий (5.35) или (5.51) несколько проще, так как задача минимизации линейного функционала

$$\int_0^a [G_0(\varphi^0(x)), \varphi(x)]\, dx$$

по вектор-функциям $\varphi(x) \in M_1$ проще (решение находится в аналитической форме и потому можно получить операторное уравнение для отыскания $\varphi^0(x)$), чем задача максимизации по φ функции $H(p, y, \varphi, x)$.

Нетрудно доказать, что $\varphi^0(x)$ — решение задачи 13 в нашем частном случае (когда отсутствуют ограничения (5.4)) должно быть решением следующего операторного уравнения:

$$\varphi(x) = \overline{\Phi}(\varphi(x), x), \tag{5.53}$$

где оператор $\overline{\Phi} = (\overline{\Phi}_1, \ldots, \overline{\Phi}_n)$ имеет вид

$$\overline{\Phi}_j(\varphi(x), x) = \frac{b_j}{2}[1 - \operatorname{sign} G_0^j(\varphi(x))] \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{5.54}$$

Поэтому результаты, полученные в теоремах 43 и 45, целесообразно называть «линеаризованным принципом максимума» [27, 30].

§ 4. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ПРИ УЧЕТЕ ОГРАНИЧЕНИЙ МЕТОДОМ СВЕДЕНИЯ К МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧЕ

Будем теперь снова предполагать, что в задаче 13 имеются как ограничения (5.3), так и (5.4). Для учета ограничений (5.4) на функционалы $V_i(\varphi)$ в динамических вариационных задачах можно использовать результаты главы II вполне аналогично тому, как это сделано для учета ограничений в нединамических вариационных задачах. Используем метод сведения к минимаксной задаче для учета ограничений второго типа в задаче 13. Тогда получим задачу (аналогичную задаче 7).

Задача 14

Найти седловую точку $\{\varphi^0(x), \psi^0\}$ функционала Лагранжа $h(\varphi(x), \psi)$ по $\varphi(x) \in M_1$ и $\psi \geqslant 0$, где

$$h(\varphi(x), \psi) = V_0(\varphi) + [\psi, V(\varphi) - c], \tag{5.55}$$

причем $V(\varphi) = (V_1(\varphi), \ldots, V_m(\varphi))$, $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$, $c = (c_1, \ldots, c_m)$, а функции $y(x)$ (которые входят в $V_i(\varphi)$) находятся как решение системы (5.1)—(5.2).

Будем предполагать, что седловая точка функционала Лагранжа $h(\varphi(x), \psi)$ существует, тогда можно доказать (аналогично доказательству теоремы 9), что имеет место теорема.

Теорема 46

Если $\{\varphi^0(x), \psi^0\}$ является решением задачи 14, то $\varphi^0(x)$ — решение задачи 13 и, кроме того, выполнено условие

$$[\psi^0, V(\varphi^0) - c] = 0. \tag{5.56}$$

Пусть $\varphi^0(x) \in M_1$ и $\psi^0 \geqslant 0$ — решение задачи 14. Из определения седловой точки функционала Лагранжа $h(\varphi(x), \psi)$ следует, что $\varphi^0(x)$ является решением следующей динамической вариационной задачи.

Задача 15

Найти такую вектор-функцию $\varphi^0(x) \in M_1$, что функционал

$$\hat{V}_0(\varphi) = V_0(\varphi) + [\psi^0, V(\varphi) - c] \tag{5.57}$$

достигает своего наименьшего возможного значения при $\varphi(x) = \varphi^0(x)$, т. е.

$$\hat{V}_0(\varphi^0) = \min_{\substack{0 < \varphi(x) < b \\ \frac{dy}{dt} = F(y, \varphi, x) \\ y(0) = y_0}} \hat{V}_0(\varphi). \tag{5.58}$$

Задача 15 полностью аналогична задаче 13, если функционал $V_0(\varphi)$ заменить на $\hat{V}_0(\varphi)$ и ограничения (5.4) отбросить. Применим результаты § 2 этой главы, тогда получим справедливость следующего утверждения.

Теорема 47

Для того чтобы $\varphi^0(x)$ было решением задачи 13, *необходимо, чтобы существовал вектор $\psi^0 \geqslant 0$, удовлетворяющий* (5.56), *и чтобы выполнялось равенство*

$$\min_{0 < \varphi(x) < b} \int_0^a [\hat{G}(\varphi^0(x), \psi^0), \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx = 0, \tag{5.59}$$

где $\hat{G}(\varphi^0(x), \psi^0) = (\hat{G}^1(\varphi^0(x), \psi^0), \ldots, \hat{G}^n(\varphi^0(x)\psi^0))$ — функциональный градиент $\hat{V}_0(\varphi)$ в силу системы (5.1)—(5.2) *при $\varphi = \varphi^0(x)$.*

В (5.59) выражение для $\hat{G}(\varphi^0(x), \psi^0)$ имеет вид

$$\hat{G}(\varphi^0(x), \psi^0) = G_0(\varphi^0(x)) + G^*(\varphi^0(x))\psi^0, \tag{5.60}$$

при этом $G_0(\varphi^0(x))$ — функциональный градиент $V_0(\varphi)$ при $\varphi(x) = \varphi^0(x)$, $G(\varphi^0(x))$ — матрица $m \times n$, строками которой являются $G_i(\varphi^0(x))$ — функциональные градиенты функционалов $V_i(\varphi)$ при $\varphi(x) = \varphi^0(x)$,

$$G_i(\varphi^0(x)) = \frac{\partial f_i(y(x, \varphi^0), \varphi^0(x), x)}{\partial \varphi} - B^*(\varphi^0, x)p(x, \varphi^0)$$
$$(i = 1, \ldots, m). \tag{5.61}$$

Таким образом, для динамической вариационной задачи 13 минимизации функционала $V_0(\varphi)$ при ограничениях (5.3) — (5.4) на решениях системы (5.1) — (5.2) условия оптимальности после учета ограничений (5.4) методом сведения к минимаксной задаче заключаются в том, что существует такой вектор $\psi^0 \geqslant 0$ и выполнены условия (5.56) — (5.59).

Из (5.59) можно найти аналитическое выражение для решения $\varphi^0(x)$ задачи 13 через ψ^0, $\varphi^0(x)$, $y^0(x)$, $p^0(x)$, причем ψ^0 находится из условия (5.56), $y^0(x)$ и $p^0(x)$ — решения систем (5.1) — (5.2) и (5.29) — (5.30) соответственно.

Теорема 48

Пусть $\varphi^0(x) \in M_1$ — решение задачи 13, тогда $\varphi^0(x)$ является решением следующего операторного уравнения:

$$\varphi(x) = \hat{\Phi}(\varphi(x), \psi^0, y^0(x), p^0(x), x), \tag{5.62}$$

где оператор $\hat{\Phi} = (\hat{\Phi}_1, \ldots, \hat{\Phi}_n)$ имеет вид

$$\hat{\Phi}_j = \frac{b_j}{2}\{1 - \operatorname{sign} \hat{G}^j(\varphi(x), \psi^0)\} \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{5.63}$$

вектор $\psi^0 = (\psi_1^0, \ldots, \psi_m^0)$ с неотрицательными компонентами находится из условия

$$[\psi^0, V(\varphi^0) - c] = 0, \tag{5.64}$$

вектор-функции $y^0(x)$ и $p^0(x)$ — решения систем

$$y^0(x) = y^0 + \int_0^x F(y^0(\xi), \varphi^0(\xi), \xi)\, d\xi, \tag{5.65}$$

$$p^0(x) = \int_a^x \{-A^*(\varphi^0, \xi) p^0(\xi) + C(\varphi^0, \xi)\}\, d\xi, \tag{5.66}$$

эквивалентных (5.1) — (5.2) *и* (5.29) — (5.30).

Если совокупность переменных $\{\varphi(x), \psi, y(x), p(x)\}$ обозначить через $u(x)$, то получим, что $(n+m+2k)$-мерная вектор-функция $u^0(x)$ является решением операторного уравнения

$$u(x) = \hat{\Gamma}(u(x), x), \tag{5.67}$$

где оператор $\hat{\Gamma}$ из $E_{(n+m+2k+1)}$ в $E_{(n+m+2k)}$ определяется из теоремы 48 очевидным образом.

§ 5. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ПРИ УЧЕТЕ ОГРАНИЧЕНИЙ МЕТОДОМ ПОГРУЖЕНИЯ

Будем предполагать, как и в § 4, что в задаче 13 имеются ограничения (5.3) — (5.4). Используем метод погружения для учета ограничений второго типа в задаче 13, тогда получим следующую задачу (аналогичную задаче 9).

Задача 16

Найти вектор-функцию $\varphi_\psi^0(x) \in M_1$ из условия минимума функционала $\hat{V}_\psi(\varphi)$ на решениях системы (5.1)—(5.2), т. е.

$$\hat{V}_\psi(\varphi_\psi^0(x)) = \min_{\substack{0<\varphi(x)<b \\ \frac{dy}{dx}=F(y,\varphi,x) \\ y(0)=y^0}} \hat{V}_\psi(\varphi(x)), \tag{5.68}$$

где

$$\hat{V}_\psi(\varphi) = V_0(\varphi) + \frac{\psi}{2}\sum_{i=1}^{m}(V_i(\varphi)-c_i)\times$$
$$\times[V_i(\varphi)-c_i+|V_i(\varphi)-c_i|]. \tag{5.69}$$

Для решения $\varphi_\psi^0(x)$ задачи 16 можно получить свойства, обобщающие результаты теорем 11—13 на случай динамических вариационных задач. Задача 16 аналогична задаче 13, если функционал $V_0(\varphi)$ заменить на $\hat{V}_\psi(\varphi)$ и ограничения (5.4) отбросить. Применим результаты § 2 этой главы, тогда получим справедливость следующего утверждения.

Теорема 49

Для того чтобы $\varphi_\psi^0(x)$ было решением задачи 16, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$\min_{0<\varphi(x)<b}\int_0^a [\hat{G}_\psi(\varphi_\psi^0(x)),\ \varphi(x)-\varphi_\psi^0(x)]\,dx = 0, \tag{5.70}$$

где $\hat{G}_\psi(\varphi_\psi^0(x)) = (\hat{G}_\psi^1(\varphi_\psi^0(x)), \ldots, \hat{G}_\psi^n(\varphi_\psi^0(x)))$ — функциональный градиент $\hat{V}_\psi(\varphi(x))$ в силу системы (5.1)—(5.2) *при $\varphi = \varphi_\psi^0(x)$:*

$$\hat{G}_\psi(\varphi_\psi^0(x)) = G_0(\varphi_\psi^0(x)) + \psi\sum_{i=1}^{m}|V_i(\varphi_\psi^0(x))-c_i|\,G_i(\varphi_\psi^0(x)). \tag{5.71}$$

В (5.71) через $G_i(\varphi_\psi^0(x))$ обозначены функциональные градиенты $V_i(\varphi)$ в силу системы (5.1)—(5.2) при $\varphi = \varphi_\psi^0(x)$:

$$G_i(\varphi_\psi^0(x)) = \frac{\partial f_i(y(x,\varphi_\psi^0),\ \varphi_\psi^0(x),\ x)}{\partial\varphi} - B^*(\varphi_\psi^0,\ x)\,p_\psi(x,\ \varphi_\psi^0)$$
$$(i=1,\ \ldots,\ m), \tag{5.72}$$

где вектор-функция $p_\psi(x,\ \varphi_\psi^0)$ — решение системы

$$\frac{dp_\psi}{dx} = -A^*(\varphi_\psi^0,\ x)\,p_\psi + C_\psi(\varphi_\psi^0,\ x), \tag{5.73}$$

удовлетворяющее условию

$$p_\psi(a, \varphi_\psi^0) = 0. \tag{5.74}$$

В системе (5.73) вектор-функция $C_\psi(\varphi_\psi^0, x)$ представлена в виде

$$C_\psi(\varphi_\psi^0, x) = \frac{\partial f_0(y(x, \varphi_\psi^0), \varphi_\psi^0(x), x)}{\partial y} +$$

$$+ \psi \sum_{i=1}^{m} | V_i(\varphi_\psi^0) - c_i | \frac{\partial f_i(y(x, \varphi_\psi^0), \varphi_\psi^0(x), x)}{\partial y}. \tag{5.75}$$

Таким образом, для приближенных решений динамической вариационной задачи 13 (минимизации функционала $V_0(\varphi)$ при ограничениях (5.3) — (5.4) на решениях системы (5.1) — (5.2)) условия оптимальности после учета ограничений (5.4) методом погружения заключаются в том, что выполнено условие (5.70).

Из (5.70) можно найти аналитическое выражение для решения $\varphi_\psi^0(x)$ задачи 16 (которое является приближенным решением задачи 13) через ψ^0, $\varphi_\psi^0(x)$, $y_\psi(x, \varphi_\psi^0) \equiv y_\psi^0(x)$, $p_\psi(x, \varphi_\psi^0) \equiv \equiv p_\psi^0(x)$, причем $\psi^0 = \psi_\varepsilon$ находится по заданной величине $\varepsilon > 0$ (определяющей точность выполнения ограничений (5.4), где $y_\psi^0(x)$ и $p_\psi^0(x)$ — решения систем (5.1)—(5.2) и (5.73)—(5.74) соответственно.

Теорема 50

Пусть $\varphi_\psi^0(x) \in M_1$ — решение задачи 16, тогда $\varphi_\psi^0(x)$ является решением следующего операторного уравнения:

$$\varphi_\psi(x) = \overline{\Phi}_\psi(\varphi_\psi(x), \psi^0, y_\psi^0(x), p_\psi^0(x)), \tag{5.76}$$

где $\overline{\Phi}_\psi = (\overline{\Phi}_{\psi_1}, \ldots, \overline{\Phi}_m)$ имеет вид

$$\overline{\Phi}_{\psi j} = \frac{b_j}{2} \{1 - \operatorname{sign} \hat{G}_\psi^j(\varphi_\psi^0(x))\}, \tag{5.77}$$

вектор-функции $y_\psi^0(x)$ и $p_\psi^0(x)$ — решения систем

$$y_\psi^0(x) = y^0 + \int_0^x F(y_\psi^0(\xi), \varphi_\psi^0(\xi), \xi)\, d\xi, \tag{5.78}$$

$$p_\psi^0(x) = \int_a^x \{-A^*(\varphi_\psi^0, \xi) p_\psi^0(\xi) + C_\psi(\varphi_\psi^0, \xi)\}\, d\xi, \tag{5.79}$$

причем $\psi = \psi_\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ задано.

Если совокупность переменных $\{\varphi_\psi(x), y_\psi(x), p_\psi(x)\}$ обозначить через $u_\psi(x)$, то получим, что $(n+2k)$-мерная вектор-функция $u_\psi^0(x)$ является решением операторного уравнения

$$u_\psi(x) = \Gamma_\psi(u_\psi(x), x), \tag{5.80}$$

где оператор Γ_ψ из $E_{(n+2k+1)}$ в $E_{(n+2k)}$ определяется из теоремы 50 очевидным образом.

§ 6. ФОРМУЛИРОВКА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В этом и следующем параграфах рассматриваются некоторые вопросы исследования методов численного решения динамических вариационных задач и связанных с ними операторных уравнений.

Все многообразие численных методов решения этих задач условно можно разбить на два основных класса.

К первому классу относятся численные методы решения динамических вариационных задач при наличии ограничений только первого типа без предварительного использования условий оптимальности и вывода операторных уравнений. При этом условия оптимальности используются лишь для проверки пригодности полученного решения.

Ко второму классу методов относятся численные методы решения операторных уравнений, которым должно удовлетворять решение вариационной задачи.

Ниже будет дана формулировка некоторых численных методов первого и второго классов. В силу того, что эти методы весьма многочисленны и их обосновании требует более тщательного и глубокого анализа численных методов вычислительной математики вообще, ниже приводится только краткая формулировка методов.

1.° Итерационные градиентные методы спуска. Предположим, сначала, что в задаче 13 отсутствуют ограничения (5.3) — (5.4) первого и второго типов. В этом случае общая схема итерационных градиентных методов спуска состоит в следующем.

1) Выбирается произвольным образом первое приближение $\varphi^1(x) \in \mathfrak{M}$, находятся решения $y^1(x)$ и $p^1(x)$ систем при $\varphi(x) = \varphi^1(x)$

$$\frac{dy(x)}{dx} = F(y(x),\ \varphi(x),\ x),\ y(0) = y^0, \tag{5.81}$$

$$\frac{dp(x)}{dx} = -A^*(\varphi(x),\ x)\,p(x) + C(\varphi(x),\ x),\ p(a) = 0. \tag{5.82}$$

2) Вычисляется функциональный градиент $G_0(\varphi^1(x))$ по формуле

$$G_0(\varphi(x)) = \frac{\partial f_0(y(x),\ \varphi(x),\ x)}{\partial \varphi} - B^*(\varphi,\ x)\,p(x) \tag{5.83}$$

при $\varphi(x) = \varphi^1(x)$, $y(x) = y^1(x)$ и $p(x) = p^1(x)$.

3) Если при этом окажется, что

$$\|G_0(\varphi^1(x))\| = 0, \tag{5.84}$$

то $\varphi^1(x)$ будет искомым решением задачи 13 после дополнительного исследования на оптимальность.

4) В противном случае, т. е. если (5.84) не имеет места, второе приближение $\varphi^2(x)$ вычисляется по формуле

$$\varphi^2(x)=\varphi^1(x)-\lambda^1 G_0(\varphi^1(x)), \tag{5.85}$$

где величина шага $\lambda^1 \geqslant 0$ находится из дополнительного условия так, чтобы

$$V_0(\varphi^2(x)) \leqslant V_0(\varphi^1(x)). \tag{5.86}$$

После этого процесс продолжается аналогично вышеизложенному алгоритму.

5) Пусть вектор-функция $\varphi^s(x)$ — s-е приближение уже найдено. При этом вектор-функция $\varphi^s(x)$ будет «подозрительной» на оптимальность, если

$$\|G_0(\varphi^s(x))\|=0. \tag{5.87}$$

В противном случае $(s+1)$-е приближение $\varphi^{s+1}(x)$ находится в виде

$$\varphi^{s+1}(x)=\varphi^s(x)-\lambda^s G_0(\varphi^s(x)). \tag{5.88}$$

Величина шага $\lambda^s \geqslant 0$ подбирается таким образом, чтобы

$$V_0(\varphi^{s+1}(x)) \leqslant V_0(\varphi^s(x)), \tag{5.89}$$

причем на выбор λ^s могут быть поставлены дополнительные условия:

а) в методе простой итерации

$$\lambda^s=\lambda=\text{const} \geqslant 0; \tag{5.90}$$

б) в методе условного наискорейшего спуска $\lambda^s \geqslant 0$ находится из условия

$$V_0(\varphi^s-\lambda^s G_0(\varphi^s))=\min_{\lambda \in [0,\,1]} V_0(\varphi^s-\lambda G_0(\varphi^s)); \tag{5.91}$$

в) в методе наискорейшего спуска $\lambda^s \geqslant 0$ находится из условия

$$V_0(\varphi^s-\lambda^s G_0(\varphi^s))=\min_{\lambda>0} V_0(\varphi^s-\lambda G_0(\varphi^s)). \tag{5.92}$$

Однако на практике решения задач оптимизации для нахождения величины шага λ^s используют метод „половинения-удвоения", который заключается в следующем. Выбирают произвольно пробное значение $\lambda_1^s \geqslant 0$. Если при этом окажется, что

$$V_0(\varphi^s-\lambda_1^s G_0(\varphi^s)) < V_0(\varphi^s), \tag{5.93}$$

то полагают λ_2^s равным

$$\lambda_2^s=2\lambda_1^s. \tag{5.94}$$

В противном случае, т. е. если

$$V_0(\varphi^s - \lambda_1^s G_0(\varphi^s)) \geqslant V_0(\varphi^s), \tag{5.95}$$

то λ_2^s полагают равным

$$\lambda_2^s = \frac{1}{2}\lambda_1^s \tag{5.96}$$

и продолжают далее процесс отыскания шага подобным образом. Если после того, как найдены r пробных значений оказывается, что

$$V_0(\varphi^s - \lambda_r^s G_0(\varphi^s)) < V_0(\varphi^s), \tag{5.97}$$

а

$$V_0(\varphi^s - 2\lambda_r^s G_0(\varphi^s)) \geqslant V_0(\varphi^s), \tag{5.98}$$

то величину шага λ^s полагают равной λ_r^s:

$$\lambda^s = \lambda_r^s, \tag{5.99}$$

где r — некоторое целое число.

Можно доказать сходимость изложенных выше итерационных методов решения задачи 13 для случая выпуклого в силу системы (5.1) функционала $V_0(\varphi)$, т. е. последовательность значений $V_0(\varphi^s)$ будет сходиться, мотонно не убывая, к минимальному значению функционала V_0:

$$\lim_{s\to\infty} V_0(\varphi^s(x)) = \min_{\substack{\varphi(x)\in\mathfrak{M} \\ \frac{dy}{dx} = F(y,\varphi,x) \\ y(0)=y^0}} V_0(\varphi(x)). \tag{5.100}$$

Кроме того, в силу компактности любого ограниченного множества в пространстве $\mathfrak{M}$ последовательность вектор-функций $\varphi^s(x)$ будет слабо сходящейся к решению $\varphi^0(x)$ задачи 13, если существует такое число $\gamma < +\infty$, что

$$\int_0^a [\varphi^s(x), \varphi^s(x)]\,dx \leqslant \gamma \quad \text{для всех } s = 1, 2, \ldots. \tag{5.101}$$

2°. Непрерывные градиентные методы спуска. В непрерывных градиентных методах спуска ищется однопараметрическое семейство вектор-функций $\varphi^\tau(x)$ при $\tau \geqslant 0$ как решение задачи Коши для системы

$$\frac{d\varphi^\tau(x)}{d\tau} = -\lambda(\tau)\,G_0(\varphi^\tau(x)) \tag{5.102}$$

с начальными данными

$$\varphi^\tau(x)\big|_{\tau=0} = \varphi^1(x), \tag{5.103}$$

причем вектор-функция $\varphi^1(x) \in \mathfrak{M}$ выбирается произвольным образом, $\lambda(\tau) > 0$ — произвольная скалярная функция $\tau \geqslant 0$,

$$0 < \lambda^0 \leqslant \lambda(\tau) \leqslant \lambda^1 < +\infty \quad \text{при всех } \tau \geqslant 0, \tag{5.104}$$

где λ^0 и λ^1 — некоторые постоянные.

В уравнении (5.102) для вычисления $G_0(\varphi^\tau(x))$ при каждом $\tau \geqslant 0$ следует находить решения $y^\tau(x)$ и $p^\tau(x)$ систем

$$\frac{dy^\tau(x)}{dx} = F(y^\tau(x), \varphi^\tau(x), x), \quad y^\tau(0) = y^0, \tag{5.105}$$

$$\frac{dp^\tau(x)}{dx} = -A^*(\varphi^\tau, x)p^\tau(x) + C(\varphi^\tau, x), \quad p^\tau(a) = 0. \tag{5.106}$$

Так же, как и в случае итерационных градиентных методов спуска, можно доказать, что

$$\lim_{\tau \to +\infty} V_0(\varphi^\tau(x)) = \min_{\substack{\varphi(x) \in \mathfrak{M} \\ \frac{dy}{dx} = F(y, \varphi, y) \\ y(0) = y^0}} V_0(\varphi(x)) \tag{5.107}$$

для случая выпуклого в силу системы (5.1)—(5.2) функционала $V_0(\varphi)$, при этом семейство вектор-функций $\varphi^\tau(x)$ слабо сходится для $\tau \to +\infty$.

3°. Прямой метод Ритца. По-прежнему будем предполагать, что в задаче 13 ограничения (4.3) — (4.4) отсутствуют. Прямой метод Ритца для решения задачи 13 в этом случае состоит в том, что приближенное решение задачи 13 ищется в виде

$$\varphi_j^0(\alpha, x) = \sum_{s=1}^{N} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl}^s \pi_l^s(x) \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{5.108}$$

где $\pi^1(x), \ldots, \pi^N(x)$ — заданная система линейно-независимых вектор-функций из $\mathfrak{M}$, а коэффициенты Ритца $\alpha^1, \ldots, \alpha^N$ находятся из условия минимума по $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^N) \in E_{n \cdot N}$ функции

$$v(\alpha) = V_0(\varphi^0(\alpha, x)). \tag{5.109}$$

Для нахождения коэффициентов Ритца α_{jl}^s требуется найти решение системы нелинейных уравнений

$$\frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha_{jl}^s} = 0 \quad (j, l = 1, \ldots, n; \ s = 1, \ldots, N). \tag{5.110}$$

Найдем выражение для левой части системы (5.110).

