Э. Т. УИТТЕКЕР, Дж. Н. ВАТСОН

КУРС СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ АНАЛИЗА

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ Ф. В. ШИРОКОВА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

A COURSE OF MODERN ANALYSIS

AN INTRODUCTION TO THE GENERAL THEORY OF INFINITE PROCESSES AND OF ANALYTIC FUNCTIONS; WITH AN ACCOUNT OF THE PRINCIPAL TRANSCENDENTAL FUNCTIONS

BY

E. T. WHITTAKER, Sc. D., F. R. S.

Professor of Mathematics in the University of Edinburgh

AND

G. N. WATSON, Sc. D., F. R. S.

Professor of Mathematics in the University of Birmingham

FOURTH EDITION

CAMBRIDGE
AT THE UNIVERSITY PRESS
1927

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

«Курс современного анализа» Уиттекера и Ватсона выдержал за рубежом несколько изданий. Начиная с четвертого издания (1927 г.) зарубежные издания стали стереотипными. Первое русское издание вышло в 1933—1934 гг. под редакцией Г. М. Голузина. Второе русское издание, предлагаемое сейчас читателю, еще раз сверено с английскими изданиями. В нем устранены замеченные опечатки, произведена незначительная модернизация терминологии и добавлены некоторые ссылки. В остальном оно сохранило стиль английской школы классического комплексного анализа (Бромуич, Барнс, Бэйли, Харди и Литлвуд, Титчмарш), с которой советский читатель знаком теперь по многочисленным переводам.

Книга разделена на две части. Первая из них содержит изложение основных вопросов комплексного анализа. Вторая часть посвящена главным образом изучению различных классов специальных функций. Хотя за тридцать лет, прошедшие с выхода первого русского издания, появилось много книг и справочников по специальным функциям (например, справочник Эрдейи, Магнуса, Оберхеттингера и Трикоми «Higher transcendental functions», тт. I—III), книга Уиттекера и Ватсона остается непревзойденной по широте охвата и четкости комплексной («современной») точки зрения на специальные функции.

В книге отсутствуют, однако, такие методы теории функций комплексного переменного, как, скажем, метод конформных отображений и метод перевала, играющие важную роль в современной теории специальных функций и в ее приложениях. В этом смысле книга не является исчерпывающей. Некоторые главы, как, например, глава о тригонометрических рядах или глава об интегральных уравнениях, сейчас были бы написаны по-иному.

Основная цель книги в целом — научить читателя обращаться со специальными функциями так же свободно, как он обращается с элементарными функциями, к которым он только и приучен школой и, увы, университетом. Специальные функции в вещественном анализе обладают «жесткостью». Методами вещественного анализа можно, например, разложить котангенс в ряд элементарных дробей. Однако решение каждой такой задачи требует своего искусственного приема.

Только при комплексном подходе «жесткие» функции вещественного анализа становятся «пластическими». Метод комплексного переменного позволяет (естественным способом!) преобразовать ряд в произведение, произведение превратить в ряд элементарных дробей, ряд элементарных дробей просуммировать и вновь свернуть в функцию и т. п. Этой комплексной «пластике» и учит читателя книга Уиттекера и Ватсона.

Огромную роль в книге играют примеры и задачи (их около тысячи в обеих частях). Трудные, а иногда и очень трудные выкладки влекут за собой свободное владение аналитическим аппаратом.

Квантовая механика, теория распространения радиоволн и многие другие дисциплины нуждаются в теории специальных функций; эту потребность и призвано удовлетворить (теперь уже только отчасти) новое издание «современного» анализа, ставшего ныне уже классическим.

Ф. Широков

ГЛАВА 1

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Рациональные числа

Идея совокупности чисел возникает в первую очередь из рассмотрения совокупности *положительных*[1]) *целых чисел*, т. е. чисел 1, 2, 3, 4, ... Положительные целые числа обладают многими свойствами, которые излагаются в руководствах по теории чисел. Однако еще на самой ранней стадии развития математики было известно, что арифметические действия вычитания и деления выполнимы в области положительных целых чисел лишь при некоторых неудобных ограничениях. Вследствие этого в элементарной арифметике область чисел была расширена таким образом, чтобы арифметические действия вычитания и деления были всегда выполнимы в области этих чисел.

Чтобы получить класс чисел, над которыми может производиться без всяких ограничений действие вычитания, мы строим класс *целых* чисел, который содержит в себе класс положительных[2]) целых чисел ($+1$, $+2$, $+3$, ...), класс отрицательных целых чисел (-1, -2, -3, ...) и число 0.

Для того же, чтобы получить класс чисел, над которыми и вычитание и деление[3]) можно производить без всякого ограничения, мы строим класс *рациональных чисел*. Числами, принадлежащими к этому классу, будут, например, $1/2$, 3, 0, $-15/7$.

Мы, таким образом, ввели три класса чисел: (I) *беззначные целые числа*, (II) *целые числа*, (III) *рациональные числа*. В план настоящей книги не входит рассмотрение того, как строится класс целых чисел, а также логическое обоснование теории рациональных чисел[4]).

---

[1]) Строго говоря, более подходящим названием было бы не *положительные*, а *беззначные*.

[2]) В узком смысле.

[3]) За исключением деления на рациональное число 0.

[4]) Такое изложение, определяющее рациональное число как упорядоченную пару целых чисел, подобно тому как комплексное число в § 1.3 определяется как упорядоченная пара вещественных чисел, можно найти в книге Гобсона (Hobson) «Functions of a real variable», §§ 1—12. См. также Э. Ландау, Основы анализа, ИЛ, 1957.

Только что изложенное обобщение идеи числа происходило не без некоторого противодействия со стороны более консервативных математиков. В последнюю половину XVIII века Мазерес (Maseres, 1731—1824) и Френд (Frend, 1757—1841) опубликовали работы по алгебре, тригонометрии и т. д., в которых они совершенно отказались от применения отрицательных чисел, хотя Декарт свободно пользовался отрицательными числами более чем за сто лет до них.

Рациональное число x может быть наглядно представлено следующим образом.

Если на прямой взять начальную точку O и определенный отрезок OP_1 (пусть P_1 лежит справа от O), то мы можем отложить от O длину OP_x так, что отношение $\frac{OP_x}{OP_1}$ будет равно x. Точка P_x берется справа или слева от O, смотря по тому, будет ли число x положительным или отрицательным. Мы можем рассматривать или *точку* P_x, или *перемещение* OP_x (которое мы будем обозначать $\mathbf{OP}_x$) как изображение числа x.

Все рациональные числа, таким образом, могут быть представлены точками прямой; обратное же заключение будет неправильным. В самом деле, если мы отложим на прямой длину OQ, равную диагонали квадрата со стороной OP_1, то можно доказать, что точка Q не будет соответствовать никакому рациональному числу.

Будем считать, что точки, не представляющие рациональных чисел, представляют *иррациональные* числа. Так, точка Q изображает собою иррациональное число $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$ Если такое разъяснение существования иррациональных чисел удовлетворяло математиков XVIII столетия и, может быть, еще является удовлетворительным для тех, интересы которых направлены более к приложениям математики, чем к выяснению логических основ самой теории, то с логической точки зрения замена арифметического доказательства существования иррационального числа интуитивными геометрическими представлениями является неправильной. Дедекинд (Dedekind) в 1858 г. доказал, что теория иррациональных чисел может быть построена на чисто арифметической основе, без помощи геометрии.

1.2. Теория иррациональных чисел Дедекинда[1])

Геометрическое свойство точек прямой, послужившее исходным пунктом построения арифметической теории иррациональных чисел, заключается в том, что если все точки прямой разделены на два класса таким образом, что каждая точка первого класса расположена правее каждой точки второго класса, то на прямой имеется одна и только одна точка, которая производит указанное разделение точек на прямой.

---

[1]) Теория, разработанная в 1858 г., не была, однако, опубликована ранее появления труда Дедекинда «Stetigkeit und irrationale Zahlen», Braunschweig, 1872. Другие теории принадлежат Вейерштрассу (см. von D a n t s c h e r, Die Weierstrass'sche Theorie der irrationalen Zahlen, Leipzig, 1908) и Кантору (C a n t o r, Math. Ann., 123—130 (1872)).

Следуя этой идее, Дедекинд установил правила, по которым может быть осуществлено разделение, или *сечение*[1]), *всех* рациональных чисел на два класса так, чтобы эти классы (которые назовем: классом L и классом R или левым и правым классами) обладали следующими свойствами:

(I) существует по крайней мере одно число каждого класса;

(II) каждое число класса L меньше каждого числа класса R.

Ясно, что такое сечение производится любым рациональным числом x, и x будет наибольшим числом класса L, или наименьшим числом класса R. Но можно произвести сечения, в которых никакое рациональное число x не будет обладать этим свойством. Например, так как нет такого рационального числа, квадрат которого был бы равен 2 [2]), то мы можем образовать сечение, в котором класс R содержит положительные рациональные числа, квадраты которых превосходят 2, а класс L — все остальные рациональные числа.

Тогда это сечение будет таково, что класс R не будет иметь наименьшего числа, а класс L — наибольшего числа. В самом деле, если x будет каким-либо положительным рациональным числом и $y = \dfrac{x(x^2+6)}{3x^2+2}$, то тогда $y - x = \dfrac{2x(2-x^2)}{3x^2+2}$ и $y^2-2 = \dfrac{(x^2-2)^3}{(3x^2+2)^2}$, и x^2, y^2 и 2 будут расположены в порядке возрастания или убывания; поэтому, если будет дано какое-нибудь число x класса L, то мы можем всегда найти большее число того же класса L, и, если будет дано какое-либо число x' класса R, мы можем всегда найти меньшее число класса R; такими числами могут быть, например, y и y', где y' будет определяться той же самой функцией от x', как и y от x.

Если произведено сечение, при котором класс R имеет наименьшее число A_2 или класс L имеет наибольшее число A_1, то это сечение определит *рациональное вещественное число*, которое принято обозначать тем же самым символом A_2 или A_1 [3]).

---

[1]) Этот процесс составлял основу рассмотрения иррациональных чисел греческих математиков в VI и V веках до нашей эры. Прогресс, достигнутый Дедекиндом, заключался в том, что он заметил, что на этом процессе может быть построена чисто арифметическая теория иррациональных чисел.

[2]) Если $\dfrac{p}{q}$ будет таким числом с наименьшим возможным знаменателем, то легко видеть, что $\dfrac{2q-p}{p-q}$ будет другим таким числом и $0 < p-q < q$, так что $\dfrac{p}{q}$ не будет таким числом с наименьшим возможным знаменателем. Это противоречие приводит к заключению, что такого рационального числа существовать не может.

[3]) Это не вызывает на практике никакой путаницы.

Если произведено такое сечение, что класс R не имеет наименьшего, а класс L наибольшего числа, то оно определяет *иррациональное вещественное число*[1]).

Если x, y — вещественные числа (определяемые сечениями), то мы говорим, что x больше, чем y, если класс L, определяющий x, содержит по крайней мере два[2]) числа класса R, определяющего y.

Пусть α, β, ... — вещественные числа, A_1, B_1, ... — какие-либо числа соответствующих классов L, а A_2, B_2, ... — какие-либо числа соответствующих классов R. Классы, элементами которых будут соответственно A_1, A_2, ..., будем обозначать символами (A_1), (A_2), ...

Тогда *суммой* (обозначаемой $\alpha+\beta$) двух вещественных чисел α и β будем называть такое вещественное число (рациональное или иррациональное), которое определяется классом (A_1+B_1) как классом L и классом (A_2+B_2) как классом R.

Конечно, необходимо доказать, что эти классы определяют сечение рациональных чисел. Ясно, что $A_1+B_1 < A_2+B_2$ и что существует по крайней мере одно число каждого из классов (A_1+B_1), (A_2+B_2). Остается доказать, что существует не более *одного* рационального числа, большего, чем любое из чисел A_1+B_1, и меньшего, чем любое из чисел A_2+B_2; для этого допустим, что имеются два таких числа x и y $(x<y)$. Пусть a_1 будет число из (A_1) и a_2 — число из (A_2), и пусть N будет ближайшее целое число, большее, чем $\dfrac{a_2-a_1}{\frac{1}{2}(y-x)}$.

