

В. А. УГАРОВ

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
физико-математических факультетов
педагогических институтов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1977

530.1

У 24

УДК 530.12

У $\frac{20402-111}{053(02)-77}$ 91-77

© Главная редакция
физико-математической литературы
издательства «Наука», 1977, с изменениями

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. Классическая механика и принцип относительности . . .	7
§ 1.1. Система координат и система отсчета в классической механике	7
§ 1.2. Выбор системы отсчета	10
§ 1.3. Преобразования Галилея	11
§ 1.4. Принцип относительности Галилея. Второй закон Ньютона	15
§ 1.5. Законы Ньютона и инерциальные системы отсчета	20
§ 1.6. Абсолютное время и абсолютное пространство	24
§ 1.7. Как физика приближалась к теории относительности	26
§ 1.8. Обобщение принципа относительности Галилея	29
§ 1.9. Скорость света в вакууме	32
Глава 2. Постулаты Эйнштейна. Интервал между событиями. Преобразования Лоренца	34
§ 2.1. Постулаты Эйнштейна	34
§ 2.2. Релятивистская система отсчета	36
§ 2.3. Прямые следствия постулатов Эйнштейна (несколько мысленных экспериментов)	41
§ 2.4. Относительность синхронизации часов двух инерциальных систем отсчета. Непосредственный вывод преобразований Лоренца	47
§ 2.5. Преобразования Лоренца как следствия постулатов Эйнштейна	51
§ 2.6. Распространение фронта световой волны. Интервал между событиями	55
§ 2.7. Преобразования Лоренца как следствие инвариантности интервала между событиями	58
§ 2.8. Комплексные величины в СТО. Симметричные обозначения	60
§ 2.9. Геометрическая иллюстрация преобразований Лоренца	64
Глава 3. Следствия преобразований Лоренца. Классификация интервалов и принцип причинности. Метод k-коэффициента	66
§ 3.1. Об измерении длин и промежутков времени. Относительность одновременности	66
§ 3.2. Относительность длины движущихся линеек (масштабов). Видимая форма тел, движущихся с релятивистскими скоростями	69
§ 3.3. Относительность промежутков времени между событиями	77
§ 3.4. Классификация интервалов и принцип причинности	84
§ 3.5. Преобразование компонент скорости частицы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой	88
§ 3.6. Преобразование абсолютной величины и направления скорости частицы	95
§ 3.7. Метод k -коэффициента (радиолокационный метод)	98

Глава 4. Четырехмерное пространство-время	111
§ 4.1. Трехмерное и четырехмерное евклидовы пространства . . .	111
§ 4.2. 4-пространство-время — четырехмерное псевдоевклидово пространство	112
§ 4.3. 4-векторы и 4-тензоры	114
§ 4.4. Псевдоевклидова плоскость	117
Глава 5. Релятивистская механика частицы	127
§ 5.1. 4-скорость и 4-ускорение	128
§ 5.2. 4-сила и четырехмерное уравнение движения	134
§ 5.3. Трехмерное релятивистское уравнение движения частицы (второй закон Ньютона в релятивистской форме)	139
§ 5.4. Релятивистское выражение для энергии частицы	142
§ 5.5. 4-вектор энергии-импульса	146
§ 5.6. Масса покоя системы. Энергия связи	150
§ 5.7. Некоторые задачи релятивистской механики частицы	154
§ 5.8. Законы сохранения релятивистской механики	168
Глава 6. Теория Максвелла в релятивистской форме	172
§ 6.1. Трехмерная система уравнений Максвелла. 4-потенциал и 4-ток	173
§ 6.2. Преобразование 4-потенциала и 4-тока	176
§ 6.3. Тензор электромагнитного поля	180
§ 6.4. Преобразование компонент электрического и магнитного полей	184
§ 6.5. Инварианты электромагнитного поля	189
§ 6.6. Сила Лоренца	190
§ 6.7. Ковариантность системы уравнений Максвелла	196
§ 6.8. Уравнения Минковского для движущихся сред (преобразование материальных уравнений)	199
§ 6.9. Преобразование электрического и магнитного моментов	205
§ 6.10. Некоторые задачи, связанные с преобразованием электромагнитного поля	207
§ 6.11. Тензор энергии-импульса-натяжений электромагнитного поля в вакууме	212
§ 6.12. Тензор энергии-импульса-натяжений электромагнитного поля в среде. Тензор Минковского и тензор Абрагама	222
§ 6.13. Тензор энергии-импульса-натяжений сферически симметричного заряда	228
§ 6.14. Потенциалы поля в движущейся непроводящей среде	229
§ 6.15. Потенциалы поля в движущейся проводящей среде	236
Глава 7. Оптические явления и специальная теория относительности	245
§ 7.1. Свойства плоских световых волн	245
§ 7.2. 4-волновой вектор. Эффект Доплера. Аберрация света	248
§ 7.3. Ограниченная в пространстве плоская волна. Преобразование энергии и амплитуды плоской волны	252
§ 7.4. Давление электромагнитной волны (света) на поверхность	257
§ 7.5. Изменение частоты света при отражении от движущейся поверхности (зеркала)	259
§ 7.6. Световые кванты (фотоны) как релятивистские частицы	262
§ 7.7. Кванты света в среде. Эффект Вавилова — Черенкова. Аномальный эффект Доплера	267
Глава 8. О некоторых «парадоксах» специальной теории относительности	273
§ 8.1. Сверхсветовые скорости	274
§ 8.2. Парадокс нити и рычага	279

§ 8.3. Тахионы	283
§ 8.4. Парадокс часов	290
§ 8.5. «Эквивалентность» массы и энергии. Нулевая масса покоя	296
Дополнения	
I. В. Л. Гинзбург. Как и кто создал специальную теорию относительности?	303
II. Безуспешные поиски среды, в которой распространяется свет	315
III. Был ли опыт Майкельсона «решающим» для построения СТО?	332
IV. Почему не следует вводить зависимость массы от скорости или же релятивистскую массу?	338
V. Ненерциальные системы отсчета. СТО и переход к теории тяготения (ОТО)	342
Хронология событий, связанных с историей СТО	349
Приложение I	350
§ 1. Симметричные обозначения, правила суммирования	350
§ 2. Преобразование координат при повороте декартовой системы	351
§ 3. Тензоры	354
§ 4. Инвариантность 4-дивергенции и оператора Д'Аламбера	358
§ 5. Свертывание («омоложение») индексов тензора	359
§ 6. Некоторые сведения об определителях (детерминантах). Дуальные тензоры	361
§ 7. Тензор напряжений	366
§ 8. Прямолинейные косоугольные системы координат.	368
§ 9. Определение гиперболических функций и некоторые соотношения между ними	372
Приложение II. Основные формулы электродинамики в гауссовой системе	374
Литература	378
Предметный указатель	382

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга — переработанное и дополненное издание книги, вышедшей в 1969 г. под тем же названием. Книга написана как учебник и рассчитана на студентов и преподавателей, в том числе и учителей физики средней школы. Общий план книги не изменился, но в этом издании подробнее изложены основы теории, большее внимание уделено четырехмерной трактовке, приведены разные способы изложения СТО; введены параграфы, посвященные методическим вопросам и вопросам истории СТО; расширена глава, посвященная электродинамике.

При подготовке этого издания были учтены многочисленные замечания читателей, которым автор выражает искреннюю благодарность. Мне приятно поблагодарить Б. М. Болотовского и С. П. Стоярова, написавших для этой книги §§ 6.14, 6.15. Особую признательность мне хотелось бы выразить В. Л. Гинзбургу. В книгу вошло многое из того, что я узнал на руководимом им семинаре. Ряд вопросов обсуждался с ним непосредственно; отмечу особенно вопрос о тензоре энергии-импульса-натяжений в среде. Наконец, для этой книги В. Л. Гинзбург написал статью «Как и кто создал СТО?», публикуемую в виде Дополнения I. На мой взгляд, эта статья очень точно отвечает на вопросы, возникающие у каждого, кто заинтересуется историей возникновения СТО, и возможность включить эту статью в книгу я считаю за честь для себя.

КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
И ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1.1. Система координат и система отсчета в классической механике. Все явления природы происходят в пространстве и времени, а элемент любого явления — это то, что происходит в данный момент времени в данной точке пространства. То, что происходит в данной точке и в данный момент времени (фактически то, что сосредоточено в достаточно малой области пространства и ограничено достаточно малым промежутком времени) в специальной теории относительности *) принято называть событием. Как видно из этого определения, конкретное содержание события может быть весьма различным. Поэтому принято всегда указывать, что «событие состоит в том, что...». Примерами событий могут служить посылка светового сигнала из некоторой точки пространства в некоторый момент времени или же пребывание движущейся частицы (материальной точки) в данной точке пространства в данный момент времени.

Когда реализуется некоторое событие, то говорят, что оно «наступило» (или наступает, или наступит). Любое физическое явление представляет собой последовательность событий. Таким образом, описание отдельного события служит основой для описания любого явления. Поэтому с описания отдельного события мы и начнем.

Чтобы охарактеризовать точку пространства, где наступило событие, нужно придать каждой точке пространства свою отметку до того, как мы начнем рассматривать конкретные физические явления. Но пространство однородно и изотропно. Это значит, что все точки пространства и все направления в нем равноправны. Здесь следует подчеркнуть сразу, что речь идет о свободном пространстве, или вакууме. Для специальной теории относительности рассмотрение физических явлений в вакууме принципиально важно. Хотя вакуум представляет собой сложную физическую систему, для наших целей достаточно считать, что в той области пространства, которую мы припишем за вакуум, практически отсутствует вещество, обладающее массой покоя, а гравитационное и электрическое поля не слишком сильны.

Но если все точки пространства одинаковы, то для того, чтобы выделить какую-то точку, нужно поместить в нее материальное

*) Далее вместо полного названия «специальная теория относительности» зачастую используются три начальные буквы: СТО.

тело (тело, обладающее массой покоя). Разметка точек пространства обычно осуществляется введением координатной системы. С помощью материального тела мы выделяем точку пространства — начало координатной системы. Самой простой координатной системой является декартова система координат. Ее построение начинается с того, что проводятся три взаимно перпендикулярные прямые — оси координат X , Y , Z . Вместе с тем в физике это — не абстрактные прямые линии. Оси координат — это, в принципе, жесткие, твердые (недеформируемые) тела *). С ними, кстати, всегда будут связываться приборы, эталоны и другие предметы данной системы отсчета. Поэтому важно не забывать, что физическая координатная система — это всегда материальное тело.

Разметка точек в декартовой системе координат осуществляется совсем просто. Из любой точки пространства M можно опустить перпендикуляры на оси X , Y , Z (или, как еще говорят, можно спроектировать эту точку на оси координат). Измеряя расстояния проекции точки по осям X , Y , Z от начала отсчета с помощью выбранных масштабов, мы получим числа x , y , z , которые называются декартовыми координатами точки. Измерение расстояния может осуществляться последовательным переключением единичного масштаба вдоль оси от начала отсчета до проекции точки на ось. Такая процедура, фактически осуществляемая при измерении длины в повседневной жизни, является возможным определением длины отрезка или тела в том случае, если тело покоится в данной системе координат. Как мы увидим далее, специальная теория относительности предоставляет нам весьма удобный способ измерения расстояний, не прибегая к твердым масштабам и их последовательному переключению (см. гл. 2). Оба способа, конечно, эквивалентны.

Итак, введением декартовой системы координат мы отнесли каждой точке пространства три числа — три декартовых координаты x , y , z . Но основная задача физики — это изучение движения. Самым простым видом движения является механическое движение, и уже его описание требует отсчета времени. Таким образом, система координат неизбежно должна быть дополнена часами. По этим часам нужно отмечать время наступления событий в разных точках пространства. Сколько часов потребуется для этого?

В классической механике на этом вопросе обычно не задерживаются и молчаливо предполагают, что достаточно одних часов, покоящихся в данной координатной системе. Полезно выяснить, что кроется за этим предположением. Допустим, что часы расположены в начале координатной системы. События могут наступать в любых точках пространства, в том числе и достаточно удален-

*) СТО отрицает существование абсолютно твердых тел (см. гл. 8), но для осей координатной системы достаточно быть просто не слишком упругими.

ных от начала. Как по часам, удаленным от места наступления событий, отмечать время наступления этих событий? Очевидно, к часам, расположенным в начале координат, необходимо послать какой-то сигнал от места наступления событий как раз в тот момент, когда событие наступило. Если скорость сигнала конечна, он придет к часам позже, чем наступило событие, причем время запаздывания сигнала зависит от расстояния между точкой, где наступило событие, и часами. Однако в классической механике допускается, что в принципе существуют сигналы, идущие бесконечно быстро. Тогда, разумеется, достаточно одних часов, жестко связанных с любой точкой координатной системы.

Подразумевается, что время наступления событий отмечается так: в момент наступления события в любой точке пространства из этой точки к часам посылается сигнал, время прихода которого к часам и есть время наступления события (скорость сигнала бесконечна!). Предположение о бесконечно быстрых сигналах относится, конечно, не только к регистрации событий; в ньютоновской механике оно заложено намного глубже: в механике Ньютона бесконечно быстро передаются взаимодействия между телами (см. § 1.4).

Современная физика утверждает, однако, что все сигналы (взаимодействия) передаются с конечной скоростью; другими словами, существует предельная скорость передачи взаимодействий. Как это можно увязать с тем, что ньютоновская механика, в основе которой лежит предположение о бесконечно быстрых сигналах, превосходно справляется с решением многих задач (например, великолепно рассчитывает движение тел в Солнечной системе)? Ответ на этот вопрос весьма прост. Предельная скорость передачи сигнала (или взаимодействия) очень велика. По современным представлениям, это скорость электромагнитных волн (света) в вакууме, ее значение составляет примерно $3 \cdot 10^{10}$ см/сек. Поэтому можно рассчитывать на то, что до тех пор, пока скорости рассматриваемых тел существенно меньше скорости света в вакууме, а характерные расстояния таковы, что время распространения света вдоль них пренебрежимо мало, — ньютоновская механика будет справедливой, а для отсчета времени событий будет достаточно одних часов. Вместе с тем сразу же ясно, что для быстрых движений ($v \sim c$) и протяженных систем придется иным способом определять время наступления событий и по-прежнему строить механику. Так на самом деле и поступает специальная теория относительности, которая явно учитывает конечную скорость передачи взаимодействий.

Вернемся к классической схеме. Системой отсчета в классической механике называют тело отсчета с координатной системой, набор эталонов длины и одни часы, жестко скрепленные с телом отсчета. Система отсчета подразумевается в физике всегда, поскольку

ку любое измерение, производимое прибором, дает результат, относящийся к той системе отсчета, где этот прибор покоится.

§ 1.2. Выбор системы отсчета. При решении конкретных задач мы выбираем удобную систему отсчета и удобную систему координат. Откуда берется такая возможность выбора? Что касается часов, в классической механике нужны в каждой системе отсчета лишь одни идеальные часы. Однако тело отсчета, начало отсчета и направления координатных осей можно выбрать произвольно. Хорошо известно, как пользуются этим обстоятельством в геометрии. Например, уравнение эллипса имеет простой вид $\frac{x^2}{a^2} +$

$+\frac{y^2}{b^2} = 1$ лишь в том случае, если начало координат поместить в центр эллипса, а координатные оси направить по его главным осям. Конечно, все характерные особенности эллипса сохраняются и при любом другом выборе координатной системы, но все формулы окажутся неизмеримо сложнее. Здесь важно подчеркнуть, что переход от одной координатной системы к другой в аналитической геометрии меняет алгебраическую форму уравнений геометрических объектов; сами объекты, конечно, остаются неизменными.

Рассматривая физические явления, можно также строить координатную систему достаточно произвольно. Однако при этом неявно подразумеваются два важных свойства пространства в вакууме: однородность и изотропность. Однородность — это тождественность всех точек пространства. Свойство это очень существенно. В сущности, оно позволяет нам пользоваться физикой. Законы физики оказываются одинаковыми в разных точках Земли, да и в пределах Солнечной системы. Но именно это и позволяет помещать начало отсчета в любую удобную точку. Когда мы поворачиваем координатную систему вокруг начала, подразумевается, что от этого ничего измениться не может. Но это означает, что все направления, идущие от данной точки, тождественны по своим свойствам. Это и есть изотропность пространства. В классической механике (точнее, в системах отсчета, где справедливы законы Ньютона, см. § 15) предполагается однородность и изотропность свободного пространства.

В отличие от геометрии, в физике есть еще одна возможность в выборе систем отсчета: можно рассматривать системы отсчета, находящиеся в относительном движении. Для геометрии это просто излишне. Но в физике неизбежно возникают системы отсчета, находящиеся в относительном движении. Можно, например, ставить физические опыты на космическом корабле и на Земле. Это и есть две системы отсчета, в каждой из которых могут находиться неподвижные относительно нее приборы. Как только мы допустили системы отсчета, движущиеся относительно друг друга, сразу возникают два существенно разных, но фундаментальных вопроса.

1. Как влияет движение системы отсчета на физические явления, наблюдаемые в этих системах, т. е. меняются ли физические законы при переходе от одной такой системы к другой?

2. Допустим, что мы наблюдаем конкретное физическое явление с помощью приборов, покоящихся в некоторой системе отсчета, и в результате измерений получаем для физических величин, характеризующих это явление, некоторые числа. То же самое явление можно наблюдать и в другой системе отсчета, движущейся относительно первой. Измерения, выполненные во второй системе координат, также дадут нам некоторые числа, определяющие те же самые физические величины. Как сопоставить эти числа?

Здесь важно, что наблюдается одно и то же явление. И мы должны уметь сопоставлять эти числа. В конце концов, система отсчета — это искусственное построение, созданное для выполнения измерений. Само явление, как и законы природы, не может зависеть от выбора системы отсчета. Явления природы — это объективно существующая вне нашего сознания и вне наших измерений реальность.

Конечно, результаты измерений могут оказаться в разных системах отсчета разными, но мы во всяком случае должны уметь пересчитывать результаты наблюдений, полученные в одной системе отсчета, к результатам, которые получены или могут быть получены в другой. Короче говоря, нам нужен способ пересчета результатов измерений. Как найти такой способ?

Ответ на первый вопрос ведет нас к принципу относительности и через законы Ньютона выделяет особый класс систем отсчета — инерциальные системы (§ 1.5). Ответ на второй вопрос дают правила преобразования координат события, т. е. преобразования Галилея в классической механике (§ 1.3) или преобразования Лоренца в релятивистской механике (§§ 2.4, 2.5, 2.7).

§ 1.3. Преобразования Галилея. Переход от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой, делали задолго до появления теории относительности. Первым, кто пользовался таким приемом, был, по-видимому, Гюйгенс, рассматривавший таким образом задачу о соударении шаров. Будем для краткости обозначать систему отсчета буквой K , а если систем несколько, то введем индексы сверху (K^0, K', K'', \dots). Мы уже говорили о том, что «элементом» любого физического явления можно считать событие. Естественно начать с пересчета величин, характеризующих событие, при переходе от одной системы отсчета к другой. Всюду впредь под «переходом от одной системы отсчета к другой» подразумевается рассмотрение систем отсчета, находящихся в относительном движении. Изменение начала отсчета и поворот координатных осей за «переход» мы считать не будем.

В произвольной системе отсчета K событие характеризуется четырьмя числами: x, y, z, t — тремя координатами точки, где событие наступило, и моментом времени, когда оно наступило. Нам нужно знать, как выглядит та же самая четверка чисел x', y', z', t' в любой другой системе отсчета K' , которая движется относительно системы K .

Уже с самого начала мы вынуждены ограничить свою задачу и рассматривать только такие системы отсчета, которые движутся

относительно друг друга прямолинейно и равномерно, без вращения вокруг начала. Другими словами, ни одна из рассматриваемых систем отсчета не испытывает ускорения относительно другой. Несколько позже выяснится, что речь идет о совокупности так называемых инерциальных систем отсчета, по выделение таких систем отсчета можно будет произвести лишь на основании законов Ньютона; поэтому мы отложим вопрос о том, как определяются

Рис. 1.1. Две координатные системы K и K' с произвольно направленными осями x, y, z и x', y', z' . Система K' движется относительно K со скоростью V . Радиус-вектор точки M , равный в системе K вектору r , в системе K' равен r' . По правилу сложения векторов $r = r' + R$, где R — радиус-вектор начала отсчета O' .

и находятся такие системы, до § 1.5. А пока мы просто геометрически рассмотрим две системы K и K' , движущиеся относительно друг друга равномерно и прямолинейно (поступательно). Допустим, что система отсчета K' движется относительно K со скоростью V . Пусть в данный момент времени t радиус-вектор точки M в системе K' равен r' . Тогда из рис. 1.1 видно, что $r' = r - R$, где r — радиус-вектор той же точки в системе K , а R — радиус-вектор начала системы координат K' , отсчитанный от начала K . Это соотношение справедливо для любого момента времени, но R меняется по известному закону $R = Vt + R_0$, где R_0 — радиус-вектор, определяющий положение начала O' в момент времени $t = 0$. Если принять, что в момент $t = 0$ оба начала совпадают, то $R = Vt$ и мы получаем закон преобразования координат в векторной форме:

$$r' = r - Vt, \quad (1.1)$$

где компоненты вектора V заданы в системе K . Однако мы можем воспользоваться изотропностью пространства и повернуть каждую

из систем K и K' вокруг своего начала любым способом. Удобно поступить так. Вращением систем отсчета направим оси x и x' по направлению относительной скорости систем K и K' . Затем вращением вокруг общей оси x, x' направим оси y, y' и z, z' параллельно друг другу. Таким образом, ничего не потеряв в физической общности, мы приходим к взаимному расположению координатных систем, изображенному на рис. 1.2. Теперь уже компоненты скорости $V = (V, 0, 0)$. Начало системы K' скользит по общей оси x, x' со скоростью V , а в начальный момент времени оба начала совпадают. Из векторной формулы (1.1) или непосредственно из рис. 1.2 видно, что связь между координатами точки M (где, как мы считаем, наступило событие) в системах K и K' определяется формулами

$$\begin{aligned}x' &= x - Vt, & y' &= y, \\z' &= z.\end{aligned}$$

Теперь, чтобы полностью определить, как выглядят координаты события в системе K' , нужно знать, какое время наступления этого события будет отсчитано по часам системы K' (теперь уже у нас двое часов — одни в системе K , другие в системе K'). Но ведь мы пользуемся в обеих системах бесконечно быстрыми сигналами, а для таких сигналов конечная относительная скорость систем не существенна: бесконечная скорость в обеих системах бесконечна. Следовательно, по часам обеих систем время наступления события будет одно и то же, т. е. $t = t'$. К такому же выводу толкает нас и «здравый смысл», потому что в повседневной жизни мы не обнаруживаем влияния движения на ход времени. Не забудем, однако, что бесконечно быстрые сигналы — это всего лишь условность и что, хотя здравый смысл не обманывает нас в повседневной жизни, мы должны быть готовы к тому, что там, где скажется конечная скорость сигналов, может оказаться, что $t \neq t'$.

Но в рамках классической механики, как мы теперь установили, формулы преобразования от «координат» события, определен-

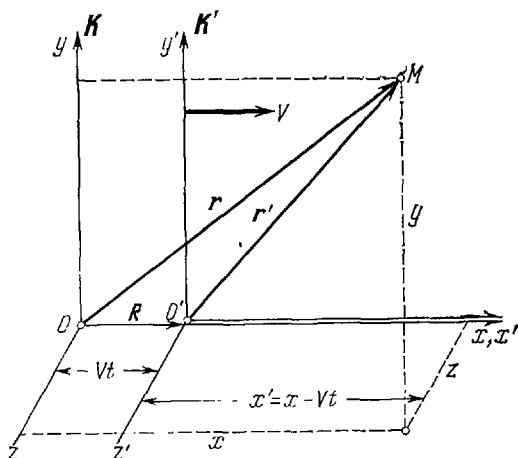


Рис. 1.2. Две системы отсчета K и K' с параллельными осями, движущиеся относительно друг друга со скоростью V (V — скорость движения K' относительно K). В классической физике координаты «события» пересчитываются от системы K в систему отсчета K' по формулам «преобразования Галилея»: $x' = x - Vt$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$.

ных в системе $K(x, y, z, t)$, к координатам события в системе $K'(x', y', z', t')$ выглядят так:

$$\begin{aligned}x' &= x - Vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Эти формулы годятся, естественно, только для взаимного расположения систем отсчета, изображенного на рис. 1.2. Преобразования «координат» события системы K в систему K' (1.2) называются *преобразованиями Галилея*. Мы хотели бы сразу обратить внимание читателей на то, что время оказалось четвертой координатой события и, говоря о координатах события, мы подразумеваем четверку чисел (x, y, z, t) . Это делается не только для краткости речи. В специальной теории относительности открываются глубокие основания для такой терминологии (см. гл. 4).

Мы уже подчеркивали равноправие систем, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно. Системы K и K' , которыми мы будем впредь пользоваться, отличаются лишь тем, что относительная скорость K' относительно K равна V , а системы K относительно K' равна $-V$. Следовательно, чтобы получить формулы обратного перехода, достаточно поменять местами штрихованные и нештрихованные величины, изменив при этом знак у V . Имеем

$$\begin{aligned}x &= x' + Vt', \\y &= y', \\z &= z', \\t &= t'.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Конечно, эти же самые формулы получатся и прямым алгебраическим путем.

Отметим одно из следствий преобразований Галилея. Допустим, что в системе K наступили два события на оси x — одно в точке x_1 в момент времени t_1 , другое в точке x_2 в момент t_2 ($t_1 \neq t_2$). Можно ли подобрать систему K' , в которой оба события наступили бы в одной и той же точке пространства? Пойдем x -координаты этих событий в системе K' : $x'_1 = x_1 - Vt_1$, $x'_2 = x_2 - Vt_2$; составим разность $x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)$. Если потребовать $x'_2 - x'_1 = 0$, мы получим уравнение для определения скорости системы K' относительно K : $V = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$. Смысл результата очень прост: система K' за время $t_2 - t_1$ перенесет точку x'_1 в то место, где наступило второе событие, к нужному моменту времени. Мы видим, что всегда можно подобрать систему K' , удовлетворяющую поставленному условию. Но это возможно

только потому, что в классической механике допустимы любые значения V . В теории относительности, где скорость движения системы отсчета, как и любого материального тела, ограничена, найти нужную систему можно отнюдь не всегда.

Прежде чем переходить к принципу относительности Галилея, условимся об одном термине. Для удобства речи часто говорят о различных «наблюдателях» или «наблюдателях в разных системах отсчета». Эта терминология вызвала в свое время ожесточенные споры, потому что многим казалось, что она подразумевала субъективный подход к физическим измерениям. Но присутствие «наблюдателя» при выполнении измерений вовсе не обязательно: их можно производить приборами и без участия человека. Фактически так и происходит, например, на космических кораблях, даже тогда, когда на их борту есть люди. Под «наблюдателем из системы K » фактически всегда подразумевается совокупность приборов, покоящихся в этой системе. То, что приборы, установленные в разных системах отсчета, дадут различные результаты при измерении величин, относящихся к одному и тому же явлению, удивления вызвать не может, поскольку относительное движение — фундаментальный физический факт. Объективность законов природы находит свое отражение в том, что, зная результаты наблюдения какого-то явления в одной системе отсчета, можно пайти результаты наблюдения этого явления в любой другой системе отсчета. Можно надеяться, что после этих замечаний появление наблюдателя на страницах этой книги не вызовет возражений.

§ 1.4. Принцип относительности Галилея. Второй закон Ньютона. Принцип относительности Галилея относится исключительно к механическим явлениям; он был первым шагом к установлению принципа относительности, распространяющегося на всю физику. Галилей заметил, что состояние равномерного прямолинейного движения не оказывает влияния на механические явления. Нужно четко сформулировать, что это значит. Как мы уже знаем, для описания любых физических явлений, в том числе и явлений механики, необходима система отсчета. Рассмотрим две системы отсчета, движущиеся относительно друг друга равномерно и прямолинейно. Поставим в одной из них любой «механический» опыт: будем, например, рассматривать движение математического маятника или изучать свободное падение тел. Принцип относительности утверждает, что тождественные опыты, поставленные в двух системах, о которых мы говорили, дадут тождественные результаты. Это значит, что с помощью таких опытов обнаружить относительное движение систем невозможно. Конечно, при другой постановке опытов относительное движение обнаруживается без труда многими способами.

Первая из известных формулировок принципа относительности, которую можно найти в книге Галилея «Диалоги о двух главнейших системах мира — птоломеевой и коперниканской» (1632 г.), носит чисто качественный характер. Мы сделаем небольшую выписку из этой книги, отражающую суть дела:

«Запритесь с кем-нибудь из друзей в кают-компанию под палубой большого корабля, взяв с собой мух, бабочек и других небольших летающих животных. Возьмите и большой сосуд с водой, в котором плавают рыбы. Подвесьте бутылку, из которой капля за каплей вытекает вода в широкий сосуд внизу. Пока ваше судно стоит на месте, внимательно наблюдайте, как насекомые летают по помещению с одинаковыми скоростями во все стороны. Рыбы плавают как угодно, не предпочитая какого-либо особого направления. Капли падают в сосуд под бутылку. Если же вы бросите что-нибудь вашему другу, то вы приложите одинаковое усилие, в каком бы направлении ни бросали, если расстояния одинаковы. Прыгая обими ногами сразу, вы будете пролетать одинаковые расстояния в любом направлении. Тщательно пронаблюдав все это (хотя вы и не сомневались, что все будет происходить именно так, пока корабль стоит на месте), отдайте команду, чтобы корабль начал двигаться с любой скоростью, лишь бы его движение было равномерным и не подвергалось каким бы то ни было возмущениям. Ни в одном из указанных процессов вы не обнаружите ни малейших изменений и не сможете ни по одному из них узнать, движется ли ваш корабль или стоит на месте».

Из качественной формулировки принципа относительности Галилея — тождественность результатов тождественных механических опытов, поставленных двумя наблюдателями, движущимися равномерно и прямолинейно относительно друг друга, — вытекают существенные следствия. Действительно, если известны законы, управляющие механическими явлениями, а все тождественные механические опыты дают один и тот же результат в разных системах отсчета, то и законы механики должны быть одинаковыми в этих системах отсчета. Другими словами, уравнения механики должны быть одинаковыми во всех системах отсчета, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно.

Итак, основные уравнения механики, записанные в координатах и через показания часов своей системы отсчета, должны иметь одинаковый вид. Вместе с тем ясно, что многие величины меняются при переходе от одной системы отсчета к другой. Действительно, рассмотрим движение частицы *) в системе K ; оно обычно задается как зависимость радиус-вектора от времени, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Согласно

*) Имеется в виду небольшое тело (обладающее массой), столь малое, что его вращение учитывать не нужно. В механике в этом случае часто говорят о материальной точке, но нам слишком много придется говорить о точках пространства, поэтому термин «частица» предпочтительнее.

(1.4) движение той же частицы в K' задается переменным радиус-вектором $r'(t) = r(t) - Vt$. Дифференцируя обе части последнего равенства по t и имея в виду что $dr'/dt = v'$, а $dr/dt = v$, получим

$$v' = v - V. \quad (1.4)$$

Таким образом, скорость частицы в системах K и K' различна. Величины, изменяющиеся при переходе от одной системы координат к другой, называются *относительными*. Таким образом, x -координаты и скорость частицы являются относительными величинами. Однако ее ускорение в системах K и K' одинаково, как это сразу становится очевидным после дифференцирования равенства (1.4):

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} \quad (V = \text{const}).$$

То, что ускорение тел одинаково для всех наблюдателей из систем отсчета, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, просто очевидно. Но этот результат позволяет нам понять, что значит «уравнения имеют одинаковый вид во всех системах отсчета». Основным уравнением классической механики является уравнение, выражающее второй закон Ньютона. Это уравнение связывает между собой силу, действующую на тело, и ускорение, приобретаемое телом под действием этой силы:

$$m \frac{dv}{dt} = F; \quad (1.5)$$

константа m называется *массой* тела.

Если законы механики во всех системах отсчета, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, действительно одинаковы, то уравнение (1.5) должно сохранять свой вид во всех таких системах отсчета. Нетрудно убедиться, что это так и есть. Мы уже доказали, что во всех рассматриваемых системах отсчета ускорения одинаковы. Но что происходит с силами при переходе от одной системы отсчета к другой? Допустим, что нас интересуют два тела I и II; пусть сила их взаимодействия зависит от расстояния между ними, их относительной скорости и времени. Но преобразования Галилея вообще не меняют ни одну из этих величин. Действительно, выпишем координаты и скорости тел I и II в системах отсчета K и K' , пользуясь преобразованиями Галилея:

	Координаты и скорости тел I и II в K	Координаты в K'	Преобразования скорости
I	$x_1, y_1, z_1; v_1$	$x'_1 = x_1 - Vt, \quad y'_1 = y_1, \quad z'_1 = z_1$	$v'_1 = v_1 - V$
II	$x_2, y_2, z_2; v_2$	$x'_2 = x_2 - Vt, \quad y'_2 = y_2, \quad z'_2 = z_2$	$v'_2 = v_2 - V$

Сразу видно, что $x_2 - x_1 = x'_2 - x'_1$, $y_2 - y_1 = y'_2 - y'_1$, $z_2 - z_1 = z'_2 - z'_1$. А поскольку расстояние между телами равно

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{в системе } K,$$

$$\sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} \quad \text{в системе } K',$$

то ясно, что оно не меняется при переходе от K к K' . Что касается относительной скорости, то

$$v'_2 - v'_1 = v_2 - v_1,$$

т. е. она остается неизменной; в силу преобразований Галилея время неизменно: $t = t'$. Поэтому силы, зависящие от перечисленных переменных, вообще не меняют своего вида при переходе от K к K' . По силы, рассматриваемые в механике, зависят либо от расстояния (силы тяготения, силы электрического взаимодействия, упругие силы), либо от относительной скорости (силы трения). Следовательно, силы, встречающиеся в механике, остаются неизменными при преобразованиях Галилея. Поскольку все величины, входящие в (1.5) — ускорения и силы, — не меняются при преобразованиях Галилея, основное уравнение классической механики (второй закон Ньютона), связывающее силы и ускорения, имеет одинаковый вид в системах K и K' и отличается только обозначениями переменных. (Предполагается, конечно, что масса — величина постоянная; инвариантность массы — один из основных постулатов классической механики *.) В системе K уравнение, описывающее второй закон Ньютона, если сила зависит от расстояния и времени, имеет вид

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F(r_{12}, t),$$

а в системе K'

$$m' \frac{d^2 r'}{dt'^2} = F(r'_{12}, t').$$

Уравнение, которое не меняется при преобразовании входящих в него переменных (другими словами, члены которого оказываются инвариантными), называется *инвариантным* по отношению к данному преобразованию. Таким образом, мы показали, что уравнение, выражающее второй закон Ньютона, инвариантно по отношению к преобразованиям Галилея.

Теперь уже можно точнее сформулировать, при каком условии «тождественные опыты ведут к тождественным результатам». Урав-

*) Заметим, что в механике Ньютона рассматривается движение тел с переменной массой (реактивное движение, движение капли с конденсацией), но во всех этих случаях тело отдает вещество окружающей среде или получает от нее. Когда говорят о перемешности массы в СТО (ср. Дополнение IV), речь идет о том, что в системе покоя тела его масса остается неизменной, т. е. никакого обмена массой между телом и средой не происходит.

нение Ньютона (1.5) — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Движение системы описывается его решениями. Для того чтобы решения уравнения (1.5) в системах K и K' совпадали (это и обеспечивает «тождественность» движения), необходимо, чтобы совпадали и начальные условия в этих системах. Инвариантность основного уравнения механики обеспечивает условие того, что все механические явления протекают одинаково во всех системах отсчета, равномерно движущихся относительно друг друга, только в том случае, если начальные условия в этих системах совпадают.

Если начальные условия для одного и того же явления в разных системах отсчета различны, то и само явление будет выглядеть по-разному. К примеру, если капля дождя падает по вертикали для наблюдателя, стоящего на платформе, то для наблюдателя, едущего в поезде, эта же капля будет двигаться по параболе (мы считаем, что капля падает ускоренно). Однако и начальные данные в этих системах были разные; с точки зрения наблюдателя в поезде, у капли в начальный момент была горизонтальная компонента скорости; наблюдатель, стоящий на платформе, должен считать, что никакой горизонтальной составляющей скорости у капли в начальный момент не было.

Мы уже упоминали выше, что в механике Ньютона предполагается бесконечно быстрая передача взаимодействия между телами. Теперь уже можно пояснить это подробнее. «Взаимодействие» тел определяется силами. В классической механике считают, что силы зависят от расстояния между телами, причем это считается верным и для тел, находящихся в относительном движении. Но расстояние между двумя движущимися телами должно записываться в виде

$$r_{12} = \sqrt{[x_2(t) - x_1(t)]^2 + [y_2(t) - y_1(t)]^2 + [z_2(t) - z_1(t)]^2}.$$

Если принять, что взаимодействие (сила) передается с конечной скоростью, то считать при этом, что в выражение для силы входит r_{12} , нельзя. Если нас интересует сила, действующая со стороны тела II на тело I, то положение тела II нужно взять не в момент t , а раньше на тот промежуток времени, который необходим, чтобы взаимодействие «передалось» от тела II к телу I. Если пренебрегать этим временем запаздывания, то это означает фактически, что мы считаем скорость распространения взаимодействий бесконечно большой. Именно так и считают в механике Ньютона.

То же самое видно, если вводить потенциальную энергию. Записав, как обычно, центральную силу для взаимодействия двух частиц в виде

$$F = -\nabla U(|r_1(t) - r_2(t)|),$$

мы явно пренебрегаем запаздыванием в передаче взаимодействия.

Мгновенная передача взаимодействия (это называли в свое время дальностью) для нас представляется удивительной и непонятной. Передача всякого сигнала (т. е. энергии и импульса, способных совершать некоторое действие, например включить какое-либо устройство) требует времени. Передать сигнал «отсюда» в другое место («туда»), как нас учит опыт, мгновенно нельзя. Но во времена Ньютона иного представления, как дальности, для передачи взаимодействия возникнуть не могло. Конечная скорость передачи взаимодействий появилась вместе с представлением о поле, которое было введено в теорию электромагнетизма Максвеллом. В теории Максвелла взаимодействие зарядов или токов осуществляется посредством поля, которому приписывается самостоятельное существование. Но из нее следует, что поле распространяется с конечной скоростью, а это и означает, что взаимодействие распространяется со скоростью распространения поля. Скорость распространения электромагнитного поля в пустоте играет фундаментальную роль для теории относительности. Ее обозначают латинской буквой c . Численно c равно примерно $3 \cdot 10^{10}$ см/сек. Так как изменение поля передается от точки к точке, полевые теории называют теориями близкодствия. Как мы увидим, теория относительности в принципе отвергает дальность.

§ 1.5. Законы Ньютона и инерциальные системы отсчета. Основные законы механики — законы Ньютона позволяют выделить среди всех мыслимых систем отсчета особый класс систем, в которых не только законы механики, но и все остальные физические законы выглядят особенно просто. Это — так называемые инерциальные системы отсчета. *Инерциальной системой отсчета* мы будем называть такую систему отсчета (точнее, такие системы отсчета, поскольку окажется, что таких систем бесчисленное множество), в которой справедливы все три закона Ньютона.

Мы начнем с разъяснения вопроса о том, какое значение имеет первый закон Ньютона для выделения инерциальных систем отсчета среди остальных систем. Первый закон Ньютона — закон инерции — утверждает, что тело, на которое не действует сила, движется по инерции, т. е. равномерно и прямолинейно. Нередко можно было услышать (и даже прочитать в учебниках), что первый закон не является самостоятельным утверждением, а является следствием второго закона.

Формально это так. В первой части (1.5) стоит равнодействующая всех сил, действующих на тело. Второй закон просто утверждает, что ускорение, приобретаемое телом, пропорционально этой равнодействующей и обратно пропорционально массе тела. Из уравнения (1.5) следует, что если равнодействующая всех сил равна нулю или если вообще никаких сил нет, то тело не испытывает ускорения. А если тело не испытывает ускорения, то оно

либо движется равномерно и прямолинейно, либо просто покоится. Отсюда делалось заключение, что закон инерции можно получить из закона динамики.

Зачем же Ньютону понадобилось отдельно формулировать закон инерции? Едва ли Ньютон не понимал, что закон инерции — это следствие закона динамики. Но дело обстоит сложнее, чем это может показаться с первого взгляда. Ньютон отлично понимал, что и уравнение (1.5), и закон инерции не могут быть справедливы в любых системах отсчета. Не случайно в определение инерциальной системы входят все три закона Ньютона. Напомним третий закон: всякой силе можно найти равную и противоположно направленную силу. Этот закон подчеркивает, что в ньютоновской механике все силы имеют характер взаимодействия между телами. Силы в механике Ньютона — это обязательно результат взаимодействия между телами.

Разберем полезный, хотя и очень простой пример. Пусть в инерциальной системе отсчета K покоится тело. Тогда, согласно второму закону Ньютона, ясно, что на тело не действует сила. Не будем трогать этого тела, а рассмотрим его с точки зрения наблюдателя из системы отсчета, которая движется относительно K с ускорением a . Этот наблюдатель обнаружит, что рассматриваемое тело движется относительно него с ускорением — a . Если бы для системы отсчета, где он находится, был бы справедлив второй закон Ньютона, то он мог бы сказать, что на тело действует сила — ma . Но мы хорошо знаем через наблюдателя в инерциальной системе отсчета, что никаких сил, действующих на тело, просто нет. Значит, в системе отсчета, движущейся ускоренно относительно инерциальной, второй закон Ньютона просто несправедлив. Конечно, многие читатели уже поняли, что, переходя в ускоренно движущуюся систему отсчета, мы обнаружили «силу инерции», но эта сила не является силой для механики Ньютона (см. Дополнение V). Но раз законы Ньютона справедливы не во всех системах отсчета, Ньютону нужно было подчеркнуть, что *существует* определенная система отсчета, в которой эти законы справедливы. И первый закон Ньютона, по существу, носит характер такого утверждения. Этим законом постулируется, что инерциальная система отсчета (т. е. система отсчета, где справедлив закон инерции) существует. Другими словами, можно указать систему отсчета, где тело, не взаимодействующее ни с какими другими телами, движется по инерции, т. е. равномерно и прямолинейно.

Закон инерции представляет частный случай закона сохранения импульса. Он является, с одной стороны, следствием второго и третьего законов Ньютона, а с другой — следствием второго закона и предположения об однородности пространства (равноправия всех его точек), т. е. механика Ньютона подразумевает однородность пространства в любой инерциальной системе отсчета.

Но допустим, что мы знаем одну инерциальную систему отсчета. Тогда по принципу относительности Галилея все системы отсчета, движущиеся относительно нее равномерно и прямолинейно, также будут инерциальными. Отсюда ясно, что число инерциальных систем отсчета бесконечно.

Как же найти хотя бы одну инерциальную систему отсчета? Конечно, обнаружение такой системы — дело опыта. Для этой

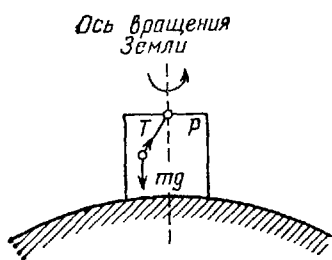


Рис. 1.3. Опыт Фуко, позволяющий обнаружить одну из ИСО. Для простоты рисунок изображает опыт Фуко на полюсе. Фактически опыт производился в Париже, но суть дела от этого не меняется.

цели годится знаменитый опыт Фуко с маятником. Для простоты мы опишем этот опыт так, как он производился бы на одном из полюсов Земли (рис. 1.3). На полюсе устанавливается рамка, к которой подвешен тяжелый шарик на нити. Точка подвеса маятника находится на оси Земли; крепление в подвесе свободное, так что рамка при повороте вокруг оси Земли не увлекает за собой нить. В положении равновесия нить маятника совпадает с осью Земли. Если отклонить маятник от положения равновесия и отпустить без начальной скорости, он будет совершать колебания в некоторой плоскости. На маятник действуют две силы — сила тяжести mg и натяжение нити T . Обе эти силы лежат в плоскости его качаний P и не могут вывести маятник из этой плоскости. Если второй закон Ньютона строго выполняется на Земле, плоскость качаний маятника будет сохранять свое положение относительно Земли. Но на опыте Земля уходит из-под маятника и тем самым «расписывается» в том, что в системе координат, связанной с Землей, второй закон, строго говоря, несправедлив.

Из-за этого не стоит особенно огорчаться, потому что практически законами Ньютона на Земле можно пользоваться с большим успехом. Это видно хотя бы из того, что вся инженерная и теоретическая механика пользуются вторым законом Ньютона без всяких поправок. Происходит это, конечно, потому, что поправки на «инерциальность» системы отсчета, связанной с Землей, невелики: они обусловлены вращением Земли, которое не очень быстро. Поэтому и в школьном изложении можно считать Землю инерциальной системой.

Но принципиально Земля инерциальной системой не является. Инерциальной системой будет такая система координат, относительно которой сохраняется положение плоскости качаний маятника. Ее можно обнаружить из того же самого опыта Фуко. Система эта оказывается довольно «экзотической». Ее центр распола-

гается на Солнце, а три координатные оси направлены на «неподвижные» звезды (т. е. звезды, жестко перемещающиеся вместе с так называемой небесной сферой). В силу особой роли Солнца эта система называется гелиоцентрической. Конечно, главное в выборе инерциальной системы — это выбор направления координатных осей. Выбор начала отсчета в центре инерции Солнца удобен потому, что в Солнечной системе Солнце является самым большим по массе телом. В этой системе движение планет выглядит особенно просто. Обратим внимание на то, что оси гелиоцентрической системы отсчета не участвуют во вращении Солнца. Кстати, система отсчета, координатные оси которой жестко связаны с Землей (т. е. вращаются с ней), называется *геоцентрической*. Она, как показал опыт Фуко, будет неинерциальной системой.

Итак, в гелиоцентрической системе справедливы законы динамики Ньютона. Согласно принципу относительности Галилея во всех системах отсчета, которые движутся равномерно и прямолинейно относительно гелиоцентрической, в равной степени справедливы законы Ньютона. Все эти системы мы и будем называть инерциальными системами отсчета *). Хотя число инерциальных систем бесконечно, они все же теряются среди всех возможных систем отсчета. Если бы было возможно собрать в один мешок все возможные системы отсчета, то, сунув в этот мешок руку и схватив первую попавшуюся систему отсчета, мы вытащили бы скорее всего неинерциальную систему.

Опыт Фуко является далеко не единственным опытом, позволяющим найти отклонение геоцентрической системы отсчета от инерциальной. Укажем еще один опыт такого типа. Когда бросают тяжелое тело с некоторой высоты, то оно падает не по вертикали, как это должно было быть под действием силы тяжести, а несколько отклоняется к востоку. Из отклонения движения свободно падающих тел от вертикали можно обнаружить и неинерциальность геоцентрической системы и найти инерциальную систему отсчета.

В механике существует еще один закон сохранения для замкнутых систем — закон сохранения момента импульса. Он является, так же как и закон сохранения импульса для замкнутой системы, следствием второго и третьего законов Ньютона. Вместе с тем он может быть получен как следствие второго закона и предположения об изотропности пространства. Это означает, что механика Ньютона подразумевает изотропность пространства.

Закон сохранения энергии для замкнутых систем получится как следствие этого закона Ньютона и предположения о потенциальности сил, действующих между частицами, образующими

*) В дальнейшем вместо «инерциальная система отсчета» мы часто будем ограничиваться начальными буквами — ИСО.

систему. С другой стороны, он вытекает из уравнений движения системы и предположения об однородности времени. Из этого следует, что в механике Ньютона подразумевается однородность времени.

Поэтому можно определить инерциальную систему как такую систему отсчета, по отношению к которой пространство является однородным и изотропным, а время — однородным.

Иногда определяют инерциальную систему отсчета как такую систему отсчета, которая жестко связана со свободно движущимся телом. Это определение в принципе верно, но им фактически невозможно воспользоваться для экспериментального определения ИСО. В нашем распоряжении нет «свободно движущегося тела», поскольку исключить силу тяжести невозможно. Поэтому методически правильнее определять ИСО как систему, в которой справедливы все три закона Ньютона.

Инерциальные системы выделены среди других (неинерциальных) систем отсчета не только в механике. Покоящийся в инерциальной системе отсчета электрический заряд не излучает электромагнитные волны, а покоящийся в неинерциальной системе отсчета — излучает.

Инерциальные системы отсчета играют огромную роль в физике. Именно для этих систем записаны известные нам законы физики. Переход к неинерциальным системам сопряжен со значительными трудностями. В общих чертах можно сказать, забегая вперед, что специальная теория относительности учит нас, как описывать всевозможные физические явления в любой инерциальной системе отсчета *). Но что это значит и как это фактически осуществляется? До того, как мы получим ответы на эти вопросы, нам придется проделать еще немалый путь.

§ 1.6. Абсолютное время и абсолютное пространство. Хотя, по существу, при выводе преобразований Галилея уже было сказано все то, что подразумевается в этих преобразованиях о пространстве и времени, повторим еще раз соответствующие утверждения. Обычно, когда говорят о «классической» физике, то, в частности, имеют в виду ньютоновскую механику. Взгляды Ньютона на пространство и время точно отражают классический подход к этим понятиям. Стоит внимательнее остановиться на воззрениях Ньютона еще и потому, что они соответствуют нашему повседневному опыту, очень привычны и понятны, а переход к представле-

*) Нужно отметить, что СТО может быть сформулирована также и в неинерциальных системах отсчета. Фактически СТО может использоваться в любых системах отсчета, пока нет сил тяготения (в плоском 4-пространстве-времени). Однако в той форме, которая была придана СТО Эйнштейном и которая будет развиваться в этой книге, она применима лишь к инерциальным системам отсчета.

нию о пространстве и времени, характерному для специальной теории относительности, связан с отказом от этих представлений. Более того, еще более решительный шаг от этих представлений сделан в теории тяготения Эйнштейна, которую называют иногда общей теорией относительности. Вот что можно прочесть у Ньютона *): «Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным».

Таким образом, по Ньютону, пространство представляет собой громадный пустой ящик, в который вложены материальные тела и в котором разыгрываются физические явления. Вместе с тем Ньютон знал, что в механике справедлив принцип Галилея. А это означало равноправие состояния покоя и равномерного прямолинейного движения. Как в этих условиях следует выделить «неподвижное абсолютное» пространство?

Конечно, выделить «неподвижное абсолютное» пространство, наблюдая явления механики, невозможно. Поэтому обнаружение абсолютного пространства и абсолютного движения связано уже с выходом за рамки механики. Предполагается, что оно возможно при столкновении оптических явлений. Поэтому в историческом очерке, посвященном истолкованию некоторых экспериментальных фактов (Дополнение II), будем считать, что привилегированная, выделенная система отсчета Ньютона (неподвижное абсолютное пространство) — это гелиоцентрическая система, хотя, в конце концов, выяснится, что никакой привилегированной системы вообще не существует, а существует привилегированный класс систем отсчета, в которых законы физики выглядят особенно просто, — класс инерциальных систем отсчета.

Теперь посмотрим, что писал Ньютон о времени:

«Абсолютное, истинное математическое время само по себе и по своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью».

Снова мы сталкиваемся с утверждением о том, что и время есть нечто внешнее по отношению к природе. Итак, согласно воззрениям Ньютона, время и пространство существуют сами по себе и не зависят от материальных тел, находящихся в пространстве. Конечно, представления Ньютона о пространстве и времени кажутся нам очень схоластичными. Однако не следует их недооценивать. Мы приведем небольшую выдержку из книги [11] (стр. 245):

«В беседах с одним из авторов этой книги в давно прошедшие годы Эйнштейн выражал свое глубочайшее уважение к Ньютону и, в частности, восхищение его мужеством. Он подчеркивал, что Ньютон даже лучше, чем его критики в XVII столетии, понимал

*) «Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica» (1687). Перевод на русский язык А. Н. Крылова помещен в Собрании сочинений последнего, Изд-во АН СССР, т. VII, 1936.

трудности, связанные с идеями абсолютного пространства и абсолютного времени. Однако постулирование этих понятий было в то время единственным практически осуществимым способом продвинуться в описании движения».

Конечно, возникает естественный вопрос: почему же классическая механика, опирающаяся на такие представления о пространстве и времени, которые едва ли можно разъяснить, действует столь эффективно? Но оказывается, что эти представления приближенно верны, а отклонения от них в повседневной жизни совсем незначительны. Отклонения от классических представлений отчетливо обнаруживаются лишь при изучении микрочастиц и в космических условиях, и с ними уже столкнулась современная физика; но такие наблюдения требуют создания специальных условий и достаточно сложных приборов.

В конце этого небольшого параграфа необходимо все же кратко изложить современный взгляд на эти вещи. С современной точки зрения, нет абсолютного пространства и, следовательно, нет никакого абсолютного движения. Все инерциальные системы отсчета равноправны. Специальная теория относительности показывает, что отсчет времени наступления событий оказывается различным в различных инерциальных системах отсчета. Таким образом, отсчет времени оказывается уже зависящим от состояния движения. Теория тяготения Эйнштейна идет еще дальше. С точки зрения этой теории свойства пространства и времени не заданы навсегда, а определяются находящимися в пространстве телами. С точки зрения диалектического материализма, согласно которому пространство и время — это формы существования материи, выводы теории тяготения Эйнштейна представляются куда более удовлетворительными, чем ньютоновские представления о пространстве и времени.

§ 1.7. Как физика приближалась к теории относительности. Очень полезно с точки зрения современной физики проследить за тем, как давали себя знать релятивистские эффекты задолго до построения специальной теории относительности. Этот параграф не претендует на исторический очерк (ближе к нему Дополнение II), но предназначен облегчить понимание двух следующих параграфов, где изложены, по существу, первые принципы теории.

Безусловно, первым шагом на пути к созданию специальной теории относительности было открытие принципа относительности для явлений механики Галилеем.

Возникает естественный вопрос: почему Галилей ограничил свой принцип только механикой? Ответ на него прост: во времена Галилея ничего того, что мы называем «другими разделами физики», просто не существовало. Механика практически представляла собой всю физику. Если еще учесть то, что чуть ли не до конца

XIX века пытались все физические явления объяснить на основе механики, то станет ясно, что принцип относительности, сформулированный Галилеем, охватывал в свое время «всю физику».

Следующий важный этап на пути к теории относительности — установление конечности скорости света. Этот вывод был сделан на основе астрономических наблюдений Ремером (1676 г.). До Ремера считалось, что скорость распространения света бесконечна.

Принцип относительности Галилея мог быть выражен в математической форме после того, как были записаны уравнения механики (Ньютон, «Математические начала натуральной философии», 1687 г.). Так как основными переменными в уравнениях механики являются координаты и время, то для преобразования уравнений механики при переходе от одной системы отсчета к другой, находящейся относительно первой в движении, нужны формулы преобразования координат и времени при таком переходе. Из принципа относительности Галилея вытекало, что соответствующее преобразование координат и времени должно оставлять форму законов Ньютона неизменной (§ 1.4). Эти преобразования — преобразования Галилея.

В 1851 г. в Парижском Пантеоне был поставлен опыт Фуко с маятником, наглядно продемонстрировавший вращение Земли и указавший инерциальную систему отсчета (§ 1.5). Собственно, на этом опыте можно было бы закончить то, что из механики имеет прямое отношение к теории относительности.

Принцип относительности Галилея, законы Ньютона и преобразования Галилея тесно связаны между собой. Прямым следствием преобразований Галилея является классическая формула преобразования скоростей (1.4): $v' = v - V$. В 1851 г. Физо поставил опыт, который ясно показал, что эта формула справедлива не всегда. Опыт Физо с движущейся водой схематически состоял в следующем. В системе отсчета K со скоростью V по трубке текла вода; определялась скорость света в воде. Мы можем (чисто кинематически) рассуждать так. Свяжем с движущейся водой инерциальную систему K' . В этой системе скорость света v' определяется известным соотношением $v' = c/n$, где n — показатель преломления воды. Чтобы найти скорость света в системе K , нужно просто применить формулу (1.4), тогда мы получим $v = c/n + V$. Результат же Физо (подтвержденный также современными измерениями) был

$$v = \frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Отсюда видно, что классическая формула (1.4) в данном случае несправедлива. И именно это мы хотели подчеркнуть. Что касается подробностей проведения опыта и современного его истолкования, то все это можно найти в § 3.6.

Для теории относительности очень важную роль сыграла теория Максвелла (1856—1873 гг.; теория была сформулирована в нескольких больших статьях; затем уже появился двухтомный «Трактат»). Это была первая полевая теория, в которой взаимодействие передавалось с конечной скоростью — скоростью распространения поля. Для этой скорости теория давала вполне определенное значение, в частности, для вакуума она была равна $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, где ϵ_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные. Конечно, сразу возник вопрос, удовлетворяется ли принцип относительности; другими словами, сохраняют ли свой вид уравнения Максвелла при преобразованиях Галилея. Нетрудно проверить, что преобразования Галилея изменяют вид уравнений Максвелла. Отсюда возникло подозрение, что принцип относительности не распространяется на динамику. Нужно было, чтобы прошло несколько десятков лет, чтобы выяснилось, какое «чудо» представляет собой теория Максвелла. Ничего не зная и не подозревая о теории относительности, Максвелл построил теорию, полностью удовлетворяющую ее требованиям.

Теперь, когда мы хорошо знаем, где можно было «почувствовать» влияние теории относительности, нетрудно вернуться мысленно к пугливым фактам. Теория относительности дает себя знать, когда скорости тел приближаются к скорости света в вакууме (про такие скорости говорят, что они релятивистские). Но макроскопических тел, обладающих релятивистскими скоростями, не существует. Лишь микрочастицы могут обладать скоростями, близкими к скорости света. Первой известной микрочастицей оказался электрон (Томсон, 1894—1896 гг.). Томсон определил экспериментально отношение заряда электрона к его массе. Его опыты производились на разрядных трубках, где скорости электронов далеки от скорости света. Но в 1896 г. была обнаружена естественная радиоактивность. Среди испускаемых радиоактивным веществом излучений оказался и поток электронов (они были вскоре отождествлены с электронами в разрядной трубке). Скорости этих электронов оказались уже близкими к скорости света. Когда Кауфман в 1902 г. исследовал движение таких электронов в электрическом и магнитном полях, то выяснилось, что классическое уравнение движения (второй закон Ньютона) описывает их движение неправильно. Так впервые было обнаружено отклонение от ньютоновских законов.

Подводя итоги, можно сказать, что к началу XX века стало ясно, что ньютоновская механика, преобразования Галилея справедливы не всегда, а самые быстрые из известных сигналов — световые — передаются с конечной скоростью.

Хотя макроскопических объектов, движущихся с релятивистской скоростью, не существует, под руками у людей всегда был релятивистский объект — свет. И, естественно, оптические экспе-

рименты сыграли важную роль в истории СТО: с истолкованием оптических экспериментов связано возникновение гипотезы о наличии «светопосной среды». Отказ от этой гипотезы стоил немалых усилий, но сейчас вспоминать о ней стоит лишь как о странице в истории физики (см. Дополнение II).

§ 1.8. Обобщение принципа относительности Галилея. Принцип относительности Галилея распространялся только на явления механики. Мы обнаружили, что второй закон Ньютона, выраженный в дифференциальной форме, в сочетании с преобразованиями Галилея удовлетворял принципу относительности. С формальной точки зрения это означало, что при преобразованиях Галилея уравнение (1.5) оставалось неизменным, лишь менялись обозначения переменных. Естественно, возникает вопрос: почему принцип относительности должен распространяться только на механические явления? Почему нельзя считать, что все физические явления происходят одинаково во всех инерциальных системах, если начальные условия этих явлений заданы одинаково? Другими словами, почему нельзя допустить полного равноправия всех инерциальных систем отсчета по отношению ко всем физическим явлениям?

Этот вопрос не очень волновал физиков вплоть до середины XIX века, потому что для них вся физика сводилась к механике. Но уже к середине XIX века стало ясно, что физика к механике не сводится. К этому же времени стало складываться убеждение в том, что существует всеобщая связь между явлениями, между физическими явлениями в частности. Деление физики на «механику», «электричество», «теплоту» и т. д. (оправданное тем, что каждая группа явлений имела собственный набор основных уравнений) приобрело уже скорее педагогический и учебный характер, нежели деление по существу. Если приглядеться внимательнее, то даже в «чисто механическом» явлении можно усмотреть проявление закономерностей иного рода. Соударение бильярдных шаров всегда приводится как классический пример из механики. Но в момент соударения, когда шары несколько сплющены, вступают в игру силы упругости, определяемые электромагнитными силами. Следовательно, никаких «чисто механических» явлений в природе быть не может. Но тогда ясно, что принцип относительности должен распространяться на «всю физику» или же не выполняться вообще.

Таким образом, с точки зрения физики конца XIX века распространение принципа относительности на все физические явления было вполне естественным. Но такое обобщение принципа относительности Галилея как раз и есть то, что называют первым постулатом Эйнштейна или принципом относительности Эйнштейна.

Однако сразу же обнаруживается, что уравнения электродинамики противоречат равноправию инерциальных систем отсчета.

Прежде всего, если рассмотреть основную систему уравнений электродинамики — систему уравнений Максвелла, то при преобразованиях Галилея они меняют свой вид, т. е. не сохраняют свою форму. Но из этого следует, что электромагнитные явления описываются по-разному в различных ИСО; иными словами, на электромагнитные явления принцип относительности не распространяется. В частности, это означает, что в той системе отсчета, в которой уравнения Максвелла записываются в обычном виде (см. гл. 6), скорость распространения электромагнитных волн (света)

равна $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, а во всех других системах отсчета, движущихся относительно нее, эта скорость уже другая. Но вакуум занимает особое место по отношению к системам отсчета. Ведь вакуум потому и вакуум, что в нем нет «среды», обладающей массой покоя. С материальной средой всегда можно связать систему отсчета, т. е. выбрать такую систему отсчета, в которой среда покоится как целое или в ограниченной области. Но эта система отсчета является выделенной. Равноправная с ней, но движущаяся относительно нее система отсчета должна обладать тем свойством, что в ней среда также покоится. А это уже иная физическая ситуация. Итак, наличие среды всегда выделяет одну систему отсчета среди остальных. Но в вакууме выделить такую систему нельзя, потому что не существует системы отсчета, в которой он покоится. Значит, по отношению к вакууму все системы отсчета равноправны. Отсюда логически следует (при допущении полного равноправия всех инерциальных наблюдателей), что скорость электромагнитных волн (света) должна быть одной и той же, равной $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, во всех ИСО.

Классическая же формула преобразования скоростей (1.4) показывает, что это не так. Пусть в инерциальной системе отсчета K скорость света в вакууме равна c . Тогда в другой инерциальной системе K' скорость света в вакууме c' равна $c - V$. Значит, ско-

рость света в вакууме c определяется величиной $1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ только в какой-то одной привилегированной системе отсчета. Итак, в области электромагнитных явлений принцип относительности представлялся несправедливым.

Рассуждение, приведенное выше, опиралось на фундаментальное предположение, совершенно неприемлемое для физики XIX века, а именно: электромагнитные волны (свет) могут распространяться в вакууме, или — иначе — для их распространения не нужно присутствие какого-либо вещества. Это очень трудный для понимания пункт при переходе к релятивистской физике от классической.

Но что можно было сделать в такой ситуации? Логически открылись три возможности:

1) Можно было допустить, что принцип относительности распространяется только на механику, к электродинамике он не относится и в электродинамике есть «абсолютная» система отсчета. Но, как было сказано выше, такая возможность просто исключается, если иметь в виду всеобщую связь физических явлений.

2) Можно было бы считать, что принцип относительности имеет универсальную применимость, а поскольку система уравнений Максвелла не удовлетворяет этому принципу (она меняет свой вид при преобразованиях Галилея), от нее нужно отказаться. Но система уравнений Максвелла показала себя как безотказная и исчерпывающая теория в рамках одной инерциальной системы отсчета (лабораторной). С другой стороны, ньютоновская механика и связанные с ней преобразования Галилея оказались справедливыми не всегда. Поэтому систему уравнений Максвелла разумно было бы сохранить.

3) Если считать, что принцип относительности справедлив для всех явлений природы и система уравнений Максвелла правильна, то переход от одной инерциальной системы отсчета к другой уже не может описываться преобразованиями Галилея (изменяющим вид уравнений Максвелла). С другой стороны, новое преобразование не может оставить форму уравнений механики неизменной. Следовательно, нужно будет изменить уравнения механики так, чтобы новое преобразование оставляло их неизменными.

Последняя возможность кратко формулирует программу, реализуемую специальной теорией относительности: 1) принцип относительности распространяется на все явления природы; 2) скорость электромагнитных волн в вакууме одна и та же во всех ИСО (как следствие сохранения вида уравнений Максвелла).

Но как же должны выглядеть преобразования координат и времени, удовлетворяющие двум поставленным требованиям? Такими преобразованиями, как выяснится, будут преобразования Лоренца, и мы подробно займемся ими в следующей главе. А в заключение заметим следующее.

Как только принцип относительности Галилея был распространен на все физические явления, он стал подлинным принципом физики. По-видимому, целесообразно делать различие между законами и принципами физики. Когда говорят о законах физики, подразумевают их справедливость для ограниченного круга физических явлений. Например, законы Ньютона описывают явления механики. Уравнения Максвелла относятся к электродинамике и являются поэтому законами электродинамики. Три закона термодинамики относятся к тепловым явлениям. Принципы же физики имеют универсальное значение, они распространяются на все физические явления.

Наиболее известным принципом физики является принцип сохранения энергии. Знаменитая книга М. Плака, посвященная сохранению энергии, именно так и названа: «Принцип сохранения энергии» (ГТТИ, 1936). Мы верим в то, что закон сохранения энергии справедлив для всех физических явлений. Точно так же мы убеждены, что для всех физических явлений справедлив закон сохранения импульса. Принципы относительности занимает свое место в физике в одном ряду с принципом сохранения энергии и импульса.

§ 1.9. Скорость света в вакууме. Скорость света в вакууме занимает особое место в природе, потому что — по современным воззрениям — она является наибольшей возможной скоростью передачи взаимодействия между телами. О передаче взаимодействия (т. е. передаче некоторого «действия» со стороны одного тела на другое) часто говорят как о передаче сигнала (именно этот термин больше всего в ходу в теории относительности). Передать сигнал — это значит передать энергию и импульс (теория относительности учит, что они неразделимы, см. § 5.5), способные «включить» некоторую систему (например, некоторый спусковой механизм).

Ниоткуда не вытекает заранее, что в природе существует верхний предел для скорости передачи сигналов. Однако и теория, и опыт показывают, что все известные взаимодействия распространяются с конечной скоростью, а наибольшей скоростью передачи сигнала является скорость света в вакууме (напомним, что эта скорость является также скоростью распространения электромагнитных волн любой частоты в вакууме). Как уже упоминалось, классическая теория молчаливо предполагала, что сигнал может распространяться бесконечно быстро.

Если принять, что в природе существует предельная скорость распространения сигналов, то ее абсолютная величина должна быть одна и та же во всех инерциальных системах отсчета. Ведь все эти системы, согласно принципу относительности, равноправны, и нельзя указать физический опыт, в результате которого можно было бы обнаружить различие между ними. Если бы предельная скорость распространения взаимодействий была разной в разных инерциальных системах отсчета, стало бы возможным отличить одну инерциальную систему от другой. Если считать принцип относительности универсальным, это невозможно. Отсюда сразу же вытекает, что скорость света в вакууме должна быть одной и той же в любой инерциальной системе отсчета.

А если источник движется к наблюдателю или наблюдатель движется к источнику? Такое движение не может изменить величины предельной скорости передачи сигнала. Следовательно, скорость света в вакууме не может зависеть ни от движения источника, ни от движения наблюдателя.

Очевидно, что скорость света в вакууме, тем самым, наделается уникальными свойствами. Все скорости являются относительными, т. е. меняются при переходе от одной инерциальной системы к другой. А абсолютная величина скорости c остается всегда одной и той же. Хотя среди инерциальных систем отсчета нет привилегированной, в них имеется одна привилегированная скорость. Оба эти обстоятельства неразрывно связаны с тем, что электромагнитные волны могут распространяться в вакууме; иными словами, для их распространения не требуется никакой материальной среды. Конечно, предположение о том, что существует привилегированная (инвариантная) скорость, явно нарушает классическую схему, т. е. соотношения (1.4), а следовательно, и (1.2) и (1.3).

Но, как бы ни были строги и красивы логические рассуждения, верховным судьей в физике был и всегда останется эксперимент. Эксперимент совершенно недвусмысленно подтверждает два обстоятельства: 1) в данной ИСО скорость света в вакууме одинакова во всех точках и по всем направлениям; 2) во всех ИСО эта скорость имеет одно и то же значение. Речь идет об опытах Майкельсона и Кеннеди — Торндайка; они описаны в Дополнении II.

ПОСТУЛАТЫ ЭЙНШТЕЙНА. ИНТЕРВАЛ МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

§ 2.1. Постулаты Эйнштейна. Конец предыдущей главы был посвящен разъяснению двух основных положений СТО, называемых постулатами Эйнштейна. Ввиду их важности мы еще раз повторим их с некоторыми комментариями.

П о с т у л а т I. *Все тождественные физические явления в инерциальных системах отсчета при одинаковых начальных условиях протекают одинаково.* Другими словами, среди ИСО не существует «привилегированной» системы и невозможно обнаружить состояние абсолютного движения.

Этот постулат распространяет принцип относительности Галилея на все явления природы. Он раз навсегда кончает с абсолютным пространством: если все инерциальные системы отсчета равноправны, то среди них нет привилегированной системы отсчета. Абсолютное же пространство как раз и было привилегированной системой. Точно так же отпадает и вопрос об «абсолютном» движении (в вакууме), которое подразумевалось как движение относительно абсолютной системы отсчета (ср. § 1.6).

П о с т у л а т II. *Скорость света в вакууме одинакова по всем направлениям и в любой области данной инерциальной системы отсчета и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.*

Часто к этому постулату добавляют еще, что скорость света в вакууме не зависит от скорости источника. Это, однако, сразу следует из постулата II в той форме, в которой он выписан выше. Действительно, с источником всегда можно связать инерциальную систему отсчета (если он движется неравномерно и по кривой, то мгновенно сопутствующую инерциальную систему). В этой системе источник покоится, а все остальные инерциальные системы движутся относительно него (а он относительно них). Согласно постулату II скорость света во всех этих системах одинакова, но это и означает, что она не зависит от скорости источника. Что касается движения наблюдателя, то в вакууме существует лишь относительная скорость источника и наблюдателя, и поэтому предыдущее рассуждение исчерпывает вопрос.

Следует четко понимать, что подразумевает постулат II. Для этого представим себе, что в системе K измеряется скорость света следующим образом. Из точки x_1 в момент времени t_1 посылается вдоль оси x световой сигнал, который приходит в точку x_2 в момент времени t_2 . Тогда $c = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$. Эти же два события —

посылка и прием сигнала — рассматриваются из системы K' . Посылка сигнала для наблюдателя из системы K' происходит в точке x'_1 в момент t'_1 , а прием — в точке x'_2 в момент t'_2 . И несмотря на то, что системы K и K' находятся в относительном движении, направленном как раз по общей оси x, x' , мы должны получить, что отношение $(x'_2 - x'_1)/(t'_2 - t'_1)$ тоже равно c . С точки зрения «здравого смысла» такого быть не должно (нарисуйте для себя схему опыта). Но именно этого требует второй постулат.

Мы сформулировали постулат II, по существу, так, как это было сделано в работе Эйнштейна 1905 г. Однако в папе время, вероятно, целесообразнее формулировать его иначе. А именно исходить из того, что в природе существует предельная скорость передачи сигнала (взаимодействия). Это — главное утверждение. Далее полагают, что этой предельной скоростью является скорость электромагнитных волн (света) в вакууме. Последнее утверждение не является обязательным — в принципе СТО не утратила бы смысла, если бы предельная скорость оказалась иной, но в СТО используется именно это предположение. Из того, что скорость света в вакууме является предельной скоростью передачи взаимодействий, непосредственно вытекает, что она должна иметь одно и то же значение во всех ИСО (ср. § 1.9)

После того как сформулированы первые принципы теории относительности — два постулата Эйнштейна, — можно сформулировать общую задачу специальной теории относительности. Ее основа — это принцип относительности: равноправие всех инерциальных систем отсчета по отношению ко всем физическим явлениям. Теория относительности обязана дать такое описание физических явлений, которое было бы одинаковым во всех инерциальных системах отсчета. Но если в нашем распоряжении есть уравнения, описывающие ту или иную группу явлений, то эти уравнения должны иметь одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета (в каждой системе отсчета в своих переменных). Вспомним, что в уравнения механики и электродинамики существенным образом входят координаты и время наступления события. При переходе от одной инерциальной системы к другой координаты и время наступления события преобразуются. Преобразования Галилея изменяют вид уравнений Максвелла, но, поскольку мы хотим сохранить уравнения Максвелла, как правильные уравнения электромагнитного поля, во всех инерциальных системах, нам следует найти такие преобразования координат и времени, которые сохраняют вид максвелловских уравнений. Такими преобразованиями окажутся преобразования Лоренца.

Однако преобразования Лоренца непосредственно вытекают и из постулатов Эйнштейна. Дело в том, что теория Максвелла была построена с самого начала как релятивистская. Внутренняя причина этого состоит в том, что она содержала в себе правильное описание свойств самого релятивистского объекта — света.

Таким образом, найдя преобразования координат и времени события, удовлетворяющие постулатам Эйнштейна, мы должны

позаботиться о том, чтобы основные уравнения физики были одинаковыми во всех инерциальных системах, т. е. были бы ковариантными по отношению к этим преобразованиям. Смысл термина «ковариантный» будет разъяснен в § 4.3. Сейчас же необходимо остановиться на том, что значит «основные уравнения» физики.

Основными законами в механике мы называем уравнения Ньютона, в электродинамике — уравнения Максвелла, в термодинамике — уравнения, выражающие первое и второе начала.

Относительные величины были и в классической физике — например, скорости, координаты, направления скоростей, — но специальная теория относительности добавляет к ним — несколько неожиданно для нашей интуиции — относительность промежутков времени между событиями и относительность длин масштабов (расстояний). Однако это и есть та «цепан», которую приходится платить за то, чтобы реализовать принцип относительности по отношению ко всем физическим явлениям.

И все же самое главное в теории относительности, вопреки ее названию, — это совсем не относительность различных величин, т. е. их зависимость от выбора системы отсчета. Суть теории относительности как раз в обратном. Теория относительности показывает, что законы природы в инерциальных системах отсчета не зависят от выбора системы отсчета, не зависят от положения и движения наблюдателя, а результаты измерений в различных системах отсчета могут быть сопоставлены. Говоря философским языком, теория относительности подчеркивает объективный характер законов природы, а вовсе не относительность знания.

Конечно, пытаться изменить исторически сложившееся название — кстати, оно принадлежит не Эйнштейну, а было предложено Планком в 1906 г. — дело безнадежное. Однако есть одна деталь, на которую можно обратить внимание. Спорят, как правильно говорить: «специальная» или «частная» теория. Едва ли этот спор имеет существенное значение. По смыслу речь идет об ограничении теории рамками инерциальных систем отсчета. По существу это ограничение сводится к тому, что теория справедлива в отсутствие полей тяготения или — практически — в слабых полях тяготения. Поэтому самым правильным названием было бы название «ограниченная теория относительности», принятое во французской литературе.

Хотя постулаты Эйнштейна являются первыми принципами теории относительности, все же их недостаточно для ее построения. Принципиально важным для теории служит построение релятивистской системы отсчета, к чему мы и переходим.

§ 2.2. Релятивистская система отсчета. При построении релятивистской системы отсчета, так же как и при построении всей теории, безусловно подразумевается справедливость обоих посту-

латов Эйнштейна. Кроме того, мы будем предполагать, что скорость света в вакууме — это предельная скорость передачи сигнала. Последнее утверждение не содержится в постулатах Эйнштейна. Однако, как мы увидим ниже, оно неизбежно должно входить в теорию, если мы хотим, чтобы в теории действовал принцип причинности (см. § 3.4).

В § 1.1 мы подробно остановились на том, как строится система отсчета в классической механике. Там было указано, что в каждой системе отсчета достаточно одних часов, поскольку предполагается, что можно использовать бесконечно быстрые сигналы. Но в СТО явно учитывается существование предельной скорости сигнала, и если скорости, которые нас интересуют, приближаются к этой предельной, то пользоваться одними часами становится неудобно (и даже невозможно). Но именно такие скорости и интересны для теории относительности.

Поэтому к координатной системе (построение которой не отличается от построения, изложенного в § 1.1) добавляется еще набор часов. В принципе в СТО предполагают, что часы помещены в каждой точке пространства. Практически в этом необходимости нет, но в любой точке, где определяется время наступления события, в принципе должны быть часы. Все часы данной системы отсчета неподвижны в этой системе.

В СТО предполагается, что можно иметь в своем распоряжении столько идеальных тождественных часов, сколько нам нужно. Это предположение легко реализуется в наше время. Согласно квантовой механике все микрочастицы одного сорта тождественны. В частности, характерные частоты колебаний атомов одного сорта в точности совпадают. Если за часы принять сами атомы, а за эталоны времени — характерные периоды их колебаний, мы получим достаточное количество нужных часов.

Точно так же можно поступить и с эталонами длины. Длина волны характерного излучения данного атома вполне может быть выбрана за единицу длины. Убеждение в том, что длина волны излучения заданного атома может быть неизменным эталоном длины, существовало даже до возникновения квантовой механики: именно так была увековечена длина метра Майкельсоном (начало XX века).

Когда мы рассматриваем две ИСО, находящиеся в относительном движении, то масштабы длины и часы каждой системы неподвижны только по отношению к «своей» системе отсчета. Можно ли считать, что мы располагаем тождественными масштабами и часами в разных ИСО, если, скажем, в рамках одной системы отсчета такие часы и масштабы имеются? В литературе можно встретить рассуждение о том, что масштабы длины и часы могут передаваться из одной ИСО в другую. Безусловно, так поступать не следует. Передавая часы или эталоны длины из одной ИСО в другую, мы

сообщаем им ускорение. В принципе ускорение меняет длину эталонов и ход часов. Простые примеры: бросьте часы или линейку на каменный пол. Часы могут просто остановиться, а линейка — сломаться. Даже атомные часы ломаются, когда разрушаются атомы. Все это — действие ускорения.

Но чтобы получить тождественные эталоны длины и времени в разных ИСО, нет никакой необходимости что-либо передавать из одной системы в другую. В любой системе отсчета достаточно взять чистое вещество, излучение которого обеспечит нас необходимыми эталонами.

Следует подчеркнуть важность того, что в любой ИСО можно иметь эталоны длины и времени в точности такие же, как и во всех остальных. Действительно, принцип относительности и равноправие всех ИСО в сочетании с одинаковостью эталонов длины и времени позволяют ввести полную тождественность этих систем отсчета.

Итак, в каждой ИСО есть столько подходящих часов, сколько требуется. Время наступления события в данной точке — это показание стрелки часов, находящихся в той точке, где наступило событие, в момент наступления события. Если два события наступили в разных точках пространства, а часы в каждой из этих точек показали один и тот же отсчет в момент наступления этих событий, мы должны считать события одновременными. Но одновременность событий, наступающих в разных точках пространства, зависит, очевидно, от того, как согласовано начало отсчета времени у этих часов (ход часов предполагается абсолютно одинаковым). Таким образом, определение одновременности событий и согласование начала отсчета времени у всех часов данной ИСО (синхронизация часов) — это одно и то же. Следует подчеркнуть, что синхронизация часов (т. е. установление одновременности событий) может производиться по-разному. Преимущества синхронизации, предложенной Эйнштейном, будут ясны из дальнейшего. Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что одновременность событий *определяется*, причем это определение можно произвести отнюдь не единственным образом.

Приведем пример, из которого видно, насколько важно уметь определять одновременность событий. Как определяется скорость частицы? Пусть частица движется вдоль оси x . Для определения ее скорости нужно знать положение частицы в момент t_1 (пусть это будет x_1) и положение частицы в момент t_2 (скажем, x_2). Если движение равномерно, то скорость найдется как $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$. Но приход частицы в точку x_1 отмечается часами, расположенными в этой точке, а приход в точку x_2 — часами в точке x_2 . Чтобы определить скорость, нужно быть уверенным, что часы, расположенные в точке x_2 , показывали в момент t_1 то же самое, что и часы, расположенные в x_1 . Только в этом случае определение

скорости будет иметь смысл. Но это и означает, что часы должны быть синхронизованы.

После того как мы выяснили, что установление одновременности и синхронизация часов — это одно и то же, перейдем к вопросу о том, как синхронизируются часы в рамках одной ИСО. Первое, что приходит в голову, — это собрать часы в одном месте, сверить их, а затем расставить по своим местам. Вместе с Эйнштейном мы откажемся от этой процедуры по следующей причине: всякое передвижение часов связано с тем, что часы подвергаются ускорению. В принципе, всякое ускорение влияет на ход часов. Следовательно, лучше сначала поставить часы на свое место, а затем уже их сверить *).

Как можно осуществить сверку (синхронизацию) часов, расположенных в разных точках пространства? Пусть в начале координат данной ИСО находятся часы, которые мы назовем опорными (они, конечно, ничем не отличаются от остальных). От них можно послать сигнал к любым часам данной ИСО. При этом предполагается, что расстояния от начала отсчета до всех часов известны (для установления таких расстояний часы не нужны!). Зная скорость распространения сигнала, можно найти время его распространения от опорных часов до любых часов системы. Если условиться, что сигнал от опорных часов посылается в момент $t = 0$, то как раз это время распространения должны показывать синхронизируемые часы в момент прихода сигнала к этим часам. Хотя, вообще говоря, можно воспользоваться любым сигналом; имея в виду синхронизацию часов во всех ИСО, удобнее всего выбрать световой сигнал в вакууме, поскольку во всех ИСО он распространяется с одинаковой скоростью. Использование для синхронизации часов светового сигнала в вакууме — еще один элемент, придающий полное равноправие всем ИСО.

Итак, «агент» синхронизации — это световой сигнал. Опишем теперь процесс синхронизации по Эйнштейну (в данной ИСО).

1. Часы расставлены по своим местам и запущены. Координаты точек, где находятся часы, известны, следовательно, известны расстояния всех часов от опорных (расположенных в начале координат).

2. От опорных часов в условно выбранный момент t_1 посылается световой сигнал, идущий в вакууме по известному пути к синхронизирующим часам. Приход светового сигнала к часам отмечается прибором или наблюдателем.

3а. Показанием часов в момент прихода сигнала нужно считать $t = t_1 + r/c$, где r — пройденное светом расстояние от опорных

*) Существует обширная литература, в которой «показывается», что бесконечно медленная транспортировка часов не влияет на их ход. Это, конечно, физически вполне правдоподобно. Но в релятивистской теории важны релятивистские скорости и релятивистские расстояния, где подобная процедура едва ли интересна.

часов. Тем самым «начальное» показание часов выбрано, часы «сверены» с опорными.

Можно воспользоваться и другим, эквивалентным способом.

3б. Во всех точках, где находятся часы, поставлены зеркала, от которых свет отражается обратно к источнику. Если опорные часы отметили время возвращения сигнала t_2 , то отмеченному часами у зеркала моменту времени следует приписать значение

$$t = t_1 + \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

В этой процедуре синхронизации часов есть одна тонкость. Когда мы используем прием 3а, мы считаем скорость света c известной. Но мы уже видели, что для определения скорости движения в одном направлении необходимо двое синхронизованных часов. С другой стороны, скорость света обычно определяют при движении луча по замкнутому пути. В частности, скорость света при наличии одних часов может быть определена с помощью отражения от зеркала. Для этого нужно использовать прием 3б и знать расстояние от опорных часов до зеркала. Если это расстояние равно r , то $c = 2r/(t_2 - t_1)$. Однако, если скорость света при движении «туда» не равна скорости света при движении «обратно», этого мы установить не можем. Определить это опытным путем нельзя просто потому, что наши часы синхронизованы так, что для скорости света они дадут значение c . Однако теория относительности исходит из того, что скорость света в вакууме одинакова по всем направлениям; с другой стороны, вся совокупность опытных фактов не противоречит ни этому утверждению, ни следствиям теории относительности.

Таким образом, мы пришли к релятивистской системе отсчета координатной системе (с жесткими осями) и неподвижно закрепленными в этой системе синхронизованными часами. О таких часах данной ИСО мы будем говорить как о «наборе» часов. Процедура синхронизации по Эйнштейну такова, что она может быть проведена одинаковым образом в любой ИСО.

Согласно принятому правилу синхронизации часов одновременность наступления событий можно определять еще и так. Пусть два события наступают в точках пространства, находящихся на равных расстояниях от третьей точки. Если в момент наступления обоих событий в эту третью точку из места наступления событий посылаются световые сигналы, то события считаются одновременными, если оба сигнала приходят в третью точку в один и тот же момент времени.

Конечно, в рамках СТО можно рассматривать ускоренное движение тел, но, безусловно, нельзя рассматривать ускоренно движущихся (относительно инерциальных) систем отсчета. Поскольку эталоны длины и часы неподвижно скреплены со своей ИСО, ясно, что ускорять и эталоны и часы не следует. В противном случае

рассмотрение действия ускорения на эталоны длины и часы вынудило бы нас рассматривать конкретное их устройство и тем самым сразу бы лишило теорию ее всеобщего значения.

§ 2.3. Прямые следствия постулатов Эйнштейна (несколько мысленных экспериментов). Два основных следствия постулатов Эйнштейна — «относительность длины масштабов» и «относительность промежутков времени между событиями» — могут быть получены непосредственно из самих постулатов. Чаще всего их получают из преобразований координат и времени события, совместимых с постулатами Эйнштейна (преобразований Лоренца). Но это просто удобный путь (мы им воспользуемся в § 3.2), вовсе не обязательный. Сейчас мы опишем несколько «мысленных экспериментов», с помощью которых получим нужные следствия. Мысленные эксперименты играют заметную роль в обоснованиях СТО; они представляют собой некоторые воображаемые эксперименты, которые вовсе не обязательно фактически осуществлять. По существу, это просто рассуждения, позволяющие получить определенные следствия из заданных предпосылок *). Сейчас мы переходим к изложению нескольких мысленных экспериментов, результаты которых мы впоследствии получим еще раз, обсуждая следствия преобразований Лоренца.

Мы начнем с очень простого мысленного эксперимента, который качественно покажет нам относительность одновременности, если выполняется второй постулат Эйнштейна, — результат, который мы получим еще разными способами. Эксперимент ставится на эйнштейновском поезде; так называют любой поезд, идущий равномерно и прямолинейно, но (желательно!) с релятивистской скоростью. В мысленном опыте можно допустить и такое. В поезде точно определена его середина (это делается в системе отсчета поезда и не вызывает затруднений). В середине поезда сидит наблюдатель 1, а на станции сидит наблюдатель 2. От концов поезда, равноудаленных от наблюдателя 1, к нему посылаются световые сигналы. Мысленный эксперимент ставится так, что сигналы, идущие от концов поезда, приходят к наблюдателю 1 как раз тогда, когда он поравняется с наблюдателем 2 (в мысленных экспериментах не принято интересоваться, как такое можно практически осуществить). Для нас существенно, какие выводы сделают оба наблюдателя из одного и того же факта одновременного прихода сигналов в середину поезда.

Наблюдатель 1. Световые сигналы должны пройти до меня одинаковые расстояния. Следовательно, они посланы одновременно.

*) Не следует думать, что «мысленные эксперименты» (Gedankenexperimente) характерны только для теории относительности. Серию «мысленных экспериментов», относящихся к квантовой механике, можно найти в дискуссии Н. Бора с А. Эйнштейном, УФН 66, 571 (1958).

Наблюдатель 2. Световые сигналы попали ко мне, когда мимо меня проходила середина поезда, следовательно, они были посланы несколько раньше. Но «раньше» голова поезда была ближе ко мне, чем его хвост. Значит, от хвоста сигнал нужно было послать с некоторым опережением, чтобы он пришел ко мне одновременно с сигналом, идущим от головы. Следовательно, сигнал от хвоста послан раньше, чем от головы.

Из этих простых рассуждений ясно, что два одновременных события в одной системе отсчета (в нашем примере — в системе поезда) отнюдь не одновременны в другой (в нашем примере — в системе «Земля»).

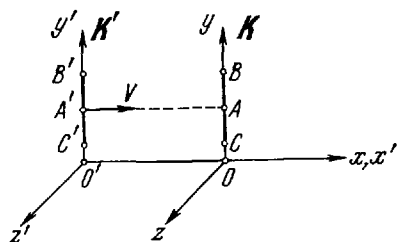


Рис. 2.1. «Мысленный эксперимент», позволяющий установить, что длина линеек, расположенных перпендикулярно направлению относительного движения координатных систем, не меняется при измерении их в любой ИСО.

Все последующие мысленные эксперименты будут уже иметь количественный характер. Мы всегда будем рассматривать две ИСО, обозначаемые K и K' , относительная скорость которых направлена по общей оси x, x' (см. рис. 1.2). Предполагается, что в начальный момент $t = t' = 0$ декартовы оси обеих систем совпадают.

а) Сравнение длин параллельных линеек, расположенных перпендикулярно направлению относительного движения двух ИСО.

Возьмем в каждой из систем отсчета K и K' линейки одинаковой длины. В каждой из систем положим свою линейку вдоль соответствующей оси y и y' . Пусть это будут равные линейки BC и $B'C'$ (рис. 2.1). В каждой из систем отсчета можно найти середины линеек, пусть это будут точки A и A' . Пусть линейки движутся так, что при совпадении осей y и y' середины линеек, т. е. точки A и A' , совпадают. Системы K и K' в момент времени $t = t' = 0$ геометрически тождественны. Вопрос заключается в том, какую длину линейки $B'C'$ измерит наблюдатель из системы K и какую длину линейки BC измерит наблюдатель из K' . Каждый из наблюдателей должен отметить положение начала и конца идущей мимо него линейки одновременно в своей системе отсчета. Для рассматриваемого случая одновременность удобно установить следующим образом. Когда точки C и B' оказываются на оси y , то из этих точек посылаются световые сигналы в точку A' . В системе K' отрезки $A'C'$ и $B'A'$ равны, скорость света c одна и та же, и в точку A' сигналы придут одновременно. Значит, C' и B' одновременно в системе K' пересекут ось y . В точности так же точки C и B одновременно в системе K' пересекут ось y' с точки зрения системы K . В момент времени $t = t' = 0$ (когда оси

y и y' совпадают) произведем измерения длины линейки $B'C'$ с точки зрения системы K и длины линейки BC с точки зрения K' . Таким образом, на совпадающих друг с другом осях y и y' оказываются одновременно четыре точки C, C', B, B' , и, следовательно, наблюдатели в обеих системах могут сравнить свои результаты. Если бы оказалось, что $CB > C'B'$ или, наоборот, $C'B' > CB$, то это позволило бы указать различие между системами отсчета K и K' , что недопустимо согласно исходному предположению о равноправии всех инерциальных систем отсчета. Поэтому наблюдатели из K и K' могут обнаружить только, что $CB = C'B'$.

Следовательно, длины (и единицы длины) в направлении, перпендикулярном направлению относительного движения, остаются неизменными при их измерении в любой ИСО. Но это означает, что и координаты точек по осям, перпендикулярным направлению движения, также не меняются. Следовательно, точно так же, как и при преобразованиях Галилея,

$$y' = y, \quad z' = z. \quad (2.1)$$

б) *Сравнение хода часов в системах K и K' .* Наблюдая за ходом часов в двух системах K и K' , движущихся относительно друг друга, можно сравнивать только показания одних часов в одной системе с показаниями нескольких часов в другой системе, поскольку двое часов из разных систем отсчета сходятся в одной и той же точке пространства всего лишь один раз. Как минимум, в одной из систем должна быть пара часов, которые, как предполагается, синхронизованы между собой способом, о котором было рассказано в § 2.2 этой главы. Для определенности будем сравнивать одни часы в системе K' с двумя часами системы K .

Пусть в системе K' в начале O' расположены часы и источник света (рис. 2.2а). На расстоянии z'_0 от источника света (и часов) в направлении, перпендикулярном направлению относительного движения, на оси z' установлено зеркало. Световой сигнал от источника направляется на зеркало, откуда, отразившись, вернется в точку O' через промежуток времени $\Delta t' = 2z'_0/c$. В системе K и источник света и зеркало покоятся, поэтому распространение происходит вдоль одной прямой (оси z') «туда» и «обратно».

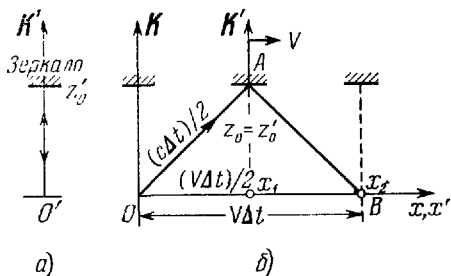


Рис. 2.2. «Мысленный эксперимент», из которого следует, что промежуток собственного времени между двумя событиями всегда оказывается меньше, чем промежуток времени между двумя теми же самыми событиями, отмеченными по двум часам любой другой системы отсчета (опыт со «световыми часами»). а) К расчету собственного промежутка времени между моментами послышки и приема светового сигнала в начале системы координат O' . б) К расчету промежутка времени между теми же событиями в системе отсчета K , относительно которой источник света и зеркало движутся.

Распространение этого же сигнала рассматривается теперь в системе K , относительно которой источник и зеркало вместе с системой K' движутся вправо со скоростью V . Хотя посылка сигнала происходила из двух совпадающих начал отсчета O и O' , отражение света от зеркала произойдет уже в какой-то точке x_1 системы K , а прием сигнала — в точке x_2 оси x . Таким образом, в системе K путь сигнала выглядит уже как две стороны равнобедренного треугольника. Так как путь, проходимый светом в системе K , больше, чем путь света в системе K' , можно ожидать, что промежуток времени Δt между посылкой и приемом сигнала, отсчитанный в K , будет больше, чем $\Delta t'$. Действительно, наблюдатель из системы K найдет, что два события — испускание света из точки O' и приход света в точку O' — произойдут в двух различных точках пространства — O и B (рис. 2.2б). Промежуток времени Δt между двумя этими событиями в системе K будет измерен уже двумя часами, отстоящими друг от друга на расстоянии $V \Delta t$ по направлению движения. Во всех системах отсчета скорость света равна c ; поэтому, разделив длину боковых сторон треугольника OAB на скорость света c , мы получим промежуток Δt в неявной форме:

$$\Delta t = 2 \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{V \Delta t}{2}\right)^2} / c.$$

Определяя из последнего равенства Δt , получим, что

$$\Delta t = \frac{2z_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma \frac{2z_0}{c},$$

где $\Gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$.

Поскольку $z_0 = z'_0$, то

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - B^2}} = \Gamma \Delta t', \quad (2.2)$$

где введено обозначение $B = V/c$. В системе K' оба события произошли в одном и том же месте, следовательно, измерялись одними и теми же часами. Интервал времени между событиями, отсчитанный по одним и тем же часам (что означает наступление событий в одной и той же точке пространства), называется *интервалом собственного времени* для этих событий. Конечно, интервал времени, начальный и конечный моменты которого отмечаются в различных точках системы отсчета и, следовательно, различными часами, уже не будет интервалом собственного времени между событиями. В рассмотренном примере интервалом собственного времени является $\Delta t'$. Из формулы (2.2) видно, что промежуток времени между событиями оказывается наименьшим, если он опре-

деляется в той системе отсчета, где эти события наступают в одной и той же точке пространства. Как мы увидим в § 3.4, можно указать условия, при которых существует такая система отсчета, в которой два заданных события наступят в одной точке.

Итак, мы получили важнейший вывод: промежуток времени между двумя событиями — величина относительная; он зависит от выбора системы отсчета. Ничего похожего в классической физике не было, промежутки времени имели абсолютный характер.

На этом примере хорошо видно также, что и отсчеты времени в разных системах должны быть различными. Когда начала отсчета O и O' совпадали, то по нашему условию часы из K и K' , находящиеся в этой точке, отметили моменты времени $t_1 = 0$ и $t'_1 = 0$. Когда световой сигнал вернулся в O' , то часы из K' отметили время $t'_2 = t'_1 + \Delta t'$. Но в этот же самый момент в этой же самой точке находятся часы системы K (не те, которые были в O , а другие, но синхронизованные с ними). Их показание будет уже $t_2 = t_1 + \Delta t$. Как мы уже установили, $\Delta t \neq \Delta t'$, следовательно, показания часов будут разными. Это и означает, что моменты наступления событий отсчитываются по-разному в разных системах отсчета. Заметим, что этот расчет показаний часов в системе K полностью соответствует правилу синхронизации часов по Эйнштейну, изложенному в § 2.2.

в) *Сравнение длины линеек, расположенных параллельно направлению относительной скорости.* Система отсчета, в которой покоится тело, является для этого тела собственной системой отсчета. Такую систему обычно принято обозначать K^0 . Допустим теперь, что в этой системе покоится линейка, лежащая на оси x^0 . Обозначим длину линейки в этой системе через l_0 (собственная длина линейки). Чтобы определить длину линейки в любой системе отсчета, пужно одновременно (в этой системе) определить координаты начала и конца линейки. Лишь в системе K^0 , где линейка покоится, можно не думать об одновременности измерения положения концов линейки. Именно благодаря тому, что в повседневной жизни измеряется собственная длина предметов, процесс измерения длины столь прост и осуществляется непосредственным переложением масштаба.

Если говорить об инерциальных системах отсчета, движущихся относительно друг друга, то линейка покоится в одной-единственной системе отсчета, а относительно всех других систем отсчета она движется. И непосредственное переключивание единичного масштаба становится уже невозможным. Воспользуемся способом измерения длины, пригодным также и для измерения длины линейки, движущейся относительно системы отсчета.

Поместим левый конец линейки в начало отсчета O_0 , причем в O_0 поместим еще и источник света I . На правом конце линейки поместим зеркало S перпендикулярно оси x_0 (и x) (рис. 2.3, а).

Теперь рассмотрим два события. Первое событие состоит в том, что в момент $t = t_0 = 0$ из источника I посылается световой сигнал вдоль оси x_0 в направлении зеркала S . Второе событие состоит в том, что световой сигнал, отразившись от зеркала S , приходит обратно к левому концу линейки в O_0 . Оба события наблюдаются в точке O_0 с помощью одних часов. Поэтому промежуток времени

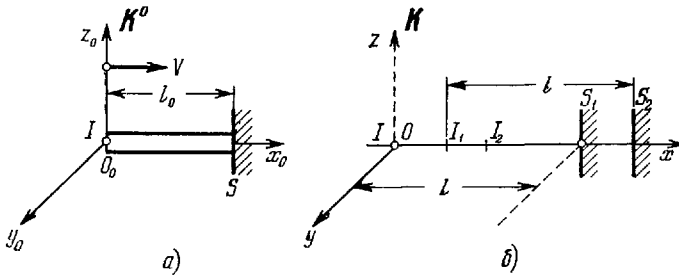


Рис. 2.3. «Мысленный эксперимент», позволяющий обнаружить «сокращение» длины линейки, если эта длина измеряется в системе отсчета, относительно которой линейка движется равномерно и прямолинейно. Линейка располагается параллельно скорости ее движения. а) К измерению длины линейки, покоящейся в системе отсчета K^0 (собственная длина линейки) б) К измерению длины линейки в системе отсчета, относительно которой линейка движется со скоростью V .

между ними — это промежуток собственного времени Δt_0 , который, очевидно, можно записать в виде

$$\Delta t_0 = \frac{2l_0}{c}. \quad (2.3)$$

Для наблюдателя в системе K эти же самые два события выглядят несколько иначе (рис. 2.3, б). В момент испускания сигнала источник I в системе K находится в точке O , а зеркало S — в положении S_1 . В момент отражения зеркало S будет находиться уже в точке S_2 , а источник — в точке I_1 . В момент прибытия сигнала, отраженного от зеркала S , к левому концу стержня источник будет уже находиться в точке I_2 . Моменты времени, соответствующие первому и второму событиям, отсчитываются в системе K в разных точках и, следовательно, разными часами. Это означает, что промежуток времени Δt между этими событиями можно определить согласно (2.2) через Δt_0 . При движении света вправо скорость, с которой он догоняет зеркало S , равна $c - V$ (классическое сложение скоростей в данной ИСО), а при движении влево свет идет навстречу зеркалу со скоростью $c + V$. Обозначая (пока еще неизвестную) длину линейки в системе K через l , получим, что время, за которое свет дойдет от источника до зеркала, $t_1 = l/(c - V)$, а время, за которое он пройдет от зеркала до источника, $t_2 = l/(c + V)$. Таким образом, промежуток времени между

посылкой и приемом светового сигнала в K равен

$$\Delta t = t_1 + t_2 = \frac{l}{c-V} + \frac{l}{c+V} = \frac{2l}{c} \frac{1}{1-B^2}, \quad B = \frac{V}{c}.$$

Вспоминая, что $\Delta t_0 = \sqrt{1-B^2} \Delta t$, и принимая во внимание (2.3), из последнего равенства найдем

$$l = \frac{c(1-B^2)}{2} \Delta t = \frac{c \cdot \Delta t_0}{2} \sqrt{1-B^2} = l_0 \sqrt{1-B^2} = \frac{l_0}{\Gamma}. \quad (2.4)$$

Формула (2.4) показывает, чему будет равна длина линейки, если измерять ее длину в любой инерциальной системе отсчета. В той системе, где она покоится ($B = 0$), ее длина равна l_0 , с чего мы, собственно, и начали. Формула (2.4) несимметрична относительно длин l и l_0 , поскольку она связывает собственную длину линейки l_0 (в системе K^0) с несобственной длиной l в любой другой системе K .

Итак, непосредственно из постулатов Эйнштейна мы вывели относительность промежутков времени между событиями и относительность длин (линеек) масштабов. Обе эти величины в классической механике были одинаковыми во всех инерциальных системах отсчета. Оба результата присущи именно теории относительности и требуют подробного обсуждения. Но мы отложим обсуждение полученных результатов до §§ 3.2, 3.3, поскольку сами эти результаты — ввиду их важности — будут получены еще несколькими способами, которые выявят некоторые новые обстоятельства, существенные для интерпретации соотношений (2.2) и (2.4).

§ 2.4. Относительность синхронизации часов двух инерциальных систем отсчета. Непосредственный вывод преобразований Лоренца. До сих пор рассматривалась синхронизация набора часов данной инерциальной системы. По все инерциальные системы равноправны и любое событие может отмечаться наблюдателем из любой инерциальной системы. Координаты события отмечаются наблюдателем каждой системы по своей координатной сетке. Время наступления события отмечается набором часов каждой инерциальной системы по часам, находящимся в момент наступления события в той точке пространства, где наступило событие. Образно говоря, все пространство заполнено движущимися часами разных систем отсчета, и мгновенная вспышка света в данном месте пространства, осветив циферблаты всех часов, находящихся в данной точке, позволяет определить время наступления этого события (вспышки) во всех тех системах отсчета, часы которых были в этой точке в момент вспышки. Чтобы показать, что здесь происходит, достаточно рассмотреть две системы — K и K' .

Вопрос заключается в том, что показывают часы из двух систем — системы K и системы K' , — оказавшиеся в одной точке. Конечно, если мы хотим сопоставлять показания часов из разных систем (не забудем, что в каждой из систем все часы синхронизованы), между показаниями соответствующих наборов часов должна быть установлена некоторая связь. Без такой связи проводить сравнение бессмысленно.

Оказывается, все, что можно сделать, — это поставить на одинаковый отсчет лишь двое часов — одни из K , другие из K' , — оказавшиеся в данный момент времени вместе. Поставив эту пару часов на одинаковый отсчет, мы — в силу синхронизации в каждой системе — переводим соответственно и показания всех остальных часов в каждой системе. При этом оказывается, что во всех остальных точках пространства находящиеся там часы из K и K' показывают разное время. Это — очень существенный результат: часы, синхронизованные в одной системе отсчета, рассинхронизованы с точки зрения любой другой инерциальной системы отсчета. Другими словами, если в системе K' одновременно зафиксировать показания всех часов системы K , то окажется, что часы в системе K показывают разное время. Мы получим сейчас соответствующие формулы.

Обычно связь между показаниями наборов синхронизованных часов в K и K' устанавливают следующим образом. Когда начала координат систем K и K' совпадают, то часы из K и K' , находящиеся в общем начале отсчета, ставят на деления $t = 0$ и $t' = 0$. Как мы увидим ниже, из этого вовсе не следует, что во всех остальных точках пространства часы из K и K' показывают одно и то же время.

Нам понадобится формула преобразования координат точек пространства при переходе от системы K к системе K' . Когда начала координат совпадают, то координатная сетка системы K' с точки зрения системы K сжата в $1/\Gamma$ раз (предполагается, что единичные собственные масштабы на осях координат одинаковые как в K , так и в K'). Следовательно, в начальный момент времени координаты точки x и x' связаны соотношением (см. (2.4))

$$x = \frac{x'}{\Gamma} \quad \left(\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right).$$

К моменту времени t вся координатная сетка системы K' сместится как целое на расстояние Vt , и потому в этот момент мы получим $x = x'/\Gamma + Vt$. Отсюда, если в момент t координата точки в системе K была равна x , то в системе K' ее координата x' будет

$$x'(x, t) = \Gamma(x - Vt). \quad (2.5)$$

По осям y, z координатная сетка остается неизменной (§ 2.3), поэтому

$$y' = y, \quad z' = z.$$

Теперь нас интересуют показания часов из системы K' , находящихся в точке x в момент времени t ; обозначим эти показания через $t'(x, t)$. Эта величина может быть найдена многими способами, но сейчас мы хотим использовать для ее определения процедуру синхронизации часов.

Поступим так: когда начала координат O и O' совпадают, а показания находящихся там двух часов (одних из K , других из K') равны нулю, вдоль общей оси x, x' в направлении возрастания x и x' посылается световой сигнал. Далее рассматривается момент времени t по часам системы K . В этот момент сигнал приходит в точку $x_2 = ct$ системы K . Приход сигнала в точку x_2 в момент t — это событие, координаты которого в K будут (x_2, t) . В системе K' то же самое событие будет иметь координаты (x'_2, t'_2) , причем согласно второму постулату $x'_2 = ct'_2$. Но соотношение (2.5) годится для любых событий, и поэтому, подставляя в левую и правую части x_2 и x'_2 и сокращая на c , получим

$$t'_2 = \Gamma t (1 - B). \quad (2.6)$$

Это и означает, что часы из набора часов системы K' , оказавшиеся в точке x_2 , показывают время t'_2 , отнюдь не совпадающее со временем, которое показывают в этой же точке часы из K (они показывают время t). Это и означает различный отсчет времени наступления события, о котором уже шла речь в § 2.3.

Теперь мы можем найти показания еще одних часов из системы K' в момент времени t . В момент времени t начало отсчета O' окажется в точке $x_1 = Vt$; вместе с началом в эту точку переместятся опорные часы системы K' . Они отсчитают во время перемещения промежутки собственного времени $\Delta t' = t'_1 - 0 = t'_1$. По часам системы K промежуток времени между тем, когда начало O' совпадало с O , и тем, когда O' очутилось в точке x_1 , равен $\Delta t = t - 0 = t$. Согласно (2.2)

$$t'_1 = t/\Gamma. \quad (2.7)$$

Итак (рис. 2.4), мы пришли к выводу, что в момент t (по часам системы K , т. е. одновременно в K) часы из K' , находящиеся в разных точках системы K , показывают разное время:

$$\begin{aligned} \text{в точке } x_2 = ct & \quad t'_2 = \Gamma (1 - B) t, \\ \text{в точке } x_1 = Vt & \quad t'_1 = t/\Gamma. \end{aligned}$$

И это несмотря на то, что все часы из набора K' синхронизованы в своей системе. Но расчет обнаружил, что они рассинхронизованы в системе K . Мы получили также, что рассинхронизация зависит от того, в какой точке системы K сравниваются часы. Найдем разность показаний часов из K' в точках x_2 и x_1 :

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \Gamma B t (B - 1).$$

Эта разность показаний набегают на расстоянии $\Delta x = x_2 - x_1 = ct(1 - \beta)$. Если считать, что рассинхронизация непрерывно зависит от расстояния вдоль оси x , то можно пойти рассинхронизацию на единицу длины:

$$\frac{\Delta t'}{\Delta x} = -\Gamma \frac{\beta}{c}. \quad (2.8)$$

Из (2.8) видно, что рассинхронизация, отнесенная к единице длины, не зависит от выбора момента времени t , а определяется

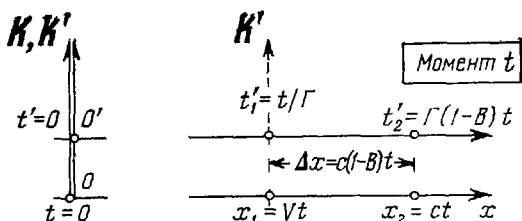


Рис. 2.4. Рассинхронизация часов системы K' с точки зрения системы K . Когда начала систем O и O' совпали, двое часов из систем K и K' , оказавшиеся в этой точке, ставятся на показания $t = 0$ и $t' = 0$. В момент времени t (по часам из K) можно найти показания часов из K' в точках $x_1 = Vt$ и $x_2 = ct$.

исключительно расстоянием между часами из K' , отсчитанным в системе K ; теперь уже для произвольной пары точек можно записать

$$t'_2 - t'_1 = -\Gamma \frac{\beta}{c} (x_2 - x_1).$$

Как уже указывалось, наборы синхронизованных часов систем K и K' согласуются между собой тем, что в момент совпадения координатных систем K и K' в точке $x_1 = 0$ часы из K и K' ставятся на нулевой отсчет, т. е. часам, находящимся в этой точке, приписываются значения $t = 0$ и $t' = 0$. Полагая $x_2 = x$, получим из последнего равенства

$$t'(x, t=0) = -\Gamma \frac{\beta}{c} x. \quad (2.9)$$

Из формулы (2.9) видно, что покажут в момент времени $t = 0$ (по часам из K) часы из системы K' , находящиеся в точке x . Их показания представлены графически на рис. 2.5. Слева от начала отсчета часы из K' все больше и больше опережают часы из K , а справа — отстают от них.

Теперь уже нетрудно выяснить, что покажут часы из системы K' , находящиеся в точке x в момент времени t . Мы воспользуемся еще раз тем обстоятельством, что разность показаний двух часов из K' не зависит от выбора момента времени t . В точку x в момент

t придут те часы из K' , которые в момент $t = 0$ находились в точке $x - Vt$ и, согласно (2.9), отставали от опорных часов на промежуток времени $-\Gamma \frac{V}{c} (x - Vt)$. На этот промежуток времени эти часы будут отставать от опорных часов всегда. Но в момент t опорные часы покажут время $t'_1 = t/\Gamma$ (см. (2.4)), а часы в точке x — время

$$t'(x, t) = \frac{t}{\Gamma} - \Gamma \frac{V}{c} (x - Vt) = \Gamma \left(t - \frac{V}{c} x \right). \quad (2.10)$$

Формулы (2.5), (2.6), (2.10) и являются преобразованиями Лоренца. Конечно, приведенный вывод (2.10) может показаться громоздким и даже излишним. Действительно, используя рассуждения, приведенные к соотношению (2.5), но применительно к переходу от K' к K , мы получим

$$x(x', t') = \Gamma(x' + Vt'). \quad (2.11)$$

Разрешая (2.11) относительно t' и заменяя x' согласно (2.5), мы действительно сразу приходим к (2.10):

$$t' = \frac{1}{V} \left\{ \frac{x}{\Gamma} - x' \right\} = \frac{1}{V} \left\{ \frac{x}{\Gamma} - \Gamma(x - Vt) \right\} = \Gamma \left(t - \frac{V}{c} x \right).$$

Показав относительность синхронизации часов, мы выяснили физический смысл различного отсчета времени в различных инерциальных системах. Кроме того, понимание «рассинхронизации часов» позволяет избежать многих недоуменных вопросов. В заключение обратим внимание на то, что точка, в которой показания часов из K и K' совпадают, все время перемещается вдоль положительной оси x со скоростью, которую можно получить из формулы (2.10), положив в ней $t = t'$:

$$\frac{x}{t} = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma V} c. \quad (2.12)$$

§ 2.5. Преобразования Лоренца как следствия постулатов Эйнштейна. Найдем формулы, позволяющие по координатам (x, y, z, t) события в системе K найти координаты (x', y', z', t') , того же самого события в системе K' . Эти формулы (преобразования координат события) должны быть согласованы с постулатами Эйнштейна.

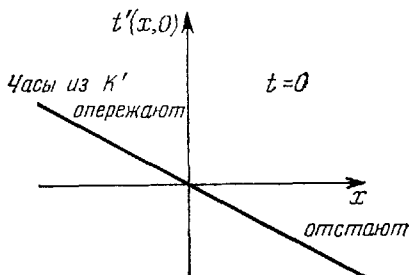


Рис. 2.5. Показания часов системы K' в момент времени $t = 0$ (по часам из K) в точках с координатами x .

Как уже указывалось, пространство и время во всех инерциальных системах отсчета должны быть однородными. Из этого вытекает, что связь между координатами события в двух инерциальных системах должна быть линейной. Действительно, пусть в системе K изменилось начало отсчета координат и времени, т. е. совершено преобразование $x = \bar{x} + x_0$, $y = \bar{y} + y_0$, $z = \bar{z} + z_0$, $t = \bar{t} + t_0$. Если связь между координатами события в K и K' линейна, то мы получим, например, для x' (a_1, a_2, a_3, a_4 — постоянные)

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a_3z + a_4t = \\ &= a_1\bar{x} + a_2\bar{y} + a_3\bar{z} + a_4\bar{t} + (a_1x_0 + a_2y_0 + a_3z_0 + a_4t_0). \end{aligned}$$

Из последнего равенства видно, что в K' тоже произошло изменение начала отсчета, так как выражение в круглых скобках одинаково для всех точек K' . По такое изменение в силу однородности пространства и времени во всех ИСО несущественно.

Допустим теперь хотя бы один квадратичный член в формуле преобразования:

$$x' = b_1x^2 + \dots = b_1\bar{x}^2 + 2b_1\bar{x}x_0 + \dots$$

Второй член в третьем звене равенства уже зависит от \bar{x} и ведет к искажению (деформации) пространства. Этого мы допустить не можем. Итак, искомые преобразования — линейные.

Мы пользуемся расположением систем отсчета, изображенным на рис. 1.2: относительная скорость K и K' направлена по общей оси x, x' , оси y и z соответственно параллельны осям y' и z' . В момент $t = t' = 0$ координатные системы совпадают. Скорость K' относительно K равна V . Ось x определяется пересечением плоскостей $y = 0, z = 0$; поэтому, если оси x и x' совпадают, то из условия $y = 0, z = 0$ должно следовать и $y' = 0, z' = 0$. Таким образом, формулы преобразования для y и z должны иметь вид (A, B, C, D — постоянные)

$$y' = Az + By, \quad z' = Cy + Dz.$$

Поскольку чисто пространственные вращения координатных систем несущественны для описания физических явлений, можно поворотом осей y' и z' вокруг оси x' добиться того, чтобы плоскость $y = 0$ переходила в плоскость $y' = 0$, а плоскость $z = 0$ — в плоскость $z' = 0$. Таким образом, можно положить $y' = By, z' = Dz$; однако в силу равноправия направлений y и z (пространство изотропно, а относительная скорость систем отсчета направлена по оси x, x') нужно считать, что $B = D$. Итак,

$$y' = Dy, \quad z' = Dz.$$

Нам остается определить коэффициент B . Рассмотрим единичную линейку, расположенную в системе K на оси y (координаты ее концов $y_1 = 0, y_2 = 1$). В системе K' координаты концов линейки были бы $y_1 = 0, y_2 = D$, а длина l' равнялась бы $l' = y_2' - y_1' = D$. Если взять единичную линейку в системе K' , расположенную вдоль оси y' ($y_1' = 0, y_2' = 1$), то координаты ее концов в K были бы $y_1 = 0, y_2 = 1/D$, а длина l равнялась бы $l = y_2 - y_1 = 1/D$.

Таким образом, измеряя единичную линейку системы K , наблюдатель из K' найдет ее длину равной D , а измеряя единичную линейку системы K' , наблюдатель из K найдет ее длину равной $1/D$. В силу равноправия инерциальных систем такой результат недопустим, и следует положить $D = 1$. Итак,

$$y = y', \quad z = z',$$

как это и было получено из постулатов Эйнштейна непосредственно (§ 2.3).

Найдем теперь формулы преобразования для x и t . Поскольку преобразования линейны, то

$$x' = A_{11}x + A_{12}t + A_{10} \quad (*)$$

и, обратно,

$$x = A_{21}x' + A_{22}t' + A_{20},$$

где все коэффициенты A — постоянные величины. По условию, когда начала O и O' совпадают, $t = 0$ и $t' = 0$. Отсюда $A_{10} = 0, A_{20} = 0$. Наблюдая за точкой O' , можно сказать, что ее координата x в момент t равна Vt ; поэтому из (*) имеем

$$0 = A_{11}Vt + A_{12}t;$$

таким образом, $A_{12}/A_{11} = -V$. Обозначая *) A_{12} через Γ' , можно записать (*) в виде (ср. § 2.4)

$$x' = \Gamma' (x - Vt), \quad (2.13)$$

а на основании аналогичных рассуждений

$$x = \Gamma (x' + Vt'). \quad (2.14)$$

Таким образом, задача свелась к определению коэффициентов Γ и Γ' . В силу однородности времени и пространства, а также изотропности пространства оба эти коэффициента могут зависеть лишь от абсолютной величины скорости V .

Легко убедиться в том, что $\Gamma = \Gamma'$. Действительно, пусть в K масштаб, лежащий вдоль оси x , имеет собственную длину l_0 . Поместим один его конец в начале системы отсчета K , тогда коор-

*) Мы пишем здесь сразу Γ и Γ' (ниже показано, что $\Gamma' = \Gamma$). Очень скоро выяснится, что эти величины совпадают с величинами Γ , появившимися в (2.2) и (2.4).

динаты его концов будут соответственно $x_1 = 0$, $x_2 = l_0$. В момент времени $t = t' = 0$ (напомним, что в этот момент геометрически системы K и K' совпадают) согласно (2.14) $x'_1 = 0$, $x'_2 = l_0/\Gamma$. Значит, длина масштаба с точки зрения K' равна $l' = x'_2 - x'_1 = = l_0/\Gamma'$. Возьмем масштаб такой же длины, неподвижный в системе K' , а также лежащий вдоль оси x . Тогда координаты его концов будут равны $x'_1 = 0$, $x'_2 = l_0$. Но с точки зрения системы K в момент $t = 0$ координаты его концов согласно (2.13) будут уже $x_1 = 0$ и $x_2 = l_0/\Gamma'$. Следовательно, его длина равна $l = x_2 - - x_1 = l_0/\Gamma'$, т. е. он укорочен в Γ' раз. Но обе системы K и K' равноправны, их относительная скорость одинакова, поэтому сокращение должно быть одинаковым, следовательно, $\Gamma = \Gamma'$.

Найдем теперь величину Γ . Отличие систем K и K' состоит лишь в относительном движении, и Γ может зависеть только от абсолютной величины V . Воспользуемся постулатом о постоянстве скорости света в вакууме во всех ИСО. В момент $t = t' = 0$ (когда начала обеих систем O и O' совпадают) из общего начала посылается световой сигнал. Пусть событие состоит в приеме сигнала в некоторый момент (t в системе K и t' в системе K') в некоторую точку (x в системе K и x' в системе K'), лежащую на оси x . В системе K эта точка имеет координату $x = ct$, а в системе K' та же точка имеет координату $x' = ct'$. Эти времена и координаты связаны между собой преобразованиями (2.13) и (2.14), и, подставляя эти выражения для x и x' в (2.13) и (2.14), мы получим

$$ct' = \Gamma t (c - V), \quad ct = \Gamma t' (c + V).$$

Если почленно перемножить левые и правые части этих двух соотношений, то, сократив на tt' , получим

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{V}{c}. \quad (2.15)$$

Мы убедились в том, что величина Γ совпадает с величиной Γ , которая впервые появилась в формулах (2.2) и (2.4).

Чтобы найти формулу преобразования времени, найдем t' из (2.14), принимая во внимание (2.13):

$$t' = \frac{x}{\Gamma V} - \frac{x'}{V} - \frac{x}{\Gamma V} - \frac{\Gamma(x - Vt)}{V} = \Gamma \left\{ t + \frac{x}{V} \left(\frac{1}{\Gamma^2} - 1 \right) \right\} = \\ = \Gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right).$$

Таким образом, мы приходим к преобразованиям координат и времени события в виде

$$x' = \Gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \Gamma \left(t - \frac{V}{c} x \right). \quad (2.16)$$

Преобразования (2.16) и есть преобразования Лоренца. Их нетрудно переписать также для произвольного направления относительной скорости V систем отсчета K и K' . Действительно, мы получили, что меняются координаты по направлению движения, а поперек направления движения — остаются неизменными. Разложим радиус-вектор точки \mathbf{r} на части: параллельную направлению движения \mathbf{r}_{\parallel} ($\mathbf{r}_{\parallel} \parallel V$) и перпендикулярную направлению движения \mathbf{r}_{\perp} ($\mathbf{r}_{\perp} \perp V$):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\perp} + \mathbf{r}_{\parallel}.$$

Тогда

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \Gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - Vt), \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}, \quad t' = \Gamma\left(t - \frac{\mathbf{r}_{\parallel} V}{c^2}\right),$$

но

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = V \frac{\mathbf{r}' V}{V^2}, \quad \mathbf{r}' V = \mathbf{r}_{\parallel} V.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp} &= \Gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - Vt) + \mathbf{r}_{\perp} = \Gamma[(\mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}) - Vt] - (1 - \Gamma)\mathbf{r}_{\perp}, \\ \mathbf{r}_{\perp} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel} = \mathbf{r} - V \frac{\mathbf{r}' V}{V^2} = \frac{[\mathbf{r}' V] V}{V^2}. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \Gamma(\mathbf{r} - Vt) + (\Gamma - 1) \frac{[\mathbf{r}' V] V}{V^2}, \\ t' &= \Gamma\left(t - \frac{\mathbf{r}' V}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Это уже преобразования Лоренца в векторной форме для произвольного направления относительной скорости: формула для \mathbf{r}' соответствует классической формуле (1.1), в которую она переходит при $\Gamma = 1$.