Теорема 51

Система уравнений (5.110) *для нахождения коэффициентов Ритца* α_{jl}^s *имеет вид*

$$\int_0^a G_0^j(\varphi^0(\alpha, x))\pi_l^s(x)\,dx = 0 \quad (j, l = 1, \ldots, n; \ s = 1, \ldots, N), \tag{5.111}$$

где $G_0(\varphi^0(\alpha, x)) = G_0^1(\varphi^0(\alpha, x)), \ldots, G_0^n(\varphi^0(\alpha, x))$ — *функциональный градиент* $V_0(\varphi)$ *в силу системы* (5.1)—(5.2) *при* $\varphi = \varphi^0(\alpha, x)$.

Доказательство. Функция $v(\alpha)$ имеет вид

$$v(\alpha) = \int_0^a f_0\{y(x, \varphi^0(\alpha, x)), \varphi^0(\alpha, x), x\}\, dx, \tag{5.112}$$

поэтому получим

$$\frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha_{jl}^s} = \int_0^a \left\{ \frac{\partial f_0(y(x, \varphi^0(\alpha, x)), \varphi^0(\alpha, x), x)}{\partial \varphi_j} \pi_l^s(x) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial f_0(y(x, \varphi^0(\alpha, x)), \varphi^0(\alpha, x), x)}{\partial y}, \frac{\partial y(x, \varphi^0(\alpha, x))}{\partial \alpha_{jl}^s} \right] \right\} dx. \tag{5.113}$$

После дифференцирования левой и правой частей в (5.1)-(5.2) и замены порядка дифференцирования по α_{jl}^s и по x получим систему линейных дифференциальных уравнений для нахождения вектор-функций

$$z_{jl}^s(x) = \frac{\partial y(x, \varphi^0(\alpha, x))}{\partial \alpha_{jl}^s} \quad (j, l = 1, \ldots, n;\ s = 1, \ldots, N) \tag{5.114}$$

в следующей форме:

$$\frac{d}{dx}\left(z_{j,l}^s(x)\right) = \frac{\partial F(y(x, \varphi^0(\alpha, x)), \varphi^0(\alpha, x), x)}{\partial y} z_{jl}^s +$$

$$+ \frac{\partial F(y(x, \varphi^0(\alpha, x)), \varphi^0(\alpha, x), x}{\partial \varphi_j} \pi_l^s(x), \tag{5.115}$$

$$z_{jl}^s(0) = 0. \tag{5.116}$$

Тогда выражение для $\frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha_{jl}^s}$ будет иметь вид

$$\frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha_{jl}^s} = \int_0^a \left\{ \frac{\partial f_0(y(x, \varphi^0(\alpha, x)), \varphi^0(\alpha, x), x)}{\partial y_j} \pi_l^s(x) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial f_0(y(x, \varphi^0(\alpha, x)), \varphi^0(\alpha, x), x)}{\partial y}, z_{jl}^s(x) \right] \right\} dx. \tag{5.117}$$

Решение системы (5.115)—(5.116) можно записать по формуле Коши

$$z_{jl}^s(x) = W(\varphi^0(\alpha, x), x) \times$$

$$\times \int_0^x W^{-1}(\varphi^0(\alpha, \xi), \xi)\, B_j(\varphi^0(\alpha, \xi), \xi)\, \pi_l^s(\xi)\, d\xi, \tag{5.118}$$

где B_j — j-й столбец матрицы

$$B(\varphi^0(\alpha, x), x) = \frac{\partial F(y(x, \varphi^0(\alpha, x)), \varphi^0(\alpha, x), x)}{\partial \varphi}, \tag{5.119}$$

$W(\varphi^0(\alpha, x), x)$ — фундаментальная матрица решений системы

$$\frac{dW}{dx} = A(\varphi^0(\alpha, x), x)\, W, \tag{5.120}$$

удовлетворяющая условию

$$W(\varphi^0(\alpha, x), 0) = E, \tag{5.121}$$

матрица $A(\varphi^0(\alpha, x), x)$ имеет вид

$$A(\varphi^0(\alpha, x), x) = \frac{\partial F(y(x, \varphi^0(\alpha, x)), \varphi^0(\alpha, x), x)}{\partial y}. \tag{5.122}$$

Подставим (5.118) в правую часть (5.117) и проинтегрируем по частям* второе слагаемое в (5.117), тогда получим, что

$$\frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha_{jl}^s} = \int_0^a \left\{ \frac{\partial f_0(y(x, \varphi^0(\alpha, x)), \varphi^0(\alpha, x), x)}{\partial \varphi_j} \pi_l^s(x) + \right.$$

$$+ \left[(W^*(\varphi^0(\alpha, x), x))^{-1} \int_x^a W^*(\varphi^0(\alpha, \xi), \xi) \times \right.$$

$$\left. \left. \times \frac{\partial f_0(y(\xi, \varphi^0(\alpha, \xi)), \varphi^0(\alpha, \xi), \xi)}{\partial y} d\xi,\ B_j(\varphi^0(\alpha, x), x) \right] \pi_l^s(x) \right\} dx, \tag{5.123}$$

или

$$\frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha_{jl}^s} = \int_0^a \left\{ \frac{\partial f_0(y(x, \varphi^0(\alpha, x), \varphi^0(\alpha, x), x)}{\partial \varphi_l} - \right.$$

$$\left. - [p(x, \varphi^0(\alpha, x)), B_j(\varphi^0(\alpha, x), x)] \right\} \pi_l^s(x)\, dx, \tag{5.124}$$

где через $p(x, \varphi^0(\alpha, x))$ обозначено решение системы

$$\frac{dp}{dx} = -A^*(\varphi^0(\alpha, x), x)\, p + C(\varphi^0(\alpha, x), x), \tag{5.125}$$

удовлетворяющее условию

$$p(x, \varphi^0(\alpha, x)) = 0. \tag{5.126}$$

В (5.125) вектор-функция $C(\varphi^0(\alpha, x), x)$ имеет вид

$$C(\varphi^0(\alpha, x), x) = -\frac{\partial f_0(y(x, \varphi^0(\alpha, x)), \varphi^0(\alpha, x), x)}{\partial y}. \tag{5.127}$$

Выражение в правой части (5.124) и является доказываемым (5.111), поскольку

$$G_0^j(\varphi^0(\alpha, x)) = \left\{ \frac{\partial f_0(y(x, \varphi^0(\alpha, x)), \varphi^0(\alpha, x), x)}{\partial \varphi_j} - \right.$$

$$\left. - [p(x, \varphi^0(\alpha, x)), B_j(\varphi^0(\alpha, x), x)] \right\}.$$

---

* При этом используется следующее правило интегрирования по частям:

$$\int_0^x \left[u(x), \int_0^x v(\xi)\, d\xi \right] dx = \int_0^a \left[v(x), \int_x^a u(\xi)\, d\xi \right] dx$$

для любых вектор-функций $u(x)$ и $v(x)$.

Условие (5.111) означает, что коэффициенты Ритца α_{jl}^s должны быть таковы, что коэффициенты разложения функционального градиента G_0 функционала V_0 при $\varphi=\varphi^0(\alpha, x)$ по системе вектор-функций $\pi^s(x)$ равны нулю. Полученные результаты позволяют предложить следующий метод численного нахождения коэффициентов Ритца, тесно связанный с итерационными градиентными методами спуска. Алгоритм действий по этому методу заключается в следующем.

1) Выбирается произвольным образом первая система коэффициентов

$$^1\alpha=\{^1\alpha_{jl}^s\}_{j,\ l=1,\ \ldots,\ n}^{s=1,\ \ldots,\ N} \tag{5.128}$$

и вычисляется функция $\varphi^1(x)=(\varphi_1^1(x),\ \ldots,\ \varphi_n^1(x))$

$$\varphi_j^1(x)=\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{n}{}^1\alpha_{jl}^s\pi_l^s(x). \tag{5.129}$$

После этого находятся решения $y^1(x)$ и $p^1(x)$ систем

$$\frac{dy(x)}{dx}=F(y(x),\ \varphi(x),\ x),\ y(0)=y^0, \tag{5.130}$$

$$\frac{dp(x)}{dx}=-A^*(\varphi(x),\ x)p(x)+C(\varphi(x),\ x),\ p(a)=0. \tag{5.131}$$

при $\varphi(x)=\varphi^1(x)$.

2) Вычисляется функциональный градиент $G_0(\varphi^1(x))$ по формуле

$$G_0(\varphi(x))=\frac{\partial f_0(y(x),\ \varphi(x),\ x)}{\partial\varphi}-B^*(\varphi,\ x)p(x) \tag{5.132}$$

при $\varphi(x)=\varphi^1(x)$, $y(x)=y^1(x)$ и $p(x)=p^1(x)$.

3) Если при этом окажется, что

$$\int_0^a G_0^j(\varphi^1(x))\pi_l^s(x)dx=0 \tag{5.133}$$

для всех j, $l=1,\ldots,n$, $s=1,\ldots,N$, то $\varphi^1(x)$ будет искомым решением по методу Ритца и $^1\alpha$ — искомая система коэффициентов Ритца.

4) В противном случае, т. е. если (5.133) не имеет места хотя бы для одного набора индексов j, l, s, вторая система коэффициентов

$$^2\alpha=\{^2\alpha_{jl}^s\}_{j,\ l=1,\ \ldots,\ n}^{s=1,\ \ldots,\ N} \tag{5.134}$$

вычисляется по формулам

$$^2\alpha={}^1\alpha-{}^1\lambda^1\overline{\alpha}, \tag{5.135}$$

где

$$ {}^1\bar{\alpha} = \frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha = {}^1\alpha} \tag{5.136} $$

вычисляется по формуле

$$ {}^1\bar{\alpha} = \left\{ \int_0^a G_0^j(\varphi^1(x))\, \pi_l^s(x)\, dx \right\}_{j,\, l=1,\, \ldots,\, n}^{s=1,\, \ldots,\, N}. \tag{5.137} $$

Величина шага $\lambda^1 \geqslant 0$ находится из условия

$$ v\left({}^1\alpha - {}^1\lambda {}^1\bar{\alpha}\right) = \min_{\lambda \geqslant 0} v\left({}^1\alpha - \lambda {}^1\bar{\alpha}\right). \tag{5.138} $$

Далее процесс продолжается аналогично вышеизложенному алгоритму, причем для нахождения величины шага λ на практике часто используют вместо условия (5.138) метод «половинения-удвоения».

4⁰. Методы сеток. Сущность метода сеток для решения задачи 13 в случае отсутствия ограничений (5.3)—(5.4) заключается в том, что выбирается система узлов

$$ x^1,\ x^2,\ \ldots,\ x^r \tag{5.139} $$

и находятся значения

$$ \varphi^1,\ \varphi^2,\ \ldots,\ \varphi^r \tag{5.140} $$

искомой вектор-функции $\varphi^0(x)$ в узлах этой сетки и по ним (т. е. по x^i и φ^i) определяется вектор-функция $\varphi^0(x)$ при помощи интерполяционных формул (Лагранжа, Ньютона, Чебышева, Бернштейна и т. д.), которая и представляет собой приближенное решение задачи 13.

Можно предложить несколько вариантов методов сеток. Дадим краткое описание двух основных методов сеток.

В первом методе сеток строится при помощи интерполяционной формулы вектор-функция

$$ \tilde{\varphi}^0(x) = \varphi(x \mid x^i,\ \varphi^i) \tag{5.141} $$

по системе узлов x^i и значениям φ^i, где x^i — заранее выбраны, а φ^i — пока неизвестны.

Система значений φ^i находится из условия минимума функций $V_0(\varphi^i)$:

$$ v_0(\varphi^i) = \int_0^a f_0(y(x \mid x^i,\ \varphi^i),\ \varphi(x \mid x^i,\ \varphi^i),\ x)\, dx, \tag{5.142} $$

где через $y(x \mid x^i,\ \varphi^i)$ обозначено решение системы (5.1)—(5.2) при $\varphi(x) = \varphi(x \mid x^i,\ \varphi^i)$. Отсюда следует, что величины φ^i следует искать как решение системы уравнений

$$ \frac{\partial v_0(\varphi^i)}{\partial \varphi_j^\nu} = 0 \quad (j = 1,\ \ldots,\ n;\ \nu = 1,\ \ldots,\ r), \tag{5.143} $$

где φ_j^ν — компоненты вектора φ^ν. В частности, при использовании интерполяционной формулы Лагранжа в (5.141)

$$\tilde{\varphi}^0(x) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_j^i \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{r} \left(\frac{x - x^l}{x^i - x^l} \right) \tag{5.144}$$

для нахождения значений φ_j^i получим систему уравнений, вид которой приводится в следующей теореме.

Теорема 52

Величины φ_j^i в разложении (5.144) *являются решением следующей системы уравнений (которая получена после вычисления левых частей в* (5.143)):

$$\frac{\partial v_0(\varphi^i)}{\partial \varphi_j^\nu} = \int_0^a G_0^j(\tilde{\varphi}^0(x)) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq \nu}}^{r} \left(\frac{x - x^l}{x^\nu - x^l} \right) dx = 0, \tag{5.145}$$

$$(j = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, r)$$

где $G_0^j(\varphi(x))$ — j-я компонента функционального градиента $V_0(\varphi)$ в силу системы (5.1)—(5.2) *при* $\varphi(x) = \tilde{\varphi}^0(x)$.

Доказательство справедливости этой теоремы устанавливается вполне аналогично доказательству теоремы 51, поскольку в разложении (5.144) можно положить

$$\alpha^s = \varphi^s \quad \text{при } s = 1, \ldots, r = N,$$

$$\pi^s(x) = \prod_{\substack{l=1 \\ l=s}}^{N} \left(\frac{x - x^l}{x^s - x^l} \right)$$

и применить результаты метода Ритца.

Аналогично п. 3° можно сформулировать итерационный метод для нахождения величин φ_j^i.

В втором методе сеток система значений φ_j^i в (5.141) находится из условия минимума функции $\hat{v}(\varphi^i)$:

$$\hat{v}(\varphi^i) = \sum_{l=1}^{r} a_l f_0(y(x^l \mid x^i, \varphi^i), \varphi(x^l \mid x^i, \varphi^i), x^i), \tag{5.146}$$

где a_l — коэффициенты квадратурной формулы для интеграла (5.142). Отсюда следует, что система величин φ_j^i находится как решение системы

$$\frac{\partial \hat{v}(\varphi^i)}{\partial \varphi_j^\nu} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, r). \tag{5.147}$$

Опустим подробности вычислений левой части (5.147), тогда получим для нахождения φ_j^i следующую систему уравнений в случае интерполяционной формулы Лагранжа в (5.141):

$$\sum_{l=1}^{r} a_l G_0^j(x^l) \prod_{\substack{s=1\\ s\neq 1}}^{r} \left(\frac{x^l - x^s}{x^\nu - x^s}\right) = 0 \quad (j=1, \ldots, n;\ \nu=1, \ldots, r) \tag{5.148}$$

где $G_0^j(x^l)$ — значение $G_0^j(\tilde{\varphi}^0(x))$ при $x=x^l$. Система (5.148) в случае равномерной сетки

$$x^l = (i-1)\Delta \quad (i=1, \ldots, r), \tag{5.149}$$

где Δ — шаг сетки, имеет вид

$$\sum_{l=1}^{r} a_l G_0^j((l-1)\Delta) \prod_{\substack{s=1\\ s\neq \nu}}^{r} \frac{(l-s)}{(\nu-s)} = 0 \quad (j=1, \ldots, n;\ \nu=1, \ldots, r). \tag{5.150}$$

Предположим теперь, что в задаче 13 имеются ограничения (5.3) и отсутствуют ограничения (5.4) второго типа. В этих условиях можно использовать методы градиентного спуска и Ритца с некоторой модификацией.

5⁰ Итерационный градиентный метод условного наискорейшего спуска. В этом пункте предлагается модификация метода наискорейшего спуска. Однако можно было бы аналогично изложенному модифицировать любой итерационный метод спуска. Алгоритм решения задачи 13 формулируется следующим образом.

Выбирается произвольным образом вектор-функция $\varphi^1(x) \in M$ и вычисляется последовательность вектор-функций

$$\{\varphi^s(x)\}_{s=1, 2, \ldots}$$

по рекурентной формуле

$$\varphi^{s+1}(x) = \varphi^s(x) + \lambda^s(\bar{\varphi}^s(x) - \varphi^s(x)), \tag{5.151}$$

где $\lambda^s \geqslant 0$ и $\bar{\varphi}^s(x) \in M_1$ находятся из условий

$$\int_0^a [G_0(\varphi^s(x)),\ \bar{\varphi}^s(x)]\, dx = \min_{\varphi(x)\in M_1} \int_0^a [G_0(\varphi^s(x)),\ \varphi(x)]\, dx, \tag{5.152}$$

$$V_0(\varphi^s(x) + \lambda^s(\bar{\varphi}^s(x) - \varphi^s(x))) = \\ = \min_{0<\lambda<1} V_0(\varphi^s(x) + \lambda(\bar{\varphi}^s(x) - \varphi^s(x))). \tag{5.153}$$

В (5.152) через $G_0(\varphi^s(x))$ обозначен функциональный градиент $V_0(\varphi)$ в силу системы (5.1)—(5.2) при $\varphi(x) = \varphi^s(x)$. Совершенно очевидно из (5.151), что $\varphi^{s+1}(x) \in M_1$ для любого $s \geqslant 1$, а из (5.153) следует

$$V_0(\varphi^{s+1}(x)) \leqslant V_0(\varphi^s(x)). \tag{5.154}$$

6⁰. Модификация прямого метода Ритца. Алгоритм решения задачи 13 на множестве вектор-функций $\varphi(x) \in M$ модифицированным прямым методом Ритца заключается в том, что система линейно-независимых вектор-функций $\pi^s(x)$ выбирается из M_1, т. е. для любых $x \in [0, a]$

$$0 \leqslant \pi_l^s(x) \leqslant b_l \quad (l=1, \ldots, n), \tag{5.155}$$

а коэффициенты Ритца $\alpha^1, \ldots, \alpha^N$ находятся из условия минимума функции (5.109) по $\alpha=(\alpha^1, \ldots, \alpha^N) \in E_{n^2N}$, удовлетворяющим условиям

$$0 \leqslant \alpha_{jl}^s \leqslant 1 \quad (j, l=1, \ldots, n;\ s=1, \ldots, N), \tag{5.156}$$

$$0 \leqslant \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl}^s \leqslant 1 \quad (j, l=1, \ldots, n;\ s=1, \ldots, N), \tag{5.157}$$

$$\sum_{s=1}^{N} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{jl}^s = 1 \quad (j=1, \ldots, n). \tag{5.158}$$

Отсюда следует, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 53

Коэффициенты Ритца α_{jl}^s как решение задачи минимизации функции (5.109) *на элементарном симплексе T (задаваемом соотношениями* (5.156)—(5.158)) *должны удовлетворять условию*

$$\min_{\beta \in T} \sum_{s=1}^{N} \sum_{j, l=1}^{n} \frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha_{jl}^s} \left(\beta_{jl}^s - \alpha_{jl}^s\right) = 0, \tag{5.159}$$

где $\frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha_{jl}^s}$ *определяется по формулам* (5.124).

Доказательство справедливости (5.159) аналогично доказательству условий оптимальности в главе I для вариационных задач. Обозначим через $\gamma(\alpha)$ решение задачи минимизации линейного функционала на симплексе T

$$\sum_{s=1}^{N} \sum_{j, l=1}^{n} \frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha_{j, l}^s} \gamma_{jl}^s(\alpha) = \min_{\beta \in T} \sum_{s=1}^{N} \sum_{j, l=1}^{n} \frac{\partial v(\alpha)}{\partial \alpha_{jl}^s} \beta_{jl}^s, \tag{5.160}$$

тогда получим следующую систему:

$$\alpha = \gamma(\alpha) \tag{5.161}$$

для нахождения коэффициентов Ритца.

Будем теперь предполагать, что в задаче 13 имеются ограничения (5.3)—(5.4) первого и второго типов. В этом случае можно применить методы, изложенные в пп. 5⁰—6⁰ этого параг-

рафа к решению задачи 13 на базе учета ограничений (5.4) методами сведения к минимаксной задаче, погружения и др.

7°. Итерационные градиентные методы условного наискорейшего спуска для задач 15 и 16.

а) Алгоритм решения задачи 15 на множестве вектор-функций $\varphi(x) \in M_1$ формулируется следующим образом.

Выбирается произвольным образом вектор-функция $\varphi^1(x) \in M_1$ и вычисляется последовательность вектор-функций

$$\{\varphi^s(x)\}_{s=1,\,2,\,\ldots}$$

по рекуррентной формуле

$$\varphi^{s+1}(x) = \varphi^s(x) + \lambda^s(\bar{\varphi}^s(x) - \varphi^s(x)), \tag{5.162}$$

где $\lambda^s \geqslant 0$ и $\bar{\varphi}^s(x) \in M_1$ находятся из условий

$$\int_0^a [\hat{G}(\varphi^s(x)),\ \bar{\varphi}^s(x)]\,dx = \min_{\varphi(x)\in M_1} \int_0^a [\hat{G}(\varphi^s(x)),\ \varphi(x)]\,dx, \tag{5.163}$$

$$\hat{V}_0\left(\varphi^s(x) + \lambda^s\left(\bar{\varphi}^s(x) - \varphi^s(\varphi)\right)\right) = \\ = \min_{0<\lambda<1} \hat{V}_0\left(\varphi^s(x) + \lambda\left(\bar{\varphi}^s(x) - \varphi^s(x)\right)\right). \tag{5.164}$$

В (5.163) через $\hat{G}(\varphi^s(x))$ обозначен функциональный градиент $\hat{V}_0(\varphi)$ в силу системы (5.1) — (5.2) при $\varphi(x) = \varphi^s(x)$. При этом поскольку вектор ψ^0 в функционале $\hat{V}_0$ заранее неизвестен, то вычисляется последовательность векторов $\{\psi^s\}$ из условия

$$[\psi^s,\ V(\varphi^s(x)) - c] = 0, \tag{5.165}$$

а в выражениях для $\hat{V}_0$ и $\hat{G}$ на s-м шагу подставляется ψ^s вместо ψ^0.

б) Алгоритм решения задачи 16 на множестве вектор-функций $\varphi(x) \in M_1$ формулируется следующим образом.

Выбирается произвольным образом вектор-функция $\varphi^1(x) \in M_1$ и вычисляется последовательность вектор-функций

$$\{\varphi^s(x)\}_{s=1,\,2,\,\ldots},$$

$$\varphi^{s+1}(x) = \varphi^s(x) + \lambda^s(\bar{\varphi}^s(x) - \varphi^s(x)), \tag{5.166}$$

где λ^s и $\bar{\varphi}^s(x) \in M_1$ находятся из условий

$$\int_0^a [\hat{G}_\psi(\varphi^s(x)),\ \bar{\varphi}^s(x)]\,dx = \min_{\varphi(x)\in M_1} \int_0^a [\hat{G}_\psi(\varphi^s(x)),\ \varphi(x)]\,dx, \tag{5.167}$$

$$\hat{V}_\psi\left(\varphi^s(x) + \lambda^s\left(\bar{\varphi}^s(x) - \varphi^s(x)\right)\right) = \\ = \min_{0<\lambda<1} \hat{V}_\psi\left(\varphi^s(x) + \lambda\left(\bar{\varphi}^s(x) - \varphi^s(x)\right)\right). \tag{5.168}$$

В (5.167) через $\widehat{G_\psi}(\varphi^s(x))$ обозначен функциональный градиент $\widehat{V}_\psi(\varphi)$ в силу системы (5.1)—(5.2) при $\varphi(x)=\varphi^s(x)$.