Возьмем последнее из чисел $a_1+\dfrac{m}{N}(a_2-a_1)$ $(m=0,\ 1,\ \ldots,\ N)$, принадлежащее к (A_1), и первое из чисел, принадлежащее к (A_2); пусть этими числами будут c_1 и c_2. Тогда $c_2-c_1=\dfrac{1}{N}(a_2-a_1)<\dfrac{1}{2}(y-x)$.

Выберем d_1 и d_2 подобным же образом из классов, определяющих β; тогда

$$c_2+d_2-c_1-d_1<y-x.$$

Но $c_2+d_2\geqslant y$; $c_1+d_1\leqslant x$; поэтому $c_2+d_2-c_1-d_1\geqslant y-x$; таким образом, мы пришли к противоречию, предполагая, что существуют два рациональных числа x, y, не принадлежащие ни к (A_1+B_1), ни к (A_2+B_2).

Если всякое рациональное число принадлежит или к классу (A_1+B_1), или к классу (A_2+B_2), то классы (A_1+B_1), (A_2+B_2) определяют иррациональное число. Если существует одно рациональное число x, не

---

[1]) Б. Рассел (B. A. W. Russel) определяет класс вещественных чисел просто как *класс всех классов* L; класс вещественных чисел, классы L которых имеют наибольшее число, соответствует классу рациональных чисел, и, хотя рациональное вещественное число x, соответствующее рациональному числу x, будет как понятие отличаться от него, обозначение обоих одним и тем же символом не вызывает никакой путаницы.

[2]) Если эти два класса имеют только одно число общим, то оно может оказаться наибольшим среди чисел класса L числа x и наименьшим среди чисел класса R числа y.

принадлежащее ни к какому классу, то тогда класс L, образованный из x, (A_1+B_1), и класс R, образованный из (A_2+B_2), определяют рациональное вещественное число x. В обоих случаях определяемое число называется суммой $\alpha+\beta$.

Разность $\alpha-\beta$ двух вещественных чисел определяется классом (A_1-B_2) как классом L и классом (A_2-B_1) как классом R.

Произведение двух положительных вещественных чисел α и β определяется классом (A_2B_2) как классом R и классом L, состоящим из всех остальных рациональных чисел. Читатель легко сообразит, как определить произведение отрицательных вещественных чисел и частное двух вещественных чисел. Можно доказать, что вещественные числа можно комбинировать согласно сочетательному, распределительному и переместительному законам.

Совокупность вещественных рациональных и вещественных иррациональных чисел называется совокупностью вещественных чисел; для краткости вещественные рациональные числа и иррациональные числа называются, соответственно, рациональными и иррациональными числами.

1.3. Комплексные числа

Мы видели, что вещественное число может быть представлено наглядно как перемещение вдоль определенной прямой. Если же P и Q — две какие-либо точки на плоскости, то для определения перемещения PQ требуется уже два вещественных числа, например разности координат точек P и Q, отнесенных к неподвижным прямоугольным осям. Если координаты P суть (ξ, η), а $(\xi+x, \eta+y)$ — координаты Q, то перемещение PQ может быть обозначено символом $[x, y]$. Таким образом, мы должны в этом случае рассматривать упорядоченные пары вещественных чисел[1]).

Естественным определением суммы двух перемещений $[x, y]$, $[x', y']$ является перемещение, заменяющее последовательное применение этих двух перемещений; поэтому принято определять сумму двух пар чисел равенством

$$[x, y]+[x', y']=[x+x', y+y'].$$

Произведение пары чисел и вещественного числа x' естественно тогда определить равенством

$$x'\times[x, y]=[x'x, x'y].$$

Мы можем определить действие умножения пар чисел различным образом, но единственным определением, приводящим к нетривиальным результатам, является то, которое выражается равенством

$$[x, y]\times[x', y']=[xx'-yy', xy'+x'y].$$

[1]) Порядок чисел отличает упорядоченную пару $[x, y]$ от упорядоченной пары $[y, x]$.

Очевидно, что

$$[x, 0] \times [x', y'] = [xx', xy'] = x \times [x', y'],$$
$$[0, y] \times [x', y'] = [-yy', x'y] = y \times [-y', x'].$$

Геометрическая интерпретация этих определений заключается в том, что результат умножения на перемещение $[x, 0]$ совпадает с умножением на вещественное число x, а результат умножения перемещения на $[0, y]$ совпадает с умножением его на вещественное число y и поворотом на прямой угол.

Принято обозначать пару чисел $[x, y]$ составным символом $x + iy$ и называть (следуя Гауссу) *комплексным числом*. В основных действиях арифметики комплексное число $x + i0$ может быть заменено вещественным числом x, и, определяя i как комплексное число $0 + i1$, мы будем иметь $i^2 = [0, 1] \times [0, 1] = [-1, 0]$; следовательно, i^2 может быть заменено через -1.

Читатель легко убедится в том, что определение сложения и умножения пар чисел установлено таким образом, что обычные действия алгебры можно осуществлять по тем же самым правилам, как и с вещественными числами, рассматривая символ i как число и заменяя произведение ii, где оно встретится, через -1.

Например, легко убедиться, что если a, b, c — комплексные числа, то

$$a + b = b + a,$$
$$ab = ba,$$
$$(a + b) + c = a + (b + c),$$
$$ab \cdot c = a \cdot bc,$$
$$a(b + c) = ab + ac.$$

Если ab равно нулю, то или a, или b равно нулю.

Оказывается, что алгебраические действия прямые и обратные, примененные к комплексным числам, не приводят к каким-либо новым классам чисел, поэтому комплексное число можно рассматривать для наших целей как наиболее общий тип числа.

Введение комплексных чисел привело к важным открытиям в математике. Например, некоторые функции, рассматриваемые только как функции вещественных аргументов, кажутся существенно различными, между тем как они оказываются родственными, если рассматривать их как функции комплексных аргументов. Так, было найдено, что тригонометрические функции могут быть выражены через показательные функции комплексного аргумента при помощи равенств $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

Кроме того, многие важнейшие теоремы современного анализа окажутся неверными, если ограничиться областью вещественных чисел. Так, теорема о том, что всякое алгебраическое уравнение степени n имеет n корней, будет справедлива в общем случае только в области комплексных чисел.

Кватернионы Гамильтона дают пример дальнейшего расширения идеи числа. Кватернион $w+xi+yj+zk$ составляется из четырех вещественных чисел w, x, y, z и четырех числовых единиц 1, i, j, k таким же образом, как и обычное комплексное число $x+yi$ составляется из двух вещественных чисел x, y и двух числовых единиц 1, i. Кватернионы не подчиняются, однако, переместительному закону умножения.

1.4. Модуль комплексного числа

Пусть $x+iy$ — комплексное число, x и y — вещественные числа. Тогда положительный квадратный корень из x^2+y^2 называется *модулем* $x+iy$ и обозначается $|x+iy|$.

Рассмотрим комплексное число, представляющее сумму двух комплексных чисел $x+iy$ и $u+iv$. Мы имеем

$$(x+iy)+(u+iv)=(x+u)+i(y+v).$$

Модуль суммы этих двух чисел будет поэтому

$$\{(x+u)^2+(y+v)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

или

$$\{(x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2(xu+yv)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Но

$$\{|x+iy|+|u+iv|\}^2=\left\{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^2=$$
$$=(x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}=$$
$$=(x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2\{(xu+yv)^2+(xv-yu)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Последнее выражение будет больше (или, самое меньшее, равно)

$$(x^2+y^2)+(u^2+v^2)+2(xu+yv).$$

Поэтому мы имеем

$$|x+iy|+|u+iv|\geqslant|(x+iy)+(u+iv)|,$$

т. е. *модуль суммы двух комплексных чисел не может быть больше суммы их модулей*; по индукции получим, что модуль суммы любого числа комплексных чисел не может быть больше суммы их модулей.

Далее, рассмотрим комплексное число, представляющее собой произведение двух данных комплексных чисел $x+iy$ и $u+iv$; имеем

$$(x+iy)(u+iv)=(xu-yv)+i(xv+yu),$$

и поэтому

$$|(x+iy)(u+iv)|=\{(xu-yv)^2+(xv+yu)^2\}^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\{(x^2+y^2)(u^2+v^2)\}^{\frac{1}{2}}=|x+iy|\cdot|u+iv|,$$

т. е. *модуль произведения двух комплексных чисел* (и, следовательно, по индукции, любого числа комплексных чисел) *равен произведению их модулей.*

1.5. Диаграмма Аргана

Мы видели, что комплексное число можно представить геометрически на плоскости, пользуясь прямоугольными осями Ox и Oy.

Тогда точку P, координаты которой относительно этих осей будут x, y, можно рассматривать как изображение комплексного числа $x+iy$. Таким образом, каждой точке плоскости соответствует некоторое комплексное число и, наоборот, любому комплексному числу соответствует одна и только одна точка на плоскости. Комплексное число $x+iy$ может быть обозначено одной буквой z [1]). Тогда точку P будем называть *изображением* числа z. Мы будем также говорить, что число z есть *аффикс* точки P.

Если мы обозначим $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ через r и возьмем θ такое, что $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$, то, очевидно, r будет длиной радиуса-вектора точки P относительно начала O, а θ — его углом с осью Ox.

Такое представление комплексного числа называется часто *диаграммой* Аргана [2]). По данному выше определению очевидно, что r есть модуль числа z, угол же θ называется *аргументом*, *амплитудой* или *фазой*.

Мы пишем

$$\theta = \arg z.$$

Из геометрических соображений ясно, что аргумент комплексного числа не однозначен (в то время как модуль однозначен) [3]); если θ есть одно значение аргумента, то другие значения аргумента даются выражением $2n\pi+\theta$, где n — любое целое число, не равное нулю. Значение $\arg z$, которое удовлетворяет неравенству $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, называется *главным* его значением.

Если P_1 и P_2 — точки, соответствующие числам z_1 и z_2, то точка, представляющая значение z_1+z_2, будет конечной точкой отрезка, проведенного из P_1, который равен и параллелен отрезку, соединяющему начало координат с P_2. Чтобы найти точку, представляющую

---

[1]) Принято называть x и y соответственно *вещественной* и *мнимой частью* z. Мы будем часто писать $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

[2]) J. R. Argand, Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, 1806 г.; однако ею пользовался уже Гаусс в его хельмштедской диссертации 1799 г. (Werke, III, 20—23), который пришел к ней в октябре 1797 г. (Math. Ann. LXIII, 18); Вессель (Caspar Wessel) рассмотрел ее в мемуаре, представленном Датской академии в 1797 г. и опубликованном там в 1798—1799 гг. Термин «комплексное число» впервые встречается в 1831 г. (Gauss, Werke, II, 102).

[3]) См. приложение, § A.521.

комплексное число z_1z_2, где z_1, z_2 — два данных комплексных числа, заметим, что если

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

то перемножение дает

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

Точка, представляющая число z_1z_2, имеет поэтому модуль, равный произведению модулей точек P_1 и P_2, и аргумент, равный сумме аргументов точек P_1 и P_2.

ЛИТЕРАТУРА

Логические основания теории чисел

A. N. Whitehead and B. A. W. Russell, Principia mathematica, 1910—1913.

B. A. W. Russell, Introduction to mathematical philosophy, 1919.

Иррациональные числа

Р. Дедекинд, Непрерывность и иррациональные числа, изд. 3, перев. с нем., Одесса, 1914.

V. von Dantscher, Vorlesungen über die Weierstrass'sche Theorie der irrationalen Zahlen, Leipzig, 1908.

E. W. Hobson, Functions of a real variable, гл. 1, 1907.

T. J. I'a Bromwich, Theory of infinite series, приложение 1, 1908.

Комплексные числа

H. Hankel, Theorie der complexen Zahlen-Systeme, Leipzig, 1867.

O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, II, Leipzig, 1886.