Мы снова отложим обсуждение смысла преобразований Лоренца (2.16), чтобы получить их еще одним способом. Этот способ приведет нас к пониманию того, что реальный физический мир, в котором происходят все явления природы, представляет собой четырехмерное многообразие — «пространство-время». Специальная теория относительности предстанет перед нами как теория четырехмерного пространства-времени, как теория, имеющая прямой геометрический смысл. По физическому содержанию и возможности дальнейшего обобщения такой подход оказался чрезвычайно важным для всего нашего физического мировоззрения и первым шагом к построению теории тяготения.

§ 2.6. Распространение фронта световой волны. Интервал между событиями. Проведем еще один мысленный эксперимент, рассматривая его с точки зрения двух ИСО — K и K' , — находящихся в вакууме (K' движется по общей оси x, x' со скоростью V).

В начальный момент $t = t' = 0$, когда по условию оба начала отсчета O и O' совпадают, в общем начале отсчета произведем вспышку света. Согласно второму постулату Эйнштейна свет распространяется по всем направлениям в K и K' с одинаковой скоростью c . Следовательно, волновой фронт (т. е. поверхность равных фаз) будет представлять собой сферы в обеих системах K и K' . Уравнения этих сфер можно сразу записать:

$$\begin{array}{c|c} \text{В системе } K & \text{В системе } K' \\ \hline x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. & x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \end{array}$$

Если даже забыть все то, что уже говорилось о разных отсчетах времени t и t' в системах K и K' , можно сказать, что мы написали для системы K' справа t' вместо t по следующим соображениям. Допустим, что время в системах K и K' одинаково, т. е. $t = t'$. Тогда радиусы обеих сфер (для данного момента t) оказываются одинаковыми. Получается, что один и тот же физический объект — волновой фронт — описывается с равным правом двумя сферами одинакового радиуса, но с центрами в точках O и O' . Это бессмысленно. Значит, положить $t = t'$ невозможно. Перепишем оба равенства в виде

$$\begin{aligned} c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) &= 0, \\ c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) &= 0. \end{aligned}$$

В этом мысленном эксперименте фактически речь идет о двух событиях. Первое из них состоит в отправлении сигнала из начала системы отсчета $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ в момент времени $t_0 = 0$, второе — в приходе сигнала в произвольную точку сферы с координатами x , y , z в момент времени t . Если составить выражение

$$\sqrt{c^2 (t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2} - \sqrt{c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2},$$

которое называют *интервалом* между этими двумя событиями и обозначают символом s , то полученный нами результат можно сформулировать так: для двух событий, состоящих в отправлении светового сигнала из одной точки и приходе его в другую, квадрат интервала между этими событиями в любой ИСО должен быть равен нулю:

$$s^2 = 0, \quad s'^2 = 0. \quad (2.17)$$

Конечно, интервал между событиями может быть определен не только для отправления и прихода светового луча. Если координаты события 1 определяются числами x_1 , y_1 , z_1 , t_1 , а координаты события 2 — числами x_2 , y_2 , z_2 , t_2 , то по определению интервал между этими событиями s_{12} равен

$$s_{12} = \sqrt{c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}.$$

Однако для произвольных событий интервал s_{12} уже не равен нулю.

Часто бывает удобно перейти к рассмотрению событий, происходящих в бесконечно близких точках и в бесконечно близкие моменты времени. Полагая в этом случае $t_2 - t_1 = dt$, $x_2 - x_1 = dx$, $y_2 - y_1 = dy$, $z_2 - z_1 = dz$, получим для квадрата интервала

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Как мы сейчас покажем, основным свойством интервала между событиями является его инвариантность при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Из мысленного эксперимента по посылке — приему светового сигнала следует согласно (2.17), что если в одной ИСО $ds^2 = 0$, то и во всякой другой $ds'^2 = 0$. Обе величины ds и ds' — бесконечно малые одного порядка и поэтому должны быть пропорциональны друг другу. Следовательно, можно записать, что

$$ds^2 = a ds'^2,$$

где a — коэффициент пропорциональности. Это соотношение должно выполняться для интервала между любой парой событий. Действительно, никаких условий на связь между интервалами ds и ds' для пары произвольных событий у нас нет, а для событий частного вида — приема и отправления светового сигнала — связь должна быть именно такой.

Коэффициент a не может зависеть от координат x , y , z и времени t , потому что это означало бы, что различные точки пространства и различные моменты времени неравноправны. Так как мы считаем пространство и время однородными, то a должно быть постоянной величиной, зависящей только от абсолютной величины относительной скорости двух рассматриваемых ИСО. Действительно, коэффициент a не может зависеть и от направления относительной скорости двух ИСО, так как это означало бы неравноправие различных направлений в пространстве. В силу изотропности пространства мы должны считать, что a может зависеть только от абсолютной величины относительной скорости рассматриваемых инерциальных систем отсчета.

Рассмотрим три ИСО, обозначив их соответственно K , K' , K'' , причем V_1 — скорость K' относительно K , а V_2 — скорость K'' относительно K . Мы можем написать, что

$$ds^2 = a (V_1) ds_1^2, \quad (*)$$

$$ds^2 = a (V_2) ds_2^2. \quad (**)$$

Рассматривая непосредственно системы K' и K'' , можно записать

$$ds_1^2 = a (V_{12}) ds_2^2,$$

где V_{12} — абсолютная величина скорости системы K' относительно K'' . Подставляя последнее выражение в (*) и сравнивая с (**), мы находим, что

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}). \quad (***)$$

Поскольку V_{12} зависит не только от абсолютных величин векторов V_1 и V_2 , но и от угла между ними (а этот угол вообще не входит в последнее соотношение), очевидно, удовлетворить соотношению можно тогда, когда коэффициент a сводится просто к постоянной величине; постоянная a , как это ясно из последнего равенства, может быть равна только единице. Поэтому

$$ds^2 = ds'^2;$$

из равенства бесконечно малых интервалов вытекает равенство (интервалы s и s' не могут отличаться на произвольную постоянную, поскольку из $s = 0$ следует $s' = 0$)

$$s = s',$$

т. е. инвариантность интервала s относительно преобразований координат и времени, согласующихся с постулатами Эйнштейна. Мы уже видели и еще раз убедимся в том, что такими преобразованиями являются преобразования Лоренца.

Таким образом, выражение $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ должно оставаться неизменным при переходе от системы K к K' . Когда системы K и K' расположены так, как это изображено на рис. 1.2, $y = y'$, $z = z'$ и сумма $y^2 + z^2$ уже является инвариантом. Поэтому инвариантом преобразования будет фактически выражение

$$s^2 = c^2t^2 - x^2. \quad (2.18)$$

§ 2.7. Преобразования Лоренца как следствие инвариантности интервала между событиями. В предыдущем параграфе было показано, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой координаты двух событий должны удовлетворять соотношению

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2, \quad \text{или} \quad x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2. \quad (2.19)$$

Здесь для простоты принято, что одно из событий имеет координаты $(0, 0, 0, 0)$, а в силу нашего соглашения о системах отсчета это означает, что и в другой системе отсчета оно имеет координаты $(0, 0, 0, 0)$.

Сделаем еще один шаг для упрощения записи. Читатель, вероятно, уже обратил внимание на то, как часто встречается произведение скорости света и времени ct . Введем новую единицу времени — *световой метр*: время, за которое свет проходит расстоя-

ние в 1 м. Очевидно, 1 м времени = 1 м/с (секунд), т. е. 1 м проходит за 1/с секунд.

Свет пройдет τ метров за время $\tau \frac{1}{c} = t$ сек; отсюда ясно, что

$$\tau (\text{св} \cdot \text{м}) = ct (\text{сек}). \quad (2.20)$$

Эта единица покажется не столь уже необычной, если вспомнить, что в астрономии расстояние измеряется по времени (и скорости света) — в световых годах.

Итак, если измерять время в световых метрах, выражение для инвариантного интервала между событиями станет совсем простым:

$$x'^2 - \tau'^2 = x^2 - \tau^2. \quad (2.21)$$

Проще всего найти преобразования, удовлетворяющие (2.21), так. Мы знаем (§ 2.5), что преобразования координат и времени должны быть линейными. Запишем такие преобразования с неопределенными постоянными коэффициентами в виде

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 \tau, \\ \tau' &= a_2 x + b_2 \tau. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Подставим выражения (2.22) в левую часть (2.21) и сгруппируем коэффициенты при x^2 , τ^2 и $2x\tau$:

$$x'^2 - \tau'^2 = x^2 (a_1^2 - a_2^2) - \tau^2 (b_2^2 - b_1^2) + 2x\tau (a_1 b_1 - a_2 b_2) \equiv x^2 - \tau^2. \quad (2.23)$$

Последнее звено в равенстве написано согласно (2.21); оно должно соблюдаться тождественно, т. е. при любых x и τ . Но для этого необходимо, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$a_1^2 - a_2^2 = 1, \quad b_2^2 - b_1^2 = 1, \quad a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0. \quad (2.24)$$

Этим соотношениям очень легко удовлетворить, положив коэффициенты a и b равными гиперболическим функциям (их определение и основные соотношения между ними см. Приложение I, § 9), а именно:

$$a_1 = \text{ch } \vartheta_1, \quad a_2 = \text{sh } \vartheta_1, \quad b_2 = \text{ch } \vartheta_2, \quad b_1 = \text{sh } \vartheta_2.$$

Тогда два первых равенства из (2.24) удовлетворяются автоматически, а из третьего, которое можно переписать в виде $a_1/a_2 = b_2/b_1$, следует $\text{th } \vartheta_1 = \text{th } \vartheta_2$, и, чтобы удовлетворить ему, достаточно положить $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$. Таким образом, преобразования (2.22) примет вид

$$\begin{aligned} x' &= x \text{ch } \vartheta + \tau \text{sh } \vartheta, \\ \tau' &= x \text{sh } \vartheta + \tau \text{ch } \vartheta. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Параметр ϑ может зависеть лишь от относительной скорости V . Он называется параметром скорости и играет существенную роль в СТО (см. § 3.5). Для его определения используем первое равенство (2.25). Для начала отсчета O' нужно считать $x' = 0$, и мы получаем

$$\frac{x}{\tau} = -\operatorname{th} \vartheta. \quad (2.26)$$

Но выражение, стоящее слева, в обычных единицах времени запишется так: $x/ct = \beta$, поскольку x/t для начала O' просто равно скорости системы K' относительно K . Итак, мы нашли связь параметра ϑ со скоростью V :

$$\operatorname{th} \vartheta = -\beta. \quad (2.27)$$

Отсюда нетрудно найти $\operatorname{ch} \vartheta$ и $\operatorname{sh} \vartheta$ (см. Приложение I, § 9):

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \vartheta &= \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \Gamma, \\ \operatorname{sh} \vartheta &= \operatorname{th} \vartheta \operatorname{ch} \vartheta = -\beta\Gamma. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Окончательно для искомым преобразований получаем

$$\begin{aligned} x' &= x\Gamma + \tau(-\beta\Gamma) = \Gamma(x - \beta\tau), \\ \tau' &= x(-\beta\Gamma) + \tau\Gamma = \Gamma(\tau - \beta x). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для обратных преобразований мы получим (проще всего помнить штрихованные величины на нештрихованные и наоборот, заменив β на $-\beta$):

$$\begin{aligned} x &= \Gamma(x' + \beta\tau'), \\ \tau &= \Gamma(\tau' + \beta x'). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Нетрудно обнаружить в этих замечательно симметричных формулах те же самые формулы преобразований Лоренца (2.16); для этого достаточно сделать замену (2.20).

Таким образом, мы получили вновь преобразования Лоренца, исходя из инвариантности интервала и однородности пространства и времени. В этом нет ничего удивительного, потому что инвариантность интервала — прямое следствие постулатов Эйнштейна.

§ 2.8. Комплексные величины в СТО. Симметричные обозначения. Нередко в целях формального удобства вводят мнимую временную координату $\tilde{\tau} = ict = i\tau$. Этим приемом в рамках специальной теории относительности целесообразно воспользоваться потому, что он избавляет нас от необходимости вводить и различать ко- и контравариантные координаты (см. Приложение I, § 8). Введение таких координат неизбежно при изложении релятивистской электродинамики, если не вводить мнимого вре-

мени. Следует подчеркнуть, что введение мнимого времени всего лишь удобный прием и что без него можно обойтись; поэтому в появлении мнимой единицы нет никакой мистики. В конечном виде все формулы для координат и времени не содержат мнимой единицы, и это еще раз показывает, что мнимая единица играет лишь вспомогательную роль.

Итак, в целях формального удобства введем мнимую координату $\tilde{\tau} = ict$. Тогда

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 = -(x^2 + \tilde{\tau}^2) \quad (i^2 = -1).$$

Приведем вывод преобразований Лоренца с использованием мнимой переменной $\tilde{\tau}$. Рассмотрим плоскость переменных (x, τ) ; в этой плоскости выражение $x^2 + \tau^2$ является расстоянием от начала координат до точки (x, τ) . Это расстояние не меняется при повороте координатной системы на угол φ в плоскости (x, τ) .

Поворот в обычной (евклидовой) плоскости на угол φ описывается формулами (см. Приложение I, § 2)

$$x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \quad (2.31)$$

где все величины действительны.

Рассмотрим поворот в плоскости (x, τ) , где одна из координат — чисто мнимая величина. Будем считать, что формулы (2.31) сохраняют свой вид и в этом случае; как мы увидим, геометрический смысл формул с мнимой переменной будет существенно отличаться от смысла формул (2.31). Итак, запишем искомое преобразование в виде

$$x' = x \cos \varphi + \tilde{\tau} \sin \varphi, \quad (2.32a)$$

$$\tilde{\tau}' = \tilde{\tau} \cos \varphi - x \sin \varphi. \quad (2.32b)$$

Вясним смысл параметра φ . Он может быть связан только со скоростью V относительного движения K' и K , потому что только этим различаются эти системы. Возьмем любую точку в системе отсчета K' ($x' = \text{const}$). Она движется относительно K так же, как и вся система, т. е. со скоростью V ; для любой точки, жестко связанной с системой K' , можно написать $V = dx/dt$. Считая x функцией $\tilde{\tau}$, продифференцируем (2.32a) по $\tilde{\tau}$. Мы получим $dx \cos \varphi + d\tilde{\tau} \sin \varphi = 0$, откуда следует, что

$$\frac{dx}{d\tilde{\tau}} \equiv \frac{1}{ic} \frac{dx}{dt} = -\text{tg } \varphi,$$

и, следовательно,

$$\text{tg } \varphi = iV. \quad (2.33)$$

Тангенс оказался мнимым, и это еще раз напоминает нам о том, что среди переменных есть мнимая величина.

Из (2.33) можно найти $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ по обычным формулам тригонометрии:

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{iB}{\sqrt{1-B^2}} = iB\Gamma, \\ \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}} = \Gamma,\end{aligned}\quad (2.34)$$

где введено уже использованное нами обозначение (2.15) $\Gamma = (1 - B^2)^{-1/2}$. Подставляя в (2.32) значения $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, находим искомые преобразования для переменных x, τ :

$$x' = \Gamma (x + iB\tilde{\tau}), \quad \tilde{\tau}' = \Gamma (\tilde{\tau} - iBx'). \quad (2.35)$$

Формулы преобразования координат события от K к K' должны отличаться от формул преобразования координат того же события от K' к K только заменой штрихованных величин на нештрихованные и наоборот; кроме того, знак у скорости V следует заменить на обратный. Таким образом, из (2.35) мы получим

$$x = \Gamma (x' - iB\tilde{\tau}'), \quad \tilde{\tau} = \Gamma (\tilde{\tau}' + iBx'). \quad (2.36)$$

Конечно, тот же результат получится, если непосредственно решить систему (2.35) относительно x и $\tilde{\tau}$.

В формулах (2.35) и (2.36) легко перейти к действительным переменным x, t . Для этого подставим в них $\tilde{\tau} = ict$ и $\tilde{\tau}' = ict'$. Тогда мы сразу получим формулы преобразования (2.16). Прямое и обратное преобразования переменных x и t имеют вид

$$\begin{aligned}x' &= \Gamma (x - Vt) & \text{(а)}, & & x &= \Gamma (x' + Vt'), & \text{(в)} \\ t' &= \Gamma \left(t - \frac{V}{c} x \right) & \text{(б)}, & & t &= \Gamma \left(t' + \frac{V}{c} x' \right). & \text{(г)}\end{aligned}\quad (2.37)$$

Нам придется в дальнейшем сопоставление преобразований Лоренца, записанных в форме (2.25) и (2.32). Напомним, что в (2.25) все величины действительны, а в (2.32) входит мнимое время. Воспользовавшись соотношениями (см. Приложение I, § 9)

$$\cos i\alpha = \operatorname{ch} \alpha, \quad \sin i\alpha = i \operatorname{sh} \alpha, \quad \operatorname{tg} i\alpha = i \operatorname{th} \alpha,$$

мы видим, что достаточно в формулах (2.25) положить $\varphi = -i\vartheta$, чтобы они перешли в формулы (2.32). Таким образом, в плоскости действительных переменных x, t формально мы имеем дело с поворотом декартовой системы на мнимый угол. Такой поворот весьма мало напоминает вращение декартовой системы, а формулы (2.25), определяющие его, являются «пародией» на формулы (2.31), описывающие настоящий поворот. Геометрический смысл «поворота» осей x, τ согласно формулам (2.32) мы выясним чуть ниже

в этом же параграфе, а сейчас выпишем пужную для дальнейшего симметричную форму преобразований Лоренца.

Введем симметричные обозначения основных переменных следующим образом:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict = i\tau \quad (2.38)$$

для мнимого времени и

$$x^0 = ct = \tau, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (2.39)$$

для действительного времени.

Набор переменных (2.38) будет удобен при изложении релятивистской электродинамики. Что касается набора переменных (2.39), то именно он принят в книге [9]; эта книга содержит изложение общей теории относительности, а переход к ее изложению от СТО целесообразнее вести без мнимой единицы. Перепишем соответствующие преобразования переменных (2.30) (в действительной форме):

$$\begin{aligned} x^0 &= \Gamma x^{0'} + \Gamma V x^{1'} + 0 \cdot x^{2'} + 0 \cdot x^{3'}, \\ x^1 &= \Gamma V x^{0'} + \Gamma x^{1'} + 0 \cdot x^{2'} + 0 \cdot x^{3'}, \\ x^2 &= 0 \cdot x^{0'} + 0 \cdot x^{1'} + 1 \cdot x^{2'} + 0 \cdot x^{3'}, \\ x^3 &= 0 \cdot x^{0'} + 0 x^{1'} + 0 \cdot x^{2'} + 1 \cdot x^3, \end{aligned} \quad (2.30')$$

и (2.36) (с мнимым временем):

$$\begin{aligned} x_1 &= \Gamma x'_1 + 0 \cdot x'_2 + 0 \cdot x'_3 - i\Gamma x'_4, \\ x_2 &= 0 \cdot x'_1 + 1 \cdot x'_2 + 0 \cdot x'_3 + 0 \cdot x'_4, \\ x_3 &= 0 \cdot x'_1 + 0 \cdot x'_2 + 1 \cdot x'_3 + 0 \cdot x'_4, \\ x_4 &= i\Gamma x'_1 + 0 \cdot x'_2 + 0 \cdot x'_3 + \Gamma \cdot x'_4. \end{aligned} \quad (2.36')$$

Преобразования (2.30') и (2.36') можно записать в сокращенной форме:

$$x^i = \alpha_{ik} x'^k \quad (\text{а}), \quad | \quad x_i = \tilde{\alpha}_{ik} x'_k. \quad (\text{б}) \quad (2.40)$$

В формулах (2.40а, б) подразумевается суммирование по k , по в (а) от 0 до 3, а в (б) от 1 до 4. Индекс i «свободный», принимающий в (а) все значения от 0 до 3, а в (б) — от 1 до 4. Коэффициенты α_{ik} и $\tilde{\alpha}_{ik}$ образуют соответственно матрицы

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & \Gamma V & 0 & 0 \\ \Gamma V & \Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{а}), \quad \left| \quad \tilde{\alpha}_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -i\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \quad (\text{б}), \quad (2.41)$$

которые называются матрицами преобразований Лоренца. Для преобразования координат и времени при переходе от одной

инерциальной системы отсчета к другой используются всегда матрицы такого вида. Эти матрицы различаются лишь величиной относительной скорости V , т. е. различными значениями $B = V/c$.

Формулы обратного перехода, т. е. перехода от системы K к K' , получаются заменой B на $-B$. Обозначим матрицу перехода от K к K' через α'_{ik} , так что

$$x^i = \alpha'_{ik} x^k, \quad x'_i = \tilde{\alpha}'_{ik} x^k. \quad (2.42)$$

Для матрицы с действительными элементами указанная замена приводит к совершенно новой матрице α'_{ik} . Но матрица α'_{ik} при замене B на $-B$ переходит в матрицу $\tilde{\alpha}_{hi}$ (строки и столбцы меняются местами), поэтому

$$x'_i = \tilde{\alpha}_{hi} x_h. \quad (2.43)$$

§ 2.9. Геометрическая иллюстрация преобразований Лоренца.

Поскольку при нашем выборе взаимного расположения инерциальных систем отсчета координаты y и z не изменяются, достаточно рассмотреть преобразование систем отсчета в плоскости (x, τ) .

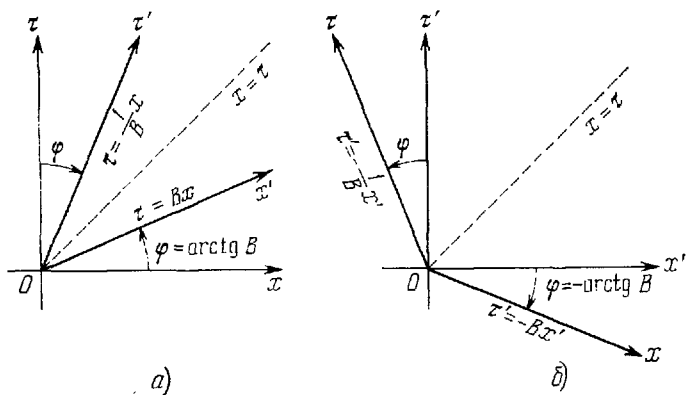


Рис. 2.6. Геометрическая иллюстрация преобразований Лоренца. Преобразование Лоренца сводится к тому, что оси x и τ поворачиваются на угол $\varphi = \arctg B$ вокруг начала по направлению к биссектрисе координатного угла и занимают положения x' , τ' . Прямые $x' = \text{const}$ параллельны теперь оси $O\tau'$, а прямые $\tau' = \text{const}$ параллельны оси Ox' (мы чертили к прямоугольной, но пологоугольной системе координат). Переход от K к K' соответствует сближению осей τ' , x' (а), обратный переход — расхождению осей τ , x (б).

Пусть оси x и τ системы K изображены двумя взаимно перпендикулярными линиями (рис. 2.6). Чтобы провести на этой схеме оси системы K' , воспользуемся формулами (2.29). Из них видно, что начала отсчета систем K и K' совпадают (при $x = 0$ и $\tau = 0$ также и $x' = 0$, $\tau' = 0$). Точка $x' = 0$ (начало системы K') движется по отношению к системе K со скоростью V ; следовательно,

се движение изображается на этой схеме прямой, составляющей с осью τ угол φ , причем угол φ определяется соотношением $\varphi = \arctg V$. Но прямая $x' = 0$ — это ось времени в системе K' . Значит, преобразование Лоренца для оси τ сводится к тому, что ось τ' наклоняется под углом φ к оси τ .

Ось x' определяется условием $\tau' = 0$. Но из (2.29) видно, что в системе K это условие удовлетворяется на прямой $\tau = Vx$. Конечно, ось τ' тоже можно было бы найти из условия $x' = 0$, тогда из (2.29) мы снова пришли бы к прямой $x = V\tau$. Итак, уравнения новых осей запишутся следующим образом:

$$\text{ось } \tau': \tau = \frac{1}{V} x; \quad \text{ось } x': \tau = Vx. \quad (2.44)$$

Ось x' составляет с осью x угол, определяемый соотношением $\varphi = \arctg V$. Таким образом, преобразования Лоренца сводятся к тому, что от прямоугольной системы отсчета x, τ мы переходим к косоугольной x', τ' ; оси x и τ поворачиваются около начала отсчета в направлении к биссектрисе координатного угла, причем обе они поворачиваются на один и тот же угол $\varphi = \arctg V$ (см. рис. 2.6, а). Вот что значит поворот на мнимый угол! Формально введенный нами поворот прямоугольной системы совсем не похож на вращение декартовой системы координат.

Наш результат показывает, что, рассматривая инерциальные системы отсчета и прибегая к геометрической иллюстрации этих преобразований, мы не можем оставаться в рамках ортогональных осей x, τ . Если даже оси исходной системы взять ортогональными, то переход к любой системе K' делает систему косоугольной. На рис. 2.6, б изображен переход от ортогональной системы K' к системе K согласно (2.30). По появление косоугольных координат ведет к необходимости делать различие между ко- и контравариантными координатами (см. Приложение I, § 8). Вот почему так трудно обойти эти понятия в СТО, если не спрятаться за мнимую единицу (см. § 2.8).

**СЛЕДСТВИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА.
КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕРВАЛОВ И ПРИНЦИП
ПРИЧИННОСТИ. МЕТОД k -КОЭФФИЦИЕНТА**

Не следует думать, что из преобразований Лоренца можно получить какие-то новые следствия, которые нельзя было бы получить непосредственно из постулатов Эйнштейна: ведь и сами-то преобразования Лоренца в конечном счете являются следствиями постулатов Эйнштейна. И в самом деле, начало этой главы посвящено обсуждению результатов, которые были уже получены в гл. 2. Другое дело, что с помощью преобразований Лоренца они получаются проще, и мы, конечно, этим воспользуемся. Мы не откажемся даже от того, чтобы показать, как все эти следствия, включая закон преобразования скоростей, можно получить, даже не прибегая к построению координатной системы (метод k -коэффициента). Может, конечно, сразу возникнуть вопрос, в чем же значение преобразований Лоренца, если все результаты, полученные до сих пор, можно извлечь и другими путями. Но все дело заключается в том, что, несмотря на всю важность полученных результатов, это еще не все то, что нам нужно. Чтобы убедиться в выполнении принципа относительности, нужно знать, как преобразуются основные уравнения физики при переходе от одной ИСО к другой. В основе этих преобразований как раз и лежат преобразования Лоренца.

§ 3.1. Об измерении длин и промежутков времени. Относительность одновременности. Преобразования Лоренца позволяют пересчитывать координаты события (в «координаты» включается и время) при переходе от одной ИСО к другой. Но событие — это всего лишь элемент физического явления, и в конечном счете основной задачей СТО является соответствующий пересчет наблюдаемых физических величин. Однако, прежде чем ставить эту задачу, нужно остановиться на процессе измерения основных физических величин. Важнейшими физическими измерениями являются измерения расстояний (длин) и промежутков времени. Мы привыкли измерять длины тел или расстояния между точками, если эти тела или точки покоятся относительно нас. Если тело покоится, то достаточно переложить вдоль него единичный масштаб столько раз, сколько это нужно. Так и поступают в повседневной жизни, когда, скажем, отмеряют ткань или измеряют длину комнаты.

Довольно просто также измерить промежуток времени между двумя событиями, наступающими в той же самой точке, где находятся часы. Нужно просто отметить момент времени, когда произошло первое событие, и момент времени, когда произошло второе событие. Разность между отсчетами часов и даст промежуток времени между событиями. Именно так устанавливается, например, продолжительность лекции или футбольного матча.

Но как измерить длину тела, движущегося относительно нас? Пусть мимо нас с большей скоростью проходит поезд и мы хотим определить его длину. Одному человеку сделать это совсем не просто. Ведь он должен одновременно заметить положение начала поезда (электровоза) и хвоста поезда относительно каких-то точек, неподвижных на земле. Но когда он заметит положение электровоза и начнет поворачивать голову, хвост уже уйдет вперед. Следовательно, о том, чтобы зафиксировать одновременно положение начала и хвоста поезда, следует особо позаботиться.

После того, как одновременное положение начала и хвоста отмечено на земле, расстояние легко промеряется обычным способом — это длина покоящегося тела.

А как найти промежуток времени между событиями, происходящими в различных точках пространства? Вспомним, как измеряется время спринтера при забеге на стометровку. Здесь события — это старт и финиш спортсмена. Часы одни! Выстрел стартера служит сигналом к началу бега и запуску секундомера, который находится на финише. Звук распространяется в воздухе со скоростью 330 м/сек , и спортсмен начнет свой бег раньше, чем судья на финише запустит секундомер. Но все это не очень существенно, потому что скорость бегуна очень мала (в лучшем случае около $36 \text{ км/ч} = 10 \text{ м/сек}$, что мало даже по сравнению со скоростью звука). Но из приведенного примера можно почувствовать, что определение промежутка времени между двумя событиями, наступающими в разных точках пространства, требует внимания.

В § 2.1 было рассказано, как поступают в теории относительности: в каждой инерциальной системе строится своя система координат, и во всех точках этой системы, где это потребуется, расставлены неподвижные часы. Эти часы синхронизованы в этой системе отсчета, так что одинаковым показаниям этих часов соответствует один и тот же момент времени в этой системе.

Когда мы переходим к сопоставлению событий в двух инерциальных системах отсчета K и K' , мы увязываем показания синхронизованного набора часов из K с таким же набором часов из K' тем, что полагаем $t = 0$ и $t' = 0$ в совпадающих началах O и O' (см. § 2.2). Напомним, что преобразования Лоренца — это просто пересчет координат события в системе K , т. е. координат (x, y, z, t) , к координатам того же события в системе K' . По формулам (2.16), или (2.29), или, наконец, (2.40) мы получаем выра-

жение для (x', y', z', t') через (x, y, z, t) . Конечно, все те неожиданные с точки зрения «здорового смысла» следствия постулатов Эйнштейна, с которыми мы познакомились в гл. 2, можно получить и из преобразований Лоренца. Этим мы сейчас и займемся.

Предварительно выпишем две удобные для дальнейшего формулы. Рассмотрим два произвольных события: I (x_1, y_1, z_1, t_1) и II (x_2, y_2, z_2, t_2) . Пересчет координат и времени этих событий в систему K' согласно (2.37а, б) дает

$$\left. \begin{aligned} t'_2 &= \Gamma \left(t_2 - \frac{V}{c} x_2 \right), \\ t'_1 &= \Gamma \left(t_1 - \frac{V}{c} x_1 \right), \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x'_2 &= \Gamma (x_2 - V t_2), \\ x'_1 &= \Gamma (x_1 - V t_1). \end{aligned}$$

Составляя разности $t'_2 - t'_1$ и $x'_2 - x'_1$, т. е. вычитая нижние равенства из верхних, и вводя обозначения $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta x' = x'_2 - x'_1$, $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$, мы получим нужные формулы (сразу же выписываем и формулы обратного перехода):

$$\Delta x' = \Gamma (\Delta x - V \Delta t), \quad (3.1) \quad \left| \quad \Delta x = \Gamma (\Delta x' + V \Delta t'), \quad (3.1')$$

$$\Delta t' - \Gamma \left(\Delta t - \frac{V}{c} \Delta x \right), \quad (3.2) \quad \left| \quad \Delta t = \Gamma \left(\Delta t' + \frac{V}{c} \Delta x' \right). \quad (3.2')$$

Формулы (3.1) и (3.2) (а также (3.1') и (3.2')) — это просто преобразования Лоренца для разностей пространственных координат и времен наступления двух событий. К ним следует добавить еще соотношения $\Delta y' = \Delta y$ и $\Delta z' = \Delta z$.

Из формулы (3.2) сразу вытекает, что два события, одновременные в K , вовсе не одновременны в K' . Действительно, полагая в (3.2) $\Delta t = 0$, получим

$$\Delta t' = -\Gamma \frac{V}{c^2} \Delta x. \quad (3.3)$$

Видно, что $\Delta t' \neq 0$, если $\Delta x \neq 0$. Но если при $\Delta t = 0$ также и $\Delta x = 0$, то события либо совпадают, либо наступают в плоскости $x = \text{const}$. Для таких событий $\Delta t' = 0$.

Из формулы (3.2) следуют два условия, при соблюдении которых можно пренебречь относительно промежутков времени между событиями. Во-первых, нужно считать $V \ll 1$, тогда $\Gamma \approx 1$ и можно записать $\Delta t' = \Delta t - (V/c) (\Delta x/c)$. Чтобы пренебречь вторым членом в этом соотношении, следует считать отношение $\Delta x/c$ малым. Это (второе) условие, безусловно, выполняется, если события наступают в области пространства, ограниченной вдоль оси x , т. е. при малых Δx . Однако никаких ограничений на область пространства по направлениям y и z нет, поскольку все события в плоскости $x = \text{const}$ наступают в один и тот же момент времени по часам системы K' .

Конечно, относительность одновременности — это то же самое, что и рассинхронизация часов, подробно рассмотренная нами в § 2.4. В формуле (2.376) достаточно положить $t' = 0$, чтобы сразу получить формулу (2.9), которая далась нам совсем нелегко. Из формулы (3.2), стоит лишь положить $\Delta t = 0$, мы получаем формулу (2.8). На этом примере видно, как много может быть скрыто в скромных на вид «преобразованиях».

В повседневной жизни нарушение одновременности в различных системах отсчета неощутимо: разность времен Δt пропорциональна V/c , как это видно из (3.2), если положить $\Delta t = 0$ (одновременность в K). Однако из той же формулы (3.2) видно, что если $\frac{V}{c} \Delta x$ — заметная величина, то и $\Delta t'$ может быть заметной величиной. Это будет в том случае, если Δx велико.

Очень важно подчеркнуть, что относительность одновременности обусловлена конечностью скорости света. Если совершить формальный переход к пределу $c \rightarrow \infty$ (фактически это означает условие $V \rightarrow 0$), то одновременность становится абсолютной. Этот результат относится к случаю малых относительных скоростей отсчета.

Из формул (3.1) и (3.1') видно, что два события, наступившие в точках пространства с одной и той же x -координатой в системе K (т. е. в одной и той же точке системы отсчета K), в любой другой системе отсчета K' имеют различные x' -координаты. Действительно, из (3.1) получим $\Delta x' = \Gamma (\Delta x - V \Delta t) = -\Gamma V \Delta t$. Но Δt — это промежуток собственного времени, и поэтому $\Gamma \Delta t = \Delta t'$. Отсюда $\Delta x' = -V \Delta t'$. Смысл последнего результата очевиден. Он определяет смещение точки x относительно системы K' , отсчитанное в системе K' .

§ 3.2. Относительность длины движущихся линеек (масштабов). Видимая форма тел, движущихся с релятивистскими скоростями. Рассмотрим теперь измерение длины движущейся линейки. Пусть в системе K синхронизованы часы и сделаны пространственные отметки. Допустим, что относительно K движется со скоростью V линейка, расположенная параллельно оси x . С этой линейкой можно связать систему K' . Как измерить длину этой же линейки в системе K ? Очевидно, нужно определить координаты конца и начала линейки в системе K , но обязательно *одновременно* в этой системе. Это требование одновременности ведет к непривычному для нас, хотя об этом уже говорилось в § 2.3, результату: длина линейки при измерении ее в системе отсчета, относительности которой она движется, оказывается меньше, чем при измерении ее в системе отсчета, где она покоится. Итак, пусть линейка неподвижна в системе K' , а координаты ее концов равны x'_1 и x'_2 . По определению ее длина в K' , которую, как мы уже указывали,

называют собственной длиной, равна $x'_2 - x'_1$. Обозначим собственную длину линейки через l_0 , т. е. $l_0 = x'_2 - x'_1$. Поскольку линейка неподвижна в системе K' , то об одновременности измерения координат ее концов можно не беспокоиться: ее длина измеряется любым обычным способом.

В системе K координаты концов линейки будут определяться согласно преобразованию Лоренца (см. (2.37а)):

$$x'_2 = \Gamma (x_2 - Vt_2), \quad x'_1 = \Gamma (x_1 - Vt_1).$$

Составив разность $x'_2 - x'_1$, мы получим

$$x'_2 - x'_1 = \Gamma \{(x_2 - x_1) - V(t_2 - t_1)\}. \quad (3.4)$$

Слева в (3.4) стоит собственная длина линейки. Справа в фигурных скобках стоят Δx и Δt для двух событий — положения левого конца линейки x_2 в момент t_2 и положения правого конца линейки x_1 в момент t_1 (в системе K).

Величина Δx только тогда будет длиной линейки в K , если положение концов линейки в K будет отмечено одновременно в K . Иначе для Δx можно получить любое значение. Вспомните пример с определением длины движущегося поезда в начале § 3.1: вы заметили положение хвоста поезда и медленно поворачиваете голову к его началу. Когда вы отметили положение начала, а затем промерите расстояние между отметками, измеренная длина будет *больше* собственной длины поезда. Сделайте наоборот: заметьте положение начала поезда и медленно поворачивайте голову к хвосту. Легко сообразить, что если немножко подождать, то длина поезда может оказаться даже равной нулю. Именно об этом и говорит формула (3.4). Итак, чтобы однозначно определить длину линейки в системе K , нужно рассмотреть два одновременных в K события: совпадение левого конца линейки с какой-то пространственной отметкой в K (допустим, x_1) и совпадение правого конца линейки с какой-то пространственной отметкой в K (допустим, x_2). Это значит, что $\Delta x = l$ лишь при условии $\Delta t = 0$. Но тогда из (3.4) следует $l_0 = \Gamma l$, где через l обозначена длина линейки, определенная в системе K . Обычно последнюю формулу принято писать так:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \equiv l_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3.5)$$

Конечно, при тех же самых условиях задачи можно воспользоваться и формулами обратного преобразования:

$$x_2 = \Gamma (x'_2 + Vt'_2), \quad x_1 = \Gamma (x'_1 + Vt'_1).$$

Вычитая правое равенство из левого, получим

$$\Delta x = \Gamma l_0 + \Gamma V (t'_2 - t'_1) = \Gamma l_0 + \Gamma V \Delta t'.$$

Но Δx превратится в длину l лишь при условии $\Delta t = 0$. Выразив с помощью (2.376) $\Delta t'$ через Δt и Δx : $\Delta t' = \Gamma \left(\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right)$ — и положив в этой формуле $\Delta t = 0$, мы снова получим (3.5).

Приведем еще два способа определения длины движущейся линейки, приводящих, естественно, к тому же результату. Пусть линейка AB покоится в системе K , так что ее левый конец A совпадает с началом отсчета O (рис. 3.1). В момент $t = 0$ с началом O совпадает начало системы K' (показания часов в O' : $t' = 0$). Затем наблюдатель в B отмечает момент прохода O' через точку B . Пусть это будет момент t . Скорость системы K' известна. Таким образом, собственная длина линейки равна $l_0 = V \Delta t$.

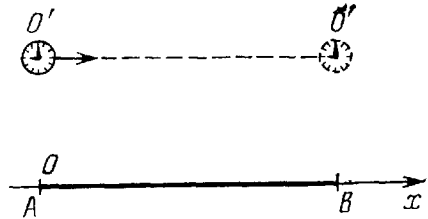


Рис. 3.1. К измерению длины движущейся линейки.

Это собственная длина, потому что она измеряется масштабами и часами из K , где линейка покоится. Скорость тоже определена в системе K . С другой стороны, наблюдатель из K' , находящийся в точке O' , по своим часам отметит моменты прохождения точек A и B (точку A в момент $t' = 0$, точку B в момент t'). Но мимо этого наблюдателя линейка движется тоже со скоростью V (в противоположную сторону), и наблюдатель из K' будет считать, что длина движущейся линейки l равна $l = V \Delta t'$. Но $\Delta t' = (t' - 0)$ — это промежуток собственного времени между двумя событиями (совпадение O' с A , а затем с B). Что касается $\Delta t = (t - 0) = t$ — это промежуток времени между теми же событиями в системе K . Согласно (2.2) $\Delta t = \Gamma \Delta t'$, а так как $\frac{l}{l_0} = \frac{\Delta t'}{\Delta t} \equiv \frac{1}{\Gamma}$, то

$$l = \frac{1}{\Gamma} l_0 = l_0 \sqrt{1 - V^2}.$$

Относительность длин — прямое следствие относительности одновременности. Пусть в K' покоится линейка, причем координаты ее концов x'_2 и x'_1 . Собственная длина $l_0 = \Delta x' = x'_2 - x'_1$.

Пусть в K' одновременно ($\Delta t' = 0$) на концах линейки вспыхивают лампочки и эти два события отмечаются в системе K . Найдем расстояние между точками, в которых наступили эти события в системе K : $\Delta x = \Gamma (\Delta x' + V \Delta t') = \Gamma \Delta x' = \Gamma l_0$ (см. (3.1')). Это означает, что расстояние между точками, в которых наступили эти два события, больше, чем собственная длина линейки. Но это расстояние вовсе не длина линейки, которую измерит наблюдатель в K . Чтобы определить длину линейки в K , нужно найти координаты концов линейки одновременно в

системе K . Одновременные в K' события происходят в K с относительным запозданием (рис. 3.2): $\Delta t = \Gamma \left(\Delta t' + \frac{V}{c^2} \Delta x' \right) = \Gamma \frac{V}{c^2} l_0$. Но за это время конец линейки x'_1 сдвинется по направлению движения на расстояние $V \Delta t = \Gamma V^2 l_0$. Таким образом, измеренная длина линейки будет меньше чем Γl_0 на величину $V \Delta t$, т. е.

$$l = \Gamma l_0 - \Gamma V^2 l_0 = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Напомним еще, что результат (3.5) был получен непосредственно из постулатов Эйнштейна (§ 2.3). Теперь пора остановиться на физическом смысле результата (3.5). Мы обнаружили, что длина физического тела (скажем, линейки) относительна, т. е.

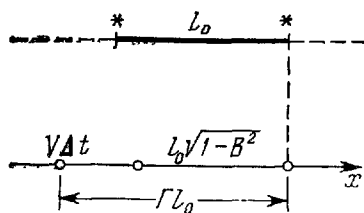


Рис. 3.2. Относительность длин линеек как следствие относительности одновременности наступления двух событий.

различна в разных системах отсчета. Наибольшую длину линейка имеет в той системе, где она покоится, т. е. собственная длина является наибольшей. Если определять длину линейки в любой инерциальной системе, относительно которой линейка движется, ее длина окажется меньше собственной.

Из формулы (3.5) вытекает, что если бы линейка могла двигаться со скоростью c , то ее длина оказалась бы равной нулю. Но такого случиться не может: любое тело, обладающее конечной массой покоя, в том числе и всякая реально возможная система отсчета, не может достичь скорости, равной c .

Что означает уменьшение длины линейки? Нередко можно услышать вопрос: становится ли линейка «на самом деле» короче? Прежде всего, ясно, что никакого сжатия линейки произойти не может. Это следует из основного принципа, положенного в основу СТО, — принципа равноправия всех ИСО. Во всех ИСО физическое состояние линейки одно и то же. Поэтому не может быть и речи о возникновении каких-либо напряжений, ведущих к деформации линейки. «Укорочение» линейки происходит исключительно в силу различных способов измерения длины в двух системах отсчета. С другой стороны, обнаруживаемая относительность длины линейки не является иллюзией наблюдателя. Этот результат получается при любом разумном способе измерения длины движущегося тела. Более того, рассматривая физические явления в данной системе отсчета, можно за длину тела принимать длину l согласно (3.5), а отнюдь не длину l_0 .

Крайне неудачно, имея в виду формулу (3.5), говорить о «лоренцевом сокращении», хотя эта формула действительно была введена впервые Г. А. Лоренцем в 1892 г. Но в нее вкладывался

совсем иной смысл (см. Дополнение II), чем тот, о котором мы рассказали.

Очень четко сказал Эйнштейн по поводу реальности лоренцева сокращения: «Вопрос о том, реально ли сокращение или нет, не имеет смысла. Сокращение не является реальным, поскольку оно не существует для наблюдателя, движущегося с телом; однако оно реально, так как оно может быть принципиально доказано физическими средствами для наблюдателя, не движущегося вместе с телом».

Часто спрашивают еще: чему равна длина линейки «на самом деле»? Этот вопрос лишен смысла, если его задавать «вообще». Вопрос о длине линейки безотносительно к какой-либо системе отсчета просто не имеет смысла. В каждой системе отсчета линейка имеет свою длину; это и есть ее длина «на самом деле». Все инерциальные системы отсчета равноправны, и определяемые в этих системах длины линейки все равноправны. В каждой системе отсчета линейка будет вести себя так, как если бы она имела длину, определенную в этой системе. Хотя все ИСО равноправны относительно друг друга, для линейки существует все же одна «избранная» привычная нам система координат, а именно та система, в которой она покоится. С точки зрения наших привычных представлений это и есть «настоящая» длина линейки; мы склонны принять ее за истинную длину, но эта длина определяет поведение линейки лишь в этой «собственной» системе отсчета.

Наконец, последнее замечание. Линейка существует объективно, т. е. вне нашего сознания и вне нас. Но есть ли у нас длина до того, как осуществлены измерения? Длина как некоторое число возникает в результате измерения и выбора единиц длины. Конечно, у линейки есть протяженность (если хотите, длина) как качество и до измерения, но до измерения нет численного значения длины. Таким образом, у объективно существующего тела численное значение длины возникает после измерения, а результат измерения, как мы установили, зависит от того, приборами какой системы мы пользуемся.

Рассмотрим теперь в двух системах отсчета K' и K'' линейки одинаковой собственной длины: l'_0 и l''_0 ($l'_0 = l''_0$). Измерения, произведенные в системе K' , покажут, что

$$l'_0 > l''_0. \quad (3.6)$$

Измерения, произведенные в системе K'' , покажут, что

$$l''_0 > l'_0. \quad (3.7)$$

Неравенства (3.6) и (3.7) отнюдь не противоречивы, потому что (3.6) получено для масштабов и часов системы K' , а (3.7) — для масштабов и часов системы K'' . Различие в получаемых значениях длины линейки кроется в том, что одновременность в системах K'

и K'' определяется по-разному. Трудность в интерпретации выводов специальной теории относительности состоит не в том, что существуют относительные величины, а в том, чтобы обнаружить равноправие всех инерциальных систем отсчета. Неравенства (3.6) и (3.7) как раз и отражают такое равноправие.

Вывод СТО об относительности длины движущегося тела необычен отчасти потому, что в повседневной жизни мы не ощущаем такого эффекта. Возьмем самое быстрое доступное нам движение — движение Земли по орбите. В этом случае $V = 30 \text{ км/сек}$. Отношение $V/c \sim 10^{-4}$ и $l = l_0 \sqrt{1 - 10^{-8}} \approx l_0 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot 10^{-8}\right) \approx l_0$. Снова следует подчеркнуть, что сокращение длин — прямое следствие конечности скорости света. Если бы скорость света была бесконечной, то, как видно из формулы (3.5), длина линейки была бы одинаковой во всех системах отсчета. Это видно также из того, что при $c \rightarrow \infty$ одновременность событий становится абсолютной.

Хотя до сих пор все время говорилось об относительности длины тел (линеек), следует помнить, что речь идет на самом деле об относительности расстояний между двумя неподвижными точками в одной системе отсчета при измерении их приборами из другой системы отсчета.

Рассмотрим кубик в системе K , где он покоится, со сторонами Δx , Δy , Δz и собственным объемом $\Delta \mathcal{V}_0 = \Delta x \Delta y \Delta z$. Согласно преобразованиям Лоренца в произвольной ИСО K' имеем $\Delta x' = (1/\Gamma) \Delta x$, $\Delta y = \Delta y$, $\Delta z' = \Delta z$ и, следовательно,

$$\Delta \mathcal{V}' = \Delta x' \Delta y' \Delta z' = (1/\Gamma) \Delta x \Delta y \Delta z = (1/\Gamma) \Delta \mathcal{V}_0.$$

Таким образом, изменение объема кубика при переходе от системы K к системе K' определяется формулой

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (3.8)$$

Из полученного результата вытекает, что собственный объем тела — инвариант преобразования Лоренца:

$$\Gamma' d\mathcal{V}' = \Gamma'' d\mathcal{V}'' = \mathcal{V}_0.$$

Можно ли непосредственно наблюдать лоренцево сокращение, скажем, наблюдая или фотографируя быстро движущееся тело? В первой работе Эйнштейна, посвященной теории относительности, можно прочесть следующее: «Тело, которое в состоянии покоя имеет форму шара, в движущемся состоянии — при наблюдении из покоящейся системы — принимает форму эллипсоида, с полуосями $R(1 - \beta^2)^{1/2}$, R , R » (Собрание научных трудов, т. I, стр. 18). Слово «наблюдение» в приведенном отрывке могло быть интерпретировано как визуальное наблюдение или фотографирование. Лет пятьдесят после появления СТО все были убеждены, что видимая форма релятивистски движущегося шара — эллипсоид. Оказа-

лось, однако, что вопрос о видимой форме тел, движущихся с релятивистской скоростью, требует учета многих обстоятельств и что быстро движущаяся сфера остается сферой. Если считать, что глаз и фотопластинка фиксируют мгновенное изображение, создаваемое светом, то это изображение создается лучами, идущими от разных участков тела, которым мы интересуемся, и приходящими одновременно на сетчатку глаза или фотопластинку. Но если оптические пути света,

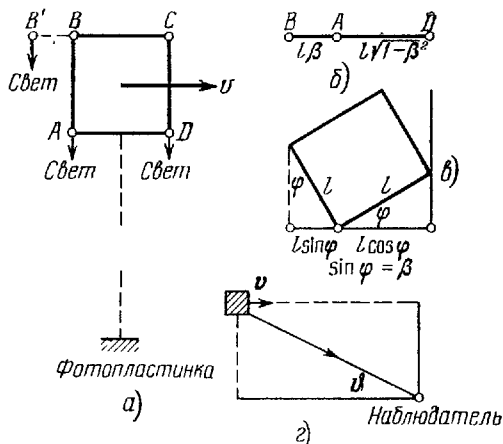


Рис. 3.3. Визуальное наблюдение куба, пролетающего мимо наблюдателя: а) взаимное расположение наблюдателя и куба при $\varphi = 0$; б) видимая картина летящего куба; в) возможная интерпретация видимой картины одним наблюдателем: поворот куба на угол $\varphi = \arcsin \beta$; г) наблюдение летящего куба под углом φ .

Допустим, что светящийся куб, движущийся вдоль прямой, параллельной одной из его

граней, пролетает мимо фотоаппарата (или наблюдателя). Фотографирование или наблюдение производится в тот момент, когда центр куба попадает на нормаль, опущенную из точки, где находится фотоаппарат, на направление движения (рис. 3.3, а). Конечно, мы заранее должны знать, что движущееся тело имеет форму куба в собственной системе отсчета.

В определенный момент времени к пластинке придут все фотоны, испущенные одновременно в системе пластинки па линии AD , и фотоны, испущенные точкой B раньше на интервал времени l/c (l — длина ребра куба). Но в этот момент времени точка B находилась в положении B' . Одновременное определение положений точек A и D в системе пластинки ведет, согласно обычному правилу измерения длины, к лоренцеву сокращению: $l' = l(1 - \beta^2)^{1/2}$. С другой стороны, $BB' = (l/c)v = \beta l$.

Из рис. 3.3, б и в можно понять, что картина, которую увидит бы неподвижный наблюдатель (идеализированный) при наблюде-

нии движущегося куба, совпадает с той, когда рассматривается неподвижный, но повернутый на некоторый угол φ куб. Этот угол определяется соотношением $\sin \varphi = \beta$. Это — частный случай более общего результата: всякое трехмерное движущееся тело видно в данный момент повернутым. Если же куб находится относительно наблюдателя в таком положении, что он в состоянии покоя виден под углом ϑ' относительно оси x' , то угол поворота будет другой. Если куб достаточно удален от наблюдателя, то идущий от него свет можно принять за параллельный пучок. Когда этот пучок наблюдается в системе K , то для наблюдателя в K он распространяется под углом ϑ к оси x , причем углы ϑ и ϑ' связаны соотношением (см. (7.11))

$$\cos \vartheta = (\cos \vartheta' + \beta) / (1 + \beta \cos \vartheta').$$

Изменение направления фронта плоской волны при переходе от одной системы отсчета к другой (находящейся в относительном движении) — это абберация света. Изображение, получаемое в этом случае на пластинке, соответствует кубу (рассматриваемому в K под углом ϑ), повернутому на угол $\vartheta - \vartheta'$.

Отсюда ясно, что сфера также поворачивается, но это не меняет форму ее контура (подробности см. в [28]).

И все же — можно ли сфотографировать тело так, чтобы было зафиксировано на пластинке релятивистское сокращение? Чтобы избежать трудностей с поворотом, можно взять одномерный объект, сравниваемый на пластинке с его собственной длиной. Для этого наблюдатель в K (стержень покоится в K') должен знать заранее, что стержень движется вдоль заданного направления, и собственную длину стержня. Тогда у себя в системе K он строит двойник движущегося стержня и фотографирует движущийся стержень на фоне его собственной длины.

Простейшая схема для фотографирования стержня, испытывающего лоренцово сокращение, могла бы быть такой (рис. 3.4). Стержень параллелен оси x и движется вдоль этой оси. Наблюдатель находится на нормали к оси x , причем эта нормаль проходит

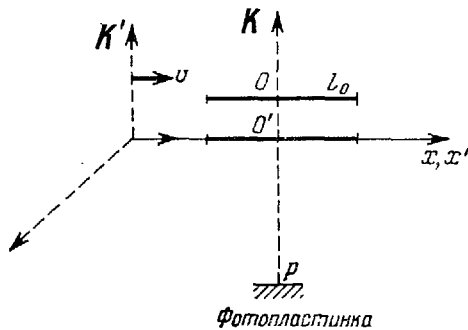


Рис. 3.4. Принципиальная схема, позволяющая сфотографировать лоренцево сокращение движущегося стержня. Когда середина стержня O' оказывается на линии PO , срабатывает устройство, открывающее (на мгновение) затвор в P так, чтобы он пропустил лучи, испущенные точками стержня в момент пересечения точкой O' линии PO .

ваемый на пластинке с его собственной длиной. Для этого наблюдатель в K (стержень покоится в K') должен знать заранее, что стержень движется вдоль заданного направления, и собственную длину стержня. Тогда у себя в системе K он строит двойник движущегося стержня и фотографирует движущийся стержень на фоне его собственной длины.

Простейшая схема для фотографирования стержня, испытывающего лоренцово сокращение, могла бы быть такой (рис. 3.4). Стержень параллелен оси x и движется вдоль этой оси. Наблюдатель находится на нормали к оси x , причем эта нормаль проходит

через середину двойника стержня, покоящегося в системе K' . Когда середина движущегося самосветящегося стержня оказывается на нормали, срабатывает механизм, открывающий затвор фотоаппарата; при этом на пластинке фиксируются одновременные положения начала и конца стержня. Сфотографировать неподвижный двойник можно, конечно, когда угодно. Скорее всего, это тоже «мысленный эксперимент».

Нельзя не упомянуть, однако, о том, что качественно «поворот куба», движущегося с релятивистской скоростью, был сфотографирован. За подробностями мы отсылаем читателя к [27].

Вообще, «видимая» картина может довольно существенно отличаться для различных наблюдателей. Вот простой пример. Пусть наблюдатель находится на некотором расстоянии от плоскости, на которой одновременно в системе, где покоятся плоскость и наблюдатель, вспыхивают лампочки или вообще производится вспышка света. Тогда из-за конечности скорости распространения света наблюдатель увидит, что плоскость постепенно начинает светиться, причем «волна освещения» бежит от центра к периферии. В частности, если одновременно мгновенно освещается бесконечная нить, удаленный наблюдатель видит две разбегающиеся световые точки.

По той же причине видимая (наблюдаемая) скорость также может отличаться от фактической: она может оказаться даже больше скорости света [33].

§ 3.3. Относительность промежутков времени между событиями. Допустим, что в некоторой точке системы K' наступили два события в моменты времени t'_1 и t'_2 . Промежуток времени, разделяющий эти события, может быть отсчитан по часам, находящимся в этой точке. По определению промежуток времени между событиями, наступившими в одной и той же точке некоторой системы отсчета, отсчитанный по одним часам этой системы, называется промежутком собственного времени между событиями. Обозначая промежуток собственного времени через Δt^0 , получим для нашего случая $\Delta t^0 = \Delta t' = t'_2 - t'_1$.

Определим теперь промежуток времени между рассматриваемыми событиями в системе K . Согласно (3.2) $\Delta t = \Gamma \Delta t' = \Gamma \Delta t^0$. Это уже известный нам результат (2.2).

Однако, если события в системе K' наступили в одной точке пространства, в любой другой системе K это уже не так. Действительно, пусть в K' два события произошли в разное время, но в одной точке, т. е. $\Delta x' = 0$, но $\Delta t' \neq 0$. Согласно (3.1) $\Delta x = \Gamma V \Delta t' \neq 0$. Смысл последнего результата очевиден: все точки системы K' движутся относительно K со скоростью V и Δx — это просто смещение любой точки системы K' за рассматриваемый промежуток. Так как $\Gamma \Delta t' = \Gamma \Delta t^0 = \Delta t$, то $\Delta x = V \Delta t$.

Таким образом, промежутки времени между одной и той же парой событий в различных ИСО оказываются различными. Наименьший интервал времени между событиями мы обнаружим в той системе отсчета, в которой эти события происходят в одной и той же точке, а следовательно, отмечаются одними и теми же часами, т. е. наименьшим является интервал собственного времени.

Промежуток времени между событиями с точки зрения системы K можно измерить еще и так. Точка системы K' , в которой наступают два рассматриваемых события, движется со скоростью V относительно K . Если в системе K события наступили в точках x_1 и x_2 , то промежуток времени между событиями Δt , очевидно, равен $\Delta t = \Delta x/V$. Но согласно (3.1) $\Delta x = \Gamma V \Delta t'$ ($\Delta x' = 0$), откуда мы снова получаем

$$\Delta t = \Gamma \Delta t' = \frac{\Delta t^0}{\sqrt{1-B^2}}. \quad (3.9)$$

Известно прямое экспериментальное подтверждение выводов СТО об относительности промежутков времени. Легкие частицы (μ -мезоны) были обнаружены, с одной стороны, в лаборатории — в результате расщепления ядер, а с другой — в космических лучах. Время жизни (время полураспада) μ -мезонов, измеренное в лаборатории, оказалось равным около $2 \cdot 10^{-6}$ сек. Это время жизни можно считать собственным временем жизни, поскольку скорости лабораторных мезонов нерелятивистские (см. (3.9); под скоростью координатной системы K' подразумевается скорость системы, связанной с мезоном). За время $\Delta t^0 = 2 \cdot 10^{-6}$ сек мезон распадается на другие частицы.

Известно, что μ -мезоны, наблюдаемые в космических лучах у Земли, образуются в верхних слоях атмосферы на высоте 5—6 км за счет первичного космического излучения. Скорость возникших μ -мезонов сравнима со скоростью света — с этой скоростью они движутся к Земле. Согласно (3.9) время полураспада мезона в лабораторной системе Δt равно $\Delta t = \Gamma \Delta t^0$. Для мезона $\Gamma \sim 10$ и в лабораторной системе отсчета $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5}$ сек. За это время μ -мезон пройдет расстояние с $\Delta t = 3 \cdot 10^{10} \times 2 \cdot 10^{-5} \approx 6$ км. Если бы релятивистского эффекта относительности промежутков времени не было, то мезон прошел бы всего около 600 м и мы не обнаружили бы μ -мезоны на уровне моря. Таким образом, только релятивистское преобразование интервалов времени позволяет объяснить наблюдаемый на Земле поток мезонов.

Прекрасной иллюстрацией относительности промежутков времени может служить эффект Доплера. Этот эффект состоит в том, что если источник света и наблюдатель (приемник) движутся относительно друг друга*), то частота света, определяемая наблюда-

*) Заметим, что, обращаясь далее к рассуждениям «классической» физики, мы будем все же всюду использовать типично релятивистское предположение

телем, отличается от той частоты, которую обнаружил бы наблюдатель, если бы он покоился относительно источника. Частоту света, определяемую наблюдателем, покоящимся относительно источника, естественно назвать собственной частотой света; обозначим ее через ω_0 . Все наши рассуждения относятся к вакууму.

Рассмотрим сначала случай, когда направление распространения света совпадает с направлением относительной скорости источника и наблюдателя (продольный эффект Доплера). На рис. 3.5, а

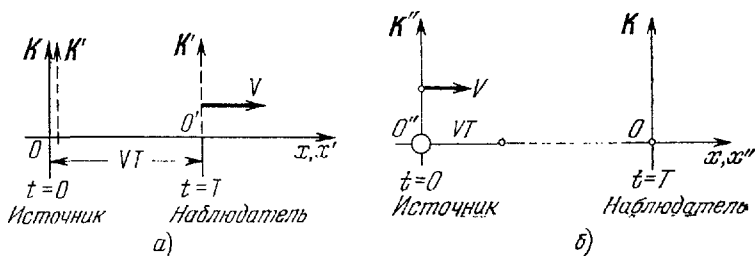


Рис. 3.5. К выводу формул для продольного доплер-эффекта: а) наблюдатель удаляется от источника; б) наблюдатель приближается к источнику.

это соответствует распространению света вдоль оси x, x' . При рассмотрении эффекта Доплера световую волну можно имитировать посылкой коротких импульсов из источника через промежуток времени (период) T . Допустим теперь, что такие импульсы посылаются из начала системы K , т. е. из точки O . Любой наблюдатель, покоящийся в этой системе, обнаружит, что эти импульсы приходят к нему также через промежуток времени T . Свяжем теперь наблюдателя с системой K' . Пусть в момент времени, когда O и O' совпадают ($t = 0, t' = 0$), из O посылается первый импульс, который, естественно, отметит и наблюдатель из O' . Следующий импульс выходит из O через промежуток времени T (по часам из K). Но в этот момент начало O' находится от O уже на расстоянии VT . Скорость света относительно O' в системе K равна $c - V$, поэтому световому лучу понадобится дополнительное время $VT/(c - V)$, чтобы дойти до начала O' . Таким образом, наблюдатель в O примет импульс через промежуток времени (по часам K)

$$T' = T + \frac{VT}{c - V} = \left(1 + \frac{V/c}{1 - V/c}\right) T = \frac{1}{1 - \beta} T. \quad [(3.10)]$$

Мы получили промежуток времени, разделяющий получение первого и второго сигнала наблюдателем в O' , отсчитанный по часам системы K . В системе K' прием сигнала происходит в одной точке O' и переход к промежутку времени (собственному проме-

о том, что для распространения света не требуется никакой материальной среды. Именно поэтому для нас существенна только относительная скорость источника и наблюдателя.

жутку) можно осуществить согласно (3.9): $T'_0 = (1/\Gamma) T'$, так что период T'_0 для наблюдателя из O' будет равен

$$T'_0 = \frac{1}{1-B} T \sqrt{1-B^2} = \sqrt{\frac{1+B}{1-B}} T. \quad (3.11)$$

Если перейти к частотам ($\omega_0 = 2\pi/T$, $\omega' = 2\pi/T'_0$), мы получим

$$\omega' = \sqrt{\frac{1-B}{1+B}} \omega_0 \approx \omega_0 (1-B). \quad (3.12)$$

Последний переход осуществляется проще всего так: числитель и знаменатель под корнем умножают на $1 - B$, в знаменателе в выражении $1 - B^2$ пренебрегают членом B^2 , тогда и получается правая часть (3.12). Эта формула годится для наблюдателя-удаляющегося от источника, — наблюдаемая частота меньше собственной.

Если наблюдатель приближается к источнику (на рис. 3.5, b точка O'' должна быть левее точки O), а из K'' посылаются сигналы, апалогичные рассуждения (источник и наблюдатель теперь сближаются; относительная скорость света $c + V$) ведут к формулам

$$T'' = \frac{1}{1+B} T, T''_0 = \sqrt{\frac{1-B}{1+B}} T \text{ и, наконец,}$$

$$\omega'' = \sqrt{\frac{1+B}{1-B}} \omega_0 \approx (1+B) \omega_0. \quad (3.13)$$

Формулы (3.12) и (3.13) (без приближенных значений) — точные релятивистские формулы для продольного доплер-эффекта. Они будут получены впоследствии (§ 7.2) на основе «строгих» релятивистских формул. Но приведенный вывод физически безупречен и вместе с тем ясно показывает, что эффект Доплера складывается из двух независимых частей: 1) он связан с непрерывно изменяющимся расстоянием между наблюдателем и источником; 2) он связан также с преобразованием промежутков времени между событиями при переходе от одной системы отсчета к другой. Первый фактор не имеет ни малейшего отношения к теории относительности. Продольный эффект Доплера качественно следует из классической теории, а соответствующая формула получается из (3.10). В формуле (3.10) «классически» ничего не надо менять, поскольку промежутки времени во всех системах отсчета одинаковы. Различие между классической формулой и релятивистской существенно лишь с точностью до B^2 . Последнее приближенное равенство в (3.12) как раз и дает классическое выражение, следующее из (3.10). Поскольку отношение B определяется относительной скоростью источника и наблюдателя, то, по крайней мере для макроскопических источников, отношение B очень мало и доплер-эффект определяется главным образом изменением расстояния между источником и наблюдателем.

Однако существует случай, когда относительная скорость источника и наблюдателя отсутствует, хотя системы, в которых покоятся источник и наблюдатель, движутся относительно друг друга. Это — случай, если наблюдается движущийся источник в тот момент, когда его скорость перпендикулярна направлению наблюдения (лучу зрения) (рис. 3.6, а). В момент наблюдения,

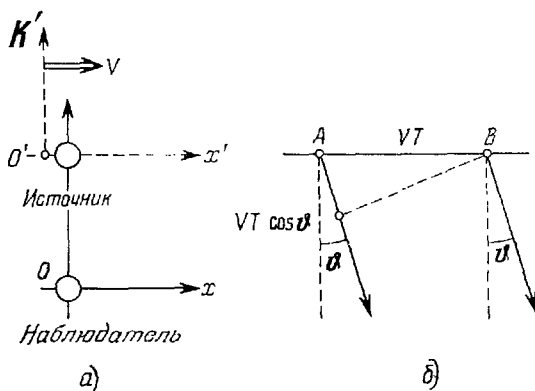


Рис. 3.6. К выводу формул для доплер-эффекта: а) поперечный эффект; б) общий случай

изображенный на рис. 3.6, а, расстояние между источником и наблюдателем не меняется. Следовательно, с классической точки зрения никакого доплер-эффекта быть не должно. Но с релятивистской точки зрения период посылки сигнала в K' (обозначим его через T'_0 , это интервал собственного времени, так что $\omega_0 = 2\pi/T'_0$) должен быть пересчитан на время наблюдателя по формуле (3.9), т. е. $T = T'_0/\sqrt{1 - \beta^2}$, откуда мы получаем для поперечного доплер-эффекта формулу

$$\omega' = \sqrt{1 - \beta^2} \omega_0. \quad (3.14)$$

Это уже формула второго порядка по β . Поперечный эффект обнаружить гораздо сложнее, чем продольный, но он был все же обнаружен в 1938 г. Его обнаружение, как видно из предыдущих рассуждений, является прямым доказательством относительности интервала между событиями. Еще раз повторим, что само существование поперечного доплер-эффекта вытекает только из СТО. Нетрудно получить формулу эффекта Доплера, если рассматривается излучение под углом ϕ к направлению движения источника (рис. 3.6, б). Если первый импульс посылается в точке A , а второй — в точке B , то разность хода параллельных лучей, идущих под углом ϕ к направлению скорости, равна $VT \cos \phi$. Отсюда ясно, что для наблюдателя $T' = T - \frac{VT \cos \phi}{c}$ и, соответственно,

$\omega' = \frac{\omega_0}{1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta}$. Заметим, что в этой формуле ω' и ω_0 измерены

в одной системе отсчета. Еще раз убеждаемся, что в классической физике поперечного доплер-эффекта ($\vartheta = \pi/2$) нет: $\omega' = \omega_0$.

Мы убедились в том, что если два события в некоторой системе отсчета наступают в одном месте (одноместны), то временной интервал между ними определяется как промежуток собственного времени (одними часами), а промежуток времени между этими же событиями в любой другой системе может быть найден согласно (3.9). Возникает вопрос: всегда ли можно от промежутка времени, найденного в произвольной системе отсчета, перейти к собственному промежутку? Оказывается, что это можно сделать не всегда, а условие, при котором это становится возможным, будет найдено в § 3.4.

Введем теперь понятие *собственного времени тела*. Пусть тело движется равномерно и прямолинейно относительно системы отсчета K . С движущимся телом можно связать систему K' ; в этой системе тело покоится, и, следовательно, происходящие с ним (или на нем) события отмечаются одними часами. Эти часы отсчитывают собственное время в точке, где находится тело; можно сказать, что они отсчитывают собственное время тела. Формула (3.9) в этом случае просто показывает, что промежуток собственного времени тела между событиями, происшедшими с телом или на теле, всегда меньше промежутка времени между этими же самыми событиями, отсчитанного по часам любой ИСО, относительно которой это тело движется. Не следует забывать при этом, что собственный промежуток времени отсчитывается одними часами, а промежуток времени в системе, относительно которой тело движется, — по крайней мере, двумя. Это очень существенно, потому что часто говорят, интерпретируя результат (3.9), что движущиеся часы идут медленнее неподвижных. Такой способ выражения может только запутать дело. Ведь часы во всех ИСО идут совершенно одинаково. Различным оказывается отсчет промежутков времени между событиями. Но это естественно, поскольку часы, синхронизованные в одной ИСО, рассинхронизованы в другой.

Собственное время можно ввести и для ускоренно движущейся частицы. Рассмотрим для этого движение частицы за бесконечно малый промежуток времени. Пусть скорость частицы в данный момент времени равна V . Рассмотрим теперь инерциальную систему отсчета K^* , движущуюся со скоростью V . В этой системе отсчета справедливо соотношение $dt = \sqrt{1 - \beta^2} dt$. Приблизительно это соотношение выполняется и для мгновенно-сопутствующей частице системы отсчета K' . Отличие системы K^* от мгновенно-сопутствующей системы K' состоит в том, что система отсчета K'

обладает ускорением, а система K^* — нет, хотя они движутся в данный момент времени с одинаковой скоростью. По чем меньше интервал времени dt , тем точнее годится соотношение $d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt$ для системы K' . Если проинтегрировать это выражение, мы получим точное выражение для τ , которое по смыслу является суммарным «собственным» временем любых систем координат K^* .

Исходя из этих соображений, будем считать, что если по часам, связанным с сопутствующей телу системой отсчета, интервал между событиями, происшедшими с телом, оказался равным $d\tau$, то по часам другой ИСО, относительно которой тело движется, промежуток времени между этими же событиями dt окажется равным, согласно (3.9),

$$dt = \gamma d\tau,$$

где

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}; \quad (3.15)$$

теперь уже $v = v(t)$ — это скорость тела (а не системы отсчета), почему и введены обозначения β и γ . Когда скорость тела переменна и задается зависимостью $v = v(t)$, связь между конечным промежутком времени τ и промежутком времени, отсчитанным по часам системы, относительно которой тело движется, получается интегрированием:

$$\tau - \tau_0 = \int_{t_0}^t \sqrt{1 - \left(\frac{v(t)}{c}\right)^2} dt. \quad (3.16)$$

Что за величина стоит в левой части (3.16)? Ее можно, конечно, назвать собственным временем тела. Но как ее измерить? Ведь, строго говоря, соотношение (3.9) годится для часов в инерциальных системах отсчета, а если часы скреплены с произвольно движущимся телом, они испытывают ускорение. Ускорение, безусловно, влияет на ход часов (по-разному для часов различной конструкции; если вы не верите в это, бросьте ваши часы на пол). Но тогда трудно говорить об отсчетах времени с помощью таких часов. Разумная интерпретация формулы (3.16) заключается в том, что время $\tau - \tau_0$ — это суммарное время, измеренное многими сопутствующими телу инерциальными системами, или — это то же самое — время, отсчитанное часами, жестко связанными с телом, но такими, на которые абсолютно не влияет ускорение тела.

Следует подчеркнуть, что различие показаний часов из различных инерциальных систем отсчета которое мы получили, не имеет ни малейшего отношения к какому-либо нарушению хода часов в той или иной системе. Как и в случае измерения длины линеек, речь идет просто о разных способах измерения времени. Все

часы во всех системах отсчета идут идеально точно. Однако измерения промежутков времени между двумя событиями, производимые двумя наборами часов из разных систем отсчета, по-своему синхронизованных в своей системе отсчета, приводят к получаемому результату: промежуток собственного времени между двумя событиями оказывается всегда наименьшим.

Рассмотрим пример (вполне аналогичный примеру, приведенному в связи с изменением длины масштаба), показывающий, что замедление времени обусловлено различными способами его сравнения. Возьмем совершенно одинаковые часы: A в системе K и A' в системе K' (это могут быть атомы одинакового сорта). Пусть мы наблюдаем за часами A' системы K' , т. е. сравниваем часы A с последовательностью часов, синхронизованных с часами A' . Тогда наблюдатели из K' обнаружат, что часы A идут медленнее по сравнению с набором часов из K' . Напротив, если следить за одними часами A' системы K' , то наблюдатели из системы K обнаружат, что часы A' идут медленнее, чем набор часов из K' . Противоречивы ли эти результаты? Нет. Мы ясно видим, что способы сравнения часов в первом и втором случаях различны. Всегда оказываются отстающими те единственные часы, которые сравниваются с разными часами другой системы отсчета. Такое удивительное положение оказывается неизбежным. В основе теории относительности лежит равноправие всех ИСО, и, когда возникают относительные величины, они возникают одинаково во всех ИСО.

§ 3.4. Классификация интервалов и принцип причинности. Из формул (3.1) и (3.2) видно, что если взять два произвольных события, то как пространственное расстояние между ними, так и промежуток времени между их наступлением оказываются относительными величинами ($\Delta x' \neq \Delta x$, $\Delta t' \neq \Delta t$). До сих пор мы сталкивались с событиями частного вида: при измерении длин рассматривались координаты концов линейки x_2 и x_1 одновременно ($t_1 = t_2$); при определении интервала времени рассматривались моменты времени t'_1 и t'_2 в одной и той же точке $x'_2 = x'_1$. Но уже и в этих случаях пространственные и временные «расстояния» между событиями оказались относительными. Не удивительно, что они оказываются относительными в общем случае. Вместе с тем, как мы знаем, непосредственно из постулатов Эйнштейна вытекает, что инвариантом преобразований Лоренца является интервал между событиями:

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} = \\ = \sqrt{c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2}. \quad (3.17)$$

Обозначения те же, что и при выводе формул (3.1) и (3.2). Удобно ввести также отдельные обозначения для пространственного и

временного расстояний между событиями:

$$l_{12}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \quad \Delta t = t_{12}. \quad (3.18)$$

Записав квадрат интервала между двумя событиями в K в виде $s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$ и квадрат интервала между этими же двумя событиями в K' : $s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$, мы выпишем условие инвариантности интервала $s_{12}'^2 = s_{12}^2$ в виде

$$c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2 - c^2 t_{12}^2 + l_{12}^2 = 0. \quad (3.19)$$

Рассматривая события в произвольной системе отсчета K , мы скорее всего обнаружим, что события происходили в разных точках пространства и в разные моменты времени.

Нельзя ли за счет выбора системы отсчета K' добиться: а) чтобы события I и II происходили в одной и той же точке пространства; б) чтобы события I и II происходили в один и тот же момент времени и, наконец, в) чтобы события I и II происходили в одной точке пространства и в один и тот же момент времени? Начнем по порядку.

Итак, а) можно ли подобрать такую систему K' , в которой эти события произойдут в одной и той же точке пространства, т. е. будут одновременными? Это означает, что в системе K' должно быть $l_{12}' = 0$. Но тогда из (3.19) следует, что

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 \geq 0, \quad (3.20)$$

т. е. $s_{12}'^2 \geq 0$, а интервал s_{12} должен быть действительным. В системе K' рассматриваемые события происходят в одной точке пространства, и с точностью до множителя c интервал между ними сводится к временному интервалу:

$$t_{12}' = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2} = \frac{s_{12}}{c}. \quad (3.21)$$

Поэтому действительные интервалы между событиями носят название *временноподобных интервалов*. Условие временноподобности интервала можно записать еще в виде $l_{12} < ct_{12}$.

Рассмотрим движение частицы, обладающей массой покоя (только такие тела и рассматриваются в обычной механике). Допустим для простоты, что эта частица равномерно движется вдоль оси x и за время Δt перемещается на расстояние Δx . В системе K' эта частица сместится на $\Delta x'$ за время $\Delta t'$, определенное согласно (3.1) и (3.2). Отношение $\Delta x/\Delta t = v$ — скорость частицы в системе K . Учитывая это обстоятельство, перепишем (3.1) и (3.2):

$$\Delta x' = \Gamma (\Delta x - V \Delta t) - \Gamma \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - V \right) \Delta t = \Gamma (v - V) \Delta t, \quad (3.22)$$

$$\Delta t' = \Gamma \left(\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x \right) = \Gamma \left(1 - \frac{V}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \Delta t = \Gamma \left(1 - \frac{Vv}{c^2} \right) \Delta t. \quad (3.23)$$

Из (3.22) легко найти скорость той системы K' , в которой два рассматриваемых события одновременны, положив $\Delta x' = 0$. Из правой части сразу же получаем очевидный ответ $V = v$. Это просто система, сопутствующая частице. Из (3.23) вытекает еще одно важное следствие. Пусть $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$. Это значит, что событие II наступило позже события I. Есть ли такая система K' , в которой $\Delta t' < 0$, т. е. временная последовательность событий изменилась на обратную по сравнению с системой K ? Из (3.23) видно, что знак $\Delta t'$ будет совпадать со знаком Δt в том случае, когда $(1 - \frac{Vv}{c^2}) > 0$. Но это условие выполняется всегда, так как скорость тела v всегда меньше c . (Система отсчета — это тоже материальное тело.) Вместе с тем это же условие выполняется и для любой пары событий, связанных времениподобным интервалом. Действительно, в третьем звено равенства (3.23) входит выражение $(1 - \frac{V}{c} \frac{\Delta x}{c \Delta t})$. Как видно из (3.18), $l_{12} \geq \Delta x$ и если $ct_{12} > l_{12}$, то заведомо $c \Delta t > \Delta x$. Это значит, что отношение $\Delta x/c \cdot \Delta t$ меньше единицы; V/c всегда меньше единицы, поэтому $(1 - \frac{V}{c} \frac{\Delta x}{c \Delta t}) > 0$, и, следовательно, $\Delta t' > 0$.

Следовательно, понятия «позже» и «раньше» для двух этих событий, рассматриваемых с точки зрения систем K и K' , имеют одинаковый, т. е. абсолютный, характер. Вообще, если интервал между событиями времениподобный (напомним, что значение интервала — величина инвариантная), то последовательность событий во времени сохраняется во всех ИСО. Мы увидим ниже, что для интервалов, отличающихся знаком от времениподобных, это совсем не так.

Какое значение имеет сохранение последовательности во времени для всех инерциальных систем отсчета? Мы начали с того, что два события, разделенные времениподобным интервалом, в какой-то системе отсчета окажутся одновременными. Если одно из них произошло «раньше», а второе «позже», то первое может быть причиной возникновения второго, т. е. эти события могут быть связаны между собой причинно-следственной связью. Но тогда их временная последовательность не может зависеть от выбора системы отсчета. Из наших результатов как раз и следует критерий возможности причинно-следственной связи (интервал — времениподобный). Последовательность же событий во времени сохраняется во всех системах отсчета автоматически.

Времяподобный интервал между событиями указывает на возможность причинно-следственной связи между событиями не только потому, что обеспечивает одинаковую последовательность событий во времени во всех ИСО. Он указывает на физическую возможность влияния одного события на другое. Из неравенства

$l_{12}^2 < c^2 t_{12}^2$, характеризующего времениподобный интервал, вытекает, что за время, прошедшее между наступлением событий, свет заведомо может пройти от точки, где произошло событие I, к точке, где произошло событие II (произведение $c(t_2 - t_1)$ как раз и есть путь света за время $t_2 - t_1$). Это означает, что в принципе за промежуток времени между наступлением события I и наступлением события II некоторое взаимодействие (сигнал) могло бы распространиться от точки, где произошло событие I, к точке, где происходит событие II. Не претендуя на общность в постановке вопроса, будем считать, что одно событие может влиять на другое только через физическое (силовое) взаимодействие. Тогда, если событие I наступило, «сигнал» о том, что оно наступило, может попасть в точку, где произойдет событие II, до того, как событие II наступит. Это означает, что событие I может быть причиной события II, а событие II — следствием события I. В этом случае события могут находиться в причинно-следственной связи. Таким образом, и с физической точки зрения события, разделенные времениподобным интервалом, могут находиться в причинно-следственной связи. Разумеется, они могут и не находиться в такой связи. Речь идет только о принципиальной возможности. Существовавши, что для таких интервалов не нарушается последовательность событий во времени: следствие не может влиять на свою причину.

б) Перейдем теперь к рассмотрению интервалов другого знака. Снова рассмотрим условие инвариантности интервала (3.19) и выясним, можно ли найти такую систему координат K' , в которой два заданных события I и II происходят одновременно. Это значит, что в этой системе $t'_{12} = 0$.

Таким образом, $s_{12}^2 = -l_{12}^2 < 0$. Квадрат интервала между событиями должен быть отрицательным, а сам интервал оказывается мнимым. В системе K' рассматриваемые события происходят в один и тот же момент времени, и интервал между ними сводится (с точностью до мнимой единицы) к пространственному интервалу $l'_{12} = is_{12}$. Поэтому мнимые интервалы называются *пространственноподобными*. Условие пространственноподобности интервала можно записать еще и в виде $l_{12} > ct_{12}$.

Можно ли найти систему отсчета, в которой для двух данных событий $\Delta t' = 0$? Из (3.2), положив $\Delta t' = 0$, мы получаем для V значение

$$V = c \frac{c \Delta t}{\Delta x}. \quad (3.24)$$

Так как можно всегда подобрать события так, что $l_{12} = \Delta x$, то из условия пространственноподобности интервала следует для этого случая $\Delta x > c \cdot \Delta t$. Из (3.24) вытекает, что мы можем получить $V < c$, т. е. в принципе такую систему подобрать можно. В третье

звено равенства (3.23) входит отношение $\Delta x/c \cdot \Delta t$; как мы сказали, оно может быть больше единицы. Но это значит, что множитель $(1 - \frac{V \Delta x}{c \Delta t})$ за счет выбора V можно сделать отрицательным.

Отсюда вытекает, что временная последовательность двух событий, связанных пространственноподобным интервалом, может быть изменена за счет перехода от одной ИСО к другой. Это не годится для событий, которые могли бы находиться в причинно-следственной связи. Но с физической точки зрения они и не могут находиться в такой связи. Действительно, условие $l_{12}^2 > c^2 t_{12}^2$ говорит о том, что за время, которое проходит между событиями, никакой «сигнал» не может быть передан из точки, где наступило событие I, в точку, где наступит событие II. Следовательно, события, разделенные пространственноподобным интервалом, в причинной связи находиться не могут.

Итак, специальная теория относительности позволяет указать условия, при которых причинно-следственная связь между событиями оказывается возможной или невозможной. Это очень важный критерий, который в общем виде нельзя получить из других соображений. Следует, конечно, еще раз подчеркнуть, что все наши рассуждения опираются на представление о существовании предельной скорости передачи сигнала.

в) Если нас интересует система отсчета, в которой события были бы и одновременны и одноместны, т. е. соблюдались бы два равенства $t'_{12} = 0$ и $l'_{12} = 0$, то для этого было бы необходимо совместное выполнение двух условий: $s_{12} \geq 0$ и $s_{12} \leq 0$. Но они выполняются совместно лишь в том случае, если $s_{12} = 0$ и $s'_{12} = 0$. Если рассматриваемые события не состоят в посылке и приеме световых сигналов, то равенство интервалов нулю может быть лишь в том случае, когда оба события совпадают и в K и в K' . Совпадение событий, конечно, не зависит от выбора системы отсчета.

Интервал между двумя событиями, наступившими в данной системе в разных точках пространства и в разные моменты времени, равный по абсолютной величине нулю, уместно назвать *светоподобным интервалом*. Светоподобным интервалом связаны события, состоящие в последовательном прохождении световой волны через различные точки пространства. Мы убедились в этом уже в начале § 2.6.

§ 3.5. Преобразование компонент скорости частицы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Из преобразований Галилея для координат и времени (1.2) было получено правило (1.4) преобразования скорости частицы при переходе от одной ИСО к другой: $v' = v - V$. Это правило не удовлетворяет второму постулату Эйнштейна, поскольку скорость света в вакууме оказывается разной в различных системах отсчета. Из преоб-

разований Лоренца следуют формулы преобразования для скорости, которые удовлетворяют постулатам Эйнштейна. К выводу этих формул мы и переходим.

Рассмотрим движение частицы с точки зрения двух ИСО — K и K' . Скорости определяются обычным образом:

<p>В системе K</p> <p>Если</p> $x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$ <p>то</p> $v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$		<p>В системе K'</p> <p>Если</p> $x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t'),$ <p>то</p> $v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}.$
--	--	---

Подразумевается, что между x , t и x' , t' установлена связь (через преобразования Лоренца), так что независимой переменной можно считать, скажем, t . При изменении t на dt получают приращения все переменные; запишем эти приращения в дифференциалах, дифференцируя преобразования Лоренца (см. (2.16)):

$$dx = \Gamma(dx' + V dt'), \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \Gamma\left(dt' + \frac{B}{c} dx'\right). \quad (3.25)$$

Разделив первые три равенства (3.25) на последнее почленно, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{B}{c} dx'}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\Gamma\left(dt' + \frac{B}{c} dx'\right)},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{\Gamma\left(dt' + \frac{B}{c} dx'\right)}.$$

В каждом из полученных равенств делим числитель и знаменатель правых частей на dt' . В итоге получим

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}. \quad (3.26)$$

Это и есть формулы релятивистского преобразования скоростей. По этим формулам, зная компоненты скорости v'_x , v'_y , v'_z в

системе K' и скорость системы K относительно K' (эта скорость равна $-V$), можно найти компоненты v_x, v_y, v_z в системе K . Чтобы получить формулы обратного перехода, нужно изменить знак скорости V и поставить штрихи у величин, где их не было, а там, где они были, — убрать:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - B \frac{v_x}{c}}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - B^2}}{1 - B \frac{v_x}{c}}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - B^2}}{1 - B \frac{v_x}{c}}. \quad (3.27)$$

Тот же самый ответ получится, конечно, и непосредственно из формул (3.26). Из формул (3.26) и (3.27) видно, что равномерное движение в одной ИСО окажется равномерным и во всех других ИСО. Таким образом, равномерное прямолинейное движение является выделенным. Напротив, равноускоренное движение в некоторой ИСО, согласно релятивистской кинематике, вовсе не является равноускоренным в других ИСО (см. § 5.1).

В формулах (3.26) и (3.27) ось x выделена по сравнению с осями y и z . Это связано лишь с тем, что вдоль оси x направлена относительная скорость систем отсчета K и K' . Если в этих формулах перейти к пределу $B \rightarrow 0$, т. е. положить формально $c \rightarrow \infty$, мы возвращаемся к преобразованию (1.4) Галилея. Это означает, что для двух систем отсчета, относительная скорость которых мала по сравнению со скоростью света, преобразования Галилея достаточно точны, поэтому в повседневной жизни не приходится прибегать к релятивистским представлениям. Еще раз мы убедились, что отличие релятивистских представлений от классических связано с конечностью скорости света. Заметим, что формулы (3.26) и (3.27) естественно получаются на основе четырехмерного подхода к теории относительности.

Рассмотрим движение по оси x' . В этом случае в системе отсчета K' компоненты скорости будут $v'_x = v', v'_y = 0, v'_z = 0$. По формулам (3.26) мы получаем, что в системе K компоненты v_y и v_z равны нулю. Следовательно, движение и в системе K происходит по оси x , а $v_x = v$. Поэтому согласно (3.26)

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'}. \quad (3.28)$$

Если положить $v' = c$, то из (3.28) следует $v = c$. Это соответствует второму постулату Эйнштейна: скорость света в вакууме во всех ИСО одинакова.

Заметим при этом сразу же, что подставлять в (3.28) $v' = c$ не очень последовательно, поскольку материальные частицы, представляющие собой «сигнал», не могут двигаться со скоростью c ,

а формула выведена для материальных частиц ($m \neq 0$). Однако в формуле (3.28) можно полагать $v' = c$, рассматривая кванты света (фотоны) как релятивистские частицы (§ 7.6). Кроме того, существуют ультррелятивистские частицы, скорость которых близка к скорости света. Так, например, скорость электронов в Ереванском ускорителе отличается от c в восьмом (!) знаке.

В качестве еще одного примера использования формулы сложения скоростей (3.28) приведем объяснение результатов опыта

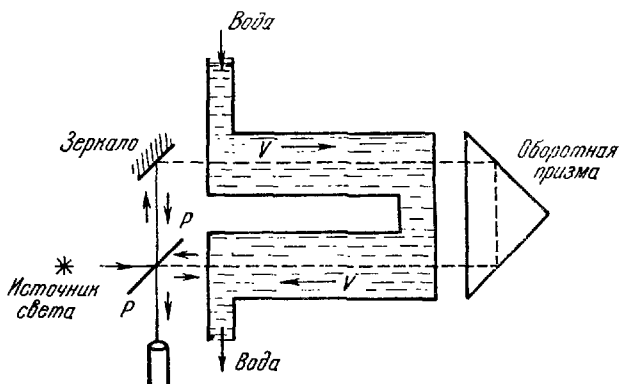


Рис. 3.7. Схема опыта Физо. Луч света от источника расщепляется полупрозрачной пластинкой РР на два пучка, один из которых идет в воде по течению, а другой — против. Френель, которого интересовал вопрос о том, как распространяется свет в движущейся среде, предполагал, что если скорость света в неподвижной воде v' , скорость движения воды V , то скорость света v для наблюдателя, относительно которого вода движется, равна $v = v' \pm kV$, где знак «+» соответствует распространению света по течению, а знак «-» — распространению против течения; k называется коэффициентом увлечения. Коэффициент увлечения искал Физо, поставивший описываемый опыт. Из результатов опыта Физо следовало, что $k = 1 - 1/n^2$. Теория относительности весьма естественно объясняет результат Физо (см. текст). Подробности опыта можно найти в книгах [13] и [15].

Физо. В опыте сравнивалась скорость света в неподвижной относительно наблюдателя (лаборатории) воде и в воде, движущейся со скоростью V . Скорость света в неподвижной воде равна c/n . Затем (рис. 3.7) свет пропускали через движущуюся воду, а его скорость определялась в лабораторной системе отсчета по наблюдению интерференции двух пучков света — идущего по течению воды и против. Из результатов опыта Физо следовало, что к фазовой скорости света в неподвижной воде нужно было еще добавить скорость воды V , умноженную на $(1 - 1/n^2)$, где n — показатель преломления воды. Таким образом, если фазовая скорость света в неподвижной воде $v' = c/n$, то фазовая скорость, определенная в лабораторной системе, оказалась равной

$$v = \frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2} \right). \quad (3.29)$$

Используя формулу (3.28), мы получим, что в лабораторной системе в силу закона преобразования скоростей

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{cn}} = \frac{\left(\frac{c}{n} + iV\right) \left(1 - \frac{V}{cn}\right)}{1 - \left(\frac{V}{cn}\right)^2}.$$

Пренебрегая в знаменателе величиной $(V/cn)^2$, малость которой определяется тем, что скорость воды нерелятивистская $((V/c)^2 \ll 1)$, получим

$$v \approx \frac{c}{n} + V \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{V^2}{cn} = \frac{c}{n} \left[1 + \frac{V}{c} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) n - \frac{V^2}{c^2}\right]. \quad (3.30)$$

В выражении (3.30) в том же приближении пренебрегаем членом V^2/c^2 и получаем результат Физо (3.29). Таким образом, формула преобразования скоростей Эйнштейна дает естественное объяснение результатов опыта Физо (ср. § 1.7).

Мы уже говорили о том, что важнейшим предположением современной физики является утверждение о невозможности передачи сигналов (взаимодействий) со скоростью большей, чем скорость света. Но с помощью движущегося тела, несомненно, можно передать сигнал (энергию, импульс), поэтому скорость тела не может превышать c . Релятивистская механика приводит к тому, что материальное тело (т. е. тело, обладающее массой покоя) не может даже достичь этой скорости, а всегда имеет меньшую скорость. Но это справедливо в определенной ИСО. Нельзя ли за счет выбора системы отсчета получить в другой ИСО скорость, превышающую c ?

Если бы из классической механики следовало, что в заданной ИСО скорость тела никогда не превышает c , то только за счет выбора системы отсчета можно было бы получить скорость тела, превышающую c . Действительно, согласно формуле (1.4) $v = v' + V$, где v' — скорость тела относительно K' , а V — относительная скорость систем отсчета K и K' . Если скорости v' и V превышают $0,5c$, то скорость тела v в системе K будет больше c .

Но в СТО преобразование скоростей происходит, как мы видели, иначе. Из (3.26) и (3.27) видно, что скорости частицы и системы отсчета отнюдь не складываются по правилу сложения векторов. Более того, при сложении скоростей в СТО действует невероятное правило $c + c = c$.

Из формул (3.26) или (3.27) следует, что если скорость частицы в K меньше c ($v/c < 1$), а скорость K' относительно K также меньше c ($V/c < 1$), то скорость частицы, определенная в K' , всегда меньше c . Самое простое доказательство этого утверждения для случая одномерного движения проводится с помощью формулы (3.28). Составив выражение $(v/c) - 1$, записываем цепочку

равенств:

$$\begin{aligned} \frac{v}{c} - 1 &= \frac{\frac{v'}{c} + \frac{V}{c}}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} - 1 = \frac{\frac{v'}{c} + \frac{V}{c} - 1 - \frac{Vv'}{c^2}}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} = \\ &= \frac{\frac{v'}{c} \left(1 - \frac{V}{c}\right) - \left(1 - \frac{V}{c}\right)}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} = - \frac{\left(1 - \frac{V}{c}\right) \left(1 - \frac{v'}{c}\right)}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} < 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Отсюда ясно, что $v < c$.

Но нельзя ли последовательными переходами от одной ИСО к другой прийти к относительной скорости систем отсчета, превышающей c ? Собственно говоря, система отсчета — это система материальных тел, и для ответа мы могли бы воспользоваться только что полученной теоремой. Конечно, в СТО в любом случае нельзя получить относительную скорость систем отсчета, большую c . Но мы получим этот результат еще раз иным путем, который сам по себе поучителен.

Введем кроме системы K еще две системы отсчета K' и K'' . Чему равна относительная скорость систем отсчета K и K'' , если известны относительные скорости систем K и K' , с одной стороны, и систем K' и K'' , с другой? Пусть относительная скорость K и K' равна V , а относительная скорость K' и K'' равна W . Если ввести обозначения $B_1 = V/c$, а $B_2 = W/c$ и, соответственно, $1/\Gamma_1 = \sqrt{1 - B_1^2}$, $1/\Gamma_2 = \sqrt{1 - B_2^2}$, то

$$x = \Gamma_1(x' + Vt'), \quad t = \Gamma_1\left(t' + \frac{B_1}{c}x'\right), \quad (3.32)$$

$$x' = \Gamma_2(x'' + Wt''), \quad t' = \Gamma_2\left(t'' + \frac{B_2}{c}x''\right). \quad (3.33)$$

Подставим (3.33) в (3.32), чтобы найти непосредственную связь между координатами и временем в системах K и K'' :

$$\begin{aligned} x &= \Gamma_1\Gamma_2(x'' + Wt'' + Vt'' + B_1B_2x'') = \\ &= \Gamma_1\Gamma_2\{(1 + B_1B_2)x'' + (V + W)t''\} = \\ &= \Gamma_1\Gamma_2(1 + B_1B_2)\left(x'' + \frac{V+W}{1+B_1B_2}t''\right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Аналогично можно получить

$$t = \Gamma_1\Gamma_2(1 + B_1B_2)\left(t'' + \frac{1}{c}\frac{V+W}{1+B_1B_2}x''\right). \quad (3.35)$$

Обозначим

$$\frac{V+W}{1+B_1B_2} = \frac{V+W}{1+VW/c^2} = U. \quad (3.36)$$

Вычислим первые множители в выражениях (3.34) и (3.35):

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \Gamma_2 (1 - V_1 V_2) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{(1 - V_1^2)(1 - V_2^2)}{(1 + V_1 V_2)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + V_1^2 V_2^2 - 2V_1 V_2 - (V_1^2 + V_2^2 + 2V_1 V_2)}{(1 + V_1 V_2)^2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_1 + V_2}{1 + V_1 V_2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}. \end{aligned}$$

Тогда (3.34) и (3.35) можно записать в виде

$$x = \frac{x'' + Ut''}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t'' + \frac{U}{c} x''}{\sqrt{1 - \frac{U^2}{c^2}}}.$$

Следовательно, два последовательных преобразования Лоренца с относительными скоростями систем отсчета, равными V и W , эквивалентны одному преобразованию с относительной скоростью U , определенной согласно (3.36). Другими словами, относительные скорости систем отсчета также «складываются» по правилу (3.28). Но мы уже убедились, что в результате такого сложения получить скорость, большую чем скорость света, нельзя.

Формулу (3.36) легко получить с помощью комплексного вращения (см. § 2.8). С геометрической точки зрения переход от K к K' и затем от K' к K'' представляет собой последовательный поворот в плоскости (x, τ) на углы φ_1 и φ_2 , причем $\operatorname{tg} \varphi_1 = iV_1$, а $\operatorname{tg} \varphi_2 = iV_2$.

Тангенс результирующего угла можно найти по обычной формуле для тангенса суммы двух углов ($\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2},$$

или

$$iV = \frac{iV_1 + iV_2}{1 + V_1 V_2},$$

а это как раз и есть формула (3.36), если заменить V , V_1 и V_2 их значениями. Оба последних соотношения показывают, что совокупность преобразований Лоренца обладает основным свойством группы (в смысле математической теории групп): два преобразования Лоренца дают снова преобразование Лоренца (здесь существенно, однако, что относительная скорость всегда направлена по оси x).

Приведем полезную интерпретацию формулы (3.28). В § 2.7 мы ввели параметр скорости θ , связанной с относительной скоростью систем отсчета соотношением $V = -\operatorname{th} \theta$. Можно ввести

также параметр скорости частицы $\beta = -\text{th } \theta$. Тогда (3.28) перепишется в виде

$$\beta \equiv \text{th } \theta = \frac{\beta' + B}{1 + \beta' B} = -\frac{\text{th } \theta' + \text{th } \vartheta}{1 + \text{th } \theta' \cdot \text{th } \vartheta} = -\text{th } (\theta' + \vartheta); \quad (3.37)$$

последнее звено равенства записано на основании формул Приложения I, § 9. Это — интересный результат. В классической теории складываются скорости (2.4), в релятивистской теории складываются параметры скоростей; последним обстоятельством мы воспользуемся в § 5.7.

§ 3.6. Преобразование абсолютной величины и направления скорости частицы. Из формул преобразования компонент скорости (3.26) можно получить выражения, определяющие абсолютную величину скорости и ее направление в системе K , зная компоненты скорости в K' . Прежде всего, очевидно, что если в K' компонента скорости $v'_z = 0$, то и в K компонента $v_z = 0$. Это значит, что если в системе K' движение происходит в плоскости (x', y') , то и в K движение будет происходить в плоскости (x, y) . Выберем оси x' и y' так, чтобы скорость частицы лежала в K' в плоскости (x', y') . Тогда ясно, что если θ' — угол, составляемый скоростью v' с осью x' , то $v'_x = v' \cos \theta'$, $v'_y = v' \sin \theta'$. Угол, составляемый скоростью v с осью x в системе K , мы обозначим через ϑ . Следовательно, $v_x = v \cos \vartheta$, $v_y = v \sin \vartheta$. Пойдем формулы, связывающие v и ϑ с v' и θ' . Перепишем две первые формулы (3.26), выразив компоненты v'_x и v'_y через v' и θ' :

$$v \cos \vartheta = \frac{v' \cos \theta' + V}{1 + \frac{v' \cos \theta'}{c} B}, \quad v \sin \vartheta = \frac{v' \sin \theta' \sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{v' \cos \theta'}{c} B}. \quad (3.38)$$

Разделив вторую формулу на первую, мы получим выражение для $\text{tg } \vartheta$:

$$\text{tg } \vartheta = \frac{v' \sqrt{1 - B^2} \sin \theta'}{v' \cos \theta' + V}. \quad (3.39)$$

Чтобы найти выражение для абсолютной величины скорости, достаточно возвести в квадрат и сложить почленно равенства (3.38); мы сразу получим

$$v^2 = \frac{v'^2 + V^2 + 2v'V \cos \theta' - v'^2 B^2 \sin^2 \theta'}{\left(1 + \frac{v' \cos \theta'}{c} B\right)^2} = \frac{(v' + V)^2 - \frac{1}{c^2} [v'V]^2}{\left(1 + \frac{v'V}{c^2}\right)^2}. \quad (3.40)$$

Из формул (3.39) и (3.40) вытекает, что при переходе от системы K' к системе K меняются угол наклона скорости к соответствующей оси x (напомним, что геометрически оси x и x'

совпадают) и абсолютная величина скорости (рис. 3.8, а). Конечно, это же самое имеет место и в классической механике, по описывается другими формулами.

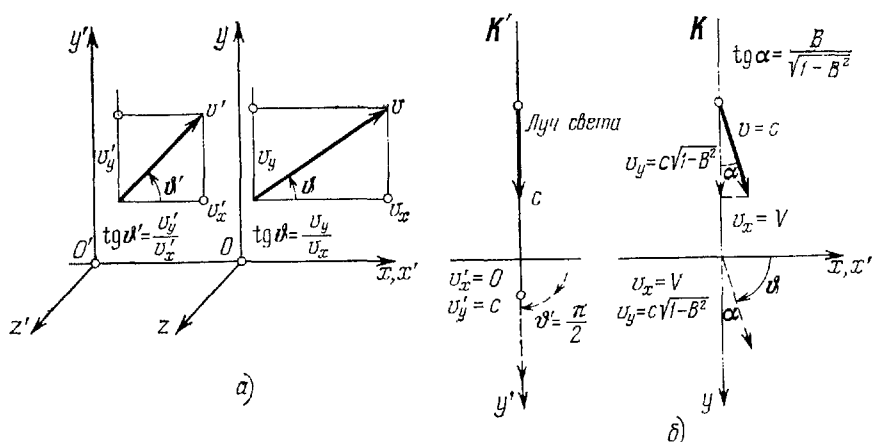


Рис. 3.8. а) Частица в K' движется в плоскости (x', y') . Угол наклона ее скорости к оси x' равен θ' , причем $\operatorname{tg} \theta' = v_y'/v_x'$. В системе K компоненты v_y и v_x меняются согласно (3.26), откуда ясно, что угол θ уже не равен θ' (см. также (3.39)). Для случая, изображенного на чертеже, $\theta' > \theta$. б) Свет падает в системе отсчета K' по оси y' , т. е. нормально направлению движения системы. Очевидно, что $v_x' = 0$, $v_y' = c$, $\theta' = \pi/2$. В системе K , согласно (3.26), $v_x = V$, $v_y = c\sqrt{1-B^2}$, откуда $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{1-B^2}/V$. Углом aberrации называют угол, составляемый видимым направлением прихода света в K с направлением света в K' , т. е. угол с осью y . Угол aberrации $\alpha = \pi/2 - \theta$.

Отметим полезную формулу, вытекающую из (3.40). Она понадобится нам в гл. 7. Составим, пользуясь первым равенством (3.40), выражение

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{c^2 \left(1 + \frac{v'V}{c^2} \cos \theta'\right)^2 - v'^2 - V^2 - 2v'V \cos \theta' + \frac{V^2 v'^2}{c^2} \sin^2 \theta'}{c^2 \left(1 + \frac{v'V}{c^2} \cos \theta'\right)^2} = \frac{c^2 - v'^2 + \frac{V^2}{c^2} v'^2 - V^2}{c^2 \left(1 + \frac{v'V}{c^2} \cos \theta'\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v'V}{c^2} \cos \theta'\right)^2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'V}{c^2} \cos \theta'}, \quad (3.41)$$

ИЛИ

$$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{1-\beta'^2} \sqrt{1-B^2}}{1+\beta'V \cos \vartheta'}. \quad (3.42)$$

Из (3.41) нетрудно получить также удобное выражение для квадрата абсолютной величины скорости:

$$v^2 = c^2 - \frac{\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{v'V}{c^2}\right)^2}, \quad (3.43)$$

из которого сразу следует, что если v'/c и V/c меньше единицы, то $v < c$. Для частного случая, когда скорость определялась согласно (3.28), эта же теорема была доказана выше. Формулу (3.43) можно получить, конечно, возведя в квадрат левые и правые части (3.26) и сложив их.

Из формул (3.38) и (3.39) легко получить формулы, определяющие изменение направления лучей света при переходе от системы K' к системе K . В этом случае, положив в формуле (3.43) $v' = c$, мы, как и следовало ожидать, получим, что и $v = v' = c$. Учитывая это, мы получим соответственно из (3.39) и (3.38)

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{1-B^2}}{B + \cos \vartheta'} \sin \vartheta', \quad (3.44)$$

$$\sin \vartheta = \frac{\sqrt{1-B^2}}{1+B \cos \vartheta'} \sin \vartheta', \quad \cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta' + B}{1+B \cos \vartheta'}. \quad (3.45)$$

Формулами (3.45) описывается явление абберации света, которое состоит в том, что волновой фронт световой волны меняет свое направление при переходе от одной ИСО к другой. Пусть свет в K' идет по нормали к направлению движения, например в направлении оси y' (рис. 3.8, б); это значит, что $\vartheta' = \pi/2$. Тогда, согласно (3.44), $\operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{1-B^2}/B$.

Углом абберации принято называть угол, образуемый видимыми направлениями луча в двух ИСО. В K' свет шел в направлении оси y' , а в K — под углом $\alpha = \pi/2 - \vartheta$ к оси y . Очевидно, угол α и является углом абберации, причем

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) = \operatorname{ctg} \vartheta = \frac{B}{\sqrt{1-B^2}}.$$

Для угла абберации α по формулам преобразований Галилея (проделайте это сами!) мы получили бы $\operatorname{tg} \alpha = B$. Это значит, что релятивистская формула отличается от нерелятивистской членом порядка B^3 .

Нетрудно получить формулы для угла абберации и в том случае, когда свет падает под произвольным углом к направлению

движения. Будем считать, что $V \ll 1$. Тогда, согласно (3.45),

$$\sin \vartheta = \left(1 - \frac{1}{2}V^2 + \dots\right) (1 - V \cos \vartheta' + \dots) \sin \vartheta'.$$

Отбрасывая все члены, начиная с V^2 и выше, получим

$$\sin \vartheta - \sin \vartheta' = -V \sin \vartheta' \cos \vartheta'.$$

Угол $\vartheta' - \vartheta = \Delta\vartheta$ — это угол абберации. Так как правая часть, пропорциональная V , мала, то и $\Delta\vartheta$ мало:

$$\sin \vartheta - \sin \vartheta' = 2 \cos \frac{\vartheta + \vartheta'}{2} \sin \frac{\vartheta - \vartheta'}{2} \approx -\cos \vartheta' \Delta\vartheta.$$

Следовательно,

$$\Delta\vartheta = V \sin \vartheta'. \quad (3.46)$$

Это — элементарная формула абберации для света, падающего в системе K' под углом ϑ' . На рис. 3.8 иллюстрируется изменение направления скорости частицы при переходе от системы K' к K , а также вычисление угла абберации для нормального (относительно движения) падения света. О роли явления абберации в развитии СТО см. Дополнение II.

В заключение вычислим относительную скорость двух частиц. Естественно определить относительную скорость двух частиц как скорость одной из них в той системе K , в которой другая частица покоится. Пусть в системе K' скорости частиц равны v_1' и v_2' . Выберем систему координат K так, чтобы $V = -v_2'$. Скорости частиц сразу же определяются из (3.40). Абсолютная величина скорости v_2 равна нулю, а абсолютная величина скорости первой частицы будет равна

$$v_1^2 = \frac{(v_1' - v_2')^2 - \frac{1}{c^2} [v_1' v_2']^2}{\left(1 + \frac{v_1' v_2'}{c^2}\right)^2}. \quad (3.47)$$

Этим выражением и определяется значение квадрата относительной скорости двух частиц. Выражение (3.47) симметрично относительно v_1 и v_2 .

Для формулы (3.40) было показано, что v^2 всегда меньше c^2 (см. (3.43)); это справедливо и для (3.47): относительная скорость частиц не может превысить скорость света в вакууме.

§ 3.7. Метод K -коэффициента (радиолокационный метод). Ниже излагается изящный метод получения основных следствий постулатов Эйнштейна. Этот метод можно было бы изложить короче, ссылаясь на результаты, полученные ранее другими способами. Но мы сознательно идем на некоторое повторение, чтобы этот параграф был более или менее самостоятельным. Особен-

ностью этого метода (вплоть до вывода преобразований Лоренца) является то, что он не требует явного использования координатного метода. Хотя ниже используются графические иллюстрации с координатами, они носят лишь вспомогательный характер: для изложения они не обязательны, но полезны тем, кто знаком с пространственно-временными диаграммами.

Рассматривается только одна пространственная координата: многие особенности СТО обнаруживаются уже в этом случае, который проще и допускает наглядные иллюстрации. Итак, пусть все события наступают на оси x (и соответственно на совпадающей с ней оси x' системы K' , см. рис. 1.2). Все рассуждения, используемые в методе « k -коэффициента», представляют собой мысленные эксперименты, состоящие в основном в обмене световыми сигналами в вакууме; речь будет идти о посылке, отражении и приеме световых сигналов. Такая игра в световые зайчики в конечном счете позволяет получить основные следствия постулатов Эйнштейна.

Основное предположение, которое делается в методе k -коэффициента, опирается на эффект Доплера (см. § 3.3). Для одномерного случая речь идет всегда о продольном доплер-эффекте. Итак, если в некоторой точке системы K расположен неподвижный радиолокатор, испускающий короткие импульсы через промежуток времени (период) T , наблюдатель из системы K' , удаляющийся от этого локатора с постоянной скоростью, обнаружит, что интервал между приходом световых импульсов будет уже иной, несмотря на то что часы, закрепленные вместе с локатором, и часы наблюдателя в K' идут совершенно одинаково.

Будем говорить для простоты речи не о локаторе и приемнике, а о двух наблюдателях A и A' , покоящихся соответственно в системах отсчета K и K' . Итак, если наблюдатель A посылает световые сигналы, разделенные друг от друга по его часам интервалом времени T , то наблюдатель A' будет принимать эти сигналы (по своим часам) уже через другой интервал времени. Обозначим этот интервал времени через kT . Так появляется k -коэффициент, основная величина в рассматриваемом методе.

Подчеркнем, что промежутки времени T и kT — это промежутки времени между посылкой первого и второго сигнала наблюдателем A и приемом этих сигналов наблюдателем A' , отмеченные по часам, покоящимся соответственно в системах K и K' .

Исходя из основных свойств пространства и времени — их однородности и изотропности, — можно считать, что коэффициент k не зависит ни от положения приемника и источника, ни от времени посылки и приема сигнала, ни от направления посылки сигнала (другими словами, направление общей оси x , x' может быть выбрано в пространстве произвольно). Конечно, этот коэффициент не зависит и от промежутка времени между посылкой

сигналов. Он может зависеть только от относительной скорости наблюдателей A и A' . Действительно, опыт учит, что изменение частоты света при доплер-эффекте зависит только от скорости относительного движения.

Причина появления коэффициента k очевидна. Пусть наблюдатель A находится в начале отсчета системы K и посылает световые сигналы наблюдателю A' , находящемуся в начале отсчета системы K' . Система K' удаляется вправо от системы K . Пусть первый сигнал посылается в момент времени t . Тогда нетрудно определить момент времени τ_1 по часам A , когда наблюдатель A' примет этот сигнал. Действительно, сигнал, идущий со скоростью c , должен за время τ_1 пройти, во-первых, путь Vt , который разделял наблюдателей A и A' в момент t , во-вторых, путь $V\tau_1$, который за время τ_1 пройдет наблюдатель A' : $c\tau_1 = Vt + V\tau_1$, откуда $\tau_1 = \frac{V}{c-V} t$. Второй сигнал испущен в момент $t + T$, поэтому он дойдет до A' за время τ_2 , определяемое из соотношения $c\tau_2 = V(t + T) + V\tau_2$, откуда $\tau_2 = \frac{V(t+T)}{c-V}$. Разность $\tau_2 - \tau_1 = \frac{V}{c-V} T$ показывает промежуток времени между приемом сигналов наблюдателем A' . Однако мы вовсе не получили выражения для коэффициента k , как это могло бы показаться. Ведь коэффициент k должен появиться тогда, когда мы найдем промежуток времени между приемом сигналов по часам наблюдателя A' . Но связи между показаниями часов A и A' у нас пока нет.

До сих пор мы использовали только однородность и изотропность времени и пространства. Теперь мы используем постоянство скорости света в вакууме. Постоянством света в вакууме во всех ИСО нам придется пользоваться очень часто. Это условие можно сформулировать так: «свет не может обгонять свет». Сейчас же мы переходим к вопросу, который явно использует равноправие всех инерциальных наблюдателей (т. е. первый постулат Эйнштейна).

Мы приняли, что сигналы, посланные наблюдателем A через промежуток времени T , будут приняты наблюдателем A' (по его часам) с интервалом kT . В силу равноправия наблюдателей мы должны считать также, что сигналы, посланные наблюдателем A' с интервалом T , будут приняты наблюдателем A также с интервалом kT (принцип относительности для двух инерциальных наблюдателей A и A').

Стоит заметить, что это предположение в сильнейшей степени опирается на тот факт, что в вакууме никакой среды, в которой распространяется свет, не существует. Если бы такая среда существовала, коэффициент k должен был бы зависеть от скоростей наблюдателей A и A' относительно этой среды. Именно

такая среда (эфир) больше всего волновала умы физиков XIX века; она явилась причиной драматических ситуаций, предшествовавших появлению СТО (см. Дополнение II). Сейчас уже вполне разумно сразу принять современную точку зрения.

Теперь мы найдем явное выражение коэффициента k через скорость относительного движения. В этой процедуре нам не понадобится ничего, кроме нескольких мысленных опытов, связанных с посылкой, приемом и отражением световых сигналов. Отражение, если угодно, можно трактовать как посылку сигналов «наблюдателем» в обратном направлении в тот самый момент, когда он принимает прямой сигнал.

Пусть первый сигнал от наблюдателя A к наблюдателю A' послан в тот момент, когда системы K и K' совпадают. Наблюдатели A и A' , каждый из которых находится в начале отсчета своей системы, в этот момент тоже находятся в одной и той же точке.

Естественно, что передача этого сигнала от A к A' , а также обратного сигнала от A' к A не требует никакого времени. Спустя промежуток времени T по своим часам A посылает световой сигнал к наблюдателю A' , который получит его через промежуток времени kT после получения первого сигнала. Пусть наблюдатель A' незамедлительно по получении второго сигнала пошлет световой сигнал обратно к A (это то же самое, что и зеркальное отражение). По часам наблюдателя A' два сигнала разделены промежутком времени kT . Значит, ответный сигнал пойдет от A' к A через этот промежуток времени. Но наблюдатель A примет его уже не через промежуток времени kT ; для него этот промежуток времени увеличится еще в k раз и станет равным k^2T . Значит, по часам A второй обратный сигнал будет получен в момент k^2T . Следовательно, с точки зрения наблюдателя A весь путь второго сигнала (посланного в момент T) к наблюдателю A' и обратно занял время $k^2T - T = (k^2 - 1)T$. Так как скорость света одинакова при распространении света как в прямом, так и обратном направлениях, то время распространения света от A к A' (или обратно) равно $\frac{1}{2}(k^2 - 1)T$. Отсюда ясно, что радиолокационное определение расстояния между A и A' (в момент отражения даст величину $\frac{1}{2}(k^2 - 1)Tc$.

Таким образом, мы определили расстояние между наблюдателями A и A' в тот момент, когда происходит отражение сигнала. Но в какой момент по часам A произошло отражение? Обратим внимание на то, что речь идет о часах, расположенных около наблюдателя A , а рассматривается событие (отражение сигнала в точке, где находится A') в удаленной от A точке. В этом случае мы не можем непосредственно измерить время вступления

события, а должны этому событию определенный момент времени *приписать*.

Второй световой сигнал был послан в момент времени T , а был припят обратно в момент $k^2 T$. Поэтому момент времени отражения определится как $\frac{1}{2} (T + k^2 T) = \frac{1}{2} (k^2 + 1) T$. Следовательно, за промежуток времени $\frac{1}{2} (k^2 + 1) T$ наблюдатель A' сместится на расстояние $\frac{1}{2} (k^2 - 1) Tc$ от наблюдателя A . А это значит, что относительная скорость наблюдателя A'

$$V = \frac{\frac{1}{2} (k^2 - 1) Tc}{\frac{1}{2} (k^2 + 1) T}, \quad \text{или} \quad \frac{V}{c} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}. \quad (3.48)$$

Отсюда мы получим *)

$$k = \sqrt{\frac{1+V}{1-V}}. \quad (3.49)$$

Сразу же выпишем две формулы, которые нам понадобятся ниже:

$$\frac{k^2 + 1}{2k} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \equiv \Gamma, \quad \frac{k^2 - 1}{2k} = \Gamma V. \quad (3.50)$$

Очень удобно воспользоваться графической схемой, позволяющей наглядно представить полученные результаты. Введем декартову систему координат на плоскости с осями x и ct . Мы увидим ниже, что выбор пространственных и временных координат одинаковой размерности просто неизбежен. Пока же мы будем просто откладывать по оси ординат величину τ , пропорциональную времени: $\tau = ct$. На рис. 3.9 проведены оси x и τ . Каждая точка в этой плоскости представляет собой событие, определяемое координатами (x, τ) . Движение тела — это последовательность событий, состоящих в приходе тела в данную точку в данный момент времени, и изображается в виде некоторой кривой в плоскости (x, τ) .

Равномерное движение тела изображается на этой плоскости некоторой прямой. Распространение светового луча со скоростью c изображается биссектрисой (уравнение $x = \tau$), проходящей через I и III квадранты, если свет идет в положительном направлении оси x , и через квадранты II и IV, если свет идет в противо-

*) В дальнейшем мы увидим, что эта формула определяет изменение частоты света при отражении его от движущегося зеркала (см. § 7.5).

положном направлении. Поскольку скорость тела всегда меньше скорости света, равномерное движение любого тела изобразится прямой, составляющей с осью τ угол, меньший чем $\pi/4$.

Легко найти точки плоскости, отображающие движение наблюдателей A и A' . В системе K (которая и изображена на рис. 3.9) наблюдатель A покоится (мы будем считать, что он находится в точке $x = 0$). Тогда его «мировая линия», т. е. последовательность точек на плоскости (x, τ) , соответствующих событиям, состоящим в том, что он находится в данной точке в данный момент времени, будет просто осью ординат. Итак, ось ординат — это мировая линия наблюдателя A . Мировая линия наблюдателя A' в системе K — это прямая, наклоненная к оси τ под углом α , тангенс которого определяется соотношением $\operatorname{tg} \alpha = x/\tau = x/ct = v/c$. Если в момент $t = 0$ наблюдатели A и A' находились в одной точке, мировая линия наблюдателя A' проходила через начало отсчета O . Посылка и прием световых сигналов наблюдателем A на графике (x, τ) изображаются следующим образом.

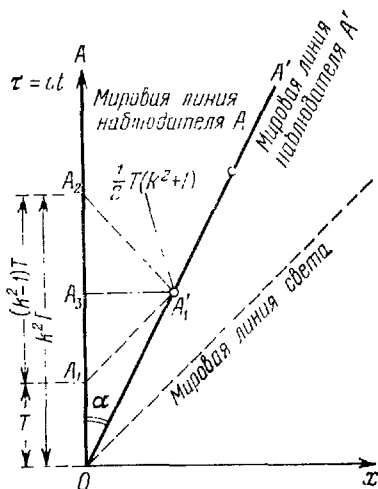


Рис. 3.9. Графическая иллюстрация к определению относительной скорости двух наблюдателей.

Первый «обмен» сигналами происходит в точке O . Затем, спустя промежуток времени T (в мировой точке A_1), наблюдатель A посылает световой сигнал. Его распространение описывается прямой $A_1A'_1$, параллельной биссектрисе. Наблюдатель A' примет световой сигнал в мировой точке A'_1 . Распространение светового сигнала, посланного наблюдателем A' в обратном направлении, описывается прямой A'_1A_2 (параллельной биссектрисе квадрантов II и IV, не изображенной на чертеже). Наблюдатель A примет обратный сигнал в мировой точке A_2 . По условию $OA_1 = T^*$, по определению k -коэффициента $OA_2 = k^2T$. Точке A'_1 в системе K соответствует момент времени (по часам, находящимся в точке $x = 0$, т. е. у наблюдателя A) A_3 . Очевидно, что $OA_3 = \frac{1}{2}(OA_1 + OA_2) = \frac{1}{2}(k^2 + 1)T$. Время распространения второго сигнала от A до A' равно, естественно, $\frac{1}{2}(OA_2 - OA_1) = \frac{1}{2}(k^2 - 1)T$.

*) В координатах τ следовало бы писать $OA_1 = cT$, но для простоты записи мы не будем этого делать.