8⁰. Прямой метод Ритца для задач 15 и 16.

а) Алгоритм решения задачи 15 на множестве вектор-функций $\varphi(x)\in M_1$ модифицированным прямым методом Ритца заключается в том, что вектор-функции $\pi^s(x)$ выбираются из M_1, т. е. для любых $x\in[0, a]$

$$0\leqslant \pi_l^s(x)\leqslant b_l\ (l=1,\ldots,n), \tag{5.169}$$

а коэффициенты Ритца $\alpha^1,\ldots,\alpha^N$ находятся из условия минимума по $\alpha=\{\alpha_{j,l}^s\}_{j,l=1,\ldots,n}^{s=1,\ldots,N}\in T$ функции

$$\widehat{v}_0(\alpha)=\widehat{V}_0(\varphi^0(\alpha,\ x)), \tag{5.170}$$

$$\widehat{v}_0(\alpha)=\min_{\beta\in T}\ \widehat{v}_0(\beta). \tag{5.171}$$

Обозначим через $\widehat{\gamma}(\alpha)$ решение задачи минимизации на симплексе T линейного функционала:

$$\sum_{s=1}^{N}\sum_{j,l=1}^{n}\frac{\partial\hat{v}_0(\alpha)}{\partial\alpha_{jl}^s}\ \widehat{\gamma}_{jl}^s(\alpha)=\min_{\beta\in T}\sum_{s=1}^{N}\sum_{j,l=1}^{n}\frac{\partial\hat{v}_0(\alpha)}{\partial\alpha_{jl}^s}\ \beta_{j,l}^s, \tag{5.172}$$

где $\dfrac{\partial\hat{v}_0(\alpha)}{\partial\alpha_{jl}^s}$ вычисляется по формулам

$$\frac{\partial\hat{v}_0(\alpha)}{\partial\alpha_{jl}^s}=\int_0^a\widehat{G}^j(\varphi^0(\alpha,\ x))\,\pi_l^s(x)\,dx, \tag{5.173}$$

причем $\widehat{G}(\varphi^0(\alpha,\ x))$ — функциональный градиент $\widehat{V}_0$ в силу системы (5.1)—(5.2) при $\varphi(x)=\varphi^0(\alpha,\ x)$.

Из этого получим для нахождения коэффициентов Ритца $\{\alpha_{jl}^s\}$ систему уравнений

$$\alpha=\widehat{\gamma}(\alpha), \tag{5.174}$$

а вектор ψ^0 находится из условия

$$[V(\varphi^0(\alpha,\ x))-c,\ \psi^0]=0. \tag{5.175}$$

б) Алгоритм решения задачи 16 на множестве вектор-функций $\varphi(x)\in M_1$ модифицированным прямым методом Ритца заключается в том, что вектор-функции $\pi^s(x)$ выбираются из M_1, т. е. для любых $x\in[0, a]$

$$0\leqslant \pi_l^s(x)\leqslant b_l\ (l=1,\ldots,n), \tag{5.176}$$

а коэффициенты Ритца $\alpha^1,\ldots,\alpha^N$ находятся из условия минимума по $\alpha=\{\alpha_{jl}^s\}_{j,l=1,\ldots,n}^{s=1,\ldots,N}\in T$ функции

$$\widehat{v}_\psi(\alpha)=\widehat{V}_\psi(\varphi^0(\alpha,\ x)), \tag{5.177}$$

$$\hat{v}_\psi(\alpha) = \min_{\beta \in T} \hat{v}_\psi(\beta). \tag{5.178}$$

Обозначим через $\hat{\gamma}_\psi(\alpha)$ — решение задачи минимизации на симплексе T линейного функционала

$$\sum_{s=1}^{N} \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial \hat{v}_\psi(\alpha)}{\partial \alpha_{jl}^s} \hat{\gamma}_{\psi jl}^s(\alpha) = \min_{\beta \in T} \sum_{s=1}^{N} \sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial \hat{v}_\psi(\alpha)}{\partial \alpha_{jl}^s} \beta_{jl}^s, \tag{5.179}$$

где $\frac{\partial \hat{v}_\psi(\alpha)}{\partial \alpha_{jl}^s}$ вычисляется по формулам

$$\frac{\partial \hat{v}_\psi(\alpha)}{\partial \alpha_{jl}^s} = \int_0^a \hat{G}_\psi^j(\varphi_\psi^0(\alpha, x)) \pi_l^s(x)\, dx, \tag{5.180}$$

причем $\hat{G}_\psi(\varphi_\psi^0(\alpha, x))$ — функциональный градиент функционала $\hat{V}_\psi$ в силу системы (5.1)—(5.2) при $\varphi(x) = \varphi_\psi^0(\alpha, x)$.

Тогда получим для нахождения коэффициентов Ритца $\{\alpha_{j,l}^s\}$ систему уравнений

$$\alpha = \hat{\gamma}_\psi(\alpha). \tag{5.181}$$

§ 7. ФОРМУЛИРОВКА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

В этом параграфе дается краткая формулировка методов решения операторных уравнений, полученных на базе условий оптимальности в форме «линеаризованного принципа максимума» для динамических вариационных задач.

Будем сначала предполагать, что в задаче 13 отсутствуют ограничения (5.4) второго типа. В этом случае решение $\varphi^0(x) \in M_1$ задачи 13 удовлетворяет операторному уравнению (5.53)

$$\varphi(x) = \overline{\Phi}(\varphi(x)), \tag{5.182}$$

где $\overline{\Phi} = (\overline{\Phi}_1, \ldots, \overline{\Phi}_n)$ имеет вид

$$\overline{\Phi}_j(\varphi(x)) = \frac{b_j}{2}\left[1 - \operatorname{sign} G_0^j(\varphi(x))\right] \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{5.183}$$

а $G_0(\varphi(x)$ — функциональный градиент $V_0(\varphi)$ в силу системы (5.1) — (5.2) при $\varphi(x) = \varphi^0(x)$.

Обозначим через $u(x)$ совокупность переменных $\{\varphi(x), y,(x), p(x)\}$, тогда получим операторное уравнение

$$u(x) = \Gamma(u(x), x) \tag{5.184}$$

для нахождения решения $\varphi^0(x)$ задачи 13, вектор-функции $y^0(x)$ и $p^0(x)$ — решений систем (5.1) — (5.2) и (5.29) — (5.30), соответственно.

В общем случае, когда в задаче 13 имеются ограничения (5.3) — (5.4) как первого, так и второго типов, в § 4—5 этой главы получены операторные уравнения (5.67) и (5.80) в форме, аналогичной (5.184). Поэтому численные методы решения операторного уравнения (5.184) (сформулированные в этом параграфе ниже) могут быть модифицированы для решения задачи 13 в общем случае при учете ограничений (5.4) второго типа методами сведения к минимаксной задаче и погружения.

1°. Итерационный градиентный метод решения операторного уравнения. Рассмотрим применение итерационного градиентного метода условного спуска для решения операторного (5.184), полученного на основе применения к задаче 13 условия оптимальности в форме «линеаризованного принципа максимума».

Предположим, что существует неособый линейный оператор $\mathbf{D}(u(x), x)$ из $E_{(n+2k+1)}$ в $E_{(n+2k)}$ такой, что:

1) оператор

$$P(u(x), x) = \mathbf{D}(u(x), x)(u(x) - \Gamma(u(x), x)) \qquad (5.185)$$

непрерывный и потенциальный;*

2) оператор $\mathbf{D}(u(x), x)$ положительно определен и ограничен, т. е. существуют такие числа $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$, что

$$\mu_1 \|u(x)\|^2 \leqslant [\mathbf{D}(u(x), x)u(x), u(x)] \leqslant \mu_2 \|u(x)\|^2. \qquad (5.186)$$

Потенциал $F(u(x))$ оператора $P(u(x), x)$ с точностью до постоянного слагаемого имеет вид [30]

$$F(u(x)) = \int_0^1 [P(\theta u(x), x), u(x)]\, d\theta =$$

$$= \int_0^1 [D(\theta u(x), x)(\theta u(x) - \Gamma(\theta u(x), x)), u(x)]\, d\theta. \qquad (5.187)$$

При сделанных предположениях (5.186) можно доказать в случае единственности** решения операторного уравнения (5.184), что решение $u^0(x)$ является точкой минимума функционала $F(u(x))$.

Поэтому для нахождения решения операторного уравнения (5.184) можно применить итерационные и непрерывные мето-

* Оператор $P(u(x), x)$ называется потенциальным, если существует такой функционал $F(u(x))$, что градиент $F(u(x))$ равен $P(u(x), x)$: $P(u(x), x) = \operatorname{grad} F(u(x))$.

** Уравнение (5.184) имеет единственное решение, если для любых вектор-функций $u^1(x)$ и $u^2(x)$, удовлетворяющих (5.184), выполнено равенство

$$\|u^1(x) - u^2(x)\| = 0,$$

т. е. $u^1(x)$ и $u^2(x)$ совпадают почти при всех $x \in [0, a]$.

ды условного спуска для решения задачи минимизации функционала $F(u(x))$ на множестве вектор-функции $u(x) \in U$. Здесь через U обозначено прямое произведение множества M_1 и пространств $L_{2;\,k}[o, a]$:

$$U = M_1 \times L_{2;\,k}[0,\ a] \times L_{2;\,k}[0,\ a], \tag{5.188}$$

причем через $L_{2;\,k}[0,\ a]$ обозначено пространство k-мерных вектор-функций, суммируемых с квадратом на $[0,\ a]$.

Алгоритм решения задачи 13 при ограничениях (5.3) на основе решения задачи минимизации $F(u(x))$ по $u(x) \in U$ состоит в следующем.

Выбирается произвольным образом вектор-функция $u^1(x) \in U$ и вычисляется последовательность вектор-функций $\{u^s(x)\}_{s=1,\,2,\,\ldots}$ по рекуррентной формуле

$$u^{s+1}(x) = u^s(x) + \lambda^s(\bar{u}^s(x) - u^s(x)), \tag{5.189}$$

где $\lambda^s \geqslant 0$ и $\bar{u}^s(x) \in U$ находятся из условий

$$\int_0^a [P(u^s(x),\ x),\ \bar{u}^s(x)]\,dx = \min_{u(x)\in U} \int_0^a [P(u^s(x),\ x),\ u(x)]\,dx, \tag{5.190}$$

$$F(u^s(x) + \lambda^s(\bar{u}^s(x) - u^s(x))) = \min_{0<\lambda<1} F(u^s(x) + \lambda(\bar{u}^s(x) - u^s(x))). \tag{5.191}$$

Иногда последовательность вектор-функций $\{u^s(x)\}_{s=1,\,2,\,\ldots}$ строится несколько иначе, а именно выбирается $\varphi^1(x) \in M_1$ и находятся решения $y^1(x)$ и $p^1(x)$ систем уравнений (5.1)—(5.2) и (5.29)—(5.30) соответственно, т. е. тем самым и определено $u^1(x)$.

Далее $\varphi^{s+1}(x)$ находится в виде

$$\varphi^{s+1}(x) = \varphi^s(x) + \lambda^s(\bar{\varphi}^s(x) - \varphi^s(x)), \tag{5.192}$$

где $\lambda^s \geqslant 0$ и $\bar{u}^s(x) \in U$ определяются из условий (5.190)—(5.191), по $\varphi^{s+1}(x)$ находятся $y^{s+1}(x)$, $p^{s+1}(x)$ и тем самым $u^{s+1}(x)$, т. е. последовательность $\{u^s(x)\}_{s=1,\,2,\,\ldots}$ строится не по рекуррентной формуле (5.189), а по изложенному способу.

Из определения оператора $\Gamma(u(x),\ x)$ следует, что для любого $u(x) \in \mathrm{U}$ вектор-функция $\Gamma(u(x),\ x) \in U$, где

$$\mathrm{U} = \mathfrak{M} \times L_{2;\,k}[0,\ a] \times L_{2;\,k}[0,\ a], \tag{5.193}$$

т. е. решение $u^0(x)$ операторного уравнения (5.184) и решение задачи минимизации $F(u(x))$ принадлежат U.

Отсюда следует, что в (5.189) или (5.192) величина шага $\lambda^s \geqslant 0$ может находиться не из условий (5.191), а из условия

$$F(u^s(x) + \lambda^s(\bar{u}^s(x) - u^s(x))) = \min_{\lambda \geqslant 0} F(u^s(x) + \lambda(\bar{u}^s(x) - u^s(x))). \tag{5.194}$$

2⁰. Непрерывный градиентный метод решения операторного уравнения. Предположим, что существует оператор $\mathbf{D}(u(x), x)$ такой, что выполнены (5.185)—(5.186). Рассмотрим применение непрерывного градиентного метода спуска для решения задачи 13 при ограничениях (5.3) на основе решения задачи минимизации $F(u(x))$ по $u(x) \in U$ непрерывным градиентным методом спуска.

Алгоритм этого метода заключается в том, что ищется однопараметрическое семейство вектор-функций $u^\tau(x) \in \mathbf{U}$ как решение задачи Коши для системы

$$\frac{du^\tau(x)}{d\tau} = -\lambda(\tau) P(u^\tau(x), x) \tag{5.195}$$

с начальными данными

$$u^\tau(x)|_{\tau=0} = u^1(x), \tag{5.196}$$

причем вектор-функция $u^1(x) \in \mathbf{U}$ выбирается произвольным образом, $\lambda(\tau) > 0$ — произвольная скалярная функция $\tau \geqslant 0$, $0 < \lambda^0 \leqslant \lambda(\tau) \leqslant \lambda^1 < +\infty$ при всех $\tau \geqslant 0$, где λ^0 и λ^1 — некоторые постоянные.

3⁰. Метод минимальных невязок для решения операторного уравнения. Итерационные градиентные методы условного и безусловного наискорейшего спуска (изложенные в п. 1⁰ этого параграфа) для решения операторного уравнения (5.184) были основаны на возможности сведения оператора $\Gamma(u(x), x)$ к потенциальному. В методе минимальных невязок для решения (5.184) не используется возможность такого сведения.

Алгоритм метода минимальных невязок заключается в том, что выбираются произвольная вектор-функция $u^1(x) \in U$ и строится последовательность вектор-функций $\{u^s(x)\}_{s=1,2,\ldots}$ по рекуррентной формуле

$$u^{s+1}(x) = u^s(x) - \lambda^s(u^s(x) - \Gamma(u^s(x), x)), \tag{5.197}$$

причем величина шага $\lambda^s \geqslant 0$ в методе условных минимальных невязок находится из условия

$$\min_{0 \leqslant \lambda < 1} \|u^s(x) - \lambda(u^s(x) - \Gamma(u^s(x), x)) - \Gamma\{(u^s(x - \\ - \lambda(u^s(x)) - \Gamma(u^s(x), x)), x\}\|, \tag{5.198}$$

а в методе безусловных минимальных невязок $\lambda^s \geqslant 0$ находится из условия минимума нормы в (5.198) по $\lambda \geqslant 0$.

4⁰. Метод Ритца для решения операторного уравнения. Метод Ритца для решения операторного уравне-

ния (5.184) заключается в том, что выбирается система линейно-независимых вектор-функций $\pi^s(x)$ из U или $\mathbf{U}$ (для условного и безусловного методов соответственно) и приближенное решение $u^0(x)$ операторного уравнения (5.184) ищется в виде

$$u^0(\alpha, x) = \sum_{s=1}^{N} \alpha^s \pi^s(x), \tag{5.199}$$

где коэффициенты Ритца α^s представляют собой матрицы $(n+2k)\times(n+2k)$ соответственно.

В безусловном методе Ритца коэффициенты α^s находятся из условия

$$\|u^0(\alpha, x) - \Gamma(u^0(\alpha, x), x)\| = \min_{\beta\in E_{(n+2k)^2N}} \|u^0(\beta, x) - \Gamma(u^0(\beta, x), x)\|, \tag{5.200}$$

если не предполагать возможности сведения $\Gamma(u(x), x)$ к потенциальному оператору, и из условия

$$F(u^0(\alpha, x)) = \min_{\beta\in E_{(n+2k)^2N}} F(u^0(\beta, x)) \tag{5.201}$$

в противном случае.

В условном методе Ритца коэффициенты α^s находятся из условий минимума (5.200) и (5.201) по $\beta\in\hat{T}$, где симплекс $\hat{T}\subset E_{(n+2k)^2N}$ определяется аналогично симплексу T, задаваемому соотношениями (5.156)—(5.158).

5⁰. Метод Бубнова—Галеркина для решения операторного уравнения. Так же как и в методе Ритца (см. п. 4⁰ этого параграфа), метод Бубнова—Галеркина для решения операторного уравнения (5.184) заключается в том, что выбирается система вектор-функций $\pi^s(x)$ и решение $u^0(x)$ ищется в виде $u^0(\alpha, x)$ по формуле (5.199), причем матрицы коэффициентов α^s определяются из системы

$$\int_0^a \left(u_\rho^0(\alpha, x) - \Gamma_\rho(u^0(\alpha, x), x)\right) \pi_\sigma^s(x)\,dx = 0 \tag{5.202}$$

$$(\rho, \sigma = 1, \ldots, n+2k;\ s = 1, \ldots, N).$$

Заметим, что для нахождения решения операторного уравнения (5.184) можно применить и другие аналитические методы решения операторных уравнений, основанные на представлении решения в виде (5.199), в частности метод моментов, метод наименьших квадратов, метод разложения по собственным функциям оператора $\Gamma(u(x), x)$ и др.

6⁰. Метод сеток для решения операторного уравнения. Сущность метода сеток для отыскания решения

операторного уравнения (5.184) заключается в том, что выбирается система узлов

$$x^1, x^2, \ldots, x^r \tag{5.203}$$

и находятся значения

$$u^1, u^2, \ldots, u^r \tag{5.204}$$

искомой вектор-функции $u^0(x)$ в узлах этой сетки и по ним (т. е. x^i и u^i) определяется вектор-функция $\widetilde{u}^0(x \mid x^i, u^i)$ при помощи интерполяционных формул (Лагранжа, Ньютона, Фейера, Чебышева и др.), которая и представляет собой приближенное решение (5.184) и, следовательно, приближенное решение задачи 13 при ограничениях (5.3) первого типа.

Для отыскания значений (5.204) можно предложить несколько вариантов метода сеток. Дадим краткое описание трех основных методов:

1) метод удовлетворения уравнения (5.184) в узлах сетки;

2) метод удовлетворения операторного уравнения для функции $\widetilde{u}^0(x \mid x^i, u^i)$;

3) метод удовлетворения операторного уравнения (5.184) с оператором $\widetilde{\Gamma}$ вместо Γ, причем $\widetilde{\Gamma}$ определяется при помощи интерполяционной формулы по $\{\Gamma(u^i, x^i)\}_{i=1, \ldots, r}$.

Первый метод сеток заключается в том, что значения $\{u^i\}$ определяются из системы уравнений

$$u^i = \Gamma(u^i, x^i) \quad (i = 1, \ldots, r). \tag{5.205}$$

После нахождения значений $\{u^i\}$ определяется вектор-функция $\widetilde{u}^0(x \mid x^i, u^i)$ при помощи интерполяционных формул, в частности при использовании интерполяционной формулы Лагранжа вектор-функция $\widetilde{u}^0(x \mid x^i, u^i)$ имеет вид

$$\widetilde{x}^0(x \mid x^i, u^i) = \sum_{i=1}^{r} u^i \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{r} \left(\frac{x - x^l}{x^i - x^l} \right). \tag{5.206}$$

Второй метод сеток заключается в том, что значения $\{u^i\}$ определяются из условия минимума функции $I(u^1, \ldots, u^r)$, где

$$I(u^1, \ldots, u^r) = \left\| \widetilde{u}^0(x \mid x^i, u^i) - \Gamma\left(\widetilde{u}^0(x \mid x^i, u^i), x\right)^2 \right\|^2. \tag{5.207}$$

Из (5.207) получаем, что система значений $\{u^i\}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial I(u)}{\partial u^i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, r). \tag{5.208}$$

В частности, для определения вектор-функции $\widetilde{u}^0(x \mid x^i, u^i)$ может быть использована интерполяционная формула Лагранжа (5.206).

Третий метод сеток заключается в том, что значения $\{u^i\}$ определяются из условий минимума функции $\widetilde{I}(u^1, \ldots u^r)$, где

$$\widetilde{I}(u^1, \ldots, u^r) = \left\| \widetilde{u}^0(x \mid x^i, u^i) - \widetilde{\Gamma}(x \mid x^i, u^i) \right\|^2, \qquad (5.209)$$

причем оператор $\widetilde{\Gamma}$ определяется при помощи интерполяционных формул по значениям

$$\Gamma(u^1, x^1), \Gamma(u^2, x^2), \ldots, \Gamma(u^r, x^r). \qquad (5.210)$$

Из (5.209) следует, что $\{u^i\}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial \widetilde{I}(u)}{\partial u^i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, r). \qquad (5.211)$$

В частности, для определения вектор-функций $\widetilde{u}(x \mid x^i, u^i)$ может быть использована интерполяционная формула Лагранжа (5.206), а оператор $\widetilde{\Gamma}$ может быть определен по интерполяционной формуле Лагранжа в виде

$$\widetilde{\Gamma}(x \mid x^i, u^i) = \sum_{i=1}^{r} \Gamma(u^i, x^i) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{r} \left(\frac{x - x^l}{x^i - x^l} \right). \qquad (5.212)$$

Вопросы сходимости методов сеток для решения операторных уравнений тесно связаны с вопросами устойчивости разностных схем и с вопросами выбора шага сетки.

7°. **Метод дифференцирования по параметру для решения операторного уравнения.** Идея метода дифференцирования по параметру для решения операторного уравнения (5.184) заключается в замене задачи нахождения решения (5.184) задачей нахождения решения операторного уравнения

$$Q(u(x), x, \lambda) = 0. \qquad (5.213)$$

В (5.213) оператор $Q(u, x, \lambda)$ зависит от параметра λ таким образом, что

$$Q(u(x), x, 1) \equiv u(x) - \Gamma(u(x), x), \qquad (5.214)$$

а решение операторного уравнения

$$Q(u(x), x, 0) = 0 \qquad (5.215)$$

существует и легко находится. Обозначим решение уравнения (5.215) через $\check{u}(x)$, а решение уравнения (5.213) — через $u^0(\lambda, x)$.

Тогда для нахождения решения уравнения (5.184) можно почленно продифференцировать (5.213) по λ при $u(x)=u^0(\lambda, x)$ и искать решения задачи Коши, интегрируя от $\lambda=0$ до $\lambda=1$ полученное дифференциальное уравнение для нахождения $u^0(\lambda, x)$ с начальным условием

$$u^0(0, x)=\check{u}(x). \tag{5.216}$$

Оператор $Q(\cdot, x, \lambda)$ обычно вводится одним из следующих двух способов:

$$Q(u(x), x, \lambda)=u(x)-\check{u}(x)-\lambda(\Gamma(u(x), x)-\check{u}(x)), \tag{5.217}$$

$$Q(u(x), x, \lambda)=u(x)-\Gamma(u(x), x)- \\ -(1-\lambda)\left(\check{u}(x)-\Gamma(\check{u}(x), x)\right), \tag{5.218}$$

где вектор-функция $\check{u}(x)\in U$ выбирается произвольным образом.

При выборе оператора $Q(\cdot, x, \lambda)$ по формулам (5.217) и (5.218) получим соответственно системы дифференциальных уравнений для нахождения решения $u^0(\lambda, x)$, удовлетворяющего начальному условию (5.216):

$$\frac{du^0(\lambda, x)}{d\lambda}=\{I-\Gamma'(u^0(\lambda, x), x)\}^{-1}(\Gamma(u^0(\lambda, x), x)-\check{u}(x)), \tag{5.219}$$

$$\frac{du^0(\lambda, x)}{d\lambda}=\{I-\Gamma'(u^0(\lambda, x), x)\}^{-1}\left(\Gamma(\check{u}(x), x)-\check{u}(x)\right). \tag{5.220}$$

В правых частях (5.219)—(5.220) через I обозначен единичный оператор из $\mathbf{U}$ в $\mathbf{U}$, а через $\Gamma'(u^0(\lambda, x), x)$ — производная Гато оператора $\Gamma(u(x), x)$ по $u\in\mathbf{U}$ при $u(x)=u^0(\lambda, x)$.