Г. Х. Харди, Курс чистой математики, гл. III, ИЛ, 1949.

Примеры

1. Показать, что точки, представляющие комплексные числа $1+4i$, $2+7i$, $3+10i$, лежат на одной прямой.

2. Показать, что можно провести параболу через точки, представляющие комплексные числа

$$2+i, \quad 4+4i, \quad 6+9i, \quad 8+16i, \quad 10+25i.$$

3. Представить n корней из единицы на диаграмме Аргана и показать, что число первообразных корней (т. е. корней, степени каждого из которых дают все корни) равно числу целых чисел (включая единицу), меньших n и взаимно простых с n.

Доказать, что если $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$ — аргументы первообразных корней, то $\sum \cos p\theta = 0$, когда p — положительное целое число, меньшее, чем $\frac{n}{abc \ldots k}$, причем $a, b, c, \ldots, k$ — все различные простые множители числа n; а также, что если $p = \frac{n}{abc \ldots k}$, то $\sum \cos p\theta = \frac{(-1)^{\mu} n}{abc \ldots k}$, где μ — число простых множителей числа n.

(Math. Trip., 1895)

ГЛАВА 2

ТЕОРИЯ СХОДИМОСТИ

2.1. Определение [1]) предела последовательности

Пусть z_1, z_2, z_3, ... — бесконечная последовательность чисел, вещественных или комплексных. Тогда, если существует такое число l, что соответственно всякому положительному [2]) числу ε, как угодно малому, может быть найдено такое число n_0, что

$$|z_n - l| < \varepsilon$$

для всех значений n, больших n_0, то говорят, что *последовательность* (z_n) *стремится к пределу* l *при стремлении* n *к бесконечности.*

Символически утверждение «предел последовательности (z_n) при n, стремящемся к бесконечности, равен l» записывается следующим образом [3]):

$$\lim_{n\to\infty} z_n = l; \quad \lim z_n = l; \quad z_n \to l, \quad \textit{когда} \quad n \to \infty.$$

Если последовательность такова, что при заданном произвольном числе N (как угодно большом) можно найти такое число n_0, что $|z_n| > N$ для всех значений $n > n_0$, то говорят, что «$|z_n|$ стремится к бесконечности при стремлении n к бесконечности», и записывают

$$|z_n| \to \infty.$$

Соответственно в случае, когда $-x_n > N$ при $n > n_0$, говорят, что

$$x_n \to -\infty.$$

Если последовательность вещественных чисел не стремится ни к конечному пределу, ни к $+\infty$ и ни к $-\infty$, то она называется *колеблющейся.*

---

[1]) Определение, равноценное данному, впервые дано Валлисом в 1655 г. (J. Wallis, Opera, I, 382, 1695).

[2]) Число нуль исключается из класса положительных чисел.

[3]) Обозначение стрелкой принадлежит Лизему (Leathem, Camb. Math. Tracts., № 1).

2.11. Определение термина «порядок величины»

Если две последовательности (ζ_n) и (z_n) таковы, что существует такое число n_0, что $|\zeta_n/z_n| < K$ при $n > n_0$, причем K не зависит от n, то говорят, что величина ζ_n имеет порядок величины z_n, и записывают[1])

$$\zeta_n = O(z_n);$$

так, например,

$$\frac{15n+19}{1+n^3} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Если $\lim\left(\frac{\zeta_n}{z_n}\right) = 0$, то записывают $\zeta_n = o(z_n)$.

2.2. Предел возрастающей последовательности

Пусть (x_n) — такая последовательность вещественных чисел, что $x_{n+1} \geqslant x_n$ для всех значений n. Тогда *эта последовательность стремится к некоторому пределу или к бесконечности* (и, таким образом, она не является колеблющейся последовательностью).

Пусть x — какое-либо рациональное число; тогда или (I) $x_n \geqslant x$ для всех значений n, больших некоторого числа n_0, зависящего от величины x, или (II) $x_n < x$ для всех значений n.

Если условие (II) не выполняется *ни для какого* значения x (как угодно большого), то $x_n \to \infty$.

Но если существует такое значение x, для которого условие (II) имеет место, то мы можем разделить рациональные числа на два класса: класс L, содержащий те рациональные числа x, для которых имеет место (I), и класс R тех рациональных чисел x, для которых имеет место (II). Это сечение определяет вещественное число α, рациональное или иррациональное.

Если ε есть произвольное положительное число, то число $\alpha - \frac{1}{2}\varepsilon$ принадлежит к классу L, определяющему α, и мы можем, таким образом, найти такое n_1, что $x_n > \alpha - \frac{1}{2}\varepsilon$ при $n > n_1$; напротив, число $\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon$ будет числом класса R и, следовательно, $x_n < \alpha + \frac{1}{2}\varepsilon$.

Поэтому при $n > n_1$

$$|\alpha - x_n| < \varepsilon$$

и, таким образом,

$$x_n \to \alpha.$$

---

[1]) Это обозначение принадлежит Бахману (Bachmann, Zahlentheorie, 401, 1894) и Ландау (Landau, Primzahlen, 1, 61, 1909).

Следствие. Убывающая последовательность стремится к некоторому пределу или к $-\infty$.

Пример 1. Если $\lim z_m = l$, $\lim z'_m = l'$, то $\lim(z_m + z'_m) = l + l'$, ибо для данного ε мы можем подыскать такие n и n', что

$$\text{(I)}\quad |z_m - l| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{когда } m > n,$$

$$\text{(II)}\quad |z'_m - l'| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{когда } m > n'.$$

Пусть n_1 будет больше n и n'; тогда при $m > n_1$

$$|(z_m + z'_m) - (l + l')| \leqslant |z_m - l| + |z'_m - l'| < \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim(z_m + z'_m) = l + l'.$$

Пример 2. Доказать аналогично, что $\lim(z_m - z'_m) = l - l'$, $\lim(z_m z'_m) = ll'$ и если $l' \neq 0$, $\lim(z_m/z'_m) = l/l'$.

Пример 3. Если $0 < x < 1$, то $x^n \to 0$, ибо если $x = (1 + a)^{-1}$ и $a > 0$, то по формуле бинома для положительного целого показателя имеем

$$0 < x^n \frac{1}{(1 + a)^n} < \frac{1}{1 + na}.$$

С другой стороны, очевидно, что для данного положительного числа ε мы можем взять такое n_0, что $(1 + na)^{-1} < \varepsilon$ при $n > n_0$; таким образом, $x^n \to 0$.

2.21. Предельные точки и теорема Больцано — Вейерштрасса[1])

Пусть (x_n) — последовательность вещественных чисел. Если существует такое число G, что для каждого положительного значения ε, как угодно малого, может быть найдено неограниченное число таких членов последовательности, что

$$G - \varepsilon < x_n < G + \varepsilon,$$

то G называется *предельной точкой* или *точкой сгущения* последовательности.

Теорема Больцано состоит в том, что *если $\lambda \leqslant x_n \leqslant \rho$, где λ, ρ не зависят от n, то последовательность (x_n) имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Для доказательства теоремы возьмем сечение, при котором (I) класс R состоит из таких рациональных чисел, что если A есть одно из них, то имеется только ограниченное число членов x_n, удовлетворяющих условию $x_n > A$; (II) класс L такой, что в нем

[1]) Эта теорема, часто приписываемая Вейерштрассу, была доказана Больцано (Bolzano, Abh. der k. böhmischen Ges. der Wiss. v. (1817)) (перепечатано в «Klassiker der Exakten Wiss.», № 153). По-видимому, она была известна и Коши.

имеется неограниченное число членов x_n таких, что $x_n \geqslant a$ для всех чисел a класса L.

Это сечение определяет вещественное число G, и если ε — произвольное положительное число, то $G - \frac{1}{2}\varepsilon$ и $G + \frac{1}{2}\varepsilon$ соответственно будут числами классов L и R; следовательно, имеется неограниченное число членов последовательности, удовлетворяющих условию

$$G - \varepsilon < G - \frac{1}{2}\varepsilon \leqslant x_n \leqslant G + \frac{1}{2}\varepsilon < G + \varepsilon,$$

а тогда G и будет предельной точкой.

2.211. Определение «наибольшего из пределов»

Число G, полученное в § 2.21, называется «наибольшим из пределов последовательности (x_n)». Последовательность (x_n) не может иметь предельной точки, большей G, ибо, если G' будет такой точкой и $\varepsilon = \frac{1}{2}(G' - G)$, то $G' - \varepsilon$ будет числом класса R, определяющего G, так что будет только ограниченное число членов последовательности, удовлетворяющих условию $x_n > G' - \varepsilon$. Это условие противоречит принятому предположению, что G' — предельная точка. Мы обозначаем

$$G = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, x_n.$$

«Наименьший из пределов» L последовательности (обозначаемый $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n$) определяется как

$$-\overline{\lim_{n \to \infty}}\,(-x_n).$$

2.22. Теорема Коши[1]) о необходимом и достаточном условии существования предела

Покажем теперь, что необходимое и достаточное условие существования предела последовательности чисел $z_1, z_2, z_3, \ldots$ состоит в том, чтобы *соответственно всякому данному положительному числу* ε, *как угодно малому, можно было найти такое число* n, *что*

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

[1]) Cauchy, Analyse algébrique, стр. 125, 1821.

для всех положительных целых значений p. Этот результат является одной из важнейших и основных теорем анализа. Иногда его называют *принципом сходимости*.

Мы должны показать, во-первых, что это условие *необходимо*, т. е. что оно удовлетворяется, когда предел существует. Итак, предположим, что существует предел l; тогда (§ 2.1) для любого положительного как угодно малого числа ε можно найти такое целое число n, что

$$|z_n - l| < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad |z_{n+p} - l| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

для всех положительных значений p; поэтому

$$|z_{n+p} - z_n| = |(z_{n+p} - l) - (z_n - l)| \leqslant |z_{n+p} - l| + |z_n - l| < \varepsilon,$$

что показывает *необходимость* условия

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon,$$

и таким образом, первая половина теоремы доказана.

Далее мы должны доказать[1]), что это условие *достаточно*, т. е. что если оно удовлетворяется, то предел существует.

(I) Предположим, что последовательность *вещественных* чисел (x_n) удовлетворяет условию Коши, иначе говоря, что для любого положительного числа ε можно найти такое целое число n, что

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$$

для всех положительных целых значений p.

Пусть значение n, соответствующее $\varepsilon = 1$, будет m. Пусть, далее, λ_1, ρ_1 будут наименьшим и наибольшим из значений x_1, x_2, ..., x_m; тогда

$$\lambda_1 - 1 < x_n < \rho_1 + 1$$

для всех значений n; обозначим $\lambda_1 - 1 = \lambda$, $\rho_1 + 1 = \rho$.

Тогда для всех значений n имеем $\lambda < x_n < \rho$. Поэтому *по теореме* § 2.21 *последовательность* (x_n) *имеет по крайней мере одну предельную точку* G.

Докажем, что не может быть более одной предельной точки; действительно, если их имеется две, G и H $(H < G)$, то возьмем $\varepsilon < \frac{1}{4}(G - H)$; тогда по условию будет существовать такое число n, что $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$ для всех положительных значений p. Но так как, с другой стороны, G и H являются предельными точками, то существуют такие положительные числа q и r, что

$$|G - x_{n+q}| < \varepsilon, \quad |H - x_{n+r}| < \varepsilon.$$

---

[1]) Это доказательство дано Штольцем и Гмайнером (Stolz, Gmeiner, Theoretische Arithmetik, II, стр. 144, 1902).