Далее отметим одну полезную теорему, касающуюся k -коэффициента. Из формулы (3.49) видно, что изменение знака у относительной скорости, т. е. у величины V , меняет величину k на $1/k$. Это означает, что при той же самой абсолютной величине скорости удалению и приближению соответствуют обратные значения коэффициента k .

Теперь рассмотрим случай, когда есть три системы отсчета K , K' и K'' и три наблюдателя, располагающиеся в соответствующих началах отсчета O , O' и O'' . Пусть k -коэффициент для наблюдателей A и A' равен $k(A, A')$; он зависит только от относительной скорости систем K и K' (обозначим ее, как и раньше, через V). Если относительная скорость наблюдателей A' и A'' равна W , коэффициент k для этих наблюдателей $k(A', A'')$ зависит только от W . Можно ли, зная $k(A, A')$ и $k(A', A'')$, найти $k(A, A'')$? Получим соответствующую формулу.

Пусть наблюдатель A посылает два световых сигнала, разделенных промежутком времени T , отсчитанным по его часам. Наблюдатель A' , принимающий эти сигналы, обнаружит, что они приходят через промежуток времени $k(A, A')T$, как это следует из определения k -коэффициента. Этот отсчет времени делается уже по часам A' . Наблюдатель A'' находится дальше от A , чем наблюдатель A' , и сигналы, минуя наблюдателя A' , идут дальше к A'' . В тот момент, когда A' принял первый сигнал от A , он без промедления (не пугайтесь, это мысленный опыт!) посылает сам световой сигнал к A'' . И к наблюдателю A'' идут уже два сигнала: один — непосредственно идущий от A , второй — посланный наблюдателем A' . Но оба сигнала световые, они идут с одинаковой скоростью и посланы от A' в один и тот же момент. Фактически они идут как один сигнал.

Эту же самую процедуру наблюдатель A' проделывает в момент получения второго сигнала от A . И снова от A к A'' идет один сигнал, состоящий из двух световых импульсов, посланных один раз от A , а второй — от A' .

Наблюдатель A'' примет два сигнала. С одной стороны, по определению, по своим часам он найдет промежуток времени между приходом сигналов равным $k(A, A'')T$. С другой стороны, эти же сигналы были посланы наблюдателем A' с промежутком времени между ними $k(A, A')T$. По определению, наблюдатель A'' найдет, что промежуток времени между приходом этих сигналов равен $k(A', A'') \cdot k(A, A')T$. Но сигналы от A и от A' пришли к A'' одновременно, поэтому

$$k(A, A'') = k(A, A') \cdot k(A', A''). \quad (3.51)$$

Результат замечательно прост. Зная k -коэффициенты для двух пар систем отсчета, в которые входит одна общая система, можно

получить неизвестные k -коэффициенты для двух оставшихся систем простым умножением известных k -коэффициентов.

Графически этот результат легко получается с помощью рис. 3.10. Здесь изображены мировые линии трех наблюдателей: A , A' и A'' . Все наблюдатели в момент $t = 0$ находились в одной и той же точке O . Спустя промежуток времени T наблюдатель A посылает из мировой точки A_1 световой сигнал, мировая линия которого изображена пунктирной прямой $A_1A'_1A''_1$. По условию $OA_1 = T$, по определению $OA'_1 = k(A, A')T$, $OA''_1 = k(A, A'')T$. С другой стороны, очевидно, $OA''_1 = k(A', A'') \cdot k(A, A'_1)T$. Заметим, что предлагаемая схема годится для наглядного изображения «мысленных экспериментов», но пользоваться ею для геометрического определения различных величин нельзя. Плоскость (x, τ) — не обычная евклидова плоскость (см. гл. 4). Однако, сочетая наглядное геометрическое представление с алгебраическими определениями, мы не ошибемся.

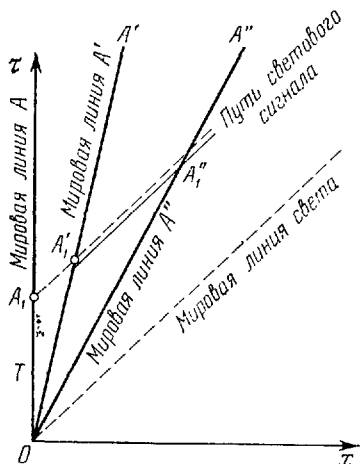


Рис. 3.10. К выводу формулы (3.51).

Нетрудно найти формулу преобразования скоростей координатных систем. Пусть нас интересует относительная скорость U систем K и K'' , если известны относительная скорость K и K' , которую мы обозначим через V , и относительная скорость K' и K'' , равная W .

Вводя уже известные обозначения $V/c = B_1$ и $W/c = B_2$, получим, согласно (3.48), (3.49) и (3.51),

$$\frac{U}{c} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} = \frac{k^2(A, A') \cdot k^2(A', A'') - 1}{k^2(A, A') \cdot k^2(A', A'') + 1} = \frac{B_1 + B_2}{1 + B_1 B_2}.$$

Переходя к обычным обозначениям, получаем формулу преобразования скоростей (3.28):

$$U = \frac{V + W}{1 + VW/c^2}.$$

Из приведенных рассуждений видно, что моменты наступления событий и промежутки времени между событиями оказываются разными для наблюдателей из разных ИСО. Чтобы обнаружить это, вернемся к уже рассмотренному примеру обмена световыми сигналами между наблюдателями A и A' . Напомним, что первый

«обмен» происходит в момент, когда наблюдатели находятся в одном месте. В этот самый момент часы наблюдателей A и A' ставятся на нулевой отсчет. Затем A через промежуток времени T по своим часам посылает сигнал, направленный к A' ; по определению промежуток времени, разделяющий прием первого и второго сигнала наблюдателем A' , отсчитанный по часам A' , равен kT . Однако наблюдатель A *припишет* приходу сигнала к A' момент времени $\frac{1}{2}(k^2 + 1)T$. Это значит, что A будет считать, что посланные им через промежуток времени T сигналы придут к A' с интервалом $\frac{1}{2}(k^2 + 1)T$. По часам A' этот же интервал, как сказано, равен kT . Таким образом, величина промежутка времени между двумя одними и теми же событиями — приходом первого и второго сигнала к A' — оказывается различной: для A' она равна kT , а для A равна $\frac{1}{2}(k^2 + 1)T$. Следовательно, мы обнаружили, что время наступления события (прихода второго сигнала) *относительно*: оно равно kT для A' и $\frac{1}{2}(k^2 + 1)T$ для A . Промежуток времени между двумя событиями тоже оказался разным для A и A' . Это и означает, что время наступления событий и промежуток времени между событиями — величины относительные.

При каких условиях эти величины все же совпадут? Это будет при условии $kT \simeq \frac{1}{2}(k^2 + 1)T$. Нетрудно сообразить, что для этого нужно, чтобы $k \sim 1$, или, как это видно из (3.48), $V/c \rightarrow 0$. Это значит, что для тех ИСО, относительные скорости которых малы по сравнению со скоростью света, различием в отсчетах времени и относительностью промежутков времени между событиями можно пренебречь.

Собственное время. Метод k -коэффициента позволяет легко установить связь промежутка времени между двумя событиями, наступающими в некоторой ИСО в одной точке пространства и, следовательно, фиксируемыми одними часами (промежуток собственного времени), с промежутком времени между теми же событиями, отсчитанным по двум часам другой ИСО, в которой рассматриваемые события происходят в разных точках.

Снова вернемся к обмену световыми зайчиками. Если A посылает сигналы через промежуток T по своим часам, то A' принимает эти сигналы с промежутком времени kT по своим часам. Однако для A , как мы видели (стр. 102), этот промежуток равен $\frac{1}{2}(k^2 + 1)T$. Отношение этих величин и дает соотношение между промежутком собственного времени $\Delta\tau = kT$ и промежутком времени Δt , отсчитанным по двум часам другой ИСО. Это отношение равно

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{kT}{\frac{1}{2}(k^2 + 1)T} = \frac{2k}{k^2 + 1} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

где в последнем звене равенства использовано соотношение (3.48). Результат этот, конечно, нам известен.

Относительность длин линеек (расстояний). Представим себе что у нас есть две неподвижные точки в той системе отсчета, где покоится наблюдатель A' . Можно считать (хотя это совсем не обязательно), что эти точки — концы линейки. Пусть линейка движется от наблюдателя A , а наблюдатель A' находится на том конце линейки, который ближе к A (не забудьте, что линейка расположена вдоль той прямой, по которой направлена скорость относительного движения).

Чтобы определить длину линейки, наблюдатель A посылает в момент t_1 (отсчитанный по своим часам) сигнал и ждет, когда этот сигнал, отраженный от дальнего конца линейки, вернется к нему. Пусть момент возвращения этого сигнала (по часам A) равен t_4 . Очевидно, момент отражения сигнала равен $\frac{1}{2}(t_1 + t_4)$. Точно так же можно послать сигнал к ближнему концу линейки (пусть в момент t_2) и определить момент его возвращения (допустим, t_3). Момент отражения сигнала от ближнего конца равен $\frac{1}{2}(t_2 + t_3)$. Для того чтобы оба сигнала отражались одновременно (по часам A) от обоих концов линейки, необходимо выполнение условия

$$\frac{1}{2}(t_1 + t_4) = \frac{1}{2}(t_2 + t_3). \quad (3.52)$$

В мысленном эксперименте выполнение этого равенства можно обеспечить за счет выбора времен посылки первого и второго сигнала.

По первому сигналу от A наблюдатель A' , находящийся на ближнем конце линейки, примет в момент kt_1 (напомним, что начальный отсчет часов A и A' совпал, когда оба наблюдателя находились в одной точке). Отраженный от дальнего конца линейки сигнал, который придет к A в момент t_4 , пройдет мимо A' в момент t_4/k . Действительно, сигнал, полученный A' в момент t_4/k , будет принят наблюдателем A в момент $(t_4/k) \cdot k = t_4$.

Для наблюдателя A' удвоенная длина линейки l_0 определяется как промежуток времени, необходимый для того, чтобы свет дошел до дальнего конца линейки и обратно, умноженный на скорость света, т. е.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{t_4}{k} - kt_1 \right) c = l_0. \quad (3.53)$$

Что касается соотношения между t_2 и t_3 , то оно следует непосредственно из определения k -коэффициента:

$$t_3 = k^2 t_2. \quad (3.54)$$

Мысленные эксперименты, необходимые для измерения длины, изображены на рис. 3.11, к которому после разъяснения схем на рис. 3.9 и 3.10 не требуется особых пояснений.

Длина линейки, определяемая наблюдателем A , равна разности расстояний от него до дальнего и ближнего концов линейки при непременном условии, что эти расстояния определяются одновременно. У нас это условие обеспечено соблюдением равенства (3.52). Расстояние от A до дальнего конца равно $\frac{1}{2}(t_4 - t_1)c$, а до ближнего $\frac{1}{2}(t_3 - t_2)c$. Следовательно, A должен считать за длину линейки l величину

$$l = \frac{1}{2} [(t_4 - t_1) - (t_3 - t_2)] c. \quad (3.55)$$

Соотношения (3.53) — (3.55) позволяют найти связь между l и l_0 . Из (3.52) следует, что $t_4 = t_2 + t_3 - t_1$. Подставив полученное выражение для t_4 в левую часть (3.53), получим, используя сразу (3.54):

$$\begin{aligned} l_0 &= \frac{c}{2} \left(\frac{t_2 + t_3 - t_1}{k} - kt_1 \right) = \\ &= \frac{c}{2} \left[\frac{t_2(k^2 + 1) - t_1(k^2 + 1)}{k} \right] = \\ &= \frac{c}{2} \frac{k^2 + 1}{k} (t_2 - t_1). \quad (3.56) \end{aligned}$$

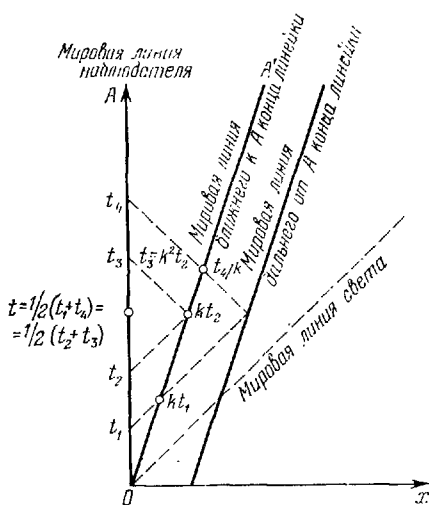
Так как, согласно (3.52), $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$, то из (3.55) следует

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= \frac{(t_2 - t_1) + (t_4 - t_3)}{2} = \\ &= \frac{(t_4 - t_1) - (t_3 - t_2)}{2} = \frac{l}{c}. \end{aligned}$$

Теперь уже (3.56) примет вид

$$l_0 = l \frac{k^2 + 1}{2k} = \frac{l}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

Рис. 3.11. К определению длины движущейся линейки.



где в последнем равенстве учтена формула (3.50). Это как раз и есть полученная нами ранее формула (3.5).

В этом выводе особенно отчетливо видно, насколько существенно при определении длины найти одновременное положение концов линейки. Заметим кстати, что вывод формулы (2.4), по существу, является также радиолокационным.

Преобразования Лоренца. Мы убедились в том, что методом k -коэффициента можно получить все основные следствия первых принципов СТО — постулатов Эйнштейна. Преимуществом этого метода является то, что он позволяет избежать явного введения координатной системы.

Но, конечно, использование методов СТО в физике требует явного введения системы отсчета. А если так, введение преобразо-

ваний Лоренца просто неизбежно. Преобразования Лоренца можно получить и методом k -коэффициента.

Рассмотрим системы отсчета K и K' , наблюдатели A и A' в которых регистрируют одно и то же событие. В обеих системах начало отсчета времени выбрано так, что $t = t' = 0$, когда оба начала отсчета O и O' совпадают. Затем в момент t_1 наблюдатель A посылает световой сигнал к A' , который тот принимает (по своим часам) в момент времени t'_1 ; сигнал, посланный A , идет дальше вместе с сигналом, посланным A' в момент получения сигнала от A . Фактически вдоль оси x идет один сигнал, состоящий из двух. Пусть событие P состоит в приходе этого сигнала в некоторую точку (или же приход сигнала совпадает с наступлением некоторого события). В этой точке сигнал отражается (если угодно, немедленно по приходе прямого сигнала посылается обратный). Сначала он попадает в момент t'_2 к наблюдателю A' , который сразу же с его приходом посылает в направлении A еще и свой сигнал. Теперь уже от A' к A идет единый сигнал, фактически состоящий из двух. Этот сигнал принимается наблюдателем A в момент t_2 (рис. 3.12).

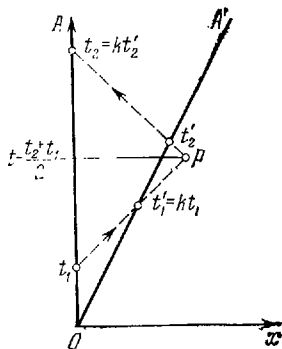


Рис. 3.12. К выводу преобразований Лоренца.

Наблюдатель A припишет событию P координаты следующим образом. Время t наступления события — это просто полусумма времени отправления и получения сигнала, поскольку скорость света на пути «туда» и «обратно» одинакова:

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2). \quad (3.57)$$

Расстояние до точки, где наступило событие, можно найти, если умножить скорость распространения сигнала c на время прохождения сигнала туда; оно равно половине всего времени, затраченного на прохождение сигнала. Сигнал проделал замкнутый путь за время $t_2 - t_1$, поэтому координата события x определится наблюдателем A как

$$x = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)c. \quad (3.58)$$

Из (3.57) и (3.58) получим

$$t_1 = t - \frac{x}{c}, \quad t_2 = t + \frac{x}{c}. \quad (3.59)$$

Но наблюдатель A' в точности так же найдет, что

$$t'_1 = t' - \frac{x'}{c}, \quad t'_2 = t' + \frac{x'}{c}. \quad (3.60)$$

Согласно определению коэффициента k , сопоставляя интервалы между обменом сигналами, получим

$$t'_1 - 0 = k(t_1 - 0), \quad t_2 - 0 = k(t'_2 - 0). \quad (3.61)$$

Согласно (3.59) и (3.60) получим

$$t' - \frac{x'}{c} = k \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad (3.62)$$

$$t + \frac{x}{c} = k \left(t' + \frac{x'}{c} \right). \quad (3.63)$$

Перемножая накрест равенства (3.62) и (3.63), немедленно получим, что величина

$$t'^2 - \frac{x'^2}{c^2} = t^2 - \frac{x^2}{c^2} \quad (3.64)$$

сохраняет свое значение во всех ИСО, т. е. является инвариантом. Записав (3.62) и (3.63) в более удобной для решения форме:

$$t' - \frac{x'}{c} = k \left(t - \frac{x}{c} \right), \quad (3.65)$$

$$t' + \frac{x'}{c} = \frac{1}{k} \left(t + \frac{x}{c} \right), \quad (3.66)$$

без труда найдем, что

$$t' = \frac{k^2 + 1}{2k} t - \frac{k^2 - 1}{2kc} x, \quad x' = \frac{k^2 + 1}{2k} x - \frac{k^2 - 1}{2k} ct,$$

а учитывая (3.50), обнаружим, что это как раз и есть преобразования Лоренца:

$$x' = \Gamma(x - Vt), \quad t' = \Gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right).$$

§ 4.1. Трехмерное и четырехмерное евклидовы пространства. Когда мы вводим координатную систему, положение каждой точки задается с помощью трех чисел, которые называют координатами точки. Под многообразием трех измерений понимают совокупность всех точек. Если мы хотим от многообразия перейти к пространству, обладающему определенными геометрическими свойствами, мы должны определить выражение для расстояния между двумя бесконечно близкими точками многообразия. Задав квадрат расстояния между такими точками, можно уже определить основные геометрические величины (длина вектора, угол между векторами, площади двумерных фигур, образованных векторами). В мире, в котором мы живем, с большой степенью точности справедлива геометрия, основные законы которой были сформулированы Евклидом. Согласно геометрии Евклида в декартовых координатах квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками может быть записан в виде

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (4.1)$$

Это выражение представляет собой не что иное, как теорему Пифагора, записанную для диагонали прямого трехмерного параллелепипеда со сторонами dx , dy , dz .

Координатная система может выбираться произвольно (декартова система координат выделена лишь своею простотой), и по самому своему геометрическому смыслу расстояние между точками не должно зависеть от выбора координатной системы. Это означает, что выражение (4.1) должно быть инвариантом любого преобразования координат. Инвариантом преобразования координат должно быть также и расстояние между любыми двумя точками. Таким образом, в евклидовой геометрии инвариантом является расстояние между двумя точками:

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (4.2)$$

где (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) — координаты двух точек пространства. Соотношения (4.1) или (4.2) связывают координаты двух точек пространства между собой. В частности, для переходов от одной декартовой системы к другой (такой переход представляет собой вращение, если отвлечься от малоинтересного посту-

пательного перемещения системы) формулы преобразования координат приведены в Приложении I, § 2. Из этих формул видно, что в новой системе координат любая новая координата выражается через все старые.

В трехмерном евклидовом пространстве можно ввести векторы, определяемые тройкой чисел — компонентами векторов. Координаты точки являются компонентами радиус-вектора. Следовательно, компоненты любого вектора преобразуются по правилу преобразования координат. Через компоненты векторов по известным правилам находятся абсолютные величины векторов, их скалярное произведение и угол между ними.

Что означало бы появление еще одного измерения в евклидовом пространстве? Разумеется, представить себе воочию четырехмерное пространство трудно. Но в этом и нет особой необходимости. Располагая основными соотношениями для трехмерного пространства, мы просто переносим их на четырехмерное пространство. Пусть координатами точки в 4-пространстве будут x, y, z, w . Для четырехмерного евклидова пространства квадрат расстояния между бесконечно близкими точками запишется уже в виде (мы приводим также и симметричные обозначения)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = dx^0{}^2 + dx^1{}^2 + dx^2{}^2 + dx^3{}^2, \quad (4.3)$$

а расстояние между точками —

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 + (w_2 - w_1)^2}. \quad (4.4)$$

Выражения (4.3) и (4.4) будут инвариантами преобразования координат, а основные геометрические соотношения определятся по аналогии с определениями тех же величин, которые приняты в трехмерном пространстве.

§ 4.2. 4-пространство-время — четырехмерное псевдоевклидово пространство. Рассмотрим четырехмерное многообразие, образованное «точками», координатами которых служат четыре числа $x, y, z, \tau = ct$, определяющих 4-точку. В каждой точке этого многообразия может наступить то или иное событие, представляющее собой мгновенный физический процесс. Четырехмерное пространство-время — это чисто геометрическое понятие. Иногда, следуя Минковскому, это пространство называют «миром». Любое событие наступает в какой-либо точке мира Минковского.

Геометрические свойства мира Минковского могут быть установлены после того, как будет известно некоторое инвариантное соотношение между координатами точек, которое можно истолковать как расстояние между двумя точками многообразия. Если определить расстояния между точками, мы перейдем от многообразия к пространству. Но откуда можно найти нужное инвариантное соотношение? Не следует забывать, что координаты точек

«мира» определяются физически различными величинами, и поэтому заранее предполагать, что «расстоянием» в этом мире будет выражение вида (4.3), не следует. Но теория относительности дает прямой ответ на этот вопрос. Если оставаться в рамках инерциальных систем отсчета, для любой пары событий (а с геометрической точки зрения — для любой пары точек мира Минковского) остается инвариантным интервал между событиями (3.19). Переход от одной ИСО к другой описывается преобразованиями Лоренца, и никакие другие преобразования в рамках СТО нам не нужны. Следовательно, в качестве основной инвариантной квадратичной формы, определяющей «расстояние» в мире Минковского, мы можем — из физических соображений — взять выражение для квадрата интервала между событиями:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dx^0{}^2 - dx^1{}^2 - dx^2{}^2 - dx^3{}^2, \quad (4.5)$$

где $t = ct$. Выражение (4.5) как раз и определяет квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками в мире Минковского. Таким образом, постулаты Эйнштейна, следствием которых является инвариантность интервала между событиями, приводят к тому, что геометрия 4-пространства-времени (пространства Минковского) определяется основной фундаментальной формой вида (4.5). Из вида этой формы ясно, что координаты и время не равноправны.

В Дополнении V будет показано, что переход от инерциальных систем отсчета к неинерциальным меняет вид интервала между событиями. Хотя это выражение всегда остается инвариантным, его форма становится уже иной — квадрат интервала приобретает вид

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (4.6)$$

где справа подразумевается суммирование по i и по k от 1 до 4, а коэффициенты g_{ik} , называемые *метрическими коэффициентами*, могут зависеть от координат и времени. Сейчас это общее выражение нужно нам лишь для того, чтобы выписать g_{ik} для выражений (4.3) и (4.5). Используя симметричные обозначения, приведенные в (4.3) и (4.5), получим соответственно

$$g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1, \quad (4.3')$$

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1. \quad (4.5')$$

Как это ясно и непосредственно, различие между (4.3) и (4.5) состоит в знаках метрических коэффициентов. Совокупность этих знаков называют *сигнатурой* соответствующих квадратичных форм. Сигнатура (4.3) имеет вид $(+ + + +)$, а сигнатура (4.5) — $(+ - - -)$. В четырехмерном пространстве, которое получилось бы простым увеличением числа измерений нашего обычного пространства, сигнатура была бы $(+ + + +)$. Такое пространство

ничем не отличалось бы от нашего пространства, кроме числа измерений, и оно также называлось бы евклидовым (четырёхмерным) пространством. Сигнатура пространства, рассматриваемого в специальной теории относительности, соответствует сигнатуре вида (4.5), т. е. (+ — — —).

Изменение сигнатуры означает изменение «расстояния» между точками пространства, изменение свойств пространства по сравнению со свойствами привычного нам евклидова. Это 4-пространство с необычными геометрическими свойствами крайне важно для СТО. Именно в этом пространстве «наступают» все физические события, разыгрываются все физические явления.

Геометрия мира Минковского отличается от евклидовой геометрии, но все же не слишком сильно, потому что коэффициенты в (4.5), так же как и коэффициенты в (4.3), постоянны. В связи с этим геометрию, определяемую квадратичной формой (4.5), принято называть *псевдоевклидовой*, а соответствующее пространство — *псевдоевклидовым пространством*.

Итак, пространство четырех переменных x, y, z, ct специальной теории относительности является четырехмерным псевдоевклидовым пространством. Оно возникает отнюдь не простым добавлением четвертой (временной) координаты ct к трем пространственным x, y, z , а возникает при своеобразном определении (4.5) инвариантного расстояния между точками этого пространства.

Физическая причина необходимости рассмотрения *псевдоевклидова пространства* состоит в том, что, несмотря на тесную связь пространственных и временных отсчетов для события, эти отсчеты в СТО неравноправны.

§ 4.3. 4-векторы и 4-тензоры. В точности так же, как в трехмерном пространстве, координаты точки в 4-пространстве можно рассматривать как компоненты 4-радиус-вектора, проведенного из начала координатной системы в данную точку. Все 4-векторы будут обозначаться стрелкой над буквой, в частности, 4-радиус-вектор мы будем обозначать \vec{R} . Для удобства читателей мы будем вести параллельную запись основных соотношений, используя как комплексную запись, так и запись через действительные переменные. Комплексная запись упрощает изложение электродинамики, а использование переменных в действительной форме готовит нас к формализму общей теории относительности, где введение комплексной координаты ничего не дает. Большинство формул будет записано в симметричных обозначениях, причем запись координат 4-векторов в две строки сразу позволяет вспомнить смысл введенных обозначений. Итак, мы вводим 4-радиус-вектор одним из двух способов:

$$\vec{R} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x & y & z & it=ict \end{pmatrix}; \quad (\text{a}) \quad \left| \vec{R} \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ \tau=ct & x & y & z \end{pmatrix} \right. \cdot (6) \quad (4.7)$$

Индексы у координат вектора в (4.76) стоят сверху не зря. Использование действительных значений координат требует различия между ко- и контравариантными компонентами вектора (см. Приложение I, § 8), и у контравариантных компонент индекс стоит сверху. Квадрат интервала между событиями запишется соответственно в виде

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = \left\{ \begin{array}{l} ds^2 = dx^0{}^2 - dx^1{}^2 - dx^2{}^2 - \\ - dx^3{}^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (6) \quad (4.8) \\ \text{Отличны от нуля:} \\ g_{00} = 1, \quad g_{11} = -1, \\ g_{22} = -1, \quad g_{33} = -1. \end{array} \right.$$

Отличны от нуля:

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = 1,$$

$$g_{33} = 1, \quad g_{44} = 1.$$

Отметим, что знаки интервалов, выписанных в (4.8а) и (4.8б), противоположны. Так как ds^2 может принимать как отрицательные, так и положительные значения, то выбор знаков для ds^2 , по существу, не имеет значения.

Преобразования Лоренца — это преобразования компонент 4-радиус-вектора, т. е. координат события. Мы снова их выпишем:

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 = \Gamma(x_1 + iVx_4), \\ x'_2 = x_2, \\ x'_3 = x_3, \\ x'_4 = \Gamma(x_4 - iVx_1); \end{array} \right\} \quad (a) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'^0 = \Gamma(x^0 - Vx^1), \\ x'^1 = \Gamma(x^1 - Vx^0), \\ x'^2 = x^2, \\ x'^3 = x^3. \end{array} \right. \quad (6) \quad (4.9)$$

Но 4-радиус-вектор — это такой же 4-вектор, как и все остальные. Поэтому, если в системе отсчета K заданы 4-векторы

$$\vec{A}(A_1 A_2 A_3 A_4) \quad \left| \quad \vec{A}(A^0 A^1 A^2 A^3),$$

то в системе K' компоненты этих же векторов определяются по формулам

$$\left. \begin{array}{l} A'_1 = \Gamma(A_1 + iVA_4), \\ A'_2 = A_2, \\ A'_3 = A_3, \\ A'_4 = \Gamma(A_4 - iVA_1); \end{array} \right\} \quad (a) \quad \left\{ \begin{array}{l} A'^0 = \Gamma(A^0 - VA^1), \\ A'^1 = \Gamma(A^1 - VA^0), \\ A'^2 = A^2, \\ A'^3 = A^3. \end{array} \right. \quad (6) \quad (4.10)$$

Выражения (4.8а, б) представляют собой квадрат бесконечно малого вектора $(d\vec{R})^2$. Следовательно, квадрат модуля 4-вектора нужно определить так (это инвариантная величина):

$$\vec{A}^2 = g_{ik} A_i A_k = \left\{ \begin{array}{l} \vec{A}^2 = g_{ik} A^i A^k = A_R A^R = \\ = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2; \quad (a) \quad \left\{ \begin{array}{l} = A^0{}^2 - A^1{}^2 - A^2{}^2 - A^3{}^2. \quad (6) \quad (4.11) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Конечно, формулы (4.11а) и (4.11б) дают разные знаки для инвариантной величины \vec{A}^2 . Но это так же несущественно, как и при определении знака интервала (см. замечание после формул (4.8)). Однако нужно иметь в виду, что разные знаки при выборе интервала меняют условия, определяющие «временноподобные» и «пространственноподобные» интервалы и векторы (в литературе в этом отношении единства нет).

В (4.11б) мы ввели ковариантные координаты по формулам Приложения I, § 8: $A_h = g_{ik}A^i$. Нетрудно видеть, что $A_0 = A^0$, $A_1 = -A^1$, $A_2 = -A^2$, $A_3 = -A^3$.

Как и в трехмерном пространстве, нам придется иметь дело с тензорами. Проще всего закон преобразования компонент тензора получается как закон преобразования произведения компонент двух 4-векторов. Формулы преобразования компонент для 4-векторов \vec{A} и \vec{B} можно записать в симметричных обозначениях (см. (2.40а, б)):

$$\begin{aligned} A_i &= \tilde{\alpha}_{il}A^l, \\ B_k &= \tilde{\alpha}_{km}B^m; \end{aligned} \quad (\text{а}) \quad \left| \begin{aligned} A^i &= \alpha_{il}A'^l, \\ B^k &= \alpha_{km}B'^m. \end{aligned} \right. \quad (\text{б}) \quad (4.12)$$

Перемножив левые и правые части этих соотношений, сразу же получаем правила преобразования произведений компонент векторов:

$$A_i B_k = \tilde{\alpha}_{il} \tilde{\alpha}_{km} A^l B^m, \quad (\text{а}) \quad | \quad A^i B^k = \alpha_{il} \alpha_{km} A'^l B'^m. \quad (\text{б}) \quad (4.13)$$

Таким образом, мы получаем общий закон преобразования тензоров $T_{ih} = A_i B_h$ и $T^{ik} = A^i B^k$:

$$T_{ih} = \tilde{\alpha}_{il} \tilde{\alpha}_{hm} T'_{lm}, \quad (4.14)$$

$$T^{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} T'^{lm}. \quad (4.15)$$

Формула (4.15), где существенно различие между ко- и контравариантными координатами, представляет собой закон преобразования дважды контрвариантного тензора.

В 4-пространстве следует строить измеряемые физические величины так, чтобы они обладали вполне определенными свойствами преобразования при переходе от одной ИСО к другой, т. е. при преобразованиях Лоренца. Но при преобразовании координат (в мире Минковского речь идет о всех четырех координатах) определенными свойствами преобразования обладают только тензорные величины, причем тензоры различной валентности (ранга) преобразуются по разным законам. Таким образом, все физические величины, которым мы приписываем реальный смысл, должны быть тензорами: либо скалярами (т. е. тензорами нулевой валентности), либо 4-векторами (т. е. тензорами первой валентности), либо, наконец, тензорами валентности выше первой. Мы увидим,

что электромагнитное поле образует тензор второго ранга (см. гл. 6). Переход от привычных трехмерных величин к четырехмерным (безусловно, необходимым, когда речь идет о преобразованиях Лоренца) не всегда прост и осуществляется в разных случаях по-разному. Часто привычный трехмерный вектор удаётся — с некоторыми видоизменениями — представить как пространственную часть 4-вектора. Выражение для его четвертой компоненты оказывается несколько неожиданным, но при ближайшем рассмотрении вполне естественным. В этом нет ничего удивительного, поскольку в нерелятивистском пределе мы почти всегда от релятивистских соотношений возвращаемся к классическим.

Многочисленные примеры построения четырехмерных векторов и тензоров можно найти в гл. 5—7.

§ 4.4. Псевдоевклидова плоскость. Особенности псевдоевклидова пространства можно проиллюстрировать на примере псевдоевклидовой плоскости. Для этого одна из координатных осей должна быть обязательно осью времени (или пропорциональной времени), потому что в СТО чисто пространственная геометрия остается еще евклидовой и лишь пространство-время описывается псевдоевклидовой геометрией. Удобнее всего при нашем выборе систем отсчета рассмотреть плоскость (x, τ) .

Напомним, что четырехмерный пространственно-временной континуум, точками которого являются события, иногда называют миром Минковского. Каждое событие в нашем реальном физическом мире наступает в определенной мировой точке мира Минковского. Рассматривая частицу, можно считать за событие ее пребывание в данной точке в данный момент времени. Независимо от того, движется частица в пространстве или нет, в мире Минковского последовательность происходящих с частицей событий образует некоторую кривую, называемую *мировой линией* частицы.

Проведем оси x, τ системы K перпендикулярно друг другу и рассмотрим простейшие случаи. Пусть частица покоится в системе K в точке $x = x_0$; ее мировой линией в плоскости (x, τ) мира Минковского будет прямая, параллельная оси τ (рис. 4.1, а). Пусть другая частица равномерно движется по оси x в системе K со скоростью v . Ее мировой линией в этой системе будет уже прямая, наклоненная под углом ϕ к оси τ (рис. 4.1, б). Несколько позже мы увидим, что $\phi = \arctg(v/c)$.

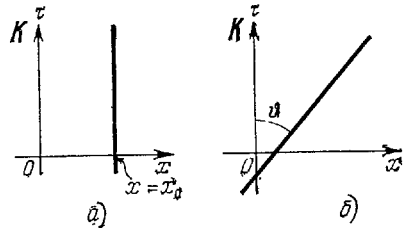


Рис. 4.1. а) Мировая линия тела, покоящегося в точке $x = x_0$. б) Мировая линия тела, равномерно движущегося по оси x .

Рассмотрим произвольное движение частицы в этой системе отсчета. Движение точки представляется мировой линией $x = x(\tau)$ в плоскости (x, τ) , как это изображено на рис. 4.2.

Наклон мировой линии относительно оси τ в каждой данной точке определяется производной $dx/d\tau$ в этой точке. Действительно (см. рис. 4.2),

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dx}{dt} = \frac{v}{c}. \quad (4.16)$$

Таким образом, угол наклона определяется из равенства

$$\vartheta = \arctg \frac{v}{c} = \arctg \beta, \quad (4.17)$$

где $\beta = v/c$, а v — мгновенная скорость точки (тела). Поскольку всегда $\beta < 1$, то для всякого движущегося тела угол ϑ не может превысить 45° . Для световых лучей мировой линией будет служить биссектриса координатного угла.

В § 2.9 мы видели, что в результате преобразований Лоренца оси τ' , x' получаются из осей τ , x , если эти оси, как пожницы, сдвинуть к биссектрисе — мировой линии светового луча. На рис. 4.3, а, где наряду с осями τ , x проведены оси τ' , x' , наглядно видна относительность одновременности. В системе K' одновременны все события, лежащие на оси x' или вообще на прямых $\tau' = \text{const}$.

Геометрически все эти прямые параллельны оси x' — это линии одновременности в системе K' .

Рассмотрим два события A_1 и A_2 , лежащие на оси x' (два эти события происходят в системе K' одновременно, в момент $t' = 0$). Чтобы узнать моменты времени, в которые произойдут эти два события в системе K , их нужно «спроектировать» на ось τ , проведя прямые, параллельные оси x , потому что в системе K одновременны события, лежащие на прямых $\tau = \text{const}$ (рис. 4.3, а). Мы видим, что в системе K эти события происходят в разные моменты времени t_1 и t_2 . Конечно, это просто геометрическая иллюстрация относительности синхронизации часов, о которой шла речь в § 2.4.

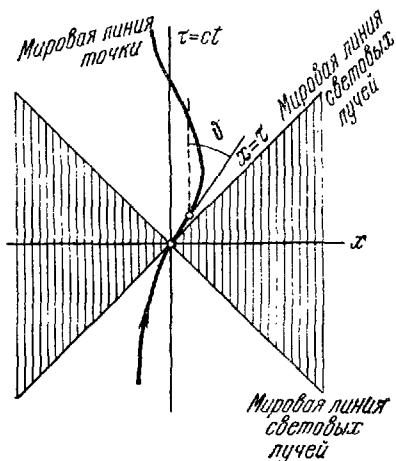


Рис. 4.2. Система действительных координат x , $\tau = ct$. Положение частицы в заданный момент времени определяется точкой на этой плоскости. Движению частицы соответствует кривая на этой плоскости, называемая мировой линией точки. Мировые линии неподвижных точек — прямые, параллельные оси τ . Мировая линия световых лучей — биссектриса координатного угла. В случае движения с переменной скоростью угол, составляемый касательной к мировой линии и осью τ , определяется из соотношения $\vartheta = \arctg(v/c)$, где v — мгновенная скорость частицы.

Очень важный результат следует из рис. 4.3, б. На нем проведены мировые линии двух тел, движущихся равномерно, но с различными скоростями. Чтобы определить расстояние между ними в данный момент времени, нужно найти координаты этих тел одновременно в той системе, в которой это расстояние ищется. Ясно видно, что в системах K и K' расстояние между телами, измеренное в какой-либо одной из систем K или K' , оказывается

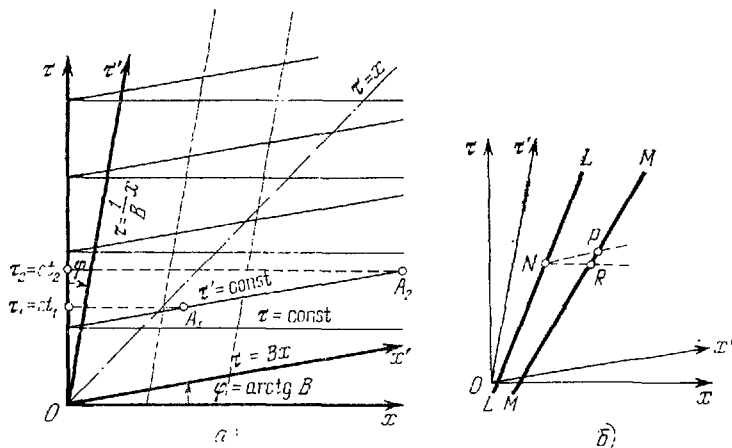


Рис. 4.3. а) Преобразование Лоренца сводится к тому, что оси x и τ поворачиваются на угол $\varphi = \text{arctg } B$ вокруг начала координат по направлению к биссектрисе координатного угла и занимают положения x' , τ' . Прямые $x' = \text{const}$ параллельны теперь оси Ox' , а прямые $\tau' = \text{const}$ параллельны оси Ox (мы перешли к прямолинейной, но косоугольной системе координат). Ясно видна относительность одновременности: события A_1 и A_2 , одновременные в K' (лежащие на прямой $\tau' = \text{const}$), совсем не одновременны в K (чтобы найти соответствующие им моменты в системе K , мы проецируем их на ось τ с помощью прямых, параллельных оси x). б) Здесь проведены две мировые линии тел (LL и MM). Хорошо видна относительность расстояния между движущимися телами. Чтобы найти расстояние между ними, нужно определить координаты этих тел, но непременно одновременно. Пусть одно из тел находится в точке N . Тогда с точки зрения K в этот же самый момент второе тело находится в точке R . Но с точки зрения K' второе тело в этот же самый момент находится в точке P . Отрезки NR и NP , отражающие расстояние между телами, разные.

различным. В силу равноправия систем отсчета ни одно из полученных расстояний нельзя считать истинным. Но тогда все законы механики, где сила зависит от расстояния, становятся для движущихся тел несодержательными. В ньютоновской механике, где время было абсолютным, эта трудность, конечно, не возникала.

Рассмотрим оси x , τ системы K (рис. 4.4). Если взять две мировые точки, то квадрат интервала между ними определяется выражением $s_{12}^2 = (\tau_2 - \tau_1)^2 - (x_2 - x_1)^2$. Для простоты будем считать, что событие 1 наступило в точке $x = 0$ в момент $\tau = 0$, т. е. в точке O . Любые события, наступившие на оси x до и после наступления события 1, изображаются точками на плоскости (x, τ) . Так как квадрат интервала (расстояния) от события 1 до любого

события равен $s^2 = \tau^2 - x^2$, то эта плоскость разбивается на четыре квадранта I, II, III, IV прямыми $x = \tau$, соответствующими последовательности событий, состоящих в приходе луча, испущенного из точки $x = 0$ в момент $\tau = 0$, в точку x в момент τ . Интервал между событиями на прямых $\tau^2 - x^2 = 0$ светоподобный, и «расстояние» на псевдоевклидовой плоскости между такими событиями равно нулю. Рассмотрим теперь четыре квадранта вне светоподобных прямых. В квадранте I $s^2 = \tau^2 - x^2 > 0$. Следо-

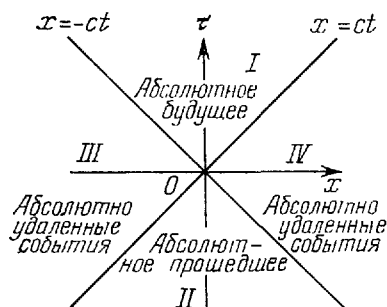


Рис. 4.4. Сечение пространственно-временного конуса плоскостью (x, τ) . Точка O — событие 1. По отношению к событию O все события, лежащие в квадрантах III и IV, представляют собой абсолютно удаленные события; события, лежащие в квадранте I, представляют собой абсолютное будущее, а события, лежащие в квадранте II, — абсолютное прошедшее.

вательно, интервал между любым событием квадранта I и событием 1 времениподобный. Для всех событий этого квадранта $\tau > 0$; следовательно, все они произойдут позже события 1 и изменить это никаким выбором системы отсчета нельзя. Это значит, что квадрант I есть область абсолютного будущего по отношению к O . В квадранте II также $s^2 > 0$, но в нем для всех событий $\tau < 0$; область II — это область абсолютного прошедшего по отношению к событию 1.

В квадрантах III и IV $s^2 < 0$, т. е. интервал между любым событием, расположенным в этой области, и событием 1 пространственноподобный. Все эти события происходят в точках, не совпадаю-

щих с точкой, где произошло событие 1, и изменить это за счет выбора системы отсчета нельзя. Однако можно найти такие системы отсчета, в которых данное событие из области III или IV наступило бы раньше, или позже, или, наконец, одновременно с событием 1, поскольку понятия «одновременно», «раньше» и «позже» для событий этой области относительны.

Если рассмотреть два события, расположенные произвольно на плоскости (τ, x) , то характер интервала между ними определится наклоном прямой, соединяющей две эти точки. Если эта прямая наклонена к оси x под углом, большим $\pi/4$, то интервал между событиями 1 и 2 времениподобный; если под углом, меньшим $\pi/4$, — пространственноподобный. Наконец, если эта прямая параллельна биссектрисе, — интервал светоподобный.

В четырехмерном пространстве уравнение, описывающее пространство света, имеет вид $c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$. С геометрической точки зрения в 4-пространстве это уравнение описывает «конус», который обычно называют *световым конусом*. Внутренние полости конуса соответствуют областям «абсолютного

будущего» и «абсолютного прошедшего». Световой конус, на котором лежат светоподобные направления, характеризуется еще и тем, что при всех переходах от одной ИСО к другой его положение в четырехмерном пространстве для каждой мировой точки остается неизменным.

Пусть событие состоит в приходе светового луча в определенную мировую точку, где находится наблюдатель. Таким образом, речь идет о наблюдении световых сигналов в данной точке пространства и в данный момент времени.

В заданную мировую точку световые лучи могут попасть только по тем направлениям четырехмерного пространства, которые лежат на «световом конусе прошедшего» до бесконечности (практически достаточно далеко в световых единицах). Каждой образующей этого конуса можно сопоставить при этом точку на пространственной сфере бесконечно большого радиуса, в центре которой находится наблюдатель. Такая условная сфера используется при наблюдениях небесных тел, она носит название небесной сферы.

Когда мы изображаем псевдоевклидову плоскость на листе бумаги, не следует забывать, что мы привыкли к соотношениям между длинами отрезков, привычным для евклидовой плоскости. На рис. 4.5 изображен прямоугольный треугольник, сторона которого AC равна $x_2 - x_1$, а BC — соответственно $\tau_2 - \tau_1$. По на этой плоскости $AB^2 = BC^2 - AC^2$ — согласно определению квадрата интервала, но вопреки теореме Пифагора; это псевдопифагорова теорема. Поэтому, когда мы сравниваем длины отрезков на плоскости (x, τ) , следует это делать осмотрительно.

На евклидовой плоскости (x, y) геометрическое место точек, равноудаленных от начала координат, определяется уравнением $r^2 = x^2 + y^2 = \text{const}$ — это окружность. На псевдоевклидовой плоскости (x, τ) , где квадрат расстояния от начала координат определяется соотношением $s^2 = \tau^2 - x^2$, геометрическим местом точек, «равноудаленных» от начала координат (рис. 4.6), будут четыре гиперболы (s^2 не обязательно положительно). Если выбрать гиперболу, для которой $s^2 = 1$, и провести лучи, выходящие из начала координат, до их пересечения с этой гиперболой, то отрезок каждого такого луча определит единичную «псевдоевклидову» длину в этом направлении. Можно дать физическую интерпретацию построения гиперболы $s^2 = 1$. Пусть в мировой точке $\tau = 0$, $x = 0$ рождаются частицы с разными скоростями, но с одним и тем

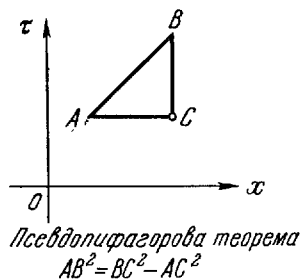


Рис. 4.5. Псевдопифагорова теорема в псевдоевклидовом пространстве.

же временем жизни $\tau_0 = 1$. Тогда геометрическим местом мировых точек, в которых происходит распад этих частиц, будет как раз гипербола $s^2 = 1$, мировыми линиями этих частиц — лучи, выходящие из мировой точки $(0, 0)$ и доходящие до этой гиперболы.

Рассмотрим в плоскости (x, τ) две пары равнобочных гипербол:

$$\tau^2 - x^2 = 1, \quad (4.18)$$

$$x^2 - \tau^2 = 1. \quad (4.19)$$

Нетрудно разбить плоскость (x, τ) на четыре квадранта, в каждом из которых заключено по одной гиперболе.

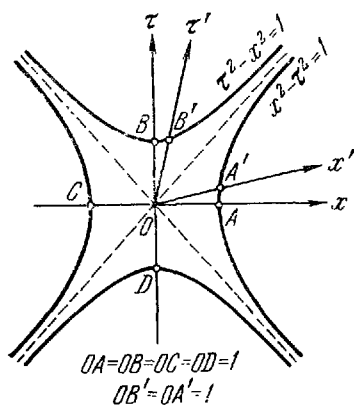


Рис. 4.6. В системе координат (x, τ) проведены четыре равнобочные гиперболы $\tau^2 - x^2 = 1$, $x^2 - \tau^2 = 1$. Поскольку преобразования Лоренца оставляют инвариантным выражение $\tau^2 - x^2 = c^2 t^2 - x^2$, то и в новых косоугольных координатах мы получим гиперболы $\tau'^2 - x'^2 = 1$, $x'^2 - \tau'^2 = 1$. Но это означает, что эти четыре равнобочные гиперболы пересекают соответственно ось x , τ , x' , τ' на расстояниях от начала координат, равных единице. Проведенные гиперболы называются масштабными.

Каждая из гипербол (4.18) и (4.19) пересекает только одну из осей — x или τ . Точки пересечения гипербол (4.19) с осью x определяются из условия $\tau = 0$. Мы видим, что гиперболы (4.19) пересекают ось x в точках $x = \pm 1$. Аналогично находим, что гиперболы (4.18) пересекают ось τ в точках $\tau = \pm 1$. Поскольку гиперболы (4.18), (4.19) отсекают на координатных осях единичные отрезки, естественно назвать эти гиперболы *масштабными*.

Так как выражение $\tau^2 - x^2 = c^2 t^2 - x^2$ является инвариантом преобразований Лоренца, то и в системе K' будут соблюдаться равенства $\tau'^2 - x'^2 = 1$, $\tau'^2 - x'^2 = -1$, из которых сразу же следует, что и на новых косоугольных осях x' и τ' те же самые гиперболы отсекают единичные отрезки.

Границы квадрантов окажутся асимптотами этих гипербол. Действительно, подставляя уравнение $\tau = kx$ луча, проходящего через начало координат, с произвольным тангенсом угла наклона k ($k = \text{tg } \alpha$) в уравнения гипербол (4.18) и (4.19), мы обнаружим, что координата пересечения определяется из уравнения $x^2 = \pm \frac{1}{1 - k^2}$. Это уравнение имеет действительный корень лишь при условии $k^2 < 1$. При $k^2 = 1$ координата точки пересечения на оси x отодвигается в бесконечность. Это и означает, что лучи $\tau = x$ являются асимптотами этих гипербол. Таким образом, мировые линии световых лучей $x = ct$ являются асимптотами гипербол (4.18), (4.19).

Каждая из гипербол (4.18) и (4.19) пересекает только одну из осей — x или τ . Точки пересечения гипербол (4.19) с осью x определяются из условия $\tau = 0$. Мы видим, что гиперболы (4.19) пересекают ось x в точках $x = \pm 1$. Аналогично находим, что гиперболы (4.18) пересекают ось τ в точках $\tau = \pm 1$. Поскольку гиперболы (4.18), (4.19) отсекают на координатных осях единичные отрезки, естественно назвать эти гиперболы *масштабными*.

Так как выражение $\tau^2 - x^2 = c^2 t^2 - x^2$ является инвариантом преобразований Лоренца, то и в системе K' будут соблюдаться равенства $\tau'^2 - x'^2 = 1$, $\tau'^2 - x'^2 = -1$, из которых сразу же следует, что и на новых косоугольных осях x' и τ' те же самые гиперболы отсекают единичные отрезки.

Из рис. 4.6 непосредственно видно, что единичные отрезки на осях x и x' вовсе не равны друг другу. Не следует забывать, однако, что изображение псевдоевклидовой плоскости на евклидовой условно и что «собственные» единицы длины выбраны одинаково.

Теперь уже легко пояснить геометрически, как возникает укорочение движущейся линейки. Изобразим на одном чертеже оси x, t и оси x', t' . Проведем часть гиперболы, проходящей через первый квадрант координатных систем K и K' (рис. 4.7). Отрезок OA изображает единичную линейку, покоящуюся в K . Ее

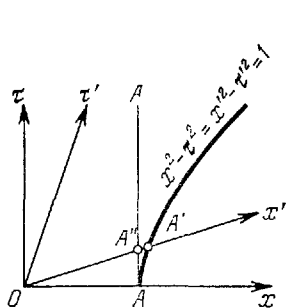


Рис. 4.7. Геометрическая иллюстрация относительности длины линейки. Воспроизведен первый квадрант, изображенный на рис. 4.6. OA — линейка, покоящаяся в системе K . Мировые линии ее концов — Ot и AA'' . Гипербола $x^2 - t^2 = 1$ пересекает ось x в точке A , а ось x' — в точке A' . Таким образом, $OA = 1$ и $OA' = 1$. Чтобы найти одновременно положение концов линейки в системе K' , следует пересечь мировые линии концов линейки какой-либо прямой $t' = \text{const}$, например осью x' (соответствующей моменту $t' = 0$). Тогда длина линейки в системе K' оказывается равной OA'' . Но $OA'' < OA' = 1$.

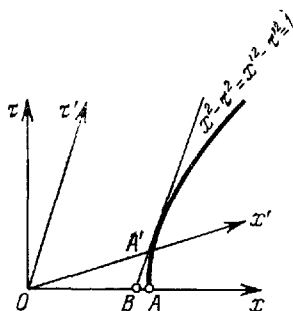


Рис. 4.8. На этом рисунке рассматривается случай, когда линейка покоится в K' . Мировые линии ее концов — прямые, параллельные Ot' (сама ось Ot' и прямая, проходящая через B). Длина линейки в K определяется пересечением этих мировых линий с осью x ($t = 0$) и оказывается равной OB . Но $OB < OA' = 1$, и мы приходим к тому же результату: длина линейки наибольшая в той системе, где она покоится.

мировые линии в системе K — прямые, параллельные оси Ot , проходящие через точки O и A . Но с точки зрения системы K' одновременное положение концов отрезка OA в момент $t' = 0$ соответствует пересечению его мировых линий с осью x' , т. е. точкам O и A'' . Единичная линейка в K' равна OA' ; из рис. 4.7 видно, что $OA'' < OA' = 1$.

Допустим теперь, что единичная линейка покоится в системе K' (рис. 4.8). Ее длина равна теперь OA' , а ее мировые линии параллельны оси Ot' ; одна из них — сама ось Ot' , вторая — прямая $A'B$. Чтобы одновременно определить координаты концов линейки с точки зрения системы K , нужно пересечь мировые линии

концов линейки любой прямой $\tau = \text{const}$. Нам удобнее взять прямую $\tau = 0$. Из рис. 4.8 видно, что $OB < OA = 1$.

Теперь остановимся на геометрической иллюстрации относительности промежутков времени (рис. 4.9). Пусть часы покоятся в начале координат системы K' . Их мировой линией будет просто ось Ot' . В момент времени $t = 0$ движущиеся часы были в начале координат системы K , где мы сравнили их показание с одними из часов системы K' , находящимися в этой точке.

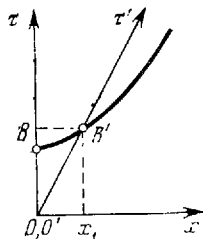


Рис. 4.9. Геометрическая иллюстрация относительности промежутков времени между двумя событиями. Пусть часы покоятся в системе K' и расположены в начале координат O . Их мировая линия совпадает с осью Ot' . Показание этих часов в мировой точке B' отличается на единицу от показания в точке O' . Но в системе K точка B' одновременно с мировой точке B (лежащей на одной прямой $\tau = \text{const}$ с точкой B'), часы в которой (расположенные в этой точке и покоящиеся в K) покажут время, определяемое отрезком OB , по отношению к показанию других часов из K , расположенных в точке O . Из чертежа видно, что $OB < OB' = 1$. Это и означает, что промежуток времени перемещения часов системы K' меньше с точки зрения K' , чем с точки зрения K .

Как всегда, считаем, что при совпадении O и O' часы из обеих систем показывают время $t = 0$ и $t' = 0$. Тогда отрезки OB и $O'B'$ соответствуют показаниям часов в системах K и K' .

В мировой точке B' показание движущихся часов увеличится на единицу по сравнению с их показанием в точке O' . Но точка B' в системе K одновременно со всеми событиями, расположенными на прямой $\tau = \text{const}$, проходящей через точку B' . В частности, мировая линия часов, находящихся в точке x_1 и покоящихся в K , как раз проходит через точку B' . Это значит, что если движущиеся часы из K' отсчитали промежуток собственного времени $O'B'$, то промежуток времени, отсчитанный двумя часами из K (находящимися в точках O и x_1), равен OB . Но из чертежа видно, что промежуток времени, отсчитанный часами в K' , меньше, поскольку $O'B' = 1$, а $OB > 1$.

Если же часы покоятся в системе K , то они отсчитают единицу времени в мировой точке B (рис. 4.10), которая в системе K' одновременна с точкой B'' (OB'' — это показание часов системы K' , которое обнаружит в точке B'' наблюдатель из системы K). Точка B'' получена пересечением прямой, параллельной оси x' и проходящей через точку B , с осью Ot' . Но $OB'' > OB' = 1$; следовательно, движущиеся часы отсчитают опять-таки промежуток времени больший, чем двое покоящихся часов.

Длина дуги (псевдоевклидова!) мировой линии непосредственно связана с собственным временем тела — она ему просто пропорциональна: $ds = c dt$. Таким образом, длина дуги мировой линии позволяет судить о том, какое собственное время отсчитали часы, связанные с частицей. Но нужно помнить, что, пытаясь оценить длину дуги на псевдоевклидовой плоскости, нужно быть

осмотрительным. «Опасности» ясны уже из того, что для двух точек, находящихся на конечном пространственном расстоянии. «длина дуги», соединяющей их, может оказаться равной нулю. Подумайте сами над тем, почему в приведенных выше рассуждениях мы получили правильные результаты, опираясь на наглядные геометрические рассуждения. Конечно, особенности псевдоевклидовой плоскости накладывают свой отпечаток на истолкование результатов. Рассмотрим в качестве примера отличие собственного времени от

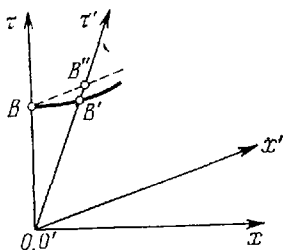


Рис. 4.10. То же самое, что и на предыдущем рисунке, но теперь часы покоятся в начале системы K . Мировая линия часов — ось $O\tau$. В точке B часы отсчитывают единицу времени. Но одновременно с этим моментом в системе K' будут события, лежащие на прямой, параллельной оси x' и проходящей через точку B . Ясно, что $OB'' > OB' = 1$, т. е. покоящиеся часы отсчитают меньший промежуток времени, чем часы движущиеся.

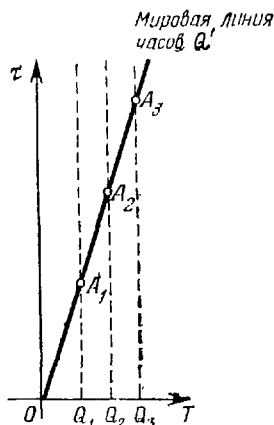


Рис. 4.11. Различие между «собственным» временем тела и координатным временем, отсчитываемым по многим часам системы отсчета, относительно которой частица движется.

координатного, т. е. времени, отсчитываемого по часам системы, относительно которой тело движется. Пусть часы Q' покоятся в начале системы K' , а их мировая линия — OA_3 (рис. 4.11). Как обычно, совпадающие часы в O и O' показывают $t = 0, t' = 0$.

Мировые линии любых часов Q , покоящихся в K , — прямые, параллельные оси t . В мировых точках A_1, A_2, A_3, \dots можно сверить часы Q' с часами Q_1, Q_2, Q_3, \dots , синхронизованными в K и показывающими в любой мировой точке A_1, A_2, A_3, \dots общее, единое для K время. Его величина равна длине мировой линии Q_1A_1 для мировой точки A_1 . Но для часов Q' длина мировой линии, соединяющей O' и A_1 , равна уже OA_1 . Однако $OA_1^2 = Q_1A_1^2 - OQ_1^2$, откуда ясно, что $OA_1 < Q_1A_1$. Это и означает, что часы Q' , которые сравниваются с часами Q_1, Q_2, \dots , покоящимися в системе K , отстают от часов Q_1, Q_2, \dots , которые синхронизованы в системе K .

Наконец, пусть сначала два человека («близнецы») находились в точке O . Затем один из них («путешественник») совершает равномерное и прямолинейное движение, за исключением небольшого промежутка времени, когда ему приходится изменить направление скорости на обратное, чтобы снова вернуться в точку O .

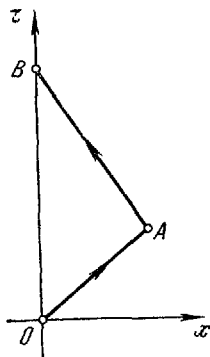


Рис. 4.12. Мировые линии двух «близнецов». Мировая линия «путешественника» — ломаная OAB ; мировая линия «домоседа» — прямая OB . «Путешественник» испытывает ускорение, когда он изменит направление своего движения в точке B и тем самым оказывается в течение этого времени в неинерциальной системе отсчета. Длина мировой линии тела определяет промежуток собственного времени тела. Очевидно, что промежуток собственного времени у «путешественника» меньше, чем у «домоседа» (см. псевдопифагорову теорему на рис. 4.5).

Другой «близнец» все время остается в точке O . Из рис. 4.12 видно, что мировая линия «путешественника» OAB длиннее мировой линии «домоседа». Однако согласно псевдопифагоровой теореме это значит, что по собственному времени «путешественник» прожил меньше, чем «домосед». К этому вопросу мы еще вернемся в гл. 8.

Чтобы выполнялся принцип относительности Эйнштейна необходимо, чтобы основные законы физики имели одинаковый вид во всех инерциальных системах, отличаясь лишь обозначением переменных, относящихся к соответствующей системе отсчета. С физической точки зрения последнее замечание означает, что в каждой ИСО измерения производятся своими приборами, покоящимися в этой системе. Но преобразования координат события при переходе от одной ИСО к другой — это преобразования Лоренца. Следовательно, уравнения механики, например, должны сохранять свой вид (в указанном смысле) в любой ИСО. Это условие автоматически выполняется, если уравнения механики записаны в четырехмерном векторном виде. Действительно, в этом случае закон преобразования левой и правой части такого уравнения известен и он не меняет вид уравнения. Про уравнения, записанные в векторной (или в общем случае тензорной) форме, говорят, что они записаны в ковариантной форме.

Уравнение Ньютона, связывающее силы и ускорения, ковариантно по отношению к преобразованиям Галилея, но оно не ковариантно по отношению к преобразованиям Лоренца. Однако преобразования Лоренца однозначно вытекают из постулатов Эйнштейна, которые надежно подтверждены экспериментально. Чтобы удовлетворить основному постулату Эйнштейна о равноправии инерциальных систем отсчета, нужно обеспечить ковариантность уравнений механики при релятивистском преобразовании координат и времени — преобразования Лоренца. Сравнительно нетрудно написать нужные уравнения механики, если воспользоваться четырехмерным геометрическим представлением СТО. Мы так и будем действовать.

Конечно, с развитием науки происходит не отмена ранее известных («правильных») законов, а ограничение области их применения. Между различными теориями, описывающими одну и ту же группу явлений в предельных случаях, всегда есть соответствие. В случае релятивистской механики окажется, что большинство формул классической механики соответствует предельному случаю релятивистских формул при $\beta \rightarrow 0$. Другими словами, классическая механика есть предельный случай релятивистской механики, соответствующий скоростям, малым по сравнению со скоростью

света. Тем не менее релятивистская механика приводит и к таким выводам, на которые классическая механика не давала ни малейшего намека (например, наличие энергии покоя тела).

§ 5.1. 4-скорость и 4-ускорение. Чтобы записывать соотношения между физическими величинами в пространстве-времени, мы должны построить пужные 4-векторы. Строя эти величины, мы имеем в виду, что в предельном случае малых скоростей преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея, относительность промежутков времени и длин уже не имеет места и уравнения Ньютона соответствуют принципу относительности Галилея, если переход от одной ИСО к другой описывается преобразованиями Галилея. В описываемом предельном случае время и пространство уже не связаны друг с другом и мы можем пользоваться привычными трехмерными величинами. Поэтому, строя четырехмерные величины, мы всегда будем стремиться к тому, чтобы три их (пространственные) компоненты были сходны с соответствующими трехмерными величинами. В предельном случае малых скоростей ($\beta \rightarrow 0$) три компоненты четырехмерных величин должны переходить в обычные механические величины.

Построение 4-скорости и 4-ускорения мы будем вести по аналогии с построением соответствующих величин в трехмерном пространстве, где положение частицы задавалось трехмерным радиус-вектором \mathbf{r} , а 3-скорость определялась как производная радиус-вектора по времени $d\mathbf{r}/dt$. Определить 4-скорость как производную 4-радиус-вектора \vec{R} по времени нельзя. Нам нужен 4-вектор скорости, а для этого 4-вектор приращения \vec{R} , т. е. $d\vec{R}$, можно делить только на скаляр (инвариант преобразований Лоренца). Ни само время, ни его дифференциал скаляром не являются.

В качестве инвариантной величины, зависящей от времени, можно взять интервал или собственное время частицы (ср. § 3.3). Мы еще раз введем понятие собственного времени, связав его с интервалом между событиями. Мы пользуемся тем обстоятельством, что движение частицы в 3-пространстве — это непрерывная последовательность событий, состоящих в том, что частица в данный момент занимает определенную точку пространства. Пусть в системе K координаты частицы за время dt изменились на dx, dy, dz , а ее смещение равно $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Рассмотрим мгновенно-сопутствующую частице инерциальную систему K' (мгновенно-сопутствующий частице ИСО называется система, постоянная скорость которой V равна мгновенной скорости частицы). В системе K' за бесконечно малый промежуток времени dt' координаты частицы не меняются: $dx' = dy' = dz' = 0$. Имея в виду инвариантность интервала между событиями,

запишем

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2.$$

В системе K' промежуток dt' — это промежуток собственного времени. В этой главе мы будем обозначать его через $d\tau$ (обозначением $\tau = ct'$, использованным в предыдущих главах, в этой главе мы не пользуемся). Из предыдущего равенства имеем

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dl}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt.$$

Мы пришли к уже известному нам (§ 3.3) результату, а заодно доказали инвариантность собственного времени ($d\tau = ds/c$). Выпишем нужные для дальнейшего формулы:

$$d\tau = dt/\gamma, \quad ds = c d\tau, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \beta(t) = v(t)/c. \quad (5.1)$$

Мы видим, что собственное время частицы отсчитывается по часам мгновенно-сопутствующей ИСО. Но за конечный промежуток времени для частицы, движущейся с ускорением, мгновенно-сопутствующие ИСО меняются. Конечное собственное время частицы определяется как суммарное время, отсчитанное многими ИСО. В принципе часы жестко связывать с частицей не следует, поскольку всякое ускорение влияет на ход часов. Лишь в том случае, когда ускорение, испытываемое частицей, практически на ход часов не влияет, собственное время можно отсчитывать по часам, жестко связанным с частицей. Но отсчет «собственного времени» легко провести по времени, отсчитываемому часами системы K (относительно которой частица движется), если известна зависимость скорости частицы от времени, т. е. $v = v(t)$:

$$\tau = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt.$$

Из формул (5.1) и последней формулы видно, что координатное время (время, отсчитываемое всеми часами из K) является функцией собственного времени τ . Из формулы $ds = c d\tau$ видно, что на равных правах с собственным временем $d\tau$ можно пользоваться интервалом ds , причем все формулы будут отличаться на некоторые степени инвариантного множителя c .

Итак, введем 4-вектор скорости

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{d\tau}. \quad (5.2)$$

Поскольку $d\tau$ — инвариант, а $d\vec{R}$ — вектор, векторный характер \vec{V} не вызывает сомнений. Раскроем трехмерный смысл первых

трех компонент (5.2) в обозначениях (4.7а):

$$u_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt} = \gamma \frac{dx_\alpha}{dt} = \gamma v_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad (5.3)$$

где v_α — компоненты обычной 3-скорости. Итак, три первые компоненты 4-скорости — это компоненты обычной 3-скорости, умноженные на множитель γ , зависящий от абсолютной величины скорости частицы. Четвертую компоненту найдем отдельно:

$$u_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \gamma \frac{d(ict)}{dt} = ic\gamma. \quad (5.4)$$

В обозначениях (4.7) имеем

$$u^0 = \frac{dx^{(0)}}{d\tau} = \gamma \frac{d(ct)}{dt} = \gamma c, \quad u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\alpha}{dt} = \gamma v_\alpha.$$

В духе записи (4.7а, б) можно написать

$$\vec{V} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \gamma v_x & \gamma v_y & \gamma v_z & ic\gamma \end{pmatrix}; \quad (a) \quad \left| \vec{V} \begin{pmatrix} u^0 & u^1 & u^2 & u^3 \\ \gamma c & \gamma v_x & \gamma v_y & \gamma v_z \end{pmatrix} \right. \quad (б) \quad (5.5)$$

При $\beta \rightarrow 0$, т. е. при скоростях тела $v \ll c$, множитель $\gamma \sim 1$, и тогда первые три компоненты 4-скорости (5.5а) и последние три компоненты (5.5б) совпадают с обычной скоростью. Особый интерес представляют четвертая компонента (5.5а) и нулевая (5.5б) 4-скорости. Они отличны от нуля даже тогда, когда частица покоится (при $v = 0$ $\gamma = 1$ и $u_4 = ic$, а $u^0 = c$). Последний результат имеет ясный смысл. Время остановить нельзя, оно всегда течет. «Покой нам только снится», и в четырехмерном мире «покоя» (в том смысле, что $\vec{V} = 0$) быть не может. Что касается «скорости течения времени», то она, разумеется, определяется выбором единиц времени.

Можно записать компоненты 4-скорости еще и так:

$$\vec{V}(\gamma v, ic\gamma); \quad (a) \quad \left| \vec{V}(c\gamma, \gamma v) \right. \quad (б) \quad (5.6)$$

Квадрат 4-вектора является инвариантом. Он находится по формулам (4.11а) и (4.11б) соответственно:

$$\vec{V}^2 = \gamma^2 v^2 - c^2 \gamma^2 = -c^2; \quad \vec{V}^2 = (c^2 \gamma^2 - \gamma^2 v^2) = c^2.$$

Вычисление проще всего производится в собственной системе отсчета частицы, т. е. в системе отсчета, где она покоится ($v = 0$). Тогда в (5.5а) останется лишь $u_4 = ic$, а в (5.5б) $u^0 = c$. Следовательно,

$$\vec{V}^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = -c^2; \quad (a) \quad \left| \vec{V}^2 = u^0^2 - u^1^2 - u^2^2 - u^3^2 = c^2; \quad (б) \quad (5.7)$$

квадрат 4-скорости в (5.7а) и (5.7б) разного знака в силу различного определения интервала (см. гл. 4), но этот знак при выбранном определении \vec{V}^2 уже не меняется, откуда следует, что $v < c$ всегда.

Как только скорость в 4-пространстве записана в виде 4-вектора, сразу же можно записать формулы преобразования ее компонент при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Пусть в системе K заданы составляющие 4-скорости \vec{V} (u_1, u_2, u_3, u_4). Согласно формулам (4.10а) в системе K' мы получим

$$u'_1 = \Gamma(u_1 + iVu_4), \quad u'_2 = u_2, \quad u'_3 = u_3, \quad u'_4 = \Gamma(u_4 - iVu_1), \quad (5.8)$$

но 4-скорости имеют составляющие \vec{V} ($\gamma v, i\gamma c$), \vec{V}' ($\gamma' v', i\gamma' c$), подставляя которые в (5.8) получим

$$\begin{aligned} \gamma' v'_x &= \Gamma(\gamma v_x - \gamma V), & \gamma' v'_y &= \gamma v_y, & \gamma' v'_z &= \gamma v_z, \\ i\gamma' c &= \Gamma(i\gamma c - iV\gamma v_x). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из последнего равенства (5.9) следует, что

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{V}{c^2} v_x\right)}. \quad (5.10)$$

Подставляя это выражение в три первых равенства (5.9):

$$v'_x = \frac{\gamma}{\gamma'} \Gamma(v_x - V), \quad v'_y = \frac{\gamma}{\gamma'} v_y, \quad v'_z = \frac{\gamma}{\gamma'} v_z,$$

получим для компонент скорости в K' формулы, выведенные в гл. 3 из преобразований Лоренца.

Заметим попутно, что если вместо формул перехода от K к K' (5.8) мы используем формулы обратного перехода, то вместо (5.10) найдем

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \Gamma\left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right), \quad (5.10')$$

что позволяет получить значение γ/γ' , выраженное через компоненты скорости в системе K' . Из (5.10') следует формула (3.41), полученная иным путем:

$$\sqrt{1 - \beta^2} \equiv \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\gamma' \Gamma\left(1 + \frac{V}{c^2} v'_x\right)} = \frac{\sqrt{1 - \beta'^2} \sqrt{1 - V^2}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}.$$

Из формулы (5.10) вытекает, что если частица покоится в K ($v = 0$), то $\gamma' = \Gamma$; этот результат очевиден, потому что частица, неподвижная в K , движется относительно K' со скоростью $-V$.

Тот же самый результат получится, если мы воспользуемся определенным (5.6б) и формулами преобразования (4.10б). Мы

предоставим это сделать читателю. Наш результат очевиден — пространственные компоненты 4-скорости определяют преобразование привычной 3-скорости.

Теперь нам следует определить 4-ускорение, которое мы также сразу построим как 4-вектор:

$$\vec{w} = \frac{d^2\vec{R}}{d\tau^2} = \frac{d\vec{V}}{d\tau}, \quad (5.11)$$

или же в компонентах:

$$w_i = -\frac{du_i}{d\tau} = \frac{d^2x_i}{d\tau^2}; \quad (\text{а}) \quad \left| \quad w^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{d^2x^i}{d\tau^2}. \quad (\text{б}) \quad (5.12) \right.$$

Ниже мы выпишем несколько формул, касающихся ускорения, по нужных нам лишь для специальных вопросов, в обозначениях (4.7а). Компоненты четырехмерного ускорения можно выразить через компоненты трехмерных векторов \mathbf{v} и $\dot{\mathbf{v}}$. Мы получаем

$$w_\alpha = \frac{d}{dt}(\gamma v_\alpha) \frac{dt}{d\tau} = \gamma v_\alpha \frac{d\gamma}{dt} + \gamma^2 \frac{dv_\alpha}{dt} = \frac{\dot{v}_\alpha}{1-\beta^2} + \frac{v_\alpha (v\dot{v})}{c^2(1-\beta^2)^2}, \quad (5.13)$$

потому что, как легко проверить,

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \beta \dot{\beta} = \frac{\gamma^3 v\dot{v}}{c^2}, \quad (5.14)$$

а $\frac{dt}{d\tau} = \gamma$. Четвертая компонента ускорения:

$$w_4 = \frac{d}{dt}(ic\gamma) \frac{dt}{d\tau} = ic\gamma \frac{d\gamma}{dt} = \frac{ic}{2} \frac{d\gamma^2}{dt} = ic\gamma^4 \beta \dot{\beta} = \frac{i}{c} \frac{(v\dot{v})}{(1-\beta^2)^2}. \quad (5.15)$$

В случае равномерного движения ($\dot{\mathbf{v}} = 0$) все четыре компоненты ускорения обращаются в нуль. В системе отсчета, в которой частица покоится,

$$w_1^0 = \dot{v}_x, \quad w_2^0 = \dot{v}_y, \quad w_3^0 = \dot{v}_z, \quad w_4^0 = 0, \quad (5.16)$$

т. е. три пространственные слагающие 4-ускорения совпадают с обычными трехмерными компонентами ускорения, а временная составляющая обращается в нуль. Из (5.16) видно, что

$$\vec{w}_0^2 = w_i^0{}^2 = \dot{\mathbf{v}}^2 > 0.$$

В силу инвариантности квадрата модуля 4-вектора (см. Приложение I, § 1) можно утверждать, что 4-вектор ускорения — пространственноподобный вектор (см. определение интервала (4.5)).

Выпишем компоненты 4-вектора ускорения \vec{w} в обозначениях (4.7а, б):

$$\vec{w} \left(\gamma \frac{d}{dt} (\gamma v), \frac{tc}{2} \frac{d\gamma^2}{dt} \right) \equiv \left(\gamma^2 \dot{v} + \gamma^4 \beta \dot{\beta} v, \frac{i\gamma}{mc} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right), \quad (\text{а})$$

$$\vec{w} \left(\gamma \frac{d}{dt} (c\gamma), \gamma \frac{d}{dt} (\gamma v) \right) \equiv \left(\frac{\gamma}{mc} \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \gamma \frac{d}{dt} (\gamma v) \right). \quad (\text{б}) \quad (5.17)$$

Энергию частицы \mathcal{E} мы ввели, несколько забегаая вперед (см. формулу (5.32)). С помощью (5.15) и (5.17) нетрудно получить, что

$$\vec{w}^2 - w_4^2 = \gamma^6 \left(\dot{v}^2 - \frac{1}{c^2} [v \dot{v}]^2 \right) > 0. \quad (5.18)$$

Выпишем формулы преобразования 3-ускорения ($\dot{v} = dv/dt$, $\dot{v}' = dv'/dt'$) при переходе от одной ИСО к другой. Преобразования Галилея оставляли 3-ускорение частицы без изменения. Преобразования Лоренца меняют компоненты 3-ускорения. Проще всего формулы преобразования компонент 3-ускорения получаются так. Считая v_x и v'_x соответственно функциями t и t' , учитывая связь t и t' (2.16), получим из (3.26), вводя обозначения $(v_x/c) = \beta_x$, $(v'_x/c) = \beta'_x$ и т. д.:

$$dv_x = \frac{dv'_x}{\Gamma^2(1 + \beta\beta'_x)^2}, \quad dv_y = \frac{dv'_y - \beta(\beta'_x dv'_x - \beta'_x dv'_y)}{\Gamma(1 + \beta\beta'_x)^2},$$

и аналогично для dv_z . Разделив левые и правые части этих равенств соответственно на левую и правую части равенства $dt = \Gamma \left(dt' + \frac{\beta}{c} dx' \right)$, получим

$$\dot{v}_x = \frac{1}{\Gamma^3(1 + \beta\beta'_x)} \dot{v}'_x,$$

$$\dot{v}_y = \frac{\dot{v}'_y + \beta(\beta'_x \dot{v}'_y - \beta'_y \dot{v}'_x)}{\Gamma^2(1 + \beta\beta'_x)^3}, \quad \dot{v}_z = \frac{\dot{v}'_z + \beta(\beta'_x \dot{v}'_z - \beta'_z \dot{v}'_x)}{\Gamma^2(1 + \beta\beta'_x)^3}.$$

Конечно, тот же самый результат получится и преобразованием 4-вектора ускорения \vec{w} . Удобно записать его в системах K и K' в виде $\vec{w} (\gamma^2 \dot{v} + \gamma v \dot{\gamma}, i c \gamma \dot{\gamma})$, $\vec{w}' (\gamma'^2 \dot{v}' + \gamma' v' \dot{\gamma}', i c \gamma' \dot{\gamma}')$.

Из формул преобразования компонент 4-вектора

$$w_1 = \Gamma (w'_1 - i \beta w'_4), \quad w_4 = \Gamma (w'_4 + i \beta w'_1)$$

получим

$$\gamma \dot{v}_x + v_x \dot{\gamma} = \Gamma \frac{\gamma'}{\gamma} (\gamma' \dot{v}'_x + \dot{\gamma}' v'_x + V \dot{\gamma}'),$$

$$\dot{\gamma} = \Gamma \frac{\gamma'}{\gamma} [\dot{\gamma}' + \beta (\gamma' \dot{\beta}'_x + \dot{\gamma}' \beta'_x)].$$

С помощью (5.10') из этих соотношений найдется \dot{v}_x . Из формул преобразования для $w_2 = w'_2$ и $w_3 = w'_3$ получатся формулы преобразования для \dot{v}_y и \dot{v}_z .

В формулы преобразования компонент 3-ускорения входит скорость движения частицы. Но 3-ускорение возникает лишь в том случае, когда скорость меняется. Следовательно, даже в том случае, когда в одной ИСО 3-ускорение постоянно, во всех остальных оно уже меняется со временем: в релятивистской механике равноускоренное движение в одной ИСО уже не равноускоренное во всех остальных!

§ 5.2. 4-сила и четырехмерное уравнение движения. Поскольку мы будем часто обращаться к трехмерным классическим соотношениям, выпишем некоторые из них. В классической механике масса тела частицы считается постоянной величиной; будем обозначать ее через m . Второй закон Ньютона в классической механике записывается так:

$$\frac{d}{dt}(mv) = F \quad (5.19a)$$

или

$$\frac{dp}{dt} = F, \quad (5.19b)$$

где F — трехмерный вектор обычной силы; величина $p = mv$ называется *классическим импульсом частицы*.

Умножая левую и правую части (5.19a) на $v dt$, после простых преобразований мы получаем как следствие второго закона Ньютона

$$d(mv^2/2) = Fv dt. \quad (5.20)$$

Справа в (5.20) стоит работа силы F ; слева по закону сохранения энергии должно стоять изменение энергии. Таким образом, энергию тела с точностью до постоянной величины можно определить как $T = mv^2/2$. Здесь постоянная выбрана равной нулю, чтобы тело в покое никакой энергией не обладало. Следовательно, энергия $mv^2/2$ связана только с движением тела; ее называют поэтому *кинетической энергией* («энергией движения»). Подчеркнем, что если бы мы считали, что в состоянии покоя тело обладает энергией \mathcal{E}_0 , то «полная» энергия движущегося тела была бы $\mathcal{E} = T + \mathcal{E}_0$. Можно интерпретировать постоянную \mathcal{E}_0 как постоянную потенциальную, или внутреннюю, энергию. Но никаких оснований для этого в классической механике нет и \mathcal{E}_0 можно считать просто произвольной константой. Следовательно, «полная» энергия свободного тела в классической механике в принципе могла быть любого знака (в зависимости от знака

постоянной \mathcal{E}_0). При обычном выборе ($\mathcal{E}_0 = 0$) полная энергия свободного тела совпадает с кинетической.

Допустим теперь, что частица находится в потенциальном поле, т. е. силу, действующую на частицу, можно записать как $F = -\text{grad } U$, где $U(x, y, z)$ — потенциальная энергия. Так как $v dt = dr$, а $\text{grad } U dr = dU$, (5.20) переписывается в виде

$$d(mv^2/2) = -dU.$$

Отсюда следует закон сохранения полной энергии классической механики:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0;$$

другими словами, $T + U = \text{const.}$

Теперь можно перейти к определению 4-импульса частицы \vec{P} . По аналогии с 3-импульсом ($p = mv$) мы вводим 4-импульс как произведение инвариантной (скалярной) массы m на 4-скорость \vec{V} , так что $\vec{P} = m\vec{V}$. Поэтому

$$\vec{P}(m\gamma v, im\gamma c) \quad (a); \quad \vec{P}(m\gamma c, m\gamma v). \quad (б) \quad (5.21)$$

Как будет ясно из дальнейшего, инвариантную массу m целесообразно назвать *массой покоя*. По аналогии с (5.19) можно предположить, что четырехмерное уравнение движения имеет вид

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F} \quad (5.22)$$

или в компонентах,

$$m \frac{du_i}{d\tau} = \mathfrak{F}_i, \quad (5.23)$$

где дифференцирование, естественно, ведется по инвариантному собственному времени $d\tau$ (иначе не получится векторное соотношение), а справа стоит 4-вектор силы \vec{F} ($\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4$), компоненты которого нам еще предстоит определить.

Еще раз напомним (ср. § 4.3), почему так важно записать уравнение движения в четырехмерной векторной форме (5.22). Дело в том, что согласно первому постулату Эйнштейна все основные законы физики должны иметь одинаковую форму во всех ИСО. С математической точки зрения это означает, что уравнения, описывающие физические законы, должны записываться в ковариантном виде по отношению к преобразованиям Лоренца. Уравнения записаны в ковариантном виде, если их левые и правые части преобразуются при преобразованиях Лоренца одинаковым образом. Но это просто означает, что левые и правые части должны

быть соответственно либо скалярными (инвариантными) величинами, либо 4-векторами, либо, наконец (об этом речь пойдет в гл. 6), тензорами одинакового ранга. Уже одно это обеспечивает сохранение записанных таким образом соотношений при переходе от одной ИСО к другой. Записав уравнение движения в векторной форме (5.22), мы обеспечили ковариантность этого уравнения при преобразованиях Лоренца, т. е. универсальность принципа относительности Эйнштейна.

Компоненты вектора $d\vec{P}/d\tau$ нам уже известны, поскольку известны компоненты $d\vec{V}/d\tau$ (5.17а, б), а m — инвариант:

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} \left(\gamma \frac{d}{dt} (m\gamma v), i\gamma \frac{d}{dt} (m\gamma c) \right), \quad (\text{а}) \quad (5.24)$$

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} \left(\gamma \frac{d}{dt} (m\gamma c), \gamma \frac{d}{dt} (m\gamma v) \right). \quad (\text{б})$$

Мы обозначили компоненты 4-вектора \vec{F} готической буквой \mathfrak{F} с индексами, т. е. \vec{F} ($\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3, \mathfrak{F}_4$) или же \vec{F} ($\mathfrak{F}^0, \mathfrak{F}^1, \mathfrak{F}^2, \mathfrak{F}^3$). Приравнивая 4-векторы, мы приравниваем их компоненты. Для трех первых компонент (5.24а) или трех последних (5.24б) имеем ($\alpha = 1, 2, 3$)

$$\gamma \frac{d}{dt} (m\gamma v_\alpha) = \mathfrak{F}_\alpha; \quad (\text{а}) \quad \left| \quad \gamma \frac{d}{dt} (m\gamma v_\alpha) = \mathfrak{F}^\alpha. \quad (\text{б}) \quad (5.25)$$

Определим теперь три первые компоненты 4-силы \mathfrak{F}_α . Очевидно, они пропорциональны компонентам 3-силы, поскольку при предельном переходе $\beta \rightarrow 0$ мы должны вернуться к обычному уравнению Ньютона. Если сохранить обычное определение силы и по-прежнему считать, что «сила определяет изменение импульса», следует положить

$$\mathfrak{F}_\alpha = \gamma F_\alpha, \quad \mathfrak{F}^\alpha = \gamma F_\alpha,$$

где F_α — компоненты обычной трехмерной силы. Подставив в правую часть (5.25а) выражения для \mathfrak{F}_α , получим

$$\frac{d}{dt} (m\gamma v_\alpha) = F_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3),$$

а умножив каждое из этих уравнений на соответствующий единичный координатный вектор m_α и сложив полученные выражения, придем к векторной форме уравнения движения:

$$\frac{d}{dt} (m\gamma v) = F. \quad (5.26)$$

Сравнивая (5.26) с нерелятивистским уравнением движения (5.19), мы видим, что они отличаются только определением импульса.

За релятивистский (трехмерный) импульс принимают величину

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}; \quad (5.27)$$

тогда по внешнему виду (5.26) не отличается от (5.19).

Итак, три пространственные компоненты уравнения (5.23) дали нам второй закон Ньютона в релятивистской форме. По у нас остался невыясненным смысл четвертого (или нулевого) соотношения. Чтобы выяснить его смысл, надо знать \mathfrak{F}_4 (или \mathfrak{F}^0). Но оказывается, что, задав три компоненты 4-силы, мы тем самым определили и четвертую. В этом можно убедиться следующим образом. Дифференцируем (5.7а, б) по τ :

$$\begin{aligned} u_1 \frac{du_1}{d\tau} + u_2 \frac{du_2}{d\tau} + u_3 \frac{du_3}{d\tau} + u_4 \frac{du_4}{d\tau} &= 0, \quad (\text{а}) \\ u^0 \frac{du^0}{d\tau} - u^1 \frac{du^1}{d\tau} - u^2 \frac{du^2}{d\tau} - u^3 \frac{du^3}{d\tau} &= 0. \quad (\text{б}) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Но согласно (5.23) $du_i/d\tau = \mathfrak{F}_i/m$, причем три первых компоненты $\vec{\mathfrak{F}}$ мы определили в (5.26); компоненты u_i нам известны из (5.5). Поэтому (5.28а), например, можно записать так:

$$\gamma v_x \frac{\gamma F_x}{m} + \gamma v_y \frac{\gamma F_y}{m} + \gamma v_z \frac{\gamma F_z}{m} + ic\gamma \frac{\mathfrak{F}_4}{m} = 0,$$

откуда сразу находится и \mathfrak{F}_4 (и аналогично \mathfrak{F}^0):

$$\mathfrak{F}_4 = \frac{i\gamma}{c} (\mathbf{F}\mathbf{v}); \quad (\text{а}) \quad \left| \quad \mathfrak{F}^0 = \frac{\gamma}{c} (\mathbf{F}\mathbf{v}). \quad (\text{б}) \right. \quad (5.29)$$

Вывод (5.29б) мы предоставляем читателю.

Итак, мы нашли компоненты 4-силы \vec{F} , которую называют силой Минковского:

$$\begin{aligned} \vec{F} \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_2 & \mathfrak{F}_3 & \mathfrak{F}_4 \\ \gamma F_x & \gamma F_y & \gamma F_z & i \frac{\gamma}{c} (\mathbf{F}\mathbf{v}) \end{pmatrix} &\equiv \left(\gamma \mathbf{F}, i \frac{\gamma}{c} (\mathbf{F}\mathbf{v}) \right), \quad (\text{а}) \\ \vec{F} \begin{pmatrix} \mathfrak{F}^0 & \mathfrak{F}^1 & \mathfrak{F}^2 & \mathfrak{F}^3 \\ \frac{\gamma}{c} (\mathbf{F}\mathbf{v}) & \gamma F_x & \gamma F_y & \gamma F_z \end{pmatrix} &\equiv \left(\frac{\gamma}{c} (\mathbf{F}\mathbf{v}), \gamma \mathbf{F} \right). \quad (\text{б}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Чтобы выяснить смысл четвертого соотношения (5.23) в обозначениях (5.5а) или нулевого в обозначениях (5.5б), приравняем соответствующие компоненты (5.24) и (5.30):

$$i\gamma \frac{d}{dt} (m\gamma c) = i \frac{\gamma}{c} (\mathbf{F}\mathbf{v}),$$

или же

$$\frac{d}{dt} (m\gamma c^2) = \mathbf{F}\mathbf{v}. \quad (5.31)$$

Здесь мы можем в точности повторить рассуждения, которые относились к соотношению (5.20). Справа в (5.31) стоит работа силы; слева должно стоять изменение энергии. Определим полную энергию свободной релятивистской частицы выражением

$$\mathcal{E} = mc^2\gamma = mc^2(1 - \beta^2)^{-1/2}; \quad (5.32)$$

в этой формуле $\beta = v/c$, где v — абсолютная величина трехмерной скорости тела. Подчеркнем, что из (5.31) величина энергии тела определена лишь с точностью до постоянной величины. Определение (5.32) подразумевает, что покоящаяся частица ($v = 0$, $\beta = 0$) обладает энергией $\mathcal{E}_0 = mc^2$. Такой выбор постоянной вовсе не произволен, а оправдывается предельным переходом к классической формуле сложения скоростей.

Мы отложим обсуждение релятивистского уравнения движения (5.26) и релятивистского выражения для энергии частицы (5.32) до §§ 5.3 и 5.4, а сейчас остановимся на преобразовании 4-силы и вытекающих отсюда следствиях. Выпишем закон преобразования силы (в обозначениях (5.30а)):

$$\mathfrak{F}'_1 = \Gamma(\mathfrak{F}_1 + iB\mathfrak{F}_4), \quad \mathfrak{F}'_2 = \mathfrak{F}_2, \quad \mathfrak{F}'_3 = \mathfrak{F}_3, \quad \mathfrak{F}'_4 = \Gamma(\mathfrak{F}_4 - iB\mathfrak{F}_1). \quad (5.33)$$

Начнем с простого случая. Пусть в системе K^0 частица покоится, причем на нее действует сила (трехмерная) F . Тогда согласно (5.30а) $\vec{F}^0(F^0, 0)$. Из формул (5.33) получим

$$\gamma'F'_x = \Gamma F_x^0, \quad \gamma'F'_y = F_y^0, \quad \gamma'F'_z = F_z^0, \quad \gamma'F'v' = -\Gamma VF_x^0.$$

В рассматриваемом случае частица движется относительно K' со скоростью системы отсчета K^0 , т. е. со скоростью $-V$. Следовательно, $\gamma' = \Gamma$, и мы получаем формулы преобразования компонент силы и работы, совершаемой силой:

$$F'_x = F_x^0, \quad F'_y = F_y^0 \sqrt{1 - B^2}, \quad F'_z = F_z^0 \sqrt{1 - B^2}, \quad F'v' = -VF_x^0. \quad (5.34)$$

Из первых трех равенств (5.34) видно, что компоненты силы, параллельные скорости относительного движения, остаются неизменными. Компоненты силы, перпендикулярные направлению относительного движения, меняются. Нетрудно установить смысл последнего соотношения (5.34). Если в K^0 частица покоилась, то в K' она движется со скоростью $-V$. Работу совершает только компонента силы F_x (остальные составляющие силы перпендикулярны движению). Мощность, выделяемая за счет работы силы F_x^0 в системе K^0 , как раз и равна $-F_x^0 V$, что мы и получили.

Из формул (5.34) видно, что в нерелятивистском случае, когда $B \ll 1$, трехмерная сила совсем не меняется при переходе от одной ИСО к другой. Это обстоятельство вполне соответствует нашим интуитивным представлениям о неизменности сил в любой системе

отсчета. Однако при изложении СТО и в особенности при выводе отдельных соотношений СТО из рассмотрения преобразования сил следует в первую очередь подчеркивать изменение компонент силы при переходе от одной ИСО к другой.

В общем случае, используя (5.30а), получим из (5.33)

$$\gamma' F'_x = \Gamma \left[\gamma F_x - \frac{B}{c} \gamma (Fv) \right], \quad \gamma' F'_y = \gamma F_y, \quad \gamma' F'_z = \gamma F_z, \\ \gamma' (F'v') = \Gamma [\gamma (Fv) - V \gamma F_x].$$

Переписав последние равенства в виде

$$F'_x = \frac{\gamma}{\gamma'} \Gamma \left[F_x - \frac{B}{c} (Fv) \right], \quad F'_y = \frac{\gamma}{\gamma'} F_y, \quad F'_z = \frac{\gamma}{\gamma'} F_z, \\ (F'v') = \frac{\gamma}{\gamma'} \Gamma [Fv - VF_x] \quad (5.35)$$

и учитывая (5.10), окончательно запишем

$$F'_x = \frac{F_x - \frac{B}{c} (Fv)}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \quad F'_y = \frac{F_y \sqrt{1-B^2}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \\ F'_z = \frac{F_z \sqrt{1-B^2}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}, \quad F'v' = \frac{(Fv) - VF_x}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}. \quad (5.36)$$

Из формул преобразования (5.36) для 4-силы видно, что если в какой-то ИСО трехмерной силы нет, то она не может появиться ни в какой другой ИСО. Таким образом, при переходе от одной ИСО к другой силы преобразуются, но не появляются и не исчезают.

Отсюда сразу вытекает справедливость закона инерции во всех ИСО. Если в одной ИСО на тело не действует сила и оно движется по инерции ($v = \text{const}$), то то же самое будет и в любой другой ИСО (см. (5.27) и (5.32)).

§ 5.3. Трехмерное релятивистское уравнение движения частицы (второй закон Ньютона в релятивистской форме). Записав уравнение движения в 4-векторной форме (5.23) и определив компоненты 4-силы (силы Минковского), мы, во-первых, обеспечили удовлетворение принципа относительности, а во-вторых, получили четыре компоненты уравнения движения. Три компоненты дали нам собственно «уравнение движения» в трехмерной форме (5.27), а четвертая позволила определить релятивистское выражение для энергии (5.32). Уравнение (5.27) было получено из тех соображений, что уравнения динамики должны сохранять вид во всех ИСО, т. е. быть ковариантными по отношению к преобразованиям

Лоренца. Но даже не переходя от одной ИСО к другой, мы знаем, что точным уравнением движения является (5.26), а не (5.19). Выпишем два эти уравнения рядом и выясним, в чем состоит их отличие:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}; \quad (\text{а}) \quad \left| \quad \frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) = \mathbf{F}. \quad (\text{б}) \quad (5.37)$$

Прежде всего, ясно, что при $\beta = v/c \ll 1$, когда $\gamma \sim 1$, уравнение (5.37б) переходит в (5.37а). Это значит, что классическая механика является предельным случаем механики релятивистской, когда скорости частиц нерелятивистские. Но это еще не все. Чтобы в классической механике выполнялся принцип относительности Галилея, необходимо, чтобы преобразования Галилея были справедливыми, а для этого нужно (§ 2.7), чтобы $V \ll 1$, т. е. чтобы относительная скорость рассматриваемых систем отсчета также была бы нерелятивистской.

Иногда, сопоставляя (5.37а) и (5.37б), говорят, что (5.37б) отличается от (5.37а) только тем, что в (5.37б) масса зависит от скорости, так что, приняв $m\gamma$ за релятивистскую массу, мы получаем классическое уравнение. Мы увидим сейчас, что все обстоит гораздо сложнее, а в Дополнении IV обсудим, почему не имеет смысла вводить зависимость массы от скорости вообще.

Для сравнения (5.37а) и (5.37б) удобно переписать левую часть (5.37б) на основании следующего тождества (см. также (5.31) и (5.32)):

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\mathbf{v}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{E}}{c^2} \mathbf{v} \right) = \frac{v}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{v}{c^2} (\mathbf{F}\mathbf{v}) + m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Перегруппировав члены, можно переписать (5.37а) и (5.37б) так:

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{F}, \quad (\text{а}) \\ m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{1}{\gamma} \left[\mathbf{F} - \frac{v}{c^2} (\mathbf{F}\mathbf{v}) \right] = \frac{1}{\gamma} [\mathbf{F} - \beta (\mathbf{F}\beta)]. \quad (\text{б}) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Замечательно, что в ИСО, сопутствующей частице ($\mathbf{v} = 0$), (5.38а) совпадает с (5.38б). Из этих соотношений сразу видно, что основное отличие релятивистского закона динамики (5.37б) от классического (5.37а) состоит в том, что в релятивистском законе $\mathbf{3}$ -ускорение, вообще говоря, уже не совпадает по направлению с силой. Следовательно, простое сопоставление компонент силы и ускорения, какое легко проводится для случая (5.37а), уже просто невозможно. Из уравнения (5.38б) видно, что все же есть два случая, когда ускорение и сила совпадают по направлению, и тогда можно сравнить определение массы в (5.37а) и в (5.37б).

а) Пусть сила, действующая на частицу, всегда перпендикулярна ее скорости, т. е. $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$. Тогда из (5.38б) сразу следует,

что уравнение движения имеет вид

$$m\gamma \frac{dv}{dt} = F, \quad (5.39)$$

причем $\gamma = \text{const}$, как это ясно из (5.31) и (5.32). Это вполне реальный случай — случай движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле. Сила Лоренца $F = e[vB]$ направлена так, что $Fv = 0$ (всегда). Можно сказать, что движение релятивистской частицы в постоянном магнитном поле происходит согласно классическому уравнению движения (5.19), но с некоторой эффективной (но постоянной) массой $m\gamma$. Но все это годится лишь для частного вида силы, удовлетворяющей условию $Fv = 0$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим еще один случай.

б) Пусть сила, действующая на частицу, всегда направлена по направлению ее скорости. Это означает, конечно, прямолинейное движение частицы (при определенном выборе начальной скорости). Простым примером такого движения может служить движение заряженной частицы в плоском конденсаторе (начальная скорость должна быть направлена по полю). Если $F \parallel v$, то $v(Fv) = F(vv) = Fv^2$ и из (5.38б) мы получаем уравнение движения

$$m\gamma^3 \frac{dv}{dt} = F,$$

причем γ уже переменная величина.

Таким образом, в двух частных случаях, допускающих сравнение (5.38а) и (5.38б), мы получаем различную зависимость массы от скорости; это ясно указывает на то, что никакой универсальной зависимости массы от скорости не существует. Целесообразно пользоваться инвариантной массой покоя (см. Дополнение IV).

Как и в классической механике, уравнение динамики можно записать и для случая, когда масса покоя частицы меняется за счет обмена энергией и импульсом с окружающей средой. Если частица теряет в единицу времени 4-вектор импульса $\vec{\Pi}$ (Π_i) = $=(\gamma\Pi, \frac{i}{c}\gamma\Phi)$ из-за конвекции, то вместо (5.22) следует написать

$$\frac{d\vec{P}}{d\tau} = \vec{F} + \vec{\Pi},$$

или

$$\frac{d}{d\tau}(mu_i) = \mathfrak{F}_i + \Pi_i, \quad (5.40)$$

где только \mathfrak{F}_i — настоящая механическая сила, удовлетворяющая условию $\vec{F}\vec{V} = 0$. Переписав (5.40) в компонентах, получим

$$\frac{dP}{dt} = F + \Pi, \quad \frac{dE}{dt} = Fv + \Phi.$$

Здесь Π и Φ — импульс и энергия, подводимые конвективно к частице в единицу времени. Составив произведение

$$\vec{\Pi}\vec{V} = \gamma^2 (\Pi v - \Phi) = -\Phi^0,$$

мы видим, что величина Φ^0 — скорость конвективного подвода энергии в системе покоя частицы; она равна скорости изменения энергии покоя частицы. Действительно, дифференцируя (5.40), имеем

$$m \frac{du_i}{d\tau} + u_i \frac{dm}{d\tau} = \mathfrak{F}_i + \Pi_i. \quad (5.41)$$

Умножая левую и правую части (5.41) на u_i и принимая во внимание, что $\vec{V} (d\vec{V}/d\tau) = 0$ и что $\vec{F}\vec{V} = 0$, получим

$$\Phi^0 \equiv -\Pi_i u_i = c^2 \frac{dm}{d\tau} = \frac{dE_0}{d\tau}.$$

Если считать, что настоящая механическая сила должна удовлетворять условию

$$m \frac{du_i}{d\tau} = \mathfrak{F}_i,$$

то в случае конвективной передачи импульса и энергии механической силой следует считать величину (см. (5.41))

$$m \frac{du_i}{d\tau} = \mathfrak{F}_i + \Pi_i - u_i \frac{dm}{d\tau} = \mathfrak{F}_i + \Pi_i - \frac{\Phi^0}{c^2} u_i = \mathfrak{F}_i + \Pi_i + u_i \frac{\Pi_k u_k}{c^2}.$$

В отсутствие настоящей механической силы следует учитывать механическую «реактивную» силу

$$R_i = \Pi_i + u_i \frac{\Pi_k u_k}{c^2},$$

удовлетворяющую условию $\vec{R}\vec{V} = 0$.

В частном случае импульс Π может приобретаться и не механическим образом, например, за счет излучения или обмена теплом между частицей и средой. В случае чистой теплопередачи 4-импульс тепла, подведенного к частице за время $d\tau$, равен $\delta Q_i \equiv \Pi_i d\tau = (\delta p, i (\delta Q/c))$.

Следовательно, $\delta p = \Pi dt$, $\delta Q = \Phi dt$ являются импульсом и энергией тепла, подведенного за время dt . В этом случае 4-импульс подведенного тепла является 4-вектором.

§ 5.4. Релятивистское выражение для энергии частицы. Заметим, что формула (5.31) может быть получена не только как четвертая компонента (5.23), но и прямо из (5.37б), в точности так же, как в классической механике (5.20) есть следствие (5.19). Чтобы убедиться в этом, умножим скалярно на v левую и правую части

(5.38б); получим

$$m\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\gamma} \left[\mathbf{F}\mathbf{v} - \frac{v^2}{c^2} (\mathbf{F}\mathbf{v}) \right] \equiv \frac{1}{\gamma^3} \mathbf{F}'\mathbf{v}.$$

Это и есть формула (5.31), если учесть (5.14). С другой стороны, четвертая компонента (5.23) оказалась законом сохранения энергии. Выражение для энергии (5.32) существенно отличается от классического. В механике Ньютона считалось, что энергия покоящегося свободного тела (т. е. тела, не обладающего потенциальной энергией) равна нулю, откуда однозначно вытекало определение кинетической энергии $T = mv^2/2$. В релятивистской механике полную энергию свободной частицы определяют как $\mathcal{E} = mc^2\gamma$. Это энергия полная в том смысле, что она включает в себя и ту энергию, которой обладает тело, когда оно покоится (эта энергия равна mc^2). Но мы говорили, что из (5.31) выражение для энергии определено лишь с точностью до постоянной, и, выбрав должным образом постоянную (положив $\mathcal{E}_0 = -mc^2$), можно было бы, как и в механике Ньютона, считать, что энергия покоящегося тела равна нулю. Но так поступить в СТО нельзя. В механике СТО нельзя забывать ни о правилах преобразования различных величин, ни о принципе соответствия с классической механикой (в предельном случае $\beta \rightarrow 0$ должно быть совпадение многих классических и релятивистских величин). Известно, что преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея при малых относительных скоростях систем отсчета ($V \rightarrow 0$, $\Gamma \rightarrow 1$); при малых скоростях частиц ($\beta \rightarrow 0$) трехмерный релятивистский импульс переходит в трехмерный классический импульс, $m\gamma\mathbf{v} \rightarrow m\mathbf{v}$.

Допустим, что мы определили полную энергию свободной релятивистской частицы в виде $\mathcal{E} = mc^2\gamma + C$; тогда в предельном случае $\beta \rightarrow 0$ мы получили бы $\mathcal{E} = mc^2 + C$. Рассмотрим теперь преобразование компонент 4-импульса при переходе от одной ИСО к другой. Его нужно производить по формулам

$$P'_1 = \Gamma (P_1 + i\beta P_4), \quad P'_2 = P_2; \quad P'_3 = P_3, \quad P'_4 = \Gamma (P_4 - i\beta P_1). \quad (5.42)$$

Подставляя значения компонент 4-импульса P_1, P_2, P_3, P_4 из (5.21), получим

$$p'_x = \Gamma \left(p_x - \frac{\beta}{c} \mathcal{E} \right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad \mathcal{E}' = \Gamma (\mathcal{E} - \beta p_x c), \quad (5.43)$$

где p_x, p_y, p_z и p'_x, p'_y, p'_z — компоненты трехмерного релятивистского импульса $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$. В предельном случае, соответствующем переходу к классической механике, когда $V \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$ и, соответственно, $p'_x \rightarrow mv'_x$, $p_x \rightarrow mv_x$, $\mathcal{E} \rightarrow mc^2$, из первого

равенства (5.43) следовало бы $mv'_x = mv_x - mV - \frac{VC}{c^2}$. Но из последнего равенства должен вытекать классический закон сложения скоростей $v'_x = v_x - V$. Это будет так, если $C = 0$. Этим и доказывается справедливость (5.32). Следует отметить, что принцип соответствия между классическим и релятивистским выражениями энергии не соблюдается только потому, что из механики Ньютона нельзя обнаружить существование энергии покоя и аддитивная константа была выбрана без учета энергии покоя (см. ниже).

Из (5.32) видно, что полная энергия не обращается в нуль даже тогда, когда скорость тела равна нулю ($\gamma = 1$ при $v = 0$). Энергия свободной частицы в системе, где она покоится, равна mc^2 и называется *энергией покоя* \mathcal{E}_0 . Хотя до сих пор речь шла о частице, но ее элементарность не входила в рассуждения. Поэтому все полученные формулы вполне применимы к любому сложному телу (системе), образованному несколькими составляющими. Естественно, что m будет тогда полной массой тела, а v — скоростью его движения как целого. Формула $\mathcal{E}_0 = mc^2$ справедлива для любого покоящегося как целое тела. Следовательно, масса покоя тела определяет полное содержание энергии в нем, независимо от того, каково происхождение этой энергии.

В классической механике энергия покоящегося тела может быть как положительной, так и отрицательной: она определена с точностью до постоянной величины. В релятивистской механике энергия свободного тела (энергия любой замкнутой системы) всегда положительна и связана с массой покоя тела; масса покоя тела определяет энергию покоящегося тела. Инерция тела оказалась мерой энергии тела. Всякое изменение энергии тела на величину $\Delta\mathcal{E}$ ведет к изменению массы этого тела на $\Delta m = \Delta\mathcal{E}/c^2$.

Возникает вопрос: как могла остаться незамеченной столь большая энергия, какой является энергия покоя любого тела? Ведь 1 г вещества содержит в себе $\sim 10^{21}$ эрг. Но ведь существенно не то, сколько энергии содержит та или иная система, а то, какая часть энергии может быть использована. Хотя любая масса содержит колоссальный запас энергии, реализовать ее совсем не просто. Лишь в самое последнее время научились использовать атомную энергию. Вплоть до недавнего времени энергия покоя просто не реализовывалась (соответственно этому всегда сохранялась масса). Поскольку реализуемая энергия всегда представляет собой разность энергий, наличие энергии покоя никак не проявлялось.

В силу того, что c^2 весьма велико, изменение массы при изменении энергии тела очень мало и в большинстве случаев экспериментально не обнаруживается, несмотря на то что взвешивание всегда было одним из самых точных измерений. Так, например,

нагревание 1 кг воды на 100° изменяет массу воды всего лишь на $5 \cdot 10^{-9}$ г. Столь незначительное изменение массы нельзя обнаружить даже с помощью самых чувствительных современных весов. Однако изменение массы при образовании ядер вполне ощутимо; более того, именно по дефекту масс определяется энергия связи (см. § 5.6).

В релятивистской механике кинетическую энергию естественно определить как ту часть энергии частицы, которая обращается в нуль при $v = 0$. Эта часть энергии получается вычитанием энергии покоя из выражения полной энергии:

$$T = \mathcal{E} - mc^2 = mc^2 (\gamma - 1). \quad (5.44)$$

К тому же самому результату можно прийти, вычисляя работу силы согласно уравнению релятивистской динамики:

$$\begin{aligned} dT &= F v dt = v d(m\gamma v) = m\gamma v dv + mv^2 d\gamma = \\ &= m\gamma v dv + mv\gamma^3\beta (\beta d\beta) = m\gamma^3 v dv \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2} \right) = m\gamma^3 v dv. \end{aligned}$$

Отсюда

$$T = m \int \gamma^3 v dv = mc^2 \gamma + \text{const.}$$

Если $T = 0$ при $v = 0$ (т. е. при $\gamma = 1$), то $\text{const} = -mc^2$, откуда снова $T = mc^2 (\gamma - 1)$.

Найдем условия, при которых выражение (5.44) переходит в выражение для классической кинетической энергии. Разлагая γ в ряд:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots,$$

мы видим, что

$$T = \frac{mv^2}{2} + m \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^2} + \dots, \quad (5.45)$$

т. е. классическая кинетическая энергия имеет смысл постольку, поскольку $\beta \ll 1$ и можно пренебречь членом β^4 .

Если ввести обозначения для классической кинетической энергии $T_{\text{кл}}$, а для релятивистской $T_{\text{рел}}$, то (5.45) можно переписать в виде

$$T_{\text{рел}} = T_{\text{кл}} + \frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

или, для отношения $T_{\text{рел}}/T_{\text{кл}}$,

$$\frac{T_{\text{рел}}}{T_{\text{кл}}} = 1 + \frac{3}{4} \beta^2 + (\text{члены порядка не ниже } \beta^4).$$

В ядерной физике, где требуется более точное определение «границы применимости ньютоновской механики», принимают,

что $T_{\text{рел}} = T_{\text{кл}}$, если второй член справа меньше одного процента (мы помним, что $\beta \ll 1$ и ряд быстро убывает). Следовательно, границу (условную, конечно) можно определить из равенства $\frac{3}{4}\beta^2 = 0,01$, $\beta \approx 0,12$.

Поскольку $\gamma = \gamma(v)$, причем для частицы $\gamma = \mathcal{E}/mc^2$, можно говорить о релятивистских скоростях, когда полная энергия частицы \mathcal{E} существенно превышает ее массу покоя, т. е. вводить условие $(\mathcal{E}/mc^2) \gg 1$. Конечно, качественно оба условия эквивалентны, но следует иметь в виду, что, когда скорость приближается к своему пределу (c), энергия стремится к бесконечности. Поэтому совсем небольшие изменения скорости вблизи c могут значительно изменить энергию частицы.

В ядерной физике удобнее оперировать энергиями частиц, а не их скоростями. Энергетические границы классической механики будут, конечно, различными для частиц различной массы. Например, для электронов эта граница равна 3 кэв , а для протонов — 7 Мэв (вам полезно самим получить эти цифры!).

Выражение (5.32) для энергии с учетом выражения для нулевой энергии $\mathcal{E}_0 = mc^2$ можно записать в виде

$$\mathcal{E} = \gamma \mathcal{E}_0. \quad (5.46)$$

В энергию покоя \mathcal{E}_0 входят все виды энергии, которыми обладает тело (или система). Из (5.46) видно, что при переходе от собственной (сопутствующей) системы к любой другой инерциальной системе все виды энергии возрастают в γ раз. Ничего похожего на этот результат в классической механике не было. С другой стороны, при $v \rightarrow c$ и полная энергия частицы (5.32), и кинетическая энергия (5.45) неограниченно возрастают. Этот результат имеет ясный физический смысл. Частица, масса покоя которой не равна нулю, не может достичь скорости, равной c . Это видно из того, что для достижения такой скорости ей следовало бы сообщить бесконечную энергию. Здесь снова проявляется предельный характер скорости света в вакууме. Если интерпретировать световые кванты (фотоны) как релятивистские частицы (см. § 7.6), то следует иметь в виду, что они принадлежат к другому классу частиц и не могут быть порождены ускорением обычных частиц, т. е. в результате динамического процесса. В природе осуществляется предельный переход $v \rightarrow c$, но в этом переходе никогда не достигается предельная точка $v = c$.

§ 5.5. 4-вектор энергии-импульса. Четвертая (или нулевая) компонента 4-импульса свободной частицы имеет непосредственное отношение к энергии частицы. Это видно из простого преобразования

$$P_4 = mc\gamma = \frac{i}{c} mc^2\gamma = \frac{i}{c} \mathcal{E}; \quad (a) \quad \left| \quad P^{(0)} = mc\gamma = \frac{\mathcal{E}}{c}. \quad (б) \right.$$

Поэтому 4-вектор \vec{P} называют 4-вектором энергии-импульса частицы. Из (5.7) и из того, что $\vec{P} = m\vec{V}$, сразу же следует, что

$$\vec{P}^2 = -m^2c^2; \quad (\text{а}) \quad | \quad \vec{P}^2 = m^2c^2. \quad (\text{б}). \quad (5.47)$$

Закон преобразования компонент 4-вектора \vec{P} выписан в (5.42) и (5.43). Нам остается переписать (5.22) в окончательной форме:

$$\vec{P} \left(p, i \frac{\mathcal{E}}{c} \right); \quad (\text{а}) \quad | \quad \vec{P} \left(\frac{\mathcal{E}'}{c}, p' \right), \quad (\text{б}) \quad (5.48)$$

где $p = m\gamma v$. Рассмотрим частицу в системе отсчета, в которой ее релятивистский 3-импульс $p = m\gamma v$ равен нулю. Систему, в которой частица покоится ($v = 0$), можно назвать *собственной системой отсчета*. Пусть энергия частицы в этой системе равна \mathcal{E}^0 . Тогда в системе K' , согласно (5.43),

$$\mathcal{E}' = \Gamma \mathcal{E}^0, \quad p'_x = -\Gamma \frac{V}{c} \mathcal{E}^0 = -\frac{V}{c} \mathcal{E}' = -\frac{\mathcal{E}'}{c^2} V. \quad (5.49)$$

Из формул (5.49) видно, что перенос энергии частицей связан с возникновением импульса. Действительно, в собственной системе отсчета частицы, т. е. в системе, где она покоилась, частица обладала энергией \mathcal{E}^0 , но эта энергия не перемещалась в пространстве. Импульс частицы (носителя энергии) был равен нулю. В системе K' частица уже движется; ее скорость равна $-V$. Это означает, что с этой скоростью «течет» и энергия. Формула (5.49) для p'_x показывает, что с течением энергии связан импульс $p'_x = -\Gamma \frac{\mathcal{E}^0}{c^2} V$. Этот импульс совпадает с релятивистским трехмерным импульсом, потому что, согласно (5.32), $\mathcal{E}^0/c^2 = m$; скорость частицы $-V$, а Γ в этом случае совпадает с γ .

Итак, агенту, переносящему энергию, — в данном случае частице — необходимо приписать импульс. Мы получили этот результат для частицы, однако он имеет общее значение; мы вновь столкнемся с ним при рассмотрении электромагнитного поля (гл. 6).

Мы хотели бы подчеркнуть здесь то обстоятельство, что сам факт объединения некоторых величин в 4-вектор указывает на тесную связь между ними. Величины, являющиеся компонентами 4-вектора (это обычно 3-вектор и скаляр), образуют в известном смысле замкнутую комбинацию: чтобы вычислить энергию и импульс частицы в K' , нужно знать энергию и импульс в K (см. формулу (5.43)). Четвертая (или нулевая) компоненты 4-вектора энергии-импульса в нуль обратиться не может. Если в какой-то системе энергия и импульс частицы обращаются в нуль, они равны нулю и в любой другой системе отсчета. В этом существенное отличие релятивистских соотношений от классических.

В классической механике у покоящейся частицы и энергия и импульс равны нулю.

Квадрат 4-вектора является важным инвариантом. Выпишем его:

$$\vec{p}^2 \equiv p^2 - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = -m^2 c^2; \quad (\text{а}) \quad \left| \quad \vec{p}^2 \equiv \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \quad (\text{б}) \quad (5.50)$$

(мы использовали соотношения (5.47) и (5.48)). Разумеется, с точностью до знака он одинаков в обоих случаях. Очень важно, что мы обнаружили инвариантную связь между релятивистским импульсом и релятивистской энергией частицы; при этом существенно, что инвариантное соотношение (5.50) определяет инвариантную массу — массу покоя частицы.

Из (5.50) можно выразить энергию частицы через ее импульс:

$$\mathcal{E} = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}. \quad (5.51)$$

Энергия частицы, выраженная через ее импульс, называется функцией Гамильтона $\mathcal{E}^{\mathcal{H}}$ частицы. Таким образом, (5.51) — это функция Гамильтона частицы. Известно, что производная от функции Гамильтона по компонентам импульса дает компоненты скорости частицы:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_x} \equiv \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p_x} = \frac{dx}{dt} = v_x, \dots, \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \nabla_p \mathcal{E}. \quad (5.52)$$

Можно вывести формулу (5.52), дифференцируя (5.50):

$$p_x dp_x + p_y dp_y + p_z dp_z - \frac{1}{c^2} \mathcal{E} d\mathcal{E}, \quad (5.53)$$

откуда

$$\frac{d\mathcal{E}}{dp_x} = p_x \frac{c^2}{\mathcal{E}}, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dp_y} = p_y \frac{c^2}{\mathcal{E}}, \quad \frac{d\mathcal{E}}{dp_z} = p_z \frac{c^2}{\mathcal{E}}. \quad (5.54)$$

Но поскольку $\mathcal{E} = mc^2 \gamma$, а $\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v}$, то для частицы

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \mathbf{v}, \quad (5.55)$$

и мы снова возвращаемся к (5.52).

В дальнейшем нам понадобится формула, легко выводимая из (5.52): умножая левую и правую части (5.52) на $d\mathbf{p}$, мы получим $\mathbf{v} d\mathbf{p} = d\mathcal{E}$. Для тех, кто не очень любит обращение с градиентами, подчеркнем, что этот же результат сразу вытекает, как в классическом, так и релятивистском случае, из (5.37а) и (5.37б), где, разумеется, импульс определен по-разному. Умножая левую и правую части (5.37а) и (5.37б) на $\mathbf{v} dt$, мы получаем справа $\mathbf{F} d\mathbf{r}$, т. е. $d\mathcal{E}$, а слева $\mathbf{v} d\mathbf{p}$. Итак, и в классике и в релятивистской

механике мы имеем одну и ту же формулу

$$d\mathcal{E} = \mathbf{v} d\mathbf{p}, \quad (5.56)$$

но определение энергии и импульса будет различным.

В простейшем случае одномерного движения $\mathcal{E} = \mathcal{E}(p)$ определяется согласно (5.51). В плоскости переменных \mathcal{E} , p скорость определяется через тангенс угла наклона кривой $\mathcal{E} = \mathcal{E}(p)$ в данной точке. При $p \gg mc$ из (5.51) следует

$$\mathcal{E} = cp. \quad (5.51')$$

Частицы с конечной массой покоя, для которых справедливо это соотношение, называются *ультрарелятивистскими*. Связь (5.51') годится как для ультрарелятивистских частиц, так и для фотонов. В § 7.6 мы увидим, что световые кванты (фотоны) можно трактовать как релятивистские частицы. Но уже здесь стоит подчеркнуть, что это совсем особые частицы. В любой ИСО эти частицы обладают конечным импульсом и конечной энергией. В любой ИСО их скорость в вакууме одна и та же. Они не могут быть получены ни из какой частицы, обладающей конечной массой, за счет ее ускорения. Наконец, из (5.50) мы обнаружим, что масса покоя фотона равна нулю.

Остановимся еще на нескольких соотношениях для частицы, находящейся в потенциальном внешнем поле. Поскольку предполагается, что поле распространяется с конечной скоростью, то основной принцип СТО — конечная скорость передачи сигнала — соблюден. Что касается силы, действующей на частицу, она определяется через значение потенциальной функции в точке, где находится частица (поле стационарно).

Если частица находится в потенциальном поле, то $\mathbf{F}\mathbf{v} dt = -dU$ и вместо (5.31) мы получим $d(mc^2\gamma) = -dU$, откуда следует закон сохранения полной энергии релятивистской частицы в потенциальном поле (полной в том смысле, что сохраняется сумма релятивистской энергии частицы и ее потенциальной энергии):

$$mc^2\gamma + U = \text{const}. \quad (5.57)$$

В релятивистской механике кинетическая энергия равна $mc^2(\gamma - 1)$; изменив значение константы в правой части на mc^2 , можно переписать закон сохранения энергии в виде

$$mc^2(\gamma - 1) + U = \text{const}. \quad (5.58)$$

Когда частица находится в консервативном поле, то несмотря на то, что при движении меняются как ее скорость, так и потенциальная энергия, величина $\mathcal{E} = mc^2\gamma + U$ сохраняется (см. (5.57)) в том смысле, что она не зависит от времени в данной ИСО. Можно назвать величину \mathcal{E} *полной энергией частицы в консерва-*

тивном поле. Конечно, эта величина сохраняется в любой ИСО, но меняет свое (постоянное) значение на другое при переходе от одной ИСО к другой. Для частицы в консервативном поле определение 4-импульса как $\vec{P} = m\vec{V}$ остается в силе, но вместо (5.48) придется написать $\vec{P} [m\gamma v, \frac{i}{c}(\mathcal{E} - U)]$, поскольку $m\gamma c = \frac{1}{c} m\gamma c^2 = \frac{\mathcal{E} - U}{c}$, как это видно из (5.21) и (5.57), а из $\vec{P}^2 = -m^2c^2$ вместо (5.51) получится

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^0 = c \sqrt{p^2 + m^2c^2} + U. \quad (5.59)$$

Формула (5.59) — это функция Гамильтона для частицы в консервативном поле. Как и для свободной частицы, 3-релятивистский импульс можно выразить через энергию, скорость и потенциальную энергию:

$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v} = \frac{1}{c^2} m c^2 \gamma \mathbf{v} = \frac{\mathcal{E} - U}{c^2} \mathbf{v}.$$

Преобразование четвертой компоненты вектора энергии-импульса частицы в потенциальном поле согласно (5.42) показывает (удобно при этом использовать (5.10)), что в системе K' полная энергия $\mathcal{E}' = m c^2 \gamma' + U'$, как это и должно быть.