§ 8. СГЛАЖИВАНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

Для динамических вариационных задач получены в § 3—5 операторные уравнения для нахождения решений задач 13, 15 и 16.

В предыдущем параграфе формулируются численные методы решения операторных уравнений. Большинство из этих методов требует для своего обоснования гладкость операторов $\Gamma(u(x), x)$, $\hat{\Gamma}(u(x), x)$ и $\Gamma_\psi(u(x), x)$. Однако эти операторы, вообще говоря, не являются даже непрерывными, что следует из вида $\overline{\Phi}$, $\hat{\Phi}$ и $\overline{\Phi}_\psi$ и соответственно для задач 13, 15 и 16, поскольку в выражения для них входит sign. Так же как и в § 5 главы III, применим сглаживание указанных выше операторов на основе рассмотрения ε-задач.

Рассмотрим сначала вариационную задачу 13 и предположим, что в ней отсутствуют ограничения второго типа, т. е. $M=M_1$. Тогда ε-задача в этом случае формулируется следующим образом.

Задача 17 (ε-задача)

Для заданного $\varepsilon > 0$ найти вектор-функцию $\omega_\varepsilon^0(x) = \{\varphi_\varepsilon^0(x), \eta_\varepsilon^0(x)\} \in \Omega_1$ такую, что

$$V_\varepsilon(\omega_\varepsilon^0(x)) = \min_{\omega(x)\in\Omega_1} V_\varepsilon(\omega(x)). \tag{5.221}$$

Здесь обозначено через $\Omega_1 = \bigcup_{x\in[0,a]} \Omega_1(x)$ множество вектор-функций $\omega(x) = \{\varphi(x), \eta(x)\}$ таких, что при $x \in [0, a]$

$$\Omega_1(x) = \left\{\left(\varphi_j(x) - \frac{b_j}{2}\right)^2 + \left(\eta_j(x) - \frac{b_j}{2}\right)^2 \leqslant \frac{b_j^2}{4}\ (j, \ldots, n)\right\}, \tag{5.222}$$

функционал $V_\varepsilon(\omega(x))$ имеет вид

$$V_\varepsilon(\omega(x)) = V_0(\varphi(x)) + \frac{2\varepsilon}{an} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{b_j} \int_0^a \left(\eta_j(x) - \frac{b_j}{2}\right) dx, \tag{5.223}$$

причем функционал $V_0(\varphi)$ определен на решениях системы (5.1) — (5.2).

На основе применения условий оптимальности в форме «линеаризованного принципа максимума» для ε-задачи можно получить справедливость следующего утверждения.

Теорема 54

Решение ε-задачи 17 определяется как решение операторного уравнения

$$\omega_\varepsilon^0(x) = \Phi_\varepsilon(\omega_\varepsilon^0(x), x) \tag{5.224}$$

или в развернутой форме

$$\varphi_\varepsilon^0(x) = \overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0(x), x), \tag{5.225}$$

$$\eta_\varepsilon^0(x) = \overline{\overline{\Phi}}_\varepsilon(\varphi_\varepsilon^0(x), x). \tag{5.226}$$

Операторы $\overline{\Phi}_\varepsilon$ и Φ_ε в правых частях (5.225)—(5.226) имеют вид

$$\overline{\Phi}_{\varepsilon j}(\varphi(x), x) = \frac{b_j}{2}\left\{1 - \frac{G_0^j(\varphi(x))}{\sqrt{\left[G_0^j(\varphi(x))\right]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2a^2b_j^2}}}\right\} (j = 1, \ldots, n), \tag{5.227}$$

$$\overline{\overline{\Phi}}_{\varepsilon j}(\varphi(x), x) = -\frac{\varepsilon}{na\sqrt{\left[G_0^j(\varphi(x))\right]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2a^2b_j^2}}} (j = 1, \ldots, n), \tag{5.228}$$

где $G_0(\varphi(x))$ — функциональный градиент $V_0(\varphi(x))$ в силу системы (5.1)—(5.2).

Заметим, что из вида оператора $\overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x), x)$ по формуле (5.227) следует, что он не зависит от $\eta(x)$ с одной стороны и является гладким (непрерывно дифференцируемым) по φ, поскольку при наших предположениях оператор $G_0(\varphi(x))$ гладкий.

Если теперь обозначить через $u_\varepsilon^0(x)$ совокупность вектор-функций $\{\varphi_\varepsilon^0(x),\ y_\varepsilon^0(x),\ p_\varepsilon^0(x)\}$, где $y_\varepsilon^0(x)$ и $p_\varepsilon^0(x)$ — решения уравнений (5.1)—(5.2) и (5.29)—(5.30) при $\varphi(x) = \varphi_\varepsilon^0(x)$, то получим операторное уравнение

$$u(x) = \Gamma_\varepsilon(u(x),\ x), \tag{5.229}$$

которому удовлетворяет вектор-функция $u_\varepsilon^0(x)$, причем оператор $\Gamma_\varepsilon(u(x),\ x)$ гладкий по $u(x) \in U$.

Применим полученные результаты к задачам 15 и 16, тогда получим операторы $\hat{\Phi}_\varepsilon(\varphi(x),\ x)$ и $\Phi_{\psi\varepsilon}(\varphi(x),\ x)$ в виде

$$\hat{\Phi}_{\varepsilon j}(\varphi(x), x) = \frac{b_j}{2}\left\{1 - \frac{\hat{G}^j(\varphi(x))}{\sqrt{[\hat{G}^j(\varphi(x))]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2a^2b_j^2}}}\right\} \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{5.230}$$

$$\Phi_{\psi\varepsilon j}(\varphi(x),\ x) = \frac{b_j}{2}\left\{1 - \frac{G_\psi^j(\varphi(x))}{\sqrt{[G_\psi^j(\varphi(x))]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2a^2b_j^2}}}\right\} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{5.231}$$

Отсюда вместо операторных уравнений (5.67) и (5.80) получим соответственно

$$u(x) = \hat{\Gamma}_\varepsilon(u(x),\ x), \tag{5.232}$$

$$u_\psi(x) = \Gamma_{\psi\varepsilon}(u_\psi(x),\ x). \tag{5.233}$$

ГЛАВА VI

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

В этой главе рассматривается проблема оптимального синтеза в динамических вариационных задачах при наличии ограничений. Исследование этой проблемы в отличие от работы [25] проводится на основе аппарата предыдущих глав и заключается в получении условия оптимальности, в применении методов учета ограничений, в получении операторных уравнений и в рассмотрении численных методов решения. Изложение доказательств и рассуждений в этой главе приводится в весьма сжатом виде, поскольку здесь ставится целью показать возможности применения аппарата предыдущих глав к исследованию проблемы оптимального синтеза.

§ 1. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy(x)}{dx}=F(y(x),\ \varphi(x),\ x),\ y(0)=y^0, \tag{6.1}$$

где $y=(y_1, \ldots, y_k)$—вектор фазовых координат оптимизируемого динамического процесса, $\varphi(x)=(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ — вектор-функция управляющих воздействий из множества $M=M_1 \cap M_2$:

$$M_1=\{\varphi(x)\in\mathfrak{M}: 0\leqslant\varphi_j(x)\leqslant b_j\ (j=1, \ldots, n),\ x\in[0,\ a]\}, \tag{6.2}$$

$$M_2=\{\varphi(x)\in\mathfrak{M}: V_i(\varphi(x))\leqslant c_i\ (i=1, \ldots, m)\}, \tag{6.3}$$

x — независимая скалярная переменная, принимающая значения из отрезка $[0, a]$.

Будем считать, что вектор-функция $F(y,\ \varphi,\ x)=(F_1(y,\ \varphi,\ x), \ldots, F_k(y,\ \varphi,\ x))$ — непрерывная дифференцируемая по y и φ в сфере достаточно большого радиуса из $E_k \times E_n$ и непрерывна по $x\in[0,\ a]$, и, кроме того, число $a>0$ и вектор начальных данных y^0 заданы.

Обозначим через N_1, N_2 и N множества решений $y(x)$ системы (6.1) при управлениях $\varphi(x) \in M_1$, $\varphi(x) \in M_2$ и $\varphi(x) \in M$ соответственно:

$$N_1 = \left\{ y(x) : \frac{dy(x)}{dx} = F(y(x), \varphi(x), x),\ y(0) = y^0 \text{ при } \varphi(x) \in M_1 \right\}, \tag{6.4}$$

$$N_2 = \left\{ y(x) : \frac{dy(x)}{dx} = F(y(x), \varphi(x), x),\ y(0) = y^0 \text{ при } \varphi(x) \in M_2 \right\}, \tag{6.5}$$

$$N = \left\{ y(x) : \frac{dy(x)}{dx} = F(y(x), \varphi(x), x),\ y(0) = y^0 \text{ при } \varphi(x) \in M \right\}. \tag{6.6}$$

Вектор-функция $\varphi(y, x)$, определенная на множестве $N \times [0, a]$, называется *синтезирующей*, если в системе (6.1) $\varphi = \varphi(y(x), x)$, при этом решение системы (6.1) для $\varphi = \varphi(y(x), x)$ будем обозначать через $y(x \mid \varphi)$.

Введем в рассмотрения множества $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}$ синтезирующих вектор-функций $\varphi(y, x)$ вида

$$\mathbf{M}_1 = \{\varphi(y, x) \in L_{2;\,k+1}(N_1 \times [0, a]) : 0 \leqslant \varphi_j(y, x) \leqslant b_j \quad (j = 1, \ldots, n)\}, \tag{6.7}$$

$$\mathbf{M}_2 = \{\varphi(y, x) \in L_{2;\,k+1}(N_2 \times [0, a]) : V_i(\varphi(y(x), x)) \leqslant c_i \quad (i = 1, \ldots, m)\}, \tag{6.8}$$

$$\mathbf{M} = \{\varphi(y, x) \in L_{2;\,k+1}(N \times [0, a]) : \varphi(y(x), x) \in M_1 \cap M_2\}, \tag{6.9}$$

т. е. множества $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}$ определены так, что $\varphi(y, x) \in \mathbf{M}_1$ или $\mathbf{M}_2$, или $\mathbf{M}$ тогда и только тогда, когда вектор-функция $\varphi(y(x), x)$ принадлежит $\mathbf{M}_1$ или $\mathbf{M}_2$, или $\mathbf{M}$ соответственно, где $y(x)$ — решение системы (6.1) при управлении $\varphi = \varphi(y, x)$.

Проблема оптимального синтеза формулируется следующим образом.

Задача 18 (задача синтеза)

Найти вектор-функцию $\varphi^0(y, x) \in \mathbf{M}$ (или $\mathbf{M}_1$, или $\mathbf{M}_2$) такую, что на решениях системы (6.1) $y(x \mid \varphi^0)$ при $\varphi^0 = \varphi^0(y, x)$ функционал $V_0(\varphi)$ достигает своего наименьшего значения для $\varphi = \varphi^0$

$$V_0(\varphi^0(y, x)) = \min_{\substack{\varphi(y, x) \in \mathbf{M} \\ \frac{dy}{dx} = F(y, \varphi, x) \\ y(0) = y^0}} V_0(\varphi(y, x)). \tag{6.10}$$

Вектор-функция $\varphi^0(y, x) \in \mathbf{M}$ (или $\mathbf{M}_1$, или $\mathbf{M}_2$) называется оптимальной синтезирующей вектор-функцией в системе (6.1) при наличии ограничений первого и второго типов (или первого типа, или второго типа). Так же как и в предыдущих главах, будем предполагать, что функционалы

$$V_i(\varphi) \ (i=0, 1, \ldots, m)$$

имеют вид

$$V_i(\varphi)=\int_0^a f_i(y(x), \varphi(x), x)\,dx \ (i=0, 1, \ldots, m), \qquad (6.11)$$

где функции $f_i(y, \varphi, x)$ непрерывны по $x \in [0, a]$ и непрерывно дифференцируемы по y и φ.

§ 2. ГРАДИЕНТ ФУНКЦИОНАЛА ДЛЯ СИНТЕЗИРУЮЩЕЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Прежде чем переходить к формулировке условий оптимальности в задаче синтеза, найдем выражение для функционального градиента $G_0(\varphi(y, x))$ функционала $V_0(\varphi)$ по φ при $\varphi=\varphi(y, x)$ в силу системы (6.1).

Теорема 55

Градиент $G_0(\varphi(y, x))$ функционала V_0 для вектор-функции $\varphi(y, x)$ в силу системы (6.1) *имеет вид*

$$G_0(\varphi(y, x))=\frac{\partial f_0(y(x\,|\,\varphi), \varphi, x)}{\partial\varphi}-B^*(x\,|\,\varphi)p(x\,|\,\varphi), \qquad (6.12)$$

где матричная функция $B(x\,|\,\varphi)$ и вектор-функция $p(x\,|\,\varphi)$ определяются ниже.

Доказательство. Пусть $\varphi(y, x) \in \mathbf{M}$ — некоторая синтезирующая вектор-функция. Возьмем произвольно другую синтезирующую вектор-функцию $\tilde{\varphi}(y, x) \in \mathbf{M}$ и найдем производную $\frac{\partial V_0}{\partial\tilde{\varphi}}$ функционала V_0 на функции $\varphi(y, x)$ по направлению $\tilde{\varphi}(y, x)$ в силу системы (6.1)

$$\frac{\partial V_0}{\partial\tilde{\varphi}}=\frac{1}{\|\varphi\|}\left.\frac{dV_0(\varphi+\lambda\tilde{\varphi})}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}, \qquad (6.13)$$

где

$$\|\tilde{\varphi}\|^2=\sum_{j=1}^{n}\int_0^a \tilde{\varphi}_j^2(y(x\,|\,\tilde{\varphi}), x)\,dx.$$

Обозначим через $\varphi^{\lambda}(y, x) \in M$ синтезирующую вектор-функцию при $\lambda \in [0, 1]$ вида

$$\varphi^{\lambda}(y, x) = \varphi(y, x) + \lambda\tilde{\varphi}(y, x). \tag{6.14}$$

Тогда получим

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tilde{\varphi}} = \frac{1}{\|\tilde{\varphi}\|}\int_0^a \frac{df_0(y(x|\varphi^{\lambda}), \varphi^{\lambda}, x)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} dx =$$

$$= \frac{1}{\|\tilde{\varphi}\|}\int_0^a \left\{\left[\frac{\partial f_0(y(x|\varphi), \varphi, x)}{\partial y}, \frac{dy(x|\varphi^{\lambda})}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial f_0(y(x|\varphi), \varphi, x)}{\partial \varphi}, \frac{d\varphi^{\lambda}}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}\right]\right\} dx. \tag{6.15}$$

Используя (6.14), найдем

$$\frac{d\varphi^{\lambda}}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} = \left\{\frac{d}{d\lambda}\left[\varphi\left(y\left(x|\varphi+\lambda\tilde{\varphi}\right), x\right) + \lambda\tilde{\varphi}\left(y\left(x|\varphi+\lambda\tilde{\varphi}\right), x\right)\right]\right\}_{\lambda=0} =$$

$$= \tilde{\varphi}(y(x|\varphi), x) + \frac{\partial\varphi(y(x|\varphi), x)}{\partial y}\frac{dy(x|\varphi+\lambda\tilde{\varphi})}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}. \tag{6.16}$$

Из системы

$$\frac{dy(x|\varphi+\lambda\tilde{\varphi})}{dx} = F(y(x|\varphi+\lambda\tilde{\varphi}), \varphi+\lambda\tilde{\varphi}, x), \quad y(0|\varphi+\lambda\tilde{\varphi}) = y^0 \tag{6.17}$$

после дифференцирования по λ и замены порядка дифференцирования по x, λ найдем, что вектор-функция

$$z(x|\varphi, \tilde{\varphi}) = \frac{dy(x|\varphi+\lambda\tilde{\varphi})}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0} \tag{6.18}$$

удовлетворяет следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial F(y(x|\varphi), \varphi, x)}{\partial y} z + \frac{\partial F(y(x|\varphi), \varphi, x)}{\partial \varphi}\frac{d\varphi^{\lambda}}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=0}, \quad z(0|\varphi, \tilde{\varphi}) = 0. \tag{6.19}$$

Из (6.19) с использованием (6.16) получим, что $z(x|\varphi, \tilde{\varphi})$ является решением следующей системы:

$$\frac{dz}{dx} = A(x|\varphi)z + B(x|\varphi)\tilde{\varphi}, \quad z(0|\varphi, \tilde{\varphi}) = 0, \tag{6.20}$$

где матричные функции $A(x|\varphi)$ и $B(x|\varphi)$ имеют вид

$$A(x|\varphi) = \frac{\partial F(y(x|\varphi), \varphi, x)}{\partial y} + \frac{\partial F(y(x|\varphi), \varphi, x)}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial\varphi(y(x|\varphi), x)}{\partial y}, \tag{6.21}$$

$$B(x|\varphi) = \frac{\partial F(y(x|\varphi), \varphi, x)}{\partial \varphi}. \tag{6.22}$$

Рассмотрим фундаментальную матрицу $W(x|\varphi)$ решений системы

$$\frac{dW}{dx}=A(x|\varphi)W, \quad W(0|\varphi)=E. \tag{6.23}$$

Тогда решение $z(x|\varphi, \tilde{\varphi})$ системы (6.20) можно записать по формуле Коши

$$z(x|\varphi, \tilde{\varphi})=W(x|\varphi)\int_0^x (W(\xi|\varphi))^{-1}B(\xi|\varphi)\tilde{\varphi}(y(\xi|\varphi), \xi)\,d\xi. \tag{6.24}$$

С учетом введенного обозначения (6.18) получим

$$\frac{\partial V_0(\varphi)}{\partial\tilde{\varphi}}=\frac{1}{\|\tilde{\varphi}\|}\int_0^a\left\{\left[\frac{\partial f_0(y(x|\varphi), \varphi, x)}{\partial\varphi}, \tilde{\varphi}(y(x|\varphi), x)\right]+\right.$$
$$\left.+[C(x|\varphi), z(x|\varphi, \tilde{\varphi})]\right\}dx, \tag{6.25}$$

матричная функция $C(x|\varphi)$ определяется в виде

$$C(x|\varphi)=\frac{\partial f_0(y(x|\varphi), \varphi, x)}{\partial y}+\left(\frac{\partial\varphi(y(x|\varphi), x)}{\partial y}\right)^*\frac{\partial f_0(y(x|\varphi), \varphi, x)}{\partial\varphi}. \tag{6.26}$$

Подставим (6.24) в (6.25) и проинтегрируем после этого второе слагаемое в фигурных скобках в полученном выражении (6.25) аналогично тому, как это сделано в формуле (5.28) в главе V, после чего окончательно будем иметь

$$\frac{\partial V_0(\varphi)}{\partial\tilde{\varphi}}=\frac{1}{\|\tilde{\varphi}\|}\int_0^a\left[\frac{\partial f_0(y(x|\varphi), \varphi, x)}{\partial\varphi}-\right.$$
$$\left.-B^*(x|\varphi)p(x|\varphi), \tilde{\varphi}(y(x|\varphi), x)\right]dx, \tag{6.27}$$

где через $p(x|\varphi)$ обозначено решение сопряженной системы

$$\frac{dp}{dx}=-A^*(x|\varphi)p-C(x|\varphi) \quad p(a|\varphi)=0. \tag{6.28}$$

Из выражения (6.27) для $\frac{\partial V_0(\varphi)}{\partial\tilde{\varphi}}$ следует, что градиент $G_0(\varphi(y, x))$ вычисляется по формуле (6.12). Теорема доказана полностью.

§ 3. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Необходимые условия оптимальности для решения задачи 18 формулируются следующим образом.

Теорема 56

Пусть $\varphi^0(y, x) \in \mathbf{M}$ — *решение задачи синтеза (задачи* 18), *тогда имеет место следующее условие оптимальности:*

$$\min_{\substack{\varphi(y,x)\in\mathbf{M} \\ \frac{dy}{dx}=F(y,\varphi,x) \\ y(0)=y^0}} \int_0^a [G_0(\varphi^0(y(x\,|\,\varphi^0), x))\ \varphi(y(x\,|\,\varphi^0), x) - \varphi^0(y(x\,|\,\varphi^0), x)]\, dx = 0, \tag{6.29}$$

где $G_0(\varphi^0)$ — *функциональный градиент* V_0 *при* $\varphi^0 = \varphi^0(y(x\,|\,\varphi^0), x)$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 43 главы V при использовании вектор-функции $\varphi^\lambda(y, x)$ вида

$$\varphi^\lambda(y, x) = \varphi^0(y, x) + \lambda(\varphi(y, x) - \varphi^0(y, x)), \tag{6.30}$$

где $\varphi(y, x)$ — произвольная синтезирующая вектор-функция из $\mathbf{M}$.

Будем предполагать, что в задаче 18 рассматривается множество $\mathbf{M}_1$, т. е. имеются ограничения в задаче синтеза только первого типа. Аналогично (6.29) получим в этом случае следующие условия оптимальности:

$$\min_{\substack{\varphi(y,x)\in\mathbf{M}_1 \\ \frac{dy}{dx}=F(y,\varphi,x) \\ y(0)=y^0}} \int_0^a [G_0(\varphi^0(y(x\,|\,\varphi^0), x)),\ \varphi(y(x\,|\,\varphi^0), x) - \varphi^0(y(x\,|\,\varphi^0), x)]\, dx = 0. \tag{6.31}$$

Отсюда и из вида множества $\mathbf{M}_1$, определяемого (6.7), следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 57

Для того чтобы $\varphi^0(y, x) \in \mathbf{M}_1$ *было оптимальной синтезирующей вектор-функцией в задаче* 18, *необходимо, чтобы* $\varphi^0(y, x)$ *было решением следующего операторного уравнения:*

$$\varphi(y, x) = \overline{\Phi}(\varphi(y, x), x), \tag{6.32}$$

где оператор $\overline{\Phi} = (\overline{\Phi}_1, \ldots, \overline{\Phi}_n)$ *имеет вид*

$$\overline{\Phi}_j(\varphi(y, x), x) = \frac{b_j}{2}[1 - \operatorname{sign} G_0^j(\varphi(y, x))] \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{6.33}$$

Поскольку оператор $\overline{\Phi}$ не является гладким, то целесообразно (см. главы III—V) рассмотреть ε-задачу синтеза.

Задача 19 (ε-задача синтеза)

Для заданного $\varepsilon > 0$ найти оптимальную синтезирующую вектор-функцию $\omega_\varepsilon^0(y, x) = \{\varphi_\varepsilon^0(y, x), \eta_\varepsilon^0(y, x)\}$ из Ω_1 такую, что

$$V_\varepsilon(\omega_\varepsilon^0(y, x)) = \min_{\substack{\omega(y, x) \in \Omega_1 \\ \frac{dy}{dx} = F(y, \varphi, x) \\ y(0) = y^0}} V_\varepsilon(\omega(y, x)). \quad (6.34)$$

Здесь обозначено через Ω_1 множество синтезирующих вектор-функций $\omega(y, x) = \{\varphi(y, x), \eta(y, x)\}$ таких, что

$$\left(\varphi_j(y, x) - \frac{b_j}{2}\right)^2 + \left(\eta_j(y, x) - \frac{b_j}{2}\right)^2 \leqslant \frac{b_j^2}{4} \quad (j = 1, \ldots, n). \quad (6.35)$$

При $\varphi(y, x) \in \mathbf{M}_1$ и $\eta(y, x) \in \mathbf{M}_1$ функционал $V_\varepsilon(\omega(y, x))$ определяется следующим образом:

$$V_\varepsilon(\omega(y, x)) = V_0(\varphi(y, x)) + \\ + \frac{2\varepsilon}{an} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{b_j} \int_0^a \left[\eta_j(y(x \mid \varphi), x) - \frac{b_j}{2}\right] dx. \quad (6.36)$$

На основе применения условий оптимальности для ε-задачи синтеза, аналогично задаче 18, для множества Ω_1 получим, что справедлива следующая теорема.