Отсюда имеем

$$|G-x_{n+q}|+|x_{n+q}-x_n|+|x_n-x_{n+r}|+|x_{n+r}-H|<4\varepsilon.$$

Но по § 1.4 сумма в левой части больше или равна $|G-H|$. Поэтому $G-H<4\varepsilon$, что противоречит предположению; следовательно, существует только одна предельная точка. Отсюда же вытекает, что существует только конечное число членов последовательности вне интервала $(G-\delta,\ G+\delta)$, где δ — произвольное положительное число. Ибо если бы существовало неограниченное число таких членов, то они имели бы предельную точку, которая была бы предельной точкой данной последовательности и которая не совпадала бы с G; итак, *G есть предел* (x_n).

(II) Теперь пусть последовательность (z_n) вещественных или комплексных чисел удовлетворяет условию Коши; пусть $z_n=x_n+iy_n$, где x_n и y_n вещественны; тогда для всех значений n и p

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|z_{n+p}-z_n|,\quad |y_{n+p}-y_n|\leqslant|z_{n+p}-z_n|.$$

Поэтому последовательности вещественных чисел (x_n) *и* (y_n) *удовлетворяют условию Коши* и, следовательно, по (I) существуют пределы (x_n) и (y_n). Тогда, согласно примеру 1 § 2.2, существует и предел (z_n), и теорема, таким образом, доказана.

2.3. Сходимость бесконечных рядов

Пусть $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n\ \ldots$ — последовательность чисел, вещественных или комплексных. Обозначим через S_n сумму

$$u_1+u_2+\ \ldots\ +u_n.$$

Тогда, если S_n стремится к пределу S при стремлении n к бесконечности, то говорят, что бесконечный ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ \ldots\ +u_n+\ \ldots$$

является *сходящимся* или что этот ряд *сходится к сумме* S. В противном же случае говорят, что бесконечный ряд будет *расходящимся*. Если ряд сходится, то выражение $S-S_n$, представляющее сумму ряда

$$u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\ \ldots,$$

называется n-м *остатком* ряда и обозначается часто символом R_n. Сумму

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\ \ldots\ +u_{n+p}$$

будем обозначать символом $S_{n,p}$.

Из этого определения и результатов предыдущего параграфа, непосредственно получаем, что необходимое и достаточное условие сходимости бесконечного ряда заключается в том, чтобы для любого данного положительного числа ε можно было найти такое n, что $|S_{n,p}| < \varepsilon$ для всех положительных значений p.

Так как $u_{n+1} = S_{n,1}$, то отсюда, как частный случай, следует, что $\lim u_{n+1} = 0$, другими словами, n-й член сходящегося ряда стремится к нулю при стремлении n к бесконечности. Это последнее условие хотя и необходимо, но недостаточно для сходимости ряда, как это видно из рассмотрения ряда

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

В этом ряде

$$S_{n,n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Выражение в правой части уменьшится при замене каждого члена на $(2n)^{-1}$, и таким образом,

$$S_{n,n} > \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$S_{2^{n+1}} = 1 + S_{1,1} + S_{2,2} + S_{4,4} + S_{8,8} + S_{16,16} + \ldots$$
$$\ldots + S_{2^n, 2^n} > \frac{1}{2}(n+3) \to \infty$$

и ряд, следовательно, расходится; этот результат был замечен Лейбницем в 1673 г.

Существует два общих класса проблем, побуждающих нас к исследованию сходимости рядов:

(I) Мы можем получить ряд какими-нибудь формальными действиями, например, при решении линейного дифференциального уравнения с помощью рядов, и тогда для оправдания этих действий требуется обычно доказать, что ряд, полученный таким образом формально, будет сходящимся.

Простые признаки, которые позволяют судить о сходимости рядов в таких случаях, рассматриваются в §§ 2.31—2.61.

(II) Может случиться, что для данного выражения S можно получить разложение $S = \sum_{m=1}^{n} u_m + R_n$, годное для всех значений n; из определения предела следует, что если мы сможем доказать, что $R_n \to 0$, то ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ сходится и его сумма равна S.

Пример такой задачи приведен в § 5.4.

Бесконечные ряды встречаются[1]) у лорда Браункера (Brouncker, Phil. Trans., II, 645—649 (1668)). Выражение «сходящийся» было введено

[1]) См. примечание к § 2.7.

в том же самом году Джеймсом Грегори (James Gregory), профессором математики в Эдинбурге, а термин «расходящийся» — Н. Бернулли в 1713 г. Бесконечные ряды применялись систематически Ньютоном в 1669 г. в «De analysi per aequat. num. term. inf.», и он же исследовал в 1704 г. сходимость гипергеометрических рядов (§ 14.1). Но великие математики XVIII столетия пользовались бесконечными рядами свободно и по большей части без рассмотрения вопроса об их сходимости. Так, Эйлер (Euler) утверждал, что сумма ряда

$$\ldots \frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\ldots \tag{a}$$

равна нулю, на основании того, что

$$z+z^2+z^3+\ldots=\frac{z}{1-z} \tag{b}$$

и

$$1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots=\frac{z}{z-1}. \tag{c}$$

Ошибка произошла, конечно, вследствие того, что ряд (b) сходится только при $|z|<1$, а ряд (c) сходится только при $|z|>1$; так что ряд (a) никогда не сходится. Относительно истории исследований о сходимости см. Прингсгейм и Мольк (Pringsheim, Molk, Encyclopédie des Sci. Math., I (I)) и Райф (Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen, Tübingen, 1889).

2.301. Неравенство Абеля[1])

Пусть $f_n \geqslant f_{n+1} > 0$ *для всех целых значений* n. *Тогда* $\left|\sum_{n=1}^{m} a_n f_n\right| \leqslant A f_1$, *где* A *есть наибольшая из сумм*

$$|a_1|,\ |a_1+a_2|,\ |a_1+a_2+a_3|,\ \ldots,\ |a_1+a_2+\ldots+a_m|.$$

В самом деле, положив $a_1+a_2+\ldots+a_n=s_n$, мы имеем

$$\sum_{n=1}^{m} a_n f_n = s_1 f_1+(s_2-s_1) f_2+(s_3-s_2) f_3+\ldots+(s_m-s_{m-1}) f_m =$$
$$= s_1(f_1-f_2)+s_2(f_2-f_3)+\ldots+s_{m-1}(f_{m-1}-f_m)+s_m f_m.$$

Так как f_1-f_2, f_2-f_3, ... не отрицательны, то мы имеем при $n=2, 3, \ldots, m$

$$|s_{n-1}|(f_{n-1}-f_n) \leqslant A(f_{n-1}-f_n);$$

кроме того,

$$|s_m| f_m \leqslant A f_m;$$

таким образом, суммируя и пользуясь § 1.4, мы получаем

$$\left|\sum_{n=1}^{m} a_n f_n\right| \leqslant A f_1.$$

---

[1]) Abel, Journal für Math., 311—399 (1826). Частный случай теоремы § 2.31, следствие (I), имеется в этой же статье.

Следствие. Если $a_1, a_2, \ldots, w_1, w_2, \ldots$ — какие-либо числа, вещественные или комплексные, то

$$\left|\sum_{n=1}^{m} a_n w_n\right| \leqslant A\left\{\sum_{n=1}^{m-1} |w_{n+1}-w_n|+|w_m|\right\},$$

где A есть наибольшая из сумм $\left|\sum_{n=1}^{p} a_n\right|$ $(p=1, 2, \ldots, m)$ (Харди).

2.31. Признак сходимости Дирихле[1])

Пусть $\left|\sum_{n=1}^{p} a_n\right| < K$, *где* K *не зависит от* p. *Тогда, при* $f_n \geqslant f_{n+1} > 0$ *и* $\lim f_n = 0$[2]) *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ *сходится.* В самом деле, так как $\lim f_n = 0$, то мы можем для данного произвольного положительного числа ε найти такое m, что $f_{m+1} < \frac{\varepsilon}{2K}$. Но

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+q} a_n\right| \leqslant \left|\sum_{n=1}^{m+q} a_n\right| + \left|\sum_{n=1}^{m} a_n\right| < 2K$$

для всех положительных значений q, и таким образом, по неравенству Абеля мы имеем для всех положительных значений p

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n f_n\right| \leqslant A f_{m+1},$$

где

$$A < 2K.$$

Поэтому $\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n f_n\right| < K f_{m+1} < \varepsilon$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ по § 2.3 сходится.

Следствие (I). *Признак сходимости Абеля.* Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а последовательность (u_n) монотонна (т. е. всегда или $u_n \geqslant u_{n+1}$, или $u_n \leqslant u_{n+1}$) и $|u_n| < x$, где x не зависит от n, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ сходится.

В самом деле, по § 2.2 u_n стремится к пределу u; положим $|u-u_n| = f_n$. Тогда $f_n \to 0$ монотонно, и поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ сходится. Если теперь (u_n)

---

[1]) Dirichlet, Journal de Math. (2), VII, 253—255 (1862). До опубликования во 2-м издании жордановского «Cours d'Analyse» (1893) признак Дирихле и признак Абеля часто объединялись как признак Дирихле — Абеля (см. Pringsheim, Math. Ann., XXV, 423 (1885)).

[2]) При этих условиях мы говорим, что $f_n \to 0$ *монотонно.*

есть возрастающая последовательность, то $f_n = u - u_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u - u_n) a_n$ сходится. Поэтому, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u a_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n a_n$ будет сходиться. Если же (u_n) есть убывающая последовательность, то $f_n = u_n - u$, и доказательство аналогичное.

Следствие (II). Взяв в признаке Дирихле $a_n = (-1)^{n-1}$, получим, что при $f_n \geqslant f_{n+1}$ и $\lim f_n = 0$ ряд $f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \ldots$ сходится.

Пример 1. Показать, что при $0 < \theta < 2\pi$

$$\left| \sum_{n=1}^{p} \sin n\theta \right| < \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \theta;$$

вывести отсюда, что если $f_n \to 0$ монотонно, то ряд

$$\sum_{n+1}^{\infty} f_n \sin n\theta$$

сходится для всех вещественных значений θ и что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos n\theta$$

сходится, если θ не будет четным кратным π.

Пример 2. Показать, что если $f_n \to 0$ монотонно, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n \cos n\theta$$

сходится при θ вещественном и не равном нечетному кратному π, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n \sin a\theta$$

сходится для всех вещественных значений θ [заменить θ на $\pi + \theta$ в примере 1].

2.32. Абсолютная и условная сходимость

Для того чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ вещественных или комплексных чисел сходился, *достаточно* (но не необходимо), чтобы ряд модулей $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ был сходящимся. В самом деле, полагая $\sigma_{n,p} = |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|$, мы можем, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, по данному числу ε найти такое n, что $\sigma_{n,p} < \varepsilon$ для всех значений p. Но $|S_{n,p}| \leqslant \sigma_{n,p} < \varepsilon$, так что и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Условие это не необходимое, ибо, положив $f_n = \frac{1}{n}$ в § 2.31, следствие (II), мы видим, что ряд $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ сходится, хотя (§ 2.3) ряд модулей $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$, как известно, будет расходящимся.

В этом случае, следовательно, расходимость ряда модулей не влечет за собой расходимости самого ряда.

Ряды, для которых ряды модулей их членов сходятся, обладают особыми весьма важными свойствами и называются *абсолютно сходящимися* рядами. Ряды же, хотя и сходящиеся, но не абсолютно (т. е. если сами ряды сходятся, но ряды модулей расходятся), называются *условно сходящимися* рядами.

2.33. Геометрический ряд и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

Сходимость отдельных рядов в большинстве случаев устанавливается не прямым рассмотрением суммы $S_{n,p}$, а (как будет показано в последующем) сравнением данного ряда с некоторым другим рядом, о котором известно, что он сходится или расходится. Мы исследуем теперь сходимость двух рядов, наиболее часто применяемых для сравнения.