§ 5.6. Масса покоя системы. Энергия связи. До сих пор рассматривалась механика «частицы», т. е. поведение некоторого единого целого. Однако «элементарность» (неразложимость) частицы нигде фактически не предполагалась, и поэтому можно перенести все выводы на сложные системы, состоящие из «подсистем».

Масса покоя M сложной системы определяется согласно общей формуле (5.50) так:

$$M^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{P}^2, \quad (5.60)$$

где теперь уже E — полная энергия системы, а \mathbf{P} — ее полный импульс.

Ограничимся пока простейшим случаем систем, состоящих из отдельных частиц. Допустим сначала, что частицы не взаимодействуют между собой. Тогда энергия системы — это просто сумма энергий частиц, образующих систему:

$$E = \sum \mathcal{E}_i. \quad (5.61)$$

Аддитивность энергии как раз и характеризует отсутствие взаимодействия. Полный импульс системы всегда векторно складывается из импульсов отдельных частиц, т. е. аддитивен всегда:

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i \quad (5.62)$$

Масса покоя системы в этом случае может быть записана в виде

$$M^2 c^2 = \frac{(\sum_i \mathcal{E}_i)^2}{c^2} - \left(\sum_i p_i \right)^2. \quad (5.63)$$

Чтобы найти, как связана масса покоя системы с массами покоя частиц, образующих систему, проще всего перейти в систему отсчета, в которой полный импульс системы равен нулю: $\mathbf{P} = 0$. Тогда из (5.63) получим

$$M = \frac{\sum_i \mathcal{E}_i}{c^2}. \quad (5.64)$$

Мы видим, что масса покоя системы выражается как сумма энергий отдельных частиц (деленная на c^2). Но энергия отдельной частицы, согласно (5.44), может быть всегда представлена в виде суммы энергии покоя и кинетической энергии:

$$\mathcal{E}_i = m_i c^2 + T_i. \quad (5.65)$$

Тогда по (5.63) мы получим

$$M = \sum_i m_i + \frac{1}{c^2} \sum_i T_i. \quad (5.66)$$

Из (5.66) вытекает существенный результат: масса покоя системы превосходит сумму масс покоя составляющих ее отдельных частиц на величину полной кинетической энергии этих частиц (деленную на c^2), вычисленную в системе отсчета, где полный импульс системы равен нулю.

Таким образом, мы приходим к выводу, что в релятивистской механике даже для системы из невзаимодействующих частиц масса покоя не является аддитивной величиной. Такое свойство массы непривычно с точки зрения классической механики. Возникает соблазн ввести иную массу отдельных частиц таким образом, чтобы масса покоя системы складывалась бы из этих новых масс, которые называют иногда «релятивистскими». Нетрудно понять, как это можно сделать. В системе отсчета, где $\mathbf{P} = 0$, согласно (5.64) имеем

$$M c^2 = \sum_i \mathcal{E}_i = \sum_i m_i \gamma_i c^2. \quad (5.67)$$

Следовательно, можно написать

$$M = \sum m_i \gamma_i = \sum m_i^{\text{рел}}, \quad (5.68)$$

если назвать величину $m_i^{\text{рел}} = m_i \gamma_i$ релятивистской массой. Так мы приобретаем аддитивность (которая совсем не обязательна), но вместе с ней открываем дорогу различным недоразумениям.

Действительно, введение релятивистской массы уже для одной частицы создает иллюзию того, что увеличение энергии или «релятивистской массы» частицы с ростом ее скорости (или импульса) связано с изменениями внутренней структуры частицы. По этому, конечно, нет и в помине (можно, не трогая частицу, просто перейти в другую систему отсчета). На самом деле рост энергии с увеличением скорости — следствие особых свойств 4-пространства времени, находящихся свое отражение в преобразованиях Лоренца.

С четырехмерной точки зрения термин «масса» относится к инвариантной абсолютной величине 4-вектора энергии-импульса. Вводя релятивистскую массу, мы фактически применяем термин «масса» (с точностью до множителя) к временной компоненте 4-вектора энергии-импульса, а это, как мы знаем, энергия. Но энергия и масса покоя, которой мы хотим пользоваться, — существенно разные физические понятия.

Энергия — относительная величина; она зависит от того, в какой ИСО рассматривается частица или система частиц. Масса покоя остается одной и той же во всех ИСО — это абсолютная величина 4-вектора. Временная компонента 4-вектора (энергия) совпадает с его абсолютной величиной (массой покоя) лишь в том случае, когда пространственные компоненты этого 4-вектора равны нулю (это значит, что либо импульс частицы, либо полный импульс системы частиц равен нулю). И лишь в этом случае, когда величина энергии совпадает с энергией покоя, энергия пропорциональна массе покоя (с постоянным коэффициентом c^2).

Таким образом, можно придать четкий четырехмерный смысл импульсу, энергии и массе покоя частицы (и системы), считая две первые величины составляющими 4-вектора энергии-импульса, а последнюю величину — абсолютной величиной этого же 4-вектора. С методической точки зрения этот вопрос обсуждается в Дополнении IV.

Остановимся теперь на системе, образованной взаимодействующими частицами. Формула (5.63) остается, конечно, в силе. Однако вместо (5.64) нужно написать

$$E = \sum_i \mathcal{E}_i + U, \quad (5.69)$$

где через U обозначена энергия взаимодействия частиц. Эта энергия определяется как работа, необходимая для того, чтобы разделить систему на «исходные», невзаимодействующие части. Для устойчивой системы $U < 0$, поскольку в «равновесном, устойчивом» состоянии должен быть минимум энергии. Для такой системы величина U называется *энергией связи*. Хотя выписать явное аналитическое выражение для энергии взаимодействия часто бывает затруднительно (см. § 5.8), оказывается возможным оце-

нить ее величину. Из соотношения (5.60) в системе отсчета, где $P = 0$, получим

$$M = \frac{\sum_i \mathcal{E}_i + U}{c^2}, \quad (5.70)$$

или, иначе,

$$M = \sum_i m_i + \frac{1}{c^2} \sum_i T_i + \frac{U}{c^2}, \quad (5.71)$$

где мы воспользовались соотношением $\mathcal{E}_i = m_i c^2 + T_i$, справедливым для каждой отдельной частицы.

Если соблюдено условие $\sum_i T_i \ll U$, т. е. если суммарная релятивистская кинетическая энергия частиц невелика, то

$$M = \sum_i m_i + (U/c^2). \quad (5.72)$$

Из (5.72) видно, что в системе взаимодействующих частиц всегда отлична от нуля разность

$$\Delta M = \sum_i m_i - M, \quad (5.73)$$

которую принято называть *дефектом масс*. Когда нас интересует устойчивая система, то $U < 0$, а $\Delta M > 0$. По дефекту масс можно вычислить энергию связи:

$$U = \Delta M \cdot c^2. \quad (5.74)$$

Какой подсчет имеет смысл лишь в том случае, когда энергии связи значительны. Именно такой случай мы имеем в атомных ядрах. Известно, что атомные ядра очень устойчивы, — это и говорит об их большой энергии связи. Атомные ядра состоят из протонов и нейтронов, причем число протонов и нейтронов, входящих в данное ядро, вполне определено. Можно экспериментально определить массу протона и нейтрона в свободном состоянии (вне ядра). Также экспериментально можно определить и массу любого атомного ядра. Составляя разность между суммарной массой свободных протонов и нейтронов, образующих ядро, и измеренной массой ядра, находят дефект масс и согласно (5.74) — энергию связи. Именно таким способом определяют энергии связи ядер в атомной физике.

Выпишем отдельно соотношения для ультрарелятивистских частиц ($v \approx c$). В этом случае для отдельной частицы (см. (5.51'))

$$\mathcal{E} = cp \quad (5.75)$$

и, следовательно, из (5.51) будем иметь $m = 0$. Однако уже для двух (и более) частиц из (5.63) получим (поскольку $\sum_i \xi_i = c \sum_i p_i$)

$$M^2 c^2 = \left(\sum_i p_i \right)^2 - \left(\sum_i p_i \right)^2 \neq 0. \quad (5.76)$$

Это значит, что масса покоя системы, состоящей из частиц с массой покоя, равной нулю, вовсе не равна нулю. Но в этом нет ничего удивительного, поскольку массы покоя не складываются!

В заключение два слова о «сложных» подсистемах. Определяя массу покоя сложной системы согласно (5.70) или (5.64), нужно в качестве энергии брать полную энергию системы. Допустим, что в систему входит также и электромагнитное поле. Обозначив энергию электромагнитного поля через W , из (5.70) получим

$$M = \sum_i m_i + \frac{1}{c^2} \sum_i T_i + \frac{U}{c^2} + \frac{W}{c^2}. \quad (5.77)$$

Отсюда видно, что энергия электромагнитного поля, как и всякая энергия, вносит свой вклад в массу покоя системы.

§ 5.7. Некоторые задачи релятивистской механики частицы.

В рамках заданной инерциальной системы отсчета пользоваться четырехмерными соотношениями ни к чему, достаточно использовать трехмерное уравнение (5.26) и соотношение (5.31). Напомним, что общий вид второго закона Ньютона остается неизменным, лишь по-иному определяются импульс и энергия частицы. Однако такое переопределение существенно меняет характер решений по сравнению с решением той же задачи на основе уравнений классической механики. В частности, решение любой задачи релятивистской механики не позволяет получить скорость частицы, большую чем скорость света. Возникают и иные особенности, для выяснения которых рассмотрим несколько задач, решая их параллельно на основе классического и релятивистского уравнений движения.

В связи с тем, что полученные формулы в дальнейшем не понадобятся, в этом параграфе вводится отдельная нумерация для каждой задачи.

1. Элементарное решение задачи об одномерном движении под действием постоянной силы. Уравнение движения имеет вид (слева — классическое уравнение, справа — релятивистское)

$$\frac{d}{dt} (mv) = F; \quad \text{(а)} \quad \left| \frac{d}{dt} (m\gamma v) = F, \quad \text{(б)} \quad (1)$$

где $F = \text{const}$. Интегрируя при начальных условиях $v = 0$ при $t = 0$, имеем

$$mv = Ft; \quad (\text{а}) \quad \left| \quad m\gamma v = Ft \quad \left(\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right). \quad (\text{б}) \quad (2)$$

Из (2а, б) алгебраически находится скорость как функция времени:

$$v_{\text{кл}} = \frac{Ft}{m}; \quad (\text{а}) \quad \left| \quad v_{\text{рел}} = \frac{Ft/m}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}} = \frac{v_{\text{кл}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_{\text{кл}}}{c}\right)^2}}. \quad (\text{б}) \quad (3)$$

Мы обсудим эти результаты в задаче II, поскольку выяснится, что задача II — это просто иная формулировка задачи I.

II. Прямолинейное равноускоренное движение частицы. Если частица в системе K' движется вдоль оси x' ($v'_y = v'_z = 0$), то и в любой другой ИСО мы получим согласно (3.26) $v_y = v_z = 0$. Итак, будем рассматривать движение вдоль общей оси x, x' такое, при котором ускорение постоянно. Если ускорение частицы не меняется, то в системе отсчета, где частица покоится (в собственной системе отсчета), компоненты ее ускорения суть $(w_0, 0, 0, 0)$. Величина w_0 — это обычное трехмерное ускорение, направленное вдоль оси x' . Квадрат 4-вектора ускорения является инвариантом, и поэтому для равноускоренного движения во всех системах отсчета должно соблюдаться условие *)

$$\left(\frac{du_i}{d\tau} \right)^2 = w_0^2, \quad (1)$$

где w_0 — значение трехмерного ускорения в собственной системе отсчета. Это условие, конечно, отличается от требования $\dot{v} = 0$ **). Для одномерного движения в любой системе отсчета компоненты 4-скорости имеют вид $\vec{V} (u_1 = \gamma v_x, 0, 0, i\gamma c)$, откуда согласно (5.23) $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3 = 0$. Следовательно, в произвольной ИСО остаются два уравнения:

$$m \frac{du_1}{d\tau} = \gamma F, \quad m \frac{du_4}{d\tau} = \frac{i}{c} \gamma F v.$$

Мы обозначили $F_x = F$ и $v_x = v$. Условие (1) запишется в виде

$$\left(\frac{du_i}{d\tau} \right)^2 = \frac{1}{m^2} \left(\gamma^2 F^2 - \frac{1}{c^2} \gamma^2 F^2 v^2 \right) = \frac{F^2}{m^2} = w_0^2 = \text{const}.$$

*) В этой главе мы используем 4-пространство-время, где четвертая координата мнимая.

**) Если $w_0 = \text{const}$, то \dot{v} переменное. В классической механике под действием постоянной силы тело приобретало постоянное ускорение, в релятивистской динамике под действием постоянной силы тело приобретает постоянное ускорение только в мгновенно-сопутствующей системе отсчета.

Уравнение движения запишется в виде

$$\frac{du_1}{d\tau} = \gamma w_0, \quad \text{или} \quad \frac{du_1}{dt} = w_0. \quad (2)$$

В трехмерных обозначениях

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = w_0, \quad \text{или} \quad \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = w_0 t + C. \quad (3)$$

Но, решая задачу I, мы убедились, что можно сразу получить эти равенства, если в релятивистское уравнение движения подставить постоянную силу $F = mw_0$. По w_0 — это вовсе не \dot{v} , как это видно из (2).

Если начальные условия таковы, что при $t = 0$ скорость v равна нулю, то $C = 0$ и, выражая скорость через w_0 , мы получим из (3)

$$v = \frac{w_0 t}{\sqrt{1 + \frac{w_0^2 t^2}{c^2}}} = \frac{v_{\text{кл}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_{\text{кл}}}{c}\right)^2}}, \quad v = \frac{dx}{dt}, \quad (4)$$

где введено обозначение $v_{\text{кл}} = w_0 t$. Интегрируя последнее соотношение при начальных условиях $x = 0$, $t = 0$, приходим к выражению

$$x = \frac{c^2}{w_0} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{v_{\text{кл}}}{c}\right)^2} - 1 \right). \quad (5)$$

Решение классического уравнения движения для постоянной силы и тех же начальных условий имеет вид

$$v_{\text{кл}} = w_0 t, \quad x = w_0 t^2 / 2.$$

Если классическая скорость неограниченно растет с течением времени, то в силу очевидного неравенства

$$\frac{x}{\sqrt{A + \frac{x^2}{a^2}}} = \frac{x}{\sqrt{Aa^2 + x^2}} \quad a < a, \quad \text{если} \quad A > 0,$$

из (4) следует, что релятивистская скорость всегда остается меньше c , как это и должно быть согласно принципу предельной скорости распространения сигналов. При $v_{\text{кл}}/c \ll 1$ релятивистские выражения (4) и (5) для скорости v и координаты x переходят в классические. Если переписать (4) в виде $v = c/\sqrt{1 + c^2/w_0^2 t^2}$, то очевидно, что $v \rightarrow c$ при $t \rightarrow \infty$.

Найдем связь между координатным временем t и собственным временем частицы τ . Если выбрать общее начало отсчета времени

$t_0 = \tau_0 = 0$, то (см. (3.16))

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \int_0^t \sqrt{1 - \frac{w_0^2 t^2 / c^2}{1 + \frac{w_0^2 t^2}{c^2}}} dt = \\ &= \frac{c}{w_0} \operatorname{Arsh} \frac{w_0 t}{c} = \frac{c}{w_0} \ln \left(\frac{w_0 t}{c} + \sqrt{1 + \frac{w_0^2 t^2}{c^2}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

При $t \rightarrow \infty$, пренебрегая под корнем единицей по сравнению с $w_0 t/c$, получим

$$\tau \sim \frac{c}{w_0} \ln \frac{2w_0 t}{c}.$$

Мы видим, что собственное время тела, движущегося равноускоренно, растет значительно медленнее, чем время в «неподвижной» системе отсчета, относительно которой рассматривается движение.

Остается, конечно, физический вопрос о том, какие часы отсчитывают собственное время частицы, описываемое формулой (6), поскольку связь $d\tau = (1/\gamma) dt$ относится к равномерно и прямолинейно движущимся часам. Мы подробно обсуждали этот вопрос в § 3.3.

В заключение заметим, что релятивистское равноускоренное прямолинейное движение называют также гиперболическим, поскольку зависимость пройденного пути от времени (см. ниже (7)) с геометрической точки зрения представляет собой гиперболу. Если заряженная частица движется в однородном и постоянном электрическом поле или тяжелая частица — в однородном и постоянном поле тяготения, движение является гиперболическим. Выпишем в заключение основные формулы, характеризующие гиперболическое движение:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{c^2}{w_0} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{w_0 t}{c}\right)^2} - 1 \right], \\ v &= \frac{w_0 t}{\sqrt{1 + (w_0 t/c)^2}}, \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{w_0}{\sqrt{1 + (w_0 t/c)^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из выражения для производной от скорости по времени видно различие между релятивистским и нерелятивистским «постоянным» ускорением.

III. Движение заряженной частицы в постоянном однородном электрическом поле. Выберем следующие начальные условия: в момент $t = 0$ координаты заряженной частицы $x_0 = y_0 = 0$, а ее скорость v_0 перпендикулярна полю E . Это соответствует задаче о частице,

влетающей в заряженный конденсатор параллельно его пластинам (рис. 5.1). Направим ось x по направлению E , а ось y — по направлению v_0 . Тогда движение частицы будет происходить в плоскости (x, y) . Пока это возможно, не будем различать классическое и релятивистское уравнения движения, записав их в общей форме:

$$\frac{dp}{dt} = eE,$$

где $F = eE$ — сила, действующая со стороны электрического поля на заряженную частицу. В компонентах:

$$\dot{p}_x = eE, \quad \dot{p}_y = 0.$$

Отсюда импульс находится интегрированием:

$$p_x = eEt + p_{0x}, \quad p_y = p_{0y}.$$

Рис 5.1 Электрон, влетающий в однородное электрическое поле конденсатора, в момент времени $t = 0$ находится в начале координат. Сила со стороны поля направлена по оси x , начальная скорость электрона v_0 направлена по оси y . Классическое решение задачи совпадает с решением задачи о движении тяжелой точки, брошенной горизонтально со скоростью v_0 в поле тяжести

Но по начальным условиям как в классическом, так и релятивистском случае при $t = 0$ $p_x = 0$, а $p_{0y} = p_0$. Следовательно, можно написать

$$p_x = eEt, \quad p_{0y} = p_0$$

Теперь уже нужно учесть различие в определениях импульса:

классического

$$p = mv,$$

Имеем

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{eEt}{m}, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = v_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} x &= \frac{eE}{m} \frac{t^2}{2} + x_0, \\ y &= v_0 t + y_0. \end{aligned}$$

Но при $t = 0$ по начальным

релятивистского

$$p = \gamma m v.$$

В этом случае

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 = (eEt)^2 + p_0^2.$$

Энергия частицы \mathcal{E} определится как

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} = \\ &= \sqrt{m^2 c^4 + p_0^2 c^2 + (ceEt)^2} = \\ &= \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (ceEt)^2}. \end{aligned}$$

Используя соотношение (5.55)

$$v_{\text{рел}} = \frac{c^2}{\mathcal{E}} p, \quad (1')$$

условиям $x_0 = y_0 = 0$, и окончательно получим

$$x = \frac{eE}{m} \frac{t^2}{2}, \quad y = v_0 t. \quad (*)$$

Скорость частицы

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{eE}{m}\right)^2 t^2 + v_0^2$$

с течением времени неограниченно растет. Траектория частицы, получаемая исключением из (*) времени t , — парабола

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2} y^2. \quad (2)$$

получим

$$\begin{aligned} v_x^{\text{рел}} &= \frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}} = \\ &= \frac{c^2 e E t}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2}} = \\ &= \frac{v_x}{\sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}_0}{m c^2}\right)^2 + \left(\frac{v_x}{c}\right)^2}}, \quad (2') \end{aligned}$$

где $v_x^{\text{рел}}$ определено согласно (1'). Из (2') вытекает, как и в предыдущем параграфе, что $v^{\text{рел}}$ всегда меньше c , потому что

$$v_y^{\text{рел}} = \frac{dy}{dt} = \frac{p_0 c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2}} \quad (3')$$

с течением времени убывает. Интегрируя (2'), получим с учетом начальных условий,

$$x = \frac{1}{eE} \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2} - \frac{\mathcal{E}_0}{eE}.$$

Интегрируя (3'), с учетом начальных условий имеем

$$y = \frac{p_0 c}{eE} \text{Arcsh} \frac{c e E t}{\mathcal{E}_0}.$$

Исключая t из выражений для x и y , получим

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \left(\text{ch} \frac{eE y}{c p_0} - 1 \right).$$

Таким образом, если классическая траектория была параболой, то релятивистская траектория оказалась цепной линией. Но для случая $v \ll c$ цепная линия переходит в параболу. В самом деле, при $v/c \ll 1$ мы имеем $\gamma \sim 1$, $p_0 = m v_0$, а $\mathcal{E}_0 = m c^2$. Кроме того, при малых x можно принять $\text{ch} \vartheta \approx 1 + \vartheta^2/2!$, откуда

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{eE} \frac{e^2 E^2 y^2}{2 p_0^2 c^2} = \frac{m c^2}{eE} \frac{(eE)^2 y^2}{2 m^2 v_0^2 c^2} = \frac{eE}{2 m v_0^2} y^2,$$

а это и есть парабола (2). На этом примере, впрочем как и на всех следующих, видно, что решение задач релятивистской механики не требует введения какой-либо зависимости массы от скорости: решение получается просто интегрированием уравнения движения.

IV. Движение заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле. Классическое и релятивистское уравнения движения заряженной частицы в магнитном поле

$$\frac{dp}{dt} = e \{vB\} \quad (1)$$

выглядят одинаково не только по форме. Дело в том, что магнитное поле не совершает работу над зарядом и энергия частицы остается постоянной (см. (5.20) и (5.31)); разумеется, выражения для энергии в классическом и релятивистском случаях различны. На основе релятивистского соотношения

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \mathbf{v},$$

где $\mathcal{E} = \text{const}$, уравнение (1) переписывается в виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ec^2}{\mathcal{E}} \{vB\}, \quad (2)$$

тогда как из классического определения импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ следует

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m} \{vB\}. \quad (3)$$

Таким образом, релятивистское и классическое уравнения движения (2) и (3) отличаются лишь константами перед векторным произведением. Напомним, как решается уравнение (2) или (3). Направим ось z по направлению магнитного поля. Тогда $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$. Для постоянных множителей, возникающих перед произведением $\{v\mathbf{k}\}$ в уравнениях (2) и (3), введем обозначения:

$$\omega_k = \frac{eB}{m}, \quad \omega_{\text{рел}} = \frac{ec^2 B}{\mathcal{E}} = \frac{eB}{m\gamma} = \frac{1}{\gamma} \omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (4)$$

Далее для определенности решаем уравнение (2). Раскрывая векторное произведение $\{v\mathbf{k}\}$, перепишем (2) в компонентах:

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0. \quad (5)$$

Удобно перейти к комплексной переменной в плоскости (v_x, v_y) . Умножая второе из уравнений (5) на мнимую единицу и складывая с первым, получим $\frac{d}{dt} (v_x + iv_y) = -i\omega (v_x + iv_y)$.

Это уравнение сразу интегрируется:

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

где a — комплексная постоянная. Если ее записать в виде $a = v_{0t} e^{-i\alpha}$ с вещественными v_{0t} и α , то решение будет иметь вид

$$v_x + iv_y = v_{0t} e^{-i(\omega t + \alpha)}. \quad (6)$$

Очевидно, v_{0t} представляет собой модуль комплексного числа, стоящего в левой части (6):

$$v_{0t}^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

Следовательно, величина скорости частицы в плоскости (x, y) остается постоянной. Выражение (6) можно переписать в форме

$$\frac{d}{dt}(x + iy) = v_{0t} e^{-i(\omega t + \alpha)},$$

которая допускает непосредственное интегрирование:

$$x + iy = \frac{v_{0t}}{\omega} e^{-i(\omega t + \alpha - \pi/2)}. \quad (7)$$

Вспомнив геометрическое представление комплексного числа, записанного в виде $w = x + iy = re^{i\varphi}$, мы убеждаемся, что частица все время остается на окружности постоянного радиуса $r = v_{0t}/\omega$, а угол, который составляет ее радиус-вектор с осью x , увеличивается равномерно со временем: $\varphi = \omega t + \text{const}$. Это означает, что проекция движения частицы на плоскость (x, y) представляет собой равномерное движение по окружности радиуса

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t} \mathcal{E}}{ec^2 B} = \frac{p_t}{eB}, \quad (8)$$

где p_t — проекция импульса на плоскость (x, y) , с круговой частотой ω . Что касается движения по оси z , то из третьего уравнения (5) следует, что

$$z = z_0 + v_{0z}t. \quad (9)$$

Из уравнений (8) и (9) следует, что заряженная частица в однородном магнитном поле движется по винтовой линии, ось которой совпадает с направлением магнитного поля, а радиус определяется согласно (8). Скорость частицы, как это и должно быть в магнитном поле, постоянна. Если в начальный момент скорость частицы вдоль магнитного поля была равна нулю ($v_{0z} = 0$), то частица движется просто по окружности в плоскости, перпендикулярной полю.

Величина $\omega_{\text{рел}}$ определяет циклическую частоту вращения проекции частицы на плоскость (x, y) , перпендикулярную и направлению магнитного поля. Эта частота называется *циклотронной*. Как мы видели, $\omega_k = \gamma \omega_{\text{рел}}$, т. е. циклотронная частота релятивистских частиц меньше циклотронной частоты нерелятивистских частиц. При малых скоростях $\gamma \rightarrow 1$, а $\omega_k \rightarrow \omega_r$.

В заключение рассмотрим ускорение, приобретаемое заряженной частицей в электромагнитном поле, согласно классической и релятивистской механике. Из общего уравнения движения

$$\frac{dp}{dt} = e \{ \mathbf{E} + [\mathbf{vB}] \}$$

получим для классического случая ($p = mv$)

$$\dot{v}_k = \frac{e}{m} \{E + [vB]\}.$$

Чтобы получить ускорение в релятивистском случае, используем соотношение (5.55), откуда

$$\frac{dp}{dt} = \frac{v}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{dv}{dt},$$

но согласно (5.31) $d\mathcal{E}/dt = Fv = eEv$, а согласно (5.32) $\mathcal{E}/c^2 = m\gamma$, поэтому (ср. уравнение (5.38))

$$\begin{aligned} \dot{v}_r &= \frac{e}{m\gamma} \left\{ E + [vB] - \frac{v}{c^2} (Ev) \right\} = \\ &= \frac{1}{\gamma} \dot{v}_k - \frac{e}{m\gamma c^2} v (Ev) = \frac{1}{\gamma} \dot{v}_k - \frac{e}{\mathcal{E}} v (Ev). \end{aligned}$$

Второй член в последнем звене равенства может быть интерпретирован как появление некоторого трения (пропорционального скорости); отсюда можно качественно понять, что ускорение частицы резко падает при приближении скорости частицы к скорости света. Ясно, конечно, что $\dot{v}_k = \dot{v}_r$ с точностью до β^2 . Движение заряженной частицы в постоянных электрическом и магнитном полях изложено в [9], § 22; мы хотим только отметить, что в случае скрещенных (взаимно перпендикулярных) полей, для которых справедливо $E^2 - c^2 B^2 \neq 0$ (ср. § 6.5), переходом к некоторой инерциальной системе отсчета можно оставить либо только электрическое, либо только магнитное поле. Тогда в этой системе отсчета уже можно воспользоваться полученными здесь результатами.

V. Реактивное движение в релятивистской механике. Как и в предыдущих задачах, мы будем вести параллельно решение для классического и релятивистского случаев. В качестве примера рассматривается движение ракеты, которую (вместе с выбрасываемым газом) можно принять за замкнутую систему. Напомним, что движение ракеты происходит за счет того, что в любой промежуток времени из ракеты выбрасывается некоторое количество вещества с определенной скоростью относительно ракеты. По закону сохранения импульса корпус ракеты вместе с оставшимся горючим приобретает импульс в направлении, противоположном направлению выброса горючего. Как в классическом, так и релятивистском случае очень удобно решать задачу в сопутствующей ракете инерциальной системе отсчета. Так как скорость ракеты меняется, речь идет о мгновенно-сопутствующей системе.

Пусть в момент t масса ракеты (горючее с контейнером) равна $M(t)$, а скорость — $V(t)$; двигатель ракеты работает так, что за время dt из ракеты выбрасывается масса газа dM с постоянной скоростью *относительно ракеты*, равной v . Выпишем закон сохранения импульса в сопутствующей системе (одномерная задача):

$$(M - dM) dV - v dM = 0, \quad (1)$$

причем $dM > 0$. Если пренебречь бесконечно малыми второго порядка ($dM dV$), мы получим

$$\frac{dM}{M} = -\frac{dV}{v}. \quad (2)$$

Уравнение (2) легко интегрируется ($v = \text{const}$):

$$V = v \ln \frac{C}{M},$$

где C — постоянная интегрирования. Выбирая начальные условия: при $t = 0$ $V = 0$, $M(0) = M_0$, получим окончательно

$$V = v \ln \frac{M_0}{M}. \quad (3)$$

Формула (3) определяет скорость ракеты $V(t)$ в зависимости от скорости выброса горючего и изменения массы ракеты (масса сожженного топлива равна $M_0 - M$).

В приведенном выводе есть, однако, одна деталь, заслуживающая внимания. В каждый момент времени у ракеты разные сопутствующие инерциальные системы. В равенстве (2) приращение скорости за интер-

В релятивистском случае следует рассматривать не приращение скорости, а приращение параметра скорости, поскольку параметры скорости складываются (аддитивны), а скорости — нет (см. (3.37)).

Выпишем связь между скоростью и параметром скорости θ (см. (2.27), (2.28)):

$$\text{th } \theta = \beta, \quad \text{ch } \theta = \gamma, \quad \text{sh } \theta = \gamma\beta, \quad (5)$$

если речь идет о скорости истечения горючего, и

$$\text{th } \theta = B, \quad \text{ch } \theta = \Gamma, \quad \text{sh } \theta = \Gamma B, \quad (6)$$

если речь идет о скорости ракеты. Очевидно,

$$\mathcal{E} = mc^2 \text{ch } \theta, \quad p = m \text{sh } \theta. \quad (7)$$

Допустим, что за промежуток времени dt выбрасывается масса dM со скоростью $\beta = v/c$. Скорость ракеты после выброса массы dM возрастает на $dB = dV/c$. Приращение dB мы выразим через приращение параметра скорости (см. (6)):

$$dB = \text{th}(d\theta), \quad (8)$$

Запишем теперь законы сохранения импульса и энергии. В сопутствующей системе «до выброса» импульс ракеты равен нулю ($B = 0$). После выброса массы dM ракета приобретает импульс $(M + dM) \text{sh}(d\theta)$, а импульс массы dM , направленный в противоположную сторону, равен $dM \text{sh}(\theta)$. Поэтому

$$-dM \text{sh}(\theta) + (M + dM) \text{sh}(d\theta) = 0. \quad (9)$$

вал времени dt липнется для разных инерциальных систем отсчета. Но при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой в классической механике все скорости (и приращения скоростей) просто суммируются. Поэтому совсем несущественно, что (2) относится к разным ИСО; конечную скорость можно получить суммированием (интегрированием) приращений скорости за весь промежуток времени, за который скорость ракеты меняется от 0 до V :

$$\int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = -\frac{1}{v} \int_0^V dV. \quad (4)$$

Это и есть как раз тот метод, которым получена формула (3). Отсюда ясно, как существенна в этом выводе аддитивность скоростей при переходе от одной ИСО к другой.

В приведенных выкладках совсем не использовался закон сохранения механической энергии, так как его, во-первых, недостаточно (здесь играет роль и тепловая энергия), а во-вторых, если нужно вычислить скорость ракеты, без него можно обойтись.

Релятивистская механика позволяет учесть любые превращения энергии, поэтому здесь можно выписать также и закон сохранения энергии:

$$dMc^2 \operatorname{ch}(\vartheta) + (M + dM)c^2 \operatorname{ch}(d\vartheta) = Mc^2. \quad (10)$$

Но мы можем считать $d\vartheta$ малой величиной, поэтому $\operatorname{sh}(d\vartheta) \sim d\vartheta$, $\operatorname{ch}(d\vartheta) \sim 1$, откуда из (9), пренебрегая бесконечно малыми второго порядка $dM d\vartheta$, имеем

$$dM \operatorname{sh}(\vartheta) = M d\vartheta, \quad (11)$$

а из (10)

$$\operatorname{ch} \vartheta = -1. \quad (12)$$

Разделив почленно (11) на (12), получим

$$d\vartheta = -\frac{dM}{M} \operatorname{th} \vartheta,$$

или

$$d\vartheta = -\beta \frac{dM}{M}, \quad (13)$$

где $M = M(t)$ — масса ракеты и горючего в момент t . Так как в релятивистской механике аддитивен параметр скорости, то конечное значение параметра скорости может быть найдено путем интегрирования:

$$\vartheta = \beta \ln \frac{M_0}{M}, \quad (14)$$

где M_0 — масса ракеты в тот момент, когда ее скорость была равна нулю.

Формула (14) в явном виде определяет также и скорость ракеты, после того как была сожжена масса горючего $M_0 - M$.

Петрудно убедиться, что в случае движения ракеты с нерелятивистской скоростью (14) переходит в (3). Действительно, в этом случае $V \ll 1$ и, следовательно, $\text{th } \theta = V \ll 1$, откуда $\text{th } \theta \sim \theta$ и (14) совпадает с (3). Как и во всех решениях релятивистской механики, скорость ракеты V не может превзойти скорости света c . Если нам удастся сжечь даже всю массу ракеты (с горючим), $M \rightarrow M_0$, то $\ln(M_0/M) \rightarrow \infty$. Из (14) следует лишь, что $\theta \rightarrow \infty$ (максимальное значение β , разумеется, равно единице). По $V = \text{th } \theta$, а при $\theta \rightarrow \infty$ $\text{th } \theta \rightarrow 1$, т. е. $V \rightarrow c$.

Конечно, чем больше скорость выброса, тем эффективней действует ракета. Можно ли сделать скорость выброса равной скорости света c , т. е. $\beta = 1$? Да, если реактивным газом будет свет: только фотоны и нейтрино могут двигаться со скоростью c . Эти два сорта частиц обладают той особенностью, что их масса покоя равна нулю (§ 7.6). Впрочем, равенство нулю массы покоя в этом случае видно и из (10). При $v \rightarrow c$ параметр скорости удовлетворяет условию $\text{th } \phi = \beta \rightarrow 1$. Но при $\text{th } \phi \rightarrow 1$ $\text{ch } \phi \rightarrow \infty$, и, чтобы равенство (10) удовлетворялось при конечном значении M , нужно, чтобы $dM = 0$.

Более подробный анализ возможностей фотонной ракеты показывает, однако, что она непригодна для дальних космических полетов (см. [11]).

VI. Встречные пучки. Успехи ядерной физики существенно зависят от того, какие энергии взаимодействия между элементарными частицами доступны нашему наблюдению. До сих пор существует два источника частиц высоких энергий — космические лучи и ускорители. Энергия частиц в космических лучах долго еще будет оставаться мечтой проектировщиков ускорителей, и планомерные исследования в физике высоких энергий пока ограничиваются той областью энергий, которая перекрывается ускорителями. Ускорители — это сложные и дорогостоящие сооружения, строительство которых тянется годами, а стоимость составляет заметную часть национального бюджета любой высокоразвитой страны.

Допустим, что в лабораторной системе отсчета частицы разгоняются до энергии \mathcal{E} . Нам нужно осуществить соударение этих частиц с такими же частицами (например, нас интересует соударение протонов с протонами). Можно направить пучок протонов с полной энергией \mathcal{E} (в лабораторной системе отсчета) на мишень, содержащую водород, в которой протоны практически неподвижны. Достаточно ограничиться соударением одного падающего и одного покоящегося протона. Тогда энергия системы, состоящей из двух этих частиц, равна $\mathcal{E} + m$ (в этом параграфе мы считаем $c = 1$). Вопрос состоит в следующем: нельзя ли существенно увеличить энергию взаимодействия, если взять два пучка, каждый из которых состоит из частиц с энергией \mathcal{E} (в лабораторной системе),

и направить эти пучки навстречу друг другу? Насколько возрастет «полезная» энергия взаимодействия? Для разнообразия эту задачу мы рассмотрим в необычных единицах времени — световых метрах (см. гл. 2).

Для простоты не будем говорить больше о пучках, а займемся двумя частицами. Максимальная полезная энергия (идущая на порождение новых частиц, ядерные реакции, разогрев вещества и т. д.) может быть оценена в системе центра инерции, ибо именно в этой системе подсчитывается внутренняя энергия системы (движение системы как целого, естественно, с нашей точки зрения,

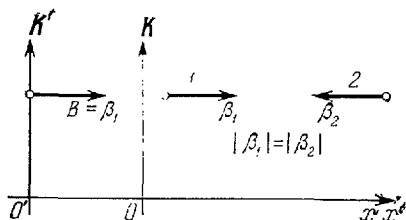


Рис. 5.2. Две частицы движутся в лабораторной системе с равными, но противоположно направленными скоростями. В системе K' частица 1 покоится.

«бесполезно»). Рассмотрим две частицы 1 и 2, летящие навстречу друг другу с одинаковыми энергиями (скоростями) в лабораторной системе K . Эта система будет для них системой центра инерции, и полная энергия частиц в этой системе как раз и будет полезной энергией. Эта полная энергия равна $2T + 2m$, где T — кинетическая энергия каждой частицы, $2m$ — энергия покоя частиц (в принятых нами единицах времени $c = 1$).

Выясним, как выглядит то же самое соударение с точки зрения системы K' , в которой частица 1 покоится. Это и будет картина столкновения палатающей на мишень частицы. нас будет интересоваться энергия частицы 2, вычисленная в системе, где покоится частица 1. Сделаем соответствующий пересчет по формулам (5.43). (Не забудьте, что рассматривается то же самое столкновение, но только в другой системе отсчета.) Импульс и энергию частиц 1 и 2 в K обозначим через (p, \mathcal{E}) и $(-p, \mathcal{E})$. В системе K' импульс и энергия частицы 1 равны $p'_1 = 0$, $\mathcal{E}'_1 = m$. На рис. 5.2 изображены системы K и K' и скорости частиц в системе K . Система K' — собственная система для частицы 1, и согласно (5.49)

$$\mathcal{E}_1 = \Gamma \mathcal{E}'_1 = \Gamma m = \gamma m \quad (1)$$

(в нашем случае $\Gamma = \gamma$, поскольку K' связана с частицей 1). Из (1) сразу следует, что

$$\gamma = \frac{\mathcal{E}_1}{m} = \frac{T+m}{m} \approx \frac{T}{m}.$$

Будем рассматривать релятивистские скорости частиц, когда $\beta \sim 1$, откуда сразу

$$p = \beta \mathcal{E} \approx \mathcal{E}.$$

В нашем случае $\beta = V \sim 1$, откуда величина ΓV , входящая в преобразование энергии, примерно равна Γ . Теперь уже несложно записать формулу преобразования энергии частицы 2 при переходе от системы отсчета K к K' :

$$\mathcal{E}'_2 = \Gamma (\mathcal{E}_2 - V p_2) = \Gamma (\mathcal{E} + V p) \approx \Gamma \mathcal{E} + \Gamma p \approx 2\Gamma \mathcal{E}.$$

$2\mathcal{E}$ — это, с точностью до удвоенной энергии покоя частиц (которой при релятивистских скоростях можно пренебречь), энергия, реализуемая при встречном соударении. Чтобы реализовать ее при покоящейся частице 1, нужна энергия, в Γ раз большая. Из этого расчета видна та выгода, которую мы получаем, используя встречные пучки.

Однако к тому же самому результату можно прийти проще. Мы докажем, что пересчет энергии согласно (5.43) эквивалентен подсчету энергии по формуле $\mathcal{E} = m\gamma$ в том случае, если в нее будет подставлено релятивистское выражение относительной скорости частиц 1 и 2.

Итак, пусть в системе K импульс частицы 2 равен $p_2 = p_x = -m\gamma\beta$, а энергия $\mathcal{E}_2 = m\gamma$. Ищется энергия частицы 2 в системе K' , в которой частица 1 покоится.

Согласно (5.43)

$$\mathcal{E}'_2 = \Gamma (\mathcal{E} - V p_2) = \Gamma (m\gamma + V m\gamma\beta) = \Gamma m\gamma (1 + \beta V),$$

поскольку в нашем случае $\gamma = \Gamma$ (в системе K обе частицы имеют одинаковые скорости). Однако из формулы (5.10) следует (не забудьте, что у нас $\beta < 0$, см. рис. 5.2)

$$\Gamma (1 + \beta V) = \gamma';$$

поэтому

$$\mathcal{E}'_2 = m\gamma',$$

где γ' определяется для скорости частицы 2 в системе K' (т. е. для относительной скорости частицы 2 относительно 1). Вычислим относительную скорость частиц 1 и 2. Имеем

$$\beta'_2 = \beta'_x = \frac{\beta_x - V}{1 - \beta_x V}.$$

В системе K частица 2 имеет скорость $-\beta$, а частица 1 — скорость β , поэтому

$$\beta'_x = -\frac{2\beta}{1 + \beta^2}.$$

Это и есть относительная скорость частицы 2. Найдем теперь γ' :

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta'^2_2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\beta}{1 + \beta^2}\right)^2}} = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} = \gamma^2 (1 + \beta^2).$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}'_2 = m\gamma' = m\gamma \cdot \gamma (1 + \beta^2) \approx 2\mathcal{E},$$

ибо $\beta \sim 1$, а $\gamma = \Gamma$. Мы снова пришли к тому же самому результату, как это и должно было быть.

§ 5.8. Законы сохранения релятивистской механики. До сих пор говорилось о законах сохранения энергии и импульса для материальной частицы, теперь следует остановиться на законах сохранения для системы n материальных частиц. Вопрос о законах сохранения имеет два аспекта. Первый состоит в том, что нужно выяснить, как выглядят релятивистские законы сохранения в рамках заданной ИСО. Второй аспект заключается в выяснении поведения сохраняющихся величин при переходе от одной инерциальной системы к другой. Оба эти вопроса решаются очевидным образом для системы невзаимодействующих частиц и весьма сложны для частиц, взаимодействующих между собой.

Начнем с системы n невзаимодействующих частиц. Уравнения движения и изменения энергии, относящиеся к k -й частице, имеют вид (см. (5.27) и (5.31))

$$\frac{d}{dt} (m^{(k)}\gamma^{(k)}\mathbf{v}^{(k)}) = \mathbf{F}^{(k)}, \quad (5.78)$$

$$\frac{d}{dt} (m^{(k)}c^2\gamma^{(k)}) = \mathbf{I}^{(k)}\mathbf{v}^{(k)}, \quad (5.79)$$

где через $\mathbf{F}^{(k)}$ обозначена сила, действующая на k -ю частицу (суммирование по k нет!).

Если рассматривается одна частица, не взаимодействующая ни с какими другими частицами, то $\mathbf{F}^{(k)} = 0$ и из (5.78) и (5.79) непосредственно вытекают закон сохранения импульса $\mathbf{p}^{(k)} = m^{(k)}\gamma^{(k)}\mathbf{v}^{(k)} = \text{const}$ и закон сохранения энергии $\mathcal{E}^{(k)} = m^{(k)}\gamma^{(k)}c^2 = \text{const}$. В сущности, это обстоятельство и отражается в том, что для отдельной частицы $\vec{P}^2 = \mathbf{p}^2 - \mathcal{E}^2/c^2 = \text{const}$. Для отдельной частицы, которая представляет собой замкнутую систему, \vec{P}^2 сохраняется потому, что сохраняются и \mathbf{p} и \mathcal{E}/c отдельно. Отметим попутно еще раз, что \mathbf{p} и $i\mathcal{E}/c$ отдельной частицы в совокупности образуют 4-вектор.

Когда речь идет о системе n невзаимодействующих материальных частиц, сохранение суммарного импульса системы $\sum \mathbf{p}^{(k)}$ и суммарной энергии системы $\sum \mathcal{E}^{(k)}$ очевидно, поскольку сохраняется каждое слагаемое в отдельности.

Законы преобразования суммарного импульса и суммарной энергии

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}^{(k)}, \quad \mathcal{E} = \sum \mathcal{E}^{(k)} \quad (5.80)$$

при переходе от одной ИСО к другой очевидны: сумма компонент векторов преобразуется как компонента вектора.

Вопрос о законах сохранения в системе n взаимодействующих частиц гораздо сложнее. В обычной классической механике взаимодействие частиц в случае консервативных сил можно было описать потенциальной функцией системы $U = (r^{(1)}, r^{(2)}, \dots, r^{(n)})$, причем $r^{(k)}(t)$ определяло положение k -й частицы в момент t , а положение всех n частиц рассматривалось в один и тот же момент времени. Возможность выбора одного-единственного момента времени в конечном счете обусловлена тем, что в классической механике скорость распространения взаимодействий предполагается бесконечной.

Из-за того, что скорость распространения взаимодействий в релятивистской механике конечна, для вычисления силы в данной точке нужно знать положения всех частиц в некоторый предыдущий момент времени. Отсюда ясно, что вид функции U в релятивистском случае отнюдь не прост.

Если записать выражение для энергии системы n тел в виде

$$\mathcal{E} = \sum m^{(k)} c^2 \gamma^{(k)} \quad (5.81)$$

и для суммарного импульса

$$\mathbf{P} = \sum m^{(k)} \gamma^{(k)} \mathbf{v}^{(k)}, \quad (5.82)$$

то можно утверждать следующее. Величины \mathbf{P} и $i\mathcal{E}/c$, в отличие от того, что мы имели для отдельной частицы, не образуют 4-вектора. Кроме того, эти величины не являются постоянными. Невыполнение равенства $\mathcal{E} = \text{const}$ ясно уже из того, что в классической механике сохраняется полная энергия системы, в которую входит и потенциальная энергия системы. В (5.81) потенциальная энергия не входит, и ввести ее строгим образом довольно сложно. С конечной скоростью передачи взаимодействий связано и то, что выражение (5.82) не сохраняется во времени. В конечном итоге это обстоятельство разъясняет и тот парадоксальный факт, что величины \mathcal{E} и \mathbf{P} , представляющие собой сумму компонент 4-векторов, не являются компонентами 4-вектора. Действительно, в любой системе отсчета, где составляются суммы (5.81) и (5.82), слагаемые берутся одновременно в смысле одновременности данной системы отсчета. При переходе к другой инерциальной системе можно найти значения импульсов и энергий отдельных частиц по правилам преобразования 4-векторов и сложить их. Однако в новой системе пересчитанные события окажутся уже не одновременными. Чтобы найти \mathcal{E} и \mathbf{P} в новой системе, нужно привести эти суммы к одновременности в новой системе отсчета. Именно этот пересчет одновременности и лишает величины \mathbf{P} и \mathcal{E} свойств компонент 4-вектора.

При наличии взаимодействия релятивистские системы обладают десятью интегралами движения: интегралом энергии, импульса, движения центра инерции, момента импульса и др. Приближенный вид этих интегралов приведем, например, в книге [16], § 27.

Что касается поведения интегралов движения при переходе от одной инерциальной системы к другой, то в некотором приближении ($\beta^{(h)} = v^{(h)}/c \ll 1$), где сохраняются еще члены $(\beta^{(h)})^2$, энергия и импульс составляют 4-вектор, а интегралы движения центра инерции и момента импульса — антисимметричный 4-тензор. Отсюда ясно, что если эти интегралы сохраняются в одной системе отсчета, то они будут постоянны и во всякой другой системе отсчета.

Есть один случай, в котором законы сохранения импульса и энергии можно записать в простом виде:

$$\sum m^{(h)}\gamma^{(h)}\mathbf{v}^{(h)} = \sum m^{(h)}\gamma'^{(h)}\mathbf{v}'^{(h)}, \quad (5.83)$$

$$\sum m^{(h)}c^2\gamma^{(h)} = \sum m^{(h)}c^2\gamma'^{(h)}. \quad (5.84)$$

Эти формулы пригодны в том случае, когда рассматриваются быстрые, но слабо (или кратковременно) взаимодействующие частицы. Формулы (5.83) и (5.84) несправедливы во время взаимодействия, но вполне пригодны до начала и после окончания взаимодействия. Их, в частности, можно применить к идеальному релятивистскому газу, а также к «соударениям микрочастиц».

Приведем пример использования законов сохранения в релятивистской форме для рассмотрения «соударения» частиц. Пусть на покоящуюся частицу с массой m_1 налетает частица с массой m_0 , причем в результате «соударения» («реакции») порождаются частицы с суммарной массой M . Реакции между частицами управляются не только законами сохранения импульса и энергии, но также и другими специфическими законами сохранения. Их мы учитывать не будем. Мы будем просто считать (скажем, используя экспериментальные данные), что реакция может идти. Но уже с помощью законов сохранения импульса и энергии можно выяснить существенный вопрос: какова минимальная энергия налетающей частицы, достаточная для осуществления интересующей нас реакции?

«До» реакции и «после» нее законы сохранения импульса и энергии выполнены. На четырехмерном языке это означает, что сохраняется 4-вектор энергии-импульса системы частиц. Картину «до» соударения рассматриваем в лабораторной системе отсчета. До соударения частицы не взаимодействуют, и поэтому энергия системы частиц равна $\mathcal{E}_0 + m_1c^2$, а импульс равен \mathbf{p}_0 , где \mathcal{E}_0 — полная энергия налетающей частицы, а \mathbf{p}_0 — ее импульс.

Картину после соударения удобно рассматривать в системе центра инерции. По закону сохранения импульса эта система отсчета движется равномерно и прямолинейно относительно лабораторной и поэтому также является инерциальной (если лабораторная система инерциальная). Минимальная энергия, требуемая для осуществления реакции, будет в том случае, когда в системе центра инерции все частицы, возникшие после реакции, покоятся (в противном случае их полная энергия будет больше). Следовательно (если ищется минимальная энергия), после соударения энергия системы возникших частиц равна Mc^2 , а импульс равен нулю (в системе центра инерции). При переходе от одной ИСО к другой квадрат 4-вектора энергии-импульса является инвариантом.

Выпишем 4-векторы энергии-импульса системы частиц до и после соударения: \vec{P}^0 (p_0 , $\mathcal{E}_0/c + m_1c$), \vec{P} (0 , Mc). Но абсолютные величины этих векторов равны: $\vec{P}^{0^2} = \vec{P}^2$ или $M^2c^2 = (\mathcal{E}_0/c + m_1c)^2 - p_0^2$. Используя соотношения $\mathcal{E}_0^2/c^2 - p_0^2 = m_0^2c^2$, $\mathcal{E}_0 = T_0 + m_0c^2$, будем иметь

$$M^2c^2 = m_0^2c^2 + m_1^2c^2 + 2m_1(T_0 + m_0c^2)$$

Отсюда непосредственно следует минимальное («пороговое») значение для кинетической энергии налетающей частицы:

$$T_0 = \frac{c^2}{2m_1} (M - m_0 - m_1) (M + m_0 + m_1)$$

Полученная формула может быть использована при рассмотрении весьма разнообразных реакций. Приведем три примера.

Рождение π -мезона при соударении двух нуклонов: $N + N \rightarrow N + N + \pi$. Фоторождение π -мезона на нуклоне: $N + \gamma \rightarrow N + \pi$. Рождение протон-антипротонной пары ($p + \bar{p}$) при бомбардировке протонами мишени, содержащей протоны (водород): $p + p \rightarrow p + p + (p + \bar{p})$.

При интерпретации этих реакций следует исходить из того, что всегда соблюдается закон сохранения энергии. Поэтому в этих реакциях кинетическая энергия исходных частиц переходит (частично) в энергию покоя порождаемых частиц. Говорить же о «рождении» массы из кинетической энергии, безусловно, неверно.

ТЕОРИЯ МАКСВЕЛЛА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ
ФОРМЕ

Теория относительности указывает, как надо рассматривать физические явления в любой инерциальной системе отсчета. СТО исходит из полного равноправия всех инерциальных систем. Это означает, что основные уравнения, описывающие физические явления в природе, должны быть одинаковыми во всех инерциальных системах; конечно, для каждой системы отсчета они записываются в соответствующих переменных, т. е. для масштабов и часов данной системы отсчета.

Основная система уравнений, описывающих электромагнитные явления,— это система уравнений Максвелла. Замечательно, что система уравнений Максвелла, сформулированная за пятьдесят лет до появления специальной теории относительности, оказалась ковариантной по отношению к преобразованиям Лоренца, т. е. с точностью до обозначений переменных сохраняла свой вид, если к ней применялись преобразования Лоренца. Это и означает, что система уравнений Максвелла сохраняет свой вид в любой инерциальной системе отсчета, а принцип относительности выполняется автоматически.

Таким образом, уравнения электродинамики с точки зрения СТО менять не нужно, и могло бы показаться, что теория относительности ничего существенного в электродинамику внести не может. Однако это совсем не так.

Прежде всего, до создания теории относительности было неясно, в каких системах отсчета справедлива система уравнений Максвелла. Из теории относительности сразу же следовало, что эта система уравнений годится для любой инерциальной системы отсчета. Далее, естественно было переписать систему уравнений Максвелла в четырехмерной форме. Такая запись позволяет установить формулы преобразования основных величин, входящих в теорию, при переходе от одной ИСО к другой. При переходе к четырехмерной записи мы обнаружим также неразрывное единство зарядов и токов, электрических и магнитных моментов, электрического и магнитного полей. Обнаружится связь и некоторых других физических величин. Такая тесная связь между определенными физическими величинами оставалась в тени до появления релятивистского подхода к электромагнитным явлениям.

Что касается преобразования компонент электрического и магнитного полей при переходе от одной инерциальной системы к другой, то это преобразование последовательно может быть проведено лишь в рамках теории относительности. Только теория относительности показывает, что для описания электромагнитного поля необходимо использовать четырехмерный антисимметричный тензор.

§ 6.1. Трехмерная система уравнений Максвелла. 4-потенциал и 4-ток *). Теория Максвелла представляет собой макроскопическую теорию электромагнитного поля. В этой теории электромагнитное поле в произвольной среде описывается четырьмя векторами: напряженностью электрического поля E , напряженностью магнитного поля H , индукцией электрического поля D и индукцией магнитного поля B .

В однородной изотропной среде число векторов поля, необходимых для описания электромагнитных явлений, уменьшается до двух, так как векторы поля оказываются пропорциональными друг другу:

$$D = \varepsilon E, \quad B = \mu H. \quad (6.1)$$

Постоянные коэффициенты ε и μ называются соответственно диэлектрической и магнитной проницаемостями. Вакуум описывается как однородная изотропная среда с определенными значениями ε и μ , которые принято обозначать ε_0 и μ_0 и называть соответственно электрической и магнитной постоянными.

Векторы поля — согласно теории Максвелла — подчиняются двум основным уравнениям:

$$\begin{array}{l} \text{rot } H = j + \dot{D}, \\ \text{rot } E = -\dot{B}; \end{array} \quad (\text{a}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } H = j + \varepsilon \dot{E}, \\ \text{rot } E = -\mu \dot{H}; \end{array} \right. \quad (\text{б}) \quad (6.2)$$

слева написаны уравнения для произвольной среды, справа — для однородной и изотропной.

В теории Максвелла средние значения электрического и магнитного полей (по отношению к «истинным», микроскопическим полям) определяются векторами E и B . Векторы D и H в общем случае связаны со средними полями соотношениями

$$D = \varepsilon_0 E + P, \quad B = \mu_0 (H + M), \quad (6.3)$$

где введены еще два вектора: вектор поляризации P и вектор намагничения M .

*) Все уравнения и формулы электродинамики записаны в этой главе в системе СИ. Для удобства читателей основные формулы выписаны также и в гауссовой системе в Приложении II.

В теории Максвелла предполагается выполнение закона сохранения заряда; для непрерывного распределения заряда он записывается в виде уравнения непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (6.4)$$

Здесь ρ — плотность заряда, а $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ — плотность тока.

Следствиями уравнений (6.2) и (6.4) являются два уравнения, которые удобно присоединить к (6.2) и (6.4):

$$\begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \end{array} \quad (\text{a}) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\epsilon, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \end{array} \quad (\text{б}) \quad (6.5)$$

Для плотности силы, действующей со стороны электромагнитного поля на свободные заряды и токи, принимается выражение

$$\mathbf{f} = \rho \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v} \mathbf{B}] \}, \quad (6.6)$$

называемое силой Лоренца. Из этого выражения еще раз видно, что \mathbf{E} и \mathbf{B} являются средними макроскопическими полями.

Система уравнений Максвелла может быть записана не только через векторы поля, но и через скалярный и векторный потенциалы φ и \mathbf{A} . Мы рассмотрим случай однородной изотропной среды и свяжем потенциалы φ и \mathbf{A} с полями \mathbf{E} и \mathbf{B} соотношениями:

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \dot{\mathbf{A}}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (6.7)$$

Если подставить эти выражения в систему (6.2б), наложив на потенциалы дополнительное условие Лоренца

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{v^2} \dot{\varphi} = 0 \quad (6.8)$$

(можно показать, что этому условию можно удовлетворить всегда), мы получим уравнения, которым должны удовлетворять потенциалы φ и \mathbf{A} :

$$\square \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad \square \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}, \quad (6.9)$$

где

$$\square = \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (6.10)$$

В уравнениях (6.9) подразумевается, что $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, т. е. что плотности заряда и тока — заданные функции координат и времени. Уравнения (6.7) и (6.9) эквивалентны системе уравнений (6.2).

Далее, нужно придать четырехмерный смысл величинам, входящим в уравнения Максвелла, а сами уравнения Максвелла переписать в четырехмерной форме. Но действовать нам придется

постепенно и уравнения Максвелла (6.2), (6.4) в четырехмерной форме будут записаны лишь в § 6.7. Начнем же мы с построения четырехмерных величин из потенциалов Φ , A и плотностей ρ , ρv .

Уравнения (6.9) — это дифференциальные уравнения одного и того же вида — уравнения Д'Аламбера. Поэтому они сразу записываются как одно четырехмерное уравнение, если ввести два 4-вектора: вектор 4-потенциала $\vec{\Phi}$ и вектор 4-плотности тока \vec{s} .

Некоторое время мы будем выписывать параллельно определения и соотношения в действительной и мнимой форме, аналогично тому, как мы поступали в механике. Итак, определим вектор 4-потенциала $\vec{\Phi}$ следующим образом:

$$\vec{\Phi} \left\{ \begin{matrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \Phi_4 \\ A_x & A_y & A_z & (i/c)\varphi \end{matrix} \right\}, \quad (\text{а}) \quad \left| \quad \vec{\Phi} \left\{ \begin{matrix} \Phi^0 & \Phi^1 & \Phi^2 & \Phi^3 \\ \varphi/c & A_x & A_y & A_z \end{matrix} \right\}, \quad (\text{б}) \quad (6.11)$$

и вектор 4-тока:

$$\vec{s} \left\{ \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ j_x & j_y & j_z & ic\rho \end{matrix} \right\}, \quad (\text{а}) \quad \left| \quad \vec{s} \left\{ \begin{matrix} s^0 & s^1 & s^2 & s^3 \\ c\rho & j_x & j_y & j_z \end{matrix} \right\}. \quad (\text{б}) \quad (6.12)$$

Напомним также определение 4-радиус-вектора:

$$\vec{R} \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x & y & z & ict \end{matrix} \right\}, \quad (\text{а}) \quad \left| \quad \vec{R} \left\{ \begin{matrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ \tau = ct & x & y & z \end{matrix} \right\}. \quad (\text{б})$$

Компоненты 4-векторов $\vec{\Phi}$, \vec{s} , \vec{R} соответственно в обычных и симметричных обозначениях записаны в двух параллельных строках, и их сопоставление позволяет сразу найти нужное значение компоненты. Определив 4-потенциал и 4-плотность тока, можно уравнения (6.9) записать в вакууме (т. е. при $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_0$, где $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$) единой формулой:

$$\square\Phi_k = -\mu_0 s_k \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad (\text{а}) \quad \left| \quad \square\Phi^k = -\mu_0 s^k \quad (k = 0, 1, 2, 3). \quad (\text{б}) \quad (6.13)$$

То, что три уравнения (6.13а) при $k = 1, 2, 3$ совпадают с тремя уравнениями (6.9) в вакууме, очевидно. Уравнение (6.13а) для $k = 4$ дает $\square \frac{i}{c} \varphi = -\mu_0 ic\rho$, но $c^2 = 1/(\varepsilon_0\mu_0)$, и мы приходим к уравнению (6.9).

Убедиться в том, что и уравнения (6.13б) совпадают с уравнениями (6.9) в вакууме, мы предоставляем читателю.

Условие Лоренца (6.8) и закон сохранения заряда (6.4) можно записать в вакууме через 4-дивергенцию векторов $\vec{\Phi}$ и \vec{s} .

Действительно, например,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{\Phi} &= \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_4} = \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial (i\varphi/c)}{\partial (ict)} = \operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\varphi}, \\ \operatorname{div} \vec{s} &= \frac{\partial s_i}{\partial x_i} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial (ic\rho)}{\partial (ict)} = \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned}$$

Значит, условие Лоренца и закон сохранения заряда в вакууме в четырехмерной записи имеют вид $\operatorname{div} \vec{\Phi} = 0$, $\operatorname{div} \vec{s} = 0$. Конечно, и действительная запись ведет к тем же самым результатам. Выводы, к которым мы пришли, весьма существенны. Как показано в Приложении I, § 4, 4-дивергенция — инвариант преобразований Лоренца. Что касается уравнений (6.13а, б), то эти 4-векторные соотношения справедливы в любой инерциальной системе отсчета в вакууме. Таким образом, уравнения для потенциалов, условие Лоренца и закон сохранения заряда могут быть переписаны так, что становится сразу очевидным, что они сохраняют свой вид в любой инерциальной системе отсчета. Относительно ковариантной записи уравнений для потенциалов в преломляющей среде ($\varepsilon \neq \varepsilon_0$ и $\mu \neq \mu_0$) см. далее (§§ 6.14, 6.15).

§ 6.2. Преобразование 4-потенциала и 4-тока. Уже одно то, что нам удалось построить 4-векторы $\vec{\Phi}$ и \vec{s} , позволяет сразу записать формулы преобразования компонент этих векторов. Мы запишем эти преобразования как в действительной, так и в комплексной форме (ср. (4.10а, б)):

$$\Phi_1 = \Gamma (\Phi'_1 - iV\Phi'_4), \quad \Phi_2 = \Phi'_2, \quad \Phi_3 = \Phi'_3, \quad \Phi_4 = \Gamma (\Phi'_4 + iV\Phi'_1); \tag{6.14a}$$

$$s_1 = \Gamma (s'_1 - iVs'_4), \quad s_2 = s'_2, \quad s_3 = s'_3, \quad s_4 = \Gamma (s'_4 + iVs'_1); \tag{6.15a}$$

$$\Phi^0 = \Gamma (\Phi^{0'} + V\Phi^{1'}), \quad \Phi^1 = \Gamma (\Phi^{1'} + V\Phi^{0'}), \quad \Phi^2 = \Phi^{2'}, \quad \Phi^3 = \Phi^{3'}; \tag{6.14б}$$

$$s^0 = \Gamma (s^{0'} + Vs^{1'}), \quad s^1 = \Gamma (s^{1'} + Vs^{0'}), \quad s^2 = s^{2'}, \quad s^3 = s^{3'}. \tag{6.15б}$$

Остановимся подробнее на преобразованиях плотности тока. 4-ток образован плотностью тока и плотностью заряда. То, что ток и плотность заряда объединились в один 4-вектор, вполне естественно. Если говорить о системах отсчета, находящихся в относительном движении, то заряд может покоиться лишь в одной

(«собственной») системе отсчета. Во всех других ИСО заряд движется и с точки зрения этих систем представляет собой уже не только заряд, но и ток. Мы видим, как прост переход от покоящегося заряда (электростатика) к движущемуся (ток), — это просто переход от собственной системы отсчета заряда к любой другой ИСО. Когда ток возникает при перемещении зарядов вместе с движущейся средой или телами, говорят о конвекционном токе. При переходе от собственной системы к произвольной ИСО речь как раз и идет о *конвекционном токе*.

В формулу $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ входит плотность именно тех зарядов, скорость которых равна \mathbf{v} . Иначе могут возникнуть недоразумения. В металлах, например, идет ток, хотя $\rho = 0$. Действительно, в металлах суммарная плотность заряда, складывающаяся из плотностей зарядов ионов и свободных электронов, равна нулю: $\rho = \rho_+ + \rho_- = 0$. Но ток, конечно, может идти, если есть регулярное движение электронов: $\mathbf{j} = \rho_+ \mathbf{v}_+ + \rho_- \mathbf{v}_- = \rho_- \mathbf{v}_-$, потому что скорость регулярного движения ионов равна нулю.

Из формул (6.15) мы сразу получим конвекционный ток при переходе от «собственной» системы заряда. Итак, пусть в системе K' задана плотность заряда ρ' , а тока нет ($\mathbf{j}' = 0$). Следовательно, в системе K 4-плотность тока имеет компоненты $\vec{s}' (0, 0, 0, ic\rho' = ic\rho_0)$, т. е. $s'_1 = s'_2 = s'_3 = 0$, $s'_4 = ic\rho_0$. Тогда согласно (6.15а), например, в системе K

$$s_1 = \Gamma(-iVic\rho_0) = \Gamma V\rho_0, \quad s_2 = s_3 = 0, \quad s_4 = \Gamma ic\rho_0. \quad (6.16)$$

В развернутой форме последнее уравнение (6.16) дает

$$s_1 \equiv ic\rho = \frac{ic\rho_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Таким образом, мы приходим к закону преобразования плотности заряда при переходе от «собственной» системы, где заряды покоятся, к системе, относительно которой заряды движутся со скоростью V :

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (6.17)$$

Из первого уравнения (6.16) получаем плотность тока

$$s_1 = j_x = \frac{\rho_0 V}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \rho V. \quad (6.18)$$

Ток, связанный с движением заряженной среды или заряженного тела, как мы сказали, называется конвекционным током.

Смысл равенства (6.18) очень прост. Скорость заряда, покоящегося в K' , относительно системы K равна V (это скорость системы K' ; то же вытекает и из релятивистской формулы преобра-

зования скоростей (3.27)). Поэтому (6.18) представляет собой просто конвекционный ток. Что касается изменения плотности заряда (6.17), то оно связано с изменением объема (плотность — это заряд единицы объема). Так как объем преобразуется по закону

$$d\mathcal{V} = d\mathcal{V}'_0 \sqrt{1 - V^2/c^2},$$

а речь идет об одном и том же физическом объеме, содержащем все тот же заряд de , то

$$\rho_0 = \frac{de}{d\mathcal{V}'_0}, \quad \text{а } \rho = \frac{de}{d\mathcal{V}} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{de}{d\mathcal{V}'_0} = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \rho_0 \Gamma.$$

Конечно, полный заряд в заданном объеме остается неизменным в любой системе отсчета:

$$\rho_0 d\mathcal{V}'_0 = \rho d\mathcal{V}. \quad (6.19)$$

Равенство (6.19) выражает инвариантность заряда, заключенного в данном объеме. С помощью (6.17) можно иначе представить 4-вектор \vec{s} . Рассмотрим в системе K небольшой элемент объема движущейся заряженной среды. Тогда для сопутствующей этому элементу системы отсчета K^0 скорость элемента $v = 0$, $\rho = \rho_0$. В системе K плотность $\rho = \rho_0 \gamma$ и, следовательно, $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho_0 \gamma \mathbf{v}$. Тогда $\vec{s}(\rho_0 \gamma \mathbf{v}, \rho_0 i c \gamma) = \rho_0 \vec{V}$, где \vec{V} — 4-скорость элемента среды. Итак,

$$\vec{s} = \rho_0 \vec{V}, \quad s_i = \rho_0 u_i. \quad (6.20)$$

Для \vec{s}^2 получаем

$$\vec{s}^2 = \rho_0^2 \gamma^2 (v^2 - c^2) = -\rho_0^2 / c^2. \quad (6.21)$$

4-вектор \vec{s} — времениподобный вектор; это обстоятельство отражает тот факт, что скорость заряда v всегда меньше c .

Если в системе K' имеется незаряженный проводник, по которому идет ток, т. е. в системе K'

$$\vec{s}_0 (j_{x_0}, j_{y_0}, j_{z_0}, i c \rho_0 = 0), \quad (6.22)$$

то в K обнаруживается некоторая плотность заряда ρ . В самом деле, согласно (6.15)

$$s_1 = \Gamma j_{x_0}, \quad s_2 = j_{y_0}, \quad s_3 = j_{z_0}, \quad s_4 \equiv i c \rho = \Gamma i B j_{x_0}. \quad (6.23)$$

Первые три формулы (6.23) определяют значения тока в системе K , последняя определяет плотность заряда в системе K :

$$\rho = \Gamma \frac{B}{c} j_{x_0}. \quad (6.24)$$

Следовательно, наблюдатель в K обнаружит плотность ρ , хотя в системе K' плотность заряда равнялась нулю. Нетрудно дать геометрическую интерпретацию этого результата. Пусть проводник покоится в системе K ; ионы проводника неподвижны, а электроны перемещаются с некоторой средней скоростью v . В системе K мировые линии ионов представляют собой прямые, параллельные оси τ , а мировые линии электронов — прямые, составляющие с осью τ некоторый угол $\vartheta = \text{arctg}(v/c)$.

На рис. 6.1 изображены системы отсчета $K(x, \tau)$ и $K'(x', \tau')$, мировые линии ионов (пунктир) и мировые линии электронов (тонкие сплошные прямые, наклоненные под углом ϑ к оси τ). Поскольку металл в среднем нейтрален, то из каждого участка проводника должно выходить равное количество мировых линий ионов и электронов. Плотность заряда должна измеряться одновременно в каждой системе отсчета. В системе K она определяется числом мировых линий ионов и электронов, пересекающих единицу длины в этой системе. Например, плотность заряда определяется числом мировых линий ионов (взятым со знаком «+») и числом мировых линий электронов (взятым со знаком «-»), проходящих через OA . Масштабная гипербола отсекает на осях x и x' единичные отрезки. К этим единичным отрезкам и нужно относить заряды. Но в системе K' плотность заряда нужно подсчитывать одновременно для всего проводника. Одновременные события в K' лежат на прямых, параллельных оси x' , в частности на самой оси x' . Однако из рис. 6.1 видно, что на единичном отрезке OA' положительных зарядов больше, чем отрицательных. Поэтому проводник окажется положительно заряженным в системе K' , хотя в системе K он был нейтральным. Конечно, если взять замкнутый проводник с током, то и в системе K' его суммарный заряд останется равным нулю, однако в системе K' возникнет

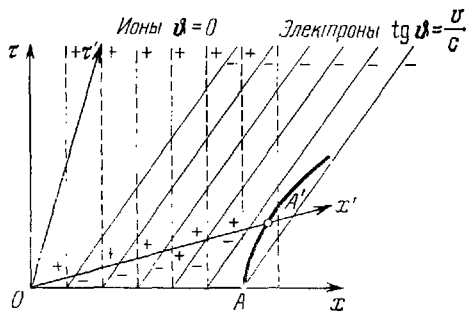


Рис. 6.1. Диаграмма Минковского, поясняющая появление плотности заряда в системе K' у проводника с током, плотность заряда в котором в системе K равна нулю. В проводнике суммарная плотность заряда, обусловленная зарядами ионов и электронов, равна нулю. Ток создается движением электронов, ионы неподвижны. На рисунке мировые линии ионов изображены пунктирными прямыми, а мировые линии электронов — наклонными сплошными линиями. Кроме системы отсчета K (оси x, τ) отмечена и система отсчета K' (оси x', τ'); проведена также масштабная гипербола, отсекающая единичные отрезки на осях x и x' . Так как плотность заряда должна определяться во всех точках одновременно, то ее нужно определять для всех точек тела на оси x или x' соответственно. Видно, что если единичный отрезок в системе K содержит равное число ионов и электронов, то единичный отрезок в K' содержит больше ионов, чем электронов. Это и означает появление положительной плотности заряда в системе K' .

электрический дипольный момент, которого в системе K не было (см. § 6.9 и рис. 6.4).

§ 6.3. Тензор электромагнитного поля. В электродинамике напряженность электрического поля \mathbf{E} и магнитную индукцию \mathbf{B} удобно выражать через векторный и скалярный потенциалы \mathbf{A} и φ по формулам *)

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \partial \mathbf{A} / \partial t. \quad (6.25)$$

Перепишем эти формулы, используя компоненты 4-потенциала, причем будем выписывать пока соотношения для комплексного 4-пространства:

$$B_x \equiv B_1 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3}, \quad (6.26)$$

$$E_x \equiv E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{c}{i} \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} ic = ic \left(\frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \right). \quad (6.27)$$

Последние члены в равенствах (6.26) и (6.27) записаны на основании определения компонент 4-потенциала. Аналогично, используя компоненты $\vec{\Phi}$, можно записать и остальные компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} . Мы получим формулы, аналогичные (6.26) и (6.27), из которых следует, что все компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} можно выразить через некоторые комбинации производных от компонент 4-вектора $\vec{\Phi}$ по четырехмерным координатам. Эти комбинации образуют антисимметричный 4-тензор второго ранга **)

$$F_{ik} = c \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \right) \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \quad (6.28)$$

Прежде чем обсуждать математические особенности и смысл выражения (6.28), мы должны остановиться на том, как выглядит этот же самый переход в случае действительного 4-пространства. Как мы указывали, в этом случае уже приходится различать ко- и контравариантные компоненты векторов и тензоров. Тензор электромагнитного поля (6.28) удобнее записать в ковариантных компонентах. Тогда, если контравариантными компонентами вектора $\vec{\Phi}$ были компоненты (Φ^0, \mathbf{A}) , то ковариантными компонентами

*) В предыдущих главах мы обозначали буквой V отношение скорости координатной системы к скорости света. Здесь нам необходимо ввести вектор \mathbf{V} — магнитную индукцию и ее проекции V_x, V_y, V_z . Во избежание недоразумений в формулах перехода в этой главе мы будем использовать обозначение $\mathbf{V} = V/c$, за исключением случаев, где недоразумения исключены.

**) Как и в большинстве книг, где излагается релятивистская электродинамика, мы используем индексы i и k , несмотря на то что рядом то и дело появляется мнимая единица, тоже обозначаемая через i . Нужно надеяться, что это не вызовет недоразумений у читателя.

будут $(\Phi^0, -A)$. Дифференцирование по контравариантным координатам приводит снова к ковариантным компонентам (см. Приложение I, § 8). Таким образом, (6.26) меняет только знак, а (6.27) запишется, если иметь в виду, что $\varphi = c\Phi_0$, $A_x = -\Phi_1$, $t = x^0/c$, $x = x^1$, так:

$$E_x \equiv E_1 = -c \frac{\partial \Phi_0}{\partial x^1} + c \frac{\partial \Phi_1}{\partial x^0} = c \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x^0} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial x^1} \right). \quad (6.27')$$

Таким образом, в случае действительного 4-пространства мы вводим ковариантный антисимметричный 4-тензор второго ранга:

$$F_{ik} = c \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^k} \right), \quad (6.28')$$

по внешнему виду совпадающий с (6.28). Смысл введения (6.28) или (6.28') очень примечателен. Два максвелловских вектора поля E и B в 4-пространстве могут быть выражены единым образом через некоторую комбинацию пространственно-временных производных от 4-вектора потенциала $\vec{\Phi}$. Для нас самым существенным является поведение величин F_{ik} при переходе от одной ИСО к другой. Но их преобразование находится совсем просто: величины F_{ik} образуют тензор, поскольку нетрудно убедиться в том (см. Приложение I, § 3), что производные от компонент 4-векторов по координатам преобразуются по правилу преобразования тензоров. Если индексам i и k в (6.28) и (6.28') придать независимо все значения от 1 до 4 (и от 0 до 3 соответственно), мы получим 16 значений F_{ik} (четыре из которых равны нулю), выраженных через компоненты E и B . Запишем эти компоненты в виде матриц:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (a)$$

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & cE_x & cE_y & cE_z \\ -cE_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -cE_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -cE_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (б)$$

Мы видим, что компоненты напряженности электрического поля и магнитной индукции являются компонентами одного 4-тензора электромагнитного поля. Как обычно, в обозначении F_{ik} первый индекс, i , указывает строку, а второй, k , — столбец матрицы F_{ik} .

Часто для сокращения тензор (6.29а) записывают в виде $\mathfrak{F} = (cB, -iE)^*$, а тензор (6.29б) — в виде $\mathfrak{F} = (E, cB)$,

*) В гл. 5 готической буквой \mathfrak{F} обозначаются компоненты 4-силы. В этой главе эта же буква используется исключительно для обозначения тензора.

подразумевая при этом расположение компонент векторов E и B , принятое соответственно в (6.29а) и (6.29б).

Результат, который мы получили, непохож на привычную трехмерную картину. В теории Максвелла говорят обычно о векторах поля. Действительно, векторы E и B являются 3-векторами, пока речь идет лишь о преобразовании системы координат (т. е. о поворотах координатной системы). Как только мы переходим к системам отсчета, находящимся в относительном движении, картина резко меняется. В 4-пространстве E и B уже не векторы, даже не четырехмерные. Хотя векторы E и B выражаются через компоненты четырехмерного потенциала, но сами по себе трехмерные векторы E и B нечем дополнить до 4-векторов. В 4-пространстве электромагнитное поле представляет собой единую величину, более сложную по своей математической природе, чем 4-вектор. Поля E и B слились в один 4-тензор, который называется *тензором электромагнитного поля*.

Появление одного 4-тензора вместо двух трехмерных векторов, описывающих электромагнитное поле, имеет ясный физический смысл. Электрическое и магнитное поля неразрывно связаны между собой, а «появление» или «исчезновение» одного из полей просто связано с выбором системы отсчета. Например, «чистое» электрическое поле, порождаемое зарядом, возникает в очень специальных условиях, когда заряд рассматривается в той системе, где он покоится. Однако в любой другой инерциальной системе этот заряд уже движется и, следовательно, образует электрический ток, который создает магнитное поле. С другой стороны, мы видели, что если по проводнику идет ток и проводник в некоторой системе отсчета представляется нейтральным, то в других инерциальных системах отсчета он представляется заряженным, и, следовательно, в этих системах появится электрическое поле.

Таким образом, достаточно, например, чтобы в системе K было лишь электрическое поле, чтобы в любой другой системе K' появилось еще и магнитное. Если в системе K есть только магнитное поле, то в любой другой системе K' появится и магнитное, и электрическое поля. Именно этот физический факт нельзя отразить в математическом аппарате, если поля E и B мы попытались бы сохранить как векторы. Мало того, что трехмерные векторы электромагнитного поля нечем дополнить до 4-векторов. Но, кроме того, если бы каждый из векторов E и B входил в «свой» 4-вектор, то при преобразованиях Лоренца каждый из векторов в «новой» системе выражался бы через компоненты «своего» вектора в «старой». Тем самым, векторы E и B оказались бы не связанными между собой. Опыт, однако, указывает на тесную связь между электрическим и магнитным полями, т. е. между векторами E и B .

Два трехмерных вектора обладают шестью независимыми компонентами. Антисимметричный 4-тензор второго ранга как раз обладает шестью независимыми компонентами. Мы как раз и обнаружили в (6.29 а, б), что поля \mathbf{E} и \mathbf{B} составили антисимметричный 4-тензор — тензор электромагнитного поля. Поскольку любая компонента тензора в новой системе отсчета есть линейная комбинация всех компонент тензора в старой системе отсчета, то при переходе от одной системы отсчета к другой электрическое поле может появиться за счет того, что в другой системе было только магнитное поле, и наоборот. В известном смысле электромагнитное поле является замкнутым образованием: если в какой-то инерциальной системе нет ни электрического, ни магнитного поля, то электромагнитное поле не возникает ни в какой другой инерциальной системе. Преобразованием компонент электромагнитного поля мы займемся в следующем параграфе, а сейчас коротко остановимся на описании электромагнитного поля в веществе.

Для описания поля в веществе, кроме средних полей \mathbf{E} и \mathbf{B} , необходимо ввести еще два вектора. В качестве этих векторов можно взять либо векторы электрической индукции \mathbf{D} и напряженности магнитного поля \mathbf{H} , либо вектор электрической поляризации \mathbf{P} и вектор намагничения \mathbf{M} . Четыре последних вектора связаны между собой соотношениями

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}. \quad (6.30)$$

Векторы \mathbf{H} и \mathbf{D} образуют свой особый тензор, компоненты которого принято обозначать буквой f_{ik} , а сам тензор сокращенно обозначают $\mathfrak{f} = (\mathbf{H}, -ic\mathbf{D})$. Этот тензор получается из (6.29а) заменой компонент $c\mathbf{B}$ на компоненты \mathbf{H} , а компонент $-i\mathbf{E}$ на компоненты $-ic\mathbf{D}$. Выпишем матрицу компонент этого тензора:

$$f_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

Наряду с тензором \mathfrak{f} полезно ввести еще тензор электрического и магнитного моментов вещества, определение которого легко следует из (6.30):

$$m_{ik} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} F_{ik} - f_{ik}. \quad (6.32)$$

Сокращенно его обозначают так: $\mathfrak{M} = (\mathbf{M}, ic\mathbf{P})$. В развернутой форме:

$$m_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & icP_x \\ -M_z & 0 & M_x & icP_y \\ M_y & -M_x & 0 & icP_z \\ -icP_x & -icP_y & -icP_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.33)$$

Уже сам факт возникновения тензоров (6.29), (6.31) и (6.33) указывает на тесную попарную связь величины $E, B; H, D$ и M, P . Мы выписали здесь тензоры f_{ik} и m_{ik} лишь для 4-комплексного пространства; соответствующие выражения для действительного 4-пространства читатель без труда напишет сам.

§ 6.4. Преобразование компонент электрического и магнитного полей. Особое удобство четырехмерного подхода состоит в том, что, коль скоро определена математическая природа той или иной физической величины (скаляр, 4-вектор, 4-тензор), вопрос о ее преобразовании при переходе от одной ИСО к другой решается автоматически. В механике мы имели дело с 4-векторами. Компоненты полей E и B, H и D и M и P , как мы установили, являются компонентами тензоров (6.29а, б), (6.31) и (6.33) соответственно.

Следовательно, компоненты трехмерных векторов преобразуются по правилу преобразования компонент тензора. Например, для компонент F_{ik} в 4-комплексном пространстве формулы преобразования запишутся так:

$$F_{ik} = \alpha_{im} \alpha_{kl} F'_{ml}, \quad (6.34)$$

где α_{im} — компоненты матрицы преобразования Лоренца (2.41а), а компоненты F'_{ik} определяются согласно (6.29а). Преобразуя компоненты матрицы (6.29б), нужно взять матрицу преобразований Лоренца в форме (2.41б).

Здесь следует сделать чисто методическое замечание. Часто в лекционном изложении избегают введения тензоров, чтобы не усложнять курс. Действительно, объяснить смысл введения тензоров и их особенности, скажем, за полчаса дело мудреное. Однако электромагнитное поле — это тензор, и от этого уйти нигде нельзя. Возникает старый вопрос: «не назвать ли нам кошку кошкой» сразу? Конечно, дело не в названии, а в формулах преобразования (6.34). Эти формулы можно и, вероятно, нужно получить максимально простым способом. Их легко получить, например, так: из (6.28) ясно, что величины F_{ik} представляют собой линейные комбинации производных компонент 4-вектора по 4-координатам; преобразование производных компонент вектора при преобразовании координат следует из элементарного анализа (см. Приложение I, § 3).

Для запоминания правила преобразования компонент тензоров полезно помнить, что они преобразуются как произведение соответствующих компонент векторов. Так или иначе, мы получаем формулы (6.34). И здесь все же самое время назвать тензор тензором, раскрыв, разумеется, смысл компонент тензора несколько односторонне — как производных компонент векторов по координатам.

Покажем на примере, как находятся формулы преобразования полей. Пойдем формулу преобразования для $B_z = F_{12}/c$. Формула преобразования F_{12} согласно (6.34) имеет вид

$$F_{12} = \alpha_{1m}\alpha_{2l}F'_{ml}. \quad (6.35)$$

Напомним, что здесь подразумевается суммирование по двум независимым парам индексов m и l , каждый из которых изменяется от 1 до 4. Таким образом, в сумму (6.35) входит шестнадцать членов, каждый из которых содержит произведение двух α_{ih} и одной из компонент F_{ih} . Очень рекомендуем читателю, который впервые сталкивается с такими формулами, выписать (один раз в жизни!) все шестнадцать членов. Удобнее всего это делать так. Сначала разворачиваем сумму, скажем, по m , придавая m значения 1, 2, 3, 4. Индекс l по-прежнему означает суммирование. Мы получим сумму из четырех членов, в которой уже индекса m не будет. Затем в каждом из этих четырех членов произведем суммирование по l . В итоге все шестнадцать членов будут выписаны. Затем в эти члены нужно уже подставлять α_{ih} из матрицы Лоренца (см. (2.41a)) и компоненты F_{ih} из (6.29a). Вы сразу обнаружите, что большинство членов суммы (6.35) равно нулю. Поэтому суммирование в (6.35) фактически можно производить значительно проще. Действительно, α_{1m} при m , изменяющемся от 1 до 4, — это просто элементы первой строки матрицы Лоренца (см. (2.41a)), а α_{2l} при $l = 1, 2, 3, 4$ — это элементы второй строки матрицы Лоренца. Но в первой строке матрицы отличны от нуля только элементы α_{11} и α_{14} . Следовательно, нужно брать для m лишь значения 1 и 4. Во второй строке отличен от нуля только элемент $\alpha_{22} = -1$. Следовательно, для l нужно взять только значение $l = 2$ и вместо (6.35) можно написать:

$$\begin{aligned} F_{12} &\equiv cB_z = \alpha_{22}\alpha_{1m}F'_{m2} = \alpha_{1m}F'_{m2} = \alpha_{11}F'_{12} + \alpha_{14}F'_{42} = \\ &= \Gamma \left\{ cB'_z - i \frac{V}{c} (iE'_y) \right\} = \frac{cB'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Сопоставляя второе и последнее равенства в последней цепи равенств и сокращая на c , получим

$$B_z = \frac{B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \Gamma \left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \right).$$

Аналогично получают формулы преобразования остальных компонент. Запишем их вместе:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \Gamma (E'_y + VB'_z), & E_z &= \Gamma (E'_z - VB'_y); \\ B_x &= B'_x, & B_y &= \Gamma \left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z \right), & B_z &= \Gamma \left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y \right). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Выпишем для дальнейшего также формулы преобразования для D и H :

$$\begin{aligned} D_x &= D'_x, & D_y &= \Gamma \left(D'_y + \frac{V}{c^2} H'_z \right), & D_z &= \Gamma \left(D'_z - \frac{V}{c^2} H'_y \right); \\ H_x &= H'_x, & H_y &= \Gamma (H'_y - V D'_z), & H_z &= \Gamma (H'_z + V D'_y). \end{aligned} \quad (6.37)$$

В точности те же самые результаты (6.36) и (6.37) получатся, конечно, и в действительном 4-пространстве. Мы не будем больше упоминать о нем, поскольку, во-первых, все равно впредь мы будем пользоваться окончательными формулами, а они одинаковы; во-вторых, существенное различие содержалось лишь при переходе к (6.27) и (6.27'). Далее все уже просто.

Из формул (6.36) видно, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета K' к другой K все векторы поля меняют свою величину и направление. Неизменными остаются только «продольные компоненты», т. е. компоненты по направлению относительного движения (вдоль оси x).

Разобьем электрическое и магнитное поля E и B на составляющие, параллельные и перпендикулярные направлению движения (единичные векторы i, j, k направлены по осям x, y, z соответственно), например:

$$E_{\parallel} = E_x i, \quad E_{\perp} = E_y j + E_z k.$$

Заметив, что вектор скорости V координатной системы K' имеет компоненты $(V, 0, 0)$, получим

$$\begin{aligned} [V B'] &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ V & 0 & 0 \\ B'_x & B'_y & B'_z \end{vmatrix} = -j V B'_z + k V B'_y = V (-j B'_z + k B'_y), \\ [V E'] &= V (-j E'_z + k E'_y). \end{aligned}$$

Тогда формулы (6.36) можно переписать в векторной форме:

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= (E' - [V B'])_{\parallel}, & E_{\perp} &= \Gamma (E'_{\perp} - [V B']_{\perp}); \\ B_{\parallel} &= \left(B' + \frac{1}{c^2} [V E'] \right)_{\parallel}, & B_{\perp} &= \Gamma \left(B'_{\perp} + \frac{1}{c^2} [V E']_{\perp} \right), \end{aligned} \quad (6.38)$$

Здесь, может быть, уместно напомнить, что все выражения вида $[V A]_{\parallel}$ равны нулю, а выражения вида $[V A]_{\perp}$ совпадают с самим векторным произведением для любого A . Формулы обратного преобразования получаются заменой стрихованных величин на нестрихованные и наоборот, а также изменением знака у V :

$$\begin{aligned} E'_{\parallel} &= (E + [V B])_{\parallel}, & E'_{\perp} &= \Gamma (E + [V B])_{\perp}; \\ B'_{\parallel} &= \left(B - \frac{1}{c^2} [V E] \right)_{\parallel}, & B'_{\perp} &= \Gamma \left(B - \frac{1}{c^2} [V E] \right)_{\perp}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Для нерелятивистских скоростей $\Gamma \sim 1$, и мы получаем из (6.38)

$$E = E' + [B'V], \quad B = B' - \frac{1}{c^2} [E'V]. \quad (6.40)$$

Здесь введены обозначения: $E = E_{\parallel} + E_{\perp}$ и $B = B_{\parallel} + B_{\perp}$. Формулы обратного преобразования от K к K' получаются, как всегда, заменой штрихованных величин на нештрихованные и наоборот с одновременным изменением знака у V :

$$E' = E + [VB], \quad B' = B - \frac{1}{c^2} [VE]. \quad (6.41)$$

В заключение выпишем формулы преобразования для D и H . Можно не проделывать выкладки, а вспомнить, что мы получили формулы преобразования для компонент тензора $\mathfrak{F} = (cB, -iE)$, а теперь нас интересуют такие же формулы для тензора $\hat{f} = (H, -icD)$. Для соответствующих компонент получим вместо (6.39)

$$\begin{aligned} D'_{\parallel} &= \left(D + \frac{1}{c^2} [VH] \right)_{\parallel}, & D'_{\perp} &= \Gamma \left(D + \frac{1}{c^2} [VH] \right)_{\perp}; \\ H'_{\parallel} &= (H - [VD])_{\parallel}, & H'_{\perp} &= \Gamma (H - [VD])_{\perp}, \end{aligned} \quad (6.42)$$

а для нерелятивистских скоростей, когда $\Gamma \sim 1$, вместо (6.41) получим

$$D' = D + \frac{1}{c^2} [VH], \quad H' = H - [VD]. \quad (6.43)$$

Допустим, что в системе K' магнитное поле $B' = 0$. Тогда в системе K связь между E и B оказывается очень простой. Заметим прежде всего, что $[VE] = [VE_{\perp}]$, поскольку $[VE_{\parallel}] = 0$. Из (6.38) получим

$$\begin{aligned} E &= E'_{\parallel} + \Gamma E'_{\perp}, \\ B &= \Gamma \frac{1}{c^2} [VE'] = \frac{\Gamma}{c^2} [VE'_{\perp}] = \frac{1}{c^2} [V, \Gamma E'_{\perp}] = \\ &= \frac{1}{c^2} [V, E'_{\parallel} + \Gamma E'_{\perp}] = \frac{1}{c^2} [VE]. \end{aligned} \quad (6.44)$$

58

Если же в системе K' равно нулю поле E' или в системе K равно нулю E , то, аналогично,

$$E = -[VB], \quad E' = [VB']. \quad (6.45)$$

В обоих случаях в любой инерциальной системе поля оказываются взаимно перпендикулярными. Как из релятивистских формул (6.38), так и из приближенных формул для малых скоростей (6.41) вытекает, что если в одной из систем (скажем, K) электрическое или магнитное поле равно нулю, то во всех других инерциальных системах отсчета электрическое и магнитное поля перпендикулярны друг другу. Этот же самый результат можно

получить, используя инварианты преобразований Лоренца (см. § 6.5).

Если в системе отсчета K' поля E' и B' взаимно перпендикулярны, то существует система отсчета K , в которой одно из полей исчезает. В § 6.5 будет показано, что преобразования Лоренца оставляют выражение $c^2 B^2 - E^2$ инвариантным. Следовательно, если в K' удовлетворяется условие $c^2 B'^2 - E'^2 < 0$, за счет выбора системы отсчета можно получить чисто электрическое поле, а если $c^2 B'^2 - E'^2 > 0$ — чисто магнитное. Покажем, как находится скорость V системы отсчета K . Пусть эта скорость в случае $c^2 B'^2 - E'^2 < 0$ перпендикулярна B' , а в случае $c^2 B'^2 - E'^2 > 0$ перпендикулярна E' . Тогда соответственно в первом случае $B_{\parallel} = 0$, а во втором $E_{\parallel} = 0$. Остается добиться в первом случае $B_{\perp} = 0$; для этого требуется выполнение условия (см. (6.38))

$$B'_{\perp} + (1/c^2)[V E']_{\perp} = 0.$$

Умножив обе части этого выражения векторно на E' и принимая во внимание соотношения $[V E']_{\perp} = [V E'_{\perp}]_{\perp} = [V E'_{\perp}]$, $[E' [V E'_{\perp}]]_{\perp} = V E'^2$, $B'_{\perp} = B'$, для скорости системы отсчета V получим

$$V = -(c^2/E'^2)[E' B']. \quad (6.46)$$

Аналогично, во втором случае приходим к формуле:

$$V = (1/B'^2)[E' B']. \quad (6.47)$$

Всегда можно найти такую инерциальную систему отсчета, в которой электрическое и магнитное поля в данной точке параллельны друг другу (см., однако, замечание о световых волнах в конце § 6.5). Очевидно, что если существует одна такая система, то существует и бесчисленное множество систем, обладающих этим же свойством. Действительно, в любой инерциальной системе отсчета K' , движущейся равномерно и прямолинейно относительно K по направлению, совпадающему с общим направлением E и B , поля E' и B' останутся параллельными, потому что компоненты полей, направленные вдоль движения, не изменяются.

Чтобы найти хотя бы одну систему, в которой поля параллельны, поступим следующим образом. Допустим, что в системе K поля параллельны, т. е. $[EB] = 0$. Направим скорость системы K' (в которой поля E' и B' уже не будут параллельными) перпендикулярно полям E и B ; направление скорости V примем за ось x , x' (рис. 6.2). Тогда $E_x = B_x = 0$ и равенство нулю векторного произведения эквивалентно равенству $E_y B_z - E_z B_y = 0$. Подставляя в это равенство значения компонент E и B , выраженные через компоненты E' и B' согласно (6.36), мы придем

к уравнению

$$\Gamma(E'_y + VB'_z) \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y\right) = \Gamma(E'_z - VB'_y) \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2} E'_z\right).$$

Из этого уравнения можно определить по заданным полям E' и B' скорость системы V . Если принять во внимание, что согласно (6.36) $E'_x = B'_x = 0$, то мы сразу можем найти и направление скорости V относительно E' и B' . Действительно, $[E'B'] = i(E'_y B'_z - E'_z B'_y)$, а $V = V \cdot i$, и поэтому можно, решая приведенное выше уравнение, записать

$$\frac{V/c^2}{1 - V^2/c^2} = - \frac{[E'B']}{c^2 B'^2 - E'^2}. \quad (6.48)$$

Тем самым, по заданным векторам E' и B' в системе K' можно перейти к системе K , в которой E и B будут параллельны. Направление скорости этой системы совпадает с направлением $[E'B']$, а величина скорости является одним из корней квадратного уравнения (6.48). Разумеется, из двух корней (6.48) выбирается тот, для которого $V < c$. Случай $E'B' = 0$ разобран выше: перейти к параллельным полям здесь уже нельзя, зато можно перейти либо к чисто магнитному, либо к чисто электрическому полю.

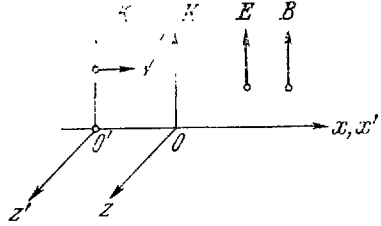


Рис. 6.2. Переход к системе отсчета K , в которой электрическое и магнитное поля оказываются параллельными.

§ 6.5. Инварианты электромагнитного поля. Хотя при преобразованиях Лоренца напряженность электрического поля E и индукция магнитного поля B меняются, существуют некоторые комбинации этих полей, остающиеся при преобразованиях Лоренца неизменными. Эти величины являются инвариантами антисимметричных 4-тензоров второго ранга. Таких инвариантов мы используем два (см. Приложение I, § 6):

$$I_1 = F_{ik}^2, \quad I_2 = F_{ih} F_{ih}^* - \frac{1}{2} \epsilon_{ihlm} F_{ih} F_{lm}.$$

Вспомогательные определения тензоров F_{ik} и F_{ih}^*

$$\mathfrak{F}(cB, -iE), \quad \mathfrak{F}^*(-iE, cB)$$

и принимая во внимание, что первый инвариант представляет собой просто сумму квадратов всех компонент F_{ik} , а второй — попарные произведения соответствующих компонент тензоров F_{ik} и F_{ih}^* , сразу напомним $I_1 = 2(c^2 B^2 - E^2)$, $I_2 = -2ic(BE)$.

Опуская несущественные постоянные множители, можно сказать, что электромагнитное поле обладает двумя инвариантами

(мы не будем выписывать инварианты тензора $\tilde{\mathfrak{F}}$ и смешанные инварианты \mathfrak{F} и \mathfrak{f} , поскольку они нам не понадобятся):

$$I_1 = c^2 B^2 - E^2, \quad I_2 = \mathbf{VE}.$$

Из наличия двух этих инвариантов вытекают следующие результаты, частью уже упомянутые выше. Если в какой-то ИСО поля \mathbf{E} и \mathbf{V} взаимно ортогональны ($\mathbf{EV} = 0$), то они ортогональны также в любой другой инерциальной системе отсчета. Если в какой-нибудь системе отсчета $\mathbf{E} = c\mathbf{V}$, то и во всех инерциальных системах отсчета это соотношение сохраняется.

Отметим сразу же, что для световой волны в вакууме оба инварианта равны нулю. Эти свойства, т. е. $\mathbf{V} \perp \mathbf{E}$ и $c\mathbf{V} = \mathbf{E}$, сохраняются в любой ИСО.

Ясно, что если $I_2 = 0$, а $I_1 \neq 0$, то всегда можно пайти систему отсчета, в которой либо $\mathbf{E} = 0$, либо $\mathbf{V} = 0$ (в зависимости от знака I_1), т. е. перейти либо к чисто магнитному, либо чисто электрическому полю. Обратно, если в какой-то системе либо \mathbf{E} , либо \mathbf{V} равно нулю, то во всех других инерциальных системах они будут взаимно ортогональны. Заметим, что величина \mathbf{VE} не является «настоящим» скаляром, так как она меняет знак при переходе от левой координатной системы к правой и наоборот. Истинным скаляром будет величина $(\mathbf{VE})^2$.

§ 6.6. Сила Лоренца. Займемся теперь силами, действующими на электрические заряды в электромагнитном поле. Чтобы не усложнять изложение, ограничимся объемным распределением зарядов *). В сопутствующей системе отсчета K' , где рассматриваемый элемент объема покоится вместе с зарядом, на заряд действует сила только со стороны электрического поля (магнитное поле на покоящийся заряд не действует). Сила, действующая на заряд, заключенный в единице объема, называется *плотностью силы*. Если плотность заряда в сопутствующей системе отсчета K' равна ρ_0 , плотность силы \mathbf{f}' определяется формулой

$$\mathbf{f}' = \rho_0 \mathbf{E}',$$

где \mathbf{E}' — напряженность электрического поля в K' .

Переход к любой другой ИСО связан с изменением полей \mathbf{E} и \mathbf{V} , причем если даже в сопутствующей системе магнитного поля не было, а было только электрическое, в любой другой ИСО появится магнитное поле. Найдем плотность силы \mathbf{f}' , выраженную через компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{V} в произвольной инерциальной системе. Рассмотрим сначала случай нерелятивистских скоростей, когда $\Gamma \sim 1$; при этом условия согласно (6.17) $\rho = \rho_0 \Gamma \approx \rho_0$, а согласно (6.44) $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{V}\mathbf{B}]$, поэтому

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}' \equiv \rho_0 \mathbf{E}' = \rho \{ \mathbf{E} + [\mathbf{V}\mathbf{B}] \}. \quad (6.49)$$

*) О точечных зарядах см., например, [8], § 29.

Формула (6.49) в последнем звене равенства определяет величину, которая обычно в электродинамике называется *плотностью силы Лоренца*. Сила Лоренца определяет силу, действующую на единицу объема, содержащего заряд, со стороны электрического и магнитного полей в системе K , относительно которой заряд движется со скоростью V . То, что сила f' в системе K' оказалась равной силе f в системе K , совсем не удивительно, поскольку согласно (5.34) в нерелятивистском случае величина силы при переходе от одной ИСО к другой не меняется.

Конечно, формула (6.49) может быть использована и в том случае, когда скорость движения зарядов в различных точках пространства различна. В этом случае для каждого элемента объема сопутствующая система отсчета будет своя и, соответственно, скорость V будет в различных точках различной.

Выведем выражение для силы Лоренца еще одним способом, который наглядно показывает, как образуется выражение (6.49). Пусть в сопутствующей системе K' есть электрическое и магнитное поля, задаваемые векторами E' и B' .

Представим каждое из этих полей, воспользовавшись принципом суперпозиции, в виде суммы двух полей:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad E'_1 &= 0, & B'_1 &= B^t; \\ \text{II} \quad E'_2 &= E', & B'_2 &= 0. \end{aligned}$$

Очевидно, что исходное поле представляет собой просто сумму двух полей: $E' = E'_1 + E'_2$, $B' = B'_1 + B'_2$. Однако формулы преобразования полей I и II порознь очень просты, и это позволит нам сразу получить ответ. В системе K'

$$f' = \rho_0 E' = \rho_0 E'_2. \quad (6.50)$$

По первой формуле (6.45) можно сразу записать электрическое поле I в системе K :

$$E_1 = -[V B_1],$$

где B_1 — магнитное поле в K . Согласно (6.36) электрическое поле II в системе K

$$E_2 = E'_{2x}i + \Gamma(E'_{2y}j + E'_{2z}k) \sim E'_2$$

в том случае, когда $\Gamma \sim 1$. Полное электрическое поле в K равно сумме E_1 и E_2 :

$$E = E_1 + E_2 = E'_2 - [V B_1]. \quad (6.51)$$

Магнитное поле B в системе K равно $B_1 + B_2$. Составив векторное произведение $[VB] = [VB_1] + [VB_2]$, мы видим из второй формулы (6.44), определяющей B_2 , что произведение $|[VB_2]| \sim \sim (V^2/c^2)$, и им в нерелятивистском случае можно пренебречь.

Поэтому $[\mathbf{V}\mathbf{B}_1] = [\mathbf{V}\mathbf{B}]$, и из (6.51) мы получаем силу Лоренца (6.49).

Если в системе K электрическое поле равно нулю ($\mathbf{E} = 0$), а магнитное поле отлично от нуля, то из (6.45) следует, что $\mathbf{E}' = -[\mathbf{V}\mathbf{B}']$; таким образом, сила Лоренца, которая выглядит в K как сила, действующая со стороны чистого магнитного поля, в сопутствующей системе K' выглядит как сила, действующая со стороны чистого электрического поля. На этих примерах еще раз видно единство электромагнитного поля и относительность его разделения на электрическое и магнитное поля.

Здесь уместно сказать два слова о силовых линиях поля. В каждой системе отсчета векторному полю можно сопоставить семейство векторных силовых линий. Формально эти линии определяются как кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора поля в этой точке. Силовые линии — полезное вспомогательное понятие, позволяющее наглядно представить характер поля. Но, в отличие от представлений прошлого века, этим линиям никто уже не придаст физического смысла.

Допустим, что движется заряд или постоянный магнит. Стоит ли говорить, что вместе с ними движется поле и силовые линии этого поля?

Поле — это способ описания того, что происходит в данной точке пространства. При движении магнита происходит просто изменение поля в данной точке с течением времени. И все же для движения заряда или магнита с постоянной скоростью говорить о движении поля допустимо, поскольку это поле движется вместе с ними как целое. Скорость переноса поля — это скорость движения заряда или магнита. Однако о движении силовых линий лучше не говорить — скорость движения силовых линий не имеет физического смысла. Вспомогательный характер силовых линий особенно хорошо виден из того, что для одного из полей они просто могут исчезнуть в какой-то системе отсчета.

Для иллюстрации относительного характера сил, действующих в электромагнитном поле, разберем еще один пример. Рассмотрим цилиндрический проводник, по которому идет ток, и отрицательный заряд q , движущийся параллельно этому проводнику со скоростью V (рис. 6.3). Систему K мы свяжем с проводником, систему K' — с зарядом. В системе K на заряд действует сила Лоренца, обусловленная магнитным полем и направленная перпендикулярно оси проводника. Следовательно, заряд приближается к проводнику. Но в системе K' частица покоится и магнитное поле не оказывает действия на частицу. За счет чего заряд может изменить свое движение с точки зрения K' ?

Здесь необходимо вернуться к микроскопическому описанию того, что происходит в проводнике. Ток в проводнике образуется

за счет движения свободных электронов — положительные ионы и связанные (валентные) электроны перемещаться по проводнику не могут. Пусть плотность электронов проводимости равна ρ_- , а их скорость в K (относительно проводника) равна v_- . Плотность неподвижных зарядов равна ρ_+ , а в силу нейтральности проводника $\rho_+ + \rho_- = 0$. Поскольку проводник нейтрален, вне

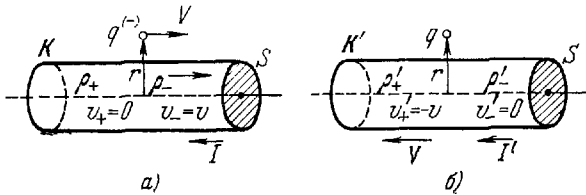


Рис. 6.3. Взаимодействие заряда q , движущегося со скоростью V параллельно проводнику, по которому идет ток, и тока. а) В системе K проводник покоится, а заряд и электроны движутся со скоростью v . б) В системе K' проводник движется со скоростью V а электроны и заряд покоятся.

его электрическое поле отсутствует, и сила, действующая на заряд q , обусловлена только магнитным полем:

$$F = q[VB].$$

Величина магнитного поля, создаваемого прямолинейным током на расстоянии r от его оси, известна:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

где r — расстояние от оси в плоскости, перпендикулярной направлению тока; вектор B совпадает с касательной к окружности, лежащей в той же плоскости, с центром на оси тока. Направление вектора B определяется по правилу буравчика. Таким образом, сила, действующая на заряд, направлена к проводнику и равна

$$F = \frac{qV\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2IqV}{r}.$$

Ток можно выразить через скорость электронов проводимости v_- , их плотность и площадь поперечного сечения S :

$$I = jS = \rho_- v_- S,$$

откуда

$$F = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_- S}{r} \frac{Vv}{c^2} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_+ S}{r} \frac{V^2}{c^2}, \quad (6.52)$$

если для простоты будем считать равными скорости электронов в металле и заряда q , т. е. положим $V = v_-$.

Теперь рассмотрим ту же самую картину в системе K' . В K' заряд q и свободные электроны неподвижны. Однако теперь уже движутся относительно заряда q заряды, связанные с проводником,

плотность которых равна ρ_+ . Они создают некоторое магнитное поле B' , но оно не действует на заряд q , поскольку в K' он неподвижен. Отсюда сразу ясно, что в системе K' должно появиться электрическое поле, потому что и в K' заряд должен отклоняться к оси. Его происхождение легко понять из полученных нами ранее результатов. В системе K' электроны проводимости покоятся,

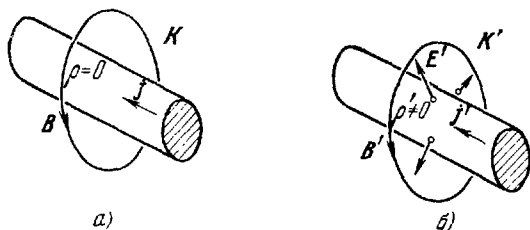


Рис. 6.4. а) В системе K плотность зарядов ρ ($\rho = \rho_+ + \rho_-$) равна нулю, а плотность тока отлична от нуля и равна j . Поэтому электрического поля нет, есть только магнитное поле B . б) В системе K' возникает плотность зарядов ρ' , а плотность тока становится равной j' . Магнитное поле равно B' , но, кроме него, появляется и электрическое поле E' .

поэтому $\rho_- = \Gamma\rho'_-$ (см. (6.17)). В системе K' положительные заряды, связанные с проводником, движутся со скоростью $-V$, поэтому $\rho'_+ = \Gamma\rho_+$ (в K эти заряды покоились). Результирующая плотность заряда ρ' в K' равна $\rho'_+ + \rho'_-$, поэтому

$$\rho' = \rho_-/\Gamma + \Gamma\rho_+ = \rho_+ (\Gamma - 1/\Gamma) = \Gamma\rho_+ B^2,$$

где учтено, что $\rho_+ = -\rho_-$; эта формула совпадает с (6.24). Следовательно, движущийся проводник заряжен положительно с объемной плотностью ρ' . Но электрическое поле однородно заряженного цилиндра также известно из курса электродинамики. Оно лежит в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра, и направлено по лучам, исходящим из оси цилиндра. Его величина

$$E' = \frac{\rho' S}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_+ S \Gamma B^2}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Это значит, что сила, действующая на отрицательно заряженный заряд q , направлена к проводнику, а ее величина в K' равна

$$F' = qE' = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_+ S}{r} \Gamma B^2.$$

Сравнивая этот результат с (6.52), мы видим, что в нерелятивистском приближении ($\Gamma \sim 1$) эти силы равны. Вспоминая, что силы преобразуются согласно (5.34), мы обнаруживаем, что оба способа описания наблюдаемого явления дают одинаковые результаты при любой скорости V . Результаты, относящиеся к полям в системах K и K' , пояснены на рис. 6.4.

В заключение отметим, что все результаты, касающиеся сил, действующих на объемные заряды со стороны электромагнитного поля, получаются совсем просто, если плотность силы Лоренца (6.49)

$$\mathbf{f} = \rho \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}] \}$$

записать в четырехмерной форме. Чтобы перейти к четырехмерной записи, перепишем компоненту силы Лоренца по оси x так:

$$\begin{aligned} f_x = f_1 &= \rho E_x + \rho v_y B_z - \rho v_z B_y = \left(-\frac{is_4}{c} \right) i F_{14} + s_2 \frac{F_{12}}{c} - s_3 \left(-\frac{F_{13}}{c} \right) = \\ &= \frac{1}{c} (F_{12}s_2 + F_{13}s_3 + F_{14}s_4) = \frac{1}{c} F_{1k}s_k. \end{aligned}$$

В этой цепи равенств учтено, что

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{i}{c} s_4, & \rho v_y &= s_2, & \rho v_z &= s_3, \\ B_z &= \frac{F_{12}}{c}, & B_y &= -\frac{F_{13}}{c}, & F_{14} &= 0. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения получаются для $f_y = f_2$ и $f_z = f_3$. Отсюда ясно, что 4-вектор плотности силы, действующей на заряд в электромагнитном поле, который мы будем обозначать через \vec{f} , имеет компоненты *)

$$f_i = \frac{1}{c} F_{ik}s_k. \quad (6.53)$$

Мы уже подчеркивали, что разделение сил, действующих на заряд со стороны электрического и магнитного полей, на части $\rho\mathbf{E}$ и $\rho[\mathbf{v}\mathbf{B}]$ относительно. Обе эти силы составляют единое целое и, естественно, сливаются в одно четырехмерное выражение (6.53).

Первые три компоненты плотности, как мы видели, дают обычное трехмерное выражение (6.49). Найдем четвертую составляющую:

$$f_4 = \frac{1}{c} F_{4k}s_k = \frac{1}{c} (F_{41}s_1 + F_{42}s_2 + F_{43}s_3) = \frac{i\rho}{c} (\mathbf{v}\mathbf{E}).$$

Величина $\rho(\mathbf{v}\mathbf{E})$ имеет простой смысл, который сразу раскрывается, если обе части равенства (6.49) умножить скалярно на \mathbf{v} . Принимая во внимание, что $[\mathbf{v}\mathbf{B}] \cdot \mathbf{v} = 0$, получим

$$(\mathbf{f}\mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v}\mathbf{E}).$$

Левая часть последнего равенства представляет собой мощность силы Лоренца в единице объема (силы, действующие со

*) Нужно надеяться, что читатель не забудет о том, что буква F с двумя индексами внизу — это компонента тензора \vec{f} . Компоненты 4-плотности силы имеют один индекс внизу.

стороны магнитного поля, работы не совершают):

$$f_4 = \frac{i}{c} (fv).$$

Таким образом, мы пришли к 4-вектору плотности силы, компоненты которого мы выпишем вместе:

$$\vec{f} \left\{ \begin{array}{cccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ f_x & f_y & f_z & \frac{i}{c} (fv) \end{array} \right\}. \quad (6.54)$$

Рассмотрим силу, действующую на единицу объема, содержащего заряд ρ_0 , со стороны электромагнитного поля, в сопутствующей заряду системе отсчета K^0 . Тогда $\vec{f}(\rho_0 \mathbf{E}', 0)$. Если перейти к любой другой системе отсчета K , то

$$f_1 = f'_1, f_2 = \Gamma f'_2, \quad f_3 = \Gamma f'_3, \quad f_4 = -iV\Gamma f'_4 = -i\frac{V}{c} \Gamma \rho_0 E'_x.$$

Здесь получены формулы для плотности силы в системе K , выраженные через поля в системе K' . Обычно плотность силы выражают через величины, отнесенные к той системе, в которой определяется и плотность силы. Если воспользоваться (6.17) и (6.36), то для нерелятивистских скоростей (пренебрегая членами V^2/c^2) получим $\vec{f}(\rho(\mathbf{E} + [\mathbf{V}\mathbf{B}]), i/c \rho(\mathbf{E}\mathbf{v}))$.

В заключение выпишем уравнение движения заряженной частицы в четырехмерной форме:

$$\frac{d}{d\tau} (mu_i) = \frac{1}{c} F_{ik} s_k. \quad (6.55)$$

§ 6.7. Ковариантность системы уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла исчерпывающим образом определяют поведение электромагнитного поля. Они были написаны задолго до возникновения теории относительности и, конечно, до того, как были найдены преобразования Лоренца. Согласно принципу относительности вид уравнений Максвелла должен оставаться неизменным во всех инерциальных системах отсчета. Следовательно, уравнения Максвелла должны быть ковариантными относительно преобразований Лоренца. Оказалось, что система уравнений Максвелла в том самом виде, в котором она была написана ее создателем, удовлетворяет этим требованиям. Для того чтобы установить это, необходимо систему уравнений Максвелла, записываемую обычно в виде системы трехмерных уравнений, переписать в четырехмерной форме. Этим мы сейчас и займемся. Как известно, система уравнений Максвелла имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}}, \quad (\text{a}) \quad \left| \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho; \quad (\text{б}) \quad (6.56)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}, \quad (\text{a}) \quad \left| \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (\text{б}) \quad (6.57)$$

Мы разбили уравнения на две строчки, объединив уравнения для средних значений электрического и магнитного полей E и B и уравнения для вспомогательных векторов H и D .

Чтобы записать уравнения (6.56) и (6.57) в четырехмерном виде, нам понадобятся тензоры (6.29а) и (6.31); мы используем также определение 4-вектора плотности тока (6.12а). Заметим, кстати, для будущего, что в вакууме тензоры \mathfrak{F} и \mathfrak{f} связаны соотношением

$$\mathfrak{F} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathfrak{f}. \quad (6.58)$$

Уравнения (6.56), естественно, могут быть выражены через тензор (6.31), а уравнения (6.57) — через тензор (6.29а).

Рассмотрим x -компоненту уравнения (6.56а):

$$\dot{D}_x - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -j_x. \quad (6.59)$$

Вспоминая, что согласно (6.12а) $j_x = s_1$, и используя первую строчку (6.31) наряду с определениями $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$,

мы перепишем (6.59) в виде $-\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} - \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} = -s_1$. Для двух

других компонент мы получим аналогичные выражения, которые можно в общем виде записать так ($i = 1, 2, 3$):

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = s_i \quad (6.60)$$

(суммирование по k от 1 до 4). Легко убедиться в том, что при $i = 4$ мы получаем (6.56б). Таким образом, уравнения (6.56) переписываются в виде (6.60), но уже через компоненты 4-тензора (6.31).

Рассмотрим теперь четверку уравнений (6.57). Например, x -компонента уравнения (6.57а) переписывается так:

$$\dot{B}_x + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \quad (6.61)$$

Воспользовавшись тензором (6.29а), можно переписать (6.61) следующим образом:

$$i \left(\frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} \right) = 0. \quad (6.62)$$

Нетрудно обнаружить, что последовательные слагаемые в (6.62) получают циклической перестановкой трех индексов в каждом предыдущем слагаемом. Однако структура уравнения (6.62) станет совершенно прозрачной, если ввести тензор F_{ik}^* , дуальный тензору F_{ik} (см. Приложение I, § 6):

$$F_{ik}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{iklm} F_{lm}, \quad (6.63)$$

где e_{ikhlm} — совершенно антисимметричный единичный 4-тензор четвертого ранга. Легко убедиться в том, что дуальный тензор F_{ik}^* отличается от тензора F_{ik} лишь перестановкой компонент мнимой и действительной частей:

$$\mathfrak{F} = (c\mathbf{B}, -i\mathbf{E}), \quad \mathfrak{F}^* = (-i\mathbf{E}, c\mathbf{B}), \quad (6.64)$$

или в развернутой форме:

$$F_{ik}^* = \begin{pmatrix} 0 & -iE_z & iE_y & cB_x \\ iE_z & 0 & -iE_x & cB_y \\ -iE_y & iE_x & 0 & cB_z \\ -cB_x & -cB_y & -cB_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.65)$$

Используя этот тензор, пару уравнений Максвелла (6.57) можно записать в четырехмерной форме так:

$$\frac{\partial F_{ik}^*}{\partial x_k} = 0. \quad (6.66)$$

Убедимся в том, что (6.66) соответствует четырем уравнениям (6.57).

Уравнение (6.66) содержит в себе четыре уравнения ($i = 1, 2, 3, 4$). Рассмотрим, например, уравнение для $i = 1$:

$$\frac{\partial F_{1k}^*}{\partial x_k} = \frac{\partial F_{11}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{12}^*}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}^*}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}^*}{\partial x_4} = -i \frac{\partial E_z}{\partial y} + i \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial (cB_x)}{\partial (ict)} = 0,$$

или, иначе,

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad \text{т. е. } (\text{rot } \mathbf{E})_x = -(\dot{\mathbf{B}})_x.$$

Уравнение (6.66) при $i = 2, 3$ дает две остальные компоненты уравнения $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$. Остается лишь уравнение с $i = 4$:

$$\frac{\partial F_{4k}^*}{\partial x_k} = \frac{\partial F_{41}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}^*}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}^*}{\partial x_3} - \frac{\partial F_{44}^*}{\partial x_4} = -\frac{\partial (cB_x)}{\partial x} - \frac{\partial (cB_y)}{\partial y} - \frac{\partial (cB_z)}{\partial z} = 0;$$

мы получаем уравнение (6.57б): $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Таким образом, (6.66) содержит в себе уравнения Максвелла (6.57).

Довольно часто выражают уравнения (6.57) непосредственно через тензор F_{ik} . Нам такая запись понадобится, поэтому мы приведем и ее. Уравнения Максвелла (6.57) с равным правом можно записать как в форме (6.66), так и в виде уравнения, одно из которых мы получили в (6.62):

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = 0. \quad (6.67)$$

В уравнении (6.67) суммирование нет. Из четырех возможных значений индексов i, k, l выбираются три разных (читатель убедится, что если выбрать два из этих индексов одинаковыми, то, принимая во внимание антисимметрию тензора \mathfrak{F} ($F_{ik} = -F_{ki}$),

можно обнаружить, что соотношение (6.67) превратится в тождество). Как видно из структуры (6.67), распределение выбранной тройки чисел между индексами i, k, l несущественно. А это означает, что фактически в (6.67) содержится число независимых уравнений, равное числу сочетаний из четырех индексов по три $C_4^3 = C_4^1 = 4$. Убедиться в том, что из (6.67) следуют четыре уравнения (6.57), мы предоставляем читателю.

Теперь уже доказать ковариантность уравнений Максвелла совсем нетрудно. Мы убедились в том, что они могут быть записаны в виде (6.60), (6.66) или (6.60), (6.67). Но (6.60) и (6.66) представляют собой соотношения между 4-векторами, поскольку в Приложении I, § 5 доказано, что выражение $\partial f_{ih}/\partial x_h$ представляет собой вектор. Отличие (6.60) от (6.66) состоит лишь в том, что в правой части (6.66) стоит нулевой вектор. Что касается (6.67), то это соотношение явно записано в тензорной форме и поэтому ковариантно. Таким образом, уже из одной четырехмерной формы записи уравнений Максвелла видна их ковариантность.