Теорема 58

Решение $\omega_\varepsilon^0(y, x) \in \Omega_1$ ε-задачи синтеза 19 является решением операторного уравнения

$$\omega(y, x) = \Phi_\varepsilon(\omega(y, x)) \quad (6.37)$$

или в развернутой форме

$$\varphi(y, x) = \overline{\Phi}_\varepsilon(\varphi(y, x), x), \quad (6.38)$$

$$\eta(y, x) = \overline{\overline{\Phi}}_\varepsilon(\varphi(y, x), x), \quad (6.39)$$

где j-е компоненты операторов $\overline{\Phi}_\varepsilon$ и $\overline{\overline{\Phi}}_\varepsilon$ имеют вид

$$\overline{\Phi}_{\varepsilon j}(\varphi(y, x), x) = \frac{b_j}{2}\left\{1 - \frac{G_0^j(\varphi(y, x))}{\sqrt{[G_0^j(\varphi(y, x))]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2 a^2 b_j^2}}}\right\}, \quad (6.40)$$

$$\overline{\overline{\Phi}}_{\varepsilon j}(\varphi(y, x), x) = -\frac{\varepsilon}{na\sqrt{[G_0^j(\varphi(y, x)]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2 a^2 b_j^2}}}. \quad (6.41)$$

Таким образом, в случае ограничений первого типа в задаче синтеза получены условия оптимальности, на основе которых приведен вид операторных уравнений для нахождения решения задач синтеза 18 и 19 на множестве $\mathbf{M}_1$.

В случае наличия ограничений первого и второго типов в задачах синтеза следует применить методы учета ограничений главы II, что позволит свести задачу синтеза на множестве $\mathbf{M}$ к задачам синтеза на множестве $\mathbf{M}_1$ с изменением вида минимизируемого функционала.

§ 4. ИТЕРАЦИОННЫЕ ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА

Для численного решения задач оптимального синтеза и связанных с ними операторных уравнений можно использовать обширный арсенал методов, аналогичных развитым в главах IV и V методам численного решения вариационных задач. В этом параграфе приводится лишь соответствующее изменение итерационных градиентных методов применительно к решению задачи оптимального синтеза при наличии ограничений первого типа, т. е. в задаче 18 рассматривается множество $\mathbf{M}_1$ синтезирующих вектор-функций $\varphi(y, x)$.

Пусть синтезирующая вектор-функция $\varphi^1(y, x) \in \mathbf{M}_1$ — начальное приближение, $y^1(x) = y(x|\varphi^1)$ — решение системы (6.1) при $\varphi = \varphi^1(y, x)$, $p^1(x) = p(x|\varphi^1)$ — решение сопряженной системы (6.28) при $\varphi = \varphi^1(y^1(x), x)$.

Вспомогательная синтезирующая вектор-функция $\bar{\varphi}^1(y, x)$ определяется в виде

$$\bar{\varphi}^1_j(y, x) = \frac{b_j}{2}\left\{1 - \operatorname{sign}\left[\frac{\partial f_0(y, \varphi^1(y, x), x)}{\partial \varphi_j} - \left(\frac{\partial F(y, \varphi^1(y, x), x)}{\partial \varphi_j}\right)^* p^1(x)\right]\right\} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{6.42}$$

Если выполнено условие

$$\int_0^a \left[-\left(\frac{\partial F(y^1(x), \varphi^1(y^1(x), x), x)}{\partial \varphi}\right)^* p^1(x) + \frac{\partial f_0(y^1(x), \varphi^1(y^1(x), x), x)}{\partial \varphi}, \ \varphi^1(y^1(x), x) - \bar{\varphi}^1(y^1(x), x)\right] dx = 0, \tag{6.43}$$

то $\varphi^1(y, x)$ — оптимальная синтезирующая вектор-функция в задаче 18. В противном случае, т. е. при невыполнении условия (6.43), второе приближение $\varphi^2(y, x)$ находится в виде

$$\varphi^2(y, x) = \varphi^1(y, x) + \lambda_1(\bar{\varphi}^1(y, x) - \varphi^1(y, x)), \tag{6.44}$$

где величина шага $\lambda_1 \geqslant 0$ находится различными способами.

Сущность построения оптимальной синтезирующей вектор-функции $\varphi^0(y, x) \in \mathbf{M}_1$ итерационными градиентными методами

заключается в нахождении последовательности синтезирующих вектор-функций $\varphi^k(y, x) \in \mathbf{M}_1$ по рекуррентной формуле

$$\varphi^k(y, x) = \varphi^k(y, x) + \lambda_k(\bar{\varphi}^k(y, x) - \varphi^k(y, x)), \qquad (6.45)$$

где вспомогательная синтезирующая вектор-функция $\bar{\varphi}^k(y, x) \in \mathbf{M}_1$ имеет вид при целом $k \geqslant 1$

$$\bar{\varphi}^k(y, x) = \frac{b_j}{2}\left\{1 - \operatorname{sign}\left[\frac{\partial f_0(y, \varphi^k(y, x), x)}{\partial \varphi_j} - \left(\frac{\partial F(y, \varphi^k(y, x), x)}{\partial \varphi_j}\right)^* p^k(x)\right]\right\} \quad (j = 1, \ldots, n). \qquad (6.46)$$

В (6.45) величина шага $\lambda_k \geqslant 0$ может находиться различными способами, например:

1) в методе простой итерации

$$\lambda_k = \lambda = \text{const}; \qquad (6.47)$$

2) в методе условного наискорейшего спуска λ_k находится из условия

$$V_0(\varphi^k_{\lambda_k}(y(x \mid \varphi^k_{\lambda_k}), x)) = \min_{0 < \lambda \leqslant 1} V_0(\varphi^k_\lambda(y(x \mid \varphi^k_\lambda), x)), \qquad (6.48)$$

где вектор-функция φ^k_λ имеет вид

$$\varphi^k_\lambda(y(x \mid \varphi^k_\lambda), x) = \varphi^k(y(x \mid \varphi^k + \lambda(\bar{\varphi}^k - \varphi^k)), x) + \lambda(\bar{\varphi}^k(y(x \mid \varphi^k + \lambda(\bar{\varphi}^k - \varphi^k), x) - \varphi^k(y(x \mid \varphi^k + \lambda(\bar{\varphi}^k - \varphi^k)), x)); \qquad (6.49)$$

3) в методе наискорейшего спуска λ_k находится из условия

$$V_0(\varphi^k_{\lambda_k}(y(x \mid \varphi^k_{\lambda_k}), x)) = \min_{\lambda \geqslant 0} V_0(\varphi^k_\lambda(y(x \mid \varphi^k_\lambda), x)); \qquad (6.50)$$

4) в методе условных минимальных невязок λ_k находится из условия

$$\|G_0(\varphi^k_{\lambda_k}(y(x \mid \varphi^k_{\lambda_k}), x))\| = \min_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} \|G_0(\varphi^k_\lambda(y(x \mid \varphi^k_\lambda), x))\|; \qquad (6.51)$$

5) в методе минимальных невязок λ_k находится из условия

$$\|G_0(\varphi^k_{\lambda_k}(y(x \mid \varphi^k_{\lambda_k}), x))\| = \min_{\lambda \geqslant 0} \|G_0(\varphi^k_\lambda(y(x \mid \varphi^k_\lambda), x))\|. \qquad (6.52)$$

Предлагаемый в этой главе подход к исследованию проблемы оптимального синтеза при наличии ограничений существенно отличается от широко известного метода динамического программирования [4], в котором требуется искать решение функционального уравнения в частных производных на основе использования свойств аддитивности минимизируемого функционала.

В отличие от этого, как видно на примере итерационных градиентных методов, алгоритм построения оптимального синтеза использует на каждом шаге интегрирование двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений, и, кроме того, аддитивность минимизируемого функционала не является обязательным требованием.

ГЛАВА VII

ИГРОВЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

В этой главе рассматриваются вопросы применения аппарата исследования вариационных задач из глав I—V к игровым вариационным задачам при наличии ограничений [26].

§ 1. ПОСТАНОВКА ИГРОВЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Пусть заданы два множества M и Q вектор-функций $\varphi(x)=(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\in\mathfrak{M}$ и $q(x)=(q_1(x), \ldots, q_\rho(x))\in\mathfrak{M}$ так, что выполнены ограничения первого и второго типов соответственно

$$\left.\begin{array}{ll} 0\leqslant\varphi_j(x)\leqslant b_j & (j=1, \ldots, n) \\ 0\leqslant q_s(x)\leqslant\bar{b}_s & (s=1, \ldots, \rho) \end{array}\right\} \text{ при } x\in R, \tag{7.1}$$

$$\left.\begin{array}{l} V_i(\varphi(x))\leqslant c_i \quad (i=1, \ldots, m) \\ V_{m+t}(q(x))\leqslant c_{m+t} (t=1, \ldots, \nu) \end{array}\right\}, \tag{7.2}$$

через M_1, Q_1 или M_2, Q_2 обозначим множества вектор-функций $\varphi(x)$ и $q(x)$, удовлетворяющих только ограничениям первого или второго типов.

Будем предполагать, что на паре вектор-функций $\varphi(x)\in M$ и $q(x)\in Q$ задан функционал $V_0(\varphi(x), q(x))$. Считаем, что функционалы $V_\varkappa(\varkappa=0, 1, \ldots, m+\nu)$ имеют вид

$$V_0(\varphi, q)=\int\limits_R f_0(\varphi(x), q(x), x)\,dx, \tag{7.3}$$

$$V_i(\varphi)=\int\limits_R f_i(\varphi(x), x)\,dx \ (i=1, \ldots, m), \tag{7.4}$$

$$V_{m+t}(q)=\int\limits_R f_{m+t}(q(x), x)\,dx \ (t=1, \ldots, \nu), \tag{7.5}$$

где подынтегральные функции f_x непрерывны по $x \in R$ и непрерывно дифференцируемы по φ и q.

Игровая вариационная задача оптимизации функционала V_0 при ограничениях (7.1)—(7.2) формулируется следующим образом.

Задача 20

Найти вектор-функции $\varphi^0(x) \in M$ и $q^0(x) \in Q$ такие, что

$$V_0(\varphi^0, p^0) = \min_{\varphi \in M} [\max_{q \in Q} V_0(\varphi, q)] = \max_{q \in Q} [\min_{\varphi \in M} V_0(\varphi, q)]. \tag{7.6}$$

Пара вектор-функций $\{\varphi^0(x), q^0(x)\} \in M \times Q$ называется *седловой точкой*, если выполнено (7.6). Условия (7.6) эквивалентны выполнению неравенств при любых $\varphi \in M$, $q \in Q$:

$$V_0(\varphi^0, q) \leqslant V_0(\varphi^0, q^0) \leqslant V_0(\varphi, q^0). \tag{7.7}$$

Игровая вариационная задача 20 называется неклассической, если хотя бы одно из множеств M или Q не являются открытыми множествами (например, при $c_{i_0} \neq +\infty$, $i_0 \in (1, \ldots, m)$, множество M_1 замкнуто).

§ 2. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Необходимые условия оптимальности для задачи 20 в случае выпуклых множеств M и Q получены в следующих двух теоремах.

Теорема 59

Пусть $\{\varphi^0(x), q^0(x)\} \in M \times Q$ — *решение задачи* 20, *тогда для любых вектор-функций* $\varphi(x) \in M$ *и* $q(x) \in Q$ *имеют место неравенства*

$$\int_R [g_{01}(\varphi^0(x), q^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx \geqslant 0, \tag{7.8}$$

$$\int_R [g_{02}(\varphi^0(x), q^0(x)), q(x) - q^0(x)]\, dx \leqslant 0, \tag{7.9}$$

где через $g_{01}(\varphi, q)$ *и* $g_{02}(\varphi, q)$ *обозначены вектор-функции*

$$g_{01}(\varphi(x), q(x)) = \frac{\partial f_0(\varphi(x), q(x), x)}{\partial \varphi}, \tag{7.10}$$

$$g_{02}(\varphi(x), q(x)) = \frac{\partial f_0(\varphi(x), q(x), x)}{\partial q}. \tag{7.11}$$

Доказательство. Если $\{\varphi^0(x),\ q^0(x)\} \in M \times Q$ — решение игровой вариационной задачи 20, то предположим противное, т. е. пусть существуют такие вектор-функции $\tilde{\varphi}(x) \in M$ или $\tilde{q}(x) \in Q$, что не имеет места хотя бы одно из неравенств (7.8)—(7.9). Пусть, например, невыполнено (7.8)

$$\int_R [g_{01}(\varphi^0(x),\ q^0(x)),\ \tilde{\varphi}(x) - \varphi^0(x)]\, dx < 0. \qquad (7.12)$$

В силу сделанных предположений вектор-функция $\varphi^0(x) + \lambda(\tilde{\varphi}(x) - \varphi^0(x)) \in M$ для любого $\lambda \in [0,\ 1]$. По формуле Тейлора получим

$$V_0(\varphi^0 + \lambda(\tilde{\varphi} - \varphi^0),\ q^0) = V_0(\varphi^0,\ q^0) + \\ + \lambda \int_R [g_{01}(\varphi^0(x),\ q^0(x)),\ \tilde{\varphi}(x) - \varphi^0(x)]\, dx + r(\lambda), \qquad (7.13)$$

причем $\frac{r(\lambda)}{\lambda} \to 0$ при $\lambda \to 0+$. Отсюда и из неравенства (7.12) следует при достаточно малых $\lambda \in [0,\ 1]$

$$V_0(\varphi^0 + \lambda(\tilde{\varphi} - \varphi^0),\ q^0) < V_0(\varphi^0,\ q^0), \qquad (7.14)$$

что противоречит условиям (7.7) для решения $\{\varphi^0,\ q^0\}$ задачи 20. Полученное противоречие и означает, что выполнены условия (7.8)—(7.9).

Теорема 60

Для того чтобы $\{\varphi^0(x),\ q^0(x)\} \in M \times Q$ было решением игровой вариационной задачи 20, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\min_{\varphi \in M} \int_R [g_{01}(\varphi^0(x),\ q^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\, dx = 0, \qquad (7.15)$$

$$\max_{q \in Q} \int_R [g_{02}(\varphi^0(x),\ q^0(x)),\ q(x) - q^0(x)]\, dx = 0. \qquad (7.16)$$

Доказательство справедливости (7.15)—(7.16) следует из неравенств (7.8)—(7.9) на основе рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве теоремы 5 (гл. I).

Функционал $V_0(\varphi,\ q)$ называется выпукло-вогнутым, если $V_0(\varphi,\ q)$ выпукл по φ и вогнут по q, т. е. если для любых $\alpha \in [0,\ 1]$ и $\beta \in [0,\ 1]$, $\varphi,\ \tilde{\varphi} \in \mathfrak{M}$ и $q,\ \tilde{q} \in \mathfrak{M}$ выполняются неравенства

$$V_0(\varphi + \alpha(\tilde{\varphi} - \varphi),\ q) \leqslant V_0(\varphi,\ q) + \alpha[V_0(\tilde{\varphi},\ q) - V_0(\varphi,\ q)], \qquad (7.17)$$

$$V_0(\varphi,\ q + \beta(\tilde{q} - q)) \geqslant V_0(\varphi,\ q) + \beta[V_0(\varphi,\ \tilde{q}) - V_0(\varphi,\ q)]. \qquad (7.18)$$

Теорема 61

Для того чтобы $\{\varphi^0(x),\ q^0(x)\} \in M \times Q$ *было решением игровой вариационной задачи* 20, *достаточно в случае выпукло-вогнутого функционала* V_0, *чтобы выполнялись условия* (7.15)–(7.16).

Доказательство. Пусть $V_0(\varphi,\ q)$ — выпукло-вогнутый функционал и для пары вектор-функций $\{\varphi^0(x),\ q^0(x)\} \in M \times Q$ выполнены условия (7.15)–(7.16). Тогда для любых вектор-функций $\varphi(x) \in M$ и $q(x) \in Q$ на основе применения формулы Тейлора и неравенств (7.17)–(7.18) получим

$$V_0(\varphi,\ q^0) - V_0(\varphi^0,\ q^0) \geqslant \int_R [g_{01}(\varphi^0(x),\ q^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\,dx \geqslant 0, \tag{7.19}$$

$$V_0(\varphi^0,\ q) - V_0(\varphi^0,\ q^0) \leqslant \int_R [g_{02}(\varphi^0(x),\ q^0(x)),\ q(x) - q^0(x)]\,dx \leqslant 0. \tag{7.20}$$

Это и означает выполнение неравенств (7.7), т. е. $\{\varphi^0(x), q^0(x)\}$ — решение задачи 20.

§ 3. ПОЛУЧЕНИЕ И СГЛАЖИВАНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИГРОВОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ ПЕРВОГО ТИПА

Будем предполагать, что в игровой вариационной задаче 20 отсутствуют ограничения второго типа, т. е. рассматриваются множества M_1 и Q_1 вектор-функций $\varphi(x)$ и $q(x)$. Из теорем 59—61 следует справедливость следующего утверждения.

Для того чтобы пара вектор-функций $\{\varphi^0(x),\ q^0(x)\} \in M_1 \times Q$ была решением задачи 20 при наличии ограничений первого типа, необходимо и в случае выпукло-вогнутого V_0 достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\min_{\varphi \in M_1} \int_R [g_{01}(\varphi^0(x),\ q^0(x)),\ \varphi(x) - \varphi^0(x)]\,dx = 0, \tag{7.21}$$

$$\max_{q \in Q_1} \int_R [g_{02}(\varphi^0(x),\ q^0(x)),\ q(x) - q^0(x)]\,dx = 0. \tag{7.22}$$

Теорема 62

Для того чтобы пара $\{\varphi^0(x),\ q^0(x)\} \in M_1 \times Q$ *была решением задачи* 20, *необходимо и в случае выпукло-вогнутого* V_0 *достаточно, чтобы пара* $\{\varphi^0(x),\ q^0(x)\}$ *была решением операторного уравнения*

$$\varphi(x) = \overline{\Phi}^1(\varphi(x),\ q(x),\ x), \tag{7.23}$$

$$q(x) = \overline{\Phi}^2(\varphi(x),\ q(x),\ x), \tag{7.24}$$

где операторы $\overline{\Phi}^1=(\overline{\Phi}_1^1, \ldots, \overline{\Phi}_n^1)$ *и* $\overline{\Phi}^2=(\overline{\Phi}_1^2, \ldots, \overline{\Phi}_\rho^2)$ *имеют следующий вид* ($j=1, \ldots, n$; $s=1, \ldots, \rho$):

$$\overline{\Phi}_j^1(\varphi(x), q(x), x)=\frac{b_j}{2}\left[1-\operatorname{sign} g_{01}^j(\varphi(x), q(x)\right], \quad (7.25)$$

$$\overline{\Phi}_s^2(\varphi(x), q(x), x)=\frac{\overline{b}_s}{2}\left[1+\operatorname{sign} g_{02}^s(\varphi(x), q(x)\right]. \quad (7.26)$$

Доказательство теоремы проводится аналогично рассуждениям § 2 гл. III.

Заметим, что операторы $\overline{\Phi}^1$ и $\overline{\Phi}^2$ в (7.25)—(7.26) не являются гладкими, поэтому, как и ранее, целесообразно для сглаживания операторов рассмотреть ε-задачу, на основе которой можно получить следующие сглаженные операторные уравнения:

$$\varphi(x)=\Phi_\varepsilon^1(\varphi(x), q(x), x), \quad (7.27)$$

$$q(x)=\Phi_\varepsilon^2(\varphi(x), q(x), x), \quad (7.28)$$

где операторы Φ_ε^1 и Φ_ε^2 определяются следующим образом ($j=1, \ldots, n$; $s=1, \ldots, \rho$):

$$\Phi_{\varepsilon j}^1(\varphi(x), q(x), x)=\frac{b_j}{2}\left\{1-\frac{g_{01}^j(\varphi(x), q(x))}{\sqrt{\left[g_{01}^j(\varphi(x), q(x))\right]^2+\frac{4\varepsilon^2}{n^2(\mu(R))^2 b_j^2}}}\right\}, \quad (7.29)$$

$$\Phi_{\varepsilon s}^2(\varphi(x), q(x), x)=\frac{\overline{b}_s}{2}\left\{1+\frac{g_{02}^s(\varphi(x), q(x))}{\sqrt{\left[g_{02}^s(\varphi(x), q(x))\right]^2+\frac{4\varepsilon^2}{\rho^2(\mu(R))^2 \overline{b}_s^2}}}\right\}. \quad (7.30)$$

§ 4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ УЧЕТА ОГРАНИЧЕНИЙ ВТОРОГО ТИПА

Для учета ограничений (7.2) второго типа в игровой вариационной задаче 20 применим метод сведения к минимаксной задаче и метод погружения.

В первом методе вместо игровой вариационной задачи 20 при наличии ограничений первого и второго типов рассматривается следующая игровая вариационная задача при ограничениях только первого типа.

Задача 21

Найти седловую точку $\{(\varphi^0(x), \psi^0), (q^0(x), \zeta^0)\}$ функционала Лагранжа $h(\varphi, \psi, q, \zeta)$

$$h(\varphi^0, \psi^0, q^0, \zeta^0) = \min_{\substack{\varphi\in M_1\\ \psi_i\geq 0\\ (i=1,\dots,m)}} \left[\max_{\substack{q\in Q_1\\ \zeta_t\geq 0\\ (t=1,\dots,\nu)}} h(\varphi, \psi, q, \zeta)\right] =$$

$$= \max_{\substack{q\in Q_1\\ \zeta_t\geq 0\\ (t=1,\dots,\nu)}} \left[\min_{\substack{\varphi\in M_1\\ \psi_i\geq 0\\ (i=1,\dots,m)}} h(\varphi, \psi, q, \zeta)\right]. \tag{7.31}$$

В (7.31) функционал Лагранжа h имеет вид

$$h(\varphi, \psi, q, \zeta) = V_0(\varphi, q) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i [V_i(\varphi) - c_i] -$$

$$- \sum_{t=1}^{\nu} \zeta_t [V_{m+t}(q) - c_{m+t}]. \tag{7.32}$$

Теорема 63

Пусть $\{(\varphi^0, \psi^0), (q^0, \zeta^0)\} \in \mathfrak{A} = M_1 \times K_m \times Q_1 \times K_\nu$ — *решение задачи* 21 (K_m *и* K_ν — *положительные ортанты евклидовых пространств* E_m *и* E_ν), *тогда пара* $\{\varphi^0, q^0\}$ *является решением игровой вариационной задачи* 20 *при наличии ограничений первого и второго типов, причем выполнены дополнительные условия*:

$$\psi_i^0 [V_i(\varphi^0) - c_i] = 0 \quad (i = 1, \dots, m), \tag{7.33}$$

$$\zeta_t^0 [V_{m+t}(q^0) - c_{m+t}] = 0 \quad (t = 1, \dots, \nu). \tag{7.34}$$

Доказательство теоремы 63 проводится аналогично доказательству теоремы 9 (гл. II).

Применяя к задаче 21 результаты § 3 этой главы, можно доказать справедливость следующих утверждений.