(I) *Геометрический ряд.*

Геометрическим рядом называется ряд

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots$$

Рассмотрим ряд модулей

$$1 + |z| + |z|^2 + |z|^3 + \ldots$$

Для этого ряда

$$S_{n,p} = |z|^{n+1} + |z|^{n+2} + \ldots + |z|^{n+p} = |z|^{n+1} \frac{1 - |z|^p}{1 - |z|}.$$

Отсюда при $|z| < 1$

$$S_{n,p} < \frac{|z|^{n+1}}{1 - |z|}$$

для всех значений p, и по примеру 3 § 2.2 для любого данного положительного числа ε можно найти такое n, что

$$|z|^{n+1} \{1 - |z|\}^{-1} < \varepsilon.$$

Таким образом, для данного ε мы можем найти такое n, что $S_{n,p} < \varepsilon$ для всех значений p. Следовательно, по § 2.22 ряд

$$1 + |z| + |z|^2 + \ldots$$

сходится при $|z| < 1$, и геометрический ряд будет *абсолютно сходящимся* при $|z| < 1$.

Если же $|z| \geqslant 1$, то члены геометрического ряда не стремятся к нулю при стремлении n к бесконечности, и ряд будет *расходящимся*

(II) *Ряд* $\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\ldots$

Рассмотрим теперь сумму

$$S_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}, \text{ где } s>1.$$

Мы имеем

$$\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}<\frac{2}{2^s}=\frac{1}{2^{s-1}},$$

$$\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}<\frac{4}{4^s}=\frac{1}{4^{s-1}} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, сумма 2^p-1 членов ряда будет меньше, чем

$$\frac{1}{1^{s-1}}+\frac{1}{2^{s-1}}+\frac{1}{4^{s-1}}+\frac{1}{8^{s-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{(p-1)(s-1)}}<\frac{1}{1-2^{1-s}},$$

а следовательно, сумма *любого* числа членов ряда будет меньше $(1-2^{1-s})^{-1}$. Поэтому возрастающая последовательность $\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^s}$ не может стремиться к бесконечности, так что по § 2.2 *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ *будет сходящимся, если* $s>1$; а так как все его члены вещественны и положительны, то они равны своим модулям, и ряд модулей членов будет поэтому сходящимся, т. е. *сходимость будет абсолютной*.

При $s=1$ получается ряд

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots,$$

который, как мы показали, будет расходящимся. Если $s<1$, то ряд *a fortiori* будет расходящимся, так как с уменьшением s члены ряда возрастают. *Итак, ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ *будет расходящимся при* $s\leqslant 1$.

2.34. Теорема сравнения

Покажем теперь, *что ряд* $u_1+u_2+u_3+\ldots$ *будет абсолютно сходящимся, если* $|u_n|$ *всегда меньше, чем* $C|v_n|$, *где* C — *некоторое число, не зависящее от* n, а v_n — n-*й член другого ряда, о котором известно, что он абсолютно сходится.*

При этих условиях имеем

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<C\{|v_{n+1}|+|v_{n+2}|+\ldots+|v_{n+p}|\},$$

где n и p — какие угодно целые числа. Но так как ряд $\sum v_n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum |v_n|$ является сходящимся, и таким образом, для данного ε можем найти такое n, что

$$|v_{n+1}|+|v_{n+2}|+\ldots+|v_{n+p}|<\frac{\varepsilon}{C}$$

для всех значений p. Отсюда вытекает, что можно найти такое n, для которого

$$|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

для всех значений p, т. е. ряд $\sum |u_n|$ будет сходящимся, ряд же $\sum u_n$ абсолютно сходящимся.

Следствие. Итак, ряд будет абсолютно сходиться, если отношение его n-го члена к n-му члену другого ряда сходящегося абсолютно будет по модулю меньше некоторого конечного числа, не зависящего от n.

Пример 1. Показать, что ряд

$$\cos z+\frac{1}{2^2}\cos 2z+\frac{1}{3^2}\cos 3z+\frac{1}{4^2}\cos 4z+\ldots$$

будет абсолютно сходящимся для всех вещественных значений z.

Когда z вещественно, мы имеем $|\cos nz|\leqslant 1$, и поэтому

$$\left|\frac{\cos nz}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

Модули членов данного ряда будут поэтому меньше (или в крайнем случае равны) соответствующих членов ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots,$$

который по § 2.33 будет абсолютно сходящимся. Поэтому и данный ряд абсолютно сходится.

Пример 2. Показать, что ряд

$$\frac{1}{1^2(z-z_1)}+\frac{1}{2^2(z-z_2)}+\frac{1}{3^2(z-z_3)}+\ldots,$$

где

$$z_n=e^{ni}\qquad(n=1,\,2,\,3,\,\ldots),$$

будет сходящимся для всех значений z, не лежащих на окружности $|z|=1$.

При рассмотрении вопросов такого рода весьма полезно геометрическое представление комплексных чисел. Пусть значения комплексного числа z представлены на некоторой плоскости; тогда числа z_1, z_2, z_3, ... дадут последовательность точек, лежащих на окружности радиуса, равного 1, и с центром в начале координат; можно показать, что любая точка окружности является предельной точкой (§ 2.21) точек z_n.

Для этих частных значений z_n величины z данный ряд не существует, так как знаменатель n-го члена равен нулю при $z=z_n$. Ради простоты мы не будем рассматривать наш ряд в точках z, расположенных на окружности радиуса 1.

Итак, предположим, что $|z| \neq 1$. Тогда для всех значений n

$$|z-z_n| \geqslant |1-|z|| > c^{-1}$$

при некотором значении c и, таким образом, модули членов данного ряда будут меньше соответствующих членов ряда

$$\frac{c}{1^2}+\frac{c}{2^2}+\frac{c}{3^2}+\frac{c}{4^2}+\ldots,$$

о котором известно, что он абсолютно сходится.

Данный ряд поэтому будет абсолютно сходящимся для всех значений z, исключая те, которые лежат на окружности $|z|=1$.

Интересно отметить, что область плоскости z, в которой ряд сходнтся, делится окружностью $|z|=1$ на две части, между которыми нет никакого сообщения.

Пример 3. Показать, что ряд

$$2\sin\frac{z}{3}+4\sin\frac{z}{9}+8\sin\frac{z}{27}+\ldots+2^n\sin\frac{z}{3^n}+\ldots$$

будет абсолютно сходящимся для всех значений z. Так как [1] $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n \sin\left(\frac{z}{3^n}\right)=z$, то мы можем найти такое число k, *не зависящее от* n (но зависящее от z), что $\left|3^n\sin\left(\frac{z}{3^n}\right)\right| < k$, и поэтому

$$\left|2^n\sin\frac{z}{3^n}\right| < k\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ сходится, то данный ряд будет абсолютно сходящимся.

2.35. Признак абсолютной сходимости Коши [2]

Если $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|^{\frac{1}{n}} < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится абсолютно.*

В самом деле, мы можем найти такое m, что при $n \geqslant m$ имеем $|u_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho < 1$, где ρ не зависит от n. Тогда при $n > m$ будет $|u_n| < \rho^n$, а так как ряд $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}\rho^n$ сходится, то из § 2.34 следует, что ряд $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} u_n$ $\left(\text{а потому и ряд } \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n\right)$ сходится абсолютно.

Примечание. Если $\overline{\lim}|u_n|^{\frac{1}{n}} > 1$, то u_n не стремится к нулю и по § 2.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ не будет сходящимся.

---

[1] Это видно из результатов, доказанных в приложении.
[2] Cauchy, Analyse algébrique, 132—135.

2.36. Признак абсолютной сходимости Даламбера [1])

Покажем теперь, что *ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

будет абсолютно сходящимся, если для всех значений n, больших некоторой постоянной величины r, отношение $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ будет меньше ρ, где ρ — некоторое положительное число, не зависящее от n и меньшее единицы.

Действительно, члены ряда

$$|u_{r+1}| + |u_{r+2}| + |u_{r+3}| + \ldots$$

будут меньше соответствующих членов ряда

$$|u_{r+1}|(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots),$$

абсолютно сходящегося при $\rho < 1$; поэтому ряд $\sum\limits_{n=r+1}^{\infty} u_n$ (а вместе с тем и данный ряд) абсолютно сходится.

Частный случай этой теоремы: если $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < 1$, то ряд будет абсолютно сходящимся.

Действительно, по определению предела, мы можем найти такое r, что

$$\left|\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - l\right| < \frac{1}{2}(1 - l) \quad \text{при } n > r,$$

и тогда

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \frac{1}{2}(1 + l) < 1 \quad \text{при } n > r.$$

Примечание. Если $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| > 1$, то u_n не стремится к нулю и согласно § 2.3 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ не будет сходиться.

Пример 1. Показать, что при $|c| < 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c^{n^2} e^{nz}$$

будет абсолютно сходящимся для всех значений z. $\left[\text{Ибо } \frac{u_{n+1}}{u_n} = c^{(n+1)^2 - n^2} e^z = c^{2n+1} e^z \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ если } |c| < 1.\right]$

---

[1]) D'Alembert, Opuscules, V, 171—182 (1768).

Пример 2. Показать, что ряд

$$z+\frac{a-b}{2!}z^2+\frac{(a-b)(a-2b)}{3!}z^3+\frac{(a-b)(a-2b)(a-3b)}{4!}z^4+\ldots$$

будет абсолютно сходящимся при $|z|<|b|^{-1}$. [Ибо $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a-nb}{n+1}z\to -bz$, когда $n\to\infty$; таким образом, условием абсолютной сходимости будет $|bz|<1$, т. е. $|z|<|b|^{-1}$.]

Пример 3. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{z^n-(1+n^{-1})^n}$ будет абсолютно сходящимся при $|z|<1$. [Ибо если $|z|<1$, то $|z^n-(1+n^{-1})^n|\geqslant(1+n^{-1})^n-|z^n|>1+1+\frac{n-1}{2n}+\ldots-1>1$ и модули членов ряда будут меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}n|z^{n-1}|$; но последний ряд абсолютно сходится, и таким образом, данный ряд будет абсолютно сходящимся.]

2.37. Общая теорема о рядах, для которых $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$

Ясно, что если для всех значений n, больших некоторой постоянной величины r, $|u_{n+1}|$ будет больше $|u_n|$, то члены ряда не стремятся к нулю при $n\to\infty$ и ряд будет расходящимся. С другой стороны, если $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ будет меньше некоторого числа, которое само меньше единицы и не зависит от n (когда $n>r$), то, как мы показали в § 2.36, ряд будет абсолютно сходящимся. Сомнительным случаем будет тот, когда $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ при возрастании n стремится к единице. В этом случае необходимо дальнейшее исследование.

Покажем теперь, что *ряд*[1]) $u_1+u_2+u_3+\ldots$, *в котором* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=1$, *будет абсолютно сходящимся, если существует такое положительное число* c, *что*

$$\varlimsup_{n\to\infty} n\left\{\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|-1\right\}=-1-c.$$

Действительно, сравним ряд $\sum|u_n|$ со сходящимся рядом $\sum v_n$, где $v_n=An^{-1-\frac{1}{2}c}$ и A — постоянная; мы имеем

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1+\frac{1}{2}c}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\left(1+\frac{1}{2}c\right)}=1-\frac{1+\frac{1}{2}c}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

[1]) Это предложение занимает второе место в последовательности теорем, принадлежащей Де Моргану (De Morgan) (первое место занимает теорема Даламбера, доказанная в § 2.36). Относительно истории этих теорем см. Chrystal, Algebra, гл. XXVI.

При $n \to \infty$

$$n\left\{\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1\right\} \to -1 - \frac{1}{2}c,$$

и таким образом, мы можем найти такое m, что при $n > m$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Надлежащим выбором постоянной A можно достичь того, что для всех значений n будем иметь

$$|u_n| < v_n.$$

Так как ряд $\sum v_n$ сходится, то и ряд $\sum |u_n|$ также сходится, а ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся.

Следствие. Если $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 + \frac{A_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, где A_1 не зависит от n, то ряд будет абсолютно сходящимся при $A_1 < -1$.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^r \exp\left(-k\sum_{1}^{n}\frac{1}{m}\right)$, когда $r > k$ и когда $r < k$.