Но система уравнений Максвелла не исчерпывается уравнениями (6.56) и (6.57). Закон сохранения заряда мы уже записали в ковариантной форме (см. стр. 176). Нам осталось лишь переписать в ковариантной форме «материальные уравнения».

§ 6.8. Уравнения Минковского для движущихся сред (преобразование материальных уравнений). В предыдущем параграфе мы убедились в том, что система уравнений Максвелла (6.56), (6.57) сохраняет свой вид во всех инерциальных системах отсчета. Однако уравнения Максвелла позволяют дать однозначную картину электромагнитных явлений лишь в том случае, когда заданы материальные уравнения, характеризующие ту среду, в которой разыгрываются электромагнитные явления. Как обычно, назовем систему отсчета, в которой среда (или участок среды) покоится, сопутствующей системой. Для однородной изотропной среды материальные уравнения в сопутствующей системе имеют вид

$$\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E}', \quad (6.68)$$

$$\mathbf{B}' = \mu \mathbf{H}', \quad (6.69)$$

$$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}', \quad (6.70)$$

причем диэлектрическая проницаемость ε , магнитная проницаемость μ и проводимость σ являются константами. Пусть рассматривается движение среды относительно «лабораторной» системы. В системе, сопутствующей среде, справедливы уравнения Максвелла для неподвижной среды. В силу принципа относительности материальные константы ε, μ, σ должны быть одинаковыми как для неподвижной среды в «лабораторной» системе, так и в системе отсчета, сопутствующей среде. Поскольку известны формулы пре-

образования векторов E , B , H и D , можно записать связь между ними в любой другой инерциальной системе, отличной от K' . Выпишем нужные формулы преобразования, разбив их на продольную и поперечную (по отношению к скорости системы отсчета V) части (см. § 6.4):

$$E'_{\parallel} = (E + [VB])_{\parallel}, \quad E'_{\perp} = \Gamma(E + [VB])_{\perp}; \quad (6.71)$$

$$B'_{\parallel} = \left(B - \frac{1}{c^2} [VE]\right)_{\parallel}, \quad B'_{\perp} = \Gamma \left(B - \frac{1}{c^2} [VE]\right)_{\perp}; \quad (6.71')$$

$$D'_{\parallel} = \left(D + \frac{1}{c^2} [VH]\right)_{\parallel}, \quad D'_{\perp} = \Gamma \left(D + \frac{1}{c^2} [VH]\right)_{\perp}; \quad (6.72)$$

$$H'_{\parallel} = (H - [VD])_{\parallel}, \quad H'_{\perp} = \Gamma(H - [VD])_{\perp}. \quad (6.73)$$

Еще раз напомним, что все выражения типа $[VA]_{\parallel}$ равны нулю для любого A , поскольку берется проекция на направление скорости, а векторное произведение перпендикулярно скорости V . Если подставить соответствующие выражения в (6.68) и (6.69), то как для продольных, так и для поперечных компонент (для которых множитель Γ сократится) мы придем к одним и тем же соотношениям, которые можно объединить следующим образом:

$$D + \frac{1}{c^2} [VH] = \varepsilon(E + [VB]), \quad (6.74)$$

$$B - \frac{1}{c^2} [VE] = \mu(H - [VD]). \quad (6.75)$$

Уравнения (6.74) и (6.75) носят название *уравнений Минковского*; ε и μ , входящие в эти формулы, — это диэлектрическая и магнитная проницаемости покоящейся среды. Существенным отличием (6.74) и (6.75) от (6.68) и (6.69) является то, что теперь уже в каждом из уравнений перепутываются все четыре вектора поля. Нетрудно с помощью (6.75) исключить B из (6.74) и получить уравнение для трех векторов E , D , H или же исключить D из (6.75), воспользовавшись (6.74).

Уравнения выглядят проще, если записать их отдельно для продольных и поперечных составляющих:

$$D_{\parallel} = \varepsilon E_{\parallel}, \quad B_{\parallel} = \mu H_{\parallel}, \quad (6.76)$$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \frac{V^2}{c^2}\right) D_{\perp} = \varepsilon \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) E_{\perp} + (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0) [VH], \quad (6.77)$$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \frac{V^2}{c^2}\right) B_{\perp} = \mu \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) H_{\perp} + (\varepsilon\mu - \varepsilon_0\mu_0) [VE].$$

Первое равенство (6.77) получается из (6.74), если в него подставить выражение для B из (6.75) и затем взять только поперечную составляющую получившегося соотношения (аналогично получается второе равенство в (6.77)).

Из этих формул видно, что если в сопутствующей системе K' для изотропной среды векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} , а также \mathbf{D} и \mathbf{E} совпадают по направлению, то в других системах отсчета это уже не имеет места.

Конечно, когда речь идет о движении среды, чаще всего интересен случай перелятивистских скоростей. Тогда, если в (6.77) пренебречь членами V^2/c^2 и $n^2 V^2/c^2$ по сравнению с единицей ($n = \sqrt{\epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0}$ — показатель преломления среды, см. гл. 7), формулы (6.76), (6.77) запишутся более просто:

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} + \frac{1}{c^2}(n^2 - 1)[\mathbf{V}\mathbf{H}], \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \frac{1}{c^2}(n^2 - 1)[\mathbf{V}\mathbf{E}]. \quad (6.78)$$

Эта форма материальных уравнений, записанных для движущейся среды, используется очень часто. Как это и должно быть согласно равноправию всех ИСО в вакууме, последние соотношения для этого случая переходят в (6.68) и (6.69).

Полезно переписать материальные уравнения (6.68) — (6.70) в четырехмерной тензорной форме. Мы не станем выводить эти уравнения, а просто выпишем их и затем проверим, что в той системе, где среда покоится, мы приходим к (6.68) — (6.70). Введем четырехмерную скорость среды $\vec{V}(\Gamma V, ic\Gamma)$, где мы пишем Γ , так как скорость тела или среды V мы считаем равной скорости системы отсчета K' . В сопутствующей системе K' 4-скорость \vec{V}' имеет компоненты $U'_1 = 0, U'_2 = 0, U'_3 = 0, U'_4 = ic$.

Как легко проверит читатель, тензорные уравнения

$$\frac{1}{c} f_{ik} U_k = \epsilon F_{ik} U_k, \quad (6.79)$$

$$\frac{1}{c} (F_{ik} U_l + F_{kl} U_i + F_{li} U_k) = \mu (f_{ik} U_l + f_{kl} U_i + f_{li} U_k), \quad (6.80)$$

$$s_i = \frac{\sigma}{c} F_{ik} U_k, \quad (6.81)$$

если подставить в них компоненты \vec{V}' , приводят к (6.68), (6.69) и (6.70) соответственно.

В уравнениях (6.79) и (6.80) ведется суммирование по k . Всего уравнений четыре, но для $i = 4$ мы получаем тождество, так что уравнений фактически три. В уравнении (6.80) нужно перебрать все сочетания i, k и l из четырех возможных значений 1, 2, 3, 4 по три. Всего таких сочетаний $C_4^3 = 4$, но сочетание 1, 2, 3 дает тождество, и опять мы приходим к трем уравнениям, как и должно быть. Получив правильные выражения для материальных уравнений в системе K' , мы убеждаемся в правильности тензорной записи.

Покажем применение тензорной записи на примере соотношения (6.81). Пусть в сопутствующей системе K' (там, где среда

покоится) существует плотность тока, а плотность заряда равна нулю, т. е. $s'_i (j'_1, j'_2, j'_3, 0)$. Скорость среды в системе K' есть $\vec{V}' (0, 0, 0, ic)$. Найдем компоненты s'_i :

$$s'_i = \frac{\sigma}{c} F'_{1k} U'_k = \frac{\sigma}{c} F'_{4i} U'_4 = \frac{\sigma}{c} (-iE'_i) (ic) = \sigma E'_i,$$

т. е. $j'_1 = \sigma E'_1$; аналогично окажется, что $j'_2 = \sigma E'_2$, $j'_3 = \sigma E'_3$. Четвертая компонента

$$s'_4 = \frac{\sigma}{c} F'_{4k} U'_k \equiv 0 \quad (s'_4 = ic\rho' = 0, F'_{44} = 0).$$

Но в той системе отсчета, относительно которой среда движется,

$$s_1 = \frac{\sigma}{c} F_{1k} U_k = \frac{\sigma}{c} (F_{12} U_2 + F_{13} U_3 + F_{14} U_4) = \frac{\sigma}{c} (-iE_x) ic\Gamma = \sigma \Gamma E_x,$$

$$s_2 = \frac{\sigma}{c} F_{2k} U_k = \frac{\sigma}{c} (F_{21} U_1 + F_{24} U_4) = \frac{\sigma}{c} (-cB_3 \Gamma V + (-iE_y) ic\Gamma) = \\ = \sigma \Gamma \{E_y + [V B]_y\},$$

$$s_3 = \sigma \Gamma \{E_z + [V B]_z\},$$

так как

$$U_1 = \Gamma V, \quad U_2 = U_3 = 0, \quad U_4 = ic\Gamma.$$

Окончательный результат очевиден:

$$\mathbf{j} = \sigma \Gamma (\mathbf{E} + [V \mathbf{B}]), \quad (6.82)$$

Его смысл вполне ясен: плотность тока в среде с проводимостью σ обусловлена величиной электрического поля в этой среде, которая согласно (6.41) как раз и является множителем при σ , если положить $\Gamma \sim 1$.

Четвертое уравнение определяет плотность заряда, связанную с током проводимости:

$$s_4 = ic\rho_{\text{пр}} = \frac{\sigma}{c} F_{4k} U_k = \frac{\sigma}{c} (i\Gamma E V) = i\Gamma \left(\frac{jV}{c} \right), \quad (6.83)$$

или

$$\rho_{\text{пр}} = \Gamma \frac{jV}{c^2}$$

в полном согласии с (6.24).

Теперь следует остановиться на том, как выглядит закон Ома для движущихся сред, т. е. материальное уравнение (6.70). Мы обнаружим, что конвекционный ток ρv и ток проводимости тесно переплетены между собой, как это сразу очевидно после объединения \mathbf{j} и $ic\rho$ в единый 4-вектор. Различие между конвекционным током и током проводимости обусловлено выбором системы отсчета. Естественно поэтому, что оба тока на равных правах порождают магнитное поле.

Будем считать, что ток проводимости представляет собой движение зарядов относительно среды, тогда как конвекционный ток возникает из-за наличия зарядов в среде благодаря движению самой среды.

Допустим, что в некоторой системе K' есть ток проводимости $\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'$ и, кроме того, плотность заряда ρ' . Эти величины совместно образуют 4-ток, который может быть по формулам (6.15а) преобразован к любой системе отсчета. Выразив компоненты \mathbf{j} и плотность ρ через \mathbf{j}' и ρ' в системе отсчета K' , мы получим

$$j_x = \Gamma(j'_x + V\rho'), \quad j_y = j'_y, \quad j_z = j'_z, \quad \rho = \Gamma\left(\rho' + \frac{V}{c^2} j'_x\right). \quad (6.84)$$

Из первой формулы (6.84) видно, что ток проводимости j_x включает в себя конвекционный ток $\Gamma V\rho' = V\rho$, и поэтому он уже не пропорционален σ . Это неудобно, потому что при $\sigma = 0$ ток проводимости должен обращаться в нуль. Как выделить ток проводимости в общем случае? Для этого вспомним, что если в K' есть плотность заряда $\rho' = \rho_0$, то в любой другой системе K мы получим 4-плотность тока (6.20):

$$s_i^{(\kappa)} = \rho_0 u_i, \quad (6.85)$$

где u_i — 4-скорость заряда. Этот ток следует назвать конвекционным, в связи с чем в (6.85) у s_i появился верхний индекс (κ). Допустим, что нам задан 4-ток с компонентами s_i ; мы хотим разложить его на сумму тока проводимости и конвекционного тока. Прежде всего выразим ρ_0 через \vec{s} и \vec{V} . Умножив обе части $s_i = \rho_0 u_i$ на соответствующие компоненты u_i и сложив, получим $s_k u_k = \rho_0 u_k^2$, но по (5.7) $u_k^2 = -c^2$, поэтому

$$\rho_0 = -\frac{s_k u_k}{c^2}. \quad (6.86)$$

Следовательно, конвекционный ток может быть записан в виде

$$s_i^{(\kappa)} = -\frac{s_k u_k}{c^2} u_i. \quad (6.87)$$

Чтобы получить компоненты 4-тока проводимости, нужно из компонент s_i вычесть компоненты (6.87):

$$s_i^{(n)} = s_i - s_i^{(\kappa)} = s_i + \frac{s_k u_k}{c^2} u_i. \quad (6.88)$$

С другой стороны, согласно (6.81) величина $s_i^{(n)}$ может быть записана в виде

$$s_i^{(n)} = \frac{\sigma}{c} F_{ik} u_k. \quad (6.89)$$

Приравняем эти выражения:

$$s_i + \frac{s_k u_k}{c^2} u_i = \frac{\sigma}{c} F_{ik} u_k. \quad (6.90)$$

Вспомяная определения $\vec{s} (j_x, j_y, j_z, ic\rho)$, $\vec{V} (\gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z, ic\gamma)$, мы получим в трехмерной форме

$$j + \gamma^2 v \left(\frac{jv}{c^2} - \rho \right) = \sigma \gamma \{ E + [vB] \}. \quad (6.91)$$

Выделим в соотношении (6.91) члены, пропорциональные проводимости σ . Умножим левую и правую части (6.91) на v . Вводя обычные обозначения γ и β , получим

$$\frac{jv}{c^2} = \rho \beta^2 + \frac{\sigma(Ev)}{c^2} \frac{1}{\gamma},$$

или же

$$\frac{jv}{c^2} - \rho = -\frac{\rho}{\gamma^2} + \frac{\sigma(Ev)}{c^2} \frac{1}{\gamma}. \quad (6.92)$$

Подставляя (6.92) в (6.91), получим окончательно

$$j = \rho v + \sigma \gamma \left\{ E + [VB] - \frac{v}{c^2} (Ev) \right\}. \quad (6.93)$$

Таким образом, «током проводимости» можно назвать величину $j^{(n)} = j - \rho v$. Часто пользуются обозначением E^* для поля, действующего в веществе, с точки зрения системы отсчета, относительно которой это вещество движется:

$$E^* = E + [VB]. \quad (6.94)$$

Тогда (6.93) можно переписать в виде

$$j^{(n)} = \sigma \gamma \left\{ E^* - \frac{v}{c^2} (E^*v) \right\}. \quad (6.95)$$

Эта формула очень напоминает формулу преобразования силы (5.35). Для того чтобы переход к уравнениям электродинамики движущихся сред был завершен, необходимо выяснить еще, как записать граничные условия, когда граница раздела сред движется. Условие непрерывности нормальных компонент индукции следует из уравнений $\text{div } D = 0$ и $\text{div } B = 0$, которые, согласно (6.66) и (6.60), сохраняют свой вид при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Поэтому на границе раздела

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad B_{n1} = B_{n2}. \quad (6.96)$$

Что касается граничных условий для тангенциальных компонент напряженностей полей, то, рассматривая сначала сопутствующую границе раздела систему отсчета K' , мы имеем в этой системе условие непрерывности тангенциальных компонент E' и H' . Но с точки зрения системы K , относительно которой граница раздела движется со скоростью u , поля E и H имеют вид (6.41) и (6.43):

$$E' = E + [uB], \quad H' = H - [uD]. \quad (6.97)$$

Проведем нормаль к поверхности раздела \mathbf{n} , а проекцию скорости \mathbf{u} на нормаль обозначим через u_n . Найдем проекции (6.97) на плоскость, перпендикулярную \mathbf{n} . Имея в виду, что $[\mathbf{nE}] = [\mathbf{n}, \mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t] = [\mathbf{nE}_t]$, мы запишем равенство $\mathbf{E}'_{t1} = \mathbf{E}'_{t2}$ в виде $[\mathbf{nE}'_{t1}] = [\mathbf{nE}'_{t2}]$, т. е.

$$[\mathbf{nE}_1] + [\mathbf{n}[\mathbf{uB}_1]] = [\mathbf{nE}_2] + [\mathbf{n}[\mathbf{uB}_2]],$$

или

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = \mathbf{u} (\mathbf{n} (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)) + (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) (\mathbf{u}\mathbf{n}).$$

Поскольку $\mathbf{nB}_1 = \mathbf{nB}_2$ (согласно (6.96)), окончательно получим

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = u_n (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \quad (6.98)$$

и аналогично

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = -u_n (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1). \quad (6.99)$$

Это и есть, наряду с (6.96), граничные условия для векторов поля.

§ 6.9. Преобразование электрического и магнитного моментов.

Объединение электрического и магнитного моментов \mathbf{P} и \mathbf{M} в один антисимметричный тензор (6.33) сразу же позволяет написать формулы преобразования компонент этих величин.

Обозначим через \mathbf{P}^0 и \mathbf{M}^0 поляризацию и намагничение, определенные в системе отсчета, сопутствующей веществу. Тогда для наблюдателя, относительно которого вещество движется со скоростью V , мы получим

$$\begin{aligned} M_x &= M_x^0, & M_y &= \Gamma (M_y^0 + VP_z^0), & M_z &= \Gamma (M_z^0 - VP_y^0), \\ P_x &= P_x^0, & P_y &= \Gamma \left(P_y^0 - \frac{V}{c^2} M_z^0 \right), & P_z &= \Gamma \left(P_z^0 + \frac{V}{c^2} M_y^0 \right). \end{aligned} \quad (6.100)$$

Из этих формул сразу выясняется связь между ранее введенными трехмерными векторами \mathbf{P} и \mathbf{M} . Здесь можно повторить все то, что ранее говорилось о связи между электрическим и магнитным полями. Как правило, намагничение всегда сопровождается поляризацией, и наоборот. Лишь в специально выбранной системе координат либо \mathbf{P} , либо \mathbf{M} равно нулю. Поляризованное, но не намагниченное тело с точки зрения наблюдателя, относительно которого тело движется, не только поляризовано, но и намагничено. Действительно, пусть в системе K' , относительно которой тело покоится,

$$\mathbf{M}^0 = 0, \quad \mathbf{P}^0 (P_x^0, P_y^0, P_z^0) \neq 0.$$

Тогда в системе K , относительно которой тело движется со скоростью V ,

$$\begin{aligned} P_x &= P_x^0, & P_y &= \Gamma P_y^0, & P_z &= \Gamma P_z^0, \\ M_x &= 0, & M_y &= \Gamma V P_z^0, & M_z &= -\Gamma V P_y^0. \end{aligned}$$

Следовательно, в системе K будет обнаружено намагничение тела. Если скорость движения тела нерелятивистская, т. е. $V/c \ll 1$ и $\Gamma \sim 1$, то

$$P = P^0, \quad \text{а} \quad M = [P^0 V].$$

Этот эффект был обнаружен в опытах Эйхенвальда (см. [13, 29]). Если, напротив, в системе K' , относительно которой тело покоится,

$$P^0 = 0, \quad M^0 (M_x^0, M_y^0, M_z^0) \neq 0,$$

то в системе K , относительно которой тело движется со скоростью V ,

$$\begin{aligned} M_x &= M_x^0, & M_y &= \Gamma M_y^0, & M_z &= \Gamma M_z^0, \\ P_x &= 0, & P_y &= -\Gamma \frac{V}{c^2} M_z^0, & P_z &= \Gamma \frac{V}{c^2} M_y^0. \end{aligned} \quad (6.101)$$

Следовательно, в системе K тело окажется также и поляризованным. Если скорость движения тела нерелятивистская, то

$$M = M^0, \quad P = -\left[M^0 \frac{V}{c^2} \right].$$

Это означает, например, что движущийся постоянный магнит несет с собой электрический момент, на чем основано используемое в технике явление униполярной индукции.

Приведем пример для иллюстрации этих выводов. Пусть по прямоугольному контуру $ABCD$ течет ток, плотность которого равна j , а сам контур движется относительно системы K со скоростью V . Свяжем с контуром систему K' (рис. 6.5). Согласно формуле (6.24) на стороне BC возникает $\rho > 0$, а на стороне AD возникает $\rho < 0$. Очевидно, что полный заряд, возникающий на контуре $ABCD$, равен нулю. Вместе с тем этот контур обладает электрическим моментом,

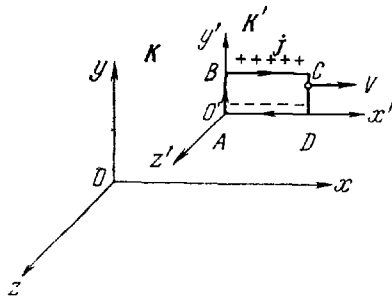


Рис. 6.5. Возникновение дипольного момента у рамки с током, рассматриваемой в системе отсчета K , относительно которой эта рамка движется.

направленным по оси y . Покажем, что элементарный расчет совпадает с выводами СТО. Если в K' нет дипольного момента, а есть только z -я составляющая M , то в K согласно (6.101) возникает $P_y = -\Gamma \frac{V}{c^2} M_z^0$. В системе K' прямоугольный ток $ABCD$ обладает магнитным моментом IS , где вектор S направлен в сторону отрицательной оси z , а по величине равен ab , где a и b — стороны прямоугольного контура. Таким образом, $M_z^0 =$

$= -j^0 ab$ (мы считаем для простоты сечение проводника равным единице). Нетрудно подсчитать электрический дипольный момент, возникающий в контуре. Согласно (6.24) $\rho = \Gamma \frac{V}{c^2} j_x^0$, расстояние между BC и AD равно b , а суммарный заряд на этих сторонах равен ra . Направление этого дипольного момента совпадает с направлением оси y . Значит, $P_y = \rho ab = \Gamma \frac{V}{c^2} ab j_x^0 = -\frac{V}{c^2} \Gamma M_z^0$, как это и должно быть.

§ 6.10. Некоторые задачи, связанные с преобразованием электромагнитного поля. Поле равномерно движущегося заряда. Магнитное и электрическое поля равномерно движущегося заряда проще всего получить пересчетом полей от системы K' , где заряд покоится. Если точечный электрический заряд e покоится в системе K' , то в этой системе мы имеем дело с чисто электростатической задачей и заряд создает лишь электрическое поле. Однако если рассматривать тот же самый заряд с точки зрения системы K , движущейся относительно K' со скоростью $-V$, то заряд образует прямолинейный ток. Магнитное поле, создаваемое прямолинейным током, хорошо известно: силовые линии такого поля представляют собой окружности, центры которых совпадают с током; плоскости этих окружностей нормальны направлению тока. Формулы преобразования полей приводят, естественно, к этим результатам.

Итак, пусть в системе K' имеется точечный заряд, расположенный в начале отсчета. Тогда в этой системе

$$B' = 0, \quad E' = \frac{e}{4\pi\epsilon} \frac{r'}{r'^3},$$

или, в проекциях на оси координат,

$$\begin{aligned} B'_x = 0, \quad B'_y = 0, \quad B'_z = 0, \\ E'_x = \frac{e}{4\pi\epsilon} \frac{x'}{r'^3}, \quad E'_y = \frac{e}{4\pi\epsilon} \frac{y'}{r'^3}, \quad E'_z = \frac{e}{4\pi\epsilon} \frac{z'}{r'^3}, \end{aligned}$$

где $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Согласно (6.36) в системе K мы получим

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \Gamma E'_y, \quad E_z = \Gamma E'_z, \quad (6.102)$$

$$B_x = B'_x = 0, \quad B_y = -\Gamma \frac{V}{c^2} E'_z, \quad B_z = \Gamma \frac{V}{c^2} E'_y. \quad (6.103)$$

Так как $B_x = 0$, то магнитное поле в системе K лежит в плоскостях, перпендикулярных оси x , т. е. плоскостях, перпендикулярных направлению тока. Уравнения силовых линий магнитного поля в системе K имеют вид

$$\frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z}, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{B_y}{B_z}.$$

Но

$$\frac{B_y}{B_z} = -\frac{E'_z}{E'_y} = -\frac{z'}{y'} = -\frac{z}{y},$$

поскольку при преобразованиях Лоренца $z' = z$ и $y' = y$. Следовательно, дифференциальное уравнение силовых линий имеет вид $\frac{dy}{dz} = -\frac{z}{y}$, или $y dy + z dz = 0$, т. е. $d(y^2 + z^2) = 0$. Отсюда, очевидно, в качестве первого интеграла мы имеем уравнение окружности $y^2 + z^2 = \text{const}$. Следовательно, силовые линии являются окружностями с центром на оси тока.

Конечно, можно преобразовывать не только поля, но и потенциалы. В системе K' скалярный потенциал равен

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e}{r'} = \frac{e}{i} \Phi'_4,$$

а векторный равен нулю: $\mathbf{A}' = 0$. Если в системе K' 4-потенциал $\vec{\Phi}$ имеет компоненты $(\mathbf{A}', \frac{i}{c} \varphi')$, то в системе K согласно (6.14а)

$$\Phi_1 = \Gamma \left(\Phi'_1 - i \frac{V}{c} \Phi'_4 \right), \quad \Phi_2 = \Phi'_2, \quad \Phi_3 = \Phi'_3, \quad \Phi_4 = \Gamma \left(\Phi'_4 + i \frac{V}{c} \Phi'_1 \right).$$

Подставляя значения компонент 4-потенциала в системе K' , получим

$$A_1 = \Gamma \left(-i \frac{V}{c} \frac{i}{c} \varphi' \right) = \Gamma \frac{V}{c^2} \varphi', \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0, \quad \frac{i}{c} \varphi = \Gamma \frac{i}{c} \varphi'.$$

Таким образом,

$$\mathbf{A} = \frac{V}{c^2} \Gamma \varphi' = \frac{V}{c^2} \varphi, \quad \varphi = \Gamma \varphi'. \quad (6.104)$$

Теперь нужно выразить r' , входящее в φ' , через координаты заряда в системе K . Согласно преобразованиям Лоренца

$$x' = \Gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (6.105)$$

и выражение для r'^2 запишется в виде

$$\begin{aligned} r'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 = \Gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = \\ &= \Gamma^2 \left[(x - Vt)^2 + \frac{y^2 + z^2}{\Gamma^2} \right] = \Gamma^2 \mathfrak{R}^2, \quad r' = \Gamma \mathfrak{R}, \end{aligned} \quad (6.106)$$

где введено обозначение

$$\mathfrak{R}^2 = (x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) (y^2 + z^2). \quad (6.107)$$

Используя (6.107), можно выразить скалярный потенциал φ , определенный согласно (6.104), через \mathfrak{R} :

$$\varphi = \Gamma \varphi' = \Gamma \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e}{r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e}{\mathfrak{R}},$$

а векторный потенциал \mathbf{A} представить в виде

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{V}}{c^2} \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e\mathbf{V}}{c^2 R}.$$

Перепишем выражения для компонент поля \mathbf{E} , принимая во внимание (6.102), (6.105) и (6.107). Мы получим

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{e(x-Vt)}{\Gamma^2 4\pi\epsilon R^3}, \\ E_y &= \frac{ey}{\Gamma^2 4\pi\epsilon R^3}, \\ E_z &= \frac{ez}{\Gamma^2 4\pi\epsilon R^3}. \end{aligned} \quad (6.108)$$

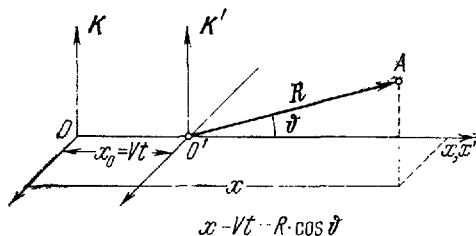


Рис. 6.6. К вычислению электрического и магнитного полей равномерно движущегося заряда.

В системе K' заряд находится в начале отсчета O' (т. е. в точке $x' = 0$). Его координатами в момент t в системе отсчета K будут $x_0 = Vt$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Введем еще вектор \mathbf{R} , направленный из точки O' , где находится заряд, в точку наблюдения A с координатами (x, y, z) (рис. 6.6). Вектор \mathbf{R} запишется в виде

$$\mathbf{R} = (x - Vt) \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad (6.109)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} — единичные векторы вдоль осей x , y , z . Умножив компоненты (6.108) соответственно на \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} , мы получим

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e}{\Gamma^2} \frac{\mathbf{R}}{R^3}.$$

Если ввести угол ϑ между направлением движения заряда (т. е. осью x) и радиус-вектором \mathbf{R} , то

$$x - Vt = R \cos \vartheta, \quad R^2 = R^2 \cos^2 \vartheta + y^2 + z^2$$

и, следовательно,

$$y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \vartheta. \quad (6.110)$$

Учитывая (6.109) и (6.110), можно переписать (6.107) в виде

$$\mathfrak{R}^2 = R^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \vartheta \right),$$

после чего выражение для \mathbf{E} можно представить окончательно в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \vartheta \right)^{3/2}}. \quad (6.111)$$

В формуле (6.111) электрическое поле движущегося заряда выражено в очень удобных переменных — через расстояние R от движущегося заряда и угол ϑ , составляемый направлением на точку, где ищется поле, с направлением движения заряда. Из (6.111) видно, что величина поля зависит от угла ϑ . При заданном R минимальное значение поля соответствует направлению движения заряда ($\vartheta = 0, \pi$):

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e}{R^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right),$$

а максимальное значение поле имеет в направлении, перпендикулярном движению ($\vartheta = \pi/2$):

$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{e}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Величина напряженности поля зависит от скорости движения заряда, причем E_{\parallel} падает, а E_{\perp} возрастает с ростом скорости. Для заряда, движущегося с релятивистской скоростью, электрическое поле сосредоточено в двух узких телесных углах, границы которых определены приближенно соотношением $(V^2 \sin^2 \vartheta / c^2) \sim 1$; осевая линия этих телесных углов перпендикулярна направлению движения заряда.

Что касается магнитного поля движущегося заряда, то, учитывая, что в системе K' магнитное поле $B' = 0$, по формуле (6.44) для поля B в системе K найдем

$$B = \frac{1}{c^2} [V E]. \quad (6.112)$$

Если скорость заряда мала, то приближенно в вакууме

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eR}{R^3}$$

и

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{e[V R]}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[eV R]}{R^3} \quad (6.113)$$

Выражение (6.113) представляет собой закон Био — Савара.

Взаимодействие двух движущихся зарядов. Пусть два заряда e_1 и e_2 движутся параллельно друг другу с одинаковыми скоростями V . Определим силу взаимодействия между ними в той системе, относительно которой они движутся. Пусть этой системой будет система K . Найдем силу, действующую на заряд e_1 .

Со стороны заряда e_2 на e_1 действуют электрическое и магнитное поля. Сила, действующая на заряд e_1 , — это сила Лоренца:

$F_1 = e_1 \{E_2 + [V B_2]\}$. Учитывая (6.112), можно написать, что

$$F_1 = e_1 E_2 + \frac{e_1}{c^2} [V [V E_2]] = e_1 E_2 + \frac{e_1}{c^2} V (V E_2) - \frac{e_1}{c^2} V^2 E_2 =$$

$$= e_1 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) E_2 + \frac{e_1}{c^2} V (V E_2). \quad (6.114)$$

Для E_2 воспользуемся выражением (6.111), где нужно взять за R радиус-вектор, проведенный от заряда e_2 к заряду e_1 , а за угол ϑ — угол между R и скоростью движения зарядов V . Подставляя (6.111) в (6.114), получим

$$F_1 = \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon R^3} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^2 R}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{3/2}} + \frac{e_1 e_2 V V \cos \vartheta \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)}{4\pi \epsilon c^2 R^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon R^2} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{3/2}} \left[\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{R}{R} + \frac{V V}{c^2} \cos \vartheta \right],$$

откуда для составляющей по направлению движения имеем

$$F_x = \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon R^2} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cos \vartheta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{3/2}},$$

а для составляющей, перпендикулярной движению,

$$F_y = \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon R^2} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^2 \sin \vartheta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{3/2}}. \quad (6.115)$$

Пусть заряды расположены на прямой, параллельной оси y , а один из зарядов находится на оси x , так что расстояние между зарядами равно y . Тогда $\vartheta = \pi/2$, $F_x = 0$, а

$$F_y = \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon y^2} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (6.116)$$

Эту формулу можно получить совсем просто. В системе K' , где оба заряда покоятся, взаимодействие зарядов электростатическое и сила взаимодействия равна $e_1 e_2 / 4\pi \epsilon y^2$. Преобразование этой силы при переходе от системы K' к системе K по формулам (5.35) и дает (6.116). Согласно (6.116) заряды отталкиваются в системе K . Но в системе K заряды движутся и представляют собой два одинаково направленных параллельных тока. Такие токи, если они текут по проводникам, притягиваются. Противоречия здесь нет, поскольку физические ситуации различны. Рассмотрим выражение

силы (6.116) в вакууме для нерелятивистских скоростей V :

$$F_y \approx \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon_0 y^2} \left(1 - \frac{V^2}{2c^2} + \dots \right) = \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon_0 y^2} - \frac{e_1 e_2}{4\pi y^2} \mu_0 \frac{V^2}{2} \quad (6.117)$$

С другой стороны, запишем, по Амперу, силу взаимодействия двух элементов тока $e_1 V$ и $e_2 V$ в вакууме:

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[e_1 V [e_2 V, R]]}{R^3} = \frac{\mu_0 e_1 e_2}{4\pi} \frac{[V [V R]]}{R^3} = -\frac{\mu_0 e_1 e_2}{4\pi} V^2 \frac{R}{R^3}.$$

Учитывая, что $R = yj$, получим окончательно

$$F_y = -\frac{\mu_0 e_1 e_2}{4\pi y^2} V^2. \quad (6.118)$$

Сила (6.117), наблюдаемая в системе отсчета K , относительно которой заряды движутся, состоит из кулоновского отталкивания и, с точностью до множителя $1/2$, амперовского притяжения. Полученное выражение для силы (6.117) нельзя без оговорок использовать для объяснения взаимодействия токов в проводниках. Нейтральные проводники с током в рассматриваемых условиях должны притягиваться. Но проводник, по которому идет ток, нейтрален лишь в одной системе отсчета (§ 6.1). Поэтому кулоновское отталкивание нужно учитывать. Но оно, по-видимому, обычно все-таки слабее притяжения.

§ 6.11. Тензор энергии-импульса-натяжений электромагнитного поля в вакууме. Переход к четырехмерным величинам объединяет величины, связь между которыми при трехмерном подходе была завуалирована. Для свободной частицы в один 4-вектор слились энергия и импульс. Электрическое и магнитное поля в 4-пространстве объединились в тензор электромагнитного поля. Энергия и импульс электромагнитного поля оказываются составляющими тензора, в который, кроме энергии (скаляра в трехмерном случае) и импульса (трехмерного вектора), входит еще и трехмерный тензор натяжений Максвелла. Нам придется сначала привести результаты теории Максвелла в трехмерной формулировке.

1. Закон сохранения энергии для зарядов и поля. Этот закон непосредственно вытекает из уравнений Максвелла: умножив скалярно (6.56а) на E , а (6.57а) на H и вычитая полученные выражения, будем иметь

$$H \operatorname{rot} E - E \operatorname{rot} H = -jE - \dot{D}E - \dot{B}H.$$

Имея в виду тождества $H \operatorname{rot} E - E \operatorname{rot} H = \operatorname{div} [EH]$ и $(d/dt) \times (ED + BH) = 2(\dot{D}E + \dot{B}H)$ (последнее справедливо для изотропной среды, в которой $D = \epsilon E$, $B = \mu H$), мы получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{ED + BH}{2} \right) = -jE - \operatorname{div} [EH],$$

откуда после интегрирования по произвольному объему \mathcal{V} и применения теоремы Гаусса — Остроградского приходим к

$$\frac{dW}{dt} = - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{j} \mathbf{E} d\mathcal{V} - \oint_S \mathbf{S} d\mathbf{S}. \quad (6.119)$$

Слева в (6.119) стоит изменение во времени энергии электромагнитного поля в объеме \mathcal{V} . Эта энергия определяется в теории Максвелла через плотность энергии (энергию единицы объема)

$$w = \frac{\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{B} \mathbf{H}}{2} \quad (6.120)$$

интегрированием по объему:

$$W = \int_{\mathcal{V}} w d\mathcal{V}. \quad (6.121)$$

Рассмотрим самый простой случай — заряды в вакууме. В этом случае $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, а плотность силы, действующей на эти заряды, — плотность силы Лоренца

$$\mathbf{f}^{\Pi} = \rho (\mathbf{E} + [\mathbf{v} \mathbf{B}]) = \rho \mathbf{E} + [\mathbf{j} \mathbf{B}] \quad (6.122)$$

Эта сила вводится в теорию, чтобы перекинуть мостик между теорией поля и силовым действием со стороны поля на заряженные тела, помещенные в поле. В равенстве (6.119) есть выражение $\mathbf{j} \mathbf{E}$. Если умножить (6.122) скалярно на \mathbf{v} , мы получим, что $\mathbf{f}^{\Pi} \mathbf{v} = \rho \mathbf{E} \mathbf{v} = \mathbf{j} \mathbf{E}$. Таким образом, один из членов правой части в этом случае — это просто работа поля над зарядом. Она — по закону сохранения энергии — должна переходить в кинетическую энергию частиц T . Следовательно,

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{j} \mathbf{E} d\mathcal{V} = \int \mathbf{f}^{\Pi} \mathbf{v} d\mathcal{V} = \frac{dT}{dt}. \quad (6.123)$$

Во второй член правой части (6.119) введен вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E} \mathbf{H}], \quad (6.124)$$

а сам интеграл представляет собой поток вектора \mathbf{S} через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем \mathcal{V} . Под знаком интеграла стоит еще $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ — произведение величины площади на поверхности dS на единичный вектор ее нормали \mathbf{n} . Таким образом, закон сохранения энергии для зарядов и поля может быть записан так:

$$\frac{d}{dt} (T + W) = - \oint_S \mathbf{S} d\mathbf{S}. \quad (6.125)$$

Вектор Пойнтинга (6.124) обычно интерпретируется как поток энергии в единицу времени через единичную площадку, расположенную нормально вектору Пойнтинга. Такая интерпретация вовсе не обязательно следует из уравнений Максвелла. Прямое следствие уравнений Максвелла, которому можно придать смысл закона сохранения энергии, — интегральное соотношение (6.119). Ясно, что любая добавка S' к вектору Пойнтинга S , удовлетворяющая условию $\operatorname{div} S' = 0$, не меняет соотношения (6.119). Однако общепринятая интерпретация подтверждается опытом.

2. Закон сохранения импульса для зарядов и поля. К закону сохранения импульса можно подойти так. Умножим (6.56а) векторно на \mathbf{B} , а (6.57а) векторно на \mathbf{D} ; будем иметь после почленного сложения полученных равенств

$$\mu [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] + \varepsilon [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}] = -[j\mathbf{B}] - \varepsilon\mu [\mathbf{H}\dot{\mathbf{E}}] - \varepsilon\mu [\dot{\mathbf{E}}\mathbf{H}].$$

Здесь учтено, что $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, а $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$; окончательно:

$$\mu [\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}] + \varepsilon [\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{E}] = -[j\mathbf{B}] - \varepsilon\mu \frac{d}{dt} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (6.126)$$

Воспользуемся векторным тождеством:

$$\mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{a} - [\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{a}] = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(a_\alpha a_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} a_\gamma^2 \right) m_\beta.$$

Вычитая соответственно левую и правую части (6.126) из тождества

$$\mu \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{H} + \varepsilon \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \rho \mathbf{E}$$

(см. (6.56б) и (6.57б)), получим окончательно выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta + \delta_{\alpha\beta} \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2} \right) m_\beta = \\ = \rho \mathbf{E} + [j\mathbf{B}] + \varepsilon\mu \frac{d}{dt} [\mathbf{E}\mathbf{H}], \end{aligned}$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} m_\beta = f^\Pi + \frac{d}{dt} [D\mathbf{B}], \quad (6.127)$$

где введен тензор натяжений Максвелла

$$T_{\alpha\beta} = \varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta - \delta_{\alpha\beta} w = E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta - \delta_{\alpha\beta} w. \quad (6.128)$$

Тензор (6.128), симметричный в вакууме и изотропных телах, уже несимметричен в телах анизотропных, где он определяется согласно последнему равенству в (6.128). Интегрируя по произвольному объему в области, где существует электромагнитное

поле, получим

$$\int_{\mathcal{V}^0} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} m_\beta d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}^0} f^{\cdot\pi} d\mathcal{V} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}^0} [DB] d\mathcal{V}. \quad (6.129)$$

В (6.127) снова предположено, что мы имеем дело со свободными зарядами в вакууме, на которые действует сила Лоренца (6.122).

По второму закону Ньютона

$$\int_{\mathcal{V}^0} f d\mathcal{V} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (6.130)$$

где \mathbf{P} — импульс частиц, заключенных в объеме \mathcal{V} . Интеграл по объему, стоящий в левой части равенства (6.129), преобразуется в поверхностный интеграл (по поверхности, охватывающей объем \mathcal{V}):

$$\int_{\mathcal{V}^0} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} m_\beta d\mathcal{V} = \oint_S T_{\alpha\beta} n_\alpha m_\beta dS. \quad (6.131)$$

Выражения

$$T_{\alpha\beta} n_\alpha m_\beta dS$$

представляют собой силу, действующую на бесконечно малый участок поверхности dS , компоненты нормали к которой равны n_α . Векторы \mathbf{m}_β — единичные векторы декартовой системы координат. Мы могли бы уже написать закон сохранения импульса, если бы знали, что следует считать импульсом электромагнитного поля в веществе. Поэтому ограничимся пока случаем вакуума, где $[DB] = (1/c^2) [EH] = S/c^2$. Тогда, учитывая (6.130) и (6.131), можно переписать (6.129) в виде

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{P} + \mathbf{G}) = \oint_S T_{\alpha\beta} n_\alpha m_\beta dS, \quad (6.132)$$

определив при этом плотность импульса поля в вакууме \mathbf{g} как

$$\mathbf{g} = S/c^2 \quad (6.133)$$

и, следовательно, импульс поля в объеме \mathcal{V} как

$$\mathbf{G} = \int_{\mathcal{V}^0} \mathbf{g} d\mathcal{V}.$$

Соотношение (6.132) вместе с определением (6.133) выражает закон сохранения импульса. Для полного поля, когда на граничной поверхности $T_{\alpha\beta} = 0$, мы получаем закон сохранения $(d/dt)(\mathbf{P} + \mathbf{G}) = 0$. Тензор $T_{\alpha\beta}$ определен неоднозначно: из уравнений Максвелла вытекает лишь интегральное соотношение

(6.132), и если добавить к каждой компоненте вектора G компоненту произвольного тензора $T'_{\alpha\beta}$, удовлетворяющего условию $(\partial T'_{\alpha\beta}/\partial x_\alpha) = 0$, то

$$\oint T'_{\alpha\beta} n_\alpha m_\beta dS = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} m_\beta d\mathcal{V} = 0,$$

и соотношение (6.132) все равно удовлетворяется. Здесь все аналогично тому, когда мы выбираем выражение для вектора Пойнтинга из теоремы о сохранении энергии или ищем выражение для плотности тока смещения. Наш выбор определяется тем, насколько правильны все следствия такого выбора. Тензор натяжений (6.128) в вакууме, где $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, совместно с определением импульса (6.133) даст разумные физические результаты.

Заметим в заключение, что из соотношения (6.132) ясно, что определения плотности импульса и тензора натяжений тесно связаны между собой. Переопределив выражение для плотности импульса, мы сразу же изменяем выражение для $T_{\alpha\beta}$ (см. § 6.12).

Резюмируем результаты для вакуума: как следствие максвелловских уравнений, электромагнитному полю в вакууме необходимо приписать плотность импульса, определяемую формулой (6.133). Тогда формула (6.132) выражает закон Ньютона: приращение суммарного импульса зарядов и поля в объеме \mathcal{V} равно сумме действующих на этот объем сил. Эти силы удастся записать в виде поверхностных сил, т. е. сил, действующих на поверхность, ограничивающую объем \mathcal{V} .

Переход к четырехмерным выражениям можно осуществить следующим образом. Докажем сначала, что плотность 4-силы \vec{f} (6.54) можно переписать в виде четырехмерной дивергенции тензора T_{ik} :

$$f_i \equiv \frac{1}{c} F_{ik} s_k = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k},$$

где T_{ik} — тензор энергии-импульса-натяжений *); компоненты этого тензора имеют вид

$$T_{ik} = \frac{1}{c} F_{im} f_{mk} + \frac{1}{4c} \delta_{ik} (F_{sn} f_{sn}). \quad (6.134)$$

Справа в (6.134) в первом слагаемом суммирование идет по m , а во втором — по s и n ; F_{im} и f_{sn} — соответствующие компоненты тензоров (6.29а) и (6.31).

* Мы оставляем для четырехмерного тензора (6.134) ту же букву T , как и для трехмерного (6.128): это не должно вызвать недоразумения еще и потому, что, как окажется, девять компонент (6.134) для i и k , изменяющихся от 1 до 3, совпадают с (6.128).

Чтобы получить соотношение (6.134), нам понадобятся уравнения Максвелла, записанные в виде (6.60) и (6.67); мы их перепишем в удобном для нас виде:

$$\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_l} = s_k, \quad (6.135)$$

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} = -\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}. \quad (6.136)$$

Начнем преобразование четырехмерной плотности силы:

$$f_i = \frac{1}{c} F_{ik} s_k = \frac{1}{c} F_{ik} \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_l} = \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_l} (F_{ik} f_{kl}) - f_{kl} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} \right\}. \quad (6.137)$$

Мы использовали (6.135) и применили правило дифференцирования произведения.

Займемся теперь вторым членом в последнем звене равенства (6.137):

$$\begin{aligned} f_{kl} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} &= \frac{1}{2} \left(f_{kl} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + f_{lk} \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_l} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(f_{kl} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + f_{kl} \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} f_{kl} \left(\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} f_{kl} \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} f_{kl} \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} = \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{kl})^2 = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{sn} F_{sn}). \end{aligned} \quad (6.138)$$

В цепи равенств (6.138) проводятся следующие операции. Переход ко второму звену основан на том, что с учетом антисимметрии тензоров f_{kl} и F_{ik} можно поменять местами индексы в каждом члене произведения, не меняя при этом произведения:

$$f_{kl} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} = f_{lk} \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_l} \quad (6.139)$$

Поэтому вместо одного члена берем полусумму двух равных выражений, стоящих в левой и правой частях равенства (6.139). В третьем звене произведена замена немых индексов, не меняющая результата суммирования: индекс l заменен на индекс k , и наоборот, т. е. вместо $f_{lk} \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_l}$ написано $f_{kl} \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}$. В четвертом звене вынесены за скобки общий множитель f_{kl} , а в пятом использовано выражение (6.136). В шестом звене равенства мы заменили F_{ki} согласно (6.58), что справедливо лишь для вакуума.

Однако результат (6.138) остается справедливым также и для однородной изотропной среды. Как легко убедиться, компоненты тензоров \mathfrak{f} и \mathfrak{F} в такой среде по-прежнему пропорциональны, но с разными коэффициентами пропорциональности для простран-

степенных и временных компонент. Из общего вида тензоров $\mathfrak{F} = (c\mathbf{B}, -i\mathbf{E})$ и $\mathfrak{f} = (\mathbf{H}, -ic\mathbf{D})$ ясно, что пространственные компоненты связывают между собой векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} , а временные — векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} . Чтобы получить нужную связь $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, следует положить

$$f_{\alpha\beta} = aF_{\alpha\beta}, \quad a = \frac{\mu_0}{\mu} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1}{\mu c}, \quad (6.140)$$

$$f_{k4} = bF_{k4}, \quad b = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \varepsilon c. \quad (6.141)$$

Но тогда, начиная с пятого звена (6.138), последующая цепь равенств переписывается так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} f_{kl} \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} a^{-1} f_{\alpha\beta} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} b^{-1} f_{k4} \frac{\partial f_{k4}}{\partial x_i} = \frac{a^{-1}}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{\alpha\beta})^2 + \\ &+ \frac{b^{-1}}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{k4})^2 = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{k4} F_{k4}) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{kl} F_{kl}) = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{sn} F_{sn}). \end{aligned} \quad (6.142)$$

Последнее звено равенства (6.138), а также третье звено равенства (6.142) написаны по правилу дифференцирования произведения:

$$f_{kl} \frac{\partial f_{kl}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (f_{kl})^2.$$

Так как множители a и b в (6.140) и (6.141) постоянны, их можно внести под знак дифференцирования. И, наконец, для удобства при суммировании введены другие темные индексы, что не меняет сумму $f_{kl} F_{kl} = f_{sn} F_{sn}$. Таким образом, результаты для вакуума и однородной изотропной среды оказываются одинаковыми.

Разумеется, этот результат формально очевиден из того, что в системе СИ вакуум является просто одной из однородных и изотропных сред, до тех пор пока существенны лишь соотношения $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$.

Для того чтобы объединить первый член в (6.137) со вторым в окончательной форме (6.138) или (6.142), нужно, чтобы дифференцирование в обоих членах шло по одним и тем же переменным. Но перейти к дифференцированию по другой переменной можно с помощью символа Кронекера

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \delta_{it} \frac{\partial}{\partial x_t}.$$

Теперь можно записать уже выражение для f_i полностью (см. (6.137)):

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_l} (F_{ik} f_{kl}) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_l} (f_{sn} F_{sn}) \right\} = \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{ F_{ik} f_{kl} + \frac{1}{4} \delta_{il} (f_{sn} F_{sn}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.143)$$

В первом слагаемом сделаем замену немых индексов суммирования: индекс k заменим на m , а индекс l — на k в первом и втором слагаемом. Тогда мы получим окончательно

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{c} F_{im} f_{mk} + \frac{1}{4c} \delta_{ik} (f_{sn} F_{sn}) \right\} \equiv \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}, \quad (6.144)$$

где T_{ik} определяется согласно (6.134).

Итак, компоненты 4-силы \vec{f} можно выразить через компоненты тензора T_{ik} , зависящие от векторов поля \mathbf{E} и \mathbf{B} (напомним, что для вакуума, о котором идет речь в этом параграфе, компоненты тензоров \mathfrak{F} и \mathfrak{f} , согласно (6.58), пропорциональны, с одним и тем же коэффициентом пропорциональности).

Из этого обстоятельства и определения тензора T_{ik} (6.134) видно, что в вакууме он симметричен, т. е. $T_{ik} = T_{ki}$. Это означает, что у этого тензора десять независимых компонент. В веществе симметрия 4-тензора утрачивается.

Найдем теперь компоненты T_{ik} , выраженные через векторы электромагнитного поля. Сначала рассмотрим выражение $f_{sn} F_{sn}$. Это просто сумма попарных произведений соответствующих компонент матриц (6.29а) и (6.31). Из определения тензоров $\mathfrak{f}(\mathbf{H}, -i\mathbf{D})$ и $\mathfrak{F}(c\mathbf{B}, -i\mathbf{E})$ соответствующие компоненты видны сразу. Обозначив через Λ коэффициент при δ_{ik} , найдем

$$\Lambda = \frac{1}{4c} f_{sn} F_{sn} = \frac{1}{4c} \cdot 2(c\mathbf{B}\mathbf{H} - c\mathbf{D}\mathbf{E}) = \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} - \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{2}. \quad (6.145)$$

Двойка перед скобкой появилась потому, что из-за антисимметричности f и F произведение попарных компонент даст два раза выражение $c(\mathbf{B}\mathbf{H} - \mathbf{D}\mathbf{E})$. Теперь можно уже переписать выражение для компонент T_{ik} (заменяв еще f_{mk} на $-f_{km}$) в следующем виде:

$$T_{ik} = -\frac{1}{c} F_{im} f_{km} + \delta_{ik} \Lambda. \quad (6.146)$$

Займемся теперь отдельными компонентами. Найдем, например, T_{11} :

$$\begin{aligned} T_{11} &= -\frac{1}{c} F_{1m} f_{1m} + \Lambda = -\frac{1}{c} F_{11} f_{11} - \frac{1}{c} F_{12} f_{12} - \frac{1}{c} F_{13} f_{13} - \\ &- \frac{1}{c} F_{14} f_{14} + \Lambda = -\frac{1}{c} (cB_z H_z + cB_y H_y - cE_x D_x) + \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} - \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{2} = \\ &= -\mathbf{B}\mathbf{H} + H_x B_x + E_x D_x + \frac{\mathbf{B}\mathbf{H}}{2} - \frac{\mathbf{D}\mathbf{E}}{2} = \\ &= H_x B_x + E_x D_x - \frac{\mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{H}}{2} = H_1 B_1 + E_1 D_1 - w. \end{aligned} \quad (6.147)$$

Мы обнаружили, что T_{11} — это компонента трехмерного максвелловского тензора натяжений (6.128). Аналогично можно

показать, что все компоненты тензора $T_{\alpha\beta}$, т. е. те компоненты, для которых индексы i, k принимают значения от 1 до 3, совпадают с тензором натяжений Максвелла (6.128). Остается рассмотреть компоненты T_{ik} , где по крайней мере один из индексов равен 4. Мы начнем с T_{44} :

$$T_{44} = -\frac{1}{c} F_{4m} f_{4m} + \Lambda = \\ = E_x D_x + E_y D_y + E_z D_z + \frac{BH}{2} - \frac{DE}{2} = \frac{BH}{2} + \frac{DE}{2} = w. \quad (6.148)$$

Компонента T_{44} оказалась равной плотности энергии электромагнитного поля. Найдем теперь T_{14} :

$$T_{14} = T_{41} = -\frac{1}{c} F_{1m} f_{4m} = -\frac{1}{c} (F_{12} f_{42} + F_{13} f_{43}) = \\ = -ic (D_y B_z - D_z B_y) = -ic \epsilon_0 \mu_0 [EH]_x = \\ = -\frac{i}{c} S_x = -ic \frac{S_x}{c^2} = -ic g_x. \quad (6.149)$$

Аналогично

$$T_2 = T_{42} = -ic g_y, \\ T_{34} = T_{43} = -ic g_z. \quad (6.150)$$

Компоненты T_{14} , T_{24} , T_{34} оказались пропорциональными компонентам плотности импульса электромагнитного поля $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$. То, что здесь речь идет именно о плотности импульса, а не о потоке энергии, которому импульс пропорционален, выяснится несколько ниже (см. (6.153)). Выпишем матрицу тензора энергии-импульса-натяжений электромагнитного поля в вакууме

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -icg_x \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -icg_y \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -icg_z \\ -\frac{i}{c} S_x & -\frac{i}{c} S_y & -\frac{i}{c} S_z & w \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} T_{\alpha\beta} & -ic\mathbf{g} \\ -\frac{i}{c} \mathbf{S} & w \end{pmatrix}. \quad (6.151)$$

Левый верхний квадрат, состоящий из девяти величин, определяет тензор натяжений Максвелла. Он становится релятивистски правильной величиной после обрамления его энергетическими величинами \mathbf{S} и w . Убедимся в том, что, построив тензор T_{ik} , мы получили законы сохранения энергии и импульса, выраженные в трехмерной форме уравнениями (6.125) и (6.132). Рассмотрим пространственные составляющие 4-силы:

$$f_\alpha = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{i}{c} \frac{\partial S_\alpha}{\partial (ict)} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}. \quad (6.152)$$

Мы учли, что трехмерный импульс электромагнитного поля в вакууме имеет составляющие $g_\alpha = S_\alpha/c^2$. Умножая каждую состав-

ляющую f_α ($\alpha = 1, 2, 3$) на свой единичный вектор m_α ($\alpha = 1, 2, 3$) и складывая эти величины, получим ($f = f_\alpha m_\alpha$ — трехмерная сила Лоренца)

$$f + \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} m_\alpha \quad (6.153)$$

Интегрируя тождество (6.153) по произвольному объему, получим

$$\int_{\mathcal{V}} f dV + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial g}{\partial t} d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} m_\alpha d\mathcal{V} \quad (6.154)$$

В левой части (6.154) стоит изменение суммарного импульса частиц и суммарного импульса поля:

$$\int f d\mathcal{V} = \frac{dP}{dt}, \quad \int \frac{\partial g}{\partial t} d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int g d\mathcal{V} = \frac{\partial G}{\partial t} \quad (6.155)$$

К правой части (6.154) применим теорему Гаусса — Остроградского:

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} m_\alpha d\mathcal{V} = \oint_S T_{\alpha\beta} n_\beta m_\alpha dS = \oint_S T_{\alpha\beta} n_\alpha m_\beta dS; \quad (6.156)$$

последний переход учитывает симметрию тензора $T_{\alpha\beta}$. Итак, мы пришли к закону сохранения импульса (6.132) и вместе с тем убедились в правильности утверждения о том, что компоненты T_{14} , T_{24} , T_{34} пропорциональны компонентам импульса электромагнитного поля. Выражение $T_{\alpha\beta} n_\alpha m_\beta$ можно рассматривать не только как силу, действующую на элемент поверхности, его можно рассматривать также как и поток импульса через этот элемент поверхности. Величина $T_{\alpha\beta} m_\beta$ дает векторную компоненту этого потока. Конечно, обе эти интерпретации равнозначны.

Рассмотрим теперь f_4 . С одной стороны, согласно (6.54)

$$f_4 = \frac{i\rho}{c} (vE) = \frac{i}{c} (vf), \quad (6.157)$$

а с другой,

$$\begin{aligned} f_4 &= \frac{\partial T_{4k}}{\partial x_k} = \frac{\partial T_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4} = \\ &= -\frac{i}{c} \operatorname{div} S + \frac{\partial w}{\partial (ict)} \end{aligned} \quad (6.158)$$

Следовательно, можно записать (6.158) так:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} S + (vf) = 0 \quad (6.159)$$

Интегрируя выражение (6.159) по произвольному объему в поле, получим, учитывая (6.121) и (6.123),

$$\frac{d}{dt} (T + W) = - \oint_S \mathbf{S} dS, \quad (6.160)$$

причем к члену $\text{div } \mathbf{S}$ уравнения (6.159) применена теорема Гаусса. Это и есть закон сохранения энергии (6.125).

Таким образом, в релятивистской теории максвелловские натяжения, импульс и энергия поля в вакууме слились в одну тензорную величину — тензор энергии-импульса-натяжений. Законы сохранения энергии и импульса стали выражаться единым соотношением.

Принципиально важным свойством тензора энергии-импульса-натяжений является его симметрия. Для электромагнитного поля в вакууме отсюда сразу следует фундаментальное соотношение между плотностями потока энергии и импульса:

$$\mathbf{S} = \mathbf{g}c^2. \quad (6.161)$$

Легко убедиться в том, что «след» тензора T_{ik} , т. е. сумма его диагональных компонент, равен нулю.

Установив тензорную природу натяжений, импульса, потока и плотности энергии электромагнитного поля, мы автоматически получаем и правила преобразования этих величин при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Мы выпишем лишь те формулы преобразования, которые нам понадобятся. Подставляя значения компонент (6.151) в общие формулы (П.1.31), мы получим

$$T_{xx} = T_{11} = \Gamma^2 \left(T'_{xx} - 2 \frac{V}{c^2} S'_x - \frac{V^2}{c^2} w' \right), \quad (6.162)$$

$$T_{44} = \Gamma^2 \left(w' + 2 \frac{V}{c^2} S'_x - \frac{V^2}{c^2} T'_{xx} \right), \quad (6.163)$$

$$T_{xy} = T_{12} = \Gamma \left(T'_{xy} - \frac{V}{c^2} S'_y \right), \quad (6.164)$$

$$g_x = \Gamma^2 \left\{ \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) g'_x + \frac{V}{c^2} w' - \frac{V}{c^2} T'_{xx} \right\}, \quad (6.165)$$

$$g_y = \Gamma \left(g'_y - \frac{V}{c^2} T'_{xy} \right), \quad (6.166)$$

$$g_z = \Gamma \left(g'_z - \frac{V}{c^2} T'_{zx} \right). \quad (6.167)$$

§ 6.12. Тензор энергии-импульса-натяжений электромагнитного поля в среде. Тензор Минковского и тензор Абрагама. Интерес к тензору энергии-импульса-натяжений (ТЭИ) в среде вызван в первую очередь тем, что этот тензор связан с импульсом электромагнитного поля в среде. Эта последняя величина имеет

прямое отношение к величинам, наблюдаемым непосредственно на опыте (например, к световому давлению). Однако этот тензор в среде не определяется однозначно и по поводу его «правильного вида» до сих пор ведется дискуссия.

Найдем общий вид тензора энергии-импульса в однородной изотропной среде. В § 6.11 было показано, что в однородной изотропной среде общий вид компонент тензора энергии-импульса не отличается от случая вакуума; в обоих случаях (см. (6.146))

$$T_{ih} = -\frac{1}{c} F_{im} f_{km} + \delta_{ik} \Lambda. \quad (6.168)$$

Однако коэффициенты пропорциональности между пространственными и временными составляющими \mathfrak{f} и \mathfrak{F} в среде различны (см. (6.140) и (6.141)), и тензор T_{ih} , определяемый согласно (6.168), в отличие от тензора (6.149), оказывается уже несимметричным. Несимметричность возникает из-за временных составляющих тензора; пространственные составляющие, по крайней мере в изотропной среде, симметричны. Действительно, легко убедиться в том, что пространственные составляющие тензора T_{ih} в среде отличаются от пространственных составляющих в вакууме только значениями ε и μ . Так, например,

$$\begin{aligned} T_{11} &= -\frac{1}{c} F_{1m} f_{1m} + \Lambda = \\ &= -\frac{1}{c} \left(cB_z \frac{B_z}{\mu} + cB_y \frac{B_y}{\mu} - c\varepsilon E_x^2 \right) + \Lambda = \\ &= -H_z B_z - H_y B_y - H_x B_x + H_x B_x + E_x D_x + \frac{BH - DE}{2} = \\ &= H_x B_x + E_x D_x - \frac{ED + BH}{2}. \end{aligned}$$

Это выражение совпадает со значением T_{11} (6.147); но если в (6.147) входили ε_0 и μ_0 , то в эту формулу входят ε и μ . Точно так же мы найдем, что

$$T_{44} = -\frac{1}{c} F_{4m} f_{4m} + \Lambda = \frac{ED + BH}{2} = w.$$

Однако если

$$T_{44} = -i c \varepsilon \mu [EH]_x = -(i/c) (\varepsilon \mu / \varepsilon_0 \mu_0) S_x,$$

то

$$T_{41} = -(i/c) [EH]_x = -(i/c) S_x.$$

Таким образом, тензор энергии-импульса-натяжений в однородной изотропной среде, получаемый непосредственным преобразованием 4-силы, уже несимметричен. Он называется тензором

Минковского, и его компоненты имеют вид

$$T_{ik}^M = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & -(i/c) n^2 S_x \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & -(i/c) n^2 S_y \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & -(i/c) n^2 S_z \\ -(i/c) S_x & -(i/c) S_y & -(i/c) S_z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{\alpha\beta} & -(i/c) n^2 S \\ -(i/c) S & w \end{pmatrix}. \quad (6.169)$$

В (6.169) введен показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon\mu/\varepsilon_0\mu_0}$. Соответствующая тензору (6.169) плотность импульса (компоненты T_{14} , T_{24} , T_{34}) оказывается равной

$$g^M = \frac{n^2}{c^2} S = [DB]. \quad (6.170)$$

Мы поставили у плотности импульса также индекс «M», чтобы подчеркнуть, что эта плотность соответствует тензору Минковского. Плотность импульса поля в среде (6.170) в n^2 раз отличается от (6.133).

Часто предлагают сохранить для плотности импульса поля в среде выражение (6.133). Этим самым, конечно, мы делим суммарный импульс на импульс поля и импульс самой среды. Но выделить плотность импульса поля в форме (6.133) можно, лишь используя иной тензор энергии-импульса, отличный от тензора Минковского. Важность сохранения соотношения (6.133) состоит еще и в том, что оно дает наиболее общую формулировку закона инерции энергии. Так как поток энергии описывается компонентами $T_{4\alpha}$ тензора энергии-импульса, а плотность импульса — компонентами $T_{\alpha 4}$, соотношение (6.133) означает симметрию тензора. Таким образом, нам следует построить новый симметричный тензор, который удовлетворял бы следующим условиям: компоненты $T_{\alpha 4} = -icg_\alpha$, а $T_{4\alpha} = -(i/c)S_\alpha$, причем соблюдалось бы соотношение (6.133). Трехмерный тензор натяжений $T_{\alpha\beta}$ должен совпадать с трехмерным тензором натяжений Максвелла (6.128). Такой тензор был предложен Абрагамом; он имеет вид

$$T_{ik}^A = \begin{pmatrix} T_{\alpha\beta} & -icg^\alpha \\ -(i/c) S & w \end{pmatrix}, \quad g^A = g = \frac{S}{c^2}. \quad (6.171)$$

В силу того, что $T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}$, и определения (6.133) этот тензор симметричен. Но введение тензора Абрагама влечет за собой появление объемной силы, действующей на среду. Эта сила носит название силы Абрагама. Чтобы найти ее величину, вспомним, что компоненты плотности лоренцевой силы связаны с тензором

энергии-импульса Минковского соотношением

$$f_\alpha = \frac{\partial T_{\alpha k}^M}{\partial x_k}. \quad (6.172)$$

Именно так был получен тензор Минковского.

Из соотношения (6.172) сразу же получается, что

$$f_\alpha m_\alpha \equiv f^{\text{Л}} = \frac{\partial T_{\alpha k}^M}{\partial x_k} m_\alpha. \quad (6.173)$$

Раскрывая сумму в правой части и меняя местами члены равенства, получим (см. (6.169))

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}^M}{\partial x_\beta} m_\alpha - \frac{\partial g^M}{\partial t} = f^{\text{Л}}, \quad (6.174)$$

где через $f^{\text{Л}}$ обозначена плотность силы Лоренца.

Развернем теперь выражение $(\partial T_{\alpha k}^A / \partial x_k) m_\alpha$, имея в виду (6.171):

$$\frac{\partial T_{\alpha k}^A}{\partial x_k} m_\alpha = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} m_\alpha - \frac{\partial g^A}{\partial t} \equiv \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} m_\alpha - \frac{\partial g^M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (g^M - g^A). \quad (6.175)$$

Во втором звене равенства (6.175) учтено, что тензор натяжений Максвелла один и тот же как в тензоре Минковского, так и в тензоре Абрагама; третье звено (6.175) — это тождественная переписка второго звена. Но теперь уже два первых члена в последнем звене (6.175) можно заменить согласно (6.174), и тогда мы получим

$$\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} m_\alpha - \frac{\partial g^A}{\partial t} = f^{\text{Л}} + f^A. \quad (6.176)$$

В правой части соотношения (6.176) появился член f^A , представляющий собой производную от плотности импульса; по второму закону Пьютона производная от плотности импульса по времени — это плотность силы:

$$f^A = \frac{\partial}{\partial t} (g^M - g^A) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ [DB] - \frac{1}{c^2} [EH] \right\}. \quad (6.177)$$

В изотропной среде

$$f^A = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon\mu - \epsilon_0\mu_0) S = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{n^2 - 1}{c^2} S \right). \quad (6.178)$$

Плотность силы (6.177) и (6.178) называют плотностью силы Абрагама.

Тензоры Минковского и Абрагама дают различные выражения для плотности импульса электромагнитного поля. Выпишем соответствующие выражения для плотности импульса плоской элек-

ромагнитной волны. Для плоской электромагнитной волны в изотропном однородном диэлектрике связь между величиной вектора Пойтинга S , фазовой скоростью монохроматической волны v и плотностью энергии волны w дается простым соотношением:

$$S = w \cdot v, \quad (6.179)$$

$$v = c/n = (\varepsilon\mu/\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}. \quad (6.180)$$

Для плотности импульса получим соответственно из (6.170) и (6.171):

$$g^M = (n^2/c^2) S = (n^2/c^2) w (c/n) = (w/c) n, \quad (6.181)$$

$$g^A = (S/c^2) = (1/c^2) w (c/n) = (w/cn). \quad (6.182)$$

Будем считать, что энергия электромагнитного поля квантуется, т. е. что $w = N\hbar\omega$, где N — число квантов в единице объема. Тогда для импульса кванта в среде мы получим согласно (6.181) и (6.182):

$$p^M = (\hbar\omega/c) n, \quad (6.183)$$

$$p^A = (\hbar\omega/cn). \quad (6.184)$$

Какое из этих двух выражений «правильно»? Процедура вторичного квантования электромагнитного поля в веществе приводит к выражению (6.183). Допустим, что импульс кванта в среде p определяется выражением

$$p = (\hbar\omega/c) ns, \quad (6.185)$$

где s — единичный вектор в направлении распространения волны, а 4-вектор энергии-импульса кванта имеет вид

$$\vec{p} \left(\frac{\hbar\omega}{c} ns, \frac{\hbar\omega}{c} \right). \quad (6.186)$$

Если воспользоваться (6.186), можно получить верное выражение для условия излучения Вавилова — Черенкова (см. гл. 7). Казалось бы, это обстоятельство говорит в пользу (6.186) и тензора Минковского. Однако осмотнительное использование любого из тензоров даст правильный результат. Дело в том, что оба тензора удовлетворяют соотношению (6.127), являющемуся следствием уравнений поля. Важно знать, как определяется импульс электромагнитного поля в веществе. Разбить полный импульс поля на часть, относящуюся только к веществу, и только к полю, в общем случае невозможно. Но именно это пытаются делать, вводя импульс Абрагама. При переходе световой волны из вакуума в среду импульс переносится с проходящей в среду волной не полностью; часть импульса передается самой среде. Там, где нужно учитывать полный переданный импульс, нужно пользоваться тензором Минковского; когда речь идет об импульсе, связанном с излучением

в среде, нужно использовать тензор Абрагама. Выражение (6.185) для импульса фотона дает правильный ответ при рассмотрении эффекта Вавилова — Черенкова (см. гл. 7) потому, что в этом случае важен суммарный импульс, передаваемый среде черенковским электроном. Суммарный импульс, переданный фотону в среде, как раз и равен $\hbar\omega n/c$. Неудивительно, что квантование электромагнитного поля в диэлектриках приводит к выражению (6.185) для импульса. Это выражение представляет собой просто суммарный импульс электромагнитного поля, причем этот импульс связан и с полем, и с веществом (см. § 7.7).

Что касается силы, действующей на вещество, то она связана с силой Абрагама \mathbf{i} , естественно, с тензором Абрагама. В 1975 г. была предпринята попытка измерить силу Абрагама, которая, по видимому, привела к успешному результату.

Схема опыта приведена на рис. 6.7. Диск, изготовленный из титаната бария ($\epsilon \sim 4000$, $\mu \sim \mu_0$), имеет в центре небольшое отверстие. Оба края диска покрыты алюминием; таким образом, он

представляет собой цилиндрический конденсатор. Диск подвешен на длинной вольфрамовой нити, так что он может совершать крутильные колебания, находясь между полюсами электромагнита, создающего постоянное магнитное поле (10 кэс). К внутренней обкладке диска прикладывается переменное напряжение с максимумом в 150 в, внешняя обкладка заземлена тонкой золотой проволоочкой, не влияющей на колебания диска. Напряжение прикладывается в фазе с собственными колебаниями диска.

Силу Абрагама можно записать еще и так:

$$\mathbf{f}^A = \epsilon_0 \mu_0 (\kappa_m \kappa_e - 1) \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 (\kappa_m \kappa_e - 1) [\dot{\mathbf{E}} \mathbf{H}], \quad (6.187)$$

где

$$\kappa_e = \epsilon/\epsilon_0, \quad \kappa_m = \mu/\mu_0 \quad (6.188)$$

и учтено, что магнитное поле постоянно ($\dot{\mathbf{H}} = 0$). Для титаната бария $\kappa_m \sim 1$, поэтому

$$\mathbf{f}^A = [\epsilon_0 (\kappa_e - 1) \dot{\mathbf{E}}, \mu_0 \mathbf{H}] = [\dot{\mathbf{P}}, \mu_0 \mathbf{H}]; \quad (6.189)$$

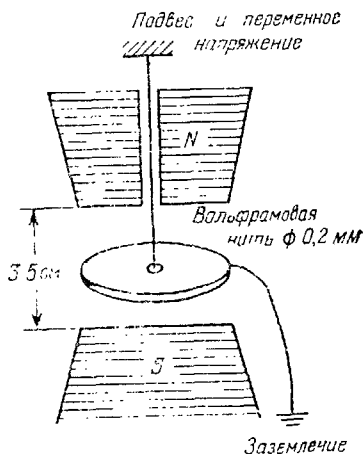


Рис. 6.7. Экспериментальное наблюдение силы Абрагама.

последнее равенство вытекает из того, что в однородной изотропной среде

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E} = \varepsilon_0 (\varkappa_e - 1) \mathbf{E}. \quad (6.190)$$

Физический смысл «силы Абрагама» в рассматриваемом частном случае очевиден. $\dot{\mathbf{P}}$ — это часть тока смещения, обусловленная движением связанных зарядов. По существу это просто сила Ампера. Нетрудно установить, что эта сила вызывает крутильный момент (электрическое поле направлено радиально). Существенно, конечно, что никакие другие силы, связанные с наличием электромагнитного поля, крутильного момента не дают.

По утверждению авторов эксперимента, наблюдаемая расклевка диска соответствует расчету, исходящему из наличия силы Абрагама. Еще раз повторим, что этот экспериментальный результат — весьма интересный сам по себе — отнюдь не «выбирает» между тензорами (6.169) и (6.171). Некоторые дополнительные замечания в связи с выбором выражения для импульса фотона в среде можно найти в § 7.7.

§ 6.13. Тензор энергии-импульса-натяжений сферически симметричного заряда. Если электрический заряд в вакууме покоится в системе K , то в этой системе существует только электрическое поле, и тензор энергии-импульса-натяжений легко может быть написан:

$$T_{ih} = \begin{pmatrix} T_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}, \quad (6.191)$$

где $w = \varepsilon_0 E^2/2$, а $T_{\alpha\beta} = \varepsilon_0 E_\alpha E_\beta - \delta_{\alpha\beta} w$. Если заряд движется со скоростью $-V$ относительно системы K' , то его тензор T'_{ih} может быть найден с помощью общих формул преобразования компонент тензора. В частности, для преобразования плотности импульса по оси x , т. е. $(i/c) T'_{14}$, и плотности энергии T'_{44} мы имеем согласно (П.1.31)

$$T'_{14} = -iV\Gamma^2 T_{11} + \Gamma^2 iV T_{44} = iV\Gamma^2 (w - T_{11}),$$

$$T'_{44} = \Gamma^2 T_{44} - V^2 \Gamma^2 T_{11} = \Gamma^2 \left(w - \frac{V^2}{c^2} T_{11} \right).$$

Найдем полную энергию и полный импульс точечного заряда, учитывая, что переход от элемента объема $d\mathcal{V}'$ в системе K' к элементу объема $d\mathcal{V}$ в K производится по формуле $d\mathcal{V}' = \frac{1}{\Gamma} d\mathcal{V}$:

$$U' = \int T'_{44} d\mathcal{V}' = \int T'_{44} \frac{1}{\Gamma} d\mathcal{V} = \Gamma \int (w - V^2 T_{11}) d\mathcal{V}, \quad (6.192)$$

$$G'_x = \frac{i}{c} \int T'_{14} d\mathcal{V}' = \frac{i}{c} \int T'_{14} \frac{1}{\Gamma} d\mathcal{V} = \frac{V\Gamma}{c} \int (T_{11} - w) d\mathcal{V}. \quad (6.193)$$

Очевидно, что

$$\int w d\mathcal{V}' = \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\mathcal{V}' = U.$$

Если в собственной системе отсчета заряда K он обладает сферической симметрией, так что $E_x^2 = E_y^2 = E_z^2 = E^2/3$, то

$$\int T_{11} d\mathcal{V}' = \varepsilon_0 \int \left(E_x^2 - \frac{E^2}{2} \right) d\mathcal{V}' = -\frac{\varepsilon_0}{6} \int E^2 d\mathcal{V}' = -\frac{U}{3}.$$

Следовательно, (6.192) и (6.193) принимают вид

$$U' = \Gamma U \left(1 + \frac{B^2}{3} \right), \quad (6.194)$$

$$G'_x = -\frac{4}{3} \frac{B}{c} \Gamma U. \quad (6.195)$$

Слагающие импульса G'_y и G'_z обращаются в нуль, так что

$$\mathbf{G}' = -\frac{4}{3} \frac{\mathbf{V}}{c^2} \Gamma U, \quad (6.196)$$

Появление знака «минус» в выражении для \mathbf{G}' объясняется тем, что заряд движется относительно системы K' со скоростью $-V$. Сравнивая полученные формулы (6.194) и (6.195) с формулами, определяющими преобразование импульса и энергии частицы от собственной системы отсчета к произвольной (см. (5.49)), мы видим, что эти формулы отличаются друг от друга. В свое время пытались объяснить массу электрона как электромагнитную, применяя соотношение

$$m = U/c^2. \quad (6.197)$$

Из (6.196) видно, что такая интерпретация не проходит, поскольку для «сдерживания» заряда необходимы дополнительные силы, компенсирующие расталкивание, т. е. дополнительная энергия, которую мы не учли. Если учесть механические напряжения, можно получить выражения

$$\mathbf{G}' = -\Gamma \mathbf{V} \frac{U}{c^2}, \quad U' = \Gamma U \quad (6.198)$$

(в полном соответствии с формулами (5.49)). Подробности см. в [13].

§ 6.14. Потенциалы поля в движущейся непроводящей среде *). В § 6.1 был введен 4-потенциал электромагнитного поля в вакууме. Конечно, электромагнитное поле можно определить сразу из уравнений Максвелла, не вводя потенциалов. Но во многих случаях использование потенциалов — как промежуточных величин

*) §§ 6.14 и 6.15 написаны Б. М. Болотовским и С. Н. Столяровым.

для определения полей E и B — оказывается весьма удобным, хотя бы потому, что уменьшается число функций, подлежащих определению. Зная всего лишь четыре компоненты вектор-потенциала, можно найти с их помощью все составляющие электрического и магнитного полей! Удобство использования потенциалов еще ярче проявляется в электродинамике движущихся сред, где материальные уравнения (6.74) и (6.75) оказываются значительно сложнее, чем в случае покоящейся среды.

Ниже будет показано, как можно получить выражения для потенциалов поля в движущейся среде. В качестве примера применения таких потенциалов будет рассмотрено распространение плоской электромагнитной волны в среде, которая движется относительно неподвижного наблюдателя. Этот пример имеет самое непосредственное отношение к вопросам, разбираемым в гл. 7. В данном параграфе используется аппарат тензорной алгебры, краткие сведения о котором можно найти в Приложении I, § 3.

Перейдем к выводу уравнений для 4-потенциала в движущихся средах. Поле в движущейся среде будем описывать двумя тензорами: тензором F_{ik} (см. (6.29)) и тензором f_{ik} (см. (6.31)). Тензор F_{ik} называют иногда *тензором поля*, а тензор f_{ik} — *тензором индукции*.

Введем четырехмерный потенциал поля в среде $\vec{\Phi}$, определив его следующим соотношением:

$$F_{ik} = c \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} \right), \quad (6.199)$$

совпадающим с формулой (6.28). Зная четыре компоненты потенциала Φ_k , мы можем по этой формуле определить все компоненты тензора F_{ik} , т. е. магнитную индукцию B и электрическое поле E . Для полного описания электромагнитного поля в среде необходимо знать еще компоненты тензора f_{ik} , т. е. составляющие векторов магнитного поля и электрической индукции. Если известен тензор поля $\vec{\mathfrak{F}}$, тензор индукции $\vec{\mathfrak{f}}$ можно определить с помощью материальных уравнений (6.73) и (6.80), устанавливающих связь между компонентами этих двух тензоров (напомним, что в векторной форме соотношение между тензорами $\vec{\mathfrak{F}}$ и $\vec{\mathfrak{f}}$ записано уравнениями Минковского (6.74) и (6.75)).

Материальные соотношения (6.73) и (6.80), определяющие связь между тензорами $\vec{\mathfrak{F}}$ и $\vec{\mathfrak{f}}$, можно записать в виде одного тензорного соотношения:

$$f_{ik} = \varepsilon_{iklm} F_{lm}, \quad (6.200)$$

где тензор четвертого ранга ε_{iklm} подбирается так, чтобы выполнялись соотношения Минковского (6.74) и (6.75). Нетрудно пока-

зять, что нужными свойствами обладает тензор следующего вида:

$$\varepsilon_{iklm} = \frac{1}{\mu c} (\delta_{il} - \kappa c^{-2} U_i U_l) (\delta_{lm} - \kappa c^{-2} U_l U_m). \quad (6.201)$$

Здесь δ_{il} — символ Кронекера, определенный формулой (П.1.4), а U_k — компоненты четырехмерной скорости, определенной в гл. 5 и имеющей компоненты $\vec{V}(\Gamma V, icI)$, где V — трехмерная скорость перемещения среды. Безразмерная константа κ определяется через показатель преломления n :

$$\kappa = \frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0} - 1 = n^2 - 1, \quad n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad (6.202)$$

Нетрудно видеть, что в пустоте $\kappa = 0$ и связь (6.200) между тензорами \vec{f} и \vec{F} принимает вид

$$f_{ik} = \frac{1}{\mu_0 c} F_{ik}, \quad (6.203)$$

который соответствует известным соотношениям между полями E , H и индукциями D , B в вакууме:

$$D = \varepsilon_0 E, \quad B = \mu_0 H. \quad (6.204)$$

В покоящейся среде тензор ε_{iklm} вида (6.201) дает между полями и индукциями соотношения

$$D = \varepsilon E, \quad B = \mu H. \quad (6.205)$$

В этом легко убедиться, если в формуле (6.201) положить $U_1 = U_2 = U_3 = 0$, а $U_4 = ic$.

Поскольку компоненты тензора F_{lm} выражаются через компоненты четырехмерного потенциала Φ_l , а компоненты тензора индукции f_{ik} связаны с F_{lm} соотношением (6.200), можно выразить и компоненты тензора f_{ik} через компоненты четырехмерного потенциала Φ_l . Иными словами, знание четырех функций Φ_l оказывается достаточным для определения всех компонент полей и индукций в движущейся среде.

Перейдем теперь к выводу уравнений для потенциалов поля в движущейся среде. Для этого воспользуемся уравнением (6.60):

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = s_i.$$

Подставим в это уравнение f_{ik} в виде (6.200). Тогда получим

$$\varepsilon_{iklm} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_k} = s_i. \quad (6.206)$$

Используя явное выражение (6.201) для тензора ε_{iklm} , а также формулу (6.28), выражающую F_{lm} через компоненты потенциала Φ_l , после несложных преобразований приведем уравнение (6.206)

к виду

$$\frac{1}{\mu c} (\delta_{il} - \kappa c^{-2} U_i U_l) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l} - \kappa c^{-2} U_k U_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_k} \right] - \left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \kappa c^{-2} \left(U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2 \right] \Phi_l \right\} = s_i. \quad (6.207)$$

Умножим обе части уравнения (6.207) на тензор

$$\left(\delta_{i\alpha} + \frac{\kappa}{1+\kappa} c^{-2} U_i U_\alpha \right).$$

Воспользовавшись легко проверяемым соотношением

$$(\delta_{il} - \kappa c^{-2} U_i U_l) \left(\delta_{i\alpha} + \frac{\kappa}{1+\kappa} c^{-2} U_i U_\alpha \right) = \delta_{i\alpha}, \quad (6.208)$$

получим окончательно

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \kappa c^{-2} \left(U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2 \right] \Phi_\alpha - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} - \kappa c^{-2} U_k U_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_k} \right) = -\mu c \left(\delta_{i\alpha} + \frac{\kappa}{1+\kappa} c^{-2} U_i U_\alpha \right) s_i. \quad (6.209)$$

Система уравнений (6.209) определяет все компоненты потенциала Φ_α по заданным источникам поля s_i в движущейся среде.

Эта система может быть упрощена, если на потенциалы наложить удачно выбранное дополнительное условие, например потребовать, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} - \kappa c^{-2} U_k U_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_k} = 0. \quad (6.210)$$

Это условие является обобщением известного условия Лоренца, налагаемого на потенциалы в вакууме (см. (6.8)). Возможность удовлетворить условию (6.210) доказывается так же, как и в обычной электродинамике.

При выполнении условия (6.210) система уравнений (6.209) упрощается и принимает следующий вид:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \kappa c^{-2} \left(U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2 \right\} \Phi_\alpha = -\mu c \left(\delta_{i\alpha} + \frac{\kappa}{1+\kappa} c^{-2} U_i U_\alpha \right) s_i. \quad (6.211)$$

Система (6.211) более удобна по сравнению с системой (6.209) в том отношении, что она состоит из четырех уравнений, в каждое из которых входит только одна компонента вектор-потенциала ($\alpha = 1, 2, 3, 4$). Решение системы (6.211) при заданных внешних источниках полностью определяет поле, создаваемое этими источниками в движущейся среде.

Если в движущейся среде имеется граница раздела, то система (6.211) должна быть дополнена соответствующими граничными условиями (см. § 6.8).

В качестве примера решения полученных уравнений рассмотрим электромагнитное поле в движущейся среде в отсутствие внешних источников (токов и зарядов). Поскольку в этом случае все $s_i = 0$, система (6.211) превращается в систему четырех однородных уравнений:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \kappa c^{-2} \left(U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2 \right\} \Phi_\alpha = 0. \quad (6.212)$$

В силу дополнительного условия (6.210) из четырех величин Φ_α только три являются независимыми. Поэтому мы можем положить $\Phi_4 = 0$, а три остальные величины Φ_1, Φ_2, Φ_3 будем считать компонентами некоторого вектора, который обозначим через \mathcal{A} . Мы видим, таким образом, что при такой калибровке вектор-потенциал Φ_α для движущейся среды является трехмерным векторным потенциалом \mathcal{A} .

В этом случае из системы уравнений (6.212) получается следующее уравнение для потенциала \mathcal{A} :

$$\left\{ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{n^2 - 1}{c^2 (1 - \beta^2)} \left[(V \nabla) + \frac{\partial}{\partial t} \right]^2 \right\} \mathcal{A} = 0, \quad (6.213)$$

где $\beta = V/c$, при дополнительном условии

$$\operatorname{div} \mathcal{A} - \frac{n^2 - 1}{c^2 (1 - \beta^2)} \left[(V \nabla) + \frac{\partial}{\partial t} \right] (V \mathcal{A}) = 0, \quad (6.214)$$

которое следует из дополнительного условия (6.210) при $\Phi_4 = 0$. Если известно решение уравнения (6.213) для потенциала \mathcal{A} , то поля \mathbf{E} и \mathbf{B} могут быть выражены через \mathcal{A} по формуле (6.28), которая в нашем случае принимает простой вид:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathcal{A}, \quad \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}. \quad (6.215)$$

Зная \mathbf{E} и \mathbf{B} , мы можем найти \mathbf{D} и \mathbf{H} с помощью материальных уравнений Минковского для движущейся среды (6.74) и (6.75).

Уравнение (6.213) определяет распространение свободных электромагнитных волн в движущейся среде (под свободными электромагнитными волнами обычно подразумевается поле в отсутствие зарядов и токов). Перейдем теперь к решению этого уравнения. Будем искать вектор-потенциал \mathcal{A} в виде плоской электромагнитной волны:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (6.216)$$

Подставляя это выражение в уравнение (6.213), получаем

$$\left\{ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) + \frac{n^2 - 1}{c^2 (1 - \beta^2)} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} - \omega)^2 \right\} \mathcal{A}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = 0. \quad (6.217)$$

Из соотношения (6.217) видно, что амплитуда \mathcal{A}_0 плоской волны отлична от нуля только для таких волн, для которых выполнено

условие

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) + \frac{n^2 - 1}{c^2(1 - \beta^2)} (kV - \omega)^2 = 0. \quad (6.218)$$

Уравнение (6.218) трудно вывести из дисперсионного уравнения, справедливого для плоских монохроматических волн в покоящейся среде:

$$k^2 - \omega^2/v^2 = 0, \quad k^2 \equiv \mathbf{k}^2.$$

Мы перепишем его в виде

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) - \frac{n^2 - 1}{c^2} \omega^2 = 0.$$

В скобки мы заключили инвариантную относительно преобразований Лоренца величину — квадрат четырехмерного волнового вектора в вакууме $k \left(k, i \frac{\omega}{c}\right)$. Величина в скобках сохраняет во всех инерциальных системах отсчета свой вид и численное значение. Второе слагаемое последнего равенства преобразуется как частота ω . В системе отсчета, в которой среда движется со скоростью V , вместо ω следует написать

$$\omega' = (\omega - kV) / \sqrt{1 - V^2/c^2}$$

(см. по этому поводу § 7.2).

В силу этих соображений в системе отсчета, относительно которой среда движется со скоростью V , дисперсионное уравнение как раз и приобретает вид (6.218):

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 - 1}{c^2(1 - \beta^2)} (\omega - kV)^2 = 0.$$

Это условие определяет связь между волновым вектором k и частотой ω плоской электромагнитной волны, распространяющейся в движущейся среде. Дополнительные условия (6.214) для такой волны принимают вид

$$\left(\mathbf{A}_0, \mathbf{k} + V \frac{n^2 - 1}{c^2(1 - \beta^2)} (\omega - kV)\right) = 0. \quad (6.219)$$

Из условия обращения в нуль скалярного произведения (6.219) следует, что в движущейся среде вектор \mathbf{A}_0 перпендикулярен не направлению распространения волны, определяемому волновым вектором k , а линейной комбинации волнового вектора k и вектора скорости среды V . В двух частных случаях — когда волна распространяется в вакууме ($n = 1$), а также когда среда покоится ($V = 0$) — условие (6.219) переходит в известное условие поперечности свободных электромагнитных волн: $\mathbf{A}_0 k = 0$, из которого следует, что в свободной электромагнитной волне векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} ,

\mathbf{B} и \mathbf{D} направлены перпендикулярно волновому вектору, т. е. направлению распространения волны. В движущейся среде такая поперечность волн, вообще говоря, не имеет места. Действительно, для плоской волны (6.216) поля \mathbf{E} и \mathbf{B} определяются по формулам (6.215):

$$\mathbf{B} = -i [k \mathbf{A}_0] e^{i(\omega t - k r)}, \quad \mathbf{E} = -i \omega \mathbf{A}_0 e^{i(\omega t - k r)}.$$

Отсюда видно, что вектор \mathbf{B} перпендикулярен волновому вектору k , а вектор \mathbf{E} — нет (в силу условия (6.219) вектор \mathbf{A}_0 не является поперечным).

В уравнение (6.217), связывающее между собой волновой вектор k и частоту ω волны в движущейся среде, входит скалярное произведение kV . Это значит, что условия распространения волны зависят от того, какой угол составляет направление распространения (или, что то же самое, волновой вектор k) со скоростью среды V . Это обстоятельство отражает явление увлечения света движущейся средой. Рассмотрим это явление подробнее для случая малых скоростей. Будем считать, что величина $V = V/c$ является малой, и опустим в уравнении (6.218) все степени V выше первой. Мы получим

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 + \frac{n^2 - 1}{c^2} [\omega^2 - 2\omega (kV)] = 0,$$

или же

$$\omega^2 - 2kV \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \omega - \frac{k^2}{\epsilon\mu} = 0.$$

Решая в том же приближении полученное квадратное уравнение для ω , получим

$$\omega = \pm \frac{k}{\sqrt{\epsilon\mu}} + kV \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \quad (6.220)$$

Из двух знаков перед первым слагаемым в правой части нужно выбрать знак плюс, так как при $V = 0$ мы должны получить известное соотношение между ω и k в покоящейся среде:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}; \quad (6.221)$$

здесь мы ввели показатель преломления покоящейся среды n . Величина c/n — фазовая скорость света в покоящейся среде.

Если угол между векторами k и V обозначить через ϑ , соотношение (6.220) при указанном выборе знаков примет вид

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + V \cos \vartheta \left(1 - \frac{1}{n^2}\right). \quad (6.222)$$

Величина ω/k в выражении (6.222), так же как и в случае покоящейся среды — см. (6.221), — определяет фазовую скорость

света, на этот раз в движущейся изотропной среде. Сравнивая выражения (6.222) и (6.221), мы видим, что фазовая скорость света в движущейся среде различна в различных направлениях. Если свет распространяется *по движению* среды ($\cos \vartheta = 1$), то фазовая скорость равна

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V.$$

Если свет распространяется *против движения* среды ($\cos \vartheta = -1$), то

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V.$$

Множитель $(1 - 1/n^2)$ — это так называемый *коэффициент увлечения* света, экспериментально измеренный Физо в опыте, где движущейся средой была вода.

§ 6.15. Потенциалы поля в движущейся проводящей среде. Прежде чем перейти к уравнениям поля в движущейся проводящей среде, напомним основные сведения о распространении волн в покоящейся среде при наличии проводимости.

В этом случае система уравнений Максвелла имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\dot{\mathbf{B}}, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{j} + \sigma \mathbf{E}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (6.223)$$

Здесь ρ и \mathbf{j} — плотность заряда и плотность тока «сторонних» источников. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением системы (6.223) без «сторонних» источников, т. е. будем считать, что $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$. Решение системы (6.223) ищем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, & \mathbf{D} &= \mathbf{D}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, & \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}, \end{aligned} \quad (6.224)$$

где \mathbf{E}_0 , \mathbf{D}_0 , \mathbf{H}_0 , \mathbf{B}_0 — постоянные амплитуды, не зависящие ни от координат, ни от времени. Мы, таким образом, ищем решение в виде плоской волны с волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω .

Подставляя выражения для полей (6.224) в систему уравнений (6.223), получим, с учетом $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, следующие, уже не дифференциальные, а алгебраические соотношения, связывающие между собой амплитуды полей:

$$\begin{aligned} [\mathbf{k}, \mathbf{E}_0] &= \omega \mathbf{B}_0, & [\mathbf{k}, \mathbf{H}_0] &= -\omega \mathbf{D}_0 - i\sigma \mathbf{E}_0, \\ (\mathbf{k}\mathbf{D}_0) &= 0, & (\mathbf{k}\mathbf{B}_0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.225)$$

При этом мы воспользовались следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}) &= i [\mathbf{k}, \mathbf{E}_0] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \\ \operatorname{div} (\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}) &= i (\mathbf{k}\mathbf{E}_0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Систему (6.225) следует дополнить материальными соотношениями, устанавливающими связь между полями и индукциями. В простейшем случае

изотропной покоящейся среды мы приемем следующие соотношения:

$$D_0 = \epsilon E_0, \quad B_0 = \mu H_0. \quad (6.226)$$

Мы будем предполагать, что величины ϵ и μ не зависят от амплитуд поля (что дает линейную связь между полями E_0 , H_0 и индукциями D_0 и B_0 соответственно). Однако ϵ и μ могут, вообще говоря, зависеть не только от полей, но и от частоты ω и длины волны $\lambda = 2\pi/k$. Если ϵ и μ зависят только от частоты, говорят, что имеет место *частотная дисперсия*. Если же ϵ и μ зависят от длины волны, то говорят, что среда обладает *пространственной дисперсией*.

Если материальные уравнения (6.226) подставить в систему (6.225), получим уравнения, в которые входят только амплитуды полей E_0 и H_0 :

$$\begin{aligned} [k, E_0] &= \mu\omega H_0, & [kH_0] &= -\epsilon\omega E_0 - i\sigma E_0, \\ \epsilon(kE_0) &= 0, & \mu(kH_0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.227)$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что ϵ и μ не обращаются в нуль. Тогда из двух последних уравнений следует, что поля E_0 и H_0 перпендикулярны волновому вектору k . Такие волны называют поперечными. Продольные волны, возникающие, например, при $\epsilon = 0$ (тогда, как нетрудно видеть, получается $E_0 \parallel k$), мы здесь рассматривать не будем.

Умножим первое уравнение системы (6.227) векторно на волновой вектор k . Мы получим

$$[k [k E_0]] = \mu\omega [k H_0]. \quad (6.228)$$

Значение $[k H_0]$ подставим из второго уравнения системы (6.227), а двойное векторное произведение перепишем с помощью известной формулы:

$$[k [k E_0]] = k(kE_0) - k^2 E_0 = -k^2 E_0.$$

В последнем равенстве мы учли поперечность поля E_0 , т. е. соотношение $(kE_0) = 0$. В результате этих преобразований получаем

$$(k^2 - \epsilon\mu\omega^2 - i\sigma\omega)E_0 = 0. \quad (6.229)$$

Таким образом, амплитуда E_0 поперечной электромагнитной волны в покоящейся проводящей среде может быть отлична от нуля лишь в том случае, если выполняется равенство

$$k^2 - \epsilon\mu\omega^2 - i\sigma\omega = 0. \quad (6.230)$$

Это условие называется *дисперсионным соотношением*. Нетрудно убедиться в том, что это же самое дисперсионное соотношение (6.230) должно выполняться для того, чтобы и магнитный вектор H_0 в поперечной волне был отличен от нуля. Для того чтобы это показать, достаточно умножить векторно на k второе уравнение системы (6.227) и использовать затем первое уравнение этой системы.

Будем считать, что частота волны ω — заданная величина. Предположим, далее, что поле зависит только от координаты z и от времени. Тогда поля E и H мы можем представить в виде

$$E = E_0 e^{ikhz - i\omega t}, \quad H = H_0 e^{ikhz - i\omega t}, \quad (6.231)$$

причем, как это следует из системы уравнений (6.227), мы можем считать, что вектор E_0 направлен в положительном направлении оси x , а вектор H_0 — в положительном направлении оси y . Таким образом, три вектора k , E_0 , H_0 образуют правую тройку векторов.

При фиксированной частоте ω дисперсионное уравнение (6.230) дает для волнового вектора k следующие значения:

$$k_{1,2} = \pm \omega \sqrt{\epsilon \mu + i \frac{\sigma \mu}{\omega}}. \quad (6.232)$$

Волновой вектор k в среде с проводимостью оказывается комплексной величиной. Для дальнейшего важно, что проводимость σ всегда положительна. Это видно хотя бы из того, что Джоулево тепло, которое выделяется в единице объема проводящей среды за единицу времени, равно $Q = j_{\text{пр}} E = \sigma E^2 > 0$.

Будем считать, что частота ω положительна. Тогда в выражении (6.232) мнимая часть подкоренного выражения положительна. Предполагая, что проницаемости ϵ и μ также положительны, приходим, что решение k_1 лежит в первой четверти плоскости комплексного переменного (т. е. у решения k_1 мнимая и действительная части положительны):

$$k_1 = k'_1 + ik''_1 \quad (k'_1, k''_1 > 0). \quad (6.233)$$

Второе решение k_2 отличается от первого только знаком:

$$k_2 = -k_1 = -k'_1 - ik''_1, \quad (6.234)$$

и мы можем записать оба решения с помощью одной формулы:

$$k = \pm k' \pm ik'', \quad (6.235)$$

где k' и k'' — положительные величины. Величина $\pm k'$ есть вещественная часть волнового вектора k , а величина $\pm k''$ — его мнимая часть.

Подстановка (6.235) в выражения (6.231) для полей дает

$$E = E_0 e^{\mp k''z} \cdot e^{i(\pm k'z - \omega t)}, \quad H = H_0 e^{\mp k''z} \cdot e^{i(\pm k'z - \omega t)}. \quad (6.236)$$

В этих формулах в показателях экспоненты нужно брать либо одновременно все верхние, либо одновременно все нижние знаки (там, где имеются варианты « \pm » или « \mp »). Мы, таким образом, получаем два решения для полей E , H : одно, пропорциональное

$$e^{-k''z} \cdot e^{i(k'z - \omega t)}, \quad (6.237)$$

а другое, пропорциональное

$$e^{k''z} \cdot e^{-i(k'z + \omega t)}. \quad (6.238)$$

На первый взгляд кажется, что одно из них, (6.237), затухает с ростом z по показательному закону (множитель $e^{-k''z}$), а второе, (6.238), растет по показательному закону (множитель $e^{k''z}$). В действительности оба решения представляют собой затухающие волны. Для того чтобы в этом убедиться, рассмотрим, например, выражение (6.238). Его можно рассматривать как волну вида

$$e^{-i(k'z + \omega t)}, \quad (6.239)$$

амплитуда которой равна $e^{k''z}$, т. е. экспоненциально растет с ростом z . Следует иметь в виду, что такое представление оправдано лишь в том случае, если мнимая часть k'' волнового вектора k мала в сравнении с действительной частью k' , т. е. изменение амплитуды волны на расстояниях порядка ее длины невелико.

Фаза волны (6.239) определяется выражением, стоящим в показателе экспоненты:

$$\varphi = k'z + \omega t. \quad (6.240)$$

Эта фаза постоянна при

$$z = -\frac{\omega}{k'} t + \text{const.} \quad (6.241)$$

т. е. плоскости постоянной фазы перемещаются вдоль оси со скоростью

$$v_{\Phi} = -\omega/k'. \quad (6.242)$$

Эта скорость называется *фазовой скоростью* волны и определяет направление распространения волны. Знак минус в (6.242) показывает, что волна (6.238) распространяется в отрицательном направлении оси z . Но если мы вместе с волной будем двигаться в отрицательном направлении оси z , то амплитуда волны, пропорциональная множителю $e^{k''z}$, будет уменьшаться по экспоненциальному закону. Нетрудно видеть, что волна (6.237) распространяется в положительном направлении оси z с той же (по величине) фазовой скоростью. Амплитуда этой волны пропорциональна множителю $e^{-k''z}$ и, следовательно, также уменьшается в направлении распространения.

Таким образом, в проводящей среде существуют две волны заданной частоты, которые распространяются с равными по величине фазовыми скоростями в противоположных направлениях. Амплитуды каждой из этих волн уменьшаются по экспоненциальному закону в направлении распространения.

Из уравнений Максвелла следует, что между амплитудами E_0 и H_0 существует зависимость, которая выражается, например, первым уравнением системы (6.227). Учитывая это уравнение, можем записать выражения для полей (6.231) в виде

$$\begin{aligned} E &= E_0 e^{-k''z} \cdot e^{i(\pm k'z - \omega t)}, \\ H &= \frac{1}{i\omega} [k E_0] e^{-k''z} \cdot e^{i(\pm k'z - \omega t)}. \end{aligned} \quad (6.243)$$

Таким образом, для того чтобы определить свободную плоскую электромагнитную волну в проводящей среде, нужно задать, помимо характеристик среды ϵ , μ , σ , еще поляризацию поля, т. е., например, направление и величину амплитуды электрического поля E_0 .

Как видно из решения (6.232) дисперсионного уравнения (6.230), величина волнового вектора k комплексна. Поскольку мы рассматриваем одномерный случай, когда поле зависит только от координаты z и времени, мы можем считать, что волновой вектор k направлен по оси z :

$$k = k' + ik'', \quad (6.244)$$

где оба вектора k' и k'' направлены по оси z . Тогда, в силу третьего уравнения (6.227), вектор E_0 перпендикулярен оси z . Пусть этот вектор направлен по оси x :

$$E_0 = (E_0, 0, 0). \quad (6.245)$$

Тогда

$$H_0 = (0, H_0, 0), \quad (6.246)$$

$$H_0 = \frac{1}{i\omega} k E_0, \quad (6.247)$$

т. е. как видно из (6.243), магнитное поле направлено по оси y .

Будем для простоты считать величину E_0 действительной. Тогда величина H_0 является комплексной, поскольку в выражение для H_0 (6.247) входит комплексная величина k (6.232).

Представим волновой вектор k в виде

$$k = k' + ik'' = |k| e^{i\Phi}, \quad (6.248)$$

где $|k| = \sqrt{(k')^2 + (k'')^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = k''/k'$. Тогда выражения (6.243) для полей можно переписать в виде

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 e^{-k''z} e^{i(k'z - \omega t)}, \\ H_y &= \frac{1}{\mu\omega} |k| E_0 e^{-k''z} e^{i(k'z - \omega t + \varphi)}, \end{aligned} \quad (6.249)$$

где мы взяли для простоты только верхние знаки в (6.243).

Из этих выражений видно, что в проводящей среде волны электрического и магнитного полей сдвинуты по фазе на угол $\varphi = \operatorname{arctg}(k''/k')$. В отсутствие проводимости $k'' = 0$ и сдвиг по фазе пропадает.

Реальные физические поля E и H не могут быть комплексными, и физический смысл имеют либо действительные, либо мнимые части выражений (6.249). Взяв, например, действительные части от этих выражений, получаем

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 e^{-k''z} \cos(k'z - \omega t), \\ H_y &= \frac{1}{\mu\omega} |k| E_0 e^{-k''z} \cos(k'z - \omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (6.250)$$

Мнимые части выражений (6.249) также дают равноправные решения:

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 e^{-k''z} \sin(k'z - \omega t), \\ H_y &= \frac{1}{\mu\omega} |k| E_0 e^{-k''z} \sin(k'z - \omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (6.251)$$

В заключение рассмотрим выражение (6.232) для волнового вектора k для случаев малой и большой проводимости среды. Запишем выражение (6.232), вбрав в нем для простоты знак плюс:

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon\mu + i \frac{\sigma\mu}{\omega}}. \quad (6.252)$$

Если второе слагаемое в подкоренном выражении по абсолютной величине много меньше, чем первое (малая проводимость), то справедливо приближенное выражение

$$k = \omega \sqrt{\varepsilon\mu} + i \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\sigma}{2} = k' + ik''. \quad (6.253)$$

В этом случае

$$k' = \omega \sqrt{\varepsilon\mu}, \quad k'' = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\sigma}{2}. \quad (6.254)$$

Как видно из этих формул, в случае малой проводимости расстояние L , на котором волна (6.250) затухает в e раз, обратно пропорционально проводимости:

$$L = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{2}{\sigma}. \quad (6.255)$$

Если ε , μ и σ не зависят от частоты, то величина L имеет одно и то же значение для волн всех частот.

В обратном предельном случае большой проводимости мы можем пренебречь первым слагаемым под корнем в (6.252) по сравнению со вторым. Это дает

$$k = (1 + i) \sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}}. \quad (6.256)$$

В этом случае действительная и мнимая части волнового вектора k равны по величине. Расстояние L , на котором волна затухает в e раз, равно

$$L = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu}}. \quad (6.257)$$

Эта величина носит название глубины скин-слоя (от английского «skin» — шкура); название обусловлено тем, что если плоская электромагнитная волна падает на хорошо проводящее тело (металл), то она быстро затухает, и поэтому поле отлично от нуля только в узком слое вблизи поверхности, причем толщина (глубина) этого слоя по порядку величины равна L . Если σ и μ не зависят от частоты, то глубина скин-слоя L обратно пропорциональна корню из частоты падающей волны.

В приведенных выше рассуждениях мы считали, что частота электромагнитной волны ω есть величина заданная, и из дисперсионного уравнения (6.230) находили волновой вектор. Мы могли бы поступить иначе, а именно задать длину волны или отвечающий ей действительный волновой вектор $k = 2\pi/\lambda$ и затем из дисперсионного уравнения искать частоту волны. Это дает выражение для частоты волны ω через волновой вектор k и параметры среды ϵ , μ , σ :

$$\omega_{1,2} = -i \frac{\sigma}{\epsilon} \pm \sqrt{\frac{4k^2}{\epsilon\mu} - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}}. \quad (6.258)$$

Мы не будем здесь подробно анализировать это выражение; отметим только, что оба корня $\omega_{1,2}$ при положительных значениях ϵ , μ и σ всегда имеют отрицательную мнимую часть, что соответствует затуханию волны во времени. Действительно, зависимость поля от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$. Величина ω определяется комплексным выражением (6.258), которое мы можем записать в виде $\omega = \omega' + i\omega''$, где ω' — действительная часть частоты, а ω'' — мнимая часть. Если $\omega'' < 0$, то легко видеть, что множитель $e^{-i\omega t}$ будет затухать со временем по закону $e^{+\omega'' t}$ (не забудьте, что ω'' — отрицательная величина, а время изменяется только в положительном направлении!).

Рассмотрим теперь уравнения для потенциалов электромагнитного поля в движущейся проводящей среде. Как известно, в покоящейся однородной изотропной проводящей среде между током проводимости \mathbf{j}_c и электрическим полем \mathbf{E} существует соотношение

$$\mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E}.$$

При переходе к четырехмерным обозначениям мы должны считать, что компоненты тока образуют четырехмерный вектор, а электрическое поле выражается через элементы тензора второго ранга F_{ik} (см. (6.29)). Поэтому в релятивистской инвариантной записи величина σ должна выражаться через элементы некоторого тензора третьего ранга:

$$j_{m,c} = \sigma_{mkl} F_{kl}. \quad (6.259)$$

Нетрудно проверить, что для тензора третьего ранга σ_{mkl} можно принять следующее выражение:

$$\sigma_{mkl} = \frac{\sigma}{2} (\delta_{mk} U_l - \delta_{ml} U_k). \quad (6.260)$$

Если это выражение подставить в соотношение (6.259), то в системе покоя среды ($U_1 = U_2 = U_3 = 0$, $U_4 = ic$) получим $\mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E}$. Если же среда движется со скоростью \mathbf{V} , то из (6.259) и (6.260) с учетом (6.29а) получаем

$$j_{i,c} = \sigma U_k F_{ik}. \quad (6.261)$$

Это соотношение, в соответствии с формулой (6.81), эквивалентно следующим формулам:

$$j_c = \sigma \Gamma \{ E + [V B] \}, \quad \rho_c = \sigma \Gamma \left(\frac{V}{c^2} E \right).$$

Первое из этих соотношений имеет простой физический смысл — это закон Ома для движущегося проводника. Источитель при σ в первом соотношении определяет электрическое поле в системе покоя среды. Второе соотношение говорит о том, что если покоящийся проводник с током электрически нейтрален, то при его движении со скоростью V на нем появляется электрический заряд (см. § 6.1, где дано физическое истолкование этого явления).

В случае движущейся проводящей среды уравнение (6.60) следует записать в виде

$$\frac{\partial f_{mk}}{\partial x_k} = (s_m + s_{m,c}),$$

где $s_{m,c} \equiv j_{m,c}$ определяется формулами (6.259), (6.230) и (6.261). С учетом (6.261) последнее равенство переищется так:

$$\frac{\partial f_{mk}}{\partial x_k} - \sigma F_{mk} U_k = s_m.$$

Подставим в это уравнение значение f_{mk} из соотношения (6.200), где тензор $\varepsilon_{mkl n}$ определяется согласно (6.201). Тогда последнее уравнение станет уравнением для компонент тензора F_{mk} . Если теперь в полученном уравнении выразить F_{mk} через потенциалы поля по формулам (6.199), мы получим уравнение для потенциалов поля в движущейся проводящей среде:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \frac{\kappa}{c^2} \left(U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2 - \sigma \mu \left(U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right\} \Phi_m = -\mu c \left(\delta_{mk} + \frac{\kappa c^{-2}}{1 + \kappa} U_m U_k \right) s_k. \quad (6.262)$$

При этом потенциалы Φ_m удовлетворяют следующему дополнительному условию:

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} - \frac{\kappa}{c^2} U_k U_t \frac{\partial \Phi_t}{\partial x_k} - \sigma \mu U_k \Phi_k = 0.$$

Это условие является обобщением условия (6.210) на случай среды с проводимостью.

Если в среде отсутствуют источники s_k , то мы получаем из (6.262) систему однородных уравнений

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \frac{\kappa}{c^2} \left(U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2 - \sigma \mu \left(U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right\} \Phi_i = 0.$$

Эта система определяет распространение свободных электромагнитных волн в движущейся среде, которая в системе покоя характеризуется диэлектрической проницаемостью ε , магнитной проницаемостью μ и проводимостью σ .

Если в такой среде распространяется плоская электромагнитная волна вида (6.216), то соотношение между частотой ω и волновым вектором k в этой волне, как следует из последнего уравнения, имеет вид

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \kappa \Gamma^2 (\omega - kV)^2 + i \sigma \mu \Gamma (\omega - kV) = 0. \quad (6.263)$$

Это дисперсионное уравнение получается из предыдущего дифференциального уравнения, если учесть, что в применении к плоской волне вида (6.216) оператор градиента $\nabla = \partial/\partial r$ равносильно умножению на $-ik$, а оператор

дифференцирования по времени $\partial/\partial t$ равносильно умножению на $i\omega$. Если проводимость среды σ обращается в нуль, то уравнение (6.263) переходит в уравнение (6.218).

Из уравнения (6.263) мы можем, задав частоту электромагнитной волны ω и направление ее распространения, определить величину волнового вектора k (и тем самым длину волны $\lambda = 2\pi/k$). И наоборот, задав величину и направление волнового вектора k , мы можем определить частоту волны ω . Если одну из величин k или ω считать заданной, то уравнение (6.263) является квадратным уравнением относительно другой из этих величин. Это квадратное уравнение имеет комплексные коэффициенты, и поэтому его решения являются комплексными. Из вида волны (6.216) следует, что если частота ее комплексна, то волна уже не является монохроматической и либо нарастает, либо затухает во времени по экспоненциальному закону. При этом показатель затухания (или нарастания) равен мнимой части частоты ω . Если мнимая часть ω'' частоты ω положительна, то волна затухает со временем, а если мнимая часть ω'' отрицательна, то волна нарастает во времени.

Если в уравнении (6.263) заданными являются частота ω волны и направление ее распространения (угол θ между V и k), то мы получаем квадратное уравнение для абсолютной величины волнового вектора k . Решение этого уравнения также дает для k , вообще говоря, комплексные значения. Два комплексно сопряженных корня уравнения (6.263) для этого случая соответствуют тому, что волна нарастает или затухает в пространстве по экспоненциальному закону. В дальнейшем мы ограничимся случаем малого затухания, когда можно считать мнимую часть решения уравнения (6.263) для k малой по сравнению с вещественной частью. Для этого случая знак мнимой части k не определяет того, нарастает или затухает волна в пространстве. Действительно, пусть одно из решений уравнений (6.263) при заданных ω и θ равно $k' + ik''$, где k' — действительная часть k , а k'' — мнимая. Направление волнового вектора определяем единичным вектором n , так что

$$k = kn = (k' + ik'')n.$$

Направим ось z декартовой системы координат по вектору n . Тогда волна (6.216) запишется в виде

$$A = A_0 e^{i(\omega t - kr)} = A_0 e^{k''z} \cdot e^{i(\omega t - k'z)}. \quad (6.264)$$

При малом затухании ($k'' \ll k'$) мы можем считать, что выражение (6.264) определяет волну с волновым вектором k' и частотой ω , причем амплитуда этой волны меняется по экспоненциальному закону $e^{k''z}$. Пусть k'' есть положительная величина. Для того чтобы сделать какие-либо заключения о поведении волны, надо знать направление распространения волны, т. е. знак ее фазовой скорости. Фазовая скорость волны равна отношению ω/k' . Действительно, плоскость постоянной фазы волны (6.264) определяется равенством $\omega t - k'z = \text{const}$, откуда $z = \frac{\omega}{k'}t - \frac{\text{const}}{k'}$. Из последнего соотношения видно, что плоскость постоянной фазы перемещается со скоростью ω/k' . Если $\omega/k' > 0$, то волна (6.264) распространяется в положительном направлении оси z . Тогда при $k'' > 0$ волна нарастает, а при $k'' < 0$ затухает. Если же $\omega/k' < 0$, то волна распространяется в отрицательном направлении оси z . Тогда при $k'' > 0$ волна затухает в направлении своего распространения (хотя амплитуда ее и нарастает в положительном направлении оси z). Таким образом, для того чтобы решить вопрос о том, затухает или нарастает волна, мало знать закон изменения ее амплитуды в пространстве, нужно еще знать направление ее распространения.

Существует простой способ, позволяющий судить о том, затухает или нарастает волна в направлении своего распространения. Составим выражение $\omega k''/k'$. Если это произведение положительно, то волна нарастает в направ-

лении своего распространения, в противном случае волна затухает. Нетрудно видеть, что выражение $\omega k''/k'$ есть произведение фазовой скорости волны на декремент затухания волны в пространстве.

Рассмотрим теперь решение дисперсионного уравнения (6.263). Пусть волновой вектор волны равен по величине k и составляет с вектором скорости среды \mathbf{V} угол θ . В этом случае $kV = kV \cos \theta$. Дисперсионное уравнение (6.263) является квадратным уравнением относительно частоты ω . Решая его при малой проводимости σ и отбрасывая все степени σ выше первой, получаем

$$\omega_{1,2} = (1 + \kappa \Gamma^2)^{-1} \left\{ \kappa \Gamma^2 k V \cos \theta \pm ck \sqrt{\Delta} \right\} + i \frac{c}{2} \sigma \mu \Gamma \left[1 \mp \frac{B \cos \theta}{\sqrt{\Delta}} \right] \quad (6.265)$$

где $\kappa = \frac{n^2 - 1}{c^2}$, $B = \frac{V}{c}$, $\Gamma = (1 - B^2)^{-1/2}$, а $\Delta = 1 \mp \kappa \Gamma^2 (1 - B^2 \cos^2 \theta)$.

Как видно из этого выражения, в случае, когда в системе покоя среды $\epsilon \mu > \epsilon_0 \mu_0$, т. е. при $\kappa = (n^2 - 1)/c^2 > 0$, мнимая часть частоты ω в обоих решениях всегда положительна, какова бы ни была скорость движения среды \mathbf{V} . А это значит, что при заданном волновом векторе \mathbf{k} волна (6.216) всегда затухает во времени. Декремент затухания пропорционален проводимости σ .

Рассмотрим теперь случай, когда заданными величинами в волне (6.216) являются частота ω и направление распространения волны, определяемое углом θ . Тогда из дисперсионного уравнения (6.263) можно определить величину волнового вектора k , отвечающую заданным значениям ω и θ . Решения этого уравнения имеют вид $k'_{1,2} = k'_{1,2} - i k''_{1,2}$. При малых σ после небольших преобразований получаем

$$\begin{aligned} ck'_1 &= \omega (1 + \kappa \Gamma^2) (\kappa B \Gamma^2 \cos \theta + \sqrt{\Delta})^{-1}, \\ 2ck''_1 &= -c \sigma \mu \Gamma (1 - B^2 \cos^2 \theta) (1 + B \cos \theta \sqrt{\Delta})^{-1}; \\ ck'_2 &= -\omega (\kappa B \Gamma^2 \cos \theta + \sqrt{\Delta}) (1 - \kappa B^2 \Gamma^2 \cos^2 \theta)^{-1}, \\ 2ck''_2 &= c \sigma \mu \Gamma (1 + B \cos \theta \sqrt{\Delta}) (1 - \kappa B^2 \Gamma^2 \cos^2 \theta)^{-1} \Delta^{-1/2}. \end{aligned} \quad (6.266)$$

Здесь величина Δ в принятых нами предположениях всегда положительна. С помощью выражений (6.266) можно пойти формулы для произведений $\omega k''_{1,2}/k'_{1,2}$. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{k'_1} k''_1 &= - \frac{\sigma \mu c^2 \Gamma (1 - B^2 \cos^2 \theta) (\kappa B \Gamma^2 \cos \theta + \sqrt{\Delta})}{2(1 + \kappa \Gamma^2) (1 + B \cos \theta \sqrt{\Delta})}, \\ \frac{\omega}{k'_2} k''_2 &= - \frac{\sigma \mu c^2 \Gamma (1 + B \cos \theta \sqrt{\Delta})}{2(\kappa B \Gamma^2 \cos \theta + \sqrt{\Delta}) \sqrt{\Delta}}. \end{aligned}$$

Отсюда сразу видно, что при условии $\kappa > 0$ произведения $\omega k''_{1,2}/k'_{1,2}$ при любой скорости движения среды всегда отрицательны. Это значит, что в движущейся проводящей среде волна (6.216) всегда затухает в направлении своего распространения. Единственная особенность движущейся среды заключается в том, что при скорости движения среды, удовлетворяющей условию $1 - \kappa B^2 \Gamma^2 \cos^2 \theta = 0$ или $B = 1/(1 + \kappa \cos^2 \theta)$, вещественная и мнимая части второго решения одновременно меняют знак.

Потенциалы, получаемые как решения уравнений (6.214) и (6.262), могут быть с успехом использованы для решения других задач (см. список литературы), но большинство из них выходит из круга тех вопросов, которые рассматриваются в этой книге.

ОПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ И СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Свет, как частный случай электромагнитных волн, описывается теорией Максвелла. Теория Максвелла, как мы убедились в предыдущей главе, удовлетворяет всем требованиям теории относительности и поэтому должна правильно описывать свойства такого типично релятивистского объекта, каким является свет. Но и в теории относительности распространение света в вакууме занимает особое место. Мы уже подчеркивали, что скорость света в вакууме — это верхний предел возможной скорости передачи сигнала и недостижимая граница скорости для тел, обладающих конечной массой покоя. Кроме того, основой всей СТО является утверждение о том, что скорость света в вакууме имеет одно и то же значение, в какой бы ИСО ее ни определяли.

Теория Максвелла — макроскопическая теория. В этой главе удобно привлечь также микроскопическую и даже отчасти квантовую картину. Речь идет о введении фотонов. В некотором отношении введение квантовых представлений ведет к очень наглядной картине. Использование теории относительности становится просто необходимым, когда рассматриваются оптические явления, связанные с относительным движением тел (доплер-эффekt, абerrация).

§ 7.1. Свойства плоских световых волн. Теория Максвелла показывает, что в однородной изотропной среде ($\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$), проводимость которой σ равна нулю, зависящие от времени векторы поля \mathbf{E} и \mathbf{H} (так же как и пропорциональные им \mathbf{D} и \mathbf{B}) удовлетворяют волновым уравнениям

$$\begin{aligned} \square \mathbf{E} &\equiv \Delta \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \\ \square \mathbf{H} &\equiv \Delta \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Это означает, что в однородной непроводящей среде могут распространяться волны, фазовая скорость которых $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ определяется исключительно свойствами среды. Одно из возможных решений (7.1) — плоские волны:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)}, \quad (7.2)$$

где ω — круговая частота (предполагается, что векторы поля зависят от времени по гармоническому закону, волновой вектор \mathbf{k} направлен по нормали к поверхности равных фаз (волновой фронт)). Из (7.1) следует, что абсолютная величина волнового вектора \mathbf{k} равна ω/v , если речь идет о распространении волн в среде, и ω/c , если волна распространяется в вакууме. Поскольку $n_{\perp}^2 = \sqrt{\epsilon\mu/\epsilon_0\mu_0}$, можно написать в общем случае

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} n \mathbf{s}, \quad (7.3)$$

где \mathbf{s} — единичный вектор в направлении распространения. Для вакуума $n=1$. Фаза волны (7.2) есть $\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$, поэтому поверхность равных фаз определяется уравнением $\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} = \text{const}$. В данный момент времени она представляет собой плоскость $\mathbf{k}\mathbf{r} = \text{const}$, вектор нормали к которой направлен по \mathbf{k} (\mathbf{r} — это обычный трехмерный радиус-вектор). С течением времени эта плоскость перемещается в пространстве параллельно самой себе согласно уравнению $\mathbf{k}\mathbf{r} = \text{const} + \omega t$.