Теорема 64

Для того чтобы совокупность $\{(\varphi^0(x), \psi^0), (q^0(x), \zeta^0)\} \in \mathfrak{A}$ *была решением задачи* 21, *необходимо, а в случае выпукло-вогнутого* V_0 *и выпуклых* V_i, V_{m+t} *достаточно, чтобы выполнялись* (7.33)—(7.34) *и следующие условия*:

$$\min_{\substack{\varphi\in M_1\\ \psi_i\geq 0\\ (i=1,\dots,m)}} \int_R \left[g_{01}(\varphi^0(x), q^0(x)) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i^0 g_i(\varphi^0(x)), \varphi(x) - \varphi^0(x)\right] dx = 0 \tag{7.35}$$

$$\max_{\substack{q(x)\in Q_1\\ \zeta_t>0\\ (t=1,\dots,\nu)}} \int_R \left[g_{02}(\varphi^0(x),\ q^0(x)) - \sum_{t=1}^{\nu} \zeta_t^0 g_{m+t}(q^0(x)),\ q(x)-q^0(x)]dx \right] = 0, \tag{7.36}$$

где обозначено при $i=1,\dots,m$ *и* $t=1,\dots,\nu$

$$g_i(\varphi(x)) = \frac{\partial f_i(\varphi(x),\ x)}{\partial \varphi},\quad g_{m+t}(q(x)) = \frac{\partial f_{m+t}(q(x),\ x)}{\partial q}.$$

Теорема 65

Для того чтобы совокупность $\{(\varphi^0(x),\ \psi^0),\ (q^0(x),\ \zeta^0)\} \in \mathfrak{A}$ *была решением задачи* 21, *необходимо, а в случае выпукло-вогнутого* V_0 *и выпуклых* V_i, V_{m+t} *достаточно, чтобы пара вектор-функций* $\{\varphi^0(x),\ q^0(x)\}$ *была решением операторного уравнения*

$$\varphi(x) = \overline{\Phi}^1(\varphi(x),\ q(x),\ \psi^0,\ x), \tag{7.37}$$

$$q(x) = \overline{\Phi}^2(\varphi(x),\ q(x),\ \zeta^0,\ x). \tag{7.38}$$

Здесь вектора ψ^0 и ζ^0 находятся из условий (7.33)—(7.34), а операторы $\overline{\Phi}^1$ и $\overline{\Phi}^2$ определяются следующим образом ($j=1,\dots,n$; $s=1,\dots,\rho$):

$$\overline{\Phi}_j^1(\varphi(x),\ q(x),\ \psi,\ x) =$$

$$= \frac{b_j}{2}\left\{1 - \operatorname{sign}\left[g_{01}^j(\varphi(x),\ q(x)) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i g_i^j(\varphi(x)) \right]\right\}, \tag{7.39}$$

$$\overline{\Phi}_s^2(\varphi(x),\ q(x),\ \zeta,\ x) =$$

$$= \frac{\overline{b}_s}{2}\left\{1 + \operatorname{sign}\left[g_{02}^s(\varphi(x),\ q(x)) - \sum_{t=1}^{\nu} \zeta_t g_{m+t}^s(q(x)) \right]\right\}. \tag{7.40}$$

Заметим, что операторы в (7.37) и (7.38) не являются гладкими, после сглаживания на основе постановки ε-задачи можно получить следующие сглаженные операторные уравнения:

$$\varphi(x) = \Phi_\varepsilon^1(\varphi(x),\ q(x),\ \psi^0,\ x), \tag{7.41}$$

$$q(x) = \Phi_\varepsilon^2(\varphi(x),\ q(x),\ \zeta^0,\ x), \tag{7.42}$$

где операторы Φ_ε^1 и Φ_ε^2 определяются в виде ($j=1, \ldots, n$; $s=1, \ldots, \rho$)

$$\Phi_{\varepsilon j}^1(\varphi(x), q(x), \psi, x) =$$

$$= \frac{b_j}{2}\left\{1 + \frac{g_{01}^j(\varphi(x), q(x)) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i g_i^j(\varphi(x))}{\sqrt{\left[g_{01}^j(\varphi(x), q(x)) + \sum_{i=1}^{m} \psi_i g_i^j(\varphi(x))\right]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{n^2(\mu(R))^2 b_j^2}}}\right\}, \tag{7.43}$$

$$\Phi_{\varepsilon s}^2(\varphi(x), q(x), \zeta, x) =$$

$$= \frac{\bar{b}_s}{2}\left\{1 + \frac{g_{02}^s(\varphi(x), q(x)) - \sum_{t=1}^{\nu} \zeta_t g_{m+t}^s(q(x))}{\sqrt{\left[g_{02}^s(\varphi(x), q(x)) - \sum_{t=1}^{\nu} \zeta_t g_{m+t}^s(q(x))\right]^2 + \frac{4\varepsilon^2}{\rho^2(\mu(R))^2 \bar{b}_s^2}}}\right\}. \tag{7.44}$$

В методе погружения вместо игровой вариационной задачи 20 при наличии ограничений первого и второго типов рассматривается следующая игровая вариационная задача при ограничениях лишь первого типа.

Задача 22

Найти седловую точку $\{\varphi_\psi^0(x), q_\psi^0(x)\} \in M_1 \times Q_1$ функционала $V_\psi(\varphi, q)$

$$V_\psi(\varphi_\psi^0, q_\psi^0) = \min_{\varphi \in M_1}\left[\max_{q \in Q_1} V_\psi(\varphi, q)\right] = \\ = \max_{q \in Q_1}\left[\min_{\varphi \in M_1} V_\psi(\varphi, q)\right]. \tag{7.45}$$

В (7.45) функционал $V_\psi(\varphi, q)$ имеет вид

$$V_\psi(\varphi, q) = V_0(\varphi, q) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \psi_i (V_i(\varphi) - c_i) \times \\ \times [V_i(\varphi) - c_i + |V_i(\varphi) - c_i|] - \\ - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{\nu} \psi_{m+t}(V_{m+t}(q) - c_{m+t}) \times \\ \times [V_{m+t}(q) - c_{m+t} + |V_{m+t}(q) - c_{m+t}|]. \tag{7.46}$$

Теорема 66

Решение $\{\varphi_\psi^0(x),\ q_\psi^0(x)\} \in M_1 \times Q_1$ *задачи* 22 *удовлетворяет следующему условию:*

$$\max_{q \in Q_1} V_0(\varphi_\psi^0,\ q) \leqslant V_0(\varphi_\psi^0,\ q_\psi^0) \leqslant \min_{\varphi \in M_1} V_0(\varphi,\ q_\psi^0), \tag{7.47}$$

при этом ограничения (7.2) *второго типа удовлетворяются с любой наперед заданной точностью* $\varepsilon > 0$:

$$V_i(\varphi_\psi^0(x)) \leqslant c_i + \varepsilon \quad (i = 1,\ \ldots,\ m), \tag{7.48}$$

$$V_{m+t}(q_\psi^0(x)) \leqslant c_{m+t} + \varepsilon \quad (t = 1,\ \ldots,\ \nu) \tag{7.49}$$

при выборе коэффициентов $\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_m = \psi_{m+1} = \ldots = \psi_{m+\nu} = \psi$ *из условия* $\psi \geqslant \psi_\varepsilon > 0$, *где величина* ψ_ε *находится в виде*

$$\psi_\varepsilon = \frac{2\bar{c}}{\varepsilon^2}. \tag{7.50}$$

Величина $\bar{c} > 0$ в (7.50) равна

$$\bar{c} = \max\{2\bar{c}_1(\bar{q}),\ [\bar{c}_2(\bar{\varphi}) - c_2^0]\}, \tag{7.51}$$

причем предполагается, что существуют вектор-функции $\bar{\varphi}(x) \in M$, $\bar{q}(x) \in Q$ (для которых выполнены ограничения (7.1)—(7.2)) и числа $\bar{c}_1(\bar{q})$, $\bar{c}_2(\bar{\varphi})$ и $\bar{c}_2^0$ такие, что

$$|V_0(\varphi,\ \bar{q})| \leqslant \bar{c}_1(\bar{q}) < +\infty \text{ для любого } \varphi \in M_1, \tag{7.52}$$

$$\max_{q \in Q} V_0(\bar{\varphi},\ q) \leqslant \bar{c}_2(\bar{\varphi}) < +\infty, \tag{7.53}$$

$$\max_{q \in Q_1} V_0(\varphi,\ q) \geqslant \bar{c}_2^0 > -\infty \text{ для любого } \varphi \in M_1. \tag{7.54}$$

Доказательство теоремы 66 проводится аналогично доказательству теорем 11—13 § 8 (гл. II).

На основе применения к задаче 22 результатов § 3 этой главы можно доказать, что решение $\{\varphi_\psi^0(x),\ q_\psi^0(x)\} \in M_1 \times Q_1$ задачи 22 необходимо, а в случае выпукло-вогнутого V_0 и выпуклых V_i, V_{m+t} достаточно является решением операторных уравнений

$$\varphi(x) = \bar{\Phi}_\psi^1(\varphi(x),\ q(x),\ x), \tag{7.55}$$

$$q(x) = \bar{\Phi}_\psi^2(\varphi(x),\ q(x),\ x), \tag{7.56}$$

где операторы $\bar{\Phi}_\psi^1$ и $\bar{\Phi}_\psi^2$ определяются следующим образом ($j = 1,\ \ldots,\ n$; $s = 1,\ \ldots,\ \rho$):

$$\bar{\Phi}_{\psi j}^1(\varphi(x),\ q(x),\ x) = \frac{b_j}{2}\Big\{1 - \operatorname{sign}\Big[g_{01}^j(\varphi(x),\ q(x)) + \psi \sum_{i=1}^{m} (V_i(\varphi) - c_i + |V_i(\varphi) - c_i|)\, g_i^j(\varphi(x))\Big]\Big\}, \tag{7.57}$$

$$\overline{\Phi}^2_{\psi s}(\varphi(x),\ q(x),\ x)=\frac{\overline{b}_s}{2}\Big\{1+\operatorname{sign}\Big[g^s_{02}(\varphi(x),\ q(x))-$$

$$-\psi\sum_{t=1}^{\nu}(V_{m+t}(q)-c_{m+t}+|V_{m+t}(q)-c_{m+t}|)\,g^s_{m+t}(q(x))\Big]\Big\}. \quad (7.58)$$

Аналогично после сглаживания операторов $\overline{\Phi}^1_\psi$ и $\overline{\Phi}^2_\psi$ на основе применения ε-задачи можно получить следующие сглаженные операторные уравнения:

$$\varphi(x)=\Phi^1_{\psi\varepsilon}(\varphi(x),\ q(x),\ x), \quad (7.59)$$

$$q(x)=\Phi^2_{\psi\varepsilon}(\varphi(x),\ q(x),\ x), \quad (7.60)$$

где операторы $\Phi^1_{\psi\varepsilon}$ и $\Phi^2_{\psi\varepsilon}$ равны ($j=1,\ \ldots,\ n;\ s=1,\ \ldots,\ p$)

$$\Phi^1_{\psi\varepsilon j}(\varphi(x),\ q(x),\ x)=\frac{b_j}{2}-$$

$$-\frac{b_j}{2}\,\frac{g^j_{01}(\varphi(x),\ q(x))+\psi\sum_{i=1}^{m}(V_i(\varphi)-c_i+|V_i(\varphi)-c_i|)\,g^j_i(\varphi(x))}{\sqrt{\Big[g^j_{01}(\varphi(x),\ q(x))+\psi\sum_{i=1}^{m}(V_i(\varphi)-c_i+|V_i(\varphi)-c_i|)\,g^j_i(\varphi(x))\Big]^2+\dfrac{4\varepsilon^2}{n^2(\mu(R))^2b_j^2}}}, \quad (7.61)$$

$$\Phi^2_{\psi\varepsilon s}(\varphi(x),\ g(x),\ x)=\frac{\overline{b}_s}{2}+$$

$$+\frac{\overline{b}_s}{2}\,\frac{g^s_{02}(\varphi(x),\ q(x))-\psi\sum_{t=1}^{\nu}(V_{m+t}(q)-c_{m+t}+|V_{m+t}(q)-c_{m+t}|)\times g^s_{m+t}(q(x))}{\sqrt{\Big[g^s_{02}(\varphi(x),\ g(x))-\psi\sum_{t=1}^{\nu}(V_{m+t}(q)-c_{m+t}+|V_{m+t}(q)-c_{m+t}|)\,g^s_{m+t}(q(x))\Big]^2+\dfrac{4\varepsilon^2}{\rho^2(\mu(R))^2\overline{b}_s^2}}}. \quad (7.62)$$

§ 5. НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРАДИЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ИГРОВЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Для численного решения игровых вариационных задач и связанных с ними операторных уравнений можно использовать обширный аппарат методов, развитых в главе IV. В этом параграфе приводится соответствующее изменение непрерывных градиентных методов применительно к решению игровых вариационных задач при наличии ограни-

чений (7.1) первого типа, т. е. применительно к нахождению решения $\{\varphi^0(x), q^0(x)\} \in M_1 \times Q_1$ следующей задачи:

$$V_0(\varphi^0, q^0) = \min_{\varphi \in M_1} \left[\max_{q \in Q_1} V_0(\varphi, q)\right] = \max_{q \in Q_1} \left[\min_{\varphi \in M_1} V_0(\varphi, q)\right]. \quad (7.63)$$

Непрерывный градиентный метод решения игровой вариационной задачи (7.63) заключается в нахождении решения задачи Коши при $\tau \geqslant 0$ для системы дифференциальных уравнений для $x \in R$:

$$\frac{d\varphi^\tau(x)}{d\tau} = -\alpha(\tau)\overline{\Phi}^1(\varphi^\tau(x), q^\tau(x), x), \quad (7.64)$$

$$\frac{dq^\tau(x)}{d\tau} = \alpha(\tau)\overline{\Phi}^2(\varphi^\tau(x), q^\tau(x), x) \quad (7.65)$$

с начальными условиями

$$\varphi^\tau(x) = \tilde{\varphi}(x), \quad q^\tau(x) = \tilde{q}(x) \quad \text{при } \tau = 0, \quad (7.66)$$

где $\{\tilde{\varphi}(x), \tilde{q}(x)\} \in M_1 \times Q_1$ — начальное приближение.

Для нахождения решений задач 21 и 22 непрерывными градиентными методами следует искать решение задач Коши с начальными условиями (7.66) для систем

$$\frac{d\varphi^\tau(x)}{d\tau} = -\alpha(\tau)\overline{\Phi}^1(\varphi^\tau(x), q^\tau(x), \psi^0, x), \quad (7.67)$$

$$\frac{dq^\tau(x)}{d\tau} = \alpha(\tau)\overline{\Phi}^2(\varphi^\tau(x), q^\tau(x), \zeta^0, x), \quad (7.68)$$

$$\frac{d\varphi^\tau(x)}{d\tau} = -\alpha(\tau)\overline{\Phi}^1_\psi(\varphi^\tau(x), q^\tau(x), x), \quad (7.69)$$

$$\frac{dq^\tau(x)}{d\tau} = \alpha(\tau)\overline{\Phi}^2_\psi(\varphi^\tau(x), q^\tau(x), x). \quad (7.70)$$

Операторы $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Phi}_\psi$ в правых частях систем (7.64)—(7.65) и (7.67)—(7.70) не являются гладкими (гладкость операторов требуется для доказательства существования и единственности решений систем дифференциальных уравнений), поэтому можно использовать вместо операторов Φ и Φ_ψ сглаженные операторы Φ_ε и $\Phi_{\psi\varepsilon}$, вид которых дается формулами (7.29)—(7.30), (7.43)—(7.44) и (7.61)—(7.62).

ГЛАВА VIII

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

В этой главе рассматриваются примеры использования развитого аппарата теории неклассических вариационных задач к исследованию различных проблем прикладного характера.

§ 1. ОБОБЩЕНИЕ ЛЕММЫ НЕЙМАНА—ПИРСОНА НА СЛУЧАЙ НЕСКОЛЬКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ

В этом параграфе приводится обобщение известной леммы Неймана—Пирсона на случай нескольких линейных ограничений в форме неравенств. Получены операторные уравнения для нахождения решения этой задачи.

1°. Математическая постановка задачи. Рассмотрим задачу отыскания скалярной вещественной функции $\varphi^0(x)$, удовлетворяющей условиям

$$V_0(\varphi^0(x)) = \min_{\substack{0<\varphi(x)<b \\ V_i(\varphi(x))<c_i \\ (i=1,\ldots,k)}} V_0(\varphi(x)) = \min_{\substack{0>\varphi(x)<b \\ V_i(\varphi(x))<c_i \\ (i=1,\ldots,k)}} \int_0^a p_0(x)\varphi(x)\,dx, \quad (8.1)$$

где функционалы $V_i(\varphi(x))$ имеет вид

$$V_i(\varphi(x)) = \int_0^a p_i(x)\varphi(x)\,dx, \quad (8.2)$$

причем $p_0(x)$, $p_i(x)$ — заданные скалярные, вещественные, ненулевые, интегрируемые функции при $x \in [0, a]$, c_i — заданные вещественные числа.

Заметим, что эта задача при $k=1$ известна в литературе как лемма Неймана—Пирсона.

2°. Случай $k=1$. Определим функцию $\varphi^*(x)$ при $x \in [0, a]$ следующим образом:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_0(x) \geqslant 0, \\ b, & \text{если } p_0(x) < 0. \end{cases} \quad (8.3)$$

Если при этом окажется, что $V_1(\varphi^*(x)) \leqslant c_1$, то искомая функция $\varphi^0(x) = \varphi^*(x)$. В противном случае функция $\varphi^0(x)$ определяется как решение следующей минимаксной задачи (см. § 6 гл. II):

$$\min_{0<\varphi(x)<b} \max_{\psi_1 \geqslant 0} \left\{ \int_0^a [p_0(x) + \psi_1 p_1(x)]\, \varphi(x)\, dx - \psi_1 c_1 \right\}, \tag{8.4}$$

при этом функция $\varphi^0(x)$ и постоянное число ψ_1^0 как решение задачи (8.4) удовлетворяют условию

$$\psi_1^0 \left\{ \int_0^a p_1(x)\, \varphi^0(x)\, dx - c_1 \right\} = 0. \tag{8.5}$$

Отсюда имеем, что либо 1) $\psi_1^0 = 0$, либо 2) $\psi_1^0 \neq 0$ и, следовательно,

$$\int_0^a p_1(x)\, \varphi^0(x)\, dx = c_1. \tag{8.6}$$

В первом случае

$$\varphi^0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } p_0(x) > 0, \\ b, & \text{если } p_0(x) < 0, \end{cases} \tag{8.7}$$

т. е. функция $\varphi^0(x)$ совпадает с функцией $\varphi^*(x)$, определяемой формулой (8.3), и потому должно выполняться условие $V_1(\varphi^*(x)) \leqslant c_1$, чего не может быть в силу сделанного предположения. Во втором случае получим

$$\varphi^0(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } p_0(x) + \psi_1^0 p_1(x) \geqslant 0, \\ b & \text{при } p_0(x) + \psi_1^0 p_1(x) < 0, \end{cases} \tag{8.8}$$

где число $\psi_1^0 \geqslant 0$ находится из условия

$$\int_0^a p_1(x) \operatorname{sign} [p_0(x) + \psi_1^0 p_1(x)]\, dx = \int_0^a p_1(x)\, dx - \frac{2c_1}{b}. \tag{8.9}$$

3°. Случай $k = 2$. Определим, как и ранее, функцию $\varphi^*(x)$ по формуле (8.3). Если при этом окажется, что

$$V_1(\varphi^*(x)) \leqslant c_1, \quad V_2(\varphi^*(x)) \leqslant c_2, \tag{8.10}$$

то искомая функции $\varphi^0(x) = \varphi^*(x)$.

В противном случае, т. е. если хотя бы одно из неравенств (8.10) не имеет места, функция $\varphi^0(x)$ определяется как решение следующей минимаксной задачи:

$$\min_{0<\varphi(x)<b} \max_{\substack{\psi_1 \geqslant 0 \\ \psi_2 \geqslant 0}} \left\{ \int_0^a [p_0(x) + \psi_1 p_1(x) + \psi_2 p_2(x)]\, \varphi(x)\, dx - \psi_2 c_1 - \psi_2 c_2 \right\}, \tag{8.11}$$

при этом функция $\varphi^0(x)$ и постоянные числа ψ_1^0 и ψ_2^0 удовлетворяют условию

$$\psi_1^0\left[\int_0^a p_1(x)\varphi^0(x)\,dx - c_1\right] + \psi_2^0\left[\int_0^a p_2(x)\varphi^0(x)\,dx - c_2\right] = 0. \quad (8.12)$$

При проверке выполнимости условий (8.10) возможны только следующие четыре взаимоисключающие альтернативы:

1) $V_1(\varphi^*) \leqslant c_1,\ V_2(\varphi^*) \leqslant c_2,$
2) $V_1(\varphi^*) > c_1,\ V_2(\varphi^*) \leqslant c_2,$
3) $V_1(\varphi^*) \leqslant c_1,\ V_2(\varphi^*) > c_2,$
4) $V_1(\varphi^*) > c_1,\ V_2(\varphi^*) > c_2.$

В соответствии с этими альтернативами получим, что функция $\varphi^0(x)$ и числа ψ_1^0, ψ_2^0 определяются из условий

1) $\psi_1^0 = \psi_2^0 = 0,\ \varphi^0(x) = \varphi^*(x);$ (8.13)
2) $\psi_1^0 > 0,\ \psi_2^0 = 0,$

$$\varphi^0(x) = \frac{b}{2}\{1 - \operatorname{sign}[p_0(x) + \psi_1^0 p_1(x)]\}, \quad (8.14)$$

$$\int_0^a p_1(x)\operatorname{sign}[p_0(x) + \psi_1^0 p_1(x)]\,dx = \int_0^a p_1(x)\,dx - \frac{2c_1}{b};$$

3) $\psi_1^0 = 0,\ \psi_2^0 > 0,$

$$\varphi^0(x) = \frac{b}{2}\{1 - \operatorname{sign}[p_0(x) + \psi_2^0 p_2(x)]\},$$

$$\int_0^a p_2(x)\operatorname{sign}[p_0(x) + \psi_2^0 p_2(x)]\,dx = \int_0^a p_2(x)\,dx - \frac{2c_2}{b}; \quad (8.15)$$

4) $\psi_1^0 > 0,\ \psi_2^0 > 0,$

$$\varphi^0(x) = \frac{b}{2}\{1 - \operatorname{sign}[p_0(x) + \psi_1^0 p_1(x) + \psi_2^0 p_2(x)]\}, \quad (8.16)$$

$$\int_0^a p_1(x)\operatorname{sign}[p_0(x) + \psi_1^0 p_1(x) + \psi_2^0 p_2(x)]\,dx = \int_0^a p_1(x)\,dx - \frac{2c_1}{b},$$

$$\int_0^a p_2(x)\operatorname{sign}[p_0(x) + \psi_1^0 p_1(x) + \psi_2^0 p_2(x)]\,dx = \int_0^a p_2(x)\,dx - \frac{2c_2}{b}.$$

4°. Случай $k > 2$. Определим, как и ранее, функцию $\varphi^*(x)$ по формуле (8.3) и вычислим функционалы $V_i(\varphi^*)$ $(i = 1, \ldots, k)$. Тогда при проверке выполнимости условий $V_i(\varphi^*) \leqslant c_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ возможны 2^k взаимоисключающих альтернатив,

причем под альтернативой с индексами $i_1, \ldots, i_l$ $(1 \leqslant l \leqslant k)$ подразумевается случай, когда

$$\begin{aligned} &V_i(\varphi^*) > c_i \quad \text{при } i = i_s \ (s = 1, \ldots, l), \\ &V_i(\varphi^*) \leqslant c_i \quad \text{при } i \neq i_s \ (s = 1, \ldots, l;\ i = 1, \ldots, k), \end{aligned} \tag{8.17}$$

при этом под нулевой альтернативой принимается случай, когда выполняются условия $V_i(\varphi^*) \leqslant c_i$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Функция $\varphi^0(x)$ определяется как решение следующей минимаксной задачи:

$$\min_{0 < \varphi(x) < b} \max_{\substack{\psi_i \geqslant 0 \\ (i = 1, \ldots, k)}} \left\{ \int_0^a \left[p_0(x) + \sum_{i=1}^k \psi_i p_i(x) \right] \varphi(x)\, dx - \sum_{i=1}^k \psi_i c_i \right\}, \tag{8.18}$$

при этом функция $\varphi^0(x)$ и постоянные числа ψ_i^0 $(i = 1, \ldots, k)$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^k \psi_i^0 \left[\int_0^a p_i(x) \varphi^0(x)\, dx - c_i \right] = 0. \tag{8.19}$$

Пусть в результате проверки выполнимости условий $V_i(\varphi^*) \leqslant c_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ получена альтернатива с индексами $i_1, \ldots, i_l$. В случае нулевой альтернативы имеем, что $\varphi^0(x) = \varphi^*(x)$. Пусть $l \geqslant 1$, тогда получим

$$\begin{aligned} &\psi_i^0 = 0 \text{ при } i \neq i_s \ (s = 1, \ldots, l;\ i = 1, \ldots, k), \\ &\psi_i^0 > 0 \text{ при } i = i_s \ (s = 1, \ldots, l), \end{aligned}$$

$$\varphi^0(x) = \frac{b}{2} \left\{ 1 - \operatorname{sign} \left[p_0(x) + \sum_{i=1}^k \psi_i^0 p_i(x) \right] \right\}, \tag{8.20}$$

$$\int_0^a p_{i_s}(x) \operatorname{sign} \left[p_0(x) + \sum_{i=1}^k \psi_i^0 p_i(x) \right] dx = \int_0^a p_{i_s}(x)\, dx - \frac{2c_{i_s}}{b}$$
$$(s = 1, \ldots, l).$$

Замечание. Отметим, что функция $\varphi^0(x)$, определяемая из (8.20), является решением следующей задачи:

$$V_0(\varphi^0) = \min_{\substack{0 < \varphi(x) < b \\ V_{i_s}(\varphi) = c_{i_s} \\ (s = 1, \ldots, l)}} V_0(\varphi), \tag{8.21}$$

при этом числа $\psi_{i_s}^0$ $(s = 1, \ldots, l)$ оказываются множителями Лагранжа в задаче (8.21).