2.38. Сходимость гипергеометрического ряда

Выведенные нами теоремы могут быть иллюстрированы на примере сходимости *гипергеометрического ряда*

$$1 + \frac{ab}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} z^2 + \\ + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)} z^2 + \ldots,$$

обозначаемого обычно (см. гл. 14) символом $F(a, b; c; z)$. Если c — отрицательное целое число, то все члены после $(1-c)$-го имеют знаменателями нули; а если a или b — отрицательное целое число, то ряд окончится соответственно $(1-a)$-м или $(1-b)$-м членом. Предположим, что эти случаи исключены, так что a, b и c не будут отрицательными целыми числами.

Для этого ряда при $n \to \infty$ имеем

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(a+n-1)(b+n-1)}{n(c+n-1)} z\right| \to |z|.$$

Поэтому по § 2.36 *ряд будет абсолютно сходиться при* $|z| < 1$ *и расходиться при* $|z| > 1$.

Когда $|z|=1$, мы имеем[1])

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|1+\frac{a-1}{n}\right|\left|1+\frac{b-1}{n}\right|\left|1-\frac{c-1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=$$
$$=\left|1+\frac{a+b-c-1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|.$$

Пусть a, b, c будут комплексными числами, заданными их вещественными и мнимыми частями:

$$a=a'+ia'',\quad b=b'+ib'',\quad c=c'+ic''.$$

Тогда мы имеем

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|1+\frac{a'+b'-c'-1+i(a''+b''-c'')}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|=$$
$$=\left\{\left(1+\frac{a'+b'-c'-1}{n}\right)^2+\left(\frac{a''+b''-c''}{n}\right)^2+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}=$$
$$=1+\frac{a'+b'-c'-1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Согласно следствию § 2.37 условием абсолютной сходимости будет

$$a'+b'-c'<0.$$

Отсюда: *при* $|z|=1$ *для абсолютной сходимости гипергеометрического ряда является достаточным*[2]) *условие, чтобы вещественная часть* $a+b-c$ *была отрицательной.*

2.4. Влияние изменения порядка членов ряда

В конечной сумме порядок членов не имеет никакого значения, так как его изменение не оказывает влияния на результат сложения. В бесконечных же рядах дело обстоит иначе[3]), как это будет видно из следующего примера.

---

[1]) Символ $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ не обозначает всегда одну и ту же функцию от n. См. § 2.11.

[2]) Это условие также необходимо. См. Bromwich, Infinite series, 202—204.

[3]) Мы говорим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ состоит из членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, взятых в другом порядке, если дано правило, по которому мы можем найти для каждого положительного целого числа p одно (и только одно) целое число q, и обратно, так что $v_q=u_p$. Результат этого параграфа был отмечен Дирихле (Dirichlet, Berliner Abh., 48 (1837), Journal de Math., IV, 397 (1839)). См. также Cauchy, Rèsumés analytiques (57, 1833, Turin).

Пусть

$$\Sigma = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$$

и

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots,$$

и пусть Σ_n и S_n обозначают суммы первых n их членов. Эти ряды составлены из одних и тех же членов, но порядок членов различен, и поэтому суммы Σ_n и S_n являются различными функциями n.

Пусть

$$\sigma_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n},$$

тогда

$$S_{2n} = \sigma_{2n} - \sigma_n$$

и, далее,

$$\Sigma_{3n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2n} =$$

$$= \sigma_{4n} - \frac{1}{2}\sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n = (\sigma_{4n} - \sigma_{2n}) + \frac{1}{2}(\sigma_{2n} - \sigma_n) = S_{4n} + \frac{1}{2}S_{2n}.$$

Заставляя $n \to \infty$, мы видим, что

$$\Sigma = S + \frac{1}{2}S;$$

таким образом, перестановка членов в ряде S изменила его сумму.

Пример. Показать, что если в ряде $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ изменить порядок членов так, что отношение числа положительных членов к числу отрицательных в первых n членах ряда будет равно в пределе a^2, то сумма ряда будет равна $\ln(2a)$.

2.41. Основные свойства абсолютно сходящихся рядов

Покажем, что сумма абсолютно сходящегося ряда *не зависит* от порядка, в котором следуют члены ряда. Пусть

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

— абсолютно сходящийся ряд, и пусть S' — ряд, составленный из тех же членов, расположенных в другом порядке.

Пусть ε — произвольное положительное число, и пусть n выбрано так, что

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

для всех значений p.

Предположим, что для получения первых n членов ряда S мы должны взять m членов в S'; тогда, если $k > m$, то $S'_k = S_n +$ члены ряда S с индексами, большими n, так что $S'_k - S = S_n - S +$ члены ряда S с индексами, большими n.

Модуль суммы любого числа членов ряда S с индексами, большими n, не превосходит суммы их модулей и поэтому будет меньше $\frac{1}{2}\varepsilon$.

Следовательно,

$$|S'_k - S| < |S_n - S| + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Но

$$|S_n - S| \leqslant \lim_{p\to\infty} \{|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}|\} \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Поэтому для данного ε мы можем найти такое m, что при $k > m$

$$|S'_k - S| < \varepsilon,$$

т. е. $S'_m \to S$, что и является требуемым результатом.

Если ряд с вещественными членами сходится, но не абсолютно, и если S_p — сумма первых p положительных членов, а σ_n — сумма первых n отрицательных членов, то $S_p \to \infty$, $\sigma_n \to -\infty$ и $\lim(S_p + \sigma_n)$ не существует, если не дано никакого соотношения между p и n. Риман даже показал, что можно надлежащим расположением членов ряда сделать $\lim(S_p + \sigma_n)$ равным *любому* данному вещественному числу [1]).

2.5. Двойные ряды [2])

Пусть $u_{m,n}$ — число, определенное для всех положительных целых значений m и n; рассмотрим таблицу чисел

$$\begin{array}{llll} u_{1,1}, & u_{1,2}, & u_{1,3}, & \ldots \\ u_{2,1}, & u_{2,2}, & u_{2,3}, & \ldots \\ u_{3,1}, & u_{3,2}, & u_{3,3}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

[1]) Riemann, Ges. Werke, 221.

[2]) Полная теория двойных рядов, на которой базируется данное изложение, дана Прингсгеймом (Pringsheim, Münchener Sitzungsberichte, XXVII, 101—152 (1897)). См., его же дальнейший мемуар, Math. Ann., LIII, 289—321 (1900) и мемуар Лондона (London, там же, 322—370), а также Бромуича (Bromwich) «Infinite series», в котором, в дополнение к теории Прингсгейма, содержатся многие другие вопросы, относящиеся к той же теории. Другие важные теоремы даны Бромуичем (Proc. London Math. Soc. (2), 1, 176—201 (1904)).

Сумму членов в прямоугольнике, состоящем из первых m строк и первых n столбцов, обозначим через $S_{m,n}$.

Если существует такое число S, что при заданном произвольном положительном числе ε можно найти такие целые числа m и n, что

$$|S_{\mu,\nu} - S| < \varepsilon$$

при $\mu > m$ и $\nu > n$, то мы говорим[1]), что *двойной ряд, общий член которого есть* $u_{\mu,\nu}$, *сходится к сумме* S, и пишем

$$\lim_{\mu \to \infty, \nu \to \infty} S_{\mu,\nu} = S.$$

Если двойной ряд, общий член которого $|u_{\mu,\nu}|$, сходится, то мы говорим, что данный двойной ряд является *абсолютно сходящимся.*

Так как $u_{\mu,\nu} = (S_{\mu,\nu} - S_{\mu,\nu-1}) - (S_{\mu-1,\nu} - S_{\mu-1,\nu-1})$, то легко видеть, что если двойной ряд сходится, то

$$\lim_{\mu \to \infty, \nu \to \infty} u_{\mu,\nu} = 0.$$

Необходимое и достаточное условие сходимости Штольца[2]). Условие, состоящее в том, что при заданном ε мы можем найти такие m и n, что $|S_{\mu+\rho,\nu+\sigma} - S_{\mu,\nu}| < \varepsilon$, когда $\mu > m$ и $\nu > n$, а ρ, σ принимают *любые* из значений 0, 1, 2, ..., очевидно (§ 2.22), необходимо для сходимости. Условие это также и достаточно, ибо если оно удовлетворяется, то при $\mu > m + n$

$$|S_{\mu+\rho,\mu+\rho} - S_{\mu,\mu}| < \varepsilon;$$

поэтому по теореме § 2.22 $S_{\mu,\mu}$ имеет предел S, а тогда, заставляя ρ и σ стремиться к бесконечности таким образом, чтобы $\mu + \rho = \nu + \sigma$, мы увидим, что $|S - S_{\mu,\nu}| \leqslant \varepsilon$ при $\mu > m$ и $\nu > n$; а это и является условием сходимости двойного ряда.

Следствие. Абсолютно сходящийся двойной ряд будет сходящимся. Действительно, если двойной ряд абсолютно сходится и если $t_{m,n}$ — сумма членов первых m строк в первых n столбцах ряда модулей, то при заданном ε мы можем найти такое μ, что при $p > m > \mu$ и $q > n > \mu$ будет $t_{p,q} - t_{m,n} < \varepsilon$.

Но $|S_{p,q} - S_{m,n}| \leqslant t_{p,q} - t_{m,n}$ и, таким образом, $|S_{p,q} - S_{m,n}| < \varepsilon$ при $p > m > \mu$, $q > n > \mu$; а это и есть условие сходимости двойного ряда.

---

[1]) Это определение по существу принадлежит Коши (Analyse algébrique, 540.)

[2]) Это условие, высказанное Штольцем (Stolz, Math. Ann., XXIV, 157—171 (1884)), кажется, впервые было доказано Прингсгеймом.

2.51. Методы нахождения сумм двойных рядов[1])

Предположим, ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\mu,\nu}$ сходится к сумме S_μ. Тогда ряд $\sum_{\mu=1}^{\infty} S_\mu$ называют суммой двойного ряда *по строкам*; иначе говоря, сумма по строкам будет $\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\mu,\nu}\right)$. Подобным же образом сумма *по столбцам* определяется как $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} u_{\mu,\nu}\right)$. Эти суммы не обязательно одинаковы, как видно из примера $S_{\mu,\nu}=\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}$, в котором сумма по строкам равна -1, а сумма по столбцам $+1$; S же не существует.

Теорема Прингсгейма[2]). *Если S существует и существуют суммы по строкам и столбцам, то каждая из этих сумм равна S.* Действительно, если существует S, то мы можем найти такое m, что

$$|S_{\mu,\nu}-S|<\varepsilon, \text{ если } \mu>m,\ \nu>m.$$

Поэтому, так как $\lim\limits_{\nu\to\infty} S_{\mu,\nu}$ существует, то $\left|\lim\limits_{\nu\to\infty} S_{\mu,\nu}-S\right|\leqslant\varepsilon$, т. е. $\left|\sum_{p=1}^{\mu} S_p-S\right|\leqslant\varepsilon$ при $\mu>m$, и следовательно, (§ 2.22), сумма по строкам стремится к S. Подобным же способом доказывается сходимость к S суммы по столбцам.

2.52. Абсолютная сходимость двойных рядов

Аналогично § 2.41 мы можем доказать для двойных рядов, что *сумма членов абсолютно сходящегося двойного ряда, взятых в* любом *порядке как члены простого ряда, стремится к одному и тому же пределу, если только все члены участвуют в суммировании.*

Пусть $\sigma_{\mu,\nu}$ будет суммой членов в прямоугольнике, состоящем из μ первых строк первых ν столбцов двойного ряда, общий член которого $|u_{\mu,\nu}|$; пусть сумма этого двойного ряда будет σ. Тогда при заданном ε мы можем найти такие m и n, что $\sigma-\sigma_{\mu,\nu}<\frac{1}{2}\varepsilon$, когда $\mu>m$ и $\nu>n$.

Теперь предположим, что необходимо взять N членов переставленного ряда (в том порядке, в котором члены в нем стоят), чтобы

---

[1]) Эти методы принадлежат Коши.

[2]) Цит. соч., стр. 117.