Плоские волны (7.2) должны удовлетворять не только волновым уравнениям (7.1), но и уравнениям Максвелла (6.56) и (6.57) в отсутствие зарядов ($\rho=0$) и токов ($\mathbf{j}=0$); подставляя (7.2) в уравнения Максвелла, можно прийти к следующим результатам. В плоской волне, распространяющейся в однородной среде, векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{k} образуют правую тройку, т. е. они взаимно перпендикулярны и векторное произведение любой пары из них, взятой в указанном порядке, определяет направление третьего вектора.

Что касается соотношения между амплитудами, то справедливо соотношение $\sqrt{\mu}H = \sqrt{\epsilon}E$, т. е. для вакуума, где $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$, а $\epsilon = \epsilon_0$, мы получим $E = cB$.

Вектор Пойнтинга \mathbf{S} направлен по направлению вектора \mathbf{k} , а его абсолютная величина равна произведению плотности энергии в плоской волне на скорость распространения волны v , т. е. $S = wv$, или $S = wv (\mathbf{k}/k)$, где w — плотность энергии в электромагнитной волне. Этот результат имеет ясный физический смысл: вектор Пойнтинга определяет поток энергии через единицу площади в единицу времени через площадку, расположенную нормально к падающей волне. Но через единичный участок такой площадки за единицу времени пройдет вся энергия, заключенная в цилиндре, направляющей которого служит контур единичной площадки, а образующими — прямые, параллельные направлению распространения волны. Высоту цилиндра нужно взять равной v . Величина v определяет в этом случае объем построенного цилиндра, а произведение wv — содержащуюся в цилиндре энергию электромагнитного поля. Все это и дает $S = wv$. Отметим еще, что в

плоской волне

$$w = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{2} = \varepsilon E^2,$$

а в вакууме $w = \varepsilon_0 E^2$.

Импульс единицы объема (плотность импульса) электромагнитного поля в вакууме g равен S/c^2 . Для плоской волны в вакууме, где $S = cw$, получим $g = (w/c) (k/k)$, откуда

$$g = w/c. \quad (7.4)$$

Вопрос о плотности импульса поля в среде будет рассмотрен в § 7 этой главы. Вспоминая инварианты электромагнитного поля I_1 и I_2 (§ 6.5), мы обнаруживаем, что для плоской волны в вакууме оба инварианта обращаются в нуль. Это означает, что в любой системе векторы E и H плоской волны ортогональны, а соотношение между их амплитудами всегда одно и то же. В системе K' плоская волна должна иметь вид

$$E' = E'_0 e^{i(\omega't' - k'r')}. \quad (7.5)$$

Состояние волны в мировой точке $\vec{R}(r, ict)$, т. е. фаза волны, не может зависеть от выбора системы отсчета, поэтому фаза $\omega t - k r$ должна быть инвариантом преобразований Лоренца. Следовательно,

$$\omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \omega' t' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z'. \quad (7.6)$$

Подставляя формулы преобразования для x', y', z', t' (2.37) в правую часть (7.6), получим

$$\omega t - k_x x - k_y y - k_z z = \omega' \Gamma \left(t - \frac{V}{c} x \right) - k'_x \Gamma (x - Vt) - k'_y y - k'_z z.$$

Это — тождество относительно t, x, y, z . Учитывая, что $k = \omega/c$ и $k_x = \frac{\omega}{c} s_x, k_y = \frac{\omega}{c} s_y, k_z = \frac{\omega}{c} s_z$ (s — единичный вектор, совпадающий по направлению с k), мы получим $(k' = \frac{\omega'}{c} s')$

$$\omega = \omega' \Gamma (1 + V s'_x), \quad \omega s_x = \omega' \Gamma (V + s'_x), \quad \omega s_y = \omega' s'_y, \quad \omega s_z = \omega' s'_z. \quad (7.7)$$

Из этих формул можно легко получить формулы, описывающие эффект Доплера (изменение длины волны света, испускаемого движущимся относительно наблюдателя источником) и абберацию света (изменение направления наблюдаемого луча света при переходе от одной инерциальной системы к другой); однако, чтобы не повторяться, мы получим формулы (7.7) сначала несколько иначе, а затем уже, в следующем параграфе, займемся их следствиями.

Мы хотим сразу стать на четырехмерную точку зрения. Было уже отмечено, что фаза $\omega t - k r$ должна быть инвариантом

преобразований Лоренца. Но это выражение автоматически становится инвариантом, если представить его как скалярное произведение 4-векторов (инвариантность скалярного произведения доказана в Приложении I, § 4). Для этого, наряду с 4-радиус-вектором $\vec{R}(\mathbf{r}, ict)$, достаточно ввести 4-волновой вектор $\vec{k}(k, i\frac{\omega}{c})$.

Тогда $\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} = -\vec{k}\vec{R}$. Введение 4-волнового вектора \vec{k} удобно прежде всего потому, что мы сразу же получаем правило преобразования его компонент при переходе от одной ИСО к другой. Если плоская световая волна распространяется в системе K' , то при переходе к системе K меняется как направление распространения световой волны, так и наблюдаемая частота. Мы увидим, что изменяется также и амплитуда плоской волны. Формулы преобразования величин, характеризующих световую волну в системах отсчета K и K' , можно легко получить, если учесть, что в плоской световой волне обычный волновой вектор \mathbf{k} совместно с $i(\omega/c)$ образуют 4-вектор \vec{k} .

§ 7.2. 4-волновой вектор. Эффект Доплера. Аберрация света. Рассмотрим плоскую световую волну, наблюдаемую в системе отсчета K' и характеризуемую 4-вектором \vec{k}' ; выберем систему K' так, чтобы луч света распространялся в этой системе в плоскости (x', y') и составлял угол ϑ' с осью x' . Выпишем компоненты 4-вектора:

$$\begin{aligned} k'_1 &= k' \cos \vartheta' = \frac{\omega'}{c} \cos \vartheta', & k'_2 &= k' \sin \vartheta' = \frac{\omega'}{c} \sin \vartheta', \\ k'_3 &= 0, & k'_4 &= i \frac{\omega'}{c} = ik'. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Найдем компоненты 4-вектора \vec{k} в системе K . По общим формулам (4.10а)

$$k_1 = \Gamma(k'_1 - iBk'_4), \quad k_2 = k'_2, \quad k_3 = k'_3, \quad k_4 = \Gamma(k'_4 + iBk'_1). \quad (7.9)$$

Поскольку $k_3 = 0$, в системе K луч также лежит в плоскости (x, y) . Следовательно, 4-вектор \vec{k} в системе K имеет компоненты $\vec{k}(\frac{\omega}{c} \cos \vartheta, \frac{\omega}{c} \sin \vartheta, 0, i\frac{\omega}{c})$. Из последней формулы (7.9) найдем

$$i\frac{\omega}{c} = \Gamma\left(i\frac{\omega'}{c} + iB\frac{\omega'}{c} \cos \vartheta'\right),$$

или

$$\omega = \omega' \frac{1 + B \cos \vartheta'}{\sqrt{1 - B^2}} = \omega' \Gamma(1 + B \cos \vartheta'). \quad (7.10)$$

Следовательно, если в системе K' частота света была равна ω' , то в системе K она уже будет согласно (7.10) иной (ср. с форму-

лампы (7.7)). Из первой формулы (7.9) вытекает, что

$$\frac{\omega}{c} \cos \vartheta = \Gamma \left(\frac{\omega'}{c} \cos \vartheta' - iB \frac{\omega'}{c} \right),$$

или, если принять во внимание (7.10),

$$\cos \vartheta = \frac{\omega'}{\omega} \Gamma (\cos \vartheta' + B) = \frac{\cos \vartheta' + B}{1 + B \cos \vartheta'}. \quad (7.11)$$

С учетом формулы (7.10) из второй формулы (7.9) получим

$$\sin \vartheta = \frac{\omega'}{\omega} \sin \vartheta' = \frac{\sqrt{1-B^2}}{1+B \cos \vartheta'} \sin \vartheta' = \frac{\sin \vartheta'}{\Gamma(1+B \cos \vartheta')}. \quad (7.12)$$

Нетрудно с помощью (7.11) и (7.12) найти выражение для $\sin \vartheta'$ через угол ϑ :

$$\sin \vartheta' = \frac{\sin \vartheta}{\Gamma(1-B \cos \vartheta)}. \quad (7.12')$$

Обратите внимание на то, что (7.12') сразу же получается из (7.12), если заменить стрихованные величины на нестрихованные и наоборот, а знак скорости V изменить на противоположный. Полученные формулы позволяют дать количественное объяснение двум оптическим эффектам — эффекту Доплера и aberrации света. Эффект Доплера (он обнаруживается для волн любого характера) заключается в том, что при относительном движении источника и наблюдателя (приемника) частота (звука или света), определяемая наблюдателем, отличается от частоты, измеренной в системе отсчета, где источник покоится.

Пусть источник покоится в системе K' . Тогда приборы, покоящиеся в этой системе, определяют собственную частоту источника света ω_0 ($\omega_0 = \omega'$).

Определяя частоту ω в системе K , нам важнее знать угол ϑ , а не ϑ' . Из формулы (7.11) следует, что

$$\cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta - B}{1 - B \cos \vartheta},$$

откуда $1 + B \cos \vartheta' = (1 - B^2)/(1 - B \cos \vartheta)$, и, следовательно, (7.10) можно окончательно записать так:

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1-B^2}}{1-B \cos \vartheta}. \quad (7.13)$$

Эта формула и описывает эффект Доплера. Наблюдатель в K обнаружит частоту излучения ω , не совпадающую с собственной частотой источника ω_0 . Наблюдаемая частота ω зависит не только от относительной скорости источника и наблюдателя ($B = V/c$), но и от угла ϑ , под которым свет идет к наблюдателю.

В частности, если излучение принимается в направлении относительной скорости, то мы имеем так называемый продольный

эффект Доплера. Если K' находится правее K , то источник удаляется от наблюдателя и свет движется в направлении, противоположном направлению оси x (рис. 7.1, а). Следовательно, $\cos \vartheta = \cos \pi = -1$. Тогда из (7.13) для частоты ω и периода $T = 2\pi/\omega$ имеем

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1-B}{1+B}}, \quad T = T_0 \sqrt{\frac{1+B}{1-B}}.$$

Наблюдатель, принимающий свет от удаляющегося источника, обнаруживает уменьшение частоты.

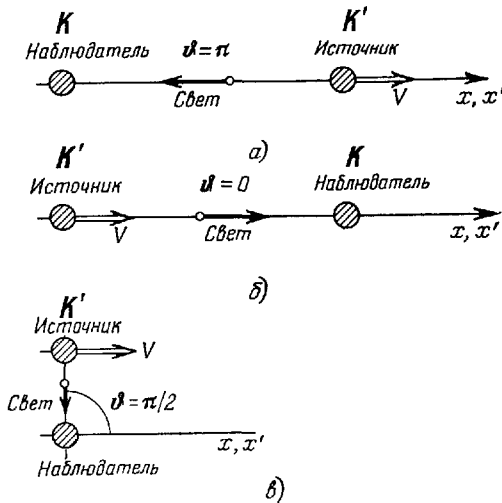


Рис. 7.1. Продольный эффект Доплера: а) наблюдатель и источник удаляются друг от друга; б) наблюдатель и источник сближаются. в) Поперечный эффект Доплера

Напротив, если K' находится слева от K (рис. 7.1, б), то $\cos \vartheta = 1$ и источник приближается к наблюдателю:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1+B}{1-B}}, \quad T = T_0 \sqrt{\frac{1-B}{1+B}}.$$

Частота принимаемого света увеличивается по сравнению с собственной частотой ω_0 . С точностью до членов B^2 две последние формулы можно переписать так (проще всего умножить числитель в знаменатель дроби под корнем на числитель):

$$\omega = \omega_0 (1 - B), \quad \omega = \omega_0 (1 + B).$$

Можно объединить обе формулы:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \equiv \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm B.$$

Таким образом, продольный эффект Доплера оказывается эффектом первого порядка относительно V . С точностью до второго порядка относительно V полученные формулы совпадают с классическими формулами, вытекающими из элементарных соображений (§ 3.3).

Если же свет наблюдается в направлении, перпендикулярном скорости источника (рис. 7.1, *в*), этот случай соответствует $\vartheta = \pi/2$ и называется *поперечным эффектом Доплера* — изменение частоты описывается уже формулой

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}$$

и зависит уже от β^2 . Если скорости движения источника нерелятивистские, разложение бинома дает

$$\omega = \omega_0 (1 - \beta^2/2).$$

Этот эффект является эффектом второго порядка, поэтому его наблюдение гораздо труднее, чем наблюдение продольного эффекта. Неудивительно поэтому, что поперечный доплер-эффект был обнаружен лишь в 1938 г. (Айвс), причем релятивистская формула была полностью подтверждена *). Еще раз напомним, что в классической теории никакого поперечного доплер-эффекта быть не должно (ср. § 3.3). Поперечный доплер-эффект возникает исключительно из-за относительности промежутков времени между событиями.

Перепишем формулу (7.13) в виде, который был использован нами в § 6.15. Соберем справа величины, относящиеся к системе K :

$$\omega_0 = \Gamma \omega \left(1 - \frac{V}{c} \cos \vartheta\right) = \Gamma \left(\omega - \frac{\omega}{c} V \cos \vartheta\right) = \Gamma (\omega - kV). \quad (7.14)$$

Слева стоит собственная частота, справа — частота, наблюдаемая в системе отсчета, которая движется со скоростью V , причем направление распространения света определяется вектором k .

Формулы (7.11) и (7.12) совпадают с формулами, которые были выведены непосредственно из формул преобразования скоростей; поэтому они полностью описывают явление абберрации, о чем уже упоминалось в § 3.6.

В частности, из (7.11) и (7.12) вытекает формула для угла абберрации:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sin \vartheta' \sqrt{1 - \beta^2}}{\beta + \cos \vartheta'}. \quad (7.15)$$

В заключение параграфа выведем полезную для дальнейшего формулу преобразования элементарного телесного угла, записанного в сферических координатах. Выберем полярную ось в направ-

*) Подробности опытов Айвса можно найти в книге: Г. С. Лансберг, Оптика, «Наука», 1976, гл. XXI, § 124.

лении относительного движения двух систем (ось x, x'). В системе K' элемент телесного угла $d\Omega'$ запишется в виде $d\Omega' = \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' = -d(\cos \vartheta') d\varphi'$. Поскольку координаты y и z остаются без изменения, не меняется и координата φ (проекция на плоскость, перпендикулярную направлению движения): $\varphi = \varphi'$ и $d\varphi = d\varphi'$. Из формулы, выписанной перед (7.13), следует

$$d(\cos \vartheta') = -\frac{1-B^2}{(1-B \cos \vartheta)^2} \sin \vartheta d\vartheta,$$

откуда и получается нужная формула перехода:

$$d\Omega' = \frac{1}{\Gamma^2 (1-B \cos \vartheta)^2} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{d\Omega}{\Gamma^2 (1-B \cos \vartheta)^2}, \quad (7.16)$$

поскольку в системе K элемент телесного угла $d\Omega$ равен

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

§ 7.3. Ограниченная в пространстве плоская волна. Преобразование энергии и амплитуды плоской волны. Вычислим компоненты тензора энергии-импульса-натяжений для плоской волны. Выберем ось x' вдоль направления распространения волны, ось y' — по направлению вектора E' , а ось z' — по направлению вектора B' . При таком выборе осей $E'_x = D'_x = B'_x = H'_x = E'_z = D'_z = H'_y = B'_y = 0$. Тензор T'_{ik} имеет простой вид (см. (6.128), (6.148) и (6.151)):

$$T'_{ik} = \begin{pmatrix} -w' & 0 & 0 & -iw' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -iw' & 0 & 0 & w' \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

Нам понадобятся компоненты тензора T'_{ik} также в том случае, когда плоская волна распространяется в плоскости (x', y') под углом ϑ' к оси x' . Этот переход осуществляется простым поворотом координатной системы; матрица этого преобразования координат имеет вид

$$\tilde{\alpha}_{ik} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta' & -\sin \vartheta' & 0 & 0 \\ \sin \vartheta' & \cos \vartheta' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.18)$$

Преобразуя компоненты тензора (7.17) по общим формулам преобразования тензоров с помощью матрицы (7.18), мы придем к тензору \tilde{T}'_{ik} :

$$\tilde{T}'_{ik} = \begin{pmatrix} -w' \cos^2 \vartheta' & -w' \sin \vartheta' \cos \vartheta' & 0 & -iw' \cos \vartheta' \\ -w' \sin \vartheta' \cos \vartheta' & -w' \sin^2 \vartheta' & 0 & -iw' \sin \vartheta' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -iw' \cos \vartheta' & -iw' \sin \vartheta' & 0 & w' \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

Поэтому, в частности,

$$\tilde{w}' = w', \quad \tilde{S}'_x = cw' \cos \vartheta', \quad \tilde{T}'_{11} = -w' \cos^2 \vartheta'. \quad (7.20)$$

Докажем теорему: ограниченная в пространстве по направлению своего распространения плоская волна (иногда такую волну называют «цугом волн») обладает импульсом и энергией, образующими 4-вектор, аналогичный 4-вектору энергии-импульса материальной частицы (эта теорема является частным случаем более общей теоремы *)). Для доказательства нам нужно знать формулу, определяющую изменение объема, занимаемого цугом волн, при переходе от одной инерциальной системы к другой. Трудность, которая здесь возникает, состоит в том, что цуг движется со скоростью света c , а это значит, что объем цуга измерить в собственной системе координат невозможно (систему отсчета, движущуюся со скоростью света, ввести нельзя!). Однако можно предпринять обходный маневр, избежав введения собственного объема и совершив в конце концов предельный переход к скорости света.

Пусть в системе K' движется как целое некоторый объем со скоростью v' , причем в собственной системе координат его величина равна \mathcal{V}'_0 . Тогда согласно (3.28)

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}'_0 \sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}. \quad (7.21)$$

Если рассматривать этот объем в системе K , то его скорость v в этой системе будет уже определяться формулой (3.41), и, следовательно, величина этого объема в системе K (мы обозначим эту величину через \mathcal{V}) равна

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}'_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \mathcal{V}'_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'}{c} B \cos \vartheta'} = \mathcal{V}' \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 + \frac{v'}{c} B \cos \vartheta'};$$

второе равенство вытекает из формулы (3.41). Здесь v' — это скорость движения объема в K' . Теперь, перейдя к пределу $v' \rightarrow c$, получим нужную формулу:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}' \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 + B \cos \vartheta'}. \quad (7.22)$$

Таким образом, если некоторый объем в системе K' был равен \mathcal{V}' , то в системе K , движущейся относительно K' со скоростью V ,

*) Общая теорема изложена, например, в книгах: [13], § 57; В. Г а й т л е р, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956, § 2. Сформулируем эту общую теорему: в области пространства, где тензор T_{ik} удовлетворяет условию $\frac{\partial}{\partial x_k} T_{ik} = 0$, а на границах $T_{ik} = 0$, компоненты T_{ik} образуют компоненты 4-вектора.

будет обнаружен объем, величина которого определяется согласно (7.22). Разумеется, для дифференциалов объемов имеет место аналогичное соотношение:

$$d\mathcal{V} = d\mathcal{V}' \frac{\sqrt{1-B^2}}{1+B \cos \vartheta'} = \frac{1}{\Gamma(1+B \cos \vartheta')} d\mathcal{V}'. \quad (7.23)$$

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Применяя общие формулы преобразования тензора (П.1.31) к тензору (7.17), мы получим компоненты четвертой строки матрицы T_{ih} следующего вида:

$$\begin{aligned} T_{41} &= -i\Gamma^2 w' (1+B)^2, & T_{42} &= 0, \\ T_{43} &= 0, & T_{44} &= \Gamma^2 w' (1+B)^2, \end{aligned} \quad (7.24)$$

а для тензора (7.19) — компоненты

$$\begin{aligned} T_{41} &= -i\Gamma^2 w' (B + \cos \vartheta') (1+B \cos \vartheta'), \\ T_{42} &= -i\Gamma w' \sin \vartheta' (1+B \cos \vartheta'), \\ T_{43} &= 0, & T_{44} &= \Gamma^2 w' (1+B \cos \vartheta')^2. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Естественно, что при $\vartheta' = 0$ формулы (7.25) переходят в (7.24). Докажем теперь, что компоненты (7.25), а следовательно, в частном случае и (7.24), умноженные на объем или элемент объема, в нужной системе отсчета преобразуются, как векторы. Действительно, например,

$$\begin{aligned} T_{41} d\mathcal{V} &= \Gamma(-iw' \cos \vartheta' - iBw') d\mathcal{V}' = \Gamma(T'_{41} d\mathcal{V}' - iBT'_{44} d\mathcal{V}'), \\ T_{42} d\mathcal{V} &= T'_{42} d\mathcal{V}', & T_{43} d\mathcal{V} &= T'_{43} d\mathcal{V}' = 0, \\ T_{44} d\mathcal{V} &= \Gamma(w' + Bw' \cos \vartheta) d\mathcal{V}' = \Gamma(T'_{44} d\mathcal{V}' + iBT'_{14} d\mathcal{V}'). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Сравнивая полученные формулы (7.26) с формулами для преобразования векторов, приходим к выводу, что величины T_{41} , T_{42} , T_{43} , T_{44} , т. е. компоненты четвертой строки тензора (7.17) или (7.19), умноженные на соответствующий элемент объема, составляют 4-вектор.

Разумеется, этот результат сохраняется после интегрирования по объему или умножения на полный объем в том случае, когда компоненты тензора T_{ih} не зависят от координат, как это имеет место в плоской волне.

Найдем полную энергию цуга в системе K' (см. (7.19)):

$$U' = \int \tilde{T}'_{44} d\mathcal{V}' = \int w' d\mathcal{V}'. \quad (7.27)$$

Компоненты полного импульса цуга определяются формулами

$$\begin{aligned} G'_x &= \frac{i}{c} \int \tilde{T}'_{14} d\mathcal{V}' = \frac{i}{c} \int (-iw' \cos \vartheta') d\mathcal{V}' = \frac{U'}{c} \cos \vartheta', \\ G'_y &= \frac{i}{c} \int \tilde{T}'_{24} d\mathcal{V}' = \frac{U'}{c} \sin \vartheta', & G'_z &= 0. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Аналогичный расчет можно проделать и в K , причем формулы (7.25) позволяют найти преобразование полной энергии непосредственно:

$$U = \int T_{44} d\mathcal{V}' = \Gamma^2 (1 + B \cos \vartheta')^2 \int \frac{w' d\mathcal{V}'}{\Gamma (1 + B \cos \vartheta')} = \Gamma (1 + B \cos \vartheta') U'. \quad (7.29)$$

Вычислим также составляющие полного импульса:

$$G_x = \frac{i}{c} \int T_{14} d\mathcal{V}' = \frac{i}{c} (-i\Gamma) (B + \cos \vartheta') \int w' d\mathcal{V}' = \frac{1}{c} \Gamma (B + \cos \vartheta') U' = \frac{U}{c} \cos \vartheta, \quad (7.30)$$

где мы использовали в последнем звене формулу (7.14); аналогично, используя (7.12), получим

$$G_y = \frac{i}{c} \int T_{24} d\mathcal{V}' = \frac{1}{c} U' \sin \vartheta' = \frac{1}{c} \Gamma (1 + B \cos \vartheta') U' \sin \vartheta = \frac{U}{c} \sin \vartheta.$$

Таким образом, в любой инерциальной системе отсчета можно ввести 4-вектор

$$\vec{P}' \left(\frac{U'}{c} \cos \vartheta', \frac{U'}{c} \sin \vartheta', 0, i \frac{U'}{c} \right), \quad (7.31)$$

причем во всех системах отсчета $\vec{P}'^2 = 0$.

Из условия $\vec{P}'^2 = 0$ вытекает, что световая волна в вакууме ни в какой инерциальной системе отсчета не может оказаться в покое. Сравнивая компоненты \vec{P}' (7.31) с компонентами \vec{k}' (7.8), мы видим, что формулы преобразования U' и ω' должны быть одинаковыми. Это значит, что отношение U'/ω' должно быть инвариантным. Следовательно, энергия одного и того же пуга, измеренная разными наблюдателями, оказывается различной. Отношение энергий равно отношению частот монохроматического излучения, образующего пуг. Частоты определяются теми же наблюдателями, которые измеряют энергию. Предполагается, что пуг достаточно длинный, поскольку иначе он не будет даже приблизительно монохроматическим.

Из полученных формул легко установить закон преобразования амплитуд в плоской волне. Действительно, из (7.25) для преобразования плотности энергии имеем

$$w = w' \Gamma^2 (1 + B \cos \vartheta')^2.$$

Сравнивая это выражение с формулой преобразования (7.10) для частоты:

$$\omega = \omega' \Gamma (1 + B \cos \vartheta'),$$

мы видим, что плотность энергии преобразуется, как квадрат частоты. Поскольку плотность энергии есть квадратичная функция амплитуд поля плоской волны, то отсюда вытекает, что амплитуды в плоской волне преобразуются по тому же закону, что и частота.

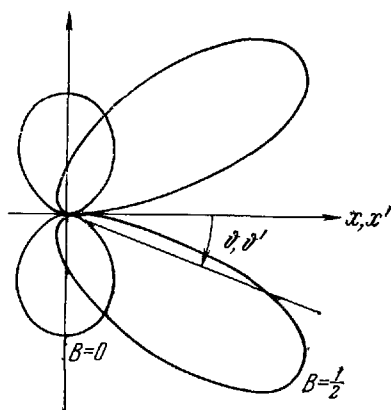


Рис. 7.2. Изменение углового распределения излучения дипольного осциллятора при переходе от системы отсчета K' , в которой он покоится ($\beta = 0$), к системе отсчета K , относительно которой он движется ($\beta = 1/2$). Видно, как максимум излучения наклоняется в сторону движения осциллятора. Ось осциллятора направлена по направлению движения осциллятора.

В качестве иллюстрации применения представления об электромагнитной волне как о системе, импульс и энергия которой образуют 4-вектор, рассмотрим преобразование углового распределения излучения дипольного осциллятора от системы K' , где его центр инерции неподвижен, к любой другой ИСО. Как известно, в системе отсчета, где центр инерции осциллятора покоится, а поляризация направлена вдоль оси осциллятора, интенсивность излучения dI' в направлении (θ', φ') равна $dI'(\theta', \varphi') = \text{const} \cdot \sin^2 \theta' d\Omega'$. Но интенсивность излучения $dI = d\epsilon/dt$, т. е. энергия, излучаемая в данном направлении в единицу времени, является величиной относительной. Легко найти закон ее преобразования; для излучения $d\epsilon = c dP$, где dP — доля импульса, уходящая с излучением в заданном направлении, причем $d\epsilon' = c dP'$. Согласно преобразованиям Лоренца

$$d\epsilon' = \Gamma (d\epsilon - V dP) = \Gamma (d\epsilon - V dP \cos \theta) = \Gamma d\epsilon (1 - \beta \cos \theta),$$

$$dt' = \frac{1}{\Gamma} dt$$

(dt' — собственное время). Разделив почленно верхнее равенство на нижнее, получим

$$dI = \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon'}{dt'} \frac{1}{\Gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)} = \frac{dI'}{\Gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2}.$$

Тогда мы сразу получаем искомый результат:

$$\begin{aligned} dI &= \text{const} \cdot \frac{\sin^2 \theta' d\Omega'}{\Gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} = \text{const} \cdot \frac{\sin^2 \theta' d\Omega}{\Gamma^4 (1 - \beta \cos \theta)^3} = \\ &= \text{const} \cdot \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^3 \sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta\right)^5} d\Omega, \end{aligned}$$

где мы использовали формулы (7.16) и (7.12'). Из полученной формулы видно, что угловая зависимость излучения в системе K , относительно которой осциллятор движется, существенно отличается от угловой зависимости в системе K' , особенно в том случае, когда $V \approx c$. Максимум излучения приходится уже на некоторое направление, составляющее острый угол с осью осциллятора (рис. 7.2).

Любопытно рассмотреть, как выглядит изотропное в системе отсчета K' излучение в системе K . У нас уже есть все необходимые формулы. В этом случае $dI'(\vartheta', \varphi') = \text{const} \cdot d\Omega'$ и

$$\begin{aligned} dI &= \frac{dI'}{\Gamma^2(1 - \beta \cos \vartheta)} = \frac{\text{const}}{\Gamma^2(1 - \beta \cos \vartheta)} d\Omega' = \\ &= \frac{\text{const} \cdot d\Omega}{\Gamma^4(1 - \beta \cos \vartheta)^2} = \text{const} \cdot \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \vartheta\right)^3} d\Omega. \end{aligned}$$

Из последней формулы виден «эффект прожектора» в K . Излучение концентрируется вокруг направления $\vartheta = 0$, поскольку минимальное значение знаменатель принимает (при заданном отношении V/c) при $\cos \vartheta \sim 1$.

§ 7.4. Давление электромагнитной волны (света) на поверхность.

Давление на поверхность тела, т. е. сила, действующая на единицу площади, определяется потоком импульса через единичную площадку и оптическими свойствами поверхности; поток же выражается через пространственные компоненты тензора энергии-импульса-натяжений $T'_{\alpha\beta}$, который для плоской волны, в зависимости от направления ее распространения, имеет вид (7.17) или (7.19). Если волна распространяется по оси x' , то, как это видно из (7.17), у тензора натяжений отлична от нуля лишь одна компонента $T'_{xx} = -w'$. Чтобы найти поток импульса через заданный элемент поверхности, нужно задать направление нормали к этой поверхности \mathbf{n} (n_α). Тогда (см. гл. 6) поток импульса через элемент dS с нормалью \mathbf{n} равен (рис. 7.3)

$$T'_{\alpha\beta} n'_\alpha m'_\beta dS' = T'_{11} n'_1 m'_1 dS',$$

потому что из всей двойной суммы отличен от нуля только один член. Величина давления на площадку, нормальную к оси x' , равна $p' = T'_{11} = T'_{xx} = |w'|$. Если световой импульс распро-

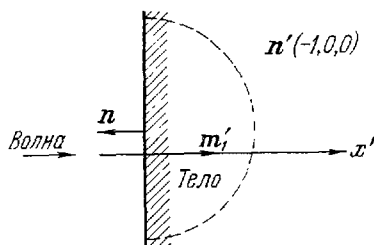


Рис. 7.3. К вычислению давления, оказываемого электромагнитной волной на поверхность.

страняется со скоростью c , то за единицу времени на единицу площади попадет энергия, равная $w'c = \mathcal{E}'$. Но мы видели, что $w' = p'$, откуда

$$p' = \mathcal{E}'/c. \quad (7.32)$$

Следовательно, давление света равно энергии электромагнитной волны, падающей за единицу времени на единицу площади, деленной на c , если волна поглощается.

Определим теперь силу, с которой действует на стенку световая волна, падающая на нее под некоторым углом и отражающаяся от нее. Пусть угол падения равен ϑ . Обозначим через n нормаль к стенке, а через s и s' — единичные векторы в направлении распространения падающей и отраженной волн. Поток импульса через единицу площади даст силу давления p , причем компоненты этой силы будут

$$p_\beta = T_{\alpha\beta}n_\alpha + T_{\alpha\beta}^*n_\alpha = (T_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta}^*)n_\alpha,$$

где $T_{\alpha\beta}$ и $T_{\alpha\beta}^*$ — компоненты тензора натяжений падающей и отраженной волн.

Компоненты $T_{\alpha\beta}$ для волны, идущей под углом ϑ к оси x , выписаны в (7.19). Трехмерный волновой вектор отраженного луча отличается от трехмерного волнового вектора падающего луча заменой ϑ на $-\vartheta$. Введем еще коэффициент отражения R , так что $w^* = Rw$. Имея в виду, что $T_{11} = T'_{44} \cos^2 \vartheta = -w \cos^2 \vartheta$, а $T_{12} = T'_{44} \sin \vartheta \cos \vartheta = -w \sin \vartheta \cos \vartheta$, получим для нормальной силы (светового давления)

$$p_x = (w + Rw) \cos^2 \vartheta = w(1 + R) \cos^2 \vartheta$$

и тангенциальной силы

$$p_y = w(1 - R) \sin \vartheta \cos \vartheta.$$

Выпишем значения нормального давления p_x для двух наиболее интересных случаев. При нормальном падении ($\vartheta = 0$) в случае полного отражения давление равно $2w$, а в случае полного поглощения $p = w$. В случае изотропного излучения нужно усреднить p_x по всем направлениям, т. е. взять среднее значение $\cos^2 \vartheta$. Но среднее значение квадрата направляющего косинуса единичного вектора, изотропного в пространстве, равно $1/3$. Таким образом, в случае полного поглощения изотропного излучения давление определяется формулой $p = w/3$.

Конечно, все приведенные формулы можно получить и элементарным путем. Если исходить из величины плотности импульса электромагнитного поля $g = S/c^2$ и выражения для величины вектора Пойнтинга в плоской волне $S = wc$ (w — плотность энергии), то $g = w/c$. Если плоская волна падает на стенку под углом ϑ , то на единичную площадку в единицу времени попадет вся энер-

гия и весь импульс, заключенные в косом цилиндре с основанием в единичную площадку и образующей, равной скорости распространения света. Объем такого цилиндра равен $c \cos \theta$. Поэтому за 1 сек на 1 см^2 стенки падает энергия $\mathcal{E} = wc \cos \theta$, а импульс G_x , передаваемый в направлении, перпендикулярном стенке, за 1 сек, равен $G_x = g \cos \theta \cdot c \cos \theta = w \cos^2 \theta$. Но импульс, передаваемый в единицу времени на единицу площадки, как раз и равен давлению p . Вводя, как и раньше, коэффициент отражения R , получим $p = w(1 + R) \cos^2 \theta$.

§ 7.5. Изменение частоты света при отражении от движущейся поверхности (зеркала). Пусть в системе K луч света движется под углом θ_0 к оси x в плоскости (x, y) . Зеркало, расположенное параллельно оси y , движется со скоростью V относительно системы отсчета K . Луч света, доходя до зеркала, отражается. Нам интересуют частота отраженного света и его направление, если их определять в системе K .

Удобно ввести систему отсчета K' , связанную с зеркалом. Тогда задача решается следующим образом. В системе K задан 4-вектор светового луча, т. е. частота света и направление его распространения. Нетрудно найти по формулам преобразований Лоренца частоту света и направление луча в системе K' . Но в системе K' , где зеркало неподвижно, справедлив обычный закон отражения: угол падения равен углу отражения. Это означает, что 4-вектор отраженного луча отличается от 4-вектора падающего луча лишь знаком компоненты волнового вектора по оси x . Чтобы получить 4-вектор отраженного луча в системе K , нужно еще раз применить преобразования Лоренца.

Итак, пусть в системе K распространяется луч света частоты ω_0 под углом θ_0 к оси x ; луч движется в плоскости (x, y) . Компоненты 4-вектора \vec{k}_0 в системе K будут

$$\begin{aligned} k_1^0 &= k^0 \cos \theta_0 \equiv \frac{\omega_0}{c} \cos \theta_0, & k_3^0 &= 0, \\ k_2^0 &= k^0 \sin \theta_0 \equiv \frac{\omega_0}{c} \sin \theta_0, & k_4^0 &= i \frac{\omega_0}{c} = ik^0. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Найдем 4-вектор того же луча в системе K' , обозначив его через \vec{k}' ; согласно преобразованиям Лоренца (4.10а)

$$k_1' = \Gamma(k_1^0 + iBk_4^0), \quad k_2' = k_2^0, \quad k_3' = k_3^0, \quad k_4' = \Gamma(k_4^0 - iBk_1^0). \quad (7.34)$$

При отражении от зеркала, покоящегося в K' , компонента k_1' меняет знак; поэтому 4-вектор отраженного луча \vec{k}'' запишется в виде

$$k_1'' = -\Gamma(k_1^0 - iBk_4^0), \quad k_2'' = k_2^0, \quad k_3'' = k_3^0, \quad k_4'' = \Gamma(k_4^0 + iBk_1^0). \quad (7.35)$$

Отраженный луч в системе K будет описываться 4-вектором \vec{k} , который получается обратными преобразованиями Лоренца (от системы K' к системе K) 4-вектора \vec{k}' :

$$k_1 = \Gamma (k_1' - iBk_4') = -\Gamma^2 \{(1+B^2)k_1^0 + 2iBk_4^0\} = \\ = -\Gamma^2 \frac{\omega_0}{c} \{(1+B^2) \cos \vartheta_0 - 2B\}, \quad (7.36)$$

$$k_2 = k_2' = \frac{\omega_0}{c} \sin \vartheta_0, \quad k_3 = k_3' = 0, \quad (7.37)$$

$$k_4 = \Gamma (k_4' + iBk_1') = \Gamma^2 \{(1+B^2)k_4^0 - 2iBk_1^0\} = \\ = i\Gamma^2 \frac{\omega_0}{c} \{(1+B^2) - 2B \cos \vartheta_0\}. \quad (7.38)$$

Так как $k_3 = k_3' = 0$, то и после отражения свет остается в плоскости (x, y) . Полагая

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \cos \vartheta, \quad k_2 = \frac{\omega}{c} \sin \vartheta, \\ k_3 = 0, \quad k_4 = i \frac{\omega}{c}, \quad (7.39)$$

из соотношения (7.38) получим

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{(1+B^2) - 2B \cos \vartheta_0}{1-B^2}. \quad (7.40)$$

Следовательно, наблюдаемая в системе K частота отраженного света ω уже не равна частоте падающего света ω_0 .

Для тангенса угла отражения в системе K получим

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{k_2}{k_1} = \\ = -\frac{\sin \vartheta_0 (1-B^2)}{(1+B^2) \cos \vartheta_0 - 2B}. \quad (7.41)$$

Из (7.41) видно, что $\vartheta \neq \vartheta_0$; поэтому угол падения и угол отражения в системе K оказываются различными (рис. 7.4, а).

Полезно выписать формулы для случая нормального падения

света на зеркало. Пусть в системе K угол падения $\vartheta_0 = 0$. Тогда мы получим

$$\omega = \omega_0 \frac{1-B}{1+B}, \quad \cos \vartheta = -1, \quad \sin \vartheta = 0. \quad (7.42)$$

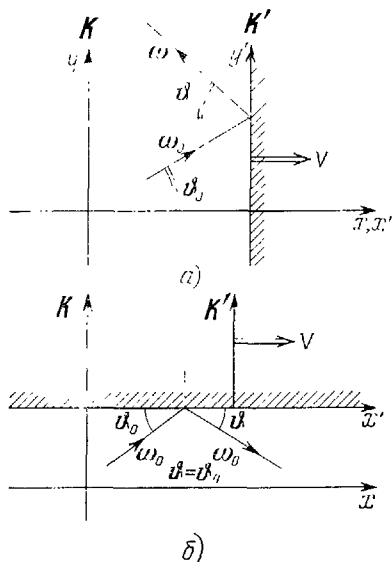


Рис. 7.4 Отражение света от движущегося зеркала. а) Зеркало движется перпендикулярно своей поверхности. При отражении меньше частота и угол падения не равен углу отражения. б) Зеркало движется параллельно своей поверхности. При отражении частота остается неизменной; угол падения равен углу отражения.

Из (7.42) вытекает, что и после отражения свет распространяется по нормали к зеркалу, но в направлении, противоположном первоначальному. Система K' , где покоится зеркало, двигалась в том же направлении, в котором распространялся свет. Частота света при отражении уменьшалась.

Если зеркало движется навстречу лучу, то величина V меняет знак и мы соответственно получаем

$$\omega = \omega_0 \frac{1+V}{1-V}, \quad \cos \vartheta = -1, \quad \sin \vartheta = 0.$$

Частота света при отражении возрастает.

Используя этот эффект, можно определять скорость движущегося предмета, например автомобиля. Если автомобиль едет навстречу наблюдателю, то изменение частоты при отражении определяется по (7.40) с точностью до членов $\sim V^2$ ($\Delta\omega = \omega - \omega_0$):

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2V}{1-V} \sim 2V. \quad (7.43)$$

Если, например, скорость автомобиля $72 \text{ км/ч} = 20 \text{ м/сек}$, то $V = \frac{20}{3 \cdot 10^8} \approx 0,6 \cdot 10^{-7}$. Такое относительное изменение частоты легко обнаруживается стандартными приборами.

Мы рассмотрели случай, когда скорость зеркала направлена по нормали к нему. Но зеркало может двигаться и параллельно своей плоскости (рис. 7.4, б). В этом случае нам придется несколько видоизменить использованные формулы. Формулы (7.33) и (7.34) остаются, разумеется, без изменений. Однако при отражении меняется знак уже у k_2 ; поэтому

$$k_1'' = \Gamma(k_1^0 + iV k_4^0), \quad k_2'' = -k_2^0, \quad k_3'' = k_3^0, \quad k_4'' = \Gamma(k_4^0 - iV k_1^0). \quad (7.44)$$

Поскольку $k_3 = k_3^0 = 0$, после отражения свет остается по-прежнему в плоскости (x, y) . Возвращаясь обратно в систему K , получим

$$k_1 = \Gamma(k_1'' - iV k_4'') = k_1^0, \quad (7.45)$$

$$k_2 = -k_2^0, \quad (7.46)$$

$$k_3 = 0, \quad (7.47)$$

$$k_4 = \Gamma(k_4'' + iV k_1'') = k_4^0. \quad (7.48)$$

Из (7.48) мы сразу же получаем, что $\omega = \omega_0$, а составив $\text{tg } \vartheta = k_2/k_1$, мы обнаруживаем, что $\text{tg } \vartheta = -\text{tg } \vartheta_0$, т. е. что $\vartheta = -\vartheta_0$. Следовательно, при движении зеркала параллельно самому себе частота падающего света равна частоте отраженного света, а угол падения равен углу отражения (в системе K).

В заключение выпишем формулы, соответствующие отражению от зеркала, движущегося нормально своей плоскости, в пере-

релятивистском приближении, т. е. в том случае, когда скорость зеркала невелика: $\beta = V/c \ll 1$. Пренебрегая всеми членами порядка β^2 , получим соответственно

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 (1 - 2\beta \cos \vartheta_0), \\ \cos \vartheta &= -\cos \vartheta_0 + 2\beta \sin^2 \vartheta_0, \\ \sin \vartheta &= \sin \vartheta_0 + 2\beta \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0.\end{aligned}$$

При нормальном падении на зеркало ($\vartheta_0 = 0$) луч отражается в направлении, противоположном исходному, а частота меняется по закону

$$\omega = \omega_0 \left(1 - 2 \frac{V}{c}\right), \quad (7.49)$$

если зеркало движется в том же направлении, что и луч света. Если зеркало движется навстречу свету, то

$$\omega = \omega_0 \left(1 + 2 \frac{V}{c}\right). \quad (7.50)$$

Формулы (7.49) и (7.50) допускают простое истолкование. Отраженный свет можно представлять себе идущим от мнимого источника, расположенного за зеркалом, причем скорость этого мнимого источника равна $2V$. Поэтому, если заменить мнимый источник реальным, с той же собственной частотой ω_0 , изменение частоты согласно (7.49) или (7.50) будет просто соответствовать эффекту Доплера для этого источника.

Рассмотренные случаи отражения света от движущегося зеркала представляют собой частные случаи общей задачи об электромагнитных явлениях на движущейся границе, разделяющей две среды.

§ 7.6. Световые кванты (фотоны) как релятивистские частицы. Релятивистская механика, изложенная в гл. 5, строилась для частиц, обладающих конечной (отличной от нуля) массой покоя. Это видно, в частности, из того, что 4-импульс частицы $\vec{P} = m\vec{V}$ имеет смысл лишь при условии $m \neq 0$. Частицы с отличной от нуля массой покоя называют иногда *тардионами*. Все такие частицы не могут достичь скорости c за счет ускорения. Это видно прежде всего из того, что для этого им нужно было бы передать бесконечную энергию и импульс ($\mathcal{E} = mc^2\gamma$, $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$, но при $v \rightarrow c$ множитель $\gamma \rightarrow \infty$). Решение всех конкретных задач, приведенных в гл. 5, показывает, что в любом случае v остается меньше c .

Рассматривая взаимодействие электромагнитного поля с микрочастицами, физики столкнулись с тем, что при таком взаимодействии микрочастица (например, электрон) получает от электромагнитного поля всегда определенную энергию и определенный

импульс (речь идет для простоты о монохроматическом излучении, т. е. излучении с заданной частотой ω). Впервые предположение о том, что электромагнитное поле передает энергию электрону определенными порциями — квантами, — было высказано А. Эйнштейном в связи с теорией фотоэффекта (1905 г.). Для объяснения рассеяния энергичного γ -кванта на электронах пришлось предположить, что электромагнитное поле передает электрону не только определенную энергию, но и определенный импульс (эффект Комптона, 1923 г.).

Такая картина взаимодействия электромагнитного поля с электроном может быть наглядно описана как взаимодействие «частицы света», обладающей определенными энергией и импульсом, с электроном. Конечно, было бы весьма наивно думать, что электромагнитное поле действительно состоит из каких-то частиц, напоминающих бильярдные шарики. Картина «частиц света» вполне годится лишь для описания обмена энергией и импульсом между полем и микрочастицами. Если не забывать об этом, то представление о световых частицах (их называют *квантами света* или *фотонами*) не может повести к недоразумениям.

Какие свойства мы должны приписать фотону, если мы хотим считать его релятивистской частицей? Одно из свойств фотона — а именно связь между его энергией и импульсом — можно получить из макроскопической электродинамики. Действительно, для давления P света, падающего из вакуума на стенку, мы получили соотношение (7.32):

$$P = \mathcal{E}/c, \quad (7.51)$$

где через \mathcal{E} обозначена энергия, падающая в единицу времени на единицу площади стенки. Теперь представим себе, что на стенку падают фотоны (на самом деле, как это будет ясно из дальнейшего, существенно лишь то, что на стенку энергия и импульс передаются дискретными порциями). Пусть свет представляет собой плоскую волну, так что все фотоны движутся по одному направлению. По предположению каждый фотон несет с собой энергию ε и импульс p . Если за единицу времени на единицу площади стенки попало N фотонов и все они были поглощены, стенка приобрела энергию $N\varepsilon$ и импульс Np . Но импульс, приобретенный единицей площади стенки в единицу времени, как раз и есть давление света P^* , так что $P = Np$, а $\mathcal{E} = N\varepsilon$. Поэтому из (7.51) вытекает связь между энергией и импульсом фотона:

$$p = \varepsilon/c. \quad (7.52)$$

* По закону Ньютона $F = dp/dt$. Разделив обе части этого равенства на площадь, на которую действует сила, мы получим давление, т. е. $p = F/s = (1/s)(dp/dt)$; справа как раз стоит приращение импульса на единицу площади в единицу времени.

Но для релятивистских частиц связь между энергией, импульсом и скоростью движения определяется соотношением $p = (\varepsilon/c^2) v$, откуда ясно, что для того, чтобы связь (7.52) выполнялась, необходимо считать $v = c$. Итак, если интерпретировать фотон как релятивистскую частицу, нужно считать, что он движется со скоростью c .

Как и для всякой релятивистской частицы, для фотона в вакууме можно построить 4-вектор энергии-импульса $\vec{P}(p, i\varepsilon/c)$. По общим формулам для вычисления квадрата 4-вектора с учетом (7.52) мы получим $\vec{P}^2 = 0$. С другой стороны, для обычных частиц $\vec{P}^2 = -m^2c^2$ (см. (5.47)). Отсюда видно, что масса покоя фотона равна нулю. За то, что (воображаемая) частица достигла предельной релятивистской скорости, пришлось отказаться от конечной массы покоя.

Масса покоя фотона оказалась равной нулю, и это обстоятельство на первый взгляд очень неприятно. Мы привыкли к тому, что все тела и частицы в природе имеют конечную массу. Совсем недавно массу считали непременной принадлежностью материи, понимаемой как объективно существующая реальность. Физики тоже были склонны думать, что масса покоя определяет индивидуальность каждого тела или частицы. В классической механике за тем, что обладало массой, можно было, по крайней мере теоретически, проследить с течением времени.

До начала нашего века свет представлялся загадочным явлением; даже физики сомневались в его материальности. Но в 1901 г. П. Н. Лебедев экспериментально обнаружил давление света. Давление обусловлено потоком импульса. То, что свет несет с собой энергию, особых сомнений не вызывало и раньше. Но если свет обладает энергией и импульсом, то его материальность также вне сомнений. Хотя масса покоя отдельного светового кванта равна нулю, здесь нет ничего предосудительного. В природе есть объекты, которые имеют конечную массу покоя, и объекты с массой покоя, равной нулю. Последние движутся со скоростью света, причем остановить их нельзя; во всех системах отсчета у них одинаковая скорость. Останавливаясь, они оканчивают свое существование, переходя в другие формы материи. И то, что формы материи с массой покоя, равной нулю, переходят в формы материи с массой покоя, отличной от нуля (и обратно), просто указывает на равноправие этих форм.

Из релятивистской механики получить выражения для энергии и импульса фотона нельзя. Но современная физика обнаруживает, что при испускании и поглощении, при взаимодействии с веществом свет ведет себя как набор квазичастиц, каждая из которых обладает энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\omega/c$ (здесь \hbar — постоянная Планка, $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ эрг·сек, а ω — круговая частота света).

В каждом элементарном акте взаимодействия с веществом участвует одна такая квазичастица, названная в свое время Эйнштейном квантом света; в каждом акте взаимодействия выполняются законы сохранения энергии и импульса. Можно принять за энергию кванта света $\varepsilon = \hbar\omega$, а за импульс $\mathbf{p} = \frac{\hbar\omega}{c}\mathbf{s}$, где \mathbf{s} — единичный вектор, направленный по лучу. Таким образом, если квант света (фотон) можно рассматривать как релятивистскую частицу, то ее 4-вектор энергии-импульса

имеет вид $\vec{P} \left(\hbar k, i \frac{\hbar\omega}{c} \right)$, где $\mathbf{k} = k\mathbf{s}$, $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$. Если сократить на общий множитель

всех компонент \vec{P} — постоянную Планка \hbar , — мы снова приходим к тому же 4-вектору \vec{k} , полученному ранее для волнового вектора волны, по определенному теперь

уже для фотона: $\vec{k}(\mathbf{k}, ik)$, $k = \omega/c$, $\vec{P} = \hbar\vec{k}$. Поскольку четырехмерный импульс фотона с точностью до множителя \hbar совпадает с четырехмерным волновым вектором (введенным на стр. 248), то все результаты, полученные для волны, буквально повторяются для фотона. Речь идет о формулах, описывающих доплер-эффект, аберрацию света, изменение частоты света при отражении от движущегося зеркала. С точки зрения фотонной теории света легко получить формулу для давления света. Действительно, пусть фотон падает под углом ϑ на поверхность тела. Нормальная составляющая его импульса равна $\hbar\omega \cos \vartheta/c$ (рис. 7.5). При поглощении фотона стенка получает по направлению нормали именно этот импульс. Если фотон отражается, то величина переданного импульса зависит от коэффициента отражения (от вероятности отражения фотона); обозначим его R . Тогда переданная нормально стенке составляющая импульса при отражении фотона равна $(1 + R) (\hbar\omega/c) \cos \vartheta$, где $R \leq 1$. Если через n обозначить число фотонов в 1 см^3 , то за 1 сек на 1 см^2 стенки упадут все фотоны в косом цилиндре с образующей, равной c . Объем такого цилиндра, с площадью основания 1 см^2 , равен $c \cos \vartheta$. Следовательно, на 1 см^2 стенки за 1 сек упадет $nc \cos \vartheta$ фотонов, которые передадут стенке энергию $\hbar\omega nc \cos \vartheta$ (если все они поглотятся) и составляющую импульса по нормали к стенке

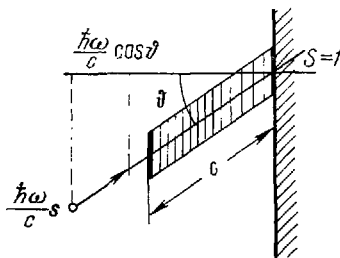


Рис. 7.5. Вычисление давления света. Площадь основания косого цилиндра $\approx S = 1$.

$$nc \cos \vartheta (1 + R) \frac{\hbar\omega}{c} \cos \vartheta = \hbar\omega n (1 + R) \cos^2 \vartheta.$$

Импульс, передаваемый единице площади стенки в единицу времени, и есть давление на стенку; поэтому $p = w (1 + R) \cos^2 \theta$, где $w = n\hbar\omega$ — плотность энергии в пучке. Результат совпадает с тем, что получено в § 7.4.

К сожалению, до сих пор вводят «массу фотона», определяя ее по формуле, заимствованной из релятивистской механики частиц с конечной массой покоя, а именно $m_\phi = \epsilon/c^2$ ($\epsilon = \hbar\omega$). Прежде всего формула $\epsilon = mc^2$ явно написана для случая $m \neq 0$ (см. гл. 5) и не имеет отношения к случаю $m = 0$. Но и вообще масса m_ϕ лишена физического смысла. Ни о каких инертных свойствах фотона говорить не приходится: во всех системах отсчета он движется со скоростью c , т. е. в вакууме фотон ни ускорить, ни замедлить нельзя (его можно только уничтожить). В квантовой статистике фотоны считают тождественными частицами и получают правильные результаты. Но если бы «масса фотона» была существенной, то «синий» фотон был бы «тяжелее» красного и ни о какой тождественности не было бы и речи. Напротив, единственное общее, что есть у всех фотонов, так это равная нулю масса покоя. Иногда массу фотона m_ϕ используют для объяснения отклонения светового луча в гравитационном поле. Но пользоваться классической механикой для рассмотрения такого релятивистского объекта, как свет, более чем непоследовательно. В релятивистской теории отклонение светового луча в гравитационном поле получается, разумеется, без введения какой-либо массы фотона. Наконец, есть желающие иметь и в релятивистской физике «закон сохранения массы». Масса покоя не аддитивна (§ 5.6), и поэтому ищут новые «массы», используя соотношение $m = \mathcal{E}/c^2$. Но это вовсе бессмысленное занятие, поскольку сохранение такой «массы» есть просто следствие закона сохранения энергии, который соблюдается всегда. Но именно в этом случае понадобится масса фотона m_ϕ . Резюмируя, скажем, что введение массы фотона, ничего не прибавляя по существу, вносит ненужную путаницу в далеко не простой вопрос о массе (см. §§ 5.6 и 5.7).

Возвращаясь к нулевой массе покоя фотона, сделаем еще несколько замечаний. Не существует никакой реальной ИСО, в которой фотон покоился бы, поэтому масса покоя фотона — величина ненаблюдаемая. (Также бессмысленно говорить и о течении времени в системе отсчета, связанной с фотоном.) Нулевая масса фотона вовсе не означает отсутствие массы. К примеру, 0°C вовсе не означает, что тело не обладает внутренней энергией. Следует напомнить, что в СТО существуют мировые линии с нулевой длиной, имеющие не меньше смысла, чем все другие линии. Конечно, суть дела в том, что скорость света выделена среди всех остальных скоростей. Кроме фотонов в вакууме есть еще и «настоящие» частицы — нейтрино, — также движущиеся со скоростью c . Их масса покоя также равна нулю и является ненаблюдаемой вели-

чиной. Но, в конце концов, вопрос о том, равна ли нулю масса фотона, является вопросом экспериментальным. Существуют способы уловить влияние массы покоя фотона, если она отлична от нуля. Такого рода эксперименты все время осуществляются, и нижняя граница для «массы покоя» фотона постепенно ползет все ниже и ниже. К концу 1975 г. приводилась уже цифра $m < 10^{-60}$ г.

§ 7.7. Кванты света в среде. Эффект Вавилова — Черенкова. Аномальный эффект Доплера. Из предыдущего параграфа и § 6.12 ясно, что импульс фотона в среде определяется согласно (6.183), если исходить из тензора Минковского, и согласно (6.184), если исходить из тензора Абрагама. Энергия же фотона при переходе из одной среды в другую остается неизменной, если только не меняется частота колебаний. Какое же выражение для импульса следует использовать, применяя закон сохранения импульса к «световым квантам в среде»? На этот вопрос прямого ответа нет, и некоторые соображения по этому поводу будут приведены в конце этого параграфа. А пока мы покажем, что использование представления о квантах света (фотонах) в среде в виде (6.183) позволяет получить полезные результаты, относящиеся к кинематике излучения, т. е. к условиям, налагаемым на частоты и направление излучения. Эти условия определяются законами сохранения энергии и импульса. Мы начнем с элементарного вывода условия излучения Вавилова — Черенкова.

В этом случае излучение исходит от частицы, не имеющей внутренних степеней свободы. Мы запишем законы сохранения для системы электрон — излучение. Конечно, сами по себе законы сохранения не дают ответа на вопрос о том, будет ли излучение или нет. Этот вопрос решается расчетом на основе уравнений электродинамики. Однако, если законы сохранения не соблюдаются, излучения заведомо нет.

Допустим, что произошло излучение кванта света. Если энергия и импульс электрона до излучения были \mathcal{E}_0 , \mathbf{p}_0 , а после излучения стали \mathcal{E}_1 , \mathbf{p}_1 , то законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1 = \hbar \omega, \quad (7.53)$$

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 = \frac{\hbar \omega}{c} \mathbf{n} s. \quad (7.54)$$

Записанные в таком виде законы сохранения предполагают, что изменение энергии и импульса электрона связано только с излучением. Нетрудно найти нужное нам следствие (7.53) и (7.54), если вспомнить, что согласно закону Ньютона $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{F} \Delta t$, а умножив обе части этого равенства на \mathbf{v} и вспомнив, что $\mathbf{F} \mathbf{v} \Delta t = \Delta \mathcal{E}$,

мы получим

$$\Delta \mathcal{E} = v \Delta p \quad (7.55)$$

(это соотношение годится, естественно, лишь для малых изменений импульса).

Подставляя в (7.55) выражения (7.53) и (7.54), сократим на $\hbar\omega$; заметим, далее, что $v s = v \cos \vartheta$, где ϑ — угол между направлением движения электрона и направлением распространения излучения. Тогда окончательное кинематическое условие для угла излучения ϑ запишется в виде

$$\cos \vartheta = \frac{c}{nv}. \quad (7.56)$$

Это — условие излучения Вавилова — Черенкова. Оно не выполняется, если электрон равномерно движется в вакууме ($n = 1$), поскольку $|\cos \vartheta| \leq 1$, а скорость электрона v всегда меньше c . Следовательно, равномерно движущийся электрон в вакууме излучать не может.

Этот результат мы получали непосредственно из принципа относительности: покоящийся в какой-то ИСО заряд не излучает. Относительно любой другой ИСО этот заряд движется равномерно и прямолинейно. Но излучение либо имеет место во всех ИСО, либо не имеет места ни в одной из них. Следовательно, равномерно движущийся электрон не излучает. Это рассуждение уже не годится, когда электрон движется в среде, потому что здесь появляется новая характерная скорость — скорость движения электрона относительно среды, которая к тому же определяет «привилегированную» систему отсчета, связанную с ней.

Обратим внимание на то, что в нашем приближении, несмотря на использованные квантовые представления, в окончательных результатах \hbar выпало. Полученный результат — классический. Применение квантовых представлений имеет чисто методическое значение. Мы используем два закона сохранения, которые вовсе не требуют обязательного использования квантовых представлений.

Нетрудно получить условие излучения с учетом импульса отдачи. Введем 4-вектор энергии-импульса (кратко 4-импульса) кванта света в среде

$$\vec{\pi} = \left(\frac{\hbar\omega}{c} n s, i \frac{\hbar\omega}{c} \right). \quad (7.57)$$

При излучении фотона электроном должен соблюдаться закон сохранения 4-вектора энергии-импульса (другими словами, законы сохранения энергии и импульса). Пусть 4-импульс электрона до излучения равен \vec{p}_0 , после излучения \vec{p} , а 4-импульс кванта

света $\vec{\pi}$, т. е.

$$\vec{p}_0 (m\gamma_0 v_0, im\gamma_0 c), \quad \vec{p} (m\gamma v, im\gamma c), \quad \vec{\pi} \left(\frac{\hbar\omega}{c} n\mathbf{s}, i \frac{\hbar\omega}{c} \right).$$

Запишем закон сохранения 4-импульса:

$$\vec{p}_0 = \vec{p} + \vec{\pi},$$

или, в компонентах,

$$p_{0i} - \pi_i = p_i.$$

Возводя последнее соотношение в квадрат, получим

$$p_{0i}^2 - 2p_{0i}\pi_i + \pi_i^2 = p_i^2,$$

где во всех членах проводится суммирование по индексу i . Однако в силу инвариантности квадрата импульса частицы $p_{0i}^2 = p_i^2$, и мы получим

$$\pi_i^2 = 2p_{0i}\pi_i \quad (7.58)$$

(сокращать на π_i нельзя; слева и справа — независимое суммирование). Вычислим отдельно левую и правую части (7.58):

$$p_{0i}\pi_i = \frac{\hbar\omega}{c} nm\gamma_0 (v_0\mathbf{s}) - m\gamma_0\hbar\omega, \quad \pi_i^2 = \left(\frac{\hbar\omega}{c} \right)^2 (n^2 - 1).$$

Приравнявая два эти выражения и учитывая, что $v_0\mathbf{s} = -v_0 \cos \vartheta$, где ϑ — угол между испускаемым светом и направлением скорости электрона, получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\hbar\omega}{c} \right)^2 (n^2 - 1) = \frac{\hbar\omega}{c} nm\gamma_0 v_0 \cos \vartheta - m\gamma_0\hbar\omega.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{1}{nm\gamma_0 v_0} \left\{ \frac{\hbar\omega}{2c} (n^2 - 1) + m\gamma_0 c \right\} = \\ &= \frac{c}{nv_0} \left\{ 1 + \frac{\hbar\omega}{2mc^2} (n^2 - 1) \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \right\}. \end{aligned}$$

Если рассматривать не излучение, а поглощение кванта, то в этой формуле следует изменить знак перед $\hbar\omega$. Если $\hbar\omega/mc^2 \ll 1$ (что справедливо для видимого света и электрона), мы возвращаемся к классическому условию излучения (7.56):

$$\cos \vartheta = \frac{c}{nv_0} = \frac{V_\Phi}{v_0}.$$

К кинематике излучения относятся также вопросы изменения частоты и направления распространения света при переходе от одной ИСО к другой. Речь идет об эффекте Доплера и абберации. Эти вопросы, конечно, удобнее всего решать с помощью СТО.

В § 7.2 мы рассмотрели случай распространения света в вакууме. Здесь мы получим соответствующие формулы для однородной изотропной среды, показатель преломления которой равен n ; оказывается, что этот случай существенно отличается от случая вакуума.

Фактически все вычисления с небольшими изменениями повторяют выкладки § 7.2, и поэтому мы проведем их весьма кратко, зато подробно обсудим результаты. Из 4-вектора $\vec{\pi}$ получаем пропорциональный ему 4-вектор фотона в среде

$$\vec{k}^3 \left(\frac{\omega}{c} n s, i \frac{\omega}{c} \right), \quad \vec{\pi} = \hbar \vec{k}. \quad (7.59)$$

Пусть в системе отсчета K' свет распространяется в плоскости (x', y') под углом ϑ' к оси x' ; среда покоится в системе K . Тогда

$$\vec{k}' \left(\frac{\omega'}{c} n \cos \vartheta', \frac{\omega'}{c} n \sin \vartheta', 0, i \frac{\omega'}{c} \right). \quad (7.60)$$

Компоненты вектора \vec{k} в системе K найдутся по тем же формулам (7.9), из которых, как и раньше, видно, что луч остается и в системе K в плоскости (x, y) . Вместо (7.10) получим

$$\omega = \omega' \Gamma (1 + B n \cos \vartheta'), \quad (7.61)$$

а вместо (7.11) и (7.12)

$$n \cos \vartheta = \frac{n \cos \vartheta' \cdot |1 - B|}{1 - B n \cos \vartheta'}, \quad (7.62)$$

$$\sin \vartheta = \frac{\sin \vartheta'}{\Gamma (1 + B n \cos \vartheta')}. \quad (7.63)$$

Отсюда для эффекта Доулера окончательная формула имеет вид (ср. с (7.13))

$$\omega = \frac{\omega' \sqrt{1 - B^2}}{1 - B n \cos \vartheta} \quad (7.64)$$

(причем по-прежнему (ср. (7.14)) $\omega' = \Gamma (\omega - kV)$), а для угла абберации (ср. с (7.15)) —

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{n \sqrt{1 - B^2}}{B + n \cos \vartheta'} \sin \vartheta'. \quad (7.65)$$

Пусть монохроматический источник с собственной частотой ω_0 покоится в K' , т. е. движется равномерно со скоростью V относительно K . Тогда $\omega' = \omega_0$. Из формулы (7.64) видно, что при $n > 1$ (это самые обычные среды, как вода и стекло, например) даже для скорости $V < c$ может оказаться, что $B n \cos \vartheta \geq 1$, т. е. знаменатель может обратиться в нуль и даже стать отрицательным. Поскольку изменение знака частоты означает, в крайнем случае,

всего лишь изменение фазы колебаний:

$$\cos(-\omega t) = \cos \omega t, \quad \sin(-\omega t) = -\sin \omega t = \sin(\omega t + \pi/2),$$

то частоту всегда можно считать положительной. Следовательно, формулу для доплер-эффекта в среде можно записать окончательно так:

$$\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{1-B^2}}{|1 - Bn \cos \vartheta|}. \quad (7.66)$$

Отметим прежде всего, что из (7.66) видно, что среда не оказывает влияния на поперечный доплер-эффект: при $\vartheta = \pi/2$ мы

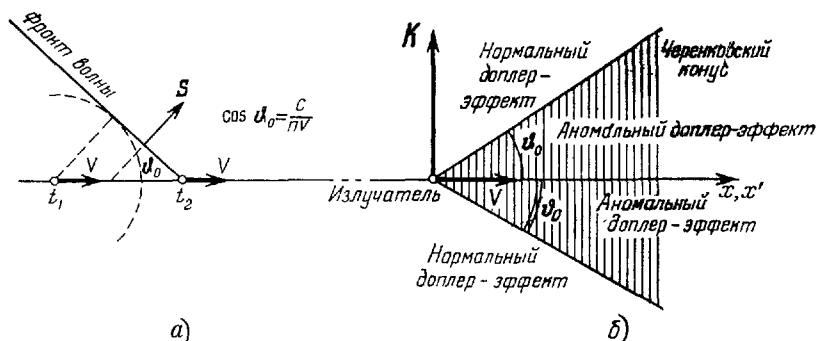


Рис. 7.6. а) Кинематическое объяснение возникновения излучения Вавилова — Черенкова. Отмечены положения равномерно движущейся заряженной частицы в моменты времени t_1 и t_2 . За промежуток времени $t_2 - t_1$ волновой фронт займет положение, изображенное пунктирной окружностью. б) Черенковский конус делит пространство вокруг излучателя на области аномального и нормального доплер-эффекта.

получаем в точности ту же формулу (7.14), что и для вакуума. Мы еще раз убеждаемся в том, что поперечный доплер-эффект возникает только из-за относительности промежутков времени между событиями.

При условии $1 - Bn \cos \vartheta = 0$ знаменатель (7.66) обращается в нуль, но это просто условие черенковского излучения. Если движется заряженная частица без внутренних степеней свободы, она излучает в конус около этого направления. Для нейтрального излучателя черенковский конус делит все пространство по отношению к наблюдаемому эффекту Доплера на две части. Условие $1 - Bn \cos \vartheta > 0$ выполняется вне черенковского конуса (рис. 7.6), и здесь мы имеем дело с нормальным доплер-эффектом, для которого $(d\omega/d\vartheta) > 0$, как это всегда имеет место в вакууме. «Внутри» черенковского конуса $1 - Bn \cos \vartheta < 0$ и $(d\omega/d\vartheta) < 0$; это уже аномальный эффект Доплера.

Небезынтересно сравнить формулы для аберрации света в вакууме и среде. Для случая нормального падения в K' получим в K

для угла абберации α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{\sqrt{1-V^2}} \frac{1}{n}. \quad (7.67)$$

Здесь отличие от вакуума (см. (7.15)) состоит лишь в появлении показателя преломления n , вошедшего в знаменатель. Никаких особенностей при $V = c/n$ нет.

И в заключение о том, какое выражение для импульса фотона нужно считать «правильным». Как уже указывалось в § 6.12, два различных выражения для импульса фотона в среде ($p^M = \frac{h\omega}{c}n$ и $p^A = \frac{h\omega}{cn}$) соответствуют различному разделению плотности импульса электромагнитного поля в среде на «плотность импульса поля» и «плотность импульса самой среды». Поскольку при рассмотрении эффекта Черенкова нас интересует полный импульс, теряемый электроном, а такой импульс определяется выражением g^M , использование g^M дает правильный результат *).

*) Подробнее см. в статьях: В. Л. Гинзбург, УФН 110, 309 (1973); В. Л. Гинзбург, В. А. Угаров, УФН 118, 175 (1976).

О НЕКОТОРЫХ «ПАРАДОКСАХ»
СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Если заглянуть в словарь, то окажется, что слово «парадокс» имеет по крайней мере три значения. Это, во-первых, своеобразное мнение, отличающееся оригинальностью и расходящееся с общепринятым. Во-вторых, это неожиданный вывод из каких-либо предположений. В-третьих, это результат, кажущийся на первый взгляд невероятным, но оказывающийся при более внимательном рассмотрении правильным. Изучая СТО, легко обнаружить примеры, иллюстрирующие все значения слова «парадокс».

Что касается «общепринятого мнения», то в применении к СТО речь идет о представлениях классической физики в целом и о классических представлениях о свойствах пространства и времени в частности. Классические представления о пространстве и времени в значительной мере совпадают с теми представлениями, которые усвоены нами в процессе школьного обучения и из практики повседневной жизни. Такие привычные представления давно уже стали общепринятыми, и их применение опирается, как мы полагаем, на «здравый смысл». Но, в конце концов, здравый смысл — это просто совокупность наших устоявшихся убеждений, среди которых оказываются и неверные. Эти неправильные убеждения выявляются в науке по мере ее развития. Очень часто оказывается, что определенные представления верны лишь приближенно, обнаруживается ограниченная область их применимости. Именно это и произошло с некоторыми понятиями, когда возникла СТО.

В повседневной жизни, да и в классической механике, например, мы привыкли считать, что время имеет абсолютный смысл. И, конечно, к этому есть достаточные основания. Теория относительности показала, что отсчеты времени события, производимые в разных ИСО, различны, т. е. относительны. Но психологически перестроиться на относительность времени трудно, тем более что эта относительность проявляется лишь при релятивистских скоростях (а таких скоростей у макроскопических тел просто не бывает) и, во всяком случае, не в повседневной жизни. С относительностью времени, с относительностью одновременности и промежутков времени между событиями связана относительность длин масштабов, находящихся в относительном движении. С точки

зрения здравого смысла, убеждающего нас в абсолютности времени, эти выводы парадоксальны. Но для современного уровня физики это совсем не парадоксы. Относительность времени — это просто современное понимание измерения (отсчета) времени наступления события. Такое представление, кстати, хорошо иллюстрирует представление диалектического материализма о времени, согласно которому время, как форма существования вечно движущейся материи, может зависеть от движения материи.

«Парадоксальные» результаты кинематики СТО хорошо известны и давно вошли в популярные книги. Речь идет об относительности длин масштабов («сокращение» длин), относительности одновременности и расстояний между событиями, относительности промежутков времени между событиями. Все эти выводы и их

отступления от «общепринятых» классических результатов подробно обсуждались в §§ 3.1—3.3, и мы не станем повторяться. В следующих параграфах мы рассмотрим парадоксы, уже несколько дальше отстоящие от основ СТО.

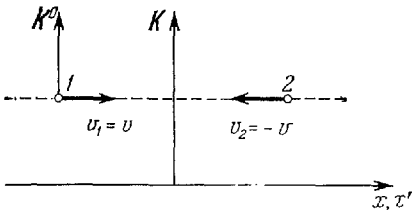


Рис. 8.1. Две частицы, движущиеся навстречу друг другу, могут «сближаться» со скоростью, большей c .

§ 8.1. Сверхсветовые скорости.

Как мы видели в § 3.4, из требования выполнения

принципа причинности вытекает ограниченность скорости передачи сигнала, т. е. скорости передачи энергии и импульса. Движение любой частицы с отличной от нуля массой покоя — это всегда сигнал (такая частица всегда несет с собой, если движется, энергию и импульс). Отсюда ясно, что скорость движения таких частиц не может превзойти скорость света в вакууме. Кинематика теории относительности показывает, что если в заданной ИСО скорость частицы $v < c$, то и в любой другой ИСО K' ее скорость $v' < c$ (см. § 3.5). Разберем еще один полезный пример в этой же связи.

Пусть в системе K две частицы движутся навстречу друг другу с равными скоростями (рис. 8.1). Единственное условие, которое накладывает на скорости этих частиц СТО, состоит в том, что каждая из этих скоростей меньше c . Чему равна относительная скорость этих частиц в K ? Пусть скорость первой частицы v_1 равна v ; тогда скорость второй частицы v_2 равна $-v$. Относительная скорость частиц $v_{\text{отн}} = v_1 - v_2 = v - (-v) = 2v$. Если $v > c/2$, то отсюда следует, что $v_{\text{отн}} > c$. Не является ли эта скорость примером сигнала, идущего со сверхсветовой скоростью?

В рассматриваемом случае $v_{\text{отн}}$ — это скорость уменьшения расстояния между частицами. Это расстояние действительно сокращается со скоростью, большей чем скорость света. Но с этой скоростью невозможно передать никакой «сигнал».

Чтобы определить возможную скорость передачи сигнала, поступим так. Наблюдатель, находящийся на частице 1, хочет передать сигнал (информацию) с помощью частицы 2. В тот момент, когда частицы поравняются, он передает «пакет с информацией» частице 2. Но скорость, с которой информация уходит от частицы 1, — это вовсе не скорость, с которой изменяется расстояние между частицами в K , а скорость частицы 2 относительно частицы 1. Можно сказать еще и иначе, что скорость передачи информации (или сигнала) — это путь, пройденный носителем информации за единицу времени. Расстояние само по себе носителем информации не является.

Итак, чтобы подсчитать скорость передачи сигнала, нужно подсчитать скорость частицы 1 относительно 2 (или наоборот). Свяжем для этого с частицей 1 систему K^0 (собственная система для частицы 1). Чтобы из общей формулы

$$v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}$$

получить $v'_1 = 0$, следует считать, что $V = v$. Результат, конечно, очевидный: K' просто совпадает с частицей 1. Что касается v'_2 , то

$$v'_2 = \frac{-v - v}{1 + v^2/c^2} = -\frac{2v}{1 + v^2/c^2} = -\frac{2v/c}{1 + v^2/c^2} \cdot c.$$

Это и есть относительная скорость рассматриваемых частиц. Последнее звено равенства записано, чтобы доказать, что $v'_2 < c$. Ниже приводится доказательство для общего случая.

Пусть в системе K скорости частиц, летящих навстречу друг другу, равны $v_1 = \alpha_1 c$, $v_2 = \alpha_2 c$; теория относительности требует лишь соблюдения условий $\alpha_1 < 1$ и $\alpha_2 < 1$. Если $\alpha_1 < 0,5$ и $\alpha_2 < 0,5$, то это случай неинтересный (даже в K нет никакой скорости, большей c). Пусть $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$.

Введем K' , где $v'_1 = 0$; мы уже видели, что в этом случае $V = v_1$. Тогда

$$v'_2 = \frac{v_2 - V}{1 - v_2 V/c^2} = \frac{-\alpha_2 c - \alpha_1 c}{1 + \alpha_1 \alpha_2} = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 + \alpha_1 \alpha_2} c.$$

Докажем, что $\alpha_1 + \alpha_2 < 1 + \alpha_1 \alpha_2$. Преобразуем это неравенство, перебросив все члены вправо: $\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 - 1 > 0$. Группируя члены, получим

$$(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) > 0,$$

что выполняется согласно условию, наложенному на α_1 и α_2 . Случай, рассмотренный ранее, соответствует $\alpha_1 = \alpha_2$.

Таким образом, в заданной ИСО обычную частицу ($m \neq 0$) нельзя разогнать до скорости c и нельзя также получить скорость c за счет перехода от одной ИСО к другой. Но все же нельзя ли отыскать в природе скорости, превышающие скорость света?

Первый пример напрашивается сам собой. Возьмем твердый, абсолютно жесткий стержень (тело) и толкнем его. Оба его конца начнут двигаться одновременно, и сигнал будет передан мгновенно. Но здесь ошибка кроется в исходном предположении. Природа не знает абсолютно жестких тел. Все тела подобны пружинам различной жесткости. Передача импульса (удара или толчка) от одного

конца тела к другому происходит в форме движения упругой волны. А скорость упругих волн в твердых телах заведомо меньше скорости света. Таким образом, СТО только еще раз подчеркивает, что абсолютно жестких тел в природе нет. Кстати, для мгновенного изменения импульса — даже в механике Ньютона — нужна бесконечная сила.

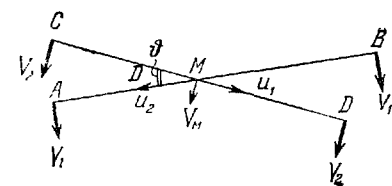


Рис. 8.2. Точка пересечения двух движущихся прямых может двигаться со скоростью, большей c .

Но если СТО категорически ограничивает скорость передачи сигналов, то на скорости, не связанные с передачей сигналов, никаких ограничений нет и они могут быть любыми; они могут и превышать c . Парадокс обычно заключается в том, что обнаруживается некоторая скорость, превышающая c , и утверждается, что эта скорость — скорость передачи сигнала. В конечном счете всегда удается показать, что рассматриваемая скорость не имеет отношения к распространению сигнала. Мы рассмотрим несколько примеров.

Прямая AB движется параллельно самой себе со скоростью V_1 (перпендикулярной прямой AB), а прямая CD также движется параллельно самой себе со скоростью V_2 (перпендикулярно прямой CD). Угол между прямыми равен φ . Какова скорость перемещения точки пересечения этих двух прямых M ?

Относительная скорость точки M по прямой AB из-за движения прямой CD равна $u_2 = V_2/\sin \varphi$. Скорость движения точки M по прямой CD из-за движения прямой AB равна $u_1 = V_1/\sin \varphi$. Складывая геометрически скорости u_1 и u_2 (рис. 8.2), мы найдем, что

$$V_M = \frac{1}{\sin \varphi} \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2 \cos \varphi}.$$

Из этой формулы видно, что при $\varphi \rightarrow 0$ скорость $V_M \rightarrow \infty$; она может превосходить и c . Но то, что эта скорость превышает c , совсем не противоречит теории относительности. Во-первых, точка

пересечения прямых — это не материальное тело. Во-вторых, эта точка не может быть использована в качестве способа передачи сигнала (информации), поскольку она образована в каждый данный момент новыми точками обеих прямых (точку пересечения нельзя «пометить»).

Несколько больший интерес представляет случай наклонного падения плоской световой волны на плоскость (рис. 8.3). Рассмотрим точку пересечения фронта волны с плоскостью $x = 0$ (точка A на рис. 8.3). С течением времени эта точка передвигается вправо. Нетрудно найти скорость ее перемещения: если выбрать отрезок BD равным c , то $AD = c/\sin \theta$. Но AD — это как раз путь, проходимый точкой A за единицу времени, т. е. скорость точки A . Поскольку $\sin \theta \leq 1$, всегда можно сделать эту скорость больше c . Чтобы драматизировать ситуацию, можно представить себе, что плоскость $x = 0$ покрыта люминесцентной краской.

Тогда вдоль оси со сверхсветовой скоростью побежит светящаяся точка. Конечно, светящуюся точку, скорость которой $v > c$, можно создать и еще проще, так сказать «рукой». Расположите вдоль оси x электрические лампочки и включайте их последовательно (и независимо) слева направо с заданным запаздыванием. Естественно, что вы можете получить движение светового пятна с любой скоростью. Но именно из второго примера хорошо видно, что это не сигнал: в этом процессе не передается и не может быть передана никакая информация, каждый источник излучает независимо. Но нельзя ли использовать для получения сверхсветовых скоростей относительно медленное вращение твердого тела значительного радиуса? Например, диск радиуса $r = c$ при угловой скорости $\omega \sim 1$ имел бы на своих краях линейную скорость $v \sim c$ и более. Но такой скорости нельзя достичь из-за релятивистских особенностей уравнения движения. С ростом линейной скорости отдельных участков тела пужны будут все большие и большие силы для сообщения этим участкам ускорения, и в результате линейная скорость самых удаленных участков тела все равно не сможет превзойти c .

Но если нельзя вращать твердое тело, то можно попробовать вращать световой луч. Поместим в начало координат прожектор и будем его вращать с угловой скоростью Ω . Опишем вокруг начала координат неподвижную сферу радиуса c . По поверхности

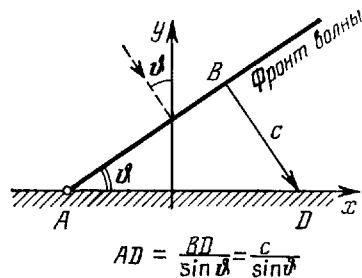


Рис. 8.3. Точка соприкосновения падающей электромагнитной волны с некоторой плоскостью может двигаться со скоростью, большей c .

$$AD = \frac{BD}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta}$$

этой сферы «зайчик» побегит с линейной скоростью

$$v = \Omega c.$$

Эта скорость может быть больше скорости света. Примером такого луча может служить световой «зайчик» от вращающегося пульсара. «Зайчик» от пульсара в Крабовидной туманности бежит по Земле со скоростью $\sim 10^{24}$ см/сек. Но, как и в предыдущих случаях, никакой сигнал с этой скоростью не передается. Дело в том, что в каждую точку экрана (Земли) приходит новая порция световой энергии от прожектора (пульсара), но не от соседней точки экрана. Поэтому передать какую-либо информацию от одной точки экрана к другой невозможно.

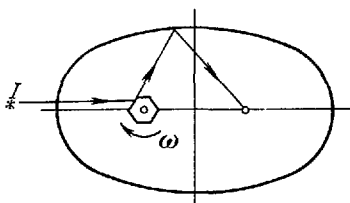


Рис. 8.4. «Зайчик», отражающийся от вращающегося зеркала и бегущий по удаленному экрану, может двигаться со скоростью, большей чем скорость света.

Фактически ту же самую идею можно осуществить еще и так. Луч света от источника I падает на вращающееся с угловой частотой ω зеркало, состоящее из нескольких граней. В зависимости от частоты ω и расстояния до экрана можно получить движение

«зайчика» (изображение источника) с линейной скоростью, превышающей c . Изготовим отражающее зеркало в форме эллипсоида, в одном из фокусов которого поместим вращающееся зеркало (рис. 8.4). Тогда отраженный от зеркала луч — по известному свойству эллиптической поверхности — всегда пройдет через второй фокус. В этом фокусе можно расположить приемник-анализатор. «Зайчик», бегущий по зеркалу, — независимо от его скорости — представляет собой изображение источника.

Превышать скорость c может также фазовая скорость электромагнитных волн в среде. Фазовая скорость волн в среде v определяется через скорость c и показатель преломления среды формулой $v = c/n$. Есть случаи, когда показатель преломления $n < 1$ и, следовательно, $v > c$. Все такие случаи относятся к среде и определенным частотам электромагнитных волн. Например, для жестких рентгеновских лучей у многих веществ $n < 1$. Такое же неравенство справедливо для плазмы. Но и здесь не возникает никаких противоречий со СТО. Дело в том, что скорость передачи сигнала определяется не фазовой скоростью. В среде, обладающей дисперсией, т. е. в среде, у которой показатель преломления зависит от частоты проходящего света, сигнал можно послать с помощью электромагнитных волн, спектр частот которых достаточно узок (группа волн). Скорость сигнала — это скорость передачи энергии такой группой; как показывает более подробное рассмотрение (см. [36]), скорость передачи энергии («амплитуды группы»)

определяется уже групповой скоростью. Но групповая скорость всегда оказывается меньше c , за исключением области аномальной дисперсии, где формально групповая скорость превышает c . Однако в этой области само понятие групповой скорости, а вместе с ним и скорости передачи сигнала теряет смысл. Таким образом, с помощью волновых процессов сигнал фактически передается всегда со скоростью, меньшей c .

§ 8.2. Парадокс нити и рычага. Пусть в системе K^0 (собственная система отсчета) покоится прямоугольная плоская рамка $ABCD$, по диагонали AC которой натянута упругая нить, растягивающая шарик m .

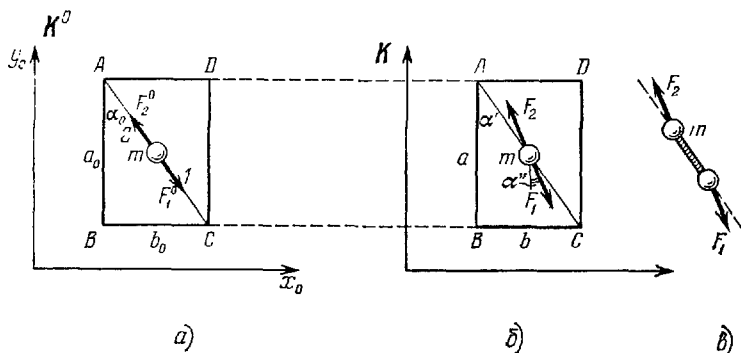


Рис. 8.5. Прямоугольная рамка, по диагонали которой натянута упругая нить, растягивающая шарик m . а) Картина в собственной системе отсчета K^0 ; б) так выглядит та же картина с точки зрения системы K ; в) если вместо шарика взять гантель, то на нее, с точки зрения K , действует пара сил.

с двух сторон растягивающая шарик, масса которого равна m (рис. 8.5, а). В системе K^0 направление нити определяется из треугольника ABC . Если ввести обозначения $AB = a_0$, а $BC = b_0$, то

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = b_0/a_0.$$

В системе K^0 упругие силы направлены вдоль нити, поэтому можно написать еще, что

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = b_0/a_0 = F_{1x}^0/F_{1y}^0, \quad (8.1)$$

где через F_1^0 обозначена сила, направленная к вершине C (аналогичные соотношения справедливы и для F_2^0).

Перейдем теперь к системе K , относительно которой система K^0 движется со скоростью V . Мы принимаем, как обычно, что оси x_0 и x совпадают, а оси y_0 , y и z_0 , z соответственно параллельны. Согласно формулам преобразования длин и сил (3.5) и (5.34)

имеем

$$a = a_0, \quad b = b_0 (1 - B^2)^{1/2}, \quad (8.2)$$

$$F_{1x} = F_{1x}^0, \quad F_{1y} = F_{1y}^0 (1 - B^2)^{1/2}. \quad (8.3)$$

Отсюда видно, что равенство (8.1) уже несправедливо; в системе K угол, определяющий направление нити, и угол, определяющий направление сил, вовсе не равны друг другу:

$$\operatorname{tg} \alpha' = b/a = (b_0/a_0) (1 - B^2)^{1/2} = \Gamma^{-1} b_0/a_0 = \operatorname{tg} \alpha_0/\Gamma, \quad (8.4)$$

$$\operatorname{tg} \alpha'' = F_{1x}/F_{1y} = (F_{1x}^0/F_{1y}^0)/(1 - B^2)^{1/2} = \Gamma F_{1x}^0/F_{1y}^0 = \Gamma \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (8.5)$$

Хотя сумма сил по-прежнему остается равной нулю, однако силы в системе K направлены под углом к нити (рис. 8.5, б). Это обстоятельство кажется на первый взгляд удивительным. Действительно, что произойдет, например, если перерезать шнур на участке 2. В системе K^0 ускорение в начальный момент должно быть параллельно направлению силы (это явно нерелятивистский случай, и обычный закон Ньютона вполне применим), т. е. оно направлено вдоль нити. В системе K , казалось бы, ускорение должно быть направлено под углом к нити, так как направление нити и направление силы F_1 не совпадают. Это явно противоречивые утверждения, но парадокс разрешается просто: в релятивистской динамике ускорение, вообще говоря, не совпадает по направлению с действующей силой и, хотя сила направлена под углом к направлению нити, ускорение направлено вдоль нити. Сам парадокс представляет собой полезную иллюстрацию особенностей релятивистского уравнения динамики.

Убедимся, что в обеих системах ускорение шарика направлено вдоль нити. Удобно записать релятивистское уравнение движения в виде

$$m \, dv/dt = \gamma^{-1} [F - (v/c^2) (Fv)];$$

здесь m — масса, F — действующая на шарик трехмерная обычная сила, v — скорость тела, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, где $\beta = v/c$.

В системе K^0 в момент $t = 0$, когда обрезают нить 2,

$$m \, dv^0/dt = F_1^0,$$

или, в проекциях,

$$m \, dv_x^0/dt = F_{1x}^0, \quad m \, dv_y^0/dt = F_{1y}^0.$$

Направление движения в начальный момент (делим почленно первое соотношение на второе) определяется соотношением

$$dv_x^0/dt_y^0 = F_{1x}^0/F_{1y}^0 = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Согласно (8.1) это направление — направление ускорения — совпадает с направлением нити, как это и должно быть. Итак,

в K^0 силы и ускорение параллельны и движение в начальный момент направлено вдоль нити.

Теперь перейдем к системе K . В этой системе тело уже движется со скоростью, совпадающей со скоростью системы отсчета K^0 . т. е. V . Поэтому $\gamma = \Gamma$ и проекции ускорения здесь запишутся уже так:

$$m dv_x/dt = [F_{1x} - (V/c^2) F_{1x}V]/\Gamma = F_{1x}/\Gamma^3, \quad (8.6)$$

$$m dv_y/dt = F_{1y}/\Gamma; \quad (8.7)$$

здесь учтено, что скорость шарика совпадает со скоростью системы K , т. е. равна V , и имеет компоненты $(V, 0, 0)$; F_{1x} и F_{1y} — это компоненты силы в системе K^* . Чтобы найти направление ускорения в K , разделим почленно (8.6) на (8.7):

$$dv_x/dv_y = (F_{1x}/F_{1y})/\Gamma^2 = \Gamma \operatorname{tg} \alpha_0/\Gamma^2 = \operatorname{tg} \alpha_0/\Gamma = \operatorname{tg} \alpha', \quad (8.8)$$

где мы воспользовались в третьем звене цепи равенств соотношением (8.5), а в последнем — соотношением (8.4). Но из (8.8) видим, что ускорение в K в начальный момент тоже направлено вдоль нити, и никакого парадокса не возникает.

Однако представим себе, что вместо шарика, который подразаумевается точечным, нити растягивали бы твердое тело, например гантель. Тогда в системе K на парики гантели действовала бы пара сил (рис. 8.5, *е*) и гантель повернулась бы относительно диагонали рамки.

Но в собственной системе очевидно, что ось гантели совпадает с диагональю рамки. Здесь мы, конечно, сталкиваемся с парадоксом. Но этот парадокс представляет собой вариант давно известного парадокса рычага, к которому мы переходим. Пусть в системе K^0 покоится рычаг (рис. 8.6). Он находится в равновесии, несмотря на то что на него действуют две силы: F_x^0 и F_y^0 , направленные каждая по соответствующей координатной оси. Равновесие обеспечивается равенством моментов сил в K^0 :

$$F_x^0 l_y^0 = F_y^0 l_x^0; \quad (8.9)$$

направление моментов сил F_x^0 и F_y^0 противоположное.

Тот же самый рычаг можно рассмотреть и с точки зрения K , относительно которой рычаг движется как целое со скоростью V . Если составить выражение для момента силы F_x и момента силы F_y в K , то оказывается, что они уже не равны, а следовательно, возникает суммарный момент сил, действующих на рычаг.

*) Нетрудно заметить, что соотношения (8.6) и (8.7) соответствуют двум исключительным случаям релятивистского уравнения, когда сила и ускорение параллельны; соответствующие массы в этом случае называли раньше «поперечной» и «продольной» массами. От этих, в общем неудачных, терминов сейчас практически отказались, хотя они неплохо передают тензорный характер связи между силой и ускорением в релятивистской механике.

Действительно, согласно (5.34) и (3.5)

$$F_x = F_x^0, \quad F_y = F_y^0 \sqrt{1 - B^2},$$

$$l_x = l_x^0 \sqrt{1 - B^2}, \quad l_y = l_y^0.$$

Разность моментов сил F_x и F_y создает в K вращающий момент $L = F_x l_y - F_y l_x = F_x^0 l_y^0 - (1 - B^2) F_y^0 l_x^0 = B^2 F_y^0 l_x^0 = -B^2 F_x^0 l_y^0$, (8.10)

где использовано (8.9). Парадокс состоит в том, что, хотя заведомо известно, что рычаг неподвижен, в системе K на рычаг действует момент сил и, следовательно, рычаг должен поворачиваться.

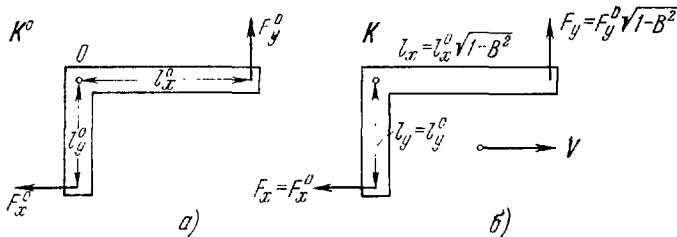


Рис. 8.6. Парадокс рычага. Если в системе K^0 рычаг находится в равновесии, суммарный момент сил равен нулю; но при рассмотрении того же самого рычага с точки зрения системы K согласно формулам преобразования длин и сил возникает момент сил, отличный от нуля. СТО очень изящно объясняет, почему и с точки зрения системы K рычаг будет находиться в покое (см. текст).

Весьма остроумное разрешение этого парадокса принадлежит Лауэ. Мы привыкли к тому, что момент силы вызывает вращение; другими словами, вызывает появление момента импульса системы. В системе K момент силы действительно определяет скорость возрастания момента импульса, но возрастание момента импульса не связано с вращением рычага. Откуда же берется приращение момента импульса? Рассмотрим работу сил F_x и F_y в системе K . В системе K рычаг движется, и в единицу времени сила F_x совершает работу $-F_x V$. Сила F_y не совершает работы, так как она направлена нормально к скорости рычага. Следовательно, на конце рычага, в точке приложения силы F_x , совершается работа, и в единицу времени энергия рычага в этой точке возрастает на величину $-F_x V$. Но это означает, что масса рычага в точке приложения силы в единицу времени возрастает на $-F_x V/c^2$. Умножив эту величину на скорость рычага V , найдем приращение импульса $-F_x B^2$. А момент импульса за единицу времени возрастает на $-F_x l_y B^2$. А это как раз и есть дополнительный момент (8.10). Итак, возникающий дополнительный момент описывает не вращение, а определяет скорость, с которой изменяется момент импульса

системы. В этом объяснении есть свои слабости. В СТО нет абсолютно жестких тел, и мы обязаны учитывать деформацию рычага; в предыдущем рассуждении молчаливо предполагалось, что рычаг не меняет свою форму. В системе K^0 мы должны рассмотреть плечи рычага, изогнутые под действием сил F_x^0 и F_y^0 .

Рассматривая рычаг, мы наталкиваемся еще на один парадоксальный результат. Допустим, что на рычаг до момента $t = 0$ силы просто не действуют, а в момент $t = 0$ одновременно в K^0 «включаются» силы F_1^0 и F_2^0 . В каждый момент времени в K^0 равновесие будет соблюдено. Но в K силы будут включены уже не одновременно, и будет промежуток времени, когда сила F_1^1 уже действует, а сила F_2^1 — еще нет. Снова возникает момент силы. То, что здесь существенны именно силы, приложенные в разных точках тела (парадоксы возникают, разумеется, при рассмотрении твердых тел), видно из совсем простого примера. Пусть в K^0 на оси x^0 лежит твердое тело длиной l^0 . До момента $t = 0$ на него силы не действуют, а в момент $t = 0$ с обеих сторон включаются равные, но противоположно направленные силы. В K^0 равновесие всегда есть, а в K есть промежуток времени, в котором силы не уравновешиваются, и, следовательно, тело должно прийти в движение. Оставим этот парадокс для размышления читателю.

§ 8.3. Тахионы. Так называют частицы, скорость которых превышает скорость света в вакууме. Сразу оговоримся, что речь идет о гипотетических частицах: экспериментальные попытки обнаружить такие частицы не увенчались успехом. Но уже само предположение об их существовании кажется парадоксальным: в основе СТО лежит ограниченность скорости передачи сигнала, причем пределом является как раз скорость c . Конечно, на скорость «вообще» никаких ограничений нет (см. § 8.1), но передача сигнала — это распространение энергии и импульса. Движение частиц, к которым мы привыкли, безусловно может служить сигналом. Кроме того, для обычных частиц, обладающих конечной массой покоя, с существованием которых мы освоились, скорость света просто недостижима. Из релятивистского уравнения движения для таких частиц вытекает, что скорость света может быть достигнута лишь за бесконечно большое время (не говоря уже о том, что для достижения ими скорости света требуется бесконечно большая энергия). Таким образом, вопрос о сверхсветовой скорости частиц нашего обычного мира отпадает сразу.

Можно допустить, однако, существование особой группы частиц, переход из которой к обычным частицам или обратно невозможен. Эти частицы могли бы порождаться в каких-то ядерных превращениях сразу со сверхсветовыми скоростями. Предположение о возникновении тахионов навеяно картиной порождения фотонов: фотоны сразу порождаются со световой скоростью,

а вовсе не возникают «динамически» при ускорении обычных частиц.

В точности так же, как и в § 3.5, можно показать, что если в одной ИСО скорость частицы v больше c , то это справедливо и в любой другой ИСО. Следовательно, обычные частицы (фотоны) и тахионы образуют независимые группы частиц в том смысле, что переходы из одной группы в другую за счет ускорения частиц невозможны и что переход от одной ИСО к другой оставляет частицу в той же самой группе, в какой она находилась и в исходной ИСО.

Допустим существование таких частиц и рассмотрим кинематические следствия этого предположения.

Итак, полагаем, что скорость тахиона v (определяемая обычным образом) больше c , т. е. $\beta = (v/c) > 1$. Тогда для интервала между двумя событиями — положениями тахиона в двух точках пространства в два момента времени — мы, как обычно, получим (одномерное движение вдоль оси x, x')

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 (1 - \beta^2) dt^2.$$

Для тахиона (в отличие от обычных частиц) $ds^2 < 0$, т. е. интервал пространственноподобный; мы видели в § 3.4, что в этом случае понятия «позже» и «раньше» для двух событий уже не являются абсолютными. Следовательно, существуют такие системы отсчета, где тахион движется в одном направлении, и такие, где он движется в противоположном. Можно найти условие, налагаемое на скорость тахиона, для того чтобы в какой-то системе K' его движение было «обратным». В системе K' для тахиона

$$\Delta t' = \Gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \Gamma (1 - \beta V) \Delta t.$$

Мы считаем (для любой ИСО) $V < 1$. Интервал времени $\Delta t'$ будет отличаться знаком от Δt (что означает изменение последовательности событий во времени), если $1 - \beta V < 0$. Отсюда находится искомое условие $v > c^2/V$; ясно, что $v > c$. Различия в описании движения тахиона в системах K и K' ясно видны на рис. 8.7, а. Линии одновременности в K параллельны оси x , и, проводя их все дальше и дальше по положительной оси ct , мы отмечаем положение тахиона все правее и правее — тахион движется вправо. Линии одновременности в K' параллельны оси x' . Если проводить эти линии так, чтобы они пересекали ось ct' все дальше и дальше по положительному направлению оси ct' , мы находим тахион все левее и левее — тахион движется влево.

Этот же результат можно изложить и еще драматичнее (рис. 8.7, б). Пусть в системе K из точки O вышел тахион, который пришел в мировую точку P . В системе K , как это видно на рисунке, тахион был «испущен» в момент $t = 0$ («раньше») и прибыл

в точку P в момент t_1 , т. е. «позже». На той же диаграмме проведены пространственная и временная оси системы K' (линии одновременности в K' параллельны оси x'). Из рисунка видно, что тахивон в системе K' раньше был в точке P (в момент $-t'_1$), затем он двигался к точке O , где и был поглощен (в момент $t' = 0$). Таким образом, только за счет выбора системы отсчета можно получить движение тахиона в обратном направлении в пространстве и обнаружить в одной системе отсчета поглощение тахиона вместо испускания.

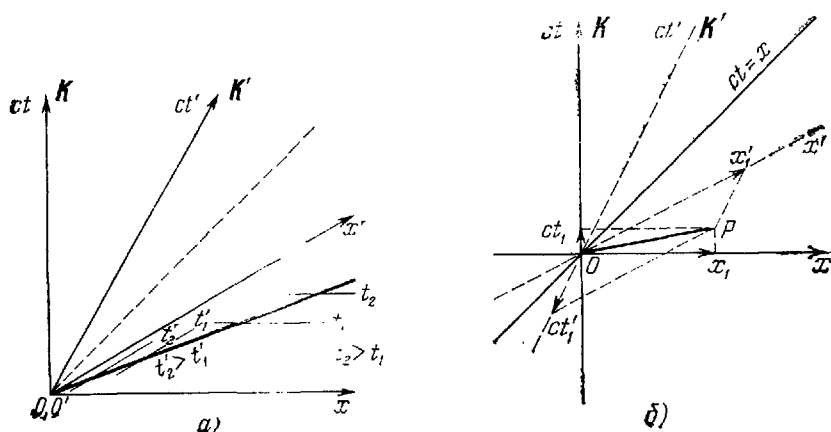


Рис. 8.7. а) Движение тахиона, рассматриваемого в двух ИСО. В системе K тахивон движется вправо, в K' — влево. Жирная линия — мировая линия тахиона. б) Обращение порядка событий во времени для движущегося тахиона.

Отметим попутно курьезную картину наблюдения «светящегося тахиона», т. е. тахиона, испускающего свет. Из рис. 8.8 видно, что наблюдатель, покоящийся в системе K , «увидит» два тахиона, уходящие в двух противоположных направлениях.

Вернемся теперь к обращению последовательности событий во времени, в частности обмену местами «испускания» и «поглощения». Такая ситуация на первый взгляд противоречит обычным представлениям о взаимоотношениях причины и следствия. Действительно, пусть известно, что в O находится источник тахионов. Источник — это «причина» возникновения тахиона. Движение тахиона к P — это «следствие» порождения тахиона. Но наблюдение в системе K' показывает, что тахивон идет из P и поглощается в O . Как это ни непривычно, нужно все же признать, что наблюдаемая последовательность не противоречит причинно-следственным взаимоотношениям, если четко сформулировать, что мы понимаем под такими взаимоотношениями. Можно рассуждать, например, так.

Будем считать, что A есть причина, а B — следствие, если повторение события A в моменты времени t_1, t_2, \dots , выбранные произвольно, неизменно приводит к наступлению события B в момент времени $t_1 + T, t_2 + T, \dots$. Здесь — существенны контролируемые повторения события A и их корреляция с событием B . В этом смысле причинно-следственные связи не зависят от того, какое событие наступает «раньше» и какое «позже».

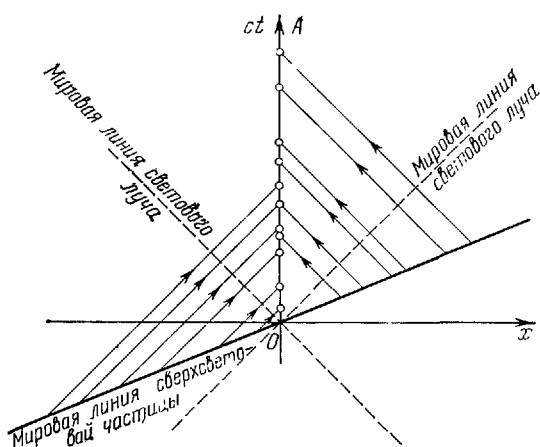


Рис. 8.8. Наблюдаемая картина движения светящейся частицы движущейся со сверхсветовой скоростью.

Последовательность событий во времени не входит в определение причинно-следственной связи и не может служить для установления различия между причиной и следствием.

В нашем примере в системе K' контролируемым событием является поглощение тахиона. Этому контролируемому поглощению всегда будет предшествовать движение тахиона от P к O . Мы должны будем признать поглощение причиной, а движение тахиона — следствием. Приведенное определение причины — следствия не соответствует обычному утверждению о том, что «абсолютный смысл понятия «раньше» и «позже»... является необходимым условием для того, чтобы имели смысл понятия причины и следствия». Конечно, если «причина» и «следствие» происходят в одной точке (в данной ИСО), то причина должна быть раньше следствия. Но тогда заведомо интервал между событиями времениподобный и в любой ИСО следствие окажется «позже» причины. С тахионами такого быть не может. Все «события» с тахионами происходят, с нашей точки зрения, в разных точках. Обмен последовательностями событий не страшен.

Итак, изменение временной последовательности событий не нарушает обычных представлений о причинно-временной связи. Но есть условие, которое должно быть выполнено безусловно. Оно состоит в том, что из настоящего нельзя воздействовать на прошлое. Сигнал, посланный из данной точки пространства, не может оказаться в ней *до того*, как он был послан.

Если тахионы могли бы служить сигналами, то, как это видно из схемы на рис. 8.9, можно было бы с их помощью послать сигнал так, чтобы другой сигнал, вызванный первым, вернулся бы в точку посылки первого сигнала (причино-следственный цикл) до того, как первый сигнал был испущен. На рис. 8.9 изображены мировые линии двух тел I и II , находившихся первоначально в состоянии покоя, затем двигавшихся равномерно и прямолинейно с одинаковыми скоростями и затем вновь находящихся в покое. Мировые точки A и A' лежат на линии одновременности, совпадающей для обоих тел, находящихся в движении. Мировые точки C и C' лежат на линии одновременности, совпадающей для обоих тел, находящихся в покое. На рисунке изображены также мировые линии двух сверхсветовых сигналов AB и CD . Послав сигнал AB , а затем (после получения сигнала AB) другой сигнал CD , мы примем сигнал CD в точке D раньше, чем был послан сигнал из A .

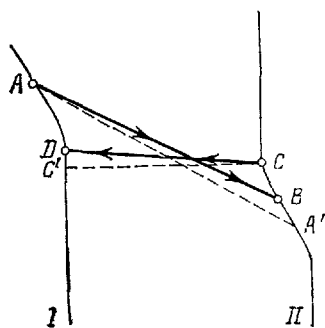


Рис. 8.9. Замкнутый причинно-следственный цикл с участием сверхсветовых сигналов. Линии I , II — мировые линии двух систем отсчета. Из точки A посылается первый сверхсветовой сигнал AB (AA' — линия одновременности). Из системы II (точка C) посылается обратный сверхсветовой сигнал CD , который приходит в системе I (точка D) раньше, чем был послан первый сигнал (точка A). Линии одновременности и мировые линии сверхсветовых сигналов проведены в соответствии с рис. 2.8, б.

Таким образом, мы получили пример замкнутого причинно-следственного цикла, когда налицо возможность воздействия на прошлое. Конечно, этот результат относится к любому сверхсветовому сигналу, но в применении к тахионам это означает, что сами тахионы (в отличие от обычных частиц) уже не могут служить сигналами.

Если допустить возможность существования тахионов и соблюдение требований причинно-следственного цикла, то как раз возможность обращения последовательности событий во времени для тахионов позволяет избавиться от возражений, связанных уже с «динамическими» свойствами этих частиц. Если считать основные соотношения СТО справедливыми для тахионов, то из формул преобразования для скорости и энергии частицы

(см. гл. 3, 5)

$$\beta' = \frac{\beta - V}{1 - \beta V}, \quad \mathcal{E}' = \Gamma \mathcal{E} (1 - \beta V)$$

следует, что в тех самых системах отсчета, в которых последовательность событий для тахиона меняет свой порядок (и в которых меняется знак скорости, что связано с тем, что Δt и $\Delta t'$ разного знака), энергия тахиона становится отрицательной. Отрицательная энергия тахиона недопустима потому, что ее наличие означало бы возможность неограниченного получения энергии. Действительно, совместное порождение двух тахионов — одного с отрицательной, а другого с положительной энергией — не требовало бы затраты энергии, а полученный тахион с положительной энергией мог бы совершать полезную работу.

Но мы уже видели (см. рис. 8.8), что если в системе отсчета K наблюдается испускание тахиона, который затем поглощается, то в системе K' , в которой скорость тахиона удовлетворяет условию $v > c^2/V$, этот же процесс может быть описан как поглощение тахиона, движущегося в обратном направлении, причем энергия тахиона будет уже положительной. Это обстоятельство позволяет обойти трудность, связанную с появлением отрицательных энергий.

И, наконец, несколько замечаний, касающихся импульса и энергии тахионов. Из СТО вытекает (см. гл. 5), если ограничиться одномерным случаем ($p_x = p$), что

$$\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4. \quad (8.11)$$

Если построить график $\mathcal{E} = \mathcal{E}(p)$, мы получим гиперболу, причем, как мы видели (§ 5.5),

$$v = d\mathcal{E}/dp. \quad (8.12)$$

Если частица ускоряется, то на плоскости (\mathcal{E}, p) она движется по гиперболе (8.11). Наклон касательной всегда меньше c , независимо от того, как повышается энергия частицы — за счет ли ускорения частицы или за счет перехода к другой системе отсчета. Поскольку энергия частицы положительна, то нижняя ветвь гиперболы не рассматривается. Обратим также внимание на то, что асимптоты гиперболы, уравнением которых будет $\mathcal{E}^2 - p^2 c^2 = 0$, соответствуют фотонам. Если считать, что к тахионам применимы основные формулы релятивистской механики (см. гл. 5), то $p = m\gamma v$ и $\mathcal{E} = mc^2\gamma$ становятся мнимыми величинами, поскольку $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, а $\beta > 1$, так что $\gamma = i\gamma_*$, где $1/\gamma_* = \sqrt{\beta^2 - 1}$. Можно получить действительные значения импульса и энергии, если считать за массу величину $m = im_*$. Однако чем мнимая масса лучше мнимых энергии и импульса? Но дело в том, что

m_* — это мнимая собственная масса тахиона, а системы отсчета, где тахивон покоился бы, не существует (система отсчета состоит из обычных частиц, и ее скорость всегда меньше c). Поэтому собственная масса тахиона ненаблюдаема и ее можно считать какой угодно.

Но тогда на плоскости (\mathcal{E}, p) нам следует рассмотреть еще две гиперболы, соответствующие мнимой собственной массе $z^2 - p^2 c^2 = -m_*^2 c^4$.

Таким образом, на плоскости (\mathcal{E}, p) нужно рассматривать три гиперболы (рис. 8.10). Наклон касательной к этим гиперболам всюду больше c . Конечно, множитель γ входит не только в выражения для импульса и энергии — он входит в определения длины через собственную длину и интервалов времени через собственное время. Но мы легко можем отказаться от «собственных» величин, считая их ненаблюдаемыми.

Отсылая читателя за подробностями к литературе *), подведем некоторые итоги. За последнее время были сделаны попытки — оставаясь в рамках СТО — выяснить свойства частиц, скорость которых превышает c . С точки зрения СТО скорости, которые не соответствуют реальному физическому распространению чего бы то ни было, могут быть любыми. Обычные частицы всегда движутся со скоростью меньше c ; любой «сигнал» имеет скорость меньше c . Следовательно, сам тахивон не может служить сигналом, т. е. его взаимодействие с нашим миром крайне ограничено. Не исключено, что можно допустить взаимодействие тахионов с нашим миром лишь через обмен электромагнитными сигналами.

Если исходить из принципа «все, что не запрещено, имеет право на существование», следует допустить возможность существования тахионов. Прямого теоретического запрета тахионов пока нет. Тем не менее представляется маловероятным, что такие частицы действительно существуют. Последнее слово остается за экспериментом.

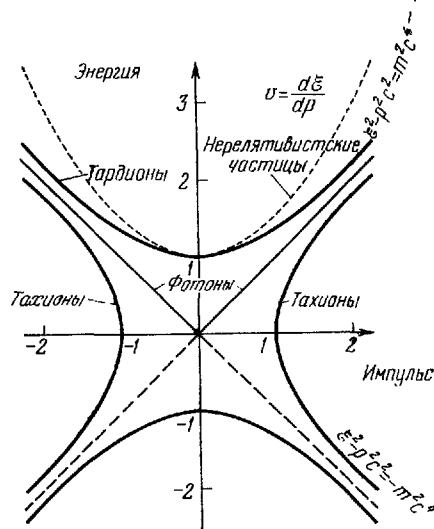


Рис. 8.10. Тахионы и обычные частицы, изображаемые на плоскости (\mathcal{E}, p) .

*) «Эйнштейновский сборник 1973», «Наука», 1974.

§ 8.4. **Парадокс часов.** Этот парадокс — если только здесь есть на самом деле парадокс — появляется из-за неоднократного обсуждавшегося различия в отсчетах промежутков времени между событиями в различных ИСО. Напомним коротко нужные для дальнейшего результаты.

Пусть тело покоится в системе K' и по часам, движущимся вместе с ним и системой K' , были отмечены два события в точке x' в моменты времени t'_1 и t'_2 . Промежуток $t'_2 - t'_1$ — это промежуток собственного времени, и его естественно обозначать через Δt . Эти же самые два события наблюдатели из K отметят в двух точках системы K двумя часами, зафиксировав эти события в моменты t_1 и t_2 . Промежуток времени между теми же двумя событиями окажется равным $\Delta t = t_2 - t_1$. Мы знаем, что

$$\Delta \tau = \sqrt{1 - \beta^2} \Delta t, \quad (8.13)$$

т. е. промежуток собственного времени между событиями меньше, чем промежуток между теми же событиями, отсчитанный по часам системы, относительно которой тело движется (ср. § 3.3).

В формуле (8.13) явная асимметрия в отсчетах времени. Казалось бы, можно рассуждать так. Поскольку все часы в K синхронизованы, Δt , отсчитанное разными часами в K , может быть приравнено отсчету промежутка времени по одним часам из K . Тогда окажется, что тождественные часы в двух ИСО K и K' идут по-разному. Но ведь СТО опирается на полную симметрию инерциальных систем! И она действительно есть! Просто в наших рассуждениях упущена важная деталь. Поскольку одновременность относительна, часы, синхронизованные в одной системе, вовсе не синхронизованы с точки зрения другой. Синхронизация часов относительна! Величина Δt вовсе не интервал собственного времени для часов из K . Сделаем соответствующий подсчет.

Пусть часы III покоятся в начале системы K' , движущейся со скоростью V относительно K . Синхронизованные в системе K и покоящиеся в этой системе часы I находятся в точке $x_1 = a$, а часы II — в точке $x_2 = b$.

Переменная координата часов III в системе K равна $x_3 = Vt$. Таким образом, координатами часов I , II , III в системе K будут

$$x_1 = a \quad (\text{для часов } I), \quad (8.14)$$

$$x_2 = b \quad (\text{для часов } II), \quad (8.15)$$

$$x_3 = Vt \quad (\text{для часов } III). \quad (8.16)$$

Из формулы преобразований Лоренца (2.11) $x = \Gamma(x' + Vt')$ можно получить зависимость координаты x' в системе K' от времени t' в этой системе и координаты x в K , а именно:

$$x' = -Vt' + \frac{x}{\Gamma}.$$

Так мы найдем x'_1, x'_2 ; что касается x'_3 , то очевидно, что $x'_3 = 0$. Следовательно,

$$x'_1 = -Vt' + \frac{a}{\Gamma} \quad (\text{для часов } I), \quad (8.17)$$

$$x'_2 = -Vt' + \frac{b}{\Gamma} \quad (\text{для часов } II), \quad (8.18)$$

$$x'_3 = 0 \quad (\text{для часов } III). \quad (8.19)$$

Как обычно, мы считаем, что можно сравнивать показания часов из двух систем, когда они находятся в одном месте. Тогда реально можно провести следующие сопоставления. Во-первых, можно сравнить показания часов *III* с показаниями часов *I*, когда они проходят мимо друг друга; мы обозначим соответствующие показания часов через t'_1 и t_1 ; во-вторых, можно сравнить показания часов *III* и *II*, когда часы *III* пройдут мимо часов *II*; обозначим эти показания через t'_2 и t_2 (рис. 8.11). Когда часы *III* совпадают с *I*, то и те и другие часы находятся в точке $x' = 0$; поэтому согласно (8.17) мы найдем значения моментов времени t'_1 и t'_2 , а именно: $t'_1 = a/V\Gamma$, а $t'_2 = b/V\Gamma$. В то же самое время из (8.16) получаем $t_1 = a/V$, $t_2 = b/V$, т. е. $t_1 = \Gamma t'_1$ и $t_2 = \Gamma t'_2$. Показания t_1 и t_2 — это показания двух разных часов, синхронизованных в системе *K*.

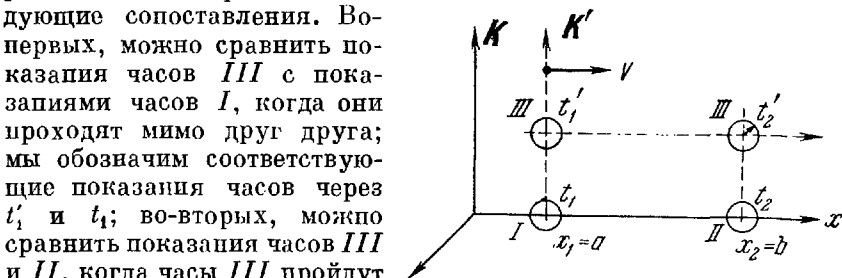


Рис. 8.11. Объяснение полной симметрии двух инерциальных систем отсчета по отношению к «замедлению» времени. В любой системе отсчета промежуток собственного времени между двумя событиями окажется меньше, чем промежуток времени между теми же двумя событиями, отсчитанный по двум часам любой другой ИСО.

мы найдем значения моментов

времени t'_1 и t'_2 , а именно: $t'_1 = a/V\Gamma$, а $t'_2 = b/V\Gamma$. В то же самое время из (8.16) получаем $t_1 = a/V$, $t_2 = b/V$, т. е. $t_1 = \Gamma t'_1$ и $t_2 = \Gamma t'_2$. Показания t_1 и t_2 — это показания двух разных часов, синхронизованных в системе *K*.

Согласно синхронизации в этой системе, когда часы *II* показывали момент t_2 , то и часы *I* показывали тот же момент t_2 . Разность $t_2 - t_1$ — это время, протекшее в системе отсчета *K*, за которое показание часов *III* изменилось на $t'_2 - t'_1$. С точки зрения системы *K* ход часов *III* определяется соотношением

$$t'_2 - t'_1 = \frac{1}{\Gamma} (t_2 - t_1) = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (8.20)$$

как это и должно быть, поскольку $t'_2 - t'_1$ — промежуток собственного времени. Так как $|t'_2 - t'_1| \leq |t_2 - t_1|$, то движущиеся часы, наблюдаемые из системы *K*, отстают. Все это нам известно. Теперь мы переходим к решающему шагу: нужно сравнить ход часов *I* и *II* так, как он представляется с точки зрения системы *K'*. Чтобы судить о ходе часов, нужно проследить за ходом одних

часов, скажем часов *II*. Но для этих часов есть только одно непосредственное показание: когда они были напротив часов *III*, то часы *III* показывали t'_2 , а часы *II* показывали t_2 . Другое показание часов *II* нужно вычислить (ср. § 2.4). Мы найдем, где находились и что показывали часы *II*, когда напротив часов *III* были часы *I*. На все поставленные вопросы мы будем отвечать уже с точки зрения системы K' . Когда часы *III* были напротив *I*, они показывали время $t'_1 = a/V\Gamma$. Часы *II* находились от часов *I* на расстоянии $x'_2 - x'_1 = (b - a)/\Gamma$ (см. (8.17) и (8.18)). Но когда часы *I* были напротив *III*, то их координаты $x'_1 = x'_s = 0$. Поэтому $x'_2 = (b - a)/\Gamma$ — это координата часов *II* в тот момент, когда совпадают часы *I* и *III*. Но теперь уже нетрудно найти показание часов *II* в этот же момент времени. В формулу

$$t = \Gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right)$$

мы подставим значения $x'_2 = (b - a)/\Gamma$ и $t'_1 = a/V\Gamma$. (Величина t'_1 в силу синхронизации часов в K' совпадает с показанием часов из K' , находящихся в точке x'_2 , так что $t'_1 = t'_2$.) В результате подстановки получим показание часов *II*:

$$t = \Gamma t'_1 + \Gamma \frac{V}{c^2} \frac{b-a}{\Gamma} = t_2 + \frac{V}{c^2} (b-a). \quad (8.21)$$

Если бы часы *I* и *II* были синхронизованы, они показывали бы одно и то же время. Но они синхронизованы только в K , но не в K' . Мы видим, что с точки зрения K' у часов системы K наблюдается рассинхронизация, набегаёт разность показаний

$$\delta = \frac{V}{c^2} (b-a),$$

увеличивающаяся с удалением часов друг от друга. Этот результат мы уже получили в § 2.4. Так как в системе K расстояние $b - a = V(t_2 - t_1)$, то показание часов *II* будет $t = t_1 + (V/c^2) \times (t_2 - t_1)$. Составляя разность отмеченного времени t_2 и вычисленного t , получим

$$t_2 - t = (t_2 - t_1) \frac{1}{\Gamma^2},$$

или, согласно (8.20),

$$t_2 - t = (t'_2 - t'_1) \frac{1}{\Gamma}.$$

А это и означает, что наблюдатель в системе K' обнаружит, что движущиеся относительно него часы отстают. Тем самым полное равноправие систем доказано.