Таким образом, на основе использования результатов первых трех глав получен вид решения $\varphi^0(x)$ в лемме Неймана—Пирсона через вспомогательные постоянные ψ_i^0 $(i = 1, \ldots, k)$ и известные функции, входящие в функционалы $V_i(\varphi)$ $(i = 1, \ldots, k)$. Кроме того, получены дополнительные условия для нахождения постоянных ψ_i^0 $(i = 1, \ldots, k)$.

§ 2. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

В этом параграфе приводится пример решения задачи оптимального распределения ресурсов на основе применения необходимых условий оптимальности и метода сведения к минимаксной задаче для учета ограничений.

1°. Математическая постановка задачи. Задача оптимального распределения ресурсов заключается в том, что требуется найти оптимальную плотность $\varphi^0(x)$ распределения ресурсов такую, что

$$V_0(\varphi^0(x)) = \min_{\substack{0<\varphi(x)<b \\ V_1(\varphi(x))\leq Q \\ V_2(\varphi(x))\leq \Phi}} V_0(\varphi(x)), \tag{8.22}$$

где $V_0(\varphi)=\int\limits_0^a p(x)e^{-\alpha(x)\varphi(x)}dx$ — вероятность нерешения задачи при заданной плотности $\varphi(x)$ распределения ресурсов на $[0, a]$; $V_1(\varphi)=\int\limits_0^a q(x)\varphi(x)dx$ — полная стоимость распределяемых ресурсов; $V_2(\varphi)=\int\limits_0^a \psi(x)dx$ — полный объем распределяемых ресурсов; $p(x)$ — весовая функция, характеризующая плотность вероятности состояния среды в точке $x\in[0, a]$; $q(x)$—стоимость единицы распределяемых ресурсов в $x\in[0, a]$.

Предположим, что числа $a>0$, $b>0$, $Q>0$, $\Phi>0$ и функции $p(x)\geqslant 0$, $q(x)\geqslant 0$ и $\alpha(x)>0$ заданы, причем $\int\limits_0^a p(x)dx=1$. Заметим, что по смыслу задачи $\varphi^0(x)=0$ в точке $x\in[0, a]$, если $p(x)=0$.

2°. Условие оптимальности и сведение к минимаксной задаче. Необходимое и достаточное условие оптимальности для $\varphi^0(x)$ как решения задачи (8.22) имеет вид

$$\min_{\substack{0<\varphi(x)<b \\ \int\limits_0^a q(x)\varphi(x)dx<Q \\ \int\limits_0^a \varphi(x)dx<\Phi}} \left\{\int\limits_0^a g(\varphi^0(x))[\varphi(x)-\varphi^0(x)]dx=0,\right. \tag{8.23}$$

где $g(\varphi(x))$ — градиент функционала $V_0(\varphi)$,

$$g(\varphi(x))=-\alpha(x)p(x)e^{-\alpha(x)\varphi(x)}. \tag{8.24}$$

Функция $\varphi^*(x)$, доставляющая минимум линейного по φ функционала в левой части (8.23), находится как решение следующей минимаксной задачи:

$$\min_{0<\varphi(x)<b} \max_{\substack{\psi_1\geqslant 0\\ \psi_2\geqslant 0}} \left\{ \int_0^a [g(\varphi^0(x)) + \psi_1 q(x) + \psi_2]\, \varphi(x)\, dx - \psi_1 Q - \psi_2 \Phi \right\}, \tag{8.25}$$

при этом для решения $\varphi^*(x)$, ψ_1^0, ψ_2^0 задачи (8.25) должно выполняться дополнительное условие

$$\psi_1^0 \left[\int_0^a q(x)\, \varphi^*(x)\, dx - Q \right] + \psi_2^0 \left[\int_0^a \varphi^*(x)\, dx - \Phi \right] = 0. \tag{8.26}$$

Из (8.25) находим, что

$$\varphi^*(x) = \frac{b}{2} \{1 - \operatorname{sign}[g(\varphi^0(x)) + \psi_1^0 q(x) + \psi_2^0]\} \tag{8.27}$$

при выполнении условия

$$[g(\varphi^0(x)) + \psi_1^0 q(x) + \psi_2^0] \neq 0. \tag{8.28}$$

Выполнение условия (8.28) при всех $x \in [0, a]$ есть условие „сильной регулярности".

Для определения чисел ψ_1^0 и ψ_2^0 возможны четыре взаимоисключающих случая:

1) $\psi_1^0 = 0$, $\psi_2^0 = 0$,
2) $\psi_1^0 \neq 0$, $\psi_2^0 = 0$,
3) $\psi_1^0 = 0$, $\psi_2^0 \neq 0$,
4) $\psi_1^0 \neq 0$, $\psi_2^1 \neq 0$.

3°. Вид решения задачи оптимального распределения ресурсов. В соответствии с этими четырьмя случаями найдем вид операторного уравнения для нахождения $\varphi^0(x)$. В первом случае имеем

$$\varphi^0(x) = \begin{cases} b & \text{при } p(x) > 0, \\ 0 & \text{при } p(x) = 0. \end{cases} \tag{8.29}$$

Во втором случае имеем

$$\varphi^0(x) = \operatorname{sat}_0^b \left\{ -\frac{1}{\alpha(x)} \ln \left[\frac{\psi_1^0 q(x)}{\alpha(x) p(x)} \right] \right\}, \tag{8.30}$$

причем автоматически $\varphi^0(x) = 0$ при $p(x) = 0$. В (8.30) через $\operatorname{sat}_0^b[\gamma]$ обозначено

$$\operatorname{sat}_0^b[\gamma] = \begin{cases} 0 & \text{при } \gamma \leqslant 0, \\ \gamma & \text{при } 0 \leqslant \gamma \leqslant b, \\ b & \text{при } \gamma \geqslant b. \end{cases}$$

Неотрицательное число $\psi_1^0 > 0$ в (8.30) находится из условия

$$\int_0^a q(x)\,\mathrm{sat}_0^b\left\{-\frac{1}{\alpha(x)}\ln\left[\frac{\psi_1^0\,q(x)}{\alpha(x)\,p(x)}\right]\right\}dx = Q. \qquad (8.31)$$

В третьем случае имеем

$$\varphi^0(x) = \mathrm{sat}_0^b\left\{-\frac{1}{\alpha(x)}\ln\left[\frac{\psi_2^0}{\alpha(x)\,p(x)}\right]\right\}, \qquad (8.32)$$

неотрицательное число $\psi_2^0 > 0$ определяется из условия

$$\int_0^a \mathrm{sat}_0^b\left\{-\frac{1}{\alpha(x)}\ln\left[\frac{\psi_2^0}{\alpha(x)\,p(x)}\right]\right\}dx = \Phi. \qquad (8.33)$$

В четвертом случае имеем

$$\varphi^0(x) = \mathrm{sat}_0^b\left\{-\frac{1}{\alpha(x)}\ln\left[\frac{\psi_1^0\,q(x)+\psi_2^0}{\alpha(x)\,p(x)}\right]\right\}, \qquad (8.34)$$

неотрицательные числа $\psi_1^0 > 0$ и $\psi_2^0 > 0$ находятся из условий

$$\int_0^a q(x)\,\mathrm{sat}_0^b\left\{-\frac{1}{\alpha(x)}\ln\left[\frac{\psi_1^0\,q(x)+\psi_2^0}{\alpha(x)\,p(x)}\right]\right\}dx = Q, \qquad (8.35)$$

$$\int_0^a \mathrm{sat}_0^b\left\{-\frac{1}{\alpha(x)}\ln\left[\frac{\psi_1^0\,q(x)+\psi_2^0}{\alpha(x)\,p(x)}\right]\right\}dx = \Phi. \qquad (8.36)$$

В рассматриваемой задаче оптимального распределения ресурсов условие оптимальности приводит не к операторному уравнению для нахождения $\varphi^0(x)$, а к уравнениям для определения постоянных чисел ψ_1^0 и ψ_2^0, которые входят в полученные выражения для $\varphi^0(x)$.

Таким образом, из анализа всех возможных четырех случаев может быть найдена оптимальная плотность $\varphi^0(x)$ распределения ресурсов.

§ 3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗЕРВА В ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ БОЯ

Рассматривается решение динамических вариационных задач динамики боя в простейшей модели Ланчестера.

1°. Математическая постановка задачи. Простейшая модель Ланчестера динамики боя приводит к системе дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = -by + u(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = -ax + v(t), \qquad (8.37)$$

где $x(t)$ — количество боевых единиц стороны A, оставшихся в ходе боя к моменту времени $t \in [0, T]$; $y(t)$ — количество боевых единиц противостоящей стороны B, оставшихся в ходе боя к моменту t; $u(t)$, $v(t)$ — темпы поступления единиц резерва сторон A и B в момент времени t; a и b — средние эффективные скорострельности боевых единиц сторон A и B; T — заданное время боя.

Будем считать заданными начальные количества боевых единиц обеих сторон

$$x(0)=x^0,\ y(0)=y^0, \tag{8.38}$$

кроме того, будем предполагать функцию $v(t)$ заданной.

Задача оптимизации заключается в нахождении функции $u^0(t)$ из условия экстремума функционала $V_0(u(t)$ по $u(t)$ при ограничениях $0 \leqslant u(t) \leqslant c$, $\int\limits_0^T u(t)\,dt \leqslant U$, где функционал $V_0(u)$ может иметь различный вид в зависимости от целей, преследуемых стороной A, причем c и U заданы.

2°. Вид решения системы (8.37). Фундаментальная матрица $W(t)$ для однородной части системы (8.37) имеет вид

$$W(t)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t}), & -\frac{b}{2\omega}(e^{\omega t}-e^{-\omega t}) \\ -\frac{\omega}{2b}(e^{\omega t}-e^{-\omega t}), & \frac{1}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t}) \end{pmatrix}, \tag{8.39}$$

где $\omega=\sqrt{ab}$. Решение $x(t)$, $y(t)$ системы (8.37) при начальных условиях (8.38) можно записать по формуле Коши в виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = W(t)\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} + \int\limits_0^t W(t)\,W^{-1}(\tau)\begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} d\tau. \tag{8.40}$$

Отсюда получим

$$x(t)=\frac{1}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})\,x^0-\frac{b}{2\omega}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})\,y^0+$$
$$+\int\limits_0^t\left\{\frac{1}{2}\left[e^{\omega(t-\tau)}+e^{-\omega(t-\tau)}\right]u(\tau)-\frac{b}{2\omega}\left[e^{\omega(t-\tau)}-e^{-\omega(t-\tau)}\right]v(\tau)\right\}d\tau, \tag{8.41}$$

$$y(t)=-\frac{\omega}{2b}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})\,x^0+\frac{1}{2}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})\,y^0+$$
$$+\int\limits_0^t\left\{-\frac{\omega}{2b}\left[e^{\omega(t-\tau)}-e^{-\omega(t-\tau)}\right]u(\tau)+\frac{1}{2}\left[e^{\omega(t-\tau)}+e^{-\omega(t-\tau)}\right]v(\tau)\right\}d\tau. \tag{8.42}$$

3°. Задачи оптимального распределения резерва сил стороны A. Рассмотрим несколько простейших задач оптимального распределения резерва сил стороны A по нескольким критериям оптимальности.

а) В случае, если $V_0(u)=y(T)$ и требуется найти решение задачи

$$V_0(u^0)=\min_{\substack{0<u(t)<c\\ \int_0^T u(t)\,dt<U}} V_0(u)=\min_{\substack{0<u(t)<c\\ \int_0^T u(t)\,dt<U}} y(T), \tag{8.43}$$

то получим, что

$$u^0(t)\equiv c \quad \text{при } t\in[0,\ T], \tag{8.44}$$

если $cT\leqslant U$, и $u^0(t)$ определяется в противном случае $(cT>U)$ на основе нахождения

$$\min_{\substack{0<u(t)<c\\ \int_0^T u(t)\,dt=U}} \int_0^T \left\{-\frac{\omega}{2b}\left[e^{\omega(T-t)}-e^{-\omega(T-t)}\right]u(t)\right\}dt \tag{8.45}$$

в следующем виде:

$$u^0(t)=\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\operatorname{sign}\left\{-\frac{\omega}{2b}\left[e^{\omega(T-t)}-e^{-\omega(T-t)}\right]+\psi^0\right\}, \tag{8.46}$$

где постоянная величина $\psi^0>0$ находится из условия

$$\frac{c}{2}\int_0^T\left(1-\operatorname{sign}\left\{-\frac{\omega}{2b}e^{\omega(T-t)}-e^{-\omega(T-t)})+\psi^0\right\}\right)dt=U. \tag{8.47}$$

б) В случае, если $V_0(u)=x(T)$ и требуется найти решение задачи

$$V_0(u^0)=\max_{\substack{0<u(t)<c\\ \int_0^T u(t)\,dt<U}} V_0(u)=\max_{\substack{0<u(t)<c\\ \int_0^T u(t)\,dt<U}} x(T), \tag{8.48}$$

то получим, что

$$u^0(t)\equiv c \quad \text{при } t\in[0,\ T], \tag{8.49}$$

если $cT\leqslant U$, и $u^0(t)$ определяется в противном случае $(cT>U)$ на основе нахождения

$$\max_{\substack{0\leqslant u(t)\leqslant c\\ \int_0^T u(t)\,dt=U}} \int_0^T\left[e^{\omega(T-t)}+e^{-\omega(T-t)}\right]u(t)\,dt \tag{8.50}$$

в следующем виде:

$$u^0(t)=\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\operatorname{sign}\{e^{\omega(T-t)}+e^{-\omega(T-t)}+\psi^0\}, \tag{8.51}$$

где постоянная величина $\psi^0<0$ находится из условия

$$\frac{c}{2}\int_0^T(1+\operatorname{sign}\{e^{\omega(T-t)}+e^{-\omega(T-t)}+\psi^0\})\,dt=U. \tag{8.52}$$

в) В случае, если $V_0(u)=x(T)-y(T)$ и требуется найти решение задачи

$$V_0(u^0)=\max_{\substack{0<u(t)<c\\ \int_0^T u(t)\,dt\leqslant U}} V_0(u)=\max_{\substack{0\leqslant u(t)\leqslant c\\ \int_0^T u(t)\,dt\leqslant U}}[x(T)-y(T)], \tag{8.53}$$

то получим, что

$$u^0(t)\equiv c \text{ при } t\in[0,\ T], \tag{8.54}$$

если $cT\leqslant U$, и $u^0(t)$ определяется в противном случае ($cT>U$) на основе нахождения

$$\max_{\substack{0\leqslant u(t)\leqslant c\\ \int_0^T u(t)\,dt=U}}\int_0^T\left\{\frac{b+\omega}{2b}e^{\omega(T-t)}+\frac{b-\omega}{2b}e^{-\omega(T-t)}\right\}u(t)\,dt \tag{8.55}$$

в следующем виде:

$$u^0(t)=\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\operatorname{sign}\left\{\frac{b+\omega}{2b}e^{\omega(T-t)}+\frac{b-\omega}{2b}e^{-\omega(T-t)}+\psi^0\right\}, \tag{8.56}$$

где постоянная величина $\psi^0<0$ находится из условия

$$\frac{c}{2}\int_0^T\left(1+\operatorname{sign}\left\{\frac{b+\omega}{2b}e^{\omega(T-t)}+\frac{b-\omega}{2b}e^{-\omega(T-t)}+\psi_0\right\}\right)dt=U. \tag{8.57}$$

г) В случае, если $V_0(u)=\int_0^T y(t)\,dt$ и требуется найти решение задачи

$$V_0(u^0)=\min_{\substack{0<u(t)<c\\ \int_0^T u(t)dt<U}} V_0(u)=\min_{\substack{0<u(t)<c\\ \int_0^T u(t)dt<U}}\int_0^T y(t)\,dt, \tag{8.58}$$

то получим, что

$$u^0(t)\equiv c \quad \text{при } t\in[0,\ T], \tag{8.59}$$

если $cT \leqslant U$, и $u^0(t)$ определяется в противном случае ($cT > U$) на основе нахождения

$$\min_{\substack{0 \leqslant u(t) \leqslant c \\ \int_0^T u(t)dt = U}} \frac{1}{b} \int_0^T \left\{ -\frac{1}{2} \left[e^{\omega(T-t)} + e^{-\omega(T-t)} \right] + 1 \right\} u(t)\,dt \qquad (8.60)$$

в следующем виде:

$$u^0(t) = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} \operatorname{sign} \left\{ -\frac{1}{2} \left[e^{\omega(T-t)} + e^{-\omega(T-t)} \right] + 1 + \psi^0 \right\}, \qquad (8.61)$$

где постоянная величина $\psi^0 > 0$ находится из условия

$$\frac{c}{2} \int_0^T \left(1 - \operatorname{sign} \left\{ -\frac{1}{2} \left[e^{\omega(T-t)} + e^{-\omega(T-t)} \right] + 1 + \psi^0 \right\} dt = U. \qquad (8.62)$$

Таким образом, для задач оптимального распределения резерва сил стороны A по рассмотренным критериям получен вид оптимального распределения $u^0(t)$ через известные функции и постоянную ψ^0, для нахождения которой найдены дополнительные условия. Полученные результаты могут служить иллюстрацией для использования леммы Неймана—Пирсона при оптимизации динамических процессов боя.

§ 4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗЕРВОВ В ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ БОЯ

Рассматривается решение игровых вариационных задач динамики боя в простейшей модели Ланчестера. Будем предполагать, что простейшая модель динамики боя Ланчестера имеет вид (8.37). Игровая задача оптимального распределения резервов заключается в определении функций $u^0(t)$ и $v^0(t)$ из условий нахождения седловой точки функционала $V_0(u(t), v(t))$ по $u(t)$ и $v(t)$ при ограничениях: $0 \leqslant u(t) \leqslant c_1$, $0 \leqslant v(t) \leqslant c_2$, $\int_0^T u(t)\,dt \leqslant U$, $\int_0^T v(t)\,dt \leqslant V$, где функционал $V_0(u, v)$ может иметь различный вид в зависимости от целей, преследуемых сторонами A и B, величины c_1, c_2, U и V заданы.

а) В случае, если $V_0(u, v) = y(T)$ и требуется найти решение задачи

$$V_0(u^0, v^0) = \min_{\substack{0 \leqslant u(t) < c_1 \\ \int_0^T u(t)dt < U}} \max_{\substack{0 < v(t) < c_2 \\ \int_0^T v(t)dt < V}} y(T) = \max_{\substack{0 < v(t) < c_2 \\ \int_0^T v(t)dt \leqslant V}} \min_{\substack{0 \leqslant u(t) \leqslant c_1 \\ \int_0^T u(t)dt < U}} y(T), \qquad (8.63)$$

то получим, что возможны следующие четыре варианта:

$$c_1T \leqslant U, \quad c_2T \leqslant V; \tag{8.64}$$

$$c_1T \leqslant U, \quad c_2T > V; \tag{8.65}$$

$$c_1T > U, \quad c_2T \leqslant V; \tag{8.66}$$

$$c_1T > U, \quad c_2T > V. \tag{8.67}$$

В первом варианте имеем

$$u^0(t) \equiv c_1, \; v^0(t) \equiv c_2 \quad \text{при } t \in [0, T]. \tag{8.68}$$

Во втором варианте имеем

$$u^0(t) \equiv c_1 \quad \text{при } t \in [0, T], \tag{8.69}$$

$$v^0(t) = \frac{c_2}{2} + \frac{c_2}{2}\operatorname{sign}\left\{\frac{1}{2}\left[e^{\omega(T-t)} + e^{-\omega(T-t)}\right] + \psi_2^0\right\}, \tag{8.70}$$

где постоянная величина $\psi_2^0 < 0$ определяется из условия

$$\frac{c_2}{2}\int_0^T\left(1 + \operatorname{sign}\left\{\frac{1}{2}\left[e^{\omega(T-t)} + e^{-\omega(T-t)}\right] + \psi_2^0\right\}\right)dt = V. \tag{8.71}$$

В третьем варианте имеем

$$v^0(t) \equiv c_2 \text{ при } t \in [0, T], \tag{8.72}$$

$$u^0(t) = \frac{c_1}{2} - \frac{c_1}{2}\operatorname{sign}\left\{-\frac{\omega}{2b}\left[e^{\omega(T-t)} - e^{-\omega(T-t)}\right] + \psi_1^0\right\}, \tag{8.73}$$

где постоянная величина $\psi_1^0 > 0$ определяется из условия

$$\frac{c_1}{2}\int_0^T\left(1 - \operatorname{sign}\left\{-\frac{\omega}{2b}\left[e^{\omega(T-t)} - e^{-\omega(T-t)}\right] + \psi_1^0\right\}\right)dt = U. \tag{8.74}$$

В четвертом варианте функции $u^0(t)$ и $v^0(t)$ определяются по формулам (8.73) и (8.70) соответственно, а постоянные ψ_1^0 и ψ_2^0 определяются из условий (8.74) и (8.71).

б) В случае, если $V_0(u, v) = x(T)$ и требуется найти решение задачи

$$V_0(u^0, v^0) = \max_{\substack{0 \leqslant u(t) \leqslant c_1 \\ \int_0^T u(t)\,dt \leqslant U}} \; \min_{\substack{0 \leqslant v(t) \leqslant c_2 \\ \int_0^T v(t)\,dt \leqslant V}} x(T) = \min_{\substack{0 \leqslant v(t) \leqslant c_2 \\ \int_0^T v(t)\,dt \leqslant V}} \; \max_{\substack{0 \leqslant u(t) \leqslant c_1 \\ \int_0^T u(t)\,dt \leqslant U}} x(T), \tag{8.75}$$

то также возможны четыре варианта (8.64)—(8.67).

В первом варианте $u^0(t)$ и $v^0(t)$ имеют вид (8.68). Во втором варианте имеем

$$u^0(t) \equiv c_1 \text{ при } t \in [0, T],$$

$$v^0(t) = \frac{c_2}{2} + \frac{c_2}{2}\operatorname{sign}\left\{-\frac{b}{2\omega}\left[e^{\omega(T-t)} - e^{-\omega(T-t)}\right] + \psi_2^0\right\}, \tag{8.76}$$

где постоянная величина ψ_2^0 определяется из условия

$$\frac{c_2}{2}\int_0^T\left(1+\operatorname{sign}\left\{-\frac{b}{2\omega}\left[e^{\omega(T-t)}-e^{-\omega(T-t)}\right]+\psi_2^0\right\}\right)dt=V. \quad (8.77)$$

В третьем варианте имеем

$$v^0(t)\equiv c_2 \text{ при } t\in[0,\ T],$$

$$u^0(t)=\frac{c_1}{2}-\frac{c_1}{2}\operatorname{sign}\left\{\frac{1}{2}\left[e^{\omega(T-t)}+e^{-\omega(T-t)}\right]+\psi_1^0\right\}, \quad (8.78)$$

где постоянная величина ψ_1^0 определяется из условия

$$\frac{c_1}{2}\int_0^T\left(1+\operatorname{sign}\left\{\frac{1}{2}\left[e^{\omega(T-t)}+e^{-\omega(T-t)}\right]+\psi_1^0\right\}\right)dt=U. \quad (8.79)$$

В четвертом варианте функции $u^0(t)$ и $v^0(t)$ определяются по формулам (8.78) и (8.76), а постоянные величины ψ_1^0 и ψ_2^0 определяются из условий (8.79) и (8.77).