в нем содержались все члены суммы $S_{M+1, M+1}$, и пусть сумма этих членов будет t_N.

Тогда $t_N - S_{M+1, M+1}$ будет состоять из суммы членов вида $u_{p,q}$, где $p > m$ и $q > n$, когда $M \geqslant m$ и $M \geqslant n$; поэтому

$$|t_N - S_{M+1, M+1}| \leqslant \sigma - \sigma_{M+1, M+1} < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Но $S - S_{M+1, M+1}$ также состоит из членов $u_{p,q}$, в которых $p > m$, $q > n$; поэтому $|S - S_{M+1, M+1}| \leqslant \sigma - \sigma_{M+1, M+1} < \frac{1}{2}\varepsilon$, и следовательно, $|S - t_N| < \varepsilon$; при этом для любого заданного ε мы можем найти соответствующее N; поэтому $t_N \to S$.

Пример 1. Доказать, что у абсолютно сходящегося двойного ряда существуют суммы $\sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}$ и что суммы по строкам и столбцам сходятся к сумме ряда S.

[Пусть $t_{\mu,\nu}$ — сумма членов в первых μ строках и первых ν столбцах ряда модулей и пусть t — сумма ряда модулей.

Тогда $\sum_{\nu=1}^{\infty} |u_{\mu,\nu}| < t$ и, таким образом, $\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{\mu,\nu}$ сходится; пусть b_μ — его сумма тогда

$$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_\mu| \leqslant \lim_{\nu \to \infty} t_{\mu,\nu} \leqslant t,$$

и, следовательно, $\sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu$ сходится абсолютио. Поэтому сумма двойного ряда по строкам существует; подобным же образом доказывается существование суммы по столбцам. Требуемый результат получается тогда из теоремы Прингсгейма.]

Пример 2. Показать, исходя из простейших соображений, что если члены абсолютно сходящегося двойного ряда разместить в порядке

$$u_{1,1} + (u_{2,1} + u_{1,2}) + (u_{3,1} + u_{2,2} + u_{1,3}) + (u_{4,1} + \ldots + u_{1,4}) + \ldots,$$

то полученный ряд сходится к S.

2.53. Теорема Коши об умножении абсолютно сходящихся рядов[1])

Покажем теперь, что *если два ряда*

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

и

$$T = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

абсолютно сходятся, то ряд

$$P = u_1 v_1 + u_2 v_1 + u_1 v_2 + \ldots,$$

---

[1]) Cauchy, Analyse algébrique, прим. VII.

составленный из произведений их членов, написанных в любом порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна ST.

Пусть

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$
$$T_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

Тогда

$$ST = \lim S_n \lim T_n = \lim (S_n T_n)$$

согласно примеру 2 § 2.2. Далее,

$$\begin{aligned} S_n T_n = u_1 v_1 + u_2 v_1 + \ldots + u_n v_1 + \\ + u_1 v_2 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_2 + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_1 v_n + u_2 v_n + \ldots + u_n v_n. \end{aligned}$$

Но соответствующий двойной ряд будет абсолютно сходящимся, ибо если его члены заменить их модулями, то вместо $S_n T_n$ получим $\sigma_n \cdot \tau_n$, где

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|,$$
$$\tau_n = |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n|,$$

а $\sigma_n \tau_n$, по предположению, имеет предел. Поэтому, согласно § 2.52, если взять элементы двойного ряда, общий член которого $u_m v_n$, в любом порядке, то сумма их будет сходиться к ST.

Пример. Показать, что ряд, полученный умножением друх рядов

$$1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{2^3} + \ldots, \quad 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots,$$

с последующим расположением членов полученного ряда по степеням z будет сходящимся, пока точка z лежит в кольцеобразной области, ограниченной окружностями $|z| = 1$ и $|z| = 2$.

2.6. Степенные ряды [1]

Ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

в котором коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ не зависят от z, *называется рядом, расположенным по возрастающим степеням z*, или, короче, *степенным рядом*.

Покажем теперь, что *если степенной ряд сходится для некоторого значения z_0 переменной z, то он будет абсолютно сходящимся для всех значений z, для которых соответствующие точки лежат внутри окружности, проходящей через z_0 и имеющей центр в начале координат.*

[1] Результаты, изложенные в этом параграфе, принадлежат Коши (Cauchy, Analyse algébrique, гл. IX).

Действительно, если z такая точка, то имеем $|z|<|z_0|$; но так как $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ сходится, то $a_n z_0^n$ должно стремиться к нулю при $n\to\infty$ и, следовательно, мы можем найти такое M (не зависящее от n), что

$$|a_n z_0^n| < M.$$

Поэтому

$$|a_n z^n| < M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Следовательно, каждый член ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n z^n|$ будет меньше соответственного члена сходящегося геометрического ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$.

Отсюда следует, что первый ряд будет также сходиться, и поэтому степенной ряд будет *абсолютно* сходящимся, так как ряд модулей его членов сходится; теорема доказана.

Пусть $\underline{\lim}\,|a_n|^{-\frac{1}{n}}=r$, тогда по § 2.35 ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ будет абсолютно сходящимся при $|z|<r$. Если $|z|>r$, то $a_n z^n$ не стремится к нулю и, таким образом, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ расходится (§ 2.3).

Круг $|z|\leqslant r$, включающий все значения z, для которых степенной ряд

$$a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$$

сходится, называется *кругом сходимости* ряда. Радиус этого круга называется *радиусом сходимости*.

На практике применяется более простой способ нахождения r вытекающий из признака Даламбера (§ 2.36). Радиус сходимости есть $\lim\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$, если этот предел существует.

Степенной ряд может сходиться для всех значений переменной, как, например, ряд [1])

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots,$$

представляющий функцию $\sin z$; в этом случае ряд сходится во всей плоскости z. С другой стороны, радиус сходимости степенного ряда

[1]) Ряды для e^z, $\sin z$, $\cos z$ и основные свойства этих функций, а также функции $\lg z$ предполагаются известными. Краткое изложение теории этих фуикций дано в приложении.

может быть равен нулю; так, в случае ряда

$$1+1!z+2!z^2+3!z^3+4!z^4+\ldots$$

имеем

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=n|z|.$$

Но последняя величина для всех n, начиная с некоторого значения, будет больше единицы для любого z, отличного от нуля. Поэтому ряд сходится только в точке $z=0$ и радиус его круга сходимости равен нулю. В точках, которые лежат *на границе* круга сходимости, ряд может как сходиться, так и расходиться; например, ряд

$$1+\frac{z}{1^s}+\frac{z^2}{2^s}+\frac{z^3}{3^s}+\frac{z^4}{4^s}+\ldots,$$

радиус сходимости которого равен единице, будет сходящимся или расходящимся в точке $z=1$ в зависимости от того, будет ли s больше или меньше единицы, как это мы видели в § 2.33.

Следствие. Если (a_n) — такая последовательность положительных членов, что $\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ существует, то этот предел равен $\lim a_n^{\frac{1}{n}}$.

2.61. Сходимость рядов, получаемых дифференцированием степенного ряда

Пусть дан степенной ряд

$$a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$$

Рассмотрим ряд

$$a_1+2a_2z+3a_3z^2+4a_4z^3+\ldots,$$

получаемый почленным дифференцированием данного степенного ряда. Покажем, что *полученный ряд имеет тот же самый круг сходимости, как и первоначальный.*

В самом деле, пусть z будет точкой внутри круга сходимости степенного ряда; выберем положительное число r_1, лежащее между $|z|$ и радиусом сходимости r. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_nr_1^n$ будет сходиться абсолютно и его члены должны стремиться к нулю при $n\to\infty$. Вследствие этого можно найти такое не зависящее от n положительное число M, что $|a_n|<Mr_1^{-n}$ для всех значений n. Тогда члены

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1}$ будут меньше соответствующих членов ряда

$$\frac{M}{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n|z|^{n-1}}{r_1^{n-1}}.$$

Но этот ряд будет сходиться по § 2.36, так как $|z|<r_1$. Поэтому по § 2.34 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1}$$

сходится, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ сходится абсолютно для всех точек z, расположенных внутри круга сходимости первоначального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Когда $|z|>r$, то $a_n z^n$, и тем более $na_n z^{n-1}$, не стремится к нулю; таким образом, оба ряда имеют один и тот же круг сходимости.

Следствие. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$, полученный почленным интегрированием первоначального степенного ряда, имеет тот же самый круг сходимости, что и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

2.7. Бесконечные произведения

Рассмотрим класс пределов, известных под названием *бесконечных произведений*.

Пусть $1+a_1,\ 1+a_2,\ 1+a_3,\ \ldots$ будет последовательностью, ни один член которой не равен нулю. Если при $n\to\infty$ произведение

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ \ldots\ (1+a_n)$$

(которое мы обозначим через Π_n) стремится к определенному пределу, отличному от нуля, то этот предел называется *значением бесконечного произведения*

$$\Pi=(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots$$

В этом случае говорят, что бесконечное произведение *сходится* [1]). Очевидно, что условие $\lim a_n=0$ является *необходимым*

[1]) Сходимость произведения, в котором $a_{n-1}=-\frac{1}{n^2}$, была исследована Валлисом уже в 1655 г.

условием сходимости, потому что

$$\lim \Pi_{n-1} = \lim \Pi_n \neq 0.$$

Значение бесконечного произведения обозначают так:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

Далее, имеем

$$\prod_{n=1}^{m} (1 + a_n) = \exp\left\{\sum_{n=1}^{m} \lg (1 + a_n)\right\}$$

и [1])

$$\exp\left\{\lim_{m\to\infty} u_m\right\} = \lim_{m\to\infty} \{\exp u_m\},$$

если первый предел существует; сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lg\ (1 + a_n)$, где логарифмам приписывается их главное значение, является поэтому достаточным условием сходимости бесконечного произведения. Если этот ряд логарифмов сходится абсолютно, то говорят, что бесконечное произведение сходится *абсолютно*.

Условие абсолютной сходимости дается следующей теоремой: *для того чтобы бесконечное произведение*

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \ldots$$

сходилось абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

был абсолютно сходящимся.

В самом деле, согласно определению П будет или не будет абсолютно сходящимся, смотря по тому, будет или не будем абсолютно сходящимся ряд

$$\lg (1 + a_1) + \lg (1 + a_2) + \lg (1 + a_3) + \ldots$$

Но так как $\lim a_n = 0$, то мы можем найти такое m, что при $n > m$

$$|a_n| < \frac{1}{2},$$

и тогда

$$|a_n^{-1} \lg (1 + a_n) - 1| = \left| -\frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{3} - \frac{a_n^3}{4} + \ldots \right| <$$
$$< \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

[1]) См. приложение, § А.2.

Следовательно, при $n > m$

$$\frac{1}{2} \leqslant \left| \frac{\lg(1+a_n)}{a_n} \right| \leqslant \frac{3}{2}.$$

По теореме о сравнении рядов отсюда следует, что абсолютная сходимость ряда $\sum \lg(1+a_n)$ влечет за собой абсолютную сходимость ряда $\sum a_n$, и обратно, лишь бы только $a_n \neq -1$ ни при каком значении n.

Этим теорема доказана [1]).

Если в бесконечном произведении конечное число множителей равняется нулю и при отбрасывании их остающееся произведение сходится, то говорят, что первоначальное бесконечное произведение сходится к нулю. Но о таком произведении, как $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1-n^{-1})$, говорят, что оно *расходится* к нулю.

Следствие. Так как $\exp S_n \to \exp l$, при $S_n \to l$, то из § 2.41 следует, что множители абсолютно сходящегося произведения можно переставлять, не оказывая влияния на величину произведения.

Пример 1. Показать, что если $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ сходится, то сходится также $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lg(1+a_n)$, если логарифмы имеют главные значения.

Пример 2. Показать, что бесконечное произведение

$$\frac{\sin z}{z} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} z}{\frac{1}{2} z} \cdot \frac{\sin \frac{1}{3} z}{\frac{1}{3} z} \cdot \frac{\sin \frac{1}{4} z}{\frac{1}{4} z} \cdots$$

абсолютно сходится при всех значениях z.