Этот результат подтверждает полное равноправие двух рассмотренных инерциальных систем: если в двух ИСО идут двое

тождественных часов, то промежутки *собственного* времени, отсчитываемые этими часами, одинаковы. Разумеется, иначе быть и не может, поскольку одним из первых принципов СТО является принцип относительности: если бы тождественные часы по-разному шли в двух ИСО, то это был бы физический способ отличать эти системы.

Хотя это разъяснение необходимо было сделать, но парадокс часов состоит, конечно, не в этом. Допустим, мы сравнили показания двух часов: одних — из системы K , а других — из K' . Часы, естественно, немедленно разойдутся после сравнения и будут уходить все дальше и дальше друг от друга. Но если все же одни из них как-то вернуть в ту же точку, где находятся другие часы, и снова сопоставить их показания — что мы обнаружим тогда? Вот ответ на этот вопрос и называется парадоксом часов. Ответ этот совсем не прост, и читателю следует набраться терпения.

Прежде всего заметим, что все формулы СТО относятся к величинам, рассматриваемым в рамках инерциальных систем отсчета. Все измерения времени, которые производятся в СТО, осуществляются часами, неподвижными в той или иной ИСО. Сравнив однажды двое часов, мы уже не можем снова свести их в одной точке пространства, не выводя их из той системы отсчета, где они покоились при первом сравнении. Действительно, если движение прямолинейное, пужно сначала затормозить одни часы, а затем сообщить им скорость той же величины, но в обратном направлении. Тогда часы, направление движения которых мы изменили, через некоторое время окажутся в одном месте с теми часами, с которыми производилось сравнение. Все это хорошо видно на диаграмме Минковского, где изображены мировые линии двух часов — I и II (рис. 8.12).

Очень удобно рассмотреть «парадокс часов» методом k -коэффициента (§ 3.7). Мы воспользуемся пространственно-временной диаграммой рис. 8.12. Здесь изображены мировые линии трех часов: одних (I), находящихся в начале K (линия OD), других (II), покоящихся в начале K' (линия OT), и, наконец,

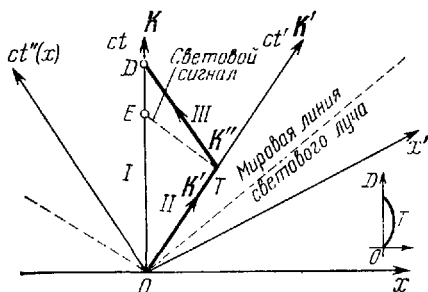


Рис. 8.12. Мировые линии двух часов I и II . Мировая линия OD соответствует часам I , покоящимся в K . Часы II сначала равномерно движутся от часов I (линия OT), затем, изменив в точке T скорость на равную, но противоположно направленную, снова сближаются с часами I . В точке D они оказываются рядом друг с другом, и можно еще раз сравнить их показания (первое сравнение происходило в точке O). Сопоставление показаний часов как раз и есть то, что называют парадоксом часов. На врезке: мировая линия одних часов, возвращающихся в точку D .

третьих (*III*), покоящихся в K'' (линия TD). Отсчитаем измеряемые промежутки времени непосредственно. В момент времени $t = t' = 0$ (когда начала O и O' совпадают) происходит первый обмен световыми сигналами, который не требует времени, поскольку часы из K и K' находятся в одной точке. В мировой точке T встречаются часы *II* и *III*, причем при встрече посылается световой сигнал из точки T к часам *I*. Пусть часы *II* отсчитали промежуток собственного времени между встречей с часами *I* и часами *III*, равный $\Delta\tau_2$. Тогда, как мы знаем, часы *I* должны отсчитать время между встречей *I* и *II* и приходом светового сигнала из T , равное $k \Delta\tau_2$. Но сигнал из T был послан в момент встречи часов *II* и *III*, и поэтому, если часы *III* отсчитают промежуток собственного времени $\Delta\tau_3$ от момента встречи часов *II* и *III* до прихода в точку D , то можно найти промежуток времени между приемом светового сигнала часами *I* (точка E) и встречей часов *I* и *III* в точке D . Мы видели в § 3.7, что при изменении знака относительной скорости двух систем отсчета коэффициент k меняется на $1/k$. Следовательно, промежуток времени, который изображается на рис. 8.12 отрезком ED , равен $\Delta\tau_3/k$. Из симметрии использованного мысленного эксперимента ясно, что $\Delta\tau_2 = \Delta\tau_3$. Обозначая величину этого промежутка времени через $\Delta\tau$, мы получим, что промежуток времени, отсчитанный часами *I* между встречей часов *I* с часами *II* и часами *III*, равен

$$k(\Delta\tau_1) + \frac{\Delta\tau_2}{k} = (k^2 + 1) \frac{\Delta\tau}{k}. \quad (8.22)$$

Но суммарное время, отсчитанное двумя наблюдателями (часами *II* и *III*), равно $2\Delta\tau$. Это значение всегда меньше, чем (8.22), потому что из неравенства $(k - 1)^2 > 0$ немедленно следует, что

$$k^2 + 1 > 2k.$$

Это рассуждение имеет то несомненное достоинство, что все отсчеты времени производятся часами, покоящимися в инерциальных системах отсчета. Итак, более короткий промежуток времени между событиями получается при измерении его двумя инерциальными наблюдателями по сравнению с промежутком времени, измеренным одним наблюдателем. Обратим внимание на то, что здесь, в отличие от того случая, когда сравнивался промежуток времени, отсчитанный по одним часам, с промежутком времени между теми же событиями по двум часам другой ИСО, сравниваются промежутки времени, отсчитанные часами *трех* ИСО.

Итак использование *двух* часов (*II* и *III*) привело нас к выводу о различном отсчете промежутков времени. Предлагают иногда использовать в системах отсчета K' и K'' одни и те же часы: в точке T часы *II* просто передаются в систему K'' , и появляется воз-

возможность измерить интересующий нас промежуток времени одними часами. Это предложение заслуживает того, чтобы на нем остановиться. Хотя мы измерим промежуток времени между событиями O и D двумя часами (I и II), эти часы в предлагаемом варианте отнюдь не равноправны. Когда часы II передаются из K' в K'' , они испытывают ускорение и оказываются уже в неинерциальной системе. Их мировая линия уже кривая (см. врезку на рис. 8.12). Но инерциальное движение отнюдь не эквивалентно неинерциальному. Вполне возможно, что часы, все время двигавшиеся по инерции, отсчитывают больший промежуток времени, чем часы, участвовавшие в неинерциальном движении. Здесь никакого противоречия нет; к этому выводу приводит и теория тяготения Эйнштейна.

Мы уже говорили о том (см. § 3.3), что в принципе всякое ускорение оказывает влияние на ход часов. В принципе «правильно идущие» часы находятся в инерциальных системах отсчета. Пусть мировая линия частицы искривлена (а это означает, что частица испытывает ускорение). В любой момент времени движения с ускорением можно найти инерциального наблюдателя, движущегося по касательной к траектории истинного движения с мгновенной скоростью фактического движения. Часы, движущиеся с ускорением, идут «правильно», если их ход в точности совпадает с ходом часов той же конструкции, но движущихся указанным образом вместе с инерциальным наблюдателем.

В каком месте мировой линии возникает различие в показаниях «инерциальных» и «неинерциальных» часов? Из принципа относительности вытекает, что часы одинаковой конструкции идут во всех ИСО одинаковым образом. Отсюда ясно, что различие в показаниях двух часов, оказавшихся в одной и той же точке пространства, обусловлено ускорением часов, т. е. искривленной частью мировой линии. Нередко выдвигают возражение, состоящее в том, что искривленную часть мировой линии можно сделать сколь угодно малой, т. е. обеспечить ускорение в течение весьма короткого времени. А набегающая разность показаний может быть очень большой. Не забудем, однако, что ускорение за малый промежуток времени означает появление колоссальных сил, а изменение релятивистской скорости на обратную связано со значительным ускорением. Кроме того, отличие длины искривленной мировой линии от длины прямой мировой линии, соединяющей те же точки, определяется не длиной ее искривленной части, а тем, что она искривлена в целом. Это утверждение прекрасно иллюстрируется рис. 8.13: хотя путь II из города A в город B «практически все время прямой», он, безусловно, длиннее, чем путь из A в B по прямой линии I . Если ускорение не влияет на ход часов, то длина мировой линии частицы определяет промежуток собственного времени.

До сих пор говорилось о промежутках времени, отсчитанных одними или двумя часами. Возвращаясь к первоначальной задаче,

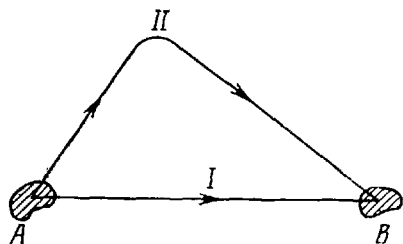


Рис. 8.13. Путь I между городами A и B короче пути II , хотя путь II отличается от прямого лишь на небольшом участке. Различие в длинах обусловлено не столько тем, что есть криволинейный участок, а тем, что весь путь II в целом не прямой.

K'' (т. е. к другому набору синхронизованных часов) означает скачок линии одновременности на диаграмме 8.14 от AT к TB . Этот переход и обуславливает значительную разницу в показаниях часов I и III . Если в качестве двух тождественных часов взять два тождественных живых организма, мы придем уже к «парадоксу близнецов». Но переход к живым организмам влечет за собой ряд осложнений, и мы отошлем читателя к литературе [31].

§ 8.5. «Эквивалентность» массы и энергии. Нулевая масса покоя. В этом параграфе мы вновь возвращаемся к вопросам, которые уже обсуждались, причем главная причина повторения отнюдь не в том, что откроются новые парадоксы, а в том, что появилась возможность рассмотреть совместно некоторые результаты, которые до сих пор излагались разрозненно. Будет приведен также ряд полезных примеров.

Мы знаем (§ 5.6), что любая физическая система, обладающая в собственной системе отсчета ($P^0 = 0$) энергией \mathcal{E}_0 , обладает массой покоя M_0 , равной $M_0 = \mathcal{E}_0/c^2$. В этом соотношении под \mathcal{E}_0 понимается вся энергия, содержащаяся в системе. Мы приведем два примера, иллюстрирующих это утверждение.

можно спросить, что покажут часы I и III , когда они встретятся в точке D ? Мы помним, что наборы часов в K , K' и K'' согласованы так, что в тот момент, когда начала систем отсчета O , O' и O'' совпадали, трое часов из трех систем в этой точке были поставлены на отсчет $t = t' = t'' = 0$. Взглянем теперь на диаграмму рис. 8.14.

На ней к мировым линиям часов I , II и III добавлены еще линии одновременности систем K' и K'' . Переход из системы K' в систему

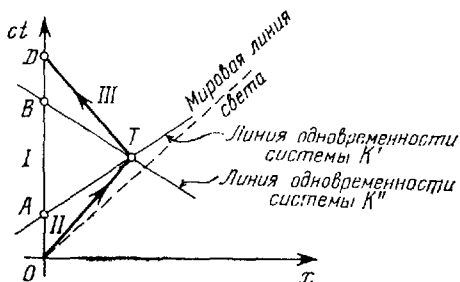


Рис. 8.14. Переход из системы K' в систему K'' означает изменение линии одновременности. От AT мы переходим к TB .

1. Рассматривается замкнутая система, состоящая из n невзаимодействующих материальных точек, между которыми происходят упругие соударения (в классической физике эта модель соответствует идеальному газу). Обозначим через $m_0^{(1)}, m_0^{(2)}, \dots, m_0^{(n)}$ массы покоя точек, а через $\vec{v}_0^{(1)}, \vec{v}_0^{(2)}, \dots, \vec{v}_0^{(n)}$ — их четырехмерные скорости в собственной системе K^0 . Перейдем теперь к другой инерциальной системе отсчета K , относительную скорость которой мы направим, как обычно, по оси x . Трехмерные компоненты скоростей точек в K найдутся согласно следующим формулам:

$$v_x^{(k)} = \frac{v_{x,0}^{(k)} + V}{1 + \frac{v_{x,0}^{(k)} V}{c^2}}, \quad v_y^{(k)} = \frac{v_{y,0}^{(k)} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v_{x,0}^{(k)} V}{c^2}}, \quad v_z^{(k)} = \frac{v_{z,0}^{(k)} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v_{x,0}^{(k)} V}{c^2}}. \quad (8.23)$$

Воспользуемся еще формулой (3.17):

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v^{(k)}}{c}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_0^{(k)}}{c}\right)^2} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v_{x,0}^{(k)} V}{c^2}}, \quad (8.24)$$

которую мы перепишем в принятых в этой книге обозначениях:

$$\gamma^{(k)} = \Gamma \gamma_0^{(k)} \left(1 + \frac{v_{x,0}^{(k)} V}{c^2}\right).$$

Результирующий импульс системы определяется как сумма импульсов отдельных частиц:

$$\mathbf{P} = \sum m_0^{(k)} \gamma^{(k)} \mathbf{v}^{(k)} \quad (\mathbf{P}_0 = \sum m_0^{(k)} \gamma_0^{(k)} \mathbf{v}_0^{(k)} = 0).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P_x &= \sum m_0^{(k)} \gamma^{(k)} v_x^{(k)} = \sum m_0^{(k)} \Gamma \gamma_0^{(k)} (v_{x,0}^{(k)} + V) = \\ &= \Gamma \sum m_0^{(k)} \gamma_0^{(k)} v_{x,0}^{(k)} + \Gamma \frac{V}{c^2} \sum m_0^{(k)} c^2 \gamma_0^{(k)} = \Gamma P_{x,0} + \Gamma \frac{V}{c^2} \mathcal{E}_0 = \Gamma \frac{\mathcal{E}_0}{c^2} V. \end{aligned}$$

Нетрудно найти, что

$$P_y = P_y^{(0)} = 0 \quad \text{и} \quad P_z = P_z^{(0)} = 0.$$

Что касается энергии системы, то

$$\mathcal{E} = \sum m^{(k)} c^2 \gamma_0^{(k)} = \sum m_0^{(k)} c^2 \Gamma \gamma_0^{(k)} \left(1 + \frac{v_{x,0}^{(k)} V}{c^2}\right) = \Gamma \sum m_0^{(k)} c^2 \gamma_0^{(k)} = \Gamma \mathcal{E}_0,$$

поскольку

$$\sum m_0^{(h)} c^2 \Gamma \gamma_0^{(h)} \frac{v_{x,0} V}{c^2} = \Gamma V \sum m_0^{(h)} \gamma_0^{(h)} v_{x,0} = 0.$$

Следовательно, для замкнутой системы

$$P = \Gamma \frac{\mathcal{E}_0}{c^2} V, \quad M_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{c^2}, \quad (8.25)$$

где V — скорость движения центра инерции. Но это означает, что масса покоя системы M_0 равна \mathcal{E}/c^2 . С точки зрения кинетической теории вещества в энергию покоя системы \mathcal{E}_0 должна входить и тепловая энергия. Но мы уже знаем, что в массу покоя системы входят не только массы покоя отдельных частиц, но и их суммарная кинетическая энергия; эта энергия с макроскопической точки зрения как раз и представляет собой тепло.

2. Рассмотрим неупругое соударение двух тел. Систему двух тел можно рассматривать как замкнутую, поэтому к этому процессу можно применить закон сохранения 4-импульса. Обозначим массу покоя тела, образовавшегося после соударения, через M_0 , а массы покоя сталкивающихся тел — через $m_0^{(1)}$ и $m_0^{(2)}$. Закон сохранения энергии-импульса запишется в четырехмерной форме так:

$$m_0^{(1)} u_i^{(1)} + m_0^{(2)} u_i^{(2)} = M_0 u_i, \quad (8.26)$$

где u_i — скорость единого тела, образовавшегося после удара. Первые три уравнения (8.26) для $i = 1, 2, 3$ позволяют найти три слагающие скорости единого тела. Что касается четвертого уравнения ($i = 4$), то оно запишется в виде

$$m_0^{(1)} \gamma^{(1)} + m_0^{(2)} \gamma^{(2)} = M_0 \gamma.$$

В системе отсчета, где вновь образовавшееся тело покоится,

$$M_0 = \frac{m_0^{(1)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^{(1)}}{c}\right)^2}} + \frac{m_0^{(2)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v^{(2)}}{c}\right)^2}}.$$

Это равенство можно переписать еще и так:

$$M_0 = \frac{1}{c^2} [m_0^{(1)} c^2 (\gamma^{(1)} - 1) + m_0^{(2)} c^2 (\gamma^{(2)} - 1)] + m_0^{(1)} + m_0^{(2)}. \quad (8.27)$$

Из равенства (8.27) видно, что масса покоя образовавшейся системы M_0 , кроме суммы масс покоя исходных частиц $m_0^{(1)} + m_0^{(2)}$, содержит в себе дополнительную массу, связанную с тем, что релятивистская кинетическая энергия двух частиц (выражение в квадратных скобках) преобразовалась в какие-то иные виды

энергии (например, в тепло). Таким образом, релятивистская механика в закон сохранения энергии включает сразу все виды энергии, а не только те виды, которые мы привыкли учитывать в механике.

В заключение следует еще раз подчеркнуть, что полученные соотношения указывают на пропорциональность массы покоя и энергии покоя, но гораздо важнее помнить, что это справедливо лишь в собственной системе отсчета. Вообще говоря, энергия и масса покоя с четырехмерной точки зрения обладают различными свойствами при преобразованиях Лоренца (см. § 5.7), и говорить о переходе «массы» в энергию, как это иногда делают, просто бессмысленно.

Возьмемся теперь еще раз к нулевой массе покоя. Конечно, с привычных классических позиций нулевая масса покоя представляется довольно странной. Мы видели (см. § 7.6), что мы должны приписать нулевую массу покоя частицам, движущимся со скоростью c (по современным представлениям, к таким частицам относятся кванты света — фотоны и нейтрино). Скорость c , как мы знаем, в СТО занимает привилегированное положение: в любой экспериментально реализуемой ИСО она сохраняет свое значение. На этом можно было бы поставить точку, но нам хотелось бы сделать еще несколько замечаний.

По-видимому, не впадая в противоречия, следует считать, что материя (в философском смысле), обладающая конечной массой покоя, равноправна с материей, масса покоя которой равна нулю. Мы увидим, что последний случай реализуется в природе сравнительно редко, но в принципе он реализуем. Обе упомянутые формы материи могут переходить одна в другую, и на одном примере такого перехода мы сейчас остановимся. Это — образование гамма-квантами (фотонами высоких энергий) пар электрон — позитрон и обратная реакция столкновения электрона с позитроном (эта реакция известна под несколько устаревшим названием «аннигиляции» частиц). В результате этой реакции частицы с конечной массой покоя (электрон и позитрон) перестают существовать, а вместо них возникают два фотона. Существенно, что в этой реакции удовлетворяются законы сохранения энергии и импульса. И фотоны (частицы, не имеющие массы покоя), и электрон, и позитрон (имеющие массу покоя) обладают определенными импульсами и энергией. Соответствующие суммарные величины в этой реакции сохраняются; фотон, как объективную реальность, определяют (характеризуют) его импульс и энергия. Масса покоя фотона, равная нулю, характеризует фотон не в меньшей степени, чем конечная масса, присущая позитрону и электрону.

Если рассмотреть соударение электрона и позитрона в системе центра инерции (в этой системе частицы движутся навстречу друг другу с равными, но противоположно направленными

скоростями v_1 и v_2), закон сохранения энергии запишется в виде

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}} + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}} = 2h\nu. \quad (8.28)$$

Это равенство выражает тот факт, что суммарная энергия электрона и позитрона равна энергии двух образующихся фотонов. Если учесть, что в системе центра инерции $v_1 = v_2$, то для наблюдаемой частоты возникающих фотонов мы получим

$$\nu = \frac{m_0c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (8.29)$$

Равенство энергий образующихся фотонов следует из закона сохранения импульса: импульсы фотонов должны быть равны по величине (но противоположны по направлению), а импульс фотона пропорционален его энергии.

Если электрон и позитрон движутся с нерелятивистскими скоростями, то для частоты фотонов, возникающих при аннигиляции позитрона и электрона, получается значение $\nu = mc^2/h$, хорошо согласующееся с экспериментальными данными.

Приведенный пример отнюдь не является единственным. Упомянем еще распад нейтрального (π^0) мезона (масса покоя ~ 200 масс покоя электрона): $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$.

Рассмотрим теперь n фотонов одинаковой частоты, движущихся по различным направлениям. Энергия этой системы фотонов равна сумме энергий отдельных фотонов: $\mathcal{E} = \sum \varepsilon_i = nh\nu$; импульс системы фотонов \mathbf{P} равен сумме импульсов фотонов:

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p}_i = \frac{h\nu}{c} (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \dots + \mathbf{s}_n),$$

где \mathbf{s}_i — единичный вектор в направлении распространения i -го фотона. По определению масса покоя M этой совокупности фотонов находится из соотношения

$$M^2c^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \mathbf{P}^2 = \left(\frac{nh\nu}{c}\right)^2 - \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \dots + \mathbf{s}_n)^2. \quad (8.30)$$

Правая часть (8.30) обращается в нуль лишь в том случае, если все фотоны распространяются в одном направлении. Этот результат нам уже известен из § 7.3: ограниченный пучок плоских волн обладает равной нулю массой покоя. Однако уже два фотона, направления распространения которых составляют некоторый угол ϑ , обладают конечной массой покоя. Действительно, из общей формулы (8.30) получаем

$$M^2c^2 = \left(\frac{2h\nu}{c}\right)^2 - \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 (2 + 2\cos\vartheta) = \left(\frac{2h\nu}{c}\right)^2 \left(1 - \cos^2\frac{\vartheta}{2}\right). \quad (8.31)$$

Таким образом, облако электромагнитного излучения, состоящего из фотонов, масса покоя каждого из которых равна нулю, обладает положительной массой покоя и, соответственно, создает гравитационное поле и испытывает силу со стороны гравитационного поля.

Исходя из того, что уже два фотона, в общем случае, обладают массой покоя, можно было бы попытаться уклониться от обсуждения нулевой массы покоя фотона. Однако в принципе отдельный фотон (наблюдаем *) и нулевая масса покоя требует интерпретации.

Для выяснения причины появления «нулевой массы покоя» целесообразно вернуться к четырехмерным представлениям. Рассмотрим 4-импульс частицы с конечной массой покоя m :

$$\vec{P} \left(m\gamma v, \frac{i}{c} \mathcal{E} \right), \quad \mathcal{E} = mc^2\gamma.$$

Масса покоя — абсолютная величина 4-вектора \vec{P} :

$$\vec{P}^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2, \quad (8.32)$$

причем она является инвариантом. В 4-векторе энергии-импульса энергия — это временная компонента, тогда как пространственными компонентами являются составляющие трехмерного импульса. Уместно напомнить, что основные свойства 4-вектора \vec{P} совпадают со свойствами 4-вектора \vec{V} , поскольку $\vec{P} = m\vec{V}$. С другой стороны,

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{d\tau}, \quad d\vec{R}^2 = ds^2, \quad \vec{V}^2 = \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2. \quad (8.33)$$

Поэтому на мировых линиях нулевой длины ($ds = 0$) масса покоя соответствующих частиц обращается в нуль, так как $\vec{P}^2 = 0$. Фотоны как раз и движутся по линиям нулевой длины.

Остается, конечно, еще один, на первый взгляд парадоксальный вопрос. Как фотон — масса покоя которого равна нулю — переносит из одного места в другое конечную массу покоя? То, что это так, совершенно очевидно при поглощении фотона. Отдавая свою энергию, например, твердому телу, фотон нагревает это тело и тем самым увеличивает массу покоя тела.

Разберем простой пример. На одном конце тележки, способной двигаться без трения, испущен фотон, который затем поглощается на другом конце тележки. До излучения фотона энергия покоящейся тележки равна $\mathcal{E}_0 = Mc^2$ (рис. 8.15). Система замкнутая, ее 4-импульс сохраняется, и сумма 3-импульса тележки и фотона по-прежнему равна нулю. Сумма энергий тележки и фотона равна \mathcal{E}_0 . При этом масса системы осталась неизменной, хотя

*) О. Фриш, Возьмем фотон и..., УФН 90, 379 (1966).

масса тележки уменьшилась, а масса фотона равна нулю. Ничего страшного: масса не аддитивна! Когда фотон поглощается на другом конце тележки, ее энергия снова равна \mathcal{E}_0 , но от одного конца тележки к другому уже перенесена энергия $h\nu$ и распределение массы по тележке уже отличается от исходного.

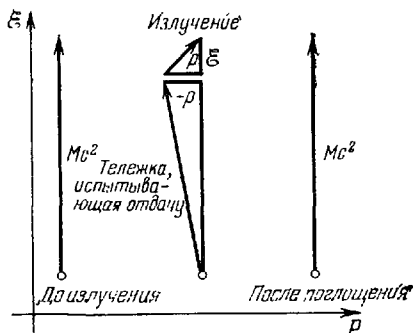


Рис. 8.15. Фотон переносит массу, хотя его масса равна нулю. До излучения фотона энергия тележки равна \mathcal{E}_0 . В замкнутой системе 4-импульс сохраняется, поэтому суммарный 3-импульс тележки и фотона по-прежнему равен нулю, а суммарная энергия тележки и фотона равна \mathcal{E}_0 . Масса системы осталась неизменной, хотя масса тележки уменьшилась, а масса фотона равна нулю (масса не аддитивна!). Когда фотон поглощается на другом конце тележки, ее энергия снова становится равной \mathcal{E}_0 , но энергия $h\nu$ уже перенесена от одного конца тележки к другому и распределение массы по тележке уже отличается от исходного.

Наконец, заметим, что выводы СТО заставляют уточнить понятие «замкнутой» системы. В механике систему называют замкнутой, если образующие ее тела не взаимодействуют с «внешними» телами. Взаимодействие описывается силами. В химии удобно считать замкнутой систему, которая не обменивается веществом с окружающей средой (тогда, по релятивистским представлениям, масса сохраняется). Переходя к тепловым процессам, под замкнутой системой часто понимают теплоизолированную систему. Но СТО учит, что всякая передача энергии связана с передачей импульса (это относится и к передаче тепла); передача энергии меняет массу системы. Можно объединить эти определения в одно,

считая замкнутой систему, в которой сохраняются энергия и импульс (4-вектор энергии-импульса). В замкнутой механической системе энергия и импульс сохраняются. Такая система является теплоизолированной. Ее масса, согласно обычному определению $Mc^2 = (\mathcal{E}/c)^2 - P^2$, сохраняется. Конечно, закон сохранения массы замкнутой системы не подразумевает аддитивность масс в системе. Это обстоятельство необходимо учитывать, особенно в случае порождения новых частиц.

ДОПОЛНЕНИЯ

1. Как и кто создал специальную теорию относительности? *) (В. Л. Гинзбург). Теория относительности принадлежит к числу величайших научных открытий, причем создала она в нашем веке. Последнее особенно существенно в том отношении, что теория относительности принадлежит не столько к истории науки (или — если угодно — не только к истории науки), а служит физической теорией, которая непосредственно и очень широко используется сегодня. Такова главная причина повышенного интереса к истории становления теории относительности. Эта теория оказалась связанной с пересмотром фундаментальных представлений, касающихся пространства и времени, а тем самым и основ классической (дорелятивистской) физики. Естественно, что ломка основных понятий и переход на новые позиции не протекают гладко — они породили споры и дискуссии, длящиеся десятилетиями. К тому же эти споры затронули не только физиков, но и представителей других наук. Таким образом, к теории относительности было приковано, да и сейчас приковано, пристальное внимание. Относится это, конечно, и к истории ее создания — как к истории развития идей, так и к вопросам приоритета.

В результате и сейчас, через семьдесят лет после создания специальной теории относительности (СТО), активно обсуждается вопрос: как и кто создал эту теорию?

Чаще всего создание СТО связывают с именем А. Эйнштейна и лишь в качестве его предшественников упоминают о Г. Лоренце, А. Пуанкаре и некоторых других. Но существуют и другие мнения, сводящиеся, например, к тому, что создателями СТО являются Лоренц, Пуанкаре и Эйнштейн. Какая точка зрения более правильна и о чем здесь, собственно, идет спор? Ответ на этот вопрос а также на вопрос, вынесенный в заголовок настоящего Дополнения, вряд ли могут быть безынтересными читателям книги. Ниже они найдут несколько замечаний на этот счет.

Три работы считаются важнейшими при создании СТО. Автор первой из них (1904 г.) был один из общепризнанных лидеров

*) Этот текст представляет собой авторскую переработку части статьи В. Л. Гинзбурга, в окончательной форме опубликованной в «Эйнштейновском сборнике 1974», «Наука», 1976. Ссылки (там, где нет особой оговорки) относятся к сборнику «Принцип относительности», Атомиздат, 1973.

теоретической физики, голландский профессор Гендрик Лоренц (1853—1928), за два года до этого получивший Нобелевскую премию по физике. Автором второй работы (1906 г., краткое сообщение было опубликовано в 1905 г.) явился знаменитый французский математик Анри Пуанкаре (1854—1912), хорошо известный также своими исследованиями в области физики и методологии науки. Пакопец, третья работа (1905 г.) была написана почти неизвестным мелким служащим швейцарского федерального патентного бюро Альбертом Эйнштейном (1879—1955).

Кому не известно, что новые произведения популярных и любимых писателей и поэтов сразу же привлекают внимание, в то время как сочинениям новичков нужно еще пробивать себе дорогу? В науке та же естественная тенденция проявляется, пожалуй, еще резче. Почему же в интересующем нас случае — при создании СТО — все получилось наоборот: особенно известной — без преувеличения можно сказать, знаменитой — стала именно работа Эйнштейна? Ответ на этот вопрос был очень четко сформулирован, например, в широко известной статье В. Паули «Теория относительности», впервые опубликованной в 1921 г. в наиболее авторитетной в то время «Энциклопедии математических наук». Книга Паули затем переиздавалась и была переведена на другие языки (русский перевод вышел в 1947 г.). Изложение истории создания СТО Паули заканчивает так: «Основы новой теории были доведены до известного завершения Эйнштейном. Его работа 1905 г. была направлена в печать почти одновременно с сообщением Пуанкаре и написана без осведомленности о работе Лоренца 1904 г. Исследование Эйнштейна содержит не только все существенные результаты обеих названных работ, но и прежде всего изложение совершенно нового и глубокого понимания всей проблемы» (стр. 201). Другой известный физик, М. Борн, так вспоминает о впечатлении, произведенном на него чтением статьи Эйнштейна: «Хотя я был хорошо знаком с релятивистской идеей и с преобразованиями Лоренца, ход идей Эйнштейна был для меня откровением» (стр. 236).

В совершенно новом и глубоком освещении проблемы, явившемся откровением, и состоит очевидная причина успеха работы Эйнштейна, причина того, что именно эта работа обычно считается самой важной при создании СТО.

Два вопроса находятся в центре внимания при ознакомлении с историей науки. Прежде всего это вопрос «как?» — как возникли и развивались идеи, как готовилось и было совершено открытие? Вторым является вопрос «кто?» — кто сделал открытие, высказал идею, превратил ее «в плоть и кровь», развил, довел до сознания научной общественности? Вопрос «как?» представляется основным, первичным: он связан с самим содержанием науки и методами научного исследования. Вопрос же «кто?» может показаться второстепенным; и действительно, он не связан с существом дела, если

иметь в виду, скажем, физику, а не психологию научного творчества, социологию научной среды или личную судьбу того или иного человека. Но фактически анализ проблем «как?» и «кто?» часто, если не в большинстве случаев, трудно разграничить. Науку развивают люди, и если конечный продукт — совокупность определенных утверждений, уравнений, соотношений и т. д. — безличен или, вернее, почти безличен, первоначальный процесс открытия или вывода и получения этих уравнений и соотношений отражает характерные и типичные черты первооткрывателей. Тем самым, если речь идет именно об истории науки, на вопросы «как?» и «кто?» естественно отвечать одновременно.

Дальнейшим замечаниям на этот счет мы предположим несколько слов о том, что такое специальная теория относительности (разумеется, настоящая книга в целом дает на этот счет значительно более подробный ответ; представляется удобным, однако, и здесь кратко резюмировать ситуацию).

Одним из основных физических понятий является понятие об инерциальных системах отсчета. Система отсчета, служащая для определения координат и времени событий, инерциальна, если в ней соблюдается закон инерции — изолированное тело (тело, не находящееся под действием сил) движется равномерно и прямолинейно. Такое определение не свободно, правда, от возражений и пуждается в уточнениях, поскольку остается еще неясным, какое тело можно считать изолированным, но, грубо говоря, изолированность гарантирована, если все другие тела находятся достаточно далеко. Примером «хорошей» инерциальной системы может служить система координат, начало которой совпадает с Солнцем, а оси направлены на далекие звезды. С несколько меньшей, но обычно еще весьма большой точностью закон инерции выполняется и на Земле (действие силы тяжести считается исключенным). Система отсчета, вращающаяся относительно инерциальной, уже не будет таковой, причем с увеличением угловой скорости вращения различия между инерциальной и вращающейся системами проявляются все резче.

Если данная система инерциальна, то инерциальной будет и любая другая система отсчета, движущаяся относительно нее равномерно и прямолинейно. Обобщение этого заключения на все механические явления — утверждение о том, что все такие явления во всех инерциальных системах протекают совершенно одинаково, — как раз и составляет содержание классического, или галилеева, принципа относительности. Точнее, использование и формулировка этого принципа включают в себя также вполне определенное, дорелятивистское предположение о том, как связаны между собой координаты и время событий в различных инерциальных системах. Так, если одна из этих систем, система K' (координаты x', y', z' и время t'), движется относительно данной

инерциальной системы K (координаты x, y, z и время t) со скоростью V вдоль положительных осей x, x' (направления всех осей считаем совпадающими), то, как предполагалось до создания СТО.

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

(преобразования Галилея).

Впрочем, абсолютность времени — его независимость от движения системы отсчета (отсюда и равенство $t' = t$) — принималась вообще в любых системах отсчета.

При равномерном движении тела его ускорение, конечно, равно нулю. Значит, при преобразованиях Галилея, т. е. в любых инерциальных системах, ускорение одинаково. Поэтому при таких преобразованиях закон динамики, второй закон Ньютона (масса \times ускорение = силе), остается неизменным, если только масса и сила, как и ускорение, остаются одинаковыми в системах K и K' . Последнее предполагается (и обосновывается на опыте), в результате чего мы и приходим к выводу о соблюдении классического принципа относительности в механике Ньютона. Вообще гарантией соблюдения классического принципа относительности является неизменность (инвариантность) уравнений, выражающих основные физические законы, при преобразованиях Галилея.

Когда-то, до второй половины и даже до конца XIX века, считали, что всю физику можно построить на основе ньютоновских уравнений движения. Тем самым, считался всегда справедливым и классический принцип относительности. Развитие электродинамики поставило, однако, классический принцип относительности под сомнение. Уравнения электродинамики (уравнения Максвелла) при преобразованиях Галилея не сохраняют свою форму, и поэтому применение этих преобразований приводит к такому выводу: принцип относительности в электродинамике нарушается, и, в частности, свет и электромагнитные волны всех других диапазонов в различных инерциальных системах распространяются по-разному даже в вакууме. Если вводившаяся тогда «светоносная среда» — эфир — неподвижна в одной из инерциальных систем (в системе K), то в этой системе скорость света независимо от направления равна $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек. В других же инерциальных системах K' , движущихся относительно эфира со скоростью V (вдоль осей x и x'), как ясно из преобразований Галилея, скорость света будет равна $c' = c - V$ при его распространении вдоль осей x и x' и равна $c' = c + V$ при распространении света в противоположном направлении, и т. д.

Но опыты опровергли этот столь ясный, казалось бы, вывод; все эксперименты, начиная со знаменитого опыта Майкельсона, впервые проведенного в 1881 г. и затем неоднократно повторявшегося, подтверждают справедливость принципа относительности и в элект-

родинамике и вообще для всей физики. Но как же тогда, в согласии с принципом относительности, скорость света может равняться одной и той же величине в разных системах отсчета, когда из преобразований Галилея очевиден противоположный вывод?

Покадобилося почти четверть века, чтобы в итоге мучительных поисков прийти к решению, составляющему ядро и основу СТО и сводящемуся к отказу от преобразований Галилея. Точнее, как это обычно бывает в подобных случаях, от них не отказались, а был понят их приближенный характер. Точные же формулы, связывающие координаты и время в системах K' и K , имеют вид

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

(преобразования Лоренца). Если скорость рассматриваемых инерциальных систем относительно друг друга V достаточно мала по сравнению со скоростью света c , то преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея; отсюда и ясна степень их точности, характеризуемая параметром V^2/c^2 . Для близкого спутника Земли скорость $V \approx 8 \text{ км/сек}$ и $V^2/c^2 \approx 10^{-9}$. Скорость Земли относительно Солнца $V \approx 30 \text{ км/сек}$ и $V^2/c^2 \approx 10^{-9}$. Уже из этих примеров ясно, что в области тех явлений, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни, преобразования Галилея и вся связанная с ними ньютоновская механика справедливы с огромной точностью. Но в электродинамике и при исследовании релятивистских частиц — частиц, движущихся со скоростью v , сравнимой со скоростью света в вакууме c , пужно пользоваться преобразованиями Лоренца. Одним из их следствий является равенство

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2.$$

Если учесть, что уравнение фронта сферической световой волны имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$, то указанное равенство сразу же свидетельствует о справедливости принципа относительности при распространении света — во всех инерциальных системах скорость света одинакова и равна c .

Под СТО как раз понимают теоретические построения, базирующиеся на принципе относительности и преобразованиях Лоренца. Главное в СТО — это новые по сравнению с дорелятивистской физикой пространственно-временные представления, находящие отражение в замене преобразований Галилея преобразованиями Лоренца. Содержание последних, если говорить о физике, отнюдь не сводится только к самим приведенным простым формулам, связывающим координаты и время x', y', z', t' с x, y, z, t . Как и всегда в физике, нужно также установить смысл всех величин, указать основу используемых методов измерения координат

и времени, уточнить свойства служащих для этой цели масштабов и часов. Относится сюда, в частности, и вопрос о синхронизации часов в каждой из систем K и K' . Так, координаты и время, фигурирующие в преобразованиях Лоренца, определены таким образом, что события, одновременные в системе K (время t), не одновременны в системе K' (время t'). Отказ от абсолютного времени является особенно радикальным выводом (им мы обязаны Эйнштейну). По своему значению и трудности этот вывод можно сравнить с отказом от абсолютной неподвижности Земли, лежащим в основе гелиоцентрической системы Коперника.

Теперь уже можно подойти непосредственно к вопросу: как и кто создал СТО?

Путь к СТО лежал, как ясно из сказанного, через преодоление фундаментальной трудности — принцип относительности на опыте соблюдается и в электродинамике (а не только в механике), но это несовместимо с преобразованиями Галилея. Впрочем, Лоренц и другие пытались устранить противоречие без отказа от преобразований Галилея, путем предположения о том, что все тела при их движении относительно эфира сокращаются. Если масштаб, длина которого в покое относительно эфира равна l_0 , при движении со скоростью V имеет длину $l_0 \sqrt{1 - (V/c)^2}$, то можно объяснить, почему некоторые опыты не обнаруживают движения тел относительно эфира и их результаты не зависят от скорости движения Земли относительно Солнца. Гипотеза сокращения, однако, не для всех опытов достаточна; становились известными все новые опыты, которые находились в согласии с принципом относительности и для своего объяснения требовали дополнительных гипотез. Такое положение было, конечно, неудовлетворительным, и Лоренц упорно стремился «показать, что многие электромагнитные явления строго, т. е. без пренебрежения членами высших порядков, не зависят от движения системы». Для этой цели Лоренцу нужно было показать, что для *равномерно и прямолинейно движущегося* (относительно эфира) тела уравнения электродинамики допускают решения, которые определенным образом соответствуют решениям для такого же *покоящегося* тела. Соответствие достигается в результате перехода к новым переменным x', y', z' и t' с помощью преобразований Лоренца, а также введением новых (штрихованных) векторов электромагнитного поля. В результате таких преобразований форма уравнений поля не изменяется, т. е. они имеют одинаковый вид для старых (пештрихованных) и новых (штрихованных) величин. Такое свойство называется инвариантностью — в данном случае инвариантностью уравнений электромагнитного поля относительно преобразований Лоренца.

Сейчас, после создания СТО, мы знаем, что это свидетельствует как раз о соблюдении принципа относительности в электродина-

намике, но Лоренц отнюдь не считал время t' временем в движущейся системе отсчета; он назвал это время местным и полагал, что имеет дело «просто со вспомогательными величинами, введенными лишь с помощью математического ухищрения. В частности, переменную t' нельзя было назвать «временем» в том же смысле, как переменную t » (стр. 193). В 1915 г. Лоренц писал то же самое: «Главная причина моей неудачи заключалась в том, что я всегда придерживался мысли, что только переменную t можно принять за истинное время и что мое местное время t' должно рассматриваться не более как вспомогательная математическая величина. В теории Эйнштейна, напротив, t' играет ту же роль, что и t » (стр. 197). В 1927 г., за год до смерти, Лоренц высказывался еще более определенно: «Для меня существовало только одно истинное время. Я рассматривал свое преобразование времени только как эвристическую рабочую гипотезу. Итак, теория относительности является фактически работой исключительно Эйнштейна» (стр. 263). Добавлю, что, перечитав сейчас (через 70 лет после их опубликования) работы Лоренца и Пуанкаре, я, лишь с трудом и зная заранее результат (а это, как известно, чрезвычайно облегчает понимание), смог понять, почему доказанная в этих работах инвариантность уравнений электродинамики относительно преобразований Лоренца могла тогда рассматриваться в качестве свидетельства справедливости принципа относительности.

К тому же Лоренц и Пуанкаре понимали этот принцип лишь как утверждение о невозможности заметить равномерное движение тела относительно эфира. Перейти отсюда к рассмотрению всех инерциальных систем отсчета как совершенно равноправных (такова современная формулировка принципа относительности) можно без особого труда только в том случае, если понимать преобразования Лоренца как преобразования, соответствующие переходу к движущейся системе отсчета.

Как мы видели, именно этого Лоренц определенно не считал. Позиция Пуанкаре менее ясна. В его статьях 1905—1906 гг. просто утверждается, что уравнения электродинамики «можно подвергнуть замечательному преобразованию, найденному Лоренцем, которое объясняет, почему никакой опыт не в состоянии обнаружить абсолютное движение Земли» (стр. 122). Само же это «объяснение», на мой взгляд, не идет дальше объяснения Лоренца. Вообще о своей работе Пуанкаре пишет: «Результаты, полученные мною, согласуются во всех наиболее важных пунктах с теми, которые получил Лоренц. Я стремился только дополнить и видоизменить их в некоторых деталях. Некоторые имеющиеся расхождения, как мы увидим дальше, не играют существенной роли» (стр. 119). С другой стороны, в более ранних работах, статьях и докладах Пуанкаре имеется ряд замечаний, звучащих почти пророчески. Речь здесь идет и о необходимости определить

понятие одновременности, и о возможности использовать для этой цели световые сигналы, и о принципе относительности. Но Пуанкаре не развил этих соображений и в своих работах 1905—1906 гг. следует за Лоренцем. Как уже подчеркивалось, они в основном стремились показать и показали, при каких предположениях равномерное движение тел относительно эфира будет совершенно незаметно. Между тем Эйнштейн в своей работе 1905 г., можно сказать, обернул все постановку вопроса — он показал, что, приняв принцип относительности и осуществив синхронизацию часов светом (а также приняв, что скорость света не зависит от движения источника), никаких других дополнительных гипотез делать не нужно: преобразования Лоренца непосредственно следуют из указанных предположений; из них можно также получить сокращение движущихся масштабов и замедление хода движущихся часов.

Таким образом, если судить по опубликованным материалам, Пуанкаре был, по-видимому, довольно близок к созданию СТО, но до конца не дошел. Почему так произошло, можно только гадать. Возможно, что главная причина в том, что Пуанкаре был прежде всего математиком и в этой связи ему особенно трудно было подняться (или опуститься?) до четкого понимания столь важных для физики сторон проблемы, как достаточно определенное уточнение смысла всех вводимых величин и понятий. Другая, хотя и близкая, гипотеза такова: Пуанкаре помешала его приверженность к конвенционализму, т. е. течению, подчеркивающему (и переоценивающему) роль условных элементов и определений в физике *). Известная конвенциональность при построении физи-

*) Эти замечания, насколько я могу судить, совпадают с мнением Л. де Бройля, высказанным им в речи по поводу 100-летия со дня рождения Пуанкаре: «Еще немного — и Анри Пуанкаре, а не Альберт Эйнштейн, первым построил бы теорию относительности во всей ее общности, доставив тем самым французской науке честь этого открытия... Однако Пуанкаре так и не сделал решающего шага и предоставил Эйнштейну честь разглядеть все следствия из принципа относительности и, в частности, путем глубокого анализа измерений длины и времени выяснить подлинную физическую природу связи, устанавливаемой принципом относительности между пространством и временем. Почему Пуанкаре не дошел до конца в своих выводах? Несомненно, чрезмерно критическая направленность его склада мышления обусловлена, быть может, тем, что Пуанкаре как ученый был прежде всего чистым математиком. Как уже говорилось ранее, Пуанкаре занимал по отношению к физическим теориям несколько скептическую позицию, считая, что вообще существует бесконечно много логически эквивалентных точек зрения и картин действительности, из которых ученый, руководствуясь исключительно соображениями удобства, выбирает какую-то одну. Вероятно, такой номинализм иной раз мешал ему признать тот факт, что среди логически возможных теорий есть такие, которые ближе к физической реальности, во всяком случае, лучше согласуются с интуицией физика и, тем самым, больше могут помочь ему. Вот почему молодой Альберт Эйнштейн, которому в то время исполнилось лишь 25 лет и математические знания которого не могли идти в сравнение

ческих теорий совершенно несомненна. Длину можно измерять и в метрах и в футах, а также и другими необычными и экстравагантными методами. То же относится ко времени и к другим величинам, а также к определению одновременности — такое определение не предписано однозначно. Но конечный результат, содержание физической теории (в отличие от форм записи и т. п.) не является условным, а определяется природой, объектом исследования. Переоценка ковенционального элемента в познании может помешать уточнению понятий. Могло это сказаться, в частности, на том, что Пуанкаре не позаботился об уточнении смысла «истинного» времени t и «местного» времени t' , которые на самом деле в одинаковой мере истинны, по являются, если угодно, «местным» временем соответственно для систем K и K' .

Должен подчеркнуть, однако, что подобные гипотезы, в данном случае касающиеся Пуанкаре, в общем-то неоправданны. Пуанкаре, несомненно, принял активное участие в создании СТО, его вклад здесь бесспорен. Спрашивать же, почему он не выполнил еще и работу Эйнштейна, можно не с большим основанием, чем и в отношении всех физиков того времени, — великие работы потому и называются великими, что делать их крайне трудно.

Роль работы Эйнштейна, ее смысл, помимо уже сказанного, поясним его же словами, содержащимися в письме, написанном за два месяца до смерти: «Вспоминая историю развития специальной теории относительности, мы можем с уверенностью сказать, что к 1905 г. открытие ее было подготовлено. Лоренц уже знал, что преобразование, получившее впоследствии его имя, имеет существенное значение для анализа уравнений Максвелла, а Пуанкаре развил эту мысль. Что касается меня, то я знал только фундаментальный труд Лоренца, написанный в 1895 г., но не был знаком с его более поздней работой и со связанным с ней исследованием Пуанкаре. В этом смысле моя работа была самостоятельной. Новой в ней была мысль о том, что значение преобразования Лоренца выходит за рамки уравнений Максвелла и касается

с глубокими познаниями гениального французского ученого, тем не менее раньше Пуанкаре нашел синтез, сразу снявший все трудности, использовав и обосновав все попытки своих предшественников. Этот решающий удар был нанесен мощным интеллектом, руководимым глубокой интуицией о природе физической реальности.

Однако блестящий успех Эйнштейна не дает нам права забывать о том, что проблема относительности была еще ранее глубоко проанализирована светлым умом Пуанкаре и что именно Пуанкаре внес существенный вклад в будущее решение этой проблемы. Без Лоренца и Пуанкаре Эйнштейн не мог бы достичь успеха» (А. Пуанкаре, Избранные труды, т. 3, стр. 703, «Наука», 1974).

Как нам представляется, точка зрения де Бройля, относящегося к памяти А. Пуанкаре с глубоким уважением и максимальной благожелательностью, заслуживает особого внимания.

сущности пространства и времени. Новым был и вывод о том, что «инвариантность Лоренца» является общим условием для каждой физической теории. Это было для меня особенно важно, так как я еще раньше понял, что максвелловская теория не описывает микроструктуру излучения и поэтому не всегда справедлива» *).

Так что же все-таки создал специальную теорию относительности, спросит читатель, желающий получить простой ответ. Как и в большинстве подобных случаев, СТО не является открытием или результатом, целиком принадлежащим одному человеку. Но главную роль в создании СТО большинство физиков (и я в том числе), безусловно, отводит Эйнштейну, так как именно его работа содержала «изложение совершенно нового и глубокого понимания всей проблемы» (В. Паули, стр. 201) и была «тем последним и решающим элементом в фундаменте, заложенном Лоренцем, Пуанкаре и другими, на котором могло держаться здание...» (М. Борн, стр. 238). К числу этих «других» следует в первую очередь отнести Лармора, который еще в 1900 г. получил преобразования Лоренца (еще раньше, в 1887 г., очень близкие по типу преобразования использовал Фогт).

Существуют и другие оценки роли Эйнштейна, Лоренца и Пуанкаре в создании СТО. И если экстремистские взгляды, сводящиеся к отрицанию вклада Эйнштейна, не заслуживают, по моему убеждению, никакого внимания, то более умеренные формулировки типа «СТО создана Лоренцем, Пуанкаре и Эйнштейном» остаются, в конце концов, делом их авторов — такие вещи нельзя декретировать, и никто еще не изобрел весов, на которых с аптекарской точностью удалось бы измерять научные заслуги.

Во избежание недоразумений здесь представляется уместным сделать еще замечание, касающееся широко используемого названия «теория относительности Эйнштейна». Такое словопотребление совершенно естественно и законно, тем более что оно отнюдь не тождественно с названием «специальная теория относительности Эйнштейна». Дело в том, что под теорией относительности если не уточнять, понимают и специальную (СТО) и общую теорию относительности (ОТО). Общая теория относительности обобщает и развивает СТО и, как принято считать, является непревзойденной вершиной теоретической физики **). Например, М. Борн в 1955 г. в своем докладе заявил: «Я считал и считаю поныне, что это величайшее открытие человеческой мысли, касающееся природы, открытие, в котором удивительным образом сочетаются

*) Цитируем по книге К. Зельга «Альберт Эйнштейн» (Атомиздат, 1966, стр. 67), являющейся лучшей известной нам биографией Эйнштейна.

***) Поскольку здесь нет возможности подробнее остановиться на месте ОТО в развитии физики, позволю себе сослаться на свою статью «Гелиоцентрическая система и общая теория относительности (от Коперника до Эйнштейна)», опубликованную в «Эйнштейновском сборнике 1973», «Наука», 1974.

философская глубина, интуиция, физика и математическое искусство. Я восхищаюсь им, как творением искусства». Выразительно также замечание самого Эйнштейна, сделанное им в 1912 г. в письме А. Зоммерфельду как раз в период создания ОТО: «По сравнению с этой проблемой первоначальная теория относительности (т. е. специальная теория. — В. Г.) является просто детской игрушкой». Из другого письма Эйнштейна мы знаем, что «период со дня зарождения идеи о специальной теории относительности и до окончания статьи, в которой она изложена, составил пять или шесть недель». На построение же общей теории относительности Эйнштейн затратил около 8—9 лет (с 1906 или 1907 по 1915—1916 гг.), а затем ее развитием занимался вплоть до своей смерти 18 апреля 1955 г. К этому нужно добавить, что общая теория относительности в максимальной известной в истории науки степени — создание одного автора — Эйнштейна. Наконец, теория относительности стала достоянием широкой публики и вышла за пределы чисто научных кругов только в 1919 г., когда впервые удалось наблюдать предсказанное ОТО отклонение световых лучей, проходящих вблизи Солнца. Следовательно, теорию относительности в целом можно связать только с именем Эйнштейна.

Наконец, несколько слов о приоритете. В 1952 г. Борн писал Эйнштейну из Эдинбурга: «Престарелый математик Уиттекер, с которым я дружу, проживающий здесь в качестве почетного профессора, подготовил новое издание своей старой «Истории развития теории эфира», второй том которой уже вышел в свет. Он содержит в числе прочего также и историю создания теории относительности, с той особенностью, что ее открытие приписывается Пуанкаре и Лоренцу, между тем как твои работы упоминаются лишь как второстепенные. Хотя книга происходит из Эдинбурга, я, собственно говоря, не боюсь, что тебе может прийти в голову, будто я стою за этим делом. Фактически вот уже три года, как я делал все возможное, чтобы отговорить Уиттекера от его намерения, которое он давно лелеял и любил пропагандировать. Я перечитал старые оригинальные статьи, в том числе некоторые побочные статьи Пуанкаре, и снабдил Уиттекера английскими переводами немецких работ... Но все было тщетно. Он настаивал на том, что все существенное содержалось уже у Пуанкаре и что Лоренцу было вполне ясно физическое толкование. Ну, мне-то уж известно, сколь в действительности скептически был настроен Лоренц и как долго длилось, пока он стал «релятивистом». Все это я рассказал Уиттекеру, но без успеха. Эта история злит меня, поскольку он пользуется большим авторитетом в говорящих по-английски странах и многие ему поверят. К тому же мне в особенности неприятно, что в свое изложение он ввел всевозможные ссылки на частные сообщения по поводу квантовой механики таким способом, что моя роль в ней в особенности расхваливается.

Так что многие (если даже и не ты сам) могут подумать, что я сам дурным образом причастен к этому делу» *).

Ответ Эйнштейна был таков: «Дорогой Борн! Выбрось из головы все мысли по поводу книги твоего друга. Каждый ведет себя, как это представляется ему правильным или, выражаясь детерминистически, как ему предначертано. Если он убедит других — это их дело. Что касается меня, то я, во всяком случае, нашел удовлетворение уже в самом процессе своих усилий. Я не считаю, однако, разумным делом защищать пару своих результатов как свою «собственность», уподобляясь старому скряге, собравшему, надрываясь, пару грошей. Я не питаю к Уиттекеру и уж, разумеется, к тебе никакого зла. Да ведь вовсе и нет пужды мне читать эту штуку **).

Этот ответ очень характерен для Эйнштейна, и тем, кто мало знаком с его биографией, он пояснит многое. Да, собственно, он пояснит главное — в чем «секрет» исключительной популярности Эйнштейна в современном мире. Тот факт, что он был величайшим из великих физиков нашего, да и не только нашего, века, — это основное, но далеко не все. Эйнштейн еще и боролся за справедливость, за свободу и другие права человека, презирал темные силы и являл пример благородства и высокого человеческого достоинства. И просто невозможно себе представить, чтобы Эйнштейн вступил в приоритетные споры, не говоря уже о дрязгах. То же можно сказать о Лоренце и Пуанкаре. Лоренц, так много сделавший для создания СТО, отдавал честь создания этой теории «исключительно Эйнштейну», отмечал вклад Пуанкаре. Последний превозносил роль Лоренца. Эйнштейн подчеркивал заслуги Лоренца и Пуанкаре. Можно подозревать, что Пуанкаре не считал вклад Эйнштейна особенно значительным и, возможно, даже полагал, что он и сам «все сделал». Но в том-то все и дело, что о настроениях Пуанкаре мы пытаемся догадаться по его молчанию ***), а не на основании каких-то высказанных им претензий.

До сих пор мы останавливались только на исходных работах Лоренца, Пуанкаре и Эйнштейна. Нужно надеяться, что сопоставить значение этих работ можно уже на основании изложенного выше. В заключение хотелось бы также подчеркнуть, что для развития СТО сыграли, естественно, свою роль и работы, выполненные после 1905 г. Здесь следует отметить как некоторые статьи самого

*) «Albert Einstein, Hedwiga und Max Born, Briefwechsel, 1916—1955» (письмо от 26 сентября 1952 г.).

**) Там же (письмо от 12 октября 1952 г.).

***) Удивительным является то обстоятельство, что ни в одной статье Пуанкаре не упоминается работа Эйнштейна по СТО, хотя Пуанкаре умер спустя семь лет после ее появления.

Эйнштейна, так и работы М. Планка и особенно Г. Минковского (развита им четырехмерная трактовка теории оказалась весьма плодотворной).

II. Безуспешные поиски среды, в которой распространяется свет. Для специальной теории относительности световые явления в вакууме играют особую роль. Скорость света в вакууме является предельной скоростью передачи сигналов, и вполне справедливо утверждение, что история теории относительности начинается с открытия конечности скорости распространения света.

Как указывалось в § 1.8, теория относительности исходит из того, что для распространения света (электромагнитных волн) не требуется никакой материальной среды; другими словами, свет может распространяться в вакууме. Но эта идея вошла в физику с большим трудом, и ее утверждение связано с возникновением СТО. В наше время эта идея должна использоваться с самого начала обучения физике. Но отказ от обязательного существования «световой среды» под давлением экспериментальных фактов — очень поучительная страница истории физики, и на ней следует остановиться. Однако мы вынуждены пачать издалека и кратко напомнить о том, как развивались представления о природе света. В начале XVII века возникли две точки зрения на природу света, не утратившие своего значения до сих пор. Одна из них — «корпускулярная» — принадлежит Ньютону, другая — «волновая» — Гюйгенсу. Нетрудно понять исходную позицию Ньютона: успехи его механики заставили искать механическую интерпретацию и для света. Ньютон считал, что свет представляет собой движение особых материальных частиц — «корпускул». Основные свойства света — прямолинейное распространение в однородной среде, законы отражения и преломления — можно легко объяснить, исходя из корпускулярной картины. В однородной среде на корпускулу не действуют силы, она движется по инерции, т. е. прямолинейно. Отражение происходит по закону упругого удара (так происходит удар бильярдного шара о борт бильярдного стола); в этом случае угол падения равен углу отражения. А это как раз и есть закон отражения света от неподвижной границы.

Если на границе раздела сред *I* и *II* на корпускулу действуют силы, направленные по нормали к границе раздела в сторону более плотной среды, то корпускула изменяет направление своего движения. Действительно, пусть в среде *I* компоненты скорости корпускулы были равны V_n и V_t . Силы, действующие на границе, увеличили V_n , и направление скорости изменилось — произошло «преломление» (рис. Д.1).

Из геометрической оптики известно, что, когда свет переходит из среды с показателем преломления n_1 в среду с показателем

преломления n_2 , он испытывает преломление. Связь между углом падения i и углом преломления r устанавливается законом Декарта — Снеллиуса:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Качественно рассуждения Ньютона объясняют преломление света.

Ньютон знал и о том, что у света есть такие свойства, которые плохо укладываются в его схему (вспомните «кольца Ньютона» в оптике — типичное интерференционное явление), однако придумывал весьма искусственные объяснения, чтобы сохранить корпускулярную картину. Но примерно в то же самое время Гюйгенс

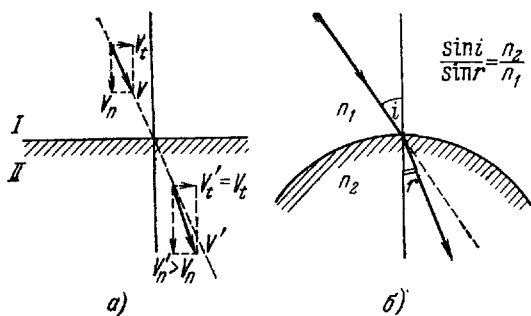


Рис. Д.1. а) Изменение направления движения корпускулы при переходе через границу раздела сред I и II. После прохождения границы раздела $V'_n > V_n$, но $V'_t = V_t$ и направление скорости меняется. б) Преломление света при прохождении границы двух сред.

высказал мысль о волновой природе света. Гюйгенс исходил из аналогии со звуковыми волнами, хотя природа световых колебаний ему была совсем неясна. Он понимал, что свет может распространяться там, где звук уже не существует (если смотреть через прозрачный колпак, из-под которого выкачали воздух, то видно, как бьется молоточек колокольчика под колпаком, а звука не слышно). Допустить, что колебания могут распространяться без наличия какой-либо среды, Гюйгенс (а за ним и все физики до Эйнштейна) не мог. Поэтому для распространения световых колебаний нужно было ввести особую среду. Эту среду Гюйгенс назвал *эфиром*. Так возникло понятие, несостоятельность которого обнаружила лишь теория относительности.

Ньютон выступал против теории волнового распространения света. Он опирался на явление двойного лучепреломления в кристаллах. Ньютон показал, что если свет распространяется в виде волн, то двойное лучепреломление означает наличие в пучке света выделенного направления колебаний. Но во времена Ньютона были известны только продольные волны, не обладающие этим свойством. И Ньютон отказался от волновой теории, хотя

и допускал ее возможность. Ньютон категорически отвергал и эфир *).

Корпускулярная точка зрения на природу света господствовала около ста лет после смерти Ньютона. Ее утверждению в немалой степени содействовал авторитет Ньютона. Но любая теория годится лишь до тех пор, пока она не противоречит фактам и объясняет их. Начало XIX века принесло с собой открытие явлений, которые убедительно свидетельствовали о волновой природе света. Были подробно изучены интерференция и дифракция света, удалось объяснить на основе волновой теории и прямолинейное распространение света. Открытие поляризации света показало поперечность световых волн.

Таким образом, XIX век принес триумф волновой теории света. Казалось, не оставалось сомнений в том, что свет — это волновой процесс. Но и физики XIX века не могли себе представить колебаний, которые происходили бы без участия каких-либо тел или какой-либо среды. Поэтому снова возник вопрос о том, в какой среде происходят световые колебания. Название для такой среды — эфир — было уже придумано Гюйгенсом; физические свойства эфира предстояло еще выяснить. Физика XIX века была насыщена идеями механики, и неудивительно, что эфир наделили механическими свойствами твердого тела (поперечные колебания распространяются только в упругих твердых телах). Конечно, это было странное тело: оно не ощущалось при движении, его нельзя было ни увидеть, ни потрогать, но другими свойствами, не входя в противоречие с наблюдениями, эфир наделить было нельзя.

Но, даже если оставить в стороне трудный вопрос о свойствах эфира, возникал еще один острый вопрос: с какой системой отсчета связан эфир, т. е. в какой системе он покоится? Эта система, естественно, была бы выделенной по отношению ко всем остальным, по крайней мере для оптических явлений. И здесь, казалось, сама природа дает прямой ответ на поставленный вопрос, если вспомнить о явлении абберации света. Это явление заключается в том, что если наблюдать луч света из двух систем отсчета, движущихся относительно друг друга, то он будет виден под разными углами к некоторому общему в этих двух системах направлению (например, направлению относительной скорости). Если речь идет о наблюдении лучей света через телескоп, видимое направление, по которому идет свет, совпадает с направлением оси телескопа. Но почему же движение наблюдателя (телескопа) изменяет видимое направление приходящего света? Суть дела может быть объяснена на простом примере. Пусть шарик равномерно падает по вертикали

*) Представление о дискуссии между Ньютоном и Гюйгенсом можно получить из книги А. Эйнштейна и Л. Инфельда «Эволюция физики», «Наука», 1965.

со скоростью c . Его нужно пропустить через трубку длины l , движущуюся в горизонтальном направлении со скоростью V , так, чтобы он не попал на стенку трубки. Для этого нужно, чтобы шарик все время оказывался внутри трубки на ее оси BB'' . В частности, когда шарик дойдет до точки B' , туда должен подойти

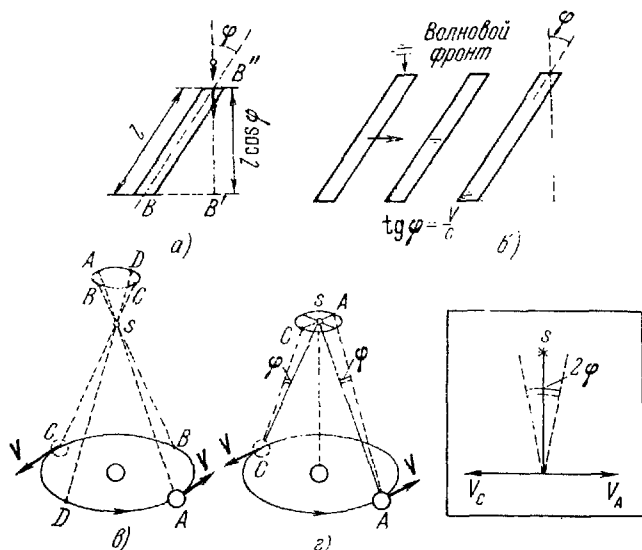


Рис. Д.2. а) Вертикально падающий шарик должен пройти через трубку, движущуюся горизонтально со скоростью V . б) Волновой фронт должен пройти без искажений через трубку, движущуюся горизонтально со скоростью V . в) Возникновение параллактического смещения у звезды, находящейся в полюсе эклиптики, из-за перемещения Земли. Благодаря этому эффекту звезда описывает в течение года небольшой эллипс. Следует обратить внимание на то, в каком месте находится наблюдатель на Земле; наблюдатель, находящийся, например, в положении A , будет видеть на небесной сфере звезду A (положение звезды также отмечено буквой A). г) Аберрация света и движение Земли по орбите также приводят к тому, что звезда, расположенная в полюсе эклиптики, описывает в течение года эллипс. Однако соответствующие положения Земли и звезды отличаются от картины, приведенной на рис. а). Этим и отличаются аберрационное и параллактическое смещения.

В рамке схематически изображено возникновение угла аберрации при изменении направления движения Земли на обратное (через полгода).

нижний конец трубки B . Трубку, очевидно, нужно наклонить вперед по движению. Легко найти угол наклона φ по отношению к вертикали. Пусть шарик проходит отрезок $B''B' = l \cos \varphi$ за время τ . За это же самое время конец трубки B должен пройти расстояние $BB' = l \sin \varphi$. Но $l \cos \varphi = c\tau$, а $l \sin \varphi = V\tau$, откуда $\operatorname{tg} \varphi = V/c$ (рис. Д.2, а).

С точки зрения корпускулярной теории света корпускулы как раз и играют роль шариков. Следовательно, телескоп нужно наклонять вперед по движению. Но и волновая теория света оставляет этот вывод неизменным. Чтобы движущаяся трубка

не «смяла» волновой фронт света (скорость трубки V , а скорость света c), ее нужно наклонить также на угол φ , причем $\operatorname{tg} \varphi = V/c$ (рис. Д.2, б).

Углом абберрации называется изменение видимого угла, под которым наблюдается приходящий луч, при переходе от одной ИСО к другой. По совершенно ясно, что угол абберрации обнаружить невозможно, находясь в пределах одной ИСО, потому что направление луча (на далекую звезду) будет всегда одним и тем же. Однако в условиях наблюдения звезд с Земли абберрация света была обнаружена, потому что Земля движется по эллипсу, следовательно, представляет собой одну и ту же ИСО лишь в ограниченный интервал времени. Через полгода Земля меняет вообще направление своего орбитального движения на обратное. В этих условиях видимое направление на звезду должно через полгода измениться.

Английский астроном Бредли искал параллактическую траекторию звезд — кажущуюся траекторию, которую описывает в течение года звезда за счет изменения положения наблюдателя. Рис. Д.2, в поясняет возникновение видимого параллактического смещения Полярной звезды. В течение года звезда должна описывать небольшой эллипс, расположенный совершенно определенно относительно орбиты Земли.

В 1728 г., пытаясь обнаружить параллактическую траекторию, Бредли открыл абберрацию света; он нашел, что звезды, расположенные вблизи полюса эклиптики, действительно описывают эллипс, большая полуось которого равна $41''$. Однако этот эллипс был расположен совсем не так, как это следовало бы для параллактического смещения (рис. Д.2, в).

На рис. Д.2, г иллюстрируется, как возникает смещение звезды из-за явления абберрации света. Звезду s , расположенную перпендикулярно плоскости орбиты Земли, наблюдают из двух диаметрально противоположных положений A и C . Угол направления на звезду для этих двух положений (через полгода) меняется на 2φ . На рис. Д.2, г через угол φ обозначен угол между направлением, под которым звезду s видел бы наблюдатель с покоящейся Земли (это направление на Земле наблюдать, конечно, нельзя), и видимым направлением на звезду s . Через полгода тот же угол будет направлен в противоположную сторону и разность видимых направлений на звезду s будет равна 2φ . Воспользуемся элементарным расчетом, чтобы оценить угол φ . Свет от Полярной звезды падает нормально к плоскости орбиты Земли. Движение Земли перпендикулярно направлению луча. Скорость Земли равна 30 км/сек , скорость света $3 \cdot 10^8 \text{ км/сек}$. Отсюда $\varphi = \operatorname{arctg} V/c = 20''$, $2\varphi = 41''$. Именно эту цифру и нашел Бредли. Он понял, что параллакс неподвижной звезды он не обнаружил (его нашел сто лет спустя Бессель), а открыл абберрацию света. Бредли объяс-

нил явление aberrации света на основе корпускулярной теории; мы привели это объяснение. Однако тот же результат получается и для волновой теории. Таким образом, объяснение явления aberrации для волновой теории затруднений не вызывало. Однако такое объяснение влекло за собой неизбежное следствие для «светоносной среды». Нужно было считать, что свет распространяется в неподвижном относительно гелиоцентрической системы эфире: иначе свет не падал бы нормально к плоскости орбиты Земли.

Итак, из наблюдения aberrации света вытекало, что эфир неподвижен в гелиоцентрической системе отсчета (она же пьютонова абсолютная система). Гелиоцентрическая система оказывается выделенной, привилегированной по отношению к распространению света. Не забудем, что до середины XIX века никто не знал о том, что световые волны — это электромагнитные волны определенной частоты.

Если предположить наличие светоносной среды, ее роль ничем не отличается от роли любой материальной среды, передающей колебания. Если скорость распространения колебаний в системе отсчета, где среда покоится, равна v , то в любой другой системе, которая движется относительно среды со скоростью $\pm V$, скорость распространения колебаний будет равна $c \pm V$. Скорость волн, согласно любой волновой теории, не зависит от движения источника, но зависит от движения наблюдателя относительно среды, колебания которой создают эти волны: здесь речь идет об эфире. В связи с этим появляется зависимость явлений не только от относительной скорости объектов, но также от их скорости относительно среды.

Проще всего проиллюстрировать эти утверждения на примере доплер-эффекта для звуковых волн в воздухе. Пусть воздух покоится в системе K , где скорость звука равна v ; источник движется относительно K (т. е. воздуха) со скоростью V , а наблюдатель покоится в этой системе (рис. Д.3, а). Свяжем с источником систему K' (движение к наблюдателю) или K'' (движение от наблюдателя). В этом случае можно повторить рассуждения из § 3.4. Из источника посылаются импульсы с интервалом T' или T'' ($2\pi/T'$ и $2\pi/T''$ — это собственная частота ω_0). Присматривая, получим два последовательных сигнала с интервалом $T = T' - \frac{VT'}{v} = T' \left(1 - \frac{V}{v}\right)$ в первом случае и $T = T'' + \frac{VT''}{v} = T'' \left(1 + \frac{V}{v}\right)$ во втором. Таким образом, если движется источник относительно наблюдателя и среды, то при приближении источника к наблюдателю последний отметит увеличение частоты $\omega = \omega_0 / \left(1 - \frac{V}{v}\right)$, а при удалении — уменьшение $\omega = \omega_0 / \left(1 + \frac{V}{v}\right)$.

Если же источник покоится относительно среды, а от источника удаляется (или к источнику приближается) наблюдатель, то скорость распространения колебаний относительно наблюдателя будет уже $v - V$ или $v + V$ (соответственно при удалении и приближении). Теперь уже источник покоится в K , а с системами K' и K'' связаны наблюдатели. Из источника посылаются сигналы с интервалом T , которые будут доходить до наблюдателя в K' через

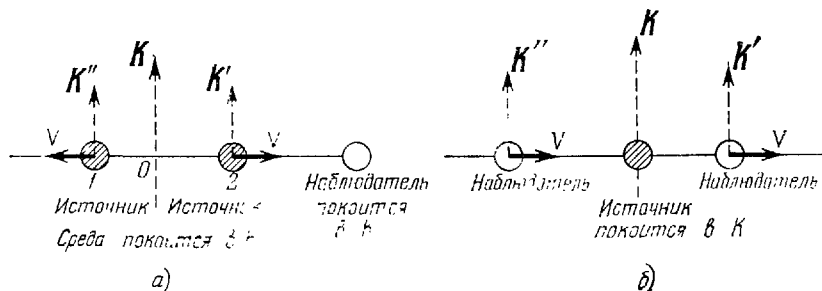


Рис. Д.3. К выводу формулы доплер-эффекта для звука. а) Наблюдатель и воздух покоятся в системе K , а источник движется в среде со скоростью V . б) Источник звука и воздух покоятся в системе K , а наблюдатель движется в воздухе со скоростью V .

интервал $T' = T + \frac{VT}{v-V} = \left(\frac{1}{1-\frac{V}{v}} \right) T$, а до наблюдателя K'' через

интервал $T'' = T - \frac{VT}{v+V} = \left(\frac{1}{1+\frac{V}{v}} \right) T$. Но теперь уже $\omega_0 =$

$= 2\pi/T$, откуда мы получаем при удалении уменьшение частоты

$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{V}{v} \right)$, а при приближении — возрастание частоты $\omega =$

$= \omega_0 \left(1 + \frac{V}{v} \right)$.

Мы видим, что формулы получаются разные при одной и той же относительной скорости источника и наблюдателя. Аналогично тому, что было сделано в § 3.4 для случая излучения волн под углом к направлению распространения, мы получим $\omega =$
 $= \omega_0 \left(1 - \frac{V}{v} \cos \theta \right)$ и $\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{V}{v} \cos \theta}$.

На этом примере хорошо видно, что предположение о существовании эфира сразу же нарушает принцип относительности. Конечно, принцип относительности годится и при наличии среды, но в условия тождественности постановки опыта нужно включить ту же самую скорость системы отсчета относительно среды. Другими словами, в каждую систему отсчета нужно брать свою среду.

Короче, для соблюдения принципа относительности годился бы полностью увлекаемый или частично увлекаемый (системой отсчета) эфир. Но это уже совсем странное предположение; тем не менее и ему суждено было появиться, но в другой связи.

Если гипотеза неподвижного эфира правильна, то с ее помощью можно объяснять и другие оптические явления. С этой точки зрения опыт Физо (1851 г.) привел к весьма загадочным результатам. Мы уже описывали этот опыт в § 3.5, но постараемся сейчас взглянуть на него глазами физика XIX века. Пусть вода покоится в системе K' , которая вместе с водой со скоростью V движется относительно лаборатории. Допустим, что лабораторию можно считать той привилегированной системой отсчета, где эфир покоится. Свет распространяется в эфире; вещество меняет его фазовую скорость, но скорость вещества роли не играет. Следовательно, скорость света в лабораторной системе v просто равна скорости света в неподвижной воде v' . Конечно, $v' = c/n$. Предположим на мгновение, что эфир «увлекался» бы вместе с водой. Тогда, естественно, скорость света v' складывалась бы со скоростью движения эфира, т. е. воды, и мы получили бы, что $v = v' + V$. Эфир, наделенный странными свойствами «частичного» увлечения, привел бы к результату $v = v' \pm kV$ со знаком, зависящим от взаимного направления движения света и среды. Опыт Физо, многократно подтвержденный впоследствии, привел к результату $v = v' \pm \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) V$. Как бы то ни было, гипотеза неподвижного эфира противоречила результатам опыта Физо.

На этом борьба за признание эфира, конечно, не окончилась, но, прежде чем рассказывать о дальнейших попытках обнаружить существование эфира, полезно остановиться на взаимоотношении физического эксперимента и теории. В процессе познания природы ищутся законы, которые правильно отражали бы зависимости, существующие в природе, или, говоря философским языком, объективные законы в объективно и вне нас существующем мире. Природа исследуется людьми, и в этот процесс вносится много субъективного, идущего от самих людей, не говоря уже о неизбежных ошибках. Следовательно, законы природы должны проверяться. В чем состоит критерий правильности физических законов? Правильность физических законов раскрывается в практической деятельности. Проверки законов разными людьми и в разных местах, многократная проверка закона одним человеком служат гарантией соответствия наших знаний подлинным законам природы. Важнейший способ проверки физических законов и выявления закономерностей природы — это искусственное создание пучных условий, т. е. постановка физического эксперимента.

Но физика не может состоять только из результатов экспериментов. Физика невозможна без теории, позволяющей система-

тизировать и объяснять различные явления природы, исходя из небольшого числа фундаментальных законов. В свою очередь физическая теория, а сейчас это уже целая наука — теоретическая физика, тесно переплетена с математикой. Когда собирается некоторый экспериментальный материал, появляется теория, позволяющая объяснить определенную группу явлений. Может ли эксперимент или серия экспериментов доказать правильность такой теории или ее опровергнуть? Конечно, мы не говорим об ошибочных экспериментах, которые всегда будут появляться; в конце концов, их ошибочность всегда обнаруживается. С другой стороны, при построении теории иногда ясны границы ее применимости, и выходить за них не следует. Но с этими оговорками можно утверждать следующее: если хотя бы один правильный эксперимент, поставленный в пределах применимости теории, противоречит этой теории, теорию следует признать неверной. Что же касается «доказательства» того или иного закона или теории путем сопоставления полученных выводов с экспериментом, то никакое число экспериментов, согласующихся с теорией, не может подтвердить ее окончательно. Теория существует и считается правильной до тех пор, пока ее выводы не приходят в противоречие с каким-то новым экспериментом, относящимся к области применимости этой теории. Эта ситуация сходна с правилом, принятым в математике: справедливость общей теоремы не доказывается ее справедливостью в частных случаях, однако один контрпример ее опровергает.

Физика в своей основе — экспериментальная наука. Процесс познания природы, часть которого составляет физика, непрерывен и неограничен. Вопрос об установлении полной истины — это скорее философский вопрос, чем вопрос той или иной частной науки. Отдельные физические эксперименты раскрывают те или иные частные закономерности, или, с философской точки зрения, относительные истины. Хотя эти закономерности содержат в себе элементы абсолютной истины, тем не менее они не могут дать исчерпывающего познания. В конечном счете всякая теория будет либо ограничена, либо опровергнута. Но на каждом этапе справедливость теорий определяется отсутствием противоречащих ей экспериментальных данных, а ее ценность — способностью объяснить и предсказать наблюдаемые явления. Эти замечания — интересные сами по себе — можно было бы и не приводить, если бы они не помогли нам при изложении истории эфира. Мы будем в основном пользоваться «отрицательными» экспериментами, указывающими на несостоятельность того или иного предположения, пытающегося спасти или обнаружить эфир.

Вернемся к предположению о том, что эфир неподвижен в гелиоцентрической системе (что следует из наблюдения абберации света). Если эфир неподвижен в гелиоцентрической системе, то Земля при своем движении вокруг Солнца должна испытывать

«эфирный ветер». Нетрудно указать эксперимент для обнаружения движения относительно эфира; его принципиальная схема состоит в следующем (рис. Д.4). Два фотоэлемента расположены на оптической скамье, параллельной скорости движения Земли по орбите. Посередине между ними расположен источник света I , в котором производится вспышка света. Свет распространяется в неподвижном эфире со скоростью c . Но фотоэлемент Φ_1 движется навстречу лучу света, а Φ_2 «уходит» от света. К Φ_1 свет идет со скоростью $c + V$, а к Φ_2 — со скоростью $c - V$. Значит, Φ_1 зафиксирует приход света раньше, чем Φ_2 , на промежуток времени

$$\Delta t = \frac{l}{c - V} - \frac{l}{c + V} = 2l \frac{V}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (\text{Д.П.1})$$

Прежде чем размышлять о возможности реализации такого опыта, обратим внимание на следующее. Когда речь идет о скорости распространения света, предположение о наличии эфира

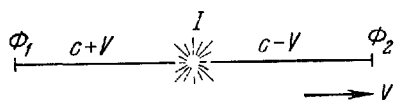


Рис. Д.4. На оптической скамье смонтированы источник света I и два фотоэлемента Φ_1 и Φ_2 . Скамья расположена параллельно направлению скорости движения Земли по орбите. Если свет распространяется в неподвижном «эфире», то от источника I свет распространяется к фотоэлементу Φ_1 со скоростью $c + V$, а к фотоэлементу Φ_2 — со скоростью $c - V$.

сводится только к утверждению о том, что существует единственная система отсчета, где скорость света в вакууме равна c . Это — единственная привилегированная система. Скорость света в вакууме во всех остальных системах, движущихся относительно нее со скоростью V , определяется классическим правилом сложения скоростей $c' = c \pm V$. Рассуждение, которое мы провели, относится к системе отсчета K , связанной с эфиром (или просто к той системе отсчета, где скорость света в вакууме равна c).

Здесь предполагается, что сигналы, полученные фотоэлементами, регистрируются в системе K . Но если мы проведем те же рассуждения в системе K' , где оптическая скамья покоится, мы получим в точности тот же результат. В этой системе просто скорость света в вакууме будет уже не та, что в K : вправо $c - V$, а влево $c + V$ (рис. Д.4). В системе K , напомним, $c - V$ и $c + V$ были бы просто скоростями, с которыми свет «догоняет» фотоэлементы Φ_1 и Φ_2 *). Совпадение результатов в K и K' неудивительно, поскольку в классической механике отсчеты времени наступления событий носят абсолютный характер.

Таким образом, если бы удалось измерить разность времени Δt (Д.П.1), тем самым было бы доказано лишь различие скоростей

*) Полезно напомнить, что согласно СТО в системе K' скорость света, так же как и в K , равна c .

света в системах K и K' . Косвенно, конечно, это был бы аргумент в пользу эфира (см. ниже).

Что касается порядка величины Δt , возникающей в опыте такого типа, то если взять, к примеру, $l = 10^4$ см, $V = 3 \cdot 10^6$ см/сек (скорость Земли на орбите), то $\Delta t \approx 10^{-10}$ сек. Даже современная техника не позволяет измерить столь малый промежуток времени.

В 1878 г. Максвелл предложил схему опыта, использующую явление интерференции света. Этот опыт позволил бы обнаружить движение Земли относительно эфира, если бы свет действительно распространялся в эфире, а эфир покоился бы в гелиоцентрической системе. Максвелл считал, что необходимая точность измерения недостижима. Однако три года спустя Майкельсон построил интерферометр, с помощью которого можно было бы заметить движение установки относительно неподвижного эфира.

Опыт Майкельсона, осуществленный в 1881 г. по идее Максвелла, состоял в следующем (рис. Д.5). Луч света, идущий от источника I , попадает на посеребренную полупрозрачную стеклянную пластинку P . Половина света, падающего на пластинку, отражается, а половина — проходит через стекло. В приборе Майкельсона (теперь он называется *интерферометром Майкельсона*) предусмотрены два зеркала S_1 и S_2 , расположение которых указано на рисунке; зеркала находятся на расстояниях L_1 и L_2 от пластинки P . Все части интерферометра жестко укреплены на тяжелой плите, плавающей в ртути, для того чтобы всю систему можно было плавно поворачивать.

На пластинке P свет расщепляется на два луча: луч 1 , идущий к зеркалу S_1 , и луч 2 , идущий к зеркалу S_2 . Каждый из лучей доходит до своего зеркала и возвращается обратно к пластинке P . Благодаря полупрозрачности пластинки некоторая часть света от каждого из этих лучей идет по направлению 3 . Поскольку каждый из лучей 1 и 2 представляет собой некоторую часть исходного луча, лучи 1 и 2 , идущие по направлению 3 , являются когерентными и могут интерферировать.

Найдем время прохождения света от P к S_2 и обратно. Вся картина рассматривается в системе, где покоится интерферометр и которая движется со скоростью V относительно эфира. Расстояние между P и S_2 равно L_2 , скорость света вправо равна $c - V$, а влево $c + V$. Следовательно, искомое время равно

$$t_2 = \frac{L_2}{c-V} + \frac{L_2}{c+V} = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \quad (\text{Д.П.2})$$

Найдем теперь время \tilde{t}_1 , за которое луч 1 пройдет путь от P к зеркалу S_1 . За время \tilde{t}_1 зеркало S_1 сдвинется на расстояние $V\tilde{t}_1$ и свет пройдет по гипотенузе треугольника PS'_1P'' расстояние $c\tilde{t}_1$. Из этого

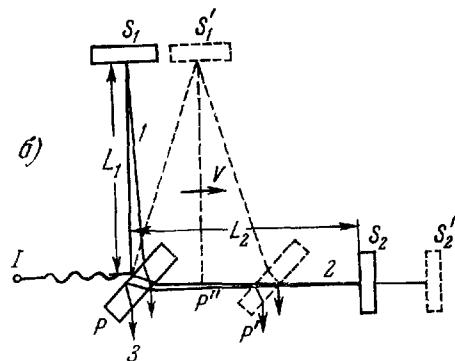
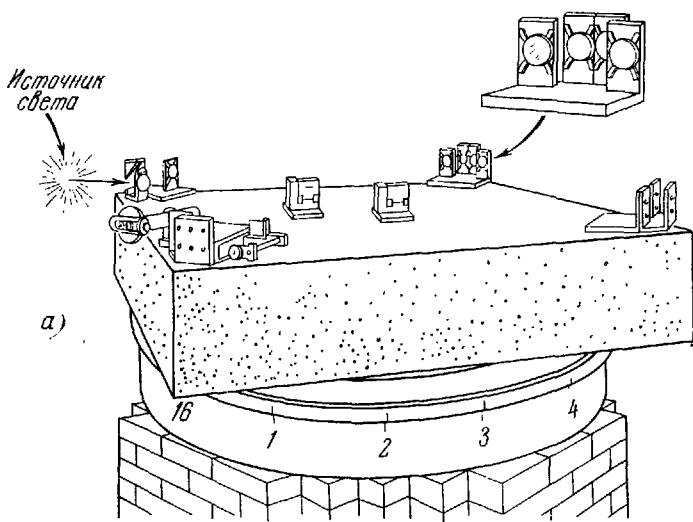


Рис. Д.5. а) Общий вид интерферометра Майкельсона. б) Принципиальная схема опыта Майкельсона. Луч света от источника I расщепляется в полупрозрачной пластинке P на два луча 1 и 2 , идущие вдоль и перпендикулярно направлению движения Земли по орбите. Скорость движения Земли по орбите отмечена стрелкой и буквой V . Лучи света 1 и 2 отражаются соответственно от зеркал S_1 и S_2 и вновь возвращаются к пластинке P . После отражения и преломления в направлении 3 идут два луча. В этом направлении и наблюдается интерференционная картина. Решающий шаг эксперимента состоит в повороте всей установки на 90° , луч 1 идет теперь по направлению движения Земли, а луч 2 — нормально движению. Если бы свет распространялся по неподвижному эфиру, оптическая разность хода лучей 1 и 2 стала бы иной и интерференционная картина, наблюдаемая в направлении 3 , изменилась бы (произошло бы смещение интерференционных полос). Однако никакого смещения полос опыт не обнаружил.

прямоугольного треугольника следует, что $(\tilde{ct}_1)^2 = L_1^2 + (V\tilde{t}_1)^2$, откуда

$$\tilde{t}_1 = \frac{L_1}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{L_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}}, \quad B = \frac{V}{c}.$$

Полное время движения света от P к S_1 и обратно будет вдвое больше, так что

$$t_1 = 2\tilde{t}_1 = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}}. \quad (\text{Д. II. 3})$$

Различие времен t_1 и t_2 обусловлено не только различием в длинах плеч интерферометра, но и движением прибора.

Опыт ставится таким образом, что одно из плеч интерферометра располагается параллельно направлению движения Земли по орбите (это направление известно по астрономическим данным). Но мы живем на Земле, которая — по предположению — движется относительно эфира, и потому опыт всегда проводится при наличии эфирного ветра. Поэтому сравнить интерференционную картину «без эфирного ветра» с картиной «при эфирном ветре» невозможно. Расположив, например, плечо PS_1 по направлению скорости V , мы получим определенную интерференционную картину — чередование светлых и темных полос*), — зависящую от разности времен хода лучей 1 и 2:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{L_2}{1 - B^2} - \frac{L_1}{\sqrt{1 - B^2}} \right) = \frac{2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}} \left(\frac{L_2}{\sqrt{1 - B^2}} - L_1 \right). \quad (\text{Д. II. 4})$$

Эта разность времен зависит как от L_1 и L_2 , так и от скорости V . Если бы можно было гарантировать условие $L_1 = L_2$, то эта разность зависела бы от $L_1 = L_2 = L$ так:

$$(\Delta t)_{L_1=L_2} = \frac{2L}{c} \left(\frac{1}{1 - B^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - B^2}} \right). \quad (\text{Д. II. 5})$$

При известном L интерференционные полосы, наблюдаемые в приборе, однозначно определяются движением установки. Но, во-первых, проще не заботиться о соблюдении условия $L_1 = L_2$, а во-вторых, удобнее наблюдать изменение интерференционной картины, т. е. смещение полос. Для этого всю установку поворачивают на 90° . Плечи интерферометра меняются местами. Тогда мы

*) Об интерферометре Майкельсона см., например, в уже цитированной книге Г. Ландсберга «Оптика».

получим

$$t'_1 = \frac{2L_1}{c} \frac{1}{1-B^2}, \quad t'_2 = \frac{2L_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-B^2}},$$

$$\Delta t' - t'_2 - t'_1 = \frac{2}{c} \left(\frac{L_2}{\sqrt{1-B^2}} - \frac{L_1}{1-B^2} \right) =$$

$$= \frac{2}{c \sqrt{1-B^2}} \left(L_2 - \frac{L_1}{\sqrt{1-B^2}} \right).$$
(Д.П.6)

Это значит, что при повороте установки разность времен изменится:

$$\Delta t^* - \Delta t' - \Delta t = \frac{2(L_1 + L_2)}{c \sqrt{1-B^2}} \left(1 - \frac{L}{\sqrt{1-B^2}} \right) \approx -\frac{L_1 + L_2}{c} B^2, \quad (\text{Д.П.7})$$

и будет наблюдаться смещение полос.

Если мы хотим получить разность хода лучей порядка λ , то это значит, что Δt^* должно быть порядка периода колебаний T . Но $T = \lambda/c$. Для движения Земли по орбите $B \sim 10^{-4}$; для видимого света $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$ см, откуда суммарная длина плеч интерферометра $L_1 + L_2 \sim 50$ м. Такой путь светового луча можно получить многократным отражением.

Майкельсон мог бы обнаружить «эфирный ветер» со скоростью 40 км/сек. Не только Майкельсон, но и все другие физики не сомневались в том, что «эфирный ветер» даст о себе знать. Но никаких следов «эфирного ветра» не оказалось. Опыт Майкельсона неоднократно повторялся со все большей точностью; в настоящее время можно было бы обнаружить «эфирный ветер», скорость которого равна 30 м/сек, по результат Майкельсона, или, как еще говорят, отрицательный результат опыта Майкельсона, остается неизменным. Таким образом, его надежность не вызывает сомнений.

Из опыта Майкельсона вовсе не следует вывод о том, что эфир не существует. Результат опыта Майкельсона можно объяснить, наделив эфир некоторыми свойствами. Эфир можно «добить», только привлекая данные других наблюдений. Но мы попытаемся пока сделать выводы из опыта Майкельсона, не связывая его с поисками «эфирного ветра». Этот опыт показал, что поворот интерферометра на Земле не вызывает сдвига интерференционных полос. Но этот сдвиг в принципе мог бы быть связан с различием в скорости распространения света по двум направлениям в системе отсчета интерферометра.

Следовательно, — независимо от того, существует эфир или нет, — опыт Майкельсона показывает, что скорость света на замкнутом пути, измеренная на Земле, одинакова по всем направлениям, т. е. изотропна. Так как Земля движется вокруг Солнца по замкнутой кривой, т. е. ее можно считать инерциальной системой лишь на протяжении небольшого промежутка времени, факти-

чески мы проводим измерения во многих ИСО. Это означает, что из опыта следует, что скорость света на замкнутом пути изотропна в любой ИСО.

Несколько видоизмененный опыт Майкельсона, поставленный в 1932 г. Кеннеди и Торндайком, позволяет подтвердить главное предположение Эйнштейна. Если взглянуть на формулу (Д.П.7), видно, что Δt зависит и от c . Если бы в разных ИСО абсолютное значение скорости света в вакууме было различно, то при переходе от одной ИСО к другой наблюдалось бы смещение полос. За интерференционной картиной наблюдали несколько раз непрерывно от восьми дней до месяца (с перерывом на три месяца). За это время установка сменила многие инерциальные системы отсчета. Прибор был настолько чувствителен, что можно было бы обнаружить изменение c на 2 м/сек. Но ничего похожего обнаружено не было. Таким образом, из опыта Майкельсона следует, что скорость света имеет одну и ту же величину (при распространении туда и обратно) во всех направлениях для данной ИСО; кроме того, скорость света в вакууме имеет одну и ту же величину во всех ИСО.

Хотя мы несколько нарушим связность изложения, здесь все же уместно привести истолкование результатов опыта Майкельсона в СТО. Если рассматривать опыт Майкельсона, поставленный в любой ИСО, то его результат очевиден. В каждой такой системе скорость света в вакууме изотропна, и интерференционная картина, возникающая в опыте, обусловлена исключительно геометрической разностью хода. Короче, в любой ИСО, где покоится интерферометр, мы получим в точности ту же самую картину, которую при классическом рассмотрении мы получили бы в той привилегированной системе отсчета, где покоится эфир.

Необходимость более усложненного истолкования результата возникает тогда, когда этот опыт рассматривается в ИСО, относительно которой интерферометр движется. Пусть интерферометр покоится в K' , а опыт «ставится» в K ; для простоты допустим, что (в K') $L_{10} = L_{20}$. Мы добавили сюда еще индекс «0», чтобы подчеркнуть, что речь идет о собственных длинах. Очевидно, что формулы (Д.П.4) и (Д.П.6) остаются справедливыми, но $L_2 = L_{20} \sqrt{1 - V^2}$, а $L_1 = L_{10}$. Тогда видно, что Δt , определяемое согласно (Д.П.6), обращается в нуль. Естественно, не дает никакого эффекта и поворот установки. Таким образом, отрицательный результат опыта Майкельсона объясняется в СТО относительно длины масштабов (которая самым непосредственным образом связана с инвариантностью скорости света, § 2.3).

Для того чтобы объяснить результат опыта Майкельсона и сохранить эфир, Лоренц и Фитцджеральд предположили, что все тела при движении относительно неподвижного эфира испытывают сокращение в $\sqrt{1 - V^2}$ раз в направлении движения («лоренцево

сокращение»). Из предыдущего рассуждения ясно, что результат опыта Майкельсона таким способом объяснить можно. Нужно только подчеркнуть существенную разницу относительности длин масштабов в СТО и «лоренцева сокращения». В СТО сокращение — это следствие измерений при относительном движении систем отсчета. У Лоренца — Фитцджеральда это следствие движения относительно эфира; в этом случае сохраняется привилегированная система отсчета. Но гипотеза сокращения Лоренца обнаруживает свою несостоятельность при несколько видоизмененной постановке опыта Майкельсона. У Майкельсона плечи интерферометра были одинаковыми, у Кеннеди и Торндайка разными. Если плечи интерферометра различны, то будет наблюдаться смещение полос, если меняется скорость интерферометра относительно эфира. Но находящийся на Земле интерферометр участвует в трех движениях относительно эфира: движений Земли относительно Солнца, вращении Земли и, наконец, движении Солнца. Суммарная скорость меняется на определенную величину через каждые 12 часов (и 6 месяцев). Эти изменения должны приводить к смещению интерференционных полос. Действительно, если гипотеза Лоренца верна, то $L_2 = L_{20} \sqrt{1 - V^2}$ и из (Д.П.4) мы получим

$$\Delta t = \frac{2}{c \sqrt{1 - V^2}} (L_{20} - L_{10}). \quad (\text{Д.П.8})$$

Не будем поворачивать установку, но выясним, как изменится Δt при изменении скорости V относительно эфира на ΔV . Дифференцируя (Д.П.8) по V , получим

$$\frac{\Delta t}{\Delta V} = \frac{2}{c} (L_{20} - L_{10}) \Delta \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \right) = \frac{L_{20} - L_{10}}{c} \Delta V^2. \quad (\text{Д.П.9})$$

Последняя формула записана с точностью до V^2 . Но длительное наблюдение за интерференционной картиной не обнаружило ее изменения.

Второй способ согласовать эфир с результатом опыта Майкельсона — это предположение о том, что эфир «увлекается» движущимися телами. Однако, как мы видели, абберация света «согласуется» только с «неподвижным в гелиоцентрической системе» эфиром. Опыт, специально поставленный Физо (см. стр. 91, где рассказано, как объясняет этот опыт теория относительности) с целью выяснить, «увлекается» ли эфир, привел к выводу, что эфир «частично увлекается».

Конечно, перечисленными экспериментами и наблюдениями далеко не исчерпываются все попытки установить свойства эфира. Но уже из этих данных видно, насколько противоречивыми свойствами должен был бы обладать эфир. Но, пожалуй, самый суще-

ственный «вклад» эфира в физику состоял бы в том, что от принципа относительности в электродинамике пришлось бы отказаться.

В 1905 г. появилась работа Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел». В этой работе почти полностью излагалась специальная теория относительности, которая не только естественным образом объясняла результат Майкельсона, но давала правильное истолкование всем известным механическим, электродинамическим и оптическим явлениям.

Она с самого начала распространила принцип относительности на всю физику, явно утвердила равноправие всех ИСО в вакууме и тем самым сделала эфир ненужным. Замечательным образом СТО не противоречит ни один опытный факт.

Если Майкельсон в своих первоначальных опытах мог обнаружить изменение скорости света при изменении направления его распространения относительно направления движения Земли вплоть до 150 м/сек , то экспериментаторы, производившие свои опыты позднее, могли бы уловить это изменение вплоть до 15 м/сек . Использование для той же цели лазеров позволило бы обнаружить изменение скорости до $0,03 \text{ м/сек}$. Однако изменение скорости света для движущегося наблюдателя так и не было обнаружено.

Была проверена независимость скорости света в вакууме от движения источника. Один из опытов был проведен с взвешенным источником света — Солпцем (А. М. Бонч-Бруевич, 1956 г.). Если скорость света зависит от движения источника, то, измеряя скорость света, исходящего от двух противоположных точек экватора, можно было бы уловить разность этих скоростей. Опыт ничего не обнаружил. Был проведен также лабораторный опыт, в котором сравнивалось время пролета определенного расстояния γ -квантами; рассматривались γ -кванты, испущенные неподвижным и движущимся источниками (радиоактивными ядрами). Снова независимость скорости света от движения источника была подтверждена.

Можно уверенно сказать, что, несмотря на колоссальное возрастание точности экспериментов, нет никаких намеков ни на существование привилегированной системы отсчета, ни на различие скорости света в вакууме в различных инерциальных системах отсчета, ни на проявления эфира.

В заключение отметим, что *ускоренное* движение системы отсчета относительно ИСО, конечно, может быть обнаружено. Механический опыт такого типа — опыт Фуко — был описан в § 1.5. Имеются также оптические варианты этого опыта, о которых мы упомянем для полноты. Мы опишем опыт Гарреса (1912 г.), повторенный затем Саньяком. На диске, который можно вращать, смонтированы три зеркала *A*, *B*, *C* и полупрозрачная пластинка *D* (рис. Д.6); на диске укреплены также источник света *L* и фотопластинка *P*. Луч света *Q* расщепляется пластинкой *D* на два

луча $DABCDP$ и $DCBADP$, оббегающие контур $ABCD$ в двух противоположных направлениях. Если система покоится, на пластинке происходит интерференция двух лучей, идущих от L и расщепленных пластинкой D . Если диск привести во вращение, интерференционные полосы должны сместиться, так как возникнет дополнительная разность хода лучей.

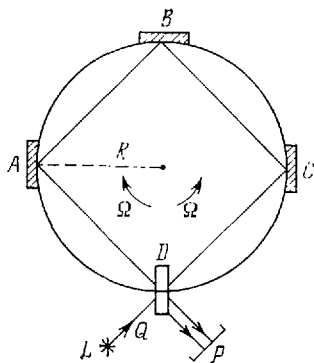


Рис. Д.б. Схема опыта Саньяка — Гарреса.

Считая отклонение геоцентрической системы от инерциальной несущественным, рассмотрим все происходящее в системе отсчета Земли. Для простоты рассуждений будем считать, что зеркал много и что свет практически перемещается по окружности. Тогда скорость, с которой свет догоняет диск, если свет распространяется в направлении вращения диска, равна $c - V = c - \Omega R$ (R — радиус диска, а Ω — угловая скорость вращения диска); при распространении света в противоположном направлении эта же скорость равна $c + V = c + \Omega R$. Время, за которое свет обойдет окружность диска, равно в первом случае $\tau_1 = 2\pi R / (c - V)$, а во втором $\tau_2 = 2\pi R / (c + V)$. Разность этих времен равна

$$\Delta\tau = \tau_1 - \tau_2 = 2\pi R \left(\frac{1}{c - V} - \frac{1}{c + V} \right) = \frac{4\pi R V}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \frac{4S\Omega}{c^2},$$

где S — площадь диска. Саньяк наблюдал смещение полос, превосходно согласующееся с приведенной формулой. По смещению полос можно определять угловую скорость Ω .

Если в качестве вращающегося диска использовать Землю, можно определить угловую скорость вращения Земли. Такой опыт был проведен в 1925 г. Майкельсоном и Гейлем. Угловая скорость вращения соответствовала составляющей угловой скорости вращения Земли в направлении отвеса на месте наблюдения. Для постановки опыта пришлось проложить около 2 км труб и запастись вторым контуром для определения нулевой точки смещения полос. Результат Майкельсона был $0,230 \pm 0,005$ при теоретической цифре 0,236. Отличное согласие!

Таким образом, в отличие от равномерного поступательного движения Земли, ее вращение может быть обнаружено физическими экспериментами различных типов.

III. Был ли опыт Майкельсона «решающим» для построения СТО? Почти во всех книгах в истории создания СТО почетное место отводится опыту Майкельсона. Так или иначе, большинство

авторов полагает, что СТО возникла в результате попыток объяснения опыта Майкельсона и что опыт Майкельсона явился главной экспериментальной основой СТО.

В единственной книге на русском языке, посвященной экспериментальным основам СТО, написанной С. И. Вавиловым в 1928 г., опыту Майкельсона отводится именно такое место: «История его (опыта Майкельсона) излагается здесь довольно подробно, ибо фактически на его основе и формулированы основные постулаты теории относительности». Наконец, в предисловии С. И. Вавилов писал: «Прочитав эту книгу, читатель поймет, почему она украшена портретом Майкельсона».

Эта же версия повторяется почти во всех наших учебниках, где касаются истории создания СТО. В книге Ю. Б. Румера и М. С. Рывкина «Теория относительности» (Учпедгиз, 1960) находим: «В отличие от всех предыдущих исследователей, Эйнштейн усмотрел в отрицательном результате опыта Майкельсона...» Зарубежная литература в этом смысле не отличалась от нашей. Мы ограничимся одним примером. В книге Лауэ, написанной в 1911 г., например, сказано, что «эксперимент Майкельсона оказался фундаментальным для теории относительности».

Разумеется, кроме учебников и популярных книг, были книги по СТО, написанные самим Эйнштейном. В книге Эйнштейна, посвященной специальной и общей теории относительности, которую сам автор снабдил подзаголовком «Общедоступное изложение», опыт Майкельсона упоминается в § 16: «Специальная теория относительности и опыт». Но из текста этого параграфа нельзя понять, была ли непосредственная связь между опытом Майкельсона и появлением теории. Об этом просто нет речи. В статьях и высказываниях Эйнштейна до поры до времени не появлялось ничего такого, что противоречило бы общеприпятой точке зрения на опыт Майкельсона как исходный пункт построения СТО. Этому учили и учат студентов, этому учат сейчас школьников. И поэтому было весьма удивительно прочесть в статье Р. Шенк-ланда, опубликованной в 1963 г., следующую выдержку из записи его беседы с Эйнштейном в 1950 г.:

«Когда я заинтересовался, как он познакомился с опытом Майкельсона — Морли, он рассказал, что это произошло благодаря статьям Г. А. Лоренца, но только после 1905 г. «Иначе, — сказал он, — я упомянул бы о нем в моей статье». Действительно, в статье Эйнштейна 1905 г. нет упоминания об опыте Майкельсона и нет ссылок на статьи Лоренца.

Хорошо известно, что к построению СТО близко подходили, кроме Эйнштейна, также Лоренц и Пуанкаре. Однако фактически СТО была построена Эйнштейном, причем практически в одной работе 1905 г. Таким образом, если говорить о решающем значении опыта Майкельсона для создания СТО, нужно выяснить его

влияние на деятельность Эйнштейна. И вот из статьи Шенкланда выясняется, что Эйнштейн узнал об опыте Майкельсона только ... после создания СТО.

Почему вопрос о том, какую роль сыграл опыт Майкельсона в деятельности Эйнштейна по созданию СТО, может волновать преподавателя? Интересно, конечно, по ради забавного факта едва ли стоит писать целый параграф. Нет, дело не только в интересе. Исторический путь построения теории определенное время всегда довлеет над преподаванием. Уйти от истории вопроса трудно, а в некоторых случаях и невозможно. Конечно, со временем изложение того или иного предмета приобретает логическую стройность (преподавание не проходит даром!), но подлинная история развития теории далеко не всегда отражает логику ее построения. Природа, видимо, открывает свои тайны не в той последовательности, которая удобна для их интерпретации. И первое время после создания теории ее учебное изложение скорее следует историческому пути ее создания, чем логической схеме ее построения, которая после завершения теории задним числом может быть уже построена.

Теперь, взглянув с этой точки зрения на преподавание СТО, мы видим, что если Шенкланд правильно понял Эйнштейна, то преподавание шло даже не тем путем, которым фактически теория была построена. Странная ситуация!

Речь идет совсем не о том, чтобы отрицать роль опыта Майкельсона. И история постановки опыта Майкельсона, и его осуществление не могут не вызывать восхищения. Опыт Майкельсона занимает выдающееся и непреходящее место в истории развития современного естествознания. И вместе с тем опыт Майкельсона сыграл довольно печальную роль в становлении традиционной схемы изложения СТО.

Опыт Майкельсона, когда его ставят в основу изложения СТО, неизбежно влечет за собой введение эфира. Объяснить смысл постановки опыта Майкельсона, не рассказав о трудных поисках материальной среды, в которой распространяется свет, просто невозможно (см. Дополнение II). Но все мы теперь хорошо знаем, что такая среда вовсе не обязательна. И методически правильной с этого начинать. Нет ни малейшей необходимости возвращаться в интеллектуальную атмосферу конца прошлого века.

Действительно, эфир сыграл заметную роль в физических воззрениях XIX века. Да, именно представления об эфире подсказали Максвеллу идею опыта, который в конечном счете был реализован Майкельсоном и Морли. По развитию науки всегда приводит к тому, что в конечном счете отбрасываются ошибочные представления, сыгравшие свою роль на определенном этапе развития науки. Когда Галилей сформулировал принцип инерции, он сразу же отверг доктрину Аристотеля о том, что всякое движе-

ние нужно поддерживать. Когда было открыто превращение механической энергии в тепловую, пришлось отказаться от представления о теплороде. Теория относительности началась с отказа от абсолютного движения, с отказа от эфира. Но если сейчас уже никто не вспоминает о доктринах Аристотеля, излагая механику, никто не вспоминает теплород, излагая тепловые явления, почему нужно сохранить эфир, излагая СТО в школе, да и в вузе? Введение эфира в современное изложение СТО по меньшей мере странно. Нужно довольно долго объяснять, зачем вводится эфир, чтобы в конце концов объявить, что эфира нет. Разве такой подход может называться методическим?

Иногда говорят, что все равно от эфира никуда не уйдешь: его все равно придумают, исходя из аналогии с распространением звука или волн на воде. Здесь просто нужно проявить определенный такт, чтобы вовремя пояснить, что в способе распространения электромагнитных и гравитационных волн, с одной стороны, и упругих волн, с другой, есть существенное различие и что для распространения электромагнитных волн наличие вещества совсем не обязательно. Свет может распространяться там, где вещества в обычном понимании слова (обладающего массой покоя) нет. Все равно же от эфира придется отказаться!

На это могли бы ответить так: «Верно, конечно, что лучше не вводить «эфир», которого все равно нет, но изложение СТО — вещь не простая. Создатели СТО шли к ней долгим и трудным путем. Этот путь лежал через гипотезу об эфире, которая за ненадобностью была в конце концов отброшена. Но гипотеза «эфира» была естественной, она возникла в поисках верного решения, она отражает логику человеческого мышления и воспроизвести ее совсем не вредно». Здесь все верно, кроме одного. Эйнштейн шел к СТО не через эфир (и, естественно, не через опыт Майкельсона), а более простым и ясным путем. И если говорить о логике человеческого мышления, то следует присмотреться к рассуждениям Эйнштейна.

Какую роль играл опыт Майкельсона в деятельности Эйнштейна? Мы уже приводили запись высказывания Эйнштейна, сделанную Шенкландом. Однако статья Шенкланда появилась лишь после смерти Эйнштейна и не была, если можно так сказать, «авторизована». Совсем недавно в Принстонском архиве Эйнштейна было обнаружено письмо Эйнштейна, содержащее прямой ответ на интересующий нас вопрос и уже не оставляющее никаких сомнений. История появления письма следующая. За год до смерти Эйнштейна, 2 февраля 1954 г., некто Давенпорт прислал Эйнштейну письмо, в котором говорилось о том, что он подбирал материалы, показывающие, что Майкельсон «оказал существенное влияние на Ваши рассуждения и сыграл заметную роль в создании Вашей теории относительности». Сам Давенпорт не был физиком и поэтому

просил Эйнштейна «кратко изложить, избегая специальных терминов, какую роль сыграл Майкельсон — если это было действительно так — в создании Вашей теории».

Ответ Эйнштейна последовал почти сразу, 9 февраля 1954 г. Это письмо — последнее высказывание Эйнштейна по этому вопросу. Судя по всему, Эйнштейн неоднократно обдумывал этот вопрос (ведь недаром же он отвечал на него Шенкланду). Письмо составлено очень четко и продуманно. Вот оно:

Дорогой мистер Давенпорт!

Уже до работы Майкельсона было хорошо известно, что в пределах точности эксперимента не наблюдалось влияния движения координатной системы на физические явления и, соответственно, на их законы. Г. А. Лоренц показал, что это может быть объяснено на основе его формулировки максвелловской теории во всех случаях, когда можно пренебречь вторыми степенями скорости системы (т. е. в эффектах первого порядка).

Однако из теории следовало ожидать, что такая независимость не будет иметь места для эффектов второго и более высоких порядков. Величайшей заслугой Майкельсона было то, что он сумел совершенно определенно показать в одном случае, что ожидаемого эффекта второго порядка *de facto* не существует. Эта работа Майкельсона, замечательная в равной степени как по смелости и ясности постановки задачи, так и по той изобретательности, с которой была достигнута необходимая, крайне высокая точность измерений, составляет непреходящий вклад в науку. Этот вклад явился новым сильнейшим аргументом за то, что «абсолютного движения» не существует, т. е. в пользу принципа относительности, справедливость которого не подвергалась сомнению по отношению к механике и который казался несовместимым с электродинамикой.

Когда я развивал свою теорию, результат Майкельсона не оказал на меня заметного влияния. Я даже не могу припомнить, знал ли я о нем вообще, когда я писал свою первую работу по специальной теории относительности, (1905 г.). Объяснить это можно просто тем, что, по общим соображениям я был твердо убежден в том, что никакого абсолютного движения не существует, и моя задача состояла только в том, чтобы сочетать это обстоятельство с тем, что известно относительно электродинамики. Отсюда можно понять, почему в моей собственной деятельности опыт Майкельсона не играл никакой роли или, по крайней мере, не играл решающей роли.

Я не возражаю против опубликования этого письма. Я готов также дать дополнительные разъяснения, если они потребуются.

С искренним уважением

Альберт Эйнштейн

Письмо написано предельно ясно, и к нему ничего добавить. Правда, ему противоречит одно выступление Эйнштейна, известное по книге Б. Джеффа. Лишь раз случай свел вместе Эйнштейна и Майкельсона. Это произошло в 1931 г. в Пасадене. Эйнштейн произнес небольшую речь перед присутствующими; в частности, обращаясь к Майкельсону, он сказал: «... своими замечательными экспериментами вы проложили дорогу теории относительности». Как теперь выяснилось, в книге Джеффа, откуда взята приведен-

ная фраза (стр. 144), текст выступления Эйнштейна приведен не полностью. Из отчета о выступлении Эйнштейна на немецком языке следует, что в книге высказана целая фраза и что Эйнштейн говорил о «дороге» к общей теории относительности. Таким образом, со стороны Эйнштейна нигде нет даже намека на то, что для него опыт Майкельсона был решающим, хотя всюду Эйнштейн подчеркивает красоту этого опыта и его фундаментальный вклад в науку. В письме к Джеффу (стр. 83) он пишет о том, что этот опыт «укрепил мою уверенность в правильности принципа специальной теории относительности». Скорее всего это и есть самая правильная оценка значения опыта Майкельсона в собственной деятельности Эйнштейна. Для истории физики опыт Майкельсона имел совсем иное, возможно, даже «решающее» значение. Над работами Лоренца и многих других явно довлел «отрицательный» результат опыта Майкельсона. Но не на этом пути было суждено появиться СТО! Парадоксально, что Лоренц, который нашел знаменитые «преобразования Лоренца», заключающие в себе сконцентрированную суть СТО, был весьма далек от создания СТО.

Наконец, последний интересный вопрос состоит в том, почему так упорно преподавание шло по «лоренцевскому» пути? Одно случайное обстоятельство, сыгравшее, по-видимому, не последнюю роль, стоит, пожалуй, отметить здесь. Приведем небольшую цитату из книги Г. Бонди [21]:

«Что сбивает с толку многих, так это то, что в учебниках отдается незаслуженное предпочтение опыту Майкельсона — Морли... Эйнштейн как-то упоминал, что когда он писал свою основную работу по специальной теории относительности (1905 г.), то ничего не слышал об этом опыте. Уже значительно позже, когда сочли полезным воспроизвести различные работы, посвященные относительности, издатели (по чьему-то совету) решили начать с середины одной из работ Лоренца. В таком виде статья начиналась с описания опыта Майкельсона — Морли. Тон был задан, и с тех пор каждый или почти каждый считал своим долгом начинать именно так. Но до чего же это неудачное начало!»

И в самом деле, легко убедиться, если взять в руки сборник «Принцип относительности» (ОНТИ, 1935), что открывающая сборник статья Лоренца представляет собой перевод §§ 89—92 из книги Лоренца «*Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*» (Leiden, 1895). Она как раз начинается с опыта Майкельсона. Сборник на русском языке воспроизводит в точности тот текст Лоренца из немецкого издания, о котором пишет Бонди.

Что касается восклицания «по до чего же это неудачное начало!», то к нему присоединятся далеко не все. А вопрос о том, как разумно излагать учащимся СТО, далеко не праздный: сейчас СТО входит не только в курс общей физики высшей школы, но и в программу

средней школы. Преподавание, безусловно, должно опираться на идеи современной физики и исключать изжившие себя идеи прошлого.

Путь построения СТО, использованный Эйнштейном, начался с отказа от существования «светоносной среды», и на этом пути опыт Майкельсона действительно не был «решающим» опытом. Путь Эйнштейна достаточно прост и логичен, и есть все основания использовать его для изложения СТО.

IV. Почему не следует вводить зависимость массы от скорости или же релятивистскую массу? В учебниках СТО (особенно прежних лет) нередко вводят «релятивистскую массу»:

$$m_{\text{рел}} = m\gamma = m/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = v/c,$$

которая — по определению — зависит от скорости, и пытаются придать ей самостоятельное значение.

Следует ли вводить релятивистскую массу — вопрос чисто методический. Если считать массу $m_{\text{рел}}$ просто сокращенным обозначением, никакого вопроса вообще не возникает. Но совсем другое дело — физическая интерпретация релятивистской механики. Здесь нередко возникают недоразумения и туманные толкования. Именно об этом и пойдет речь.

Нетрудно понять, как возникло искушение ввести релятивистскую массу. Для этого достаточно сопоставить ньютоновское и релятивистское уравнения движения (5.37а) и (5.37б):

$$\frac{d}{dt}(mv) = F, \quad (\text{а}) \quad | \quad \frac{d}{dt}(m\gamma v) = F, \quad (\text{б})$$

как сам собой напрашивается вывод, что «вся разница» между этими уравнениями состоит в том, что в релятивистском уравнении масса стала зависеть от скорости. Далее, «вынув» из-под знака производной выражение $m\gamma$, объявляют его релятивистской массой и придают ему самостоятельный смысл. Есть много возражений против такой трактовки; они будут изложены ниже. С другой стороны, будут подчеркиваться преимущества использования инвариантной массы покоя.

Разумная релятивистская интерпретация массы — как и вся релятивистская механика — должна опираться в конечном счете на четырехмерные представления. Хотя во многих случаях преподавание ограничено такими рамками, что переход к четырехмерным представлениям невозможен, забывать о том, что построение релятивистской механики (гл. 5) неизбежно требует введения четырехмерного мира, нельзя. И если мы вынуждены ограничиться трехмерной формулировкой релятивистской механики, то, обращаясь к интерпретации ее результатов, приходится возвращаться к самым ее истокам.

Напомним кратко, что было сделано в начале гл. 5. Мы *определили* 4-вектор импульса как произведение 4-скорости на скаляр — массу покоя: $\vec{P} = m\vec{V}$. Что касается уравнения движения, то в его левую часть вошла производная $d\vec{P}/dt$. Отсюда видно (см. также § 5.1), что релятивистский множитель γ под знаком производной в (5.376) появился из-за того, что в 4-пространстве-времени мы пользуемся инвариантным собственным временем вместо неинвариантного координатного. В три первые компоненты \vec{P} входят просто три первые компоненты 4-скорости \vec{V} , не имеющие отношения к динамике. Итак, множитель γ относится к свойствам 4-пространства-времени, а не к внутреннему состоянию частицы.

Когда мы ввели скаляр — массу покоя, то в 4-пространстве эта величина получила точные трансформационные свойства; другими словами, можно сразу указать закон ее изменения при переходе от одной ИСО к другой. Масса покоя — это скаляр, т. е. инвариант. Это обстоятельство крайне существенно. Так как $\vec{P}^2 = -m^2c^2$ (см. (5.47)), то отсюда ясно, что масса покоя пропорциональна квадрату абсолютной величины 4-вектора энергии-импульса частицы.

Как и в классической механике, мы хотим связать массу со свойствами самой частицы, и тогда единственный разумный способ введения массы состоит в том, чтобы пользоваться массой покоя. Можно сказать, конечно, что ускорение частицы и достижение ею релятивистской скорости вызывают изменение ее внутренних свойств и, в частности, массы. Однако можно совсем не трогать частицу, а перейти в другую ИСО, а в результате уравнение движения этой частицы по-прежнему будет (5.376). Таким образом, если непосредственно принимать за чистую монету «релятивистскую массу», то она растет без всяких физических причин. Едва ли такой результат можно считать удовлетворительным.

Никому не нужно определять «релятивистскую массу» экспериментально. Реально релятивистских скоростей достигают лишь микрочастицы, а для их отождествления нужна только масса покоя. Она легко находится, если определить энергию и импульс частицы из соотношения (5.50):

$$m^2c^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2.$$

Так всегда и поступают в физике высоких энергий.

Но, может быть, можно непосредственно проверить «зависимость массы от скорости»? Отметим прежде всего, что никакой однозначной зависимости массы от скорости из механики СТО не следует. Как уже указывалось в § 5.3, суть дела состоит в том,

что, в отличие от ньютоновской механики, в релятивистской механике ускорение и сила не совпадают (вообще говоря) по направлению. В ньютоновской механике массу тела можно было определить по отношению величины силы к величине сообщаемого ему телу ускорения: $m = F/(dv/dt)$. Если аналогичным образом определять массу в релятивистской механике, мы придем к тензору масс (о тензорах см. Приложение I, § 3). Действительно, перепишем (5.38) в виде ($\alpha = 1, 2, 3$)

$$m \frac{dv_\alpha}{dt} = \frac{1}{\gamma} \left[F_\alpha - \frac{v_\alpha}{c^2} (F_\beta v_\beta) \right] = \frac{1}{\gamma} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{v_\alpha v_\beta}{c^2} \right) F_\beta,$$

откуда видно, что ускорение является линейной векторной функцией силы, причем коэффициенты этой линейной векторной функции (т. е. компоненты тензора) зависят от скорости тела. Эти коэффициенты определяют обратный тензор масс:

$$m_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{1}{m\gamma} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{v_\alpha v_\beta}{c^2} \right).$$

Появление тензора масс имеет простой физический смысл: величина ускорения зависит от взаимного направления силы и скорости. Скорость частицы является некоторым выделенным направлением. Для упрощения направим ось 1 по направлению скорости; тогда $v_\alpha = \delta_{1\alpha}v$, где v — абсолютное значение скорости. При этом

$$m_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{1}{m\gamma} (\delta_{\alpha\beta} - \frac{v^2}{c^2} \delta_{1\alpha} \delta_{1\beta}),$$

или же

$$m_{\alpha\beta}^{-1} = \frac{1}{m\gamma} \begin{pmatrix} \gamma^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По обычному правилу (адьюнкты, деленные на величину определителя) найдем тензор масс:

$$m_{\alpha\beta} = m\gamma^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{-2} \end{vmatrix},$$

откуда ясно, что одна «продольная» и две «поперечные» массы — это главные значения тензора масс $m_{\alpha\beta}$.

Но «тензор масс» возник исключительно из-за желания ввести «зависимость массы от скорости»; появление такого тензора явно не оправдано: для интерпретации любых результатов вполне достаточно массы покоя.