в) В случае, если $V_0(u, v)=x(T)-y(T)$ и требуется найти решение задачи

$$V_0(u^0, v^0)=\max_{\substack{0\leqslant u(t)\leqslant c_1\\ \int_0^T u(t)\,dt\leqslant U}}\ \min_{\substack{0\leqslant v(t)\leqslant c_2\\ \int_0^T v(t)\,dt\leqslant V}}\left[x(T)-y(T)\right]=$$

$$=\min_{\substack{0\leqslant v(t)\leqslant c_2\\ \int_0^T v(t)\,dt\leqslant V}}\ \max_{\substack{0\leqslant u(t)\leqslant c_1\\ \int_0^T u(t)\,dt\leqslant U}}\left[x(T)-y(T)\right], \quad (8.80)$$

то, так же как и ранее, возможны четыре варианта (8.64) — (8.67).

В первом варианте функции $u^0(t)$ и $v^0(t)$ имеют вид (8.68).

Во втором варианте имеем

$$u^0(t)\equiv c_1 \text{ при } t\in[0,\ T],$$

$$v^0(t)=\frac{c_2}{2}+\frac{c_2}{2}\operatorname{sign}\left\{\frac{b+\omega}{2\omega}e^{\omega(T-t)}-\frac{b-\omega}{2\omega}e^{-\omega(T-t)}+\psi_2^0\right\}, \quad (8.81)$$

где постоянная величина $\psi_2^0>0$ определяется из условия

$$\frac{c_2}{2}\int_0^T\left(1+\operatorname{sign}\left\{\frac{b+\omega}{2\omega}e^{\omega(T-t)}-\frac{b-\omega}{2\omega}e^{-\omega(T-t)}+\psi_2^0\right\}\right)dt=V. \quad (8.82)$$

В третьем варианте имеем

$$v^0(t) \equiv c_2 \text{ при } t \in [0, T],$$

$$u^0(t) = \frac{c_1}{2} + \frac{c_1}{2} \operatorname{sign}\left\{\frac{b+\omega}{2b} e^{\omega(T-t)} + \frac{b-\omega}{2b} e^{-\omega(T-t)} + \psi_1^0\right\}, \quad (8.83)$$

где постоянная величина $\psi_1^0 < 0$ определяется из условия

$$\frac{c_1}{2}\int_0^T \left(1 + \operatorname{sign}\left\{\frac{b+\omega}{2b} e^{\omega(T-t)} + \frac{b-\omega}{2b} e^{-\omega(T-t)} + \psi_1^0\right\}\right) dt = U. \quad (8.84)$$

В четвертом варианте функции $u^0(t)$, $v^0(t)$ и постоянные числа ψ_1^0, ψ_2^0 определяются по формулам (8.83), (8.81) и из (8.84), (8.82) соответственно.

г) В случае, если $V_0(u, v) = \int_0^T y(t)\,dt$ и требуется найти решение задачи

$$V_0(u^0, v^0) = \min_{\substack{0 < u(t) < c_1 \\ \int_0^T u(t)\,dt < U}} \max_{\substack{0 < u(t) < c_2 \\ \int_0^T v(t)\,dt < V}} \int_0^T y(t)\,dt =$$

$$= \max_{\substack{0 < v(t) < c_2 \\ \int_0^T v(t)\,dt < V}} \min_{\substack{0 < u(t) < c_1 \\ \int_0^T u(t)\,dt < U}} \int_0^T y(t)\,dt, \quad (8.85)$$

то, так же как и ранее, возможны четыре варианта (8.64)—(8.67).

В первом варианте функции $u^0(t)$ и $v^0(t)$ имеют вид (8.68).

Во втором варианте имеем

$$u^0(t) \equiv c_1 \text{ при } t \in [0, T],$$

$$v^0(t) = \frac{c_2}{2} + \frac{c_2}{2} \operatorname{sign}\left\{\frac{1}{2\omega} e^{\omega(T-t)} - e^{-\omega(T-t)}] + \psi_2^0\right\}, \quad (8.86)$$

где постоянная величина $\psi_2^0 < 0$ определяется из условия

$$\frac{c_2}{2}\int_0^T \left(1 + \operatorname{sign}\left\{\frac{1}{2\omega}[e^{\omega(T-t)} - e^{-\omega(T-t)}] + \psi_2^0\right\}\right) dt = V. \quad (8.87)$$

В третьем варианте имеем

$$v^0(t) \equiv c_2 \text{ при } t \in [0, T],$$

$$u^0(t) = \frac{c_1}{2} - \frac{c_1}{2} \operatorname{sign}\left\{-\frac{1}{2}[e^{\omega(T-t)} + e^{-\omega(T-t)}] + 1 + \psi_1^0\right\}, \quad (8.88)$$

где постоянная величина $\psi_1^0 > 0$ определяется из условия

$$\frac{c_1}{2}\int_0^T \left(1 - \operatorname{sign}\left\{-\frac{1}{2}[e^{\omega(T-t)} + e^{-\omega(T-t)}] + 1 + \psi_2^0\right\}\right) dt = U. \quad (8.89)$$

В четвертом варианте функции $u^0(t)$, $v^0(t)$ и постоянные величины ψ_1^0, ψ_2^0 находятся по формулам (8.88), (8.86) и из (8.89), (8.87) соответственно.

Таким образом, для игровых задач оптимального распределения резерва сил сторон A и B по рассмотренным критериям получен вид оптимальных распределений $u^0(t)$ и $v^0(t)$ через известные функции и постоянные ψ_1^0, ψ_2^0, для нахождения которых найдены дополнительные условия. Полученные результаты основываются на виде решений $x(t)$ и $y(t)$ системы (8.37) по формулам (8.41) и (8.42).

§ 5. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА В СИСТЕМЕ УСПОКОЕНИЯ КАЧКИ КОРАБЛЯ

Рассматривается задача успокоения качки корабля на основе построения синтезирующего управляющего устройства с использованием результатов главы VI.

1°. Постановка задачи. Проблема успокоения боковой качки корабля приводит к задаче нахождения оптимального синтезирующего управления $u^0(x, t)$ в системе вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1 - 2x_2 + u, \end{aligned} \tag{8.90}$$

где $x_1(t)$ — величина угла крена в момент времени t; $x_2(t)$ — угловая скорость изменения угла крена в момент времени t; u — управление, создаваемое успокоителем боковой качки корабля. Предположим, что начальные значения x_1 и x_2 заданы

$$x_1(0) = x_1^0 = 1, \quad x_2(0) = x_2^0 = 0, \tag{8.91}$$

кроме того, задано время управления $T = 1$. Ограничение на управление в момент $t \in [0, T]$ имеет вид

$$|u| \leqslant 1. \tag{8.92}$$

Требуется найти оптимальное синтезирующее управление $u^0(x, t)$ из условия

$$\begin{aligned} V_0(u^0(x, t)) &= \min_{|u(x, t)| < 1} V_0(u(x, t)) = \\ &= \min_{|u(x, t)| < 1} \frac{1}{2}\left[x_1^2(T|u) + x_2^2(T|u)\right], \end{aligned} \tag{8.93}$$

где $x_1(t|u)$, $x_2(t|u)$ — решение системы (8.90) с начальными данными (8.91) при управлении $u(x, t)$. Функционал $V_0(u(x, t))$ характеризует качку корабля в момент времени T при управлении $u(x, t)$.

Функционал $V_0(u(x, t))$ можно представить в интегральной форме

$$V_0(u(x,\ t)) = \int_0^T \frac{d}{dt}\left[\frac{x_1^2(t\,|\,u)}{2} + \frac{x_2^2(t\,|\,u)}{2}\right] dt +$$

$$+ \frac{x_1^2(0\,|\,u)}{2} + \frac{x_2^2(0\,|\,u)}{2} = \int_0^1 \left[-2x_2^2(t\,|\,u) + x_2(t\,|\,u)\,u(t,\ x)\right] dt + \frac{1}{2}. \tag{8.94}$$

2⁰. Условие оптимальности. Градиент G_0 $(u\ (x,\ t))$ функционала V_0 $(u\ (x,\ t))$ в силу системы (8.90) имеет вид (см. формулу (6.12))

$$G_0(u(x,\ t)) = x_2 - p_2(t|u), \tag{8.95}$$

причем $p_1(t|u)$ и $p_2(t|u)$ являются решением системы (см. (6.28))

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_1}{dt} &= -\left[-1 + \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x_1}\right] p_2 - x_2(t\,|\,u)\,\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x_1}, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -p_1 - \left[-2 + \frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x_2}\right] p_2 + 4x_2(t\,|\,u) - \\ &\quad - u(x,\ t) - x_2(t\,|\,u)\,\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x_2}, \end{aligned}\right\} \tag{8.96}$$

$$p_1(T\,|\,u) = p_1(1\,|\,u) = 0,\ \ p_2(T\,|\,u) = p_2(1\,|\,u) = 0. \tag{8.97}$$

Условие оптимальности управления $u^0(x,\ t)$ имеет вид (см. теорему 56)

$$\min_{|u(x,\ t)|\leqslant 1} \int_0^1 [x_2(t\,|\,u^0) - p_2(t\,|\,u^0)] \times$$
$$\times\ [u(x(t\,|\,u^0),\ t) - u^0(x(t\,|\,u^0),\ t)]\,dt = 0. \tag{8.98}$$

Операторное уравнение (см. теорему 57) для нахождения оптимального синтезирующего управления $u^0(x,\ t)$ представимо следующим образом:

$$u(x,\ t) = \overline{\Phi}(u(x,\ t),\ t), \tag{8.99}$$

где оператор $\overline{\Phi}$ имеет вид

$$\overline{\Phi}(u(x,\ t)) = \operatorname{sign}[p_2(t\,|\,u) - x_2(t\,|\,u)]. \tag{8.100}$$

3⁰. Вид решения. Решение $x_1(t|u)$, $x_2(t|u)$ системы (8.90) с начальными данными (8.91) можно представить по формуле Коши следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1(t\,|\,u) \\ x_2(t\,|\,u) \end{pmatrix} = W(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + W(t)\int_0^1 W^{-1}(\tau)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(\tau)\,d\tau, \tag{8.101}$$

где через $W(t)$ обозначена фундаментальная матрица решений однородной части системы (8.90)

$$W(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1+t, & t \\ -t, & 1-t \end{pmatrix}. \tag{8.102}$$

Матрица $W^{-1}(\tau)$ имеет вид

$$W^{-1}(\tau)=e^{\tau}\begin{pmatrix}1-\tau, & -\tau\\ \tau\ , & 1+\tau\end{pmatrix}. \tag{8.103}$$

Подставляя выражения (8.102)—(8.103) в правую часть (8.101), получим

$$\left.\begin{aligned} x_1(t\,|\,u)&=(1+t)\,e^{-t}+\int_0^t(t-\tau)\,e^{\tau-t}u(\tau)\,d\tau,\\ x_2(t\,|\,u)&=-te^{-t}+\int_0^t(1-t+\tau)\,e^{\tau-t}\,u(\tau)\,d\tau.\end{aligned}\right\} \tag{8.104}$$

Решение $p_1(t\,|\,u)$, $p_2(t\,|\,u)$ системы (8.96), удовлетворяющее условию (8.97), представимо по формуле Коши при $u(x,\ t)\equiv\equiv u(t)$ в виде

$$\begin{pmatrix}p_1(t\,|\,u)\\ p_2(t\,|\,u)\end{pmatrix}=[\,W^{-1}(t)]^*\int_T^t W^*(\tau)\begin{pmatrix}0\\ 4x_2(\tau\,|\,u)-u(\tau)\end{pmatrix}dt, \tag{8.105}$$

или с учетом вида матриц W и W^{-1} имеем

$$\begin{pmatrix}p_1(t\,|\,u)\\ p_2(t\,|\,u)\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}1-t, & t\\ -t\ , & 1+t\end{pmatrix}\int_1^t e^{-\tau}\begin{pmatrix}1+\tau, & -\tau\\ \tau, & 1-\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 4x_2(\tau\,|\,u)-u(\tau)\end{pmatrix}dt,$$

откуда получим

$$p_1(t\,|\,u)=\int_1^t(\tau-t)\,[4x_2(\tau\,|\,u)-u(\tau)]\,e^{t-\tau}d\tau, \tag{8.106}$$

$$p_2(t\,|\,u)=\int_1^t(1-\tau+t)\,[4x_2(\tau\,|\,u)-u(\tau)]\,e^{t-\tau}d\tau. \tag{8.107}$$

4°. Начальное приближение. Вполне естественно в качестве начального приближения для применения итерационных градиентных методов нахождения оптимального синтезирующего управления использовать оптимальное программное управление $u^0(t)$ в системе (8.90) по критерию минимума функционала $V_0(u(t))$. Можно показать, что достаточно хорошим приближением к оптимальному программному управлению является управление

$$u^1(t)=\operatorname{sign}(3t-2), \tag{8.108}$$

которое можно записать в виде

$$u^1(t)=\begin{cases}+1 \text{ при } t\in\left[0,\ \frac{2}{3}\right),\\ -1 \text{ при } t\in\left[\frac{2}{3},\ 1\right].\end{cases} \tag{8.109}$$

Решение $x_1(t|u^1)$, $x_2(t|u^1)$ системы (8.90) с начальными данными (8.91) по формулам (8.104) при управлении (8.108) имеет вид

$$x_1(t|u^1) = \begin{cases} 2(1+t)e^{-t} - 1 \text{ при } t \in \left[0, \frac{2}{3}\right), \\ 2(1+t)e^{-t} - 2te^{-t+\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}e^{-t+\frac{2}{3}} + 1 \text{ при } t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]; \end{cases} \tag{8.110}$$

$$x_2(t|u^1) = \begin{cases} -2te^{-t} \text{ при } t \in \left[0, \frac{2}{3}\right), \\ -2te^{-t} - \frac{4}{3}e^{-t+\frac{2}{3}} + 2te^{-t+\frac{2}{3}} \text{ при } t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases} \tag{8.111}$$

5⁰. Итерация синтезирующего управления. По формуле (6.44) следующее приближение $u^2(x, t)$ к оптимальному синтезирующему управлению находится следующим образом:

$$u^2(x, t) = u^1(t) + \lambda_1[\bar{u}^1(x, t) - u^1(t)], \tag{8.112}$$

где вспомогательное синтезирующее уравнение $\bar{u}^1(x, t)$ имеет вид (см. (6.42))

$$\bar{u}^1(x, t) = \operatorname{sign}[p_2(t|u^1) - x_2]. \tag{8.113}$$

Решение $p_2(t|u^1)$ системы (8.96) при управлении $u^1(t)$ вида (8.108) находится по формуле (8.107) после подстановки в правую часть (8.107) выражения (8.111) для $x_2(t|u^1)$:

$$p_2(t|u^1) = \begin{cases} 2te^{-t} - 2(1+t) + 4{,}4e^t + 2{,}1te^t \text{ при } t \in \left[0, \frac{2}{3}\right), \\ -[16{,}7t + 6{,}7]e^{-t} + 2(1+t) + e^t - 0{,}2te^t \text{ при } t \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases} \tag{8.114}$$

Величина шага $\lambda_1 \geqslant 0$ в (8.112) может быть найдена из условия

$$\min_{0 < \lambda < 1} \frac{1}{2}\{[x_1(T|u^1) + \lambda(x_1(T|\bar{u}^1) - x_1(T|u^1))]^2 + \\ + [x_2(T|u^1) + \lambda(x_2(T|\bar{u}^1) - x_2(T|u^1))]^2\}. \tag{8.115}$$

Далее, для нахождения оптимального синтезирующего управления $u^0(x, t)$, вообще говоря, необходимо проделать последующие итерации по формулам

$$u^{k+1}(x, t) = u^k(x, t) + \lambda_k[\bar{u}^k(x, t) - u^k(x, t)], \tag{8.116}$$

где вспомогательное синтезирующее управление $\bar{u}^k(x, t)$ находится по формуле

$$u^k(x, t) = \operatorname{sign}[p_2(t \mid u^k) - x_2], \tag{8.117}$$

а величина шага λ_k определяется из условия

$$\min_{0 < \lambda \leqslant 1} \frac{1}{2}\{[x_1(T \mid u^k) + \lambda(x_1(T \mid \bar{u}^k) - x_1(T \mid u^k))]^2 + \\ + [x_2(T \mid u^k) + \lambda(x_2(T \mid \bar{u}^k) - x_2(T \mid u^k))]^2\}. \tag{8.118}$$

Отметим, что если бы $u^1(t)$ было найдено точно оптимальным программным управлением, то $\bar{u}^1(x, t)$ было бы оптимальным синтезирующим управлением. При этом $u^2(x\ t)$ также было бы оптимальным синтезирующим управлением при выборе величины шага λ_1 произвольным образом из интервала $(0,1]$, в частности при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$:

$$u^2(x, t) = \bar{u}^1(x, t), \quad u^2(x, t) = \frac{1}{2}(u^1(t) + \bar{u}^1(x, t)).$$

Так как $u^1(t)$ не является точно оптимальным программным управлением, но все же достаточно близко к нему, то приемлемым приближением к оптимальному синтезирующему управлению является управление $\bar{u}^1(x, t)$.

При желании иметь более точное приближение необходимо найти решение $x_1(t \mid \bar{u}^1)$, $x_2(t \mid \bar{u}^1)$ системы (8.90), после этого найти величину шага λ_1 из условия (8.115) и использовать выражение (8.112) для нахождения $u^2(x, t)$.

6°. Замечание. Из анализа результатов этого примера следует, что оптимальное синтезирующее управление $u^0(x, t)$ для линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\,x + b(t)\,u + c(t), \quad x(0) = x^0, \tag{8.119}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_r)$, $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ — матричные функции размерности $(n \times n)$, $(r \times n)$ и $(1 \times n)$ соответственно, по критерию минимума интегрального функционала $V_0(u)$ при управлениях $u \in U$ может быть часто найдено следующим образом. Сначала следует найти оптимальное программное управление $u^*(t)$ в системе (8.119). После этого следует найти решение $x(t \mid u^*)$ системы (8.119) и решение $p(t \mid u^*)$ сопряженной системы. Затем необходимо найти градиент G_0 функционала V_0 в силу системы (8.119) при управлении $u^*(t)$ и заменить в нем вектор-функцию $x(t \mid u^*)$ на вектор x, тогда найдем $G_0(x, t)$, как функцию x и t. Оптимальное синтезирующее управление $u^0(x, t)$ находится следующим образом (если выполнено условие регулярности):

$$u^0(x, t) = \bar{\Phi}(x, t), \tag{8.120}$$

где оператор $\Phi(x, t)$ определяется из условия

$$\int_0^T [G_0(x, t), \Phi(x, t)]\, dt = \min_{u(x, t) \in U} \int_0^T [G_0(x, t), u(x, t)]\, dt. \quad (8.121)$$

В частности, при $U = \{|u_j| \leqslant 1, \ j = 1, \ldots, r\}$ оператор $\Phi(x, t)$ имеет вид

$$\overline{\Phi}_j(x, t) = -\operatorname{sign} G_0^j(x, t) \quad (j = 1, \ldots, r). \quad (8.122)$$

Здесь условие регулярности заключается в том, что хотя бы одна из координат $G_0^j(x, t)$ градиента V_0 явно зависит от вектора x.

Доказательство (8.120) вытекает из следующих очевидных неравенств:

$$V_0(u^*(t)) \leqslant V_0(u^0(x(t|u^0), t)) = V_0(u^0(x, t)) \leqslant V_0(u^*(t)). \quad (8.123)$$

Следует отметить, что оптимальное синтезирующее управление $u^0(x, t)$ можно аналогично находить при выполнении условия регулярности как в случае нелинейных систем, так и в случае сложных функционалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ю. Баранов, Ю. Ф. Казаринов, В. В. Хоменюк. Градиентные методы решения задач терминального управления в линейных системах автоматического регулирования. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 5, № 5, 1965.
2. А. Ю. Баранов, Р. И. Трухаев, В. В. Хоменюк. К методу погружения в вариационных задачах. Вестник ЛГУ, № 1. 1967.
3. А. Ю Баранов, Р. И. Трухаев, В. В. Хоменюк. Обоснование метода погружения в вариационных задачах. Автоматика и телемеханика, № 7, 1967.
4. Р. Беллман. Динамическое программирование. М., ИЛ, 1960.
5. Г. А. Блисс. Лекции по вариационному исчислению. М., ИЛ, 1950.
6. Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства. М., ИЛ, 1958.
7. М. М. Вайнберг. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М., ГИТТЛ, 1956.
8. И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
9. Н. М. Гюнтер. Курс вариационного исчисления. М.—Л., 1941.
10. В. Ф. Демьянов. К построению оптимальной программы в линейных системах. Автоматика и телемеханика, № 1, 1964.

К нахождению оптимальных управлений в некоторых задачах автоматического регулирования. Вестник ЛГУ, № 13, 1965.

11. Л. А. Животовский. Условия несовместности системы нелинейных неравенств, определение ее несовместности и итеративное решение задачи выпуклого программирования. Вычислительные методы и программирование, V, изд. МГУ, 1966.
12. В. И. Зубов. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Судостроение, 1966.
13. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., Физматгиз, 1959.
14. Н. Е. Кирин. Вычислительные методы теории оптимального управления. Изд. ЛГУ, 1968.

15. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, перев. с нем., т. I. М.—Л., ГТТЛ, 1933; т. II, М.—Л., ГТТЛ, 1945.

16. А. А. Ляпунов. О вполне аддитивных вектор-функциях. Изв. АН СССР, сер. мат., 3, 1940.

17. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Под ред. Дж. Лейтмана. М., изд. «Наука», 1965.

18. С. Г. Михлин. О сходимости одного прямого метода. УМН, т. 15, вып. 1(91), 1960.

19. С. Г. Михлин. Численная реализация вариационных методов. М., изд. «Наука», 1966.

20. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский и др. Математическая теория оптимальных процессов, М., Физматгиз, 1961.

21. В. Л. Рвачев. Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов. ДАН СССР, т. 153, № 4, 1963.

22. В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов. Об устойчивости разностных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.

23. А. Н. Тихонов. О методах регуляризации задач оптимального управления, ДАН СССР, т. 162, № 4. 1965.

24. Р. И. Трухаев, В. В. Хоменюк. Методы исследования неклассических вариационных задач. В сб.: Теория оптимальных решений. Тр. семинара, I. Киев, 1968.

25. Р. И. Трухаев, В. В. Хоменюк. К теории приближенного синтеза в задачах оптимизации систем автоматического управления. Тезисы доклада на IV Всесоюзном совещании по автоматическому управлению (технической кибернетике). Тбилиси, 1968.

26. Р. И. Трухаев, В. В. Хоменюк. К теории неклассических игровых задач. Тезисы сообщения на I Всесоюзной конференции по теории игр. Ереван, 1968.

27. Р. И. Трухаев, В. В. Хоменюк. Линеаризованный принцип максимума в системах автоматического управления. Автоматика и телемеханика, № 1, 1969.

28. Р. И. Трухаев, В. В. Хоменюк. Методы учета ограничений в вариационных задачах. В сб.: Управление, надежность и навигация. Изд. «Энергия», 1969.

29. Функциональный анализ. Под ред. С. Г. Крейна. Справочная математическая библиотека. М., изд. «Наука», 1964.

30. В. В. Хоменюк. Методы оптимизации, I. Отчет ВЦ ЛГУ и ВМОЛА, 1962.

Методы оптимизации. II. Отчет ВЦ ЛГУ и ВМОЛА, 1963.

Градиентные методы оптимизации нелинейных систем автоматического регулирования в сб.: Прикладные задачи технической кибернетики. М., Сов. радио, 1966.

31. К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М., ИЛ, 1962.

32. М. Н Яковлев. О некоторых методах решения нелинейных уравнений. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. М., изд. «Наука», 1965.

33. R. Courant. Variational methods for the problems of equilibrium and vibrations. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 49, 1943.

34. G. A. Desoer. The bang-bang servo problem treated by variational techniques. Information and Control, vol. 7, No 4, 1959.

35. A. Miele. General variational theory of the flight paths of rocket powered aircraft missiles and satellite carriers. Astronaut. Acta, vol. 4, No 4, 1958.

36. A. M. Ostrowski. Simultaneous systems of equations. National Bureau of Standards, Appl. Math. Ser., 29, 1953.

37. F. A. Valentine. The problem of Lagrange with differential inequalities as added side conditions. Diss. Depart. Chicago, Illinois, 1937.

СОДЕРЖАНИЕ