[Действительно, $\left(\sin \frac{z}{n}\right) \Big/ \left(\frac{z}{n}\right)$ может быть написано в виде $1 - \frac{\lambda_n}{n^2}$, где $|\lambda_n| < k$ и k не зависит от n, ряд же $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^2}$ является абсолютно сходящимся, как видно из сравнения с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Бесконечное произведение будет поэтому абсолютно сходящимся.]

---

[1]) Рассмотрение сходимости бесконечных произведений, в котором те же результаты получаются без помощи логарифмических функций, дано Прингсгеймом (Pringsheim, Math. Ann., XXXIII, 119—154 (1889)), а также Бромуичем (Bromwich, Infinite series, гл. VI).

2.71. Примеры бесконечных произведений

Рассмотрим бесконечное произведение

$$\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots,$$

которое, как будет показано ниже (§ 7.5), представляет функцию

$$z^{-1}\sin z.$$

Чтобы узнать, будет ли оно абсолютно сходящимся, мы должны рассмотреть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2\pi^2}$, или $\frac{z^2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; этот ряд абсолютно сходится, и таким образом, произведение будет абсолютно сходящимся при всех значениях z.

Перепишем теперь бесконечное произведение в виде

$$\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\ldots$$

Абсолютная сходимость этого бесконечного произведения зависит от абсолютной сходимости ряда

$$-\frac{z}{\pi}+\frac{z}{\pi}-\frac{z}{2\pi}+\frac{z}{2\pi}-\ldots$$

Но этот ряд только условно сходящийся, так как ряд модулей

$$\frac{|z|}{\pi}+\frac{|z|}{\pi}+\frac{|z|}{2\pi}+\frac{|z|}{2\pi}+\ldots$$

расходится. Следовательно, в этом виде бесконечное произведение не будет абсолютно сходящимся и, таким образом, при изменении порядка множителей $\left(1\pm\frac{z}{n\pi}\right)$ нужно опасаться изменения значения произведения.

Наконец, пусть то же самое бесконечное произведение будет написано в виде

$$\left\{\left(1-\frac{z}{\pi}\right)e^{\frac{z}{\pi}}\right\}\left\{\left(1+\frac{z}{\pi}\right)e^{-\frac{z}{\pi}}\right\}\left\{\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)e^{\frac{z}{2\pi}}\right\}\left\{\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)e^{-\frac{z}{2\pi}}\right\}\ldots,$$

в котором каждое из выражений

$$\left(1\pm\frac{z}{m\pi}\right)ex^{\mp\frac{z}{m\pi}}$$

считается за один множитель бесконечного произведения. Абсолютная сходимость этого произведения зависит от абсолютной сходимости ряда, $(2m-1)$-й и $2m$-й члены которого будут

$$\left(1 \mp \frac{z}{m\pi}\right) e^{\pm \frac{z}{m\pi}} - 1.$$

Но легко убедиться в том, что

$$\left(1 \mp \frac{z}{m\pi}\right) e^{\pm \frac{z}{m\pi}} = 1 + O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

и, таким образом, абсолютная сходимость ряда следует из сравнения его с рядом

$$1 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

Бесконечное произведение в этом последнем виде будет поэтому опять абсолютно сходящимся; таким образом, введение множителей $e^{\pm \frac{z}{n\pi}}$ превратило условную сходимость в абсолютную. Этот результат является частным случаем первой части теоремы Вейерштрасса (§ 7.6) о бесконечных произведениях.

Пример 1. Доказать, что $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 - \frac{z}{c+n}\right) e^{\frac{z}{n}}\right\}$ будет абсолютно сходящимся при всех значениях z, если c — какое угодно постоянное число, отличное от отрицательных целых чисел.

Действительно, бесконечное произведение будет абсолютно сходящимся одновременно с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 - \frac{z}{c+n}\right) e^{\frac{z}{n}} - 1\right\}.$$

Общий же член этого ряда будет

$$\left(1 - \frac{z}{c+n}\right)\left\{1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\} - 1 =$$

$$= \frac{zc - \frac{1}{2} z^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится; таким образом, по § 2.34 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 - \frac{z}{c+n}\right) e^{\frac{z}{n}} - 1\right\}$$

сходится абсолютно, а потому и бесконечное произведение абсолютно сходится.

Пример 2. Показать, что $\prod_{n=2}^{\infty}\left\{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} z^{-n}\right\}$ сходится во всех точках, расположенных вне круга с радиусом единица и с центром в начале координат.

В самом деле, бесконечное произведение сходится абсолютно при абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} z^{-n}.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=e$, так что предел отношения $(n+1)$-го члена ряда к n-му равен $\frac{1}{z}$; поэтому абсолютная сходимость ряда имеет место, когда

$$\left|\frac{1}{z}\right|<1, \quad \text{т. е. при} \quad |z|>1.$$

Пример 3. Показать, что

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}{(z+1)(z+2)\ldots(z+m-1)}\, m^z$$

стремится к конечному пределу при $m\to\infty$, если только z не будет целым отрицательным числом.

Это выражение может быть записано как произведение, n-й множитель которого равен

$$\frac{n}{z+n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^z=\left(1+\frac{1}{n}\right)^z\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}=\left\{1+\frac{z(z-1)}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}.$$

Таким образом, это произведение абсолютно сходится, если только сходится абсолютно ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{z(z-1)}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}.$$

Сравнение последнего ряда со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ показывает, что это именно и имеет место. Если же z есть отрицательное целое число, то данное выражение не существует, так как один из множителей в знаменателе равен нулю.

Пример 4. Доказать, что

$$z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{3\pi}\right)\left(1-\frac{z}{4\pi}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)\ldots=e^{-\frac{z}{\pi}\lg 2}\sin z.$$

Действительно,

$$\lim_{k\to\infty} z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{(2k-1)\pi}\right)\left(1-\frac{z}{2k\pi}\right)\left(1+\frac{z}{k\pi}\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left[e^{\frac{z}{\pi}\left(-1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\ldots-\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\frac{1}{k}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)e^{\frac{z}{\pi}}\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)e^{-\frac{z}{2\pi}}\ldots\left(1-\frac{z}{2k\pi}\right)e^{\frac{z}{2k\pi}}\left(1+\frac{z}{k\pi}\right)e^{-\frac{z}{k\pi}}\right]=$$

$$=\lim_{k\to\infty} e^{-\frac{z}{\pi}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)}\times$$

$$\times z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)e^{\frac{z}{\pi}}\left(1+\frac{z}{\pi}\right)e^{-\frac{z}{\pi}}\left(1-\frac{z}{2\pi}\right)e^{\frac{z}{2\pi}}\left(1+\frac{z}{2\pi}\right)e^{-\frac{z}{2\pi}}\ldots,$$

ибо произведение, множителями которого будут

$$\left(1\pm\frac{z}{r\pi}\right)e^{\mp\frac{z}{r\pi}}$$

абсолютно сходится и, таким образом, порядок его членов можно менять. Но так как

$$\lg 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots,$$

то это показывает, что данное произведение равно

$$e^{-\frac{z}{\pi}\lg 2}\sin z.$$

2.8. Бесконечные определители

Бесконечные ряды и бесконечные произведения отнюдь не являются единственными известными бесконечными процессами, которые приводят к разумным результатам. Исследования Г. У. Хилла по теории движения Луны[1]) привели к рассмотрению *бесконечных определителей*.

Фактическое исследование сходимости принадлежит не Хиллу, а Пуанкаре (Poincaré, Bull. de la Soc. Math. de France, XIV, 87 (1886)). Мы придерживаемся изложения, данного Кохом (H. von Koch, Acta Math., XVI (1892), 217).

[1]) Hill G. W., Researches in the Lunar theory, Amer. J. Math., 1, 5—26, 126—147, 245—260 (1878). Перепечатано в Acta Mathematica, VIII, 1—36 (1886).

Бесконечные определители раньше встречались в изысканиях об алгебраических уравнениях n-й степени, Фюрстенау (Fürstenau, Darstellung der reelen Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coeffizienten, Marburg, 1860). Специальные типы бесконечных определителей (известных как *континуанты*) встречаются в теории бесконечных непрерывных дробей; см. Silvester, Math. Papers, I, ч. 1, 504 и III, 249.

Пусть A_{ik} определено для всех целых значений (положительных и отрицательных) i и k; обозначим через

$$D_m = [A_{ik}]_{i,\,k=-m,\,\ldots,+m}$$

определитель, составленный из чисел A_{ik} ($i,\ k = -m, \ldots, +m$). Тогда, если при $m \to \infty$ определитель D_m стремится к определенному пределу D, то мы будем говорить, что бесконечный определитель

$$[A_{ik}]_{i,\,k=-\infty,\,\ldots,\,+\infty}$$

сходится и имеет значение D. Если предела не существует, то говорят, что рассматриваемый определитель *расходится*.

Об элементах A_{ii} (где i принимает всевозможные значения) говорят, что они образуют *главную диагональ* определителя D. Элементы A_{ik}, где i постоянно, а k принимает всевозможные значения, образуют *строку* i, а элементы A_{ik}, где k постоянно, а i принимает всевозможные значения, образуют *столбец* k. Элемент A_{ik} называется *диагональным* или *недиагональным* в зависимости от того, будет ли $i = k$ или $i \lessgtr k$. Элемент A_{00} называется *началом* определителя.

2.81. Сходимость бесконечного определителя

Покажем теперь, что *бесконечный определитель сходится, если произведение диагональных элементов и сумма недиагональных элементов сходятся абсолютно.*

Обозначим диагональные элементы бесконечного определителя через $1 + a_{ii}$, а недиагональные через a_{ik} ($i \neq k$), так что определитель запишется так:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & 1 + a_{-1-1} & a_{-10} & a_{-11} & \ldots \\ \ldots & a_{0-1} & 1 + a_{00} & a_{01} & \ldots \\ \ldots & a_{1-1} & a_{10} & 1 + a_{11} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Тогда, так как ряд $\sum\limits_{i,\,k=-\infty}^{\infty} |a_{ik}|$ сходится, то произведение

$$\bar{P} = \prod_{i=-\infty}^{\infty} \left(1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_{ik}|\right)$$

также сходится.

Составим теперь произведения

$$P_m = \prod_{i=-m}^{m} \left(1 + \sum_{k=-m}^{m} a_{ik}\right), \quad \bar{P}_m = \prod_{i=-m}^{m} \left(1 + \sum_{k=-m}^{m} |a_{ik}|\right);$$

тогда, если в развернутом выражении P_m некоторые члены заменить нулями и у некоторых других членов изменить знак, то мы получим D_m; таким образом, каждому члену в выражении D_m соответствует в выражении $\overline{P}_m$ член с равным или большим модулем. Далее, $D_{m+p}-D_m$ представляет сумму тех членов в определителе D_{m+p}, которые обращаются в нуль, если числа $a_{ik}\,\{i,\ k=\pm(m+1),\ \ldots,\ \pm(m+p)\}$, заменить нулями; каждому из этих членов соответствует член равного или большего модуля в $\overline{P}_{m+p}-\overline{P}_m$.

Таким образом,

$$|D_{m+p}-D_m|\leqslant \overline{P}_{m+p}-\overline{P}_m.$$

Но так как $\overline{P}_m$ стремится к пределу при $m\to\infty$, то и D_m стремится к пределу, что и доказывает предложение.

2.82. Теорема об изменении элементов в сходящихся бесконечных определителях

Покажем теперь, что *определитель, сходящийся в вышеуказанном смысле, остается сходящимся, если элементы любой строки заменить произвольной системой элементов, все модули которых меньше некоторого определенного положительного числа.*

Заменим, например, элементы

$$\ldots,\ A_{0,\,-m},\ \ldots,\ A_{0,\,0},\ \ldots,\ A_{0,\,m},\ \ldots$$

начальной строки элементами

$$\ldots,\ \mu_{-m},\ \ldots,\ \mu_