Таким образом, ответ на поставленный вопрос об «экспериментальном обнаружении» зависимости $m\gamma$ состоит в том, что можно определять отдельные компоненты тензора $m_{\alpha\beta}$. В част-

ности, «поперечная масса» легко находится при движении заряженной частицы в магнитном поле (см. § 5.5); «продольная масса» — при движении заряженной частицы без начальной скорости в однородном электрическом поле. Но если говорить в целом о всех опытах с релятивистскими частицами, то проще сказать, что они подтверждают релятивистское уравнение движения. В двух рассмотренных частных случаях, когда уравнение движения похоже на ньютоновское (направления ускорения и силы совпадают), уравнение движения выглядит действительно так, как будто масса изменилась из-за наличия скорости. Однако это изменение для этих двух случаев разное. Во всех остальных случаях уравнение движения существенно отличается от ньютоновского. Не принимая во внимание это обстоятельство, можно столкнуться с парадоксами (см. § 8.2).

Если в релятивистской механике пользоваться только массой покоя, то с методической точки зрения существенно, что понятие массы, введенное в школе, остается неизменным. «Наглядное» понятие массы покоя осваивается обычным образом из ньютоновской механики; эта же масса входит и в релятивистские соотношения динамики, но она уже не может быть определена как отношение силы к ускорению. Зато она может быть определена согласно (5.68). Масса покоя — это просто масса, используемая в ньютоновской механике.

Действительно, при $\beta \ll 1$ формула (5.37б) переходит в (5.37а), поскольку в этом случае $\gamma \sim 1$. А определение массы в ньютоновской механике осложнений не вызывает. Гораздо существеннее подчеркнуть, что в релятивистской механике вступают в игру особенности пространства-времени и изменяются законы механики, но инвариантную массу покоя как характеристику частицы мы сохраняем.

Иногда пытаются связать рост энергии частицы (или системы) с ростом массы. Это также излишняя интерпретация. Зависимость (5.46) показывает, что все виды энергии одинаковым образом возрастают, если частица (система) рассматривается не в собственной системе отсчета.

Трансформационные свойства «релятивистской массы» также весьма неудовлетворительны. «Релятивистская масса», пропорциональная энергии частицы, должна преобразовываться, как четвертая компонента 4-вектора энергии-импульса. В отличие от нее масса покоя представляет собой, как мы уже говорили, инвариант, характеризующий — подобно заряду — элементарную частицу. Иногда указывают на то, что масса покоя может не сохраняться (см. § 5.6), а «релятивистская масса» сохраняется всегда, если соблюдается закон сохранения энергии. Но вместе с тем сохранение релятивистской массы ровным счетом ничего не дает по сравнению с законом сохранения энергии — это просто

следствие закона сохранения энергии. Таким образом, закон «сохранения» релятивистской массы — это просто избыточное уравнение.

Введение релятивистской массы частиц и закона «сохранения» этой массы влечет за собой введение «массы фотона» $h\nu/c^2$. Мы специально рассмотрели в § 7.6 нецелесообразность использования этой величины.

Известно, что в качестве первых принципов СТО можно взять не два постулата Эйнштейна, а, например, его первый постулат и зависимость массы от скорости [32]. Формально можно построить СТО и на такой основе. Но от этого физический смысл релятивистской массы не становится, конечно, яснее. Стоит подчеркнуть, что постулаты Эйнштейна имеют явное преимущество перед другими возможными постулатами, поскольку они допускают прямую физическую интерпретацию и явно подчеркивают релятивистские особенности при определении координат события.

Хотя это и не аргумент, иногда ссылаются на то, что многие известные физики вводили релятивистскую массу. Но истина состоит в том, что большинство крупных физиков были против нее [9, 11, 34, 35]. Забавно, что Р. Фейнман после долгих разговоров о релятивистской массе написал:

«Как это ни странно, формула $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ очень редко употребляется на практике. Вместо этого незаменимыми оказываются два соотношения, которые легко доказать: $\mathcal{E}^2 - P^2c^2 = M_0^2c^4$ и $Pc = \mathcal{E}v/c$ ».

Подводя итоги, можно сказать, что инвариантная масса покоя имеет бесспорные преимущества, а релятивистская масса, ничего не прибавляя по существу, служит источником многих недоразумений.

V. Неинерциальные системы отсчета. СТО и переход к теории тяготения (ОТО). Среди всех возможных систем отсчета инерциальные системы отсчета выделяются с помощью законов динамики. Мы определили инерциальные системы как такие системы, в которых справедливы все три классических закона Ньютона. Третий закон Ньютона явно подчеркивал, что силы — это результат взаимодействия тел. В неинерциальных системах отсчета сохранить все три закона уже невозможно. Если сохранить второй закон, то приходится вводить силы, не удовлетворяющие третьему закону, — силы инерции. На двух элементарных примерах мы напомним, как это делается.

Система отсчета в СТО — это твердое тело; самое общее движение твердого тела — комбинация поступательного движения и вращения. Произвольное движение неинерциальной системы отсчета относительно инерциальной представляет собой сложение ускоренного поступательного движения и вращения (равномер-

ного или ускоренного). Равномерное поступательное движение оставляет нас в пределах инерциальных систем. Наши примеры относятся к ускоренному поступательному движению и равномерному вращению.

Пример 1. По наклонной плоскости скатывается без трения тележка, масса которой равна M . На тележке на нитке подвешен тяжелый шарик массы m . Найти угол, который составляет нить с шариком с нормалью к наклонной плоскости (рис. Д.7) при установившемся движении.

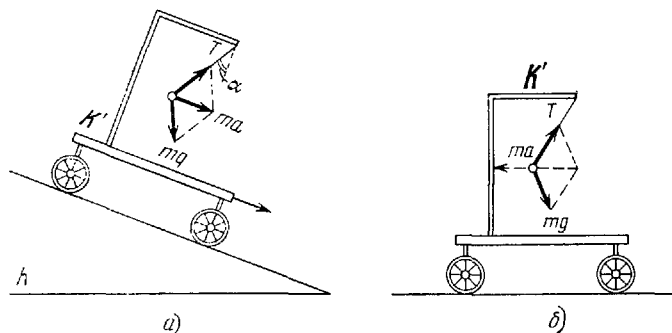


Рис. Д.7. а) Тележка с подвешенным шариком скатывается с наклонной плоскости с постоянным ускорением a . При установившемся движении нить маятника несколько отклонена от нормали к наклонной плоскости. Складываясь, сила тяжести и натяжение нити дают равнодействующую, сообщаящую шарiku необходимое для движения вместе с тележкой ускорение a . Так рассуждает наблюдатель в инерциальной системе K , связанной с «неподвижной» наклонной плоскостью. В этой системе справедлив закон динамики Ньютона — ускорения вызываются только силами. б) Рассматриваются та же тележка и шарик, но с точки зрения системы K' , связанной с ускоренно движущейся тележкой. Это уже неинерциальная система, и в ней нужно ввести силу инерции — ma . Шарик покоится относительно тележки, поэтому сумма трех действующих на него сил — тяжести, натяжения нити, инерции — должна обращаться в нуль. Легко видеть, что угол отклонения нити от нормали к плоскости тележки получается одинаковым как при рассуждении а), так и при рассуждении б), что и должно быть.

а) Рассуждение с точки зрения инерциальной системы координат K (связанной с наклонной плоскостью). Тележка движется равноускоренно, с ускорением $a = g \sin \alpha$, направленным параллельно наклонной плоскости. Если шарик покоится относительно тележки, то он тоже должен испытывать такое же ускорение. Но ускорение может возникнуть лишь за счет сил. А на шарик действуют только две силы — сила тяжести и натяжение нити. Чтобы они дали равнодействующую, параллельную наклонной плоскости, нужно, чтобы они были расположены под углом. Зная направление ускорения одной из сил (силы тяжести), легко найти графически направление и величину второй силы (натяжения нити).

б) Рассуждение с точки зрения неинерциальной системы координат K' (связанной с тележкой и шариком). В этой системе

шарик просто покоится. Значит, сумма всех действующих на шарик сил равна нулю. Но, кроме силы тяжести и натяжения нити, мы должны учесть также еще и силу инерции — ma . Легко видеть, что мы приходим к тому же самому результату.

Пример 2. Шарик массы m , подвешенный на нитке, помещен на центробежной машине, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω (рис. Д.8). Шарик находится на расстоянии r от оси вращения. Найти угол отклонения нити маятника от вертикали.

а) Рассуждение с точки зрения инерциальной системы координат K , связанной с «неподвижной» подставкой центробежной

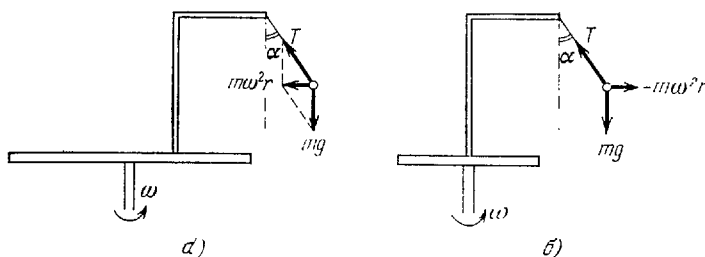


Рис. Д.8. а) Вместе с диском центробежной машины вращается шарик, подвешенный на нити к подвесу. При установившемся движении нить маятника несколько отклонена от вертикали в сторону от оси вращения. Складываясь, натяжение нити и сила тяжести дают равнодействующую, обеспечивающую необходимую для вращения шарика центростремительную силу, равную $m\omega^2 r$ и направленную к оси вращения. Это рассуждение относится и наблюдателю в инерциальной системе K , находящемуся вне вращающегося диска. В этой системе справедлив второй закон Ньютона и центростремительное ускорение создается за счет сложения двух «настоящих» сил. б) Наблюдатель, расположенный на вращающемся диске, т. е. находящийся в неинерциальной системе K' , будет описывать то же явление иначе. В системе K' шарик покоится, значит, сумма всех действующих на него сил равна нулю. А действующих сил теперь уже три: натяжение нити, сила тяжести и сила инерции, равная $-m\omega^2 r$. Складываясь, они дают суммарную силу, равную нулю. Как из рассуждения а), так и из рассуждения б) вытекает, что угол α имеет одно и то же значение.

машины. Чтобы шарик мог двигаться вместе с нитью, он должен испытывать центростремительное ускорение $m\omega^2 r$. Но оно может быть обеспечено лишь за счет отклонения нити от вертикали; тогда результирующая сил тяжести и натяжения нити при определенном отклонении нити от вертикали может обеспечить требуемое центростремительное ускорение.

б) Рассуждение с точки зрения неинерциальной системы координат K' , связанной с вращающейся площадкой. В этой системе шарик покоится. Значит, равнодействующая всех сил, действующих на шарик, равна нулю. Кроме силы тяжести и натяжения нити, нужно ввести еще и центробежную силу инерции — $m\omega^2 r$. Угол отклонения нити от вертикали α в обоих случаях оказывается, конечно, одним и тем же.

Два приведенных примера показывают, как с помощью сил инерции можно сохранить второй закон Ньютона и в неинерциальных системах координат.

Рассмотренные случаи не охватывают некоторые другие типы «сил инерции», но существенные особенности сил инерции уже видны на этих примерах. Силы инерции пропорциональны «инертной» массе тела; они либо остаются постоянными во всем пространстве (пример 1), либо неограниченно растут при неограниченном удалении от оси вращения (пример 2).

Уже Галилей знал, что все тела на Земле падают одинаково быстро, т. е. то, что сила тяготения сообщает всем телам одинаковое ускорение. Но тем же свойством обладают и силы инерции. Таким образом, материальные тела одинаково реагируют на силы инерции и силы тяготения. Из опыта известна еще одна особенность сил тяготения: от них нет защиты (от всех других сил, в принципе можно избавиться). Именно поэтому невозможна прямая опытная проверка первого закона Ньютона на Земле или в околоземном пространстве. Ньютон прямо указывал, что для проверки этого закона нужно уйти туда, где полей тяготения нет; поэтому в гл. 1 подчеркивалось, что первый закон Ньютона — это предположение.

Теория тяготения Эйнштейна, возможно, зародилась тогда, когда у Эйнштейна возникла мысль о равноправии любых систем отсчета. Эта мысль кажется противоречащей всему тому, о чем шла речь в этой книге, в которой все время подчеркивалась особая роль инерциальных систем отсчета. Но не будем торопиться.

Если ни от тяготения, ни от инерции избавиться нельзя, можно попробовать считать инерцию и тяготение разными сторонами одного и того же явления. Тогда первый закон Ньютона придется сформулировать уже по-новому. Первая часть ньютоновской формулировки останется без изменения: свободное движение тела — это такое движение, при котором на тело не действуют силы, причем тяготение мы исключаем из категории «сил». Раньше, у Ньютона, свободное движение означало равномерное прямолинейное движение. Теперь, по Эйнштейну, свободное движение происходит по инерции и под действием сил тяготения. Тяготение теперь — это уже вовсе не сила. О действии сил говорят теперь лишь тогда, когда движение тела отклоняется от свободного движения, которое в ньютоновской схеме называлось свободным падением. По Эйнштейну, инерция и тяготение вместе обуславливают «свободное» движение, составляют его «фон».

Конечно, свободное движение в эйнштейновском смысле происходит отнюдь не по прямой линии. Однако прямая в евклидовой геометрии (на которую опирается ньютоновская механика) — это кратчайшая линия, соединяющая две заданные точки (или, как

еще говорят математики, геодезическая линия). Это обстоятельство нам придется припомнить пескольку позже.

Вернемся к выводам, полученным в начале этого Дополнения. Переход к неинерциальным системам отсчета имитировал появление сил инерции, пропорциональных инертной массе тела. Если вспомнить, что тяжелая и инертная массы равны между собой (или пропорциональны), то из первого примера становится ясным, что переход к системе отсчета, движущейся поступательно, но с ускорением, имитирует появление однородного поля тяготения, величина которого равна $-ta$. Из второго примера видно, что переход к равномерно вращающейся системе отсчета также приводит к появлению некоторого поля сил, пропорционального массе тела. В общем случае можно утверждать, что переход к неинерциальным системам отсчета имитирует некоторое гравитационное поле. Эти поля имеют некоторую особенность, отличающую их от «истинных» гравитационных полей: они не исчезают на бесконечности, но исчезают при переходе к инерциальным системам отсчета.

Мы видели, что переход от одной ИСО к другой оставлял неизменным квадрат интервала между событиями

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (\text{Д.V.1})$$

Если совершить переход от инерциальной системы отсчета к неинерциальной, то ds^2 меняет свою общую форму. Действительно, рассмотрим два примера перехода от инерциальной системы к неинерциальной.

Пример 1. Система координат K' движется равноускоренно относительно K по прямой с ускорением a :

$$\begin{aligned} x &= x' + at^2/2, & dx &= dx' - at' dt'; \\ y &= y', & dy &= dy'; \\ z &= z', & dz &= dz'; \\ t &= t', & dt &= dt'. \end{aligned}$$

Если K — инерциальная система и

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

то в системе K' :

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - (dx' + at' dt')^2 - dy'^2 - dz'^2,$$

или

$$ds^2 = (c^2 - a^2 t'^2) dt'^2 - 2at' dx' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.$$

Пример 2. Равномерно вращающаяся система координат (угловая скорость вращения Ω); из формул Приложения (П.1.10)

получаем ($\theta = \Omega t$)

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t, \\y &= x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t.\end{aligned}$$

Петрудно получить, что ds^2 преобразуется к виду

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2 (x'^2 + y'^2)] dt^2 + 2\Omega y' dx' dt' - 2\Omega x' dy' dt' - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.$$

Можно показать, что в обоих случаях никаким преобразованием времени нельзя привести ds^2 к алгебраической сумме квадратов дифференциалов четырех координат.

Итак, в общем случае переход к неинерциальным системам меняет выражение для (инвариантного) интервала между событиями, причем так, что оно уже не сводится к «галилееву» виду (D.V.1). Пусть метрика 4-пространства в общем случае записывается в виде

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (\text{D.V.2})$$

где g_{ik} зависят от всех четырех координат, а по индексам i и k подразумевается суммирование. Отличие метрики 4-пространства (D.V.2) от галилеевой (D.V.1), в соответствии с идеями Эйнштейна, можно отнести за счет наличия тяготения. Таким образом, отличие g_{ik} от галилеевых значений ($g_{00} = c^2$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$) отражает присутствие полей тяготения. Но поля тяготения связаны с наличием вещества. Таким образом, геометрические свойства пространства-времени (метрика) вовсе не являются его неизменными свойствами, а зависят от физических объектов, находящихся в этом пространстве-времени. Знание метрики пространства-времени позволяет ответить на основные вопросы, которые обычно интересуют физиков. Возникает вопрос: откуда можно найти эти g_{ik} ? Эйнштейн сумел написать систему (нелинейных) дифференциальных уравнений в частных производных, которым должны удовлетворять десять величин g_{ik} . Эти величины зависят от распределения вещества и электромагнитного излучения. Уравнения Эйнштейна удалось решить лишь в нескольких частных случаях.

Подведем кратко итоги. Переход к неинерциальным системам отсчета вызывал появление метрических коэффициентов g_{ik} , отличных от галилеевых, и имитировал появление некоторого поля сил, пропорционального массе. Поэтому можно было думать, что эти значения g_{ik} и отражают наличие поля сил, сходного с полем сил тяготения. По поводу «истинных» полей тяготения, сохраняющихся и при переходе к инерциальным системам отсчета, делается аналогичное предположение. Отсюда ясно, что если в инерциальной системе отсчета квадрат интервала определяется согласно (D.V.1), то это значит, что поля тяготения отсутствуют.

Отличие полей, возникающих при переходе к неинерциальным системам отсчета, от истинных полей состоит в том, что g_{ik} , соответствующие «истинным» полям, не могут быть приведены к галилееву виду (Д.V.1) никаким преобразованием времени и координат. С геометрической точки зрения 4-пространство-время, включающее в себя поля тяготения, оказывается уже не плоским. Оно — кривое. Но здесь нам следует поставить точку и отослать читателя к специальной литературе (см., например, [31]).

Необходимо только отметить следующее. В земных условиях мы с успехом применяем СТО, т. е. пользуемся интервалом (Д.V.1), наряду с тем, что применяем ньютоновскую теорию тяготения, т. е. считаем тяготение силой. Теория тяготения Ньютона явно нерелятивистская, она представляет собой теорию дальнего действия. И при всем том — результаты отличные (например, расчет движения небесных тел). Но теория Эйнштейна предсказывает, что именно так и должно быть; конечно, в определенных условиях. Именно в «слабых» гравитационных полях (а в пределах Солнечной системы гравитационные поля слабые; здесь не место приводить точные критерии) уравнения тяготения Эйнштейна сводятся к уравнению тяготения Ньютона (уравнению Пуассона). Что касается скоростей небесных тел, то они всегда нерелятивистские.

ХРОНОЛОГИЯ СОБЫТИЙ, СВЯЗАННЫХ С ИСТОРИЕЙ СТО

(см. Дополнение I)

- Выход в свет книги Галилея «Диалоги о двух главнейших системах мира — птоломеевой и коперниканской», 1632 г.
Первое определение скорости света, Ремер, 1676 (5?) г.
Выход в свет книги Ньютона «Математические начала натуральной философии», 1687 г.
Открытие аберрации света, Бредли, 1728 г.
Принцип Доплера, 1842 г.
Опыт Фуко с маятником, 1851 г.
Лабораторные определения скорости света, Физо, 1849 г., Фуко, 1862 г.
Определение скорости распространения света в движущейся воде, Физо, 1851 г.
Создание теории электромагнитного поля, Максвелл, 1856—1864 гг.
Первый опыт Майкельсона, 1881 г.
Выход книги Э. Маха «Механика», 1883 г.
Улучшенный опыт Майкельсона, 1887 г.
Открытие радиоактивности, Беккерель, 1896 г.
Открытие электрона, Дж. Дж. Томсон, 1894—1896 гг.
Исследования Кауфмана по движению релятивистских частиц в электромагнитном поле, 1902 г.
Работы Лоренца, посвященные электродинамике движущихся тел, 1892—1904 гг.
Работы Пуанкаре, связанные с релятивистскими идеями, 1895—1905 гг.
Речь Пуанкаре в Сан-Луисе, 1904 г.
Работа Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел», Ann. d. Phys. 17, 891 (1905).
Доклад Минковского «Пространство и время», Phys. Zs. 10, 104 (1909).
Даты рождения и смерти основоположников науки о пространстве и времени.
- | | |
|----------------------|------------------------|
| Коперник (1473—1543) | Доплер (1803—1853) |
| Галилей (1564—1642) | Максвелл (1831—1879) |
| Кеплер (1571—1630) | Лоренц (1853—1928) |
| Декарт (1596—1650) | Пуанкаре (1854—1912) |
| Гюйгенс (1629—1695) | Минковский (1864—1909) |
| Ньютон (1643—1727) | Эйнштейн (1879—1955) |

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Здесь содержатся некоторые сведения из математики, необходимые для чтения этой книги.

§ 1. Симметричные обозначения, правила суммирования. Когда в трехмерном пространстве вводят прямолинейную ортогональную (декартову) систему координат, то единичные векторы, направленные вдоль осей x, y, z , соответственно обозначают через i, j, k . Положение любой точки пространства задается радиус-вектором $r = xi + yj + zk$, компонентами которого являются координаты точки. Но все направления в пространстве равноправны, и поэтому целесообразно для координат и единичных векторов ввести симметричные обозначения и писать, например, вместо $x, y, z \Rightarrow x_1, x_2, x_3$, а вместо $i, j, k \Rightarrow m_1, m_2, m_3$. Тогда радиус-вектор точки запишется в виде

$$r \equiv x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 = \sum_{\alpha=1}^3 x_{\alpha} m_{\alpha}, \quad (\text{П. I. 1})$$

где в последнем равенстве введено обозначение суммы \sum и суммирование произведено по значениям α от 1 до 3. Но знак суммы в последнем звене равенства можно и не писать, если раз навсегда условиться, что по двум одинаковым греческим индексам, стоящим в одной части равенства, подразумевается суммирование от 1 до 3.

В специальной теории относительности вводится четырехмерное пространство с четырьмя координатами $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, x_4 = ict$. Тогда радиус-вектор и другие векторы будут иметь уже по четыре компоненты. Правило суммирования сохраняется и в этом случае, но суммирование ведется уже по латинским индексам, пробегающим все значения от 1 до 4. Например,

$$A_i B_i \equiv \sum_{i=1}^4 A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4.$$

Итак, правило сокращенного суммирования состоит в том, что по двум индексам, стоящим в одной части равенства, ведется суммирование, причем если индексы латинские — то от 1 до 4.

Вернемся к трехмерному случаю. Радиус-вектор, записанный раньше в виде (П. I. 1), можно записать сокращенно в виде $r = x_{\alpha} m_{\alpha}$, а произвольные векторы a и b — в виде

$$a = a_{\alpha} m_{\alpha} = a_{\beta} m_{\beta} = a_{\gamma} m_{\gamma}, \quad b = b_{\alpha} m_{\alpha} = b_{\beta} m_{\beta} = b_{\gamma} m_{\gamma}.$$

Здесь одно и то же равенство выписано несколько раз, чтобы показать, что индексы суммирования «пемые», т. е. что суммирование можно вести по любой букве, не меняя результата.

В качестве примера использования сокращенной записи суммирования выведем формулу для скалярного произведения двух векторов a и b . В первых,

$$ab = a_{\alpha} m_{\alpha} b_{\beta} m_{\beta} = a_{\alpha} b_{\beta} m_{\alpha} m_{\beta}. \quad (\text{П. I. 2})$$

Здесь учтено, что правило суммирования относится к двум индексам; в выражении (П.1.2) два суммирования; поэтому каждое из них ведется по своей букве. Во-вторых, единичные векторы взаимно ортогональны; поэтому каждый из векторов, умноженный на самого себя, дает единицу, а на любой другой — нуль. Поэтому

$$m_\alpha m_\beta = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (\text{П.1.3})$$

Удобно ввести особый символ — символ Кронекера, обладающий именно такими свойствами:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (\text{П.1.4})$$

Этот символ отличен от нуля лишь при $\alpha = \beta$, и поэтому любое суммирование с участием этого символа ведет к простому результату: $a_\alpha \delta_{\alpha\beta} = a_\beta$. Действительно,

$$a_\alpha \delta_{1\alpha} = a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{12} + a_3 \delta_{13} = a_1.$$

Теперь уже легко получить окончательный результат в (П.1.2):

$$ab = a_\alpha b_\beta m_\alpha m_\beta = a_\alpha b_\beta \delta_{\alpha\beta} = a_\alpha b_\alpha,$$

т. е. обычную формулу скалярного произведения векторов.

Одинаковые индексы, по которым ведется суммирование, могут оказаться в числителе и знаменателе дроби. Правило суммирования при этом сохраняется. Запишем, например, выражения для градиента функции f и дивергенции вектора a :

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} m_\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_1} m_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} m_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} m_3 = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k, \quad \text{div } a = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \end{aligned}$$

Если греческий (или латинский) индекс стоит один, то это значит, что он «свободный» и может принимать любое значение из трех (или четырех) возможных. Например, b_α обозначает одну из координат вектора b , а именно b_1, b_2 или b_3 .

§ 2. Преобразование координат при повороте декартовой системы. Пусть в «старой» системе координат радиус-вектор точки M представляется в виде $r = x_\alpha m_\alpha$. После поворота системы координат радиус-вектор той же самой точки M запишется в «новой» системе координат в виде $r = x'_\beta m'_\beta$, где x'_β — координаты точки в системе после поворота, а m'_β — новые координатные векторы. Нетрудно установить связь между координатами в старой и новой системах. Запишем равенство, выражающее «сохранение» вектора r :

$$x_\alpha m_\alpha = x'_\beta m'_\beta,$$

и умножим обе его части на m'_γ (т. е. на произвольный координатный вектор новой системы координат). Слева имеем

$$x_\alpha m_\alpha m'_\gamma = x_\alpha a_{\alpha\gamma},$$

где введено обозначение $m_\alpha m'_\gamma = \cos(m_\alpha, m'_\gamma) = a_{\alpha\gamma}$; таким образом, $a_{\alpha\gamma}$ представляет собой косинус угла между вектором m_α старой системы и вектором m'_γ новой. Справа имеем цепь равенств

$$x'_\beta m'_\beta m'_\gamma = x'_\beta \delta_{\beta\gamma} = x'_\gamma.$$

Таким образом,

$$x'_\gamma = a_{\alpha\gamma} x_\alpha \quad (\gamma = 1, 2, 3). \quad (\text{П.1.5})$$

Новые координаты выражаются через старые линейно, причем коэффициентами линейного преобразования являются косинусы углов между старыми и новыми координатными осями. Нам нужно найти еще коэффициенты разложения старых координатных векторов по новым. Запишем разложение старого вектора m_γ по новым:

$$m_\alpha = a_{\alpha\mu}^* m'_\mu, \quad (\text{П.1.6})$$

где $a_{\alpha\mu}^*$ — неизвестные коэффициенты. Чтобы найти их, умножим обе части этого равенства на m'_γ . Аналогично предыдущему,

$$a_{\alpha\gamma} = a_{\alpha\mu}^* \delta_{\mu\gamma} = a_{\alpha\gamma}^*. \quad (\text{П.1.7})$$

Мы получили очевидный результат: в разложение единичного вектора m_α по новым координатным векторам в качестве коэффициентов входят косинусы $a_{\alpha\gamma}$.

Косинусы углов между старыми и новыми векторами можно собрать в матрицу:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad (\text{П.1.8})$$

в обозначении $a_{\alpha\beta}$ первый индекс, α , указывает строку, а второй, β , — столбец матрицы (П.1.8). Итак, преобразование координат определяется девятью коэффициентами $a_{\alpha\beta}$. Однако известно, что положение любого твердого тела (в нашем случае — системы координат), одна точка которого неподвижна, может быть задано тремя параметрами (три угла Эйлера). Отсюда ясно, что среди коэффициентов $a_{\alpha\beta}$ независимых коэффициентов всего лишь три. Нетрудно найти соотношения, устанавливающие необходимые связи между коэффициентами $a_{\alpha\beta}$. Действительно, при повороте системы координат расстояние любой точки от начала отсчета не меняется: $r^2 = x_\beta^2 = x'_\alpha{}^2$. Но $x'_\alpha = a_{\beta\alpha} x'_\beta$. Чтобы возвести это выражение в квадрат, нужно перемножить суммы, индексы суммирования в которых следует взять различными:

$$x'_\alpha{}^2 = x'_\alpha x'_\alpha = a_{\beta\alpha} x'_\beta a_{\gamma\alpha} x'_\gamma = a_{\beta\alpha} a_{\gamma\alpha} x'_\beta x'_\gamma.$$

Но, с другой стороны, это выражение равно x_β^2 . Это может быть лишь в том случае, если

$$a_{\beta\alpha} a_{\gamma\alpha} = \delta_{\beta\gamma} \quad (\beta, \gamma = 1, 2, 3). \quad (\text{П.1.9})$$

Здесь на первый взгляд девять условий, но эти равенства не меняются при перестановке индексов β и γ . Следовательно, независимых равенств здесь шесть. Каждое из них представляет собой произведение β -й строки матрицы (П.1.8) на γ -ю строку (при перемножении строк матрицы складываются попарные произведения соответствующих элементов). Смысл равенства (П.1.9) состоит в том, что произведение любой строки на себя равно единице, а на любую другую — нулю. Поскольку порядок перемножения строк роли не играет (например, произведение первой строки на вторую равно произведению второй строки на первую), то число независимых равенств, как указывалось, не девять, а шесть.

Полученные соотношения лучше всего иллюстрируются примером поворота осей в координатной плоскости (x_1, x_2) . В этом случае

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2, \quad x'_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2,$$

причем (рис. П.1)

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \vartheta, & a_{21} &= \sin \vartheta, \\ a_{12} &= -\sin \vartheta, & a_{22} &= \cos \vartheta, \end{aligned}$$

и поэтому

$$x'_1 = x_1 \cos \vartheta + x_2 \sin \vartheta, \quad x'_2 = -x_1 \sin \vartheta + x_2 \cos \vartheta. \quad (\text{П.1.10})$$

Если перейти к привычным обозначениям $x_1 = x$, $x_2 = y$, то мы получим всем известные формулы аналитической геометрии:

$$x' = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta, \quad y' = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta.$$

Этими формулами вам пришлось воспользоваться при выводе преобразования Лоренца. Мы получили формулы прямого перехода (от нештрихованной системы к штрихованной).

Формулы обратного перехода получаются аналогичным путем. Мы их выпишем вместе с формулами прямого перехода:

$$\begin{aligned} x'_\alpha &= a_{\beta\alpha}x_\beta, & m'_\alpha &= a_{\beta\alpha}m_\beta, \\ x_\alpha &= a_{\alpha\beta}x'_\beta, & m_\alpha &= a_{\alpha\beta}m'_\beta, \end{aligned} \quad (\text{П.1.11})$$

причем

$$a_{\alpha\beta} = m_\alpha m'_\beta = \cos(m_\alpha m'_\beta).$$

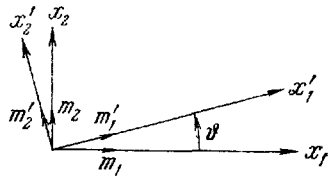


Рис. П.1. Иллюстрация общих формул преобразования координат на примере поворота декартовой системы на плоскости. Такой поворот определяется одним параметром ϑ . Углы между старыми и новыми координатными векторами видны на рисунке.

Конечно, формулы обратного перехода в (П.1.11) можно получить автоматически, сделав взаимный обмен штрихованных величин с нештрихованными и заменив угол ϑ на $-\vartheta$ (что соответствует повороту в обратном направлении).

Как преобразуются компоненты векторов при преобразовании координат? Это нетрудно установить тем же самым приемом, которым мы нашли формулы преобразования координат. Но этого можно и не делать, заметив, что координаты — это тоже компоненты вектора, а именно радиус-вектора. Поэтому ясно, что компоненты векторов преобразуются, как координаты, т.е.

$$b'_\alpha = a_{\beta\alpha}b_\beta. \quad (\text{П.1.12})$$

Как мы уже упоминали, четырехмерное (псевдоевклидово) пространство, которое рассматривается в специальной теории относительности, включает в себя формально одну мнимую координату, связанную со временем:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict.$$

Преобразования Лоренца соответствуют линейным преобразованиям в этом пространстве:

$$x'_i = \alpha_{ik}x_k, \quad x_i = \alpha_{ih}x'_h, \quad (\text{П.1.13})$$

причем

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -i\Gamma V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\Gamma V & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad (\text{П. I. 14})$$

здесь, V — относительная скорость двух систем отсчета.

Коэффициенты преобразований Лоренца α_{ik} удовлетворяют следующим условиям:

$$\alpha_{ki}\alpha_{km} = \delta_{im}. \quad (\text{П. I. 15})$$

Эти равенства означают, что произведение строк матрицы преобразований Лоренца дает единицу, если строка умножается сама на себя, и нуль, если строка умножается на любую другую.

Вычислим определитель матрицы Лоренца *)

$$\begin{vmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -i\Gamma V \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\Gamma V & 0 & 0 & \Gamma \end{vmatrix} = \Gamma^2 + (-i\Gamma V)(-i\Gamma V) = \Gamma^2(1 - V^2) = 1$$

(проще всего разложить определитель по элементам первой строки). Определитель матрицы Лоренца оказался равным единице. Это означает, что мы имеем дело с собственными преобразованиями Лоренца, т. е. не переходим от правых троек координатных векторов к левым.

Запишем прямое и обратное преобразования Лоренца для координат в развернутой форме:

$$x_1 = \Gamma(x'_1 - iVx'_4), \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_4 = \Gamma(x'_4 + iVx'_1), \quad (\text{П. I. 16})$$

$$x'_1 = \Gamma(x_1 + iVx_4), \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = \Gamma(x_4 - iVx_1). \quad (\text{П. I. 17})$$

Что касается компонент 4-векторов, то они преобразуются, как координаты, и, следовательно, для вектора \vec{A} (A_1, A_2, A_3, A_4) (4-векторы мы отмечаем стрелками) мы получим

$$A'_i = \alpha_{ik}A_k, \quad A_i = \alpha_{ik}A'_k. \quad (\text{П. I. 18})$$

$$A'_1 = \Gamma(A_1 + iVA_4), \quad A'_2 = A_2, \quad A'_3 = A_3, \quad A'_4 = \Gamma(A_4 - iVA_1), \quad (\text{П. I. 19})$$

$$A_1 = \Gamma(A'_1 - iVA'_4), \quad A_2 = A'_2, \quad A_3 = A'_3, \quad A_4 = \Gamma(A'_4 + iVA'_1). \quad (\text{П. I. 20})$$

Из (П. I. 15) непосредственно вытекает инвариантность скалярного произведения двух 4-векторов при преобразованиях Лоренца. Действительно, пусть $A_i = \alpha_{ik}A'_k$, $B_i = \alpha_{im}B'_m$, тогда

$$\vec{A}\vec{B} = A_iB_i = \alpha_{ik}A'_k\alpha_{im}B'_m = \alpha_{ik}\alpha_{im}A'_kB'_m = \delta_{km}A'_kB'_m = A'_kB'_k.$$

Сравнение второго и последнего звена выписанной цепи равенств и доказывает инвариантность скалярного произведения $\vec{A}\vec{B}$.

§ 3. Тензоры. Векторные величины являются частным случаем математических величин более сложного характера — тензоров. Чтобы перейти к ним, постараемся подчеркнуть, что главное в определении вектора. В заданной координатной системе вектор представляет собой направленный отрезок,

*) Элементарные сведения об определителях можно найти в § 6 этого Приложения. Там же вычислен и этот определитель.

характеризуемый своими координатами. Но поскольку выбор координатной системы дело случайное, то и координаты вектора имеют случайный характер. Существенно, однако, то, что по заданным координатам вектора в одной декартовой системе координат можно найти его декартовы координаты в любой другой системе по формулам (П.1.5). Именно эти формулы преобразования и определяют вектор. Таким образом, векторная природа величин раскрывается при преобразовании координат.

Чтобы познакомиться с понятием тензора на конкретном примере, напомним, как в электростатике вводится связь между вектором электрической индукции D и напряженностью внешнего электрического поля E . Вообще говоря, зависимость $D = D(E) = D(E_1, E_2, E_3)$ неизвестна. Запишем D через компоненты D_α :

$$D(E) = D_\alpha(E) m_\alpha = D_\alpha(E_1, E_2, E_3) m_\alpha.$$

Принимая, что в отсутствие внешнего поля ($E = 0$) вектор D также равен нулю ($D(0) = 0$), и считая, что внешнее поле мало (по сравнению с электрическими силами, действующими между молекулами вещества), можно разложить неизвестную векторную функцию D в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\partial D_1(0)}{\partial E_1} E_1 + \frac{\partial D_1(0)}{\partial E_2} E_2 + \frac{\partial D_1(0)}{\partial E_3} E_3 + \dots = \frac{\partial D_1(0)}{\partial E_\beta} E_\beta + \dots, \\ D_2 &= \frac{\partial D_2(0)}{\partial E_\beta} E_\beta + \dots, \quad D_3 = \frac{\partial D_3(0)}{\partial E_\beta} E_\beta + \dots, \end{aligned} \quad (\text{П.1.21})$$

где по индексам β ведется суммирование. В силу малости поля E его компоненты E_1, E_2, E_3 тоже малы (фактически это хорошее приближение для реальных полей, за исключением полей, достигаемых в лазерных лучах), и можно ограничиться линейными членами, пренебрегая всеми остальными. Введем обозначение для постоянных величин (производных в нулевой точке):

$$\frac{\partial D_\alpha(0)}{\partial E_\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}.$$

Тогда полученные выражения можно записать в виде

$$\begin{aligned} D_1 &= \epsilon_{11}E_1 + \epsilon_{12}E_2 + \epsilon_{13}E_3, \\ D_2 &= \epsilon_{21}E_1 + \epsilon_{22}E_2 + \epsilon_{23}E_3, \\ D_3 &= \epsilon_{31}E_1 + \epsilon_{32}E_2 + \epsilon_{33}E_3 \end{aligned} \quad (\text{П.1.22})$$

или сокращенно:

$$D_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}E_\beta. \quad (\text{П.1.23})$$

По компонентам легко построить сам вектор D :

$$D = \epsilon_{\alpha\beta}E_\beta m_\alpha. \quad (\text{П.1.24})$$

Связь между двумя векторами, выражаемая формулами (П.1.23) и (П.1.24), называется линейной векторной функцией; другими словами, вектор D является линейной векторной функцией E .

На основании формул (П.1.24) по заданному вектору E в каждой точке диэлектрика в той системе координат, в которой известны коэффициенты $\epsilon_{\alpha\beta}$, можно построить вектор D . Но выбор системы координат дело случайное. При повороте декартовой системы координат меняются компоненты векторов, но сами векторы остаются неизменными. Вопрос состоит в том, как должны меняться коэффициенты $\epsilon_{\alpha\beta}$, чтобы в новой системе сохранилась связь $D' = \epsilon'_{\mu\lambda}E'_\lambda m'_\mu$, причем $D = D'$. Это означает, что мы должны иметь два разложения одного и того же вектора:

$$D = \epsilon_{\alpha\beta}E_\beta m_\alpha = \epsilon'_{\mu\lambda}E'_\lambda m'_\mu. \quad (\text{П.1.25})$$

По закон преобразования компонент векторов и координатных векторов известен (см. (П. I. 11)): $E_\beta = a_{\beta\lambda} E'_\lambda$, $m_\alpha = a_{\alpha\mu} m'_\mu$, и левую часть (П. I. 25) можно переписать согласно этим формулам, оставив правую без изменения:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} a_{\beta\lambda} a_{\alpha\mu} E'_\lambda m'_\mu = \varepsilon'_{\mu\lambda} E'_\lambda m'_\mu.$$

Сравнивая коэффициенты при $E'_\lambda m'_\mu$ слева и справа, находим закон преобразования коэффициентов $\varepsilon_{\alpha\beta}$:

$$\varepsilon'_{\mu\lambda} = a_{\beta\lambda} a_{\alpha\mu} \varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (\text{П. I. 26})$$

Сопоставим этот закон преобразования с законом преобразования координат:

$$x'_\lambda = a_{\beta\lambda} x_\beta. \quad (\text{П. I. 27})$$

Сравнение (П. I. 27) и (П. I. 26) показывает, что каждый индекс у $\varepsilon_{\alpha\beta}$ преобразуется по закону, соответствующему правилу преобразования координат.

Закон преобразования (П. I. 26) представляет собой закон преобразования тензора. Обратное преобразование, очевидно, имеет вид $\varepsilon_{\mu\lambda} = a_{\lambda\beta} a_{\mu\alpha} \varepsilon'_{\alpha\beta}$.

Дадим теперь общее определение тензора: если в данной декартовой системе координат заданы девять величин $\varepsilon_{\alpha\beta}$, которые при преобразовании координат $x'_\alpha = a_{\beta\alpha} x_\beta$ преобразуются по формулам

$$\varepsilon'_{\alpha\beta} = a_{\gamma\alpha} a_{\mu\beta} \varepsilon_{\gamma\mu}, \quad (\text{П. I. 28})$$

то эти девять величин образуют тензор второго ранга. Нетрудно понять, что векторы преобразуются, как тензоры первого ранга. Ранг тензора (или, как еще говорят, валентность тензора) определяется числом его индексов. В нашем случае их два. В этой книге тензоры более высокого ранга почти не используются. Тензор определяется для пространства определенного числа измерений, поскольку в закон его преобразования входят компоненты матрицы преобразования. Мы рассматривали трехмерное пространство, и греческие индексы $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ изменялись от одного до трех.

Мы хотели бы подчеркнуть две особенности преобразования тензоров:

1) Закон преобразования коэффициентов линейной векторной функции (тензора) получен как условие инвариантной физической связи между векторами.

2) Любая компонента тензора в «новой» системе координат представляет собой линейную комбинацию всех компонент тензора в «старой» системе.

Отметим, как полезный частный случай преобразование трехмерного тензора второго ранга $T_{\alpha\beta}$, у которого отлична от нуля лишь одна компонента T_{11} , при плоском повороте. Отличными от нуля в штрихованной системе будут лишь (см. (П. I. 28) и (П. I. 10))

$$\begin{aligned} T'_{11} &= a_{1\alpha} a_{\mu 1} T_{\lambda\mu} = a_{11}^2 T_{11} = T_{11} \cos^2 \vartheta, \\ T'_{12} &= a_{1\alpha} a_{\mu 2} T_{\lambda\mu} = a_{11} a_{12} T_{11} = -T_{11} \sin \vartheta \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (\text{П. I. 29})$$

Эти формулы встретятся нам неоднократно.

В специальной теории относительности работают в четырехмерном (псевдоевклидовом) пространстве. Мы уже рассмотрели правила преобразования 4-векторов в этом пространстве (согласно нашему определению вектор — это тензор первого ранга). В 4-пространстве правила преобразования тензоров фактически не меняются, только число компонент тензора увеличивается до шестнадцати, а суммирование ведется от 1 до 4:

$$A_{ik} = \alpha_{im} \alpha_{\lambda k} A'_{m\lambda}, \quad A'_{ik} = \alpha_{mi} \alpha_{\lambda k} A_{m\lambda}. \quad (\text{П. I. 30})$$

Тензор называется симметричным, если его компоненты удовлетворяют равенству $A_{ik} = A_{ki}$. У такого тензора всего лишь десять независимых ком-

понт. Примером симметричного тензора может служить тензор энергии-импульса-натяжений электромагнитного поля.

Тензор называется антисимметричным, если его компоненты удовлетворяют равенству $A_{ik} = -A_{ki}$. Ясно, что элементы этого тензора с двумя одинаковыми индексами ($i = k$) равны нулю, так как единственная величина, равная самой себе с обратным знаком, — это нуль. Таким образом, всего независимых компонент у антисимметричного тензора шесть (в связи с этим его иногда называют шестивектором). Примером антисимметричного тензора может служить тензор электромагнитного поля.

Тензор называется единичным, если $A_{ik} = \delta_{ik}$. Легко обнаружить, что тензор δ_{ik} сохраняет свой вид при преобразованиях Лоренца во всех системах отсчета. Действительно, пусть $A_{ml} = \delta_{ml}$, тогда согласно (П.1.30)

$$A'_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kl}A_{ml} = \alpha_{im}\alpha_{kl}\delta_{ml} = \alpha_{im}\alpha_{km} = \delta_{ik};$$

последний переход сделан согласно (П.1.5).

Выпишем для справки формулы преобразования тензора второго ранга T_{ik} при преобразованиях Лоренца, т. е. формулы перехода от системы K' к системе K (формулы обратного перехода получаются изменением знака у V и заменой стрихованных величин на нестрихованные и обратно):

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= \alpha_{11}^2 T'_{11} + \alpha_{14}\alpha_{11}(T'_{41} + T'_{14}) + \alpha_{44}^2 T'_{44} = \\ &= \Gamma^2 \{T'_{11} - iV(T'_{14} + T'_{41}) - V^2 T'_{44}\}, \\ T_{12} &= \alpha_{11}T'_{12} + \alpha_{14}T'_{42} = \Gamma(T'_{12} - iVT'_{42}), \\ T_{13} &= \alpha_{11}T'_{13} + \alpha_{14}T'_{43} = \Gamma(T'_{13} - iVT'_{43}), \\ T_{14} &= \alpha_{11}\alpha_{41}T'_{11} + \alpha_{14}\alpha_{41}T'_{41} + \alpha_{11}\alpha_{44}T'_{14} + \alpha_{11}\alpha_{44}T'_{44} = \\ &= \Gamma^2 \{T'_{14} + iVT'_{11} + V^2 T'_{41} - iBT'_{44}\}, \\ T_{21} &= \alpha_{11}T'_{21} + \alpha_{14}T'_{24} = \Gamma(T'_{21} - iVT'_{24}), \\ T_{22} &= T'_{22}, \quad T_{23} = T'_{23}, \\ T_{24} &= \alpha_{41}T'_{21} + \alpha_{44}T'_{24} = \Gamma(T'_{24} + iVT'_{21}), \\ T_{31} &= \alpha_{11}T'_{31} + \alpha_{14}T'_{34} = \Gamma(T'_{31} - iVT'_{34}), \\ T_{32} &= T'_{32}, \quad T_{33} = T'_{33}, \\ T_{34} &= \alpha_{41}T'_{31} + \alpha_{44}T'_{34} = \Gamma(T'_{34} + iVT'_{31}), \\ T_{41} &= \alpha_{11}\alpha_{41}T'_{11} + \alpha_{14}\alpha_{41}T'_{14} + \alpha_{11}\alpha_{44}T'_{41} + \alpha_{14}\alpha_{44}T'_{44} = \\ &= \Gamma^2 \{T'_{41} + iVT'_{11} + V^2 T'_{14} - iBT'_{44}\}, \\ T_{42} &= \alpha_{42}T'_{12} + \alpha_{44}T'_{42} = \Gamma(T'_{42} + iVT'_{12}), \\ T_{43} &= \alpha_{41}T'_{13} + \alpha_{44}T'_{43} = \Gamma(T'_{43} + iVT'_{13}), \\ T_{44} &= \alpha_{41}^2 T'_{11} + \alpha_{41}\alpha_{44}T'_{14} + \alpha_{44}^2 T'_{44} = \\ &= \Gamma^2 \{T'_{44} + iV(T'_{14} + T'_{41}) - V^2 T'_{11}\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.1.31})$$

Тензорные величины возникают чаще, чем это может показаться с первого взгляда. Мы приведем некоторые примеры тензоров второго ранга в 4-пространстве. Произведения компонент двух векторов $\vec{c} (c_i)$ и $\vec{b} (b_k)$ образуют тензор. Действительно, составим выражение $A_{ik} = c_i b_k$. Формулы преобразования компонент векторов известны:

$$c_i = \alpha_{im}c'_m, \quad b_k = \alpha_{kl}b'_l. \quad (\text{П.1.32})$$

Следовательно,

$$A_{ik} = c_i b_k = \alpha_{im}\alpha_{kl}c'_m b'_l = \alpha_{im}\alpha_{kl}A'_{ml},$$

а это как раз и есть закон преобразования тензора (П.1.30).

Докажем, что производная по координате от компоненты вектора преобразуется, как компонента тензора. Рассмотрим вектор $\vec{b} (b_i)$ и производные

его компонент. Нам удобно выписать две формулы: $b_i = \alpha_{im} b'_m$, $x'_i = \alpha_{hi} x_h$, откуда $\frac{\partial x'_i}{\partial x_h} = \alpha_{hi}$, которые используются в следующей цепи равенств:

$$\frac{\partial b_i}{\partial x_k} = \frac{\partial b_i}{\partial x'_l} \frac{\partial x'_l}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x'_l} (\alpha_{im} b'_m) \frac{\partial x'_l}{\partial x_k} = \alpha_{im} \alpha_{hl} \frac{\partial b'_m}{\partial x'_l}. \quad (\text{П.1.33})$$

Первые и последние звенья в (П.1.33) показывают, что производная $\partial b_i / \partial x_k$ преобразуется по правилу преобразования компонент тензора.

Из (П.1.33) видно также, что преобразование производной от вектора можно вести последовательно. Сначала от b'_m перейти к b_i согласно формуле $b_i = \alpha_{im} b'_m$. Затем можно перейти от дифференцирования по x'_i к дифференцированию по x_h . Конечно, тензорный характер преобразования при этом сохраняется, но затухевывается. Так поступают иногда при преобразовании электромагнитного поля, когда хотят избежать введения тензора.

§ 4. Инвариантность 4-дивергенции и оператора Д'Аламбера. Докажем инвариантность четырехмерной дивергенции и оператора Д'Аламбера при преобразованиях Лоренца. Снова выпишем необходимые формулы в удобном для нас виде:

$$x'_i = \alpha_{hi} x_h, \quad \frac{\partial x'_i}{\partial x_h} = \alpha_{hi},$$

и для компонент вектора \vec{b} :

$$b'_i = \alpha_{ki} b_k, \quad b_k = \alpha_{hi} b'_i.$$

Сначала докажем, что 4-градиент преобразуется, как вектор. Пусть задана функция $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, или, сокращенно, $\varphi = \varphi(x'_i)$. Пусть преобразование координат задается формулами $x'_i = x'_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Тогда согласно правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \alpha_{ki} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_i}.$$

А это и есть закон преобразования компонент вектора (П.1.32).

Докажем теперь инвариантность 4-дивергенции. Это доказательство содержится в следующей цепи равенств:

$$\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_h}{\partial x_h} = \frac{\partial A_h}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial x_h} = \alpha_{hi} \frac{\partial}{\partial x'_i} (A'_i \alpha_{hl}) = \alpha_{hi} \alpha_{hl} \frac{\partial A'_i}{\partial x'_i} = \delta_{il} \frac{\partial A'_i}{\partial x'_i} = \frac{\partial A'_i}{\partial x'_i},$$

где при выводе учтено, что согласно (П.1.15) $\alpha_{hi} \alpha_{hl} = \delta_{il}$.

Оператор Д'Аламбера, примененный к функции Φ :

$$\square \Phi \equiv \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

мы прежде всего запишем в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (ict)^2}.$$

Но выражение $\partial^2\Phi/\partial x_i^2$ является просто дивергенцией градиента. Действительно, пусть $A_i = \partial\Phi/\partial x_i$, тогда

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}.$$

Но дивергенция 4-вектора является инвариантом преобразований Лоренца, и, следовательно,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i'^2}. \quad (\text{П. I. 34})$$

В качестве функции Φ можно взять любую компоненту какого-нибудь 4-вектора $\vec{\Phi}$ (Φ_k). Допустим, что в системе K есть уравнение, связывающее соответствующие компоненты двух 4-векторов $\vec{\Phi}$ (Φ_k) и \vec{s} (s_k):

$$\square\Phi_k \equiv \frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x_i^2} = -\mu_0 s_k. \quad (\text{П. I. 35})$$

Тогда из (П. I. 34) следует, что если справедливо (П. I. 35), то справедливо и

$$\square'\Phi_k = \frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x_i'^2} = -\mu_0 s_k. \quad (\text{П. I. 36})$$

Но, умножая левую и правую части (П. I. 36) на постоянный множитель α_{km} и производя суммирование по k , мы немедленно получим

$$\square'\Phi'_m = -\mu_0 s'_m, \quad (\text{П. I. 37})$$

поскольку $\alpha_{km}\Phi_k = \Phi'_m$. Сравнение (П. I. 35) с (П. I. 37) показывает, что в системе K' мы имеем в точности то же самое уравнение, что и в K , но с заменой штрихованных величин на нештрихованные.

§ 5. Свертывание («омоложение») индексов тензора. В тензорном исчислении вводится операция, приводящая к понижению ранга тензора. Для тензора второго ранга она состоит в том, что суммируются компоненты тензора, имеющие два равных индекса. Замечательно, что такая операция приводит к инвариантному выражению. В случае тензоров более высокого ранга свертывание приводит к тому, что ранг тензора понижается на две единицы.

Доказательство этого свойства очень просто. Выпишем формулу преобразования компонент тензора

$$A_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kl}A'^*_{ml}$$

и просуммируем компоненты A_{ik} с равными индексами, положив $i = k$; тогда

$$A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} = \alpha_{im}\alpha_{il}A'^*_{ml} = \delta_{ml}A'^*_{ml} = A'_{mm}$$

в силу (П. I. 15). Таким образом,

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44} = A'_{11} + A'_{22} + A'_{33} + A'_{44}. \quad (\text{П. I. 38})$$

Хотя в этой книге почти не используются тензоры высших рангов, нам встретятся результаты их свертывания. Мы видели, что дифференцирование скалярной функции (т. е. инвариантного выражения) ведет к образованию вектора — градиента функции $\partial\Phi/\partial x_i$. Дифференцирование вектора ведет к образованию тензора второго ранга $\partial^2\Phi/\partial x_i\partial x_k$. Мы уже убедились в том,

что свертка этого выражения является инвариантом (П. I. 34):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i'^2}.$$

Если компоненты тензора второго ранга зависят от координат, то их дифференцирование ведет к образованию тензора третьего ранга. Например, из тензора f_{ik} мы получаем тензор третьего ранга $\partial f_{ik}/\partial x_l$.

Образует свертку этого тензора по индексам k и l и убедимся, что она приводит к образованию четырех величин, образующих компоненты вектора. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x'_m} (\alpha_{is} \alpha_{kp} f'_{sp}) \frac{\partial x'_m}{\partial x_k} = \alpha_{is} \alpha_{kp} \alpha_{km} \frac{\partial f'_{sp}}{\partial x'_m} = \\ &= \alpha_{is} \alpha_{pm} \frac{\partial f'_{sp}}{\partial x'_m} = \alpha_{is} \frac{\partial f'_{sm}}{\partial x'_m}. \end{aligned} \quad (\text{П. I. 39})$$

Принимая во внимание, что индексы k, m, s пемьсь, мы видим, что величины $\partial f_{ik}/\partial x_k$ преобразуются по закону преобразования векторов (П. I. 32).

Рассмотрим еще, как получить инвариантное выражение из компонент тензоров второго ранга. Если произведение компонент двух векторов, как мы видели, образует тензор второго ранга, то, как легко проверить, произведение компонент двух тензоров второго ранга ведет к образованию тензора четвертого ранга. Пусть компоненты тензора \mathfrak{F} обозначаются через F_{ik} , а тензора f — через f_{lm} . Их произведение $T_{iklm} = F_{ih} f_{lm}$ представляет собой тензор четвертого ранга. Свернем этот тензор по индексам i и l , а также по k и m , т. е. составим выражение

$$T_{ihik} = F_{ih} f_{ik}, \quad (\text{П. I. 40})$$

которое представляет сумму попарных произведений соответствующих компонент. Мы убедимся, что это выражение не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. Этот результат легко доказывается, поскольку правило преобразования для компонент F_{ik} и f_{lm} нам известно:

$$F_{ih} f_{lm} = \alpha_{is} \alpha_{hp} F'_{sp} \alpha_{lr} \alpha_{mt} f'_{rt}.$$

Положив $i = l, k = m$, получим

$$F_{ih} f_{ik} = \alpha_{is} \alpha_{ir} \alpha_{hp} \alpha_{ht} F'_{sp} f'_{rt} = \delta_{rs} \delta_{pt} F'_{sp} f'_{rt} = F'_{sp} f'_{sp}. \quad (\text{П. I. 41})$$

Равенство (П. I. 41) и представляет собой доказательство инвариантности (П. I. 40). Конечно, частным случаем (П. I. 40) будет инвариантность F_{ik}^2 или f_{ik}^2 .

Поскольку мы неоднократно пользовались теоремой Гаусса — Остроградского в применении к векторам, представляющим собой трехмерную свертку тензора, мы выишем соответствующие формулы. В трехмерном пространстве эта теорема касается преобразования потока вектора по замкнутой поверхности S в интеграл по объему \mathcal{V}° , охватываемому этой поверхностью, например:

$$\oint_S \mathbf{D} dS = \int_{\mathcal{V}^\circ} \text{div } \mathbf{D} d\mathcal{V}^\circ. \quad (\text{П. I. 42})$$

Эта же теорема в симметричных обозначениях имеет вид

$$\oint_S D_\alpha n_\alpha dS = \int_{\mathcal{V}^\circ} \frac{\partial D_\alpha}{\partial x_\alpha} d\mathcal{V}^\circ, \quad (\text{П. I. 43})$$

где n_α — компоненты нормали к элементу поверхности dS . Если применить (П.1.43) к вектору

$$A_\beta = \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha},$$

то мы получим

$$\int_{\gamma^0} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} d\gamma^0 = \oint_S f_{\alpha\beta} n_\alpha dS. \quad (\text{П.1.44})$$

§ 6. Некоторые сведения об определителях (детерминантах). Дуальные тензоры. 1. Расположим n^2 элементов, обозначенных символом a_{ik} , где i, k принимают все значения от 1 до n , в виде квадратной схемы. Пусть первый индекс i в символе a_{ik} обозначает номер строки, а второй индекс k — номер столбца, в котором расположен элемент. Таким образом, мы получим квадратную матрицу, образованную элементами a_{ik} :

$$a_{ik} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Из этой матрицы можно образовать определитель

$$D_n = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

который подразумевает определенное действие над элементами a_{ik} — образование суммы $n!$ членов из элементов a_{ik} . Эту сумму можно получить следующим образом. Возьмем произведение элементов, в которое входят элементы разных строк, например строк 1 2 ... n :

$$a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\tau}, \quad (\text{П.1.45})$$

или произведение элементов, в которое входят элементы разных столбцов, например 1 2 ... n :

$$a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \dots a_{\tau n}, \quad (\text{П.1.46})$$

где значение индексов $\alpha, \beta, \dots, \tau$ мы сейчас определим. Чтобы получить значение определителя, составим алгебраическую сумму членов вида (П.1.45) или (П.1.46), отличающихся друг от друга тем, что индексы $\alpha, \beta, \dots, \tau$ образуют в каждом из членов суммы какую-то перестановку естественного расположения чисел 1 2 ... n . Это означает, что в каждом члене суммы индексы $\alpha, \beta, \dots, \tau$ всегда имеют разные значения. Сумма берется по всем перестановкам чисел 1 2 ... n , число которых равно $n!$.

Каждому члену суммы приписывается знак «+» или «-» в зависимости от того, четным или нечетным числом парных перестановок (транспозиций) элементов можно получить из естественного ряда чисел 1, 2, ..., n данную перестановку в $\alpha \beta \dots \tau$. Парная транспозиция состоит, например, в переходе от перестановки 1 2 3 4 к перестановке 1 3 2 4, где произведен обмен местами цифр 2 и 3. Число необходимых транспозиций для перехода от естественного ряда чисел к данной перестановке обозначается буквой r . Таким образом, по определению детерминант n -го порядка раскрывается

следующим образом:

$$D_n = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha \neq \beta \neq \dots \neq \tau} (-1)^r a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \dots a_{\tau n} = \\ = \sum_{\alpha \neq \beta \neq \dots \neq \tau} (-1)^r a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\tau}, \quad (\text{П. I. 47})$$

где сумма берется по всем перестановкам индексов $\alpha \beta \dots \tau$, принимающих различные значения от 1 до n . Две последние строки равенства отражают одно из основных свойств определителя — равноправие строк и столбцов. Конечно, в выражениях типа (П. I. 45) и (П. I. 46) не обязательно брать соответственно первые или вторые индексы, расположенные в натуральном порядке. Но тогда, чтобы привести конкретные члены к каноническому виду (П. I. 45) или (П. I. 46), пришлось бы переобозначить индексы $\alpha, \beta, \dots, \tau$. Такое переобозначение свелось бы к транспозициям этих индексов, а в самом определителе означало бы перестановку строк или столбцов. Отсюда ясно, что перестановка нечетного числа строк (или столбцов) меняет знак определителя, а перестановка четного числа строк (столбцов) оставляет значение определителя неизменным. Можно сказать, что если зафиксировать определенное значение n индексов i, k, \dots, s и составить сумму членов по перестановкам индексов $\alpha \beta \dots \tau$ с соответствующими знаками, т. е.

$$\sum_{\alpha \neq \beta \neq \dots \neq \tau} (-1)^r a_{\alpha i} a_{\beta k} \dots a_{\tau s},$$

то эта величина будет равна значению $\pm D_n$ в зависимости от того, четным или нечетным числом транспозиций получается перестановка $i k \dots s$ из естественной перестановки $1 2 \dots n$.

Покажем, как записывается определитель третьего порядка D_3 :

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha \neq \beta \neq \gamma} (-1)^r a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} = \\ = \frac{a_{11} a_{22} a_{33}}{(\alpha=1, \beta=2, \gamma=3)} - \frac{a_{13} a_{21} a_{32}}{(312)} + \frac{a_{12} a_{23} a_{31}}{(231)} - \frac{a_{13} a_{32} a_{21}}{(321)} - \frac{a_{11} a_{23} a_{32}}{(132)} - \frac{a_{12} a_{21} a_{33}}{(213)}.$$

2. Способ вычисления определителей. Выберем в сумме (П. I. 47) все члены, содержащие некоторый элемент a_{ik} , объединим их и вынесем этот элемент в качестве общего множителя. Получившийся коэффициент при элементе a_{ik} обозначим через A_{ik} . Выражение A_{ik} , т. е. коэффициент данного элемента в выражении определителя, называется *адьюнктой* или *алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} . Адьюнкта данного элемента вычисляется по простому правилу. Из определителя D_n вычеркиваются та строка и тот столбец, в которых находится элемент a_{ik} , адьюнкта которого A_{ik} ищется. Вычеркнув i -ю строку и k -й столбец, мы получим определитель $(n - 1)$ -го порядка D_{n-1} , который называется минором Δ_{ik} элемента a_{ik} :

$$\Delta_{ik} = D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1, k-1} & a_{1, k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1, 1} & a_{i-1, 2} & \dots & a_{i-1, k-1} & a_{i-1, k+1} & \dots & a_{i-1, n} \\ a_{i+1, 1} & a_{i+1, 2} & \dots & a_{i+1, k-1} & a_{i+1, k+1} & \dots & a_{i+1, n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n, k-1} & a_{n, k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Адьюнкта элемента A_{ih} отличается от минора Δ_{ih} , быть может, только знаком:

$$A_{ih} = (-1)^{i+k} \Delta_{ih}.$$

Каждому элементу можно сопоставить свою адьюнкту, однако данный элемент входит отнюдь не во все члены суммы (П. I. 47). Можно выбрать определенное число элементов определителя, которые вместе со своими адьюнктами позволяют найти значение определителя. Именно, существует теорема, что определитель можно разложить по элементам любой строки или любого столбца следующим образом:

$$D_n = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha i} A_{\alpha h} = \sum_{\beta=1}^n a_{k \beta} A_{h \beta},$$

причем здесь суммирование по k нет, а само k может иметь любое значение от 1 до n . Если же составить сумму произведений элементов любой строки (или любого столбца) на миноры другой строки (или другого столбца), то всегда окажется, что эта сумма равна нулю:

$$\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha h} A_{\alpha i} = 0 \quad (\alpha \neq i).$$

Обе последние формулы объединяются в одну:

$$\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha h} A_{\alpha i} = D \delta_{ih}.$$

Вычислим в качестве примера определитель матрицы преобразований Лоренца, разложив его по элементам первой строки:

$$D_{\mathbb{L}} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Gamma & 0 & 0 & iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{vmatrix} = \\ = \Gamma \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma \end{vmatrix} - iB\Gamma \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -iB\Gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = \Gamma^2 - B^2\Gamma^2 = \Gamma^2 (1 - B^2) = 1.$$

Читатель легко убедится сам, что, умножая элементы первой строки на адьюнкты элементов других строк, он получит нуль.

3. Введем совершенно антисимметричный единичный тензор n -го ранга (валентности). Совершенно антисимметричным единичным тензором n -го ранга называется тензор $\delta_{\alpha\beta \dots \tau}$, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, а все отличные от нуля компоненты равны либо $+1$, либо -1 . Из антисимметричности тензора следует, что любая компонента тензора $\delta_{\alpha\beta \dots \tau}$, у которой два индекса равны, обращается в нуль (перестановка двух таких индексов меняет знак компоненты из условия антисимметричности, но вместе с тем мы получаем ту же самую компоненту; но только нуль равен сам себе с обратным знаком). Таким образом, у тензора $\delta_{\alpha\beta \dots \tau}$ отличны от нуля лишь те компоненты, у которых все индексы $\alpha\beta \dots \tau$ различны. Пусть $\delta_{12 \dots n} = 1$; тогда отличные от нуля компоненты $\delta_{\alpha\beta \dots \tau}$ равны $+1$, если перестановка $\alpha\beta \dots \tau$ получена из перестановки $1\ 2 \dots n$ четным числом транспозиций. Если число таких транспозиций в перестановке $\alpha\beta \dots \tau$ нечетное, то компонента $\delta_{\alpha\beta \dots \tau}$ равна -1 . Используя совершенно антисимметричный единичный тензор, можно переписать выражение для

определилителя D_n следующим образом:

$$D_n = \delta_{\alpha\beta} \dots \tau a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_n \tau = \delta_{\alpha\beta} \dots \tau a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \dots a_n \tau,$$

где теперь уже подразумевается суммирование по парам индексов $\alpha\beta \dots \tau$.

В частности, для определителя, соответствующего матрице Лоренца, мы можем написать

$$D^{\Pi} = \delta_{\alpha\beta\gamma\rho} \alpha_{1\alpha} \alpha_{2\beta} \alpha_{3\gamma} \alpha_{4\rho} = 1.$$

4. Теперь нас уже будет интересовать 4-пространство СТО. Прежде всего следует отметить, что мы определили совершенно антисимметричный единичный тензор $\delta_{\beta\gamma\rho\mu}$, но вовсе не доказали, что это тензор. Мы должны убедиться в том, что в любой ИСО (т. е. при преобразованиях Лоренца) компоненты этого тензора имеют одни и те же значения. Однако сделать это совсем несложно. По правилу преобразования компонент тензора

$$\delta'_{iklm} = \alpha_{i\beta} \alpha_{k\gamma} \alpha_{l\rho} \alpha_{m\mu} \delta_{\beta\gamma\rho\mu}.$$

Однако согласно сказанному в п. 1 величина справа равна $D^{\Pi} \delta_{iklm}$, т. е. ± 1 в зависимости от того, каким числом транспозиций получается перестановка $iklm$ из естественной. А это и означает, что $\delta_{\beta\gamma\rho\mu}$ имеет одинаковые компоненты в любой ИСО. Не меняют свои значения компоненты этого тензора и при переходе от левой системы координат к правой (т. е. при изменении знака у одной или трех пространственных координат). Компоненты тензора в этом случае должны были бы переместить свой знак, как это ясно из (П.1.30). Поэтому $\delta_{\beta\gamma\rho\mu}$ является не тензором, а псевдотензором; его компоненты ведут себя при изменении знака координат (отражениях) иначе, чем тензоры, а при всех остальных преобразованиях их поведение совпадает с поведением компонент любого тензора.

5. Векторное и смешанное произведение векторов в трехмерном пространстве. Эти вопросы обсуждаются для того, чтобы иметь наглядные аналогии при рассмотрении некоторых величин в 4-пространстве СТО.

Рассмотрим три единичных вектора ортогональной декартовой системы координат — векторы \mathbf{m}_1 , \mathbf{m}_2 , \mathbf{m}_3 . Составим векторное произведение любой пары этих векторов $[\mathbf{m}_\alpha \mathbf{m}_\beta]$; мы получим при этом третий вектор со знаком плюс или минус в зависимости от порядка сомножителей в векторном произведении. Нетрудно записать векторное произведение с помощью совершенно антисимметричного единичного тензора третьей валентности:

$$[\mathbf{m}_\alpha \mathbf{m}_\beta] = \delta_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{m}_\gamma.$$

Теперь уже легко записать и векторное произведение двух векторов $\mathbf{a}_1 = a_{1\alpha} \mathbf{m}_\alpha$ и $\mathbf{a}_2 = a_{2\beta} \mathbf{m}_\beta$; действительно,

$$[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2] = [a_{1\alpha} \mathbf{m}_\alpha, a_{2\beta} \mathbf{m}_\beta] = a_{1\alpha} a_{2\beta} [\mathbf{m}_\alpha \mathbf{m}_\beta] = \delta_{\alpha\beta\gamma} a_{1\alpha} a_{2\beta} \mathbf{m}_\gamma. \quad (\text{П.1.48})$$

Из (П.1.48) видно, что при \mathbf{m}_γ стоят коэффициенты, образованные произведениями компонент вектора и свернутые с тензором $\delta_{\alpha\beta\gamma}$. Перепишем (П.1.48):

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2] &= \delta_{\alpha\beta\gamma} a_{1\alpha} a_{2\beta} \mathbf{m}_\gamma = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta\gamma} a_{1\alpha} a_{2\beta} + \delta_{\beta\alpha\gamma} a_{1\beta} a_{2\alpha}) \mathbf{m}_\gamma = \\ &= \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta\gamma} (a_{1\alpha} a_{2\beta} - a_{2\alpha} a_{1\beta}) \mathbf{m}_\gamma = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\beta} \mathbf{m}_\gamma. \end{aligned}$$

Здесь в третьем звене равенства добавлен второй член, равный первому, по у которого поменялись местами индексы α и β . В третьем звене учтено, что $\delta_{\beta\alpha\gamma} = -\delta_{\alpha\beta\gamma}$. В четвертом же звене $\delta_{\alpha\beta\gamma}$ вынесено за скобки. Для антисимметричного тензора, образовавшегося в круглых скобках, введено

обозначение $C_{\alpha\beta} = a_{1\alpha}a_{2\beta} - a_{1\beta}a_{2\alpha}$. Таким образом, векторное произведение $[a_1 a_2]$ представляет собой вектор, компоненты которого получаются из антисимметричного тензора $C_{\alpha\beta}$ по формулам

$$C_\gamma = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\beta}.$$

Говорят, что вектор C (C_γ) дуален антисимметричному тензору $C_{\alpha\beta}$. Это означает, что вектор C ортогонален двум векторам a_1 и a_2 , определяющим двумерную плоскость. Ортогональность обнаруживается аналитически сразу же:

$$C a_1 = C_\gamma a_{1\gamma} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\beta} a_{1\gamma} = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta\gamma} (a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{1\gamma} - a_{1\beta} a_{2\alpha} a_{1\gamma}) = 0.$$

Равенство нулю последнего выражения следует из того, что и уменьшаемое и вычитаемое представляет собой определители с двумя равными строками. А такие определители равны нулю. Аналогично доказывается, что $C a_2 = 0$. По своему геометрическому смыслу модуль вектора C равен площади параллелограмма, построенного на векторах a_1 и a_2 .

Смешанное произведение трех векторов a_1, a_2, a_3 обозначается через (a_1, a_2, a_3) и определяется следующим образом ($\delta_{\lambda\gamma}$ — символ Кронекера (П. I. 4)):

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) &= a_1 [a_2 a_3] = a_{1\lambda} m_\lambda \delta_{\alpha\beta\gamma} a_{2\alpha} a_{3\beta} m_\gamma = \delta_{\alpha\beta\gamma} a_{1\lambda} a_{2\alpha} a_{3\beta} m_\lambda m_\gamma = \\ &= a_{1\lambda} \delta_{\lambda\gamma} a_{2\alpha} \delta_{\alpha\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta\gamma} a_{1\gamma} a_{2\alpha} a_{3\beta} = D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Геометрический смысл смешанного произведения трех векторов — объем параллелепипеда, построенного на этих векторах. Этот объем получается со знаком «-» или «+» в зависимости от того, в каком порядке входят векторы a_1, a_2, a_3 в смешанное произведение.

6. Дуальные тензоры. Пусть в 4-пространстве заданы два 4-вектора a_1 и a_2 . Тогда проекция площади параллелограмма, на координатную плоскости (x_i, x_k) определяется антисимметричным тензором $\xi_{ik} = a_{1i} a_{2k} - a_{2i} a_{1k}$. В 4-пространстве каждой площадке ξ_{ik} можно сопоставить другую нормальную площадку ξ_{ik}^* такую, что все прямые, лежащие в ней, нормальны всем прямым в исходной площадке. Если площадка ξ_{ik}^* ортогональна к ξ_{ik} , имеет равную площадь с ξ_{ik} , то площадка ξ_{ik}^* называется дуальной относительно ξ_{ik} . Можно показать, что

$$\xi_{ik}^* = \frac{1}{2} \delta_{iklm} \xi_{lm}. \quad (\text{П. I. 49})$$

С помощью этой формулы можно сопоставить любому антисимметричному тензору дуальный ему. Дуальный тензор f_{ik}^* в известном смысле равноправен исходному тензору f_{ik} . Мы видели, что вторая группа уравнений Максвелла проще записывается через дуальный тензор F_{ik}^* . Сумма произведений компонент антисимметричного тензора на их дуальные дополнения дает псевдоскаляр

$$\begin{aligned} F_{ik} F_{ik}^* &= \frac{1}{2} \delta_{iklm} F_{ik} F_{lm} = \frac{1}{2} \alpha_{ia} \alpha_{kb} \alpha_{lc} \alpha_{md} \delta_{abcd} \alpha_{ir} \alpha_{ks} F'_{rs} \alpha_{lt} \alpha_{mn} F'_{tn} = \\ &= \frac{1}{2} \delta_{arsb} \delta_{ct} \delta_{dn} \delta_{abcd} F'_{rs} F'_{tn} = \frac{1}{2} \delta_{rstn} F'_{rs} F'_{tn} = F'_{rs} F'^*_{rs}. \end{aligned}$$

В этих равенствах использованы определение (П.1.49), формулы преобразования тензора (П.1.30), свойства коэффициентов матрицы Лоренца (П.1.15). Легко убедиться также, что $F_{ik}^2 = F_{ik}F_{ik}$ также является инвариантом:

$$F_{ik}F_{ik} = \alpha_{ia}\alpha_{kb}F'_{ab}\alpha_{ic}\alpha_{kd}F'_{cd} = \delta_{ac}\delta_{bd}F'_{ab}F'_{cd} = F'_{ab}F'_{ab}.$$

Эти два инварианта и были использованы нами в § 6.5.

§ 7. Тензор напряжений. В механике сплошной среды вводится тензор напряжений, с помощью которого можно представить силу, действующую на весь объем, в виде силы, действующей на поверхность, ограничивающую этот объем. Рассматривая силы в электромагнитном поле, мы припили к выражениям именно этого вида; полезно рассмотреть постановку задачи в механике, где физика очень наглядна.

Если упругое тело подвергается деформации, то в нем возникают силы, стремящиеся вернуть это тело в положение равновесия. Эти силы называются внутренними напряжениями. Внутренние напряжения обусловлены силами взаимодействия молекул тела друг с другом. Характерной особенностью этих сил является «малый радиус действия», другими словами, их влияние простирается лишь на микроскопические (атомные) расстояния. Отсюда ясно, что если рассмотреть некоторый объем \mathcal{V}^0 внутри тела, то силы, действующие на этот объем, сводятся к силам, действующим через поверхность, ограничивающую этот объем.

Действительно, пусть на единицу объема тела действует сила F . Выделим в теле объем \mathcal{V}^0 и рассмотрим действующую на него суммарную силу. Если на объем $d\mathcal{V}^0$ действует сила $F d\mathcal{V}^0$, то полная сила, действующая на объем, равна

$$\int_{\mathcal{V}^0} F d\mathcal{V}^0. \quad (\text{П.1.50})$$

По силы, с которыми действуют друг на друга различные части рассматриваемого объема, по закону равенства действия и противодействия взаимно уничтожаются и не могут дать отличной от нуля равнодействующей. Поэтому полная сила, действующая на объем, возникает в результате действия сил со стороны окружающих объем \mathcal{V}^0 частей тела. Но, как уже было сказано, эти силы действуют лишь через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем. Значит, суммарная сила сведется к некоторому поверхностному интегралу, в частности, β -я компонента силы

$$\int_{\mathcal{V}^0} F_{\beta} d\mathcal{V}^0 \quad (\text{П.1.51})$$

тоже должна переходить в поверхностный интеграл. Но это возможно лишь в том случае, если F_{β} можно представить в виде

$$F_{\beta} = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}}, \quad (\text{П.1.52})$$

где про величину $T_{\alpha\beta}$ известно только, что она представляет собой компоненты тензора (только тогда в результате свертывания мы получим вектор). В этом случае согласно (П.1.44)

$$\int_{\mathcal{V}^0} F_{\beta} d\mathcal{V}^0 = \int_{\mathcal{V}^0} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_{\alpha}} d\mathcal{V}^0 = \oint_S T_{\alpha\beta} n_{\alpha} dS. \quad (\text{П.1.53})$$

Умножив обе части (П.1.53) на m_β и фактически произведя суммирование, получим

$$\int_{V^0} F^\alpha dV^0 = \int_{V^0} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha} m_\beta dV^0 = \oint_S T_{\alpha\beta} n_\alpha m_\beta dS. \quad (\text{П.1.54})$$

Соотношение (П.1.54) показывает, что суммарная сила, действующая на объем, сведена к поверхностному интегралу. Следовательно, полученный нами результат можно сформулировать так: если сплю F , действующую на единицу объема, можно представить в виде

$$F^\alpha = \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} m_\beta, \quad (\text{П.1.55})$$

то ее действие на весь объем может быть представлено как действие поверхностной силы, распределенной на поверхности, ограничивающей объем, причем на элемент поверхности dS , компоненты единичного вектора нормали n к которому равны n_α , действует сила

$$T_{\alpha\beta} n_\alpha m_\beta. \quad (\text{П.1.56})$$

Остановимся кратко на физическом смысле составляющих тензора напряжений. Возьмем снова к объему V^0 внутри тела, испытывающего деформацию. Сила, действующая на элемент поверхности dS , ограничивающей объем V^0 , зависит от величины dS и направления элемента, т. е. направления нормали n к нему. Обозначим эту силу через $p_n dS$, подчеркнув, что ее направление, вообще говоря, не совпадает с направлением нормали к площадке dS (рис. П.2, а). Вектор p_n — сила, отнесенная к единице площади и зависящая от направления площадки, — называется напряжением на площадке dS с нормалью n . В каждой точке деформированного упругого тела любому направлению n отвечает свой вектор напряжения p_n . В каждой декартовой системе отсчета можно определить напряжения p_x, p_y, p_z , действующие на единичные площадки, нормали которых совпадают с координатными осями. Мы докажем, что напряжение, отнесенное к любой площадке dS с заданным вектором n , может быть выражено через девять компонент векторов p_x, p_y, p_z , причем эти девять компонент в совокупности образуют тензор напряжений $T_{\alpha\beta}$.

Пусть упруго деформированное тело находится в равновесии. Рассмотрим бесконечно малый тетраэдр $OABC$ (рис. П.2, б), площадь наклонной грани которого равна dS . Пусть нормаль n к этой грани направлена под острым углом к оси x . Тогда площадки, отсекаемые на координатных плоскостях,

равны $dS \cos(n, x)$, $dS \cos(n, y)$, $dS \cos(n, z)$. Нормали к площадкам, отсекаемым наклонной гранью на координатных плоскостях, направлены противоположно направлению единичных координатных осей i, j, k , поэтому

на грань BOC действует сила — $p_x dS \cos(n, x)$. Значение p_x берется в любой

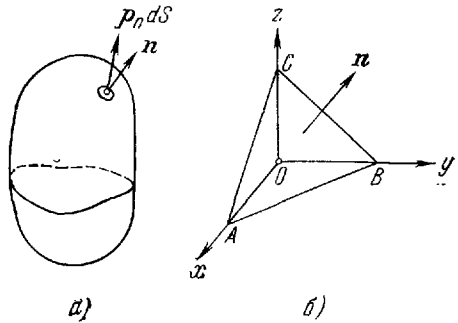


Рис. П.2. а) Напряжение на площадке dS на границе объема, в котором созданы деформации; n — нормаль к элементу поверхности dS ; p_n — сила, действующая на площадку, нормаль которой n . б) К выводу условия равновесия замкнутого элементарного объема в форме тетраэдра. В качестве нормали к замкнутой поверхности тетраэдра выбрана внешняя нормаль. На гранях BOC, AOC и AOB единичные векторы нормали равны соответственно $-i, -j, -k$. Площади граней BOC, AOC и AOB равны соответственно $dS \cos(n, x), dS \cos(n, y), dS \cos(n, z)$.

точке BOC , поскольку грань бесконечно малая. Аналогично силы, действующие на грани AOC и AOB , оказываются равными — $p_y dS \cos(\mathbf{n}, y)$ и $-p_z dS \cos(\mathbf{n}, z)$. При равновесии сумма сил, действующих на тетраэдр, равна нулю:

$$dS [p_n - p_x \cos(\mathbf{n}, x) - p_y \cos(\mathbf{n}, y) - p_z \cos(\mathbf{n}, z)] = 0,$$

откуда искомое напряжение p_n выразится через p_x, p_y, p_z :

$$p_n = p_x \cos(\mathbf{n}, x) + p_y \cos(\mathbf{n}, y) + p_z \cos(\mathbf{n}, z). \quad (\text{П.1.57})$$

В равенстве (П.1.57) стоит лишь перейти к симметричным обозначениям, чтобы убедиться в том, что мы получили тензор. Действительно, \mathbf{n} — это вектор нормали к произвольно выбранной грани с компонентами n_α , поэтому $p_n = p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 = p_\alpha n_\alpha$. Но в свою очередь $p_\alpha = p_{\alpha\beta} m_\beta$, где $p_{\alpha\beta}$ — компоненты вектора p_α , откуда

$$p_n = p_{\alpha\beta} m_\beta n_\alpha. \quad (\text{П.1.58})$$

Из выражения (П.1.58) видно, что девять компонент векторов p_α преобразуются, как тензор (ср., например, (П.1.24)).

§ 8. Прямолинейные косоугольные системы координат. До сих пор мы пользовались ортогональной прямолинейной системой координат, но уже

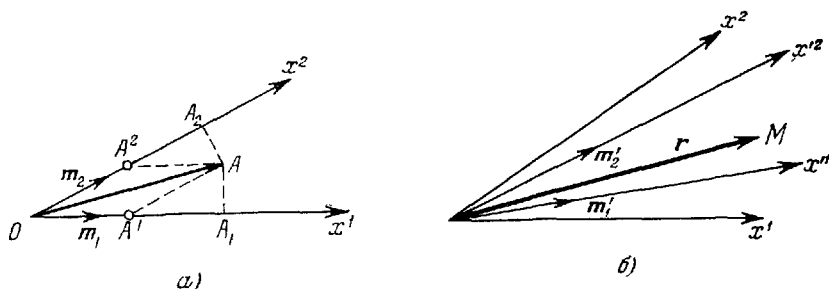


Рис. П.3. Иллюстрация к определению ко- и контравариантных координат в прямолинейной косоугольной системе координат на плоскости.

переход к прямолинейной косоугольной системе позволяет проиллюстрировать особенности, присущие произвольным координатным системам, о которых шла речь в книге.

Выберем, как и раньше, в качестве координатных линий семейство прямых, но уже не ортогональных друг другу. Координатные оси обозначим x^1 и x^2 (рис. П.3, а). На каждой из этих осей x^μ отложим единичный базисный вектор m_μ .

Произвольный вектор A можно разложить по неколлинеарным векторам m_μ :

$$A = A^\mu m_\mu. \quad (\text{П.1.59})$$

Величины A^μ являются составляющими вектора A , получаемыми параллельным проектированием этого вектора на координатные оси; они, по определению, называются *контравариантными* компонентами вектора A .

Величины

$$A_{\mu} = A m_{\mu} \quad (\text{П. I. 60})$$

являются ортогональными проекциями вектора A на координатные оси и называются *ковариантными* компонентами вектора A . Очевидно, эти определения могут быть сохранены для любого числа измерений. Если ввести обозначение для скалярного произведения базисных измерений

$$m_{\mu} m_{\nu} = g_{\mu\nu}, \quad (\text{П. I. 61})$$

то $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ и в случае прямолинейных координатных осей $g_{\mu\nu} = \text{const}$. Ко- и контравариантные координаты относятся к одному и тому же вектору и связаны между собой:

$$A_{\mu} = A m_{\mu} = A^{\nu} m_{\nu} m_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}. \quad (\text{П. I. 62})$$

Этим равенством определяется переход от контравариантных компонент вектора к ковариантным.

Определим, далее, величины $g^{\mu\nu}$ условием:

$$g_{\mu\rho} g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\nu}, \quad \delta_{\mu}^{\nu} = \begin{cases} 0, & \nu \neq \mu, \\ 1, & \nu = \mu. \end{cases} \quad (\text{П. I. 63})$$

Составим теперь выражение

$$g^{\mu\rho} A_{\rho} = g^{\mu\rho} g_{\rho\sigma} A^{\sigma} = \delta_{\sigma}^{\mu} A^{\sigma} = A^{\mu}. \quad (\text{П. I. 64})$$

Последним равенством определяется переход от ковариантных компонент к контравариантным. Мы получили, таким образом, две важные формулы перехода:

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}, \quad A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}. \quad (\text{П. I. 65})$$

Определитель, образованный из величин g_{ik} , обозначают через g (см. § 6 этого Приложения):

$$g = |g_{ik}|.$$

С помощью формулы (стр. 363)

$$\sum g_{\alpha k} A_{\alpha i} = \delta_{ik} g$$

мы сразу же находим, что

$$g^{\mu\nu} = \frac{A_{\mu\nu}}{g}, \quad (\text{П. I. 66})$$

где $A_{\mu\nu}$ — адьюнкта элемента $g_{\mu\nu}$.

Нетрудно обнаружить, что для ортогональных прямолинейных координат, когда $m_{\mu} m_{\nu} = \delta_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ и $A_{\mu} = A^{\mu}$, т. е. никакого различия между ко- и контравариантными координатами нет. Этим и объясняется, что при использовании ортогональной декартовой системы координат говорят просто о координатах векторов.

По определению скалярным произведением двух векторов A и B называется величина

$$AB = (A^{\mu} m_{\mu}) (B^{\nu} m_{\nu}) = A^{\mu} B^{\nu} (m_{\mu} m_{\nu}) = g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = A_{\nu} B^{\nu}. \quad (\text{П. I. 67})$$

Скалярное произведение вектора на самого себя определяет квадрат модуля вектора, или норму вектора:

$$A^2 = g_{\mu\nu} A^{\mu} A^{\nu} = A_{\nu} A^{\nu}. \quad (\text{П. I. 68})$$

Таким образом, норма является квадратом длины вектора. Если норма вектора равна единице, то вектор называется нормированным или единичным. Если норма любого ненулевого вектора положительна, пространство называется *собственно евклидовым*.

В частности, квадрат бесконечно малого вектора dr с компонентами dx^ν , соединяющего две бесконечно близкие точки пространства, равен

$$dr^2 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{П.1.69})$$

Изменим систему базисных осей и перейдем к новым базисным векторам m'_μ , направленным вдоль прямолинейных осей x'^μ (рис. П.3, б). Можно разложить любой новый вектор m'_μ по старым базисным векторам:

$$m'_\mu = a_\mu^\nu m_\nu, \quad (\text{П.1.70})$$

где a_μ^ν — постоянные коэффициенты, зависящие от конкретного преобразования косоугольных осей. Для независимости m'_μ необходимо, чтобы $|a_\mu^\nu| = a \neq 0$. Можно, разумеется, разложить любой старый вектор m_μ по новым:

$$m_\nu = a'^\lambda_\nu m'_\lambda, \quad a'^\lambda_\nu = |a'^\lambda_\nu| \neq 0. \quad (\text{П.1.71})$$

Из (П.1.70) и (П.1.71) следует:

$$m'_\mu = a_\mu^\nu m_\nu = a_\mu^\nu a'^\lambda_\nu m'_\lambda; \quad m_\lambda = a'^\lambda_\nu m'_\nu = a'^\lambda_\nu a^\mu_\lambda m_\mu. \quad (\text{П.1.72})$$

Из (П.1.72) видно, что коэффициенты a^μ_ν и a'^λ_ν связаны соотношениями

$$a^\nu_\mu a'^\lambda_\nu = \delta^\lambda_\mu, \quad a'^\lambda_\nu a^\mu_\lambda = \delta^\mu_\nu, \quad (\text{П.1.73})$$

где δ^λ_μ определено согласно (П.1.63).

Радиус-вектор r , проведенный из начала координат в точку M (рис. П.3, б), может быть с равным правом записан двумя способами:

$$x^\nu m_\nu = x'^\mu m'_\mu, \quad (\text{П.1.74})$$

но, принимая во внимание (П.1.70) и (П.1.71), можно переписать (П.1.74) опять-таки в двух формах:

$$x^\nu a'^\mu_\nu m'_\mu = x'^\mu m'_\mu, \quad x^\nu m_\nu = x'^\mu a^\nu_\mu m_\nu \quad (\text{П.1.75})$$

Отсюда следуют формулы прямого и обратного преобразования контравариантных координат вектора r :

$$x'^\mu = a'^\mu_\nu x^\nu; \quad x^\nu = a^\nu_\mu x'^\mu. \quad (\text{П.1.76})$$

Общее определение вектора: вектором A называется величина, ковариантные компоненты которой при изменении системы отсчета преобразуются так же, как базисные векторы m_μ . Контравариантные компоненты векторов преобразуются, как контравариантные координаты x^μ . Найдем формулы преобразования компонент вектора A . Для ковариантных компонент

$$A_\mu = A m_\mu = A a'^\lambda_\mu m'_\lambda = a'^\lambda_\mu A'_\lambda \quad (\text{П.1.77})$$

и, обратно,

$$A'_\mu = A m'_\mu = A a^\nu_\mu m_\nu = a^\nu_\mu A_\nu. \quad (\text{П.1.78})$$

С другой стороны, в точности так же, как для вектора r , запишем

$$A = A^{\nu} m_{\nu} = A'^{\mu} m'_{\mu}, \quad (\text{П. I. 79})$$

откуда

$$A^{\nu} a'^{\mu}_{\nu} m'_{\mu} = A'^{\mu} m'_{\mu}, \quad A^{\nu} m_{\nu} = A'^{\mu} a^{\nu}_{\mu} m_{\nu} \quad (\text{П. I. 80})$$

и, следовательно,

$$A'^{\mu} = a'^{\mu}_{\nu} A^{\nu}, \quad A^{\nu} = a^{\nu}_{\mu} A'^{\mu}. \quad (\text{П. I. 81})$$

Мы видим, что формулы преобразования ко- и контравариантных компонент вектора различны.

Выпишем закон преобразования величины (П. I. 61):

$$g'_{\mu\nu} = (m'_{\mu} m'_{\nu}) = a^{\rho}_{\mu} m_{\rho} a^{\sigma}_{\nu} m_{\sigma} = a^{\rho}_{\mu} a^{\sigma}_{\nu} g_{\rho\sigma}. \quad (\text{П. I. 82})$$

Это — по определению — закон преобразования ковариантного тензора. Инвариантом называется величина, сохраняющая свое значение при изменении базисных векторов (П. I. 70), (П. I. 71). В рассматриваемом случае косоугольных прямолинейных осей a^{ν}_{μ} и a'^{μ}_{ν} — постоянные величины. Докажем инвариантность расстояния между точками:

$$ds'^2 = g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = a^{\rho}_{\mu} dx'^{\mu} a^{\sigma}_{\nu} dx'^{\nu} g_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma} \quad (\text{П. I. 83})$$

(см. (П. I. 81)).

Нетрудно проверить также инвариантность оператора $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_{\mu} \partial x^{\mu}}$.

Когда по тем или иным соображениям вводятся векторы, то в качестве их компонент могут оказаться как ко-, так и контравариантные компоненты. Приведем два важных примера. Из (П. I. 81) следует, что

$$dA^{\nu} = a^{\nu}_{\mu} dA'^{\mu}; \quad (\text{П. I. 84})$$

отсюда ясно, что дифференциалы контравариантных координат вектора преобразуются, как контравариантные векторы. Однако если рассмотреть скалярную функцию контравариантных компонент $\varphi(x^{\alpha})$, то, рассмотрев компоненты вектора $\partial\varphi/\partial x^{\alpha}$, мы сразу же убеждаемся, что имеем дело с ковариантными компонентами.

Действительно, $\varphi = \varphi(x'^{\nu}) = \varphi[x'^{\nu}(x^{\alpha})]$ — подразумевается, что преобразование координат известно; как всегда, выпишем формулы с «удобными» индексами. Так, согласно (П. I. 76) $x'^{\nu} = a'^{\nu}_{\alpha} x^{\alpha}$, откуда $\partial x'^{\nu}/\partial x^{\alpha} = a'^{\nu}_{\alpha}$. По формулам дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\alpha}} = a'^{\nu}_{\alpha} \frac{\partial\varphi}{\partial x'^{\nu}}, \quad (\text{П. I. 85})$$

а это как раз формула преобразования компонент ковариантного вектора (П. I. 77). Еще раз подчеркнем, что все полученные формулы годятся для пространства любого числа измерений.

Переходя к 4-пространству-времени Минковского, напомним, что следствием двух постулатов Эйнштейна является инвариантность квадратичной формы

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (\text{П. I. 86})$$

при переходе от одной ИСО к другой, т. е. при преобразованиях Лоренца. Выражение (П. I. 86) определяет квадрат элементарного «расстояния» в 4-про-

странстве. Но квадрат расстояния (П.1.86) вовсе не обязательно является положительно определенным. В связи с этим евклидово пространство, характеризуемое формой (П.1.80), называется *несобственно евклидовым* или *псевдоевклидовым пространством*.^{*} Для того чтобы пользоваться формализмом собственно евклидова пространства часто прибегают к приему, который использовался и в этой книге, заключающемуся во введении мнимой координаты (ср. гл. 3). Этот прием упрощает изложение, но невольно навеивает мысли о мнимости и самих релятивистских законов, которые, разумеется, не имеют ни малейшего отношения к мнимой единице, вводимой исключительно ради упрощения выкладок.

Если воспользоваться действительными координатами $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, то (П.1.86) запишется как

$$ds^2 = dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{2^2} - dx^{3^2}. \quad (\text{П.1.87})$$

В любом случае

$$d\vec{R} = m_0 dx^0 + m_1 dx^1 + m_2 dx^2 + m_3 dx^3. \quad (\text{П.1.88})$$

Для того чтобы ds^2 из (П.1.88) совпадало с (П.1.86), необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$m_0^2 = 1, \quad m_1^2 = m_2^2 = m_3^2 = -1; \quad (\text{П.1.89})$$

$$m_i m_k = 0 \quad \text{при} \quad i, k = 0, 1, 2, 3. \quad (\text{П.1.90})$$

Все эти условия можно записать в единой формуле

$$m_i m_k = g_{ik}, \quad (\text{П.1.91})$$

где

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П.1.92})$$

Теперь g_{ik} определяет метрический тензор псевдоевклидова пространства. Отсюда сразу же следует связь между ко- и контравариантными компонентами вектора в силу $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$:

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3. \quad (\text{П.1.93})$$

Скалярное произведение двух векторов и норма вектора определяются соответственно выражениями

$$AB = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3, \quad (\text{П.1.94})$$

$$|A^2| = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2. \quad (\text{П.1.95})$$

Из (П.1.95) видно, что у произвольного ненулевого действительного вектора норма не обязательно положительна, она может быть как нулевой, так и отрицательной. Это еще раз напоминает нам о том, что четырехмерное пространство специальной теории относительности является псевдоевклидовым.

§ 9. Определение гиперболических функций и некоторые соотношения между ними. Для действительных значений x основные определения таковы:

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

Непосредственно видно, что

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4} \{ (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 \} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Разделив левую и последнюю правую части последнего равенства на $\operatorname{ch}^2 x$, получим

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad \text{или} \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}}.$$

Чтобы получить формулы

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x_1 \pm x_2) &= \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 \pm \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2, \\ \operatorname{sh}(x_1 \pm x_2) &= \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 \pm \operatorname{sh} x_2 \operatorname{ch} x_1, \end{aligned}$$

нужно в определении

$$\operatorname{ch}(x_1 + x_2) = \frac{e^{x_1} e^{x_2} + e^{-x_1} e^{-x_2}}{2}, \quad \operatorname{sh}(x_1 + x_2) = \frac{e^{x_1} e^{x_2} - e^{-x_1} e^{-x_2}}{2}$$

подставить значения, вытекающие из определения гиперболических функций:

$$e^{\operatorname{th}^{-1} t} = \operatorname{ch} \operatorname{th}^{-1} t + \operatorname{sh} \operatorname{th}^{-1} t, \quad e^{-\operatorname{th}^{-1} t} = \operatorname{ch} \operatorname{th}^{-1} t - \operatorname{sh} \operatorname{th}^{-1} t.$$

Наконец, последняя весьма важная формула для действительных значений x :

$$\operatorname{th}(x_1 \pm x_2) = \frac{\operatorname{sh}(x_1 \pm x_2)}{\operatorname{ch}(x_1 \pm x_2)} = \frac{\operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 \pm \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2}{\operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 \pm \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2} = \frac{\operatorname{th} x_1 \operatorname{th} x_2 \pm 1}{1 \pm \operatorname{th} x_1 \operatorname{th} x_2}.$$

В этой книге (гл. 5) мы пользуемся еще разложениями

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} \dots + 1 - x + \frac{x^2}{2} \dots}{2} = \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \dots, \quad \operatorname{sh} x \approx x. \end{aligned}$$

Связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями устанавливается следующим образом. В определении тригонометрических функций (формулы Эйлера)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

подставляются мнимые значения z , т. е. полагают $z = i\varphi$. Тогда непосредственно видно, что

$$\sin(i\varphi) = i \operatorname{sh} \varphi, \quad \cos(i\varphi) = \operatorname{ch} \varphi, \quad \operatorname{tg}(i\varphi) = i \operatorname{th} \varphi,$$

если только вспомнить, что $i^2 = -1$ и $1/i = -i$.

Литература к Приложению I

А. Д. М а к - К о п е л, Введение в тензорный анализ. С приложениями к геометрии, механике и физике, Физматгиз, 1963.

Очень разумно составленная книга, содержащая все необходимые для физики сведения о тензорах. Ознакомившись с этой книгой, читатель окажется вполне подготовленным с математической стороны к чтению книг, посвященных римановой геометрии и общей теории относительности.

Н. Е. К о ч и н, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд-во АН СССР, 1954; «Наука», 1965.

Книга содержит основные сведения о тензорах и написана очень доступно.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ГАУССОВОЙ СИСТЕМЕ

В электродинамике гауссова система используется не менее часто, чем система СИ, которой мы придерживались в тексте гл. 6. Разумеется, выбор системы единиц не влияет на принципиальную сторону дела, однако внешний вид формул меняется. Для удобства читателей мы приводим основные формулы в гауссовой системе. У формул сохранена та же нумерация, под которой они приведены в основном тексте гл. 6.

В вакууме уравнения для потенциалов A и φ имеют вид

$$\begin{aligned} \square A &= \Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j, \\ \square \varphi &= \Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Условие Лоренца:

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (6.8)$$

Закон сохранения заряда остается неизменным:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0. \quad (6.4)$$

Определение 4-потенциала и 4-тока:

$$\vec{\Phi} (A, i\varphi), \quad \vec{\Phi} (\varphi, \vec{A}), \quad (6.11)$$

$$\vec{s} (j, ic\rho), \quad \vec{s} (c\rho, j). \quad (6.12)$$

Связь средних полей с потенциалами:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} A, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \dot{A}. \quad (6.25)$$

Тензоры электромагнитного поля в вакууме:

$$F_{ih} = \left(\frac{\partial \Phi_h}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_h} \right), \quad (6.28)$$

$$f_{ih} = F_{ih} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

Тензоры электромагнитного поля в веществе:

$$f_{ih} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_{ikl} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.31)$$

Тензор моментов:

$$\mathfrak{M}_{ih} = \begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & iP_x \\ -M_z & 0 & M_y & iP_y \\ M_y & -M_x & 0 & iP_z \\ -iP_x & -iP_y & -iP_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.33)$$

причем теперь $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$, а $\mathbf{E} = \mathbf{D} - 4\pi\mathbf{P}$.

Формулы преобразования полей:

$$E_x = E'_x, \quad B_x = B'_x,$$

$$E_y = \Gamma \left(E'_y + \frac{V}{c} B'_z \right), \quad B_y = \Gamma \left(B'_y - \frac{V}{c} E'_z \right), \quad (6.36)$$

$$E_z = \Gamma \left(E'_z - \frac{V}{c} B'_y \right), \quad B_z = \Gamma \left(B'_z + \frac{V}{c} E'_y \right);$$

$$D_x = D'_x, \quad H_x = H'_x,$$

$$D_y = \Gamma \left(D'_y + \frac{V}{c} H'_z \right), \quad H'_y = \Gamma \left(H'_y - \frac{V}{c} D'_z \right), \quad (6.37)$$

$$D_z = \Gamma \left(D'_z - \frac{V}{c} H'_y \right), \quad H_z = \Gamma \left(H'_z + \frac{V}{c} D'_y \right).$$

Эти же формулы в проекциях на направление относительной скорости и перпендикулярно к ней:

$$E_{\parallel} = E'_{\parallel}, \quad E_{\perp} = \Gamma \left(E'_{\perp} - \frac{1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{B}'] \right), \quad \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel},$$

$$\mathbf{B}_{\perp} = \Gamma \left(\mathbf{B}'_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{E}'] \right); \quad (6.38)$$

$$D_{\parallel} = D'_{\parallel}, \quad D_{\perp} = \Gamma \left(D'_{\perp} - \frac{1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{H}'] \right), \quad \mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}'_{\parallel},$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = \Gamma \left(\mathbf{H}'_{\perp} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{D}'] \right). \quad (6.42)$$

Плотность силы Лоренца:

$$f = \rho \left\{ E + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right\}. \quad (6.49)$$

Инварианты поля (§ 6.5):

$$I_1 = F_{ik}^2 = E^2 - H^2, \quad I_2 = 2i\mathbf{E} \mathbf{H}.$$

Четырехмерное выражение для плотности силы Лоренца одинаково как в СИ, так и в гауссовой системе:

$$f_i = \frac{1}{c} F_{ih} s_h. \quad (6.53)$$

Уравнения Максвелла в трехмерной форме:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{D}}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (6.56)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (6.57)$$

Уравнения Максвелла в четырехмерной форме:

$$\frac{\partial f_{ih}}{\partial x_h} = \frac{4\pi}{c} s_i, \quad (6.60)$$

$$\frac{\partial F_{ih}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{hl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_h} = 0. \quad (6.67)$$

Материальные уравнения в трехмерной форме не меняются:

$$\mathbf{D}' = \varepsilon \mathbf{E}', \quad (6.68)$$

$$\mathbf{B}' = \mu \mathbf{H}', \quad (6.69)$$

$$\mathbf{j}' = \sigma \mathbf{E}'. \quad (6.70)$$

Материальные соотношения в движущейся среде:

$$\mathbf{D} + \frac{1}{c} [\mathbf{VH}] = \varepsilon \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{VE}] \right), \quad (6.74)$$

$$\mathbf{B} - \frac{1}{c} [\mathbf{VE}] = \mu \left(\mathbf{H} - \frac{1}{c} [\mathbf{VD}] \right). \quad (6.75)$$

Разрешая эти уравнения относительно \mathbf{D} и \mathbf{B} , получим ($\mathbf{V} = \mathbf{V}/c$)

$$\mathbf{D} = \frac{1}{1 - \varepsilon\mu\mathbf{V}^2} \left\{ \varepsilon \mathbf{E} (1 - \mathbf{V}^2) + (\varepsilon\mu - 1) \left\{ \frac{1}{c} [\mathbf{VH}] - \frac{\varepsilon}{c^2} \mathbf{V} (\mathbf{VE}) \right\} \right\},$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{1 - \varepsilon\mu\mathbf{V}^2} \left\{ \mu \mathbf{H} (1 - \mathbf{V}^2) - (\varepsilon\mu - 1) \left\{ \frac{1}{c} [\mathbf{VH}] - \frac{\mu}{c^2} \mathbf{V} (\mathbf{VE}) \right\} \right\},$$

откуда

$$\mathbf{D}_{\parallel} = \varepsilon \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}_{\parallel} = \mu \mathbf{H}_{\parallel}, \quad (6.76)$$

$$(1 - \varepsilon\mu\mathbf{V}^2) \mathbf{D}_{\perp} = \varepsilon (1 - \mathbf{V}^2) \mathbf{E}_{\perp} + (\varepsilon\mu - 1) \frac{1}{c} [\mathbf{VH}], \quad (6.77)$$

$$(1 - \varepsilon\mu\mathbf{V}^2) \mathbf{B}_{\perp} = \mu (1 - \mathbf{V}^2) \mathbf{H}_{\perp} - (\varepsilon\mu - 1) \frac{1}{c} [\mathbf{VE}].$$

Если пренебречь в (6.77) величинами \mathbf{V}^2 и $\varepsilon\mu\mathbf{V}^2$ по сравнению с единицей, то вместо (6.77) получим

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \frac{1}{c} (\varepsilon\mu - 1) [\mathbf{VH}], \quad (6.78)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} - \frac{1}{c} (\varepsilon\mu - 1) [\mathbf{VE}].$$

Материальные уравнения в четырехмерной форме:

$$f_{ih}u_h = \varepsilon F_{ih}u_h, \quad (6.79)$$

$$F_{ih}u_l + F_{kl}u_i + F_{li}u_k = \mu (f_{ih}u_l + f_{hl}u_i + f_{li}u_k), \quad (6.80)$$

$$s_i = \frac{\sigma}{c} F_{ih}u_h. \quad (6.81)$$

Плотность энергии электромагнитного поля:

$$w = \frac{ED + BH}{8\pi}.$$

Вектор Пойнтинга — Умова:

$$S = \frac{c}{4\pi} [EH].$$

Тензор энергии-импульса-натяжений в вакууме:

$$T_{ih} = \begin{pmatrix} T_{\alpha\beta} & -icg \\ -\frac{i}{c}S & w \end{pmatrix}, \quad g = \frac{S}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} [EH],$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \{E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta\} - \delta_{\alpha\beta} w.$$

Тензоры энергии-импульса-натяжений в среде (Минковский и Абрагам):

$$T_{ih}^M = \begin{pmatrix} T_{\alpha\beta}^M & -icg^M \\ -\frac{i}{c}S & w \end{pmatrix}, \quad g^M = \frac{1}{4\pi c} [DB],$$

$$T_{\alpha\beta}^M = \frac{1}{4\pi} \{E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta\} - \delta_{\alpha\beta} w,$$

$$T_{ih}^A = \begin{pmatrix} T_{\alpha\beta}^A & -icg^A \\ -\frac{i}{c}S & w \end{pmatrix}, \quad g^A = \frac{S}{c^2} = \frac{1}{4\pi c} [EH],$$

$$T_{\alpha\beta}^A = \frac{1}{8\pi} \{E_\alpha D_\beta + E_\beta D_\alpha + H_\alpha B_\beta + H_\beta B_\alpha\} - \delta_{\alpha\beta} w.$$

ЛИТЕРАТУРА

В отличие от первого издания этой книги, где была сделана попытка перечислить большинство книг, так или иначе затрагивающие вопросы СТО, в этом списке литературы оставлены лишь те из них, в которых теории относительности уделено достаточно внимания. Краткие характеристики книг приводятся для удобства читателей и отражают всего лишь мнение автора этой книги.

1. «Принципы относительности», Сборник работ классиков релятивизма, ОНТИ; 1935.

Оригинальные работы Лоренца, Пуанкаре, Эйнштейна и Минковского. Работы первых двух авторов позволяют судить о непосредственных предшественниках Эйнштейна. Работа Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел» в основном исчерпывает содержание специальной теории относительности, за исключением вопросов термодинамики. В докладе Г. Минковского содержится изложение основ СТО в четырехмерной геометрической физике.

2. «Принципы относительности», Сборник работ по специальной теории относительности, Атомиздат, 1973.

В этом сборнике воспроизведены все материалы, касающиеся СТО, опубликованные в сборнике 1935 г. Добавлен ряд статей Пуанкаре, Лоренца, Планка, Паули. Третья часть сборника посвящена истории создания СТО: в ней представлены также статьи историков науки.

3. А. Эйнштейн, Собрание сочинений, т. I, «Наука», 1965; т. II, 1966; т. IV, 1967.

Томы I и II содержат работы Эйнштейна по теории относительности. Том I посвящен как СТО, так и ОТО. Во II томе в основном собраны работы по ОТО. В I томе содержится перевод двух брошюр А. Эйнштейна, ранее выходивших отдельными изданиями (см. ниже).

4. А. Эйнштейн, Сущность теории относительности, ИЛ, 1955.
Очень сжатое и довольно трудное изложение основных идей.
5. А. Эйнштейн, О специальной и общей теории относительности (общедоступное изложение), в сб. «Физика и реальность», «Наука», 1965.

Эйнштейн пошутил как-то, что эту книгу скорее следует назвать «общедоступным» изложением.

6. Л. И. Мандельштам, Лекции по физическим основам теории относительности, Полное собрание трудов, т. V, Изд-во АН СССР, 1950. Отдельное издание: Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике, «Наука», 1972.

В лекциях Л. И. Мандельштама, обработанных его учениками, изложена история развития СТО, а также принципиальные вопросы этой теории. Лекции были рассчитаны на достаточно подготовленную аудиторию, и их едва ли можно посоветовать для первого знакомства с предметом. Однако для подготовленного читателя знакомство с этими лекциями просто необходимо.

7. К. Мёллер, Теория относительности, Атомиздат, 1975.

Расширенный вариант университетского курса лекций. Охватывает большой круг вопросов СТО и ОТО. Требует значительной математической и физической подготовки.

8. В. Паули, Теория относительности, Гостехиздат, 1947.

Книга представляет собой перевод статьи из математической энциклопедии: статья написана в 1921 г. и содержит весьма полное изложение предмета, хотя и энциклопедически краткое. В статье содержатся обширные библиографические ссылки.

9. Л. Ландау, Е. Лифшиц, Теория поля; выпло 6 изданий, последнее: «Наука», 1967, 1973.

Первые четыре главы книги посвящены фактически СТО. Книга представляет собой в целом последовательное изложение общей и специальной теории относительности с точки зрения принципа наименьшего действия. Поля в среде в этой книге не рассматриваются: этот вопрос излагается в книге тех же авторов «Электродинамика сплошных сред», «Наука», 1967.

Книга рассчитана на подготовленного читателя, и многие вопросы в ней изложены сжато и конспективно; многие полезные для первого ознакомления со СТО детали опущены. По фактическому материалу и манере изложения — одна из лучших книг по СТО.

10. Р. Толмев, Относительность, термодинамика и космология, «Наука», 1974.

Классическая книга, посвященная как СТО, так и ОТО. Книга написана обстоятельно и подробно, отличается широким охватом материала.

11. Э. Гейлор, Дж. Уилер, Физика пространства-времени, «Мир», 1968, 1973.

Эта книга интересна тем, что в ней делается попытка излагать СТО в самом начале обучения в высшей школе. Книга излагает релятивистские представления о пространстве и времени, а также весьма подробно релятивистскую механику. Часть материала, содержащегося в книге, была прочитана Уилером на курсах повышения квалификации американских учителей. В книгу много превосходных иллюстраций — чертежей и графиков; в качестве приложений к отдельным главам приведено около ста очень полезных задач, касающихся самых тонких вопросов СТО. В конце книги немного места уделено также и общей теории относительности.

12. Н. Бергман, Введение в теорию относительности, ИЛ, 1947.

В книге излагается сначала СТО, а затем уже и ОТО, занимающая большую часть книги. В первых девяти главах изложены основные результаты СТО, однако, пытаясь сразу подготовить математический аппарат ОТО, автор излишне усложнил изложение СТО.

13. Р. Беккер, Теория электричества, т. II, Электропная теория, раздел E, Гостехиздат, 1941.

Очень ясное и доступное изложение основных вопросов СТО; вполне доступна студенту, ознакомившемуся с курсом электродинамики.

14. В. Падовский, М. Флиис, Классическая электродинамика, Физматгиз, 1963.

Во второй половине книги читатель найдет очень насыщенное и современное изложение СТО; в конце глав — задачи и литература.

15. А. Зоммерфельд, Электродинамика, т. III, Лекции по теоретической физике, ИЛ, 1958.

Третья глава книги посвящена подробному изложению теории относительности и теории электрона. Очень своеобразное и не слишком элементарное изложение. Представляет особый интерес для подготовленного читателя.

16. В. А. Фок, Теория пространства, времени, тяготения, Физматгиз, 1961; изд. 2-е, «Наука», 1964.
Хотя книга в основном посвящена ОТО, в первых главах излагается СТО. Ряд вопросов излагается оригинально.
17. Дж. Джексоп, Классическая электродинамика, «Мир», 1965.
Современный курс электродинамики. Гл. 2 посвящена краткому изложению СТО. В гл. 12 почти 14 рассматриваются уже приложения. В конце этих глав имеются задачи по СТО. Книга интересна в основном приложениями СТО.
18. М. А. Топелла, Основы электромагнетизма и теории относительности, ИЛ, 1962.
В книге подробно излагаются многие вопросы СТО и ОТО, однако изложение ведется в сложных обозначениях и излишне математизировано.
19. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, «Мир».
Лекции Фейнмана, составляющие девять томов, представляют собой интересную попытку объединения общего курса физики с курсом теоретической физики. Теория относительности появляется в этом курсе в нескольких томах:
том II, «Мир», 1965, гл. 15—17;
том III, «Мир», 1965, гл. 34;
том V, «Мир», 1966, гл. 15;
том VI, «Мир», 1966, гл. 25, 26.
20. Д. Бом, Специальная теория относительности, «Мир», 1967.
Очень интересная книга с уклоном в принципиальные и философские проблемы СТО. Основная тема книги — формирование физических представлений о пространстве и времени. Конкретные вопросы СТО, затронутые в книге, изложены четко и ясно. Книга требует критического отношения со стороны читателя, когда речь заходит о философских проблемах. Рассчитана на подготовленного читателя.
21. Г. Бонди, Гипотезы и мифы в физической теории, «Мир», 1972.
Небольшая книжка, посвященная обсуждению принципиальных вопросов СТО и основ теории тяготения. Очень полезна после первоначального ознакомления со СТО.
22. Г. Бонди. Относительность и здравый смысл, «Мир», 1967.
Книга Бонди замечательна своим методическим подходом к изложению СТО. В книге совершенно справедливо подчеркивается, что изложение СТО с позиций идей физики XIX века сегодня уже совсем нецелесообразно. В связи с этим дана новая оценка опыта Майкельсона, оценка глазами современного физика. Вместе с тем предлагается новый метод изложения СТО, в котором вводятся наблюдатели, обладающие идентичными часами и радиолокаторами. Тем самым из теории исключаются жесткие масштабы. Метод « k -коэффициента» позволяет получить все основные кинематические результаты СТО на основе постулатов Эйнштейна, минуя преобразования Лоренца. В таком изложении широко используются геометрические схемы; автор показывает, каким образом метод « k -коэффициента» можно увязать с преобразованиями Лоренца и обычной схемой изложения.
23. П. Бергман, Загадка гравитации, «Наука», 1969.
Эта небольшая книга, не содержащая технических подробностей, четко указывает на ограниченность специальной теории относительности и неизбежность перехода в общем случае к ОТО. В книге рассказано о том, какие выводы СТО явились отправной точкой для построения теории тяготения. «Загадка гравитации» состоит из трех частей: первая посвящена СТО, вторая — ОТО, третья содержит новейшие данные астрономических наблюдений. Уровень изложения предполагает знакомство

с курсом физики и математики примерно в объеме втуза. Первая часть не может служить для первоначального знакомства со СТО, но является превосходным конспектом для повторения.

24. К. Ланцош, Альберт Эйнштейн и строение космоса, «Наука», 1967.
Эта книга ни в коей мере не может служить учебником СТО. Однако принципиальный подход к построению СТО изложен в ней четко и ясно. Первые три главы книги следует рекомендовать всякому, кто начинает изучать СТО.
25. Ю. Б. Румер, М. С. Рывкин. Теория относительности, Учпедгиз, 1960.
Сравнительно простое изложение основных идей и результатов СТО; рассчитана на студентов педвузов физических специальностей.
26. Б. Джефф, Майкельсон и скорость света, ИЛ, 1963.
27. В. А. Угаров, Фотографирование тел, движущихся с релятивистскими скоростями, Эйнштейновский сборник 1973. «Наука», 1974.
28. Я. А. Смородинский, В. А. Угаров, Два парадокса специальной теории относительности, УФП 107, вып. 1, 141 (1972).
29. П. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1975.
30. Дж. Стреттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
31. Т. Мардер, Парадокс часов, «Мир», 1973.
32. Я. П. Терлецкий, Парадоксы теории относительности, «Наука», 1966.
33. В. Л. Гинзбург, Теоретическая физика и астрофизика, «Наука», 1975.
34. Г. Голдстейн, Классическая механика, «Наука», 1975.
35. К. Ланцош, Вариационные принципы механики, «Мир», 1965.
36. А. Зоммерфельд, Оптика, ИЛ, 1953.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аберрация света 97, 249
Алгебраическое дооплещение 362
- Вектор Пойнтинга 214
Времениподобный интервал 85, 116, 120
Встречные пучки 165
- Давление света 257
Декартова система координат 8
Дефект масс 153
Дисперсионное соотношение 237
- Закон Бло — Савара 210
— сохранения полной энергии 135
- Изотропность пространства 10, 53, 99
Инвариантность собственного времени 129
— уравнений 18
Инварианты электромагнитного поля 189
Интегралы движения 170
Интервал между событиями 56, 84
— собственного времени 44, 82
Интерферометр Майкельсона 325
- Кинетическая энергия 134
Классический импульс 134
Ковариантные компоненты вектора 369
Конвекционный ток 117, 203
Контравариантные компоненты вектора 368
Коэффициент увлечения света 236
- Лоренцево сокращение 329
- Масса покоя 135, 296, 301
— — инвариантная 338
— тела 17
Масштабные гиперболы 122, 179
Материальные уравнения 199, 201
Матрицы преобразования Лоренца 63, 184, 263
- Метрические коэффициенты 113
Мир Минковского 112, 117
Мировая линия 103, 117
Мысленные эксперименты 41
- Однородность пространства 10, 53, 99
Оператор Д'Аламбера 358
Опыт Фопч-Бруевича 331
— Кеннеди — Торндайка 329
— Майкельсона 325
— — и Гейля 332
— Синьяка — Гарреса 331
— Флзо 27, 91, 322
— Фуко 22, 27
- Относительные величины 17 и далее
- Параметр скорости 60, 94
Плотность силы 190
— — Лоренца 191, 213
Полная энергия частицы в консервативном поле 149
Постулаты Эйнштейна 34, 51, 113
Преобразования Галилея 11, 14, 27, 90 и далее
— Лоренца 51, 55, 66 и далее
Принцип относительности 15, 17 — причинности 84
Пространственная дисперсия 237
Пространственноподобный интервал 87, 116, 120
Псевдоевклидова геометрия 114
— — плоскость 117
Псевдоевклидово пространство 114, 372
- Релятивистская масса 151, 338
Релятивистское преобразование скоростей 89
- Световой конус 120
— метр 58
Светоподобный интервал 88
Сигнатура 113
Сила Абрагама 224
— Лоренца 174, 190

- Сила Минковского 137, 139
 Символ Кронекера 218, 351
 Синхронизация часов 38, 47
 Система отсчета 9, 10, 12 и далее
 — — гелиоцентрическая 23
 — — геоцентрическая 23
 — — инерциальная 20, 305
 — — мгновенно-сопутствующая 82
 — — перпендикулярная 342
 — — релятивистская 37
 — — собственная 45, 147
 Скин-слой 241
 Собственная длина 70
 Собственно евклидово пространство 370
 Собственное время 106, 128, 293
 Событие 7, 47 и далее
- Тардоны 262
 Тахионы 283
 Тензор Абрагама 224
 — антисимметричный 357
 — индукции 230
 — масс 340
 — Минковского 223, 224
 — натяжений Максвелла 214, 220
 — поля 230
- Тензор симметричный 356
 — электромагнитного поля 182
 Ток проводимости 202, 204
- Угол aberrации 97, 319
 Ультрарелятивистские частицы 149
 Уравнения Максвелла 172 и далее
 — Минковского 200
 Условие Лоренца 174, 176
- Фазовая скорость 239
 Фотоны 263
 Функция Гамильтона 148
- Цуг волн 253
- Частотная дисперсия 237
- Энергия покоя 144
 — связи 152
 Эфир 316, 328
 Эффект Вавилова — Черенкова 267
 — Доплера 72, 248
 — — аномальный 267
 — — поперечный 81, 251
 — — продольный 79, 99, 249
 — проектора 257

Владимир Александрович Угаров

Специальная теория относительности

М., 1977., 384 стр. с илл.

Редактор *И. Г. Вирко*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 29/III 1977 г. Подписано к печати 20/VII 1977 г. Бумага 60×90¹/₁₆. Физ. печ. л. 24+1 вкл. Условн. печ. л. 24,125. Уч.-изд. л. 24,55. Тираж 20 000 экз. Цена книги 1 р. 10 к. Заказ № 0153

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Московская
типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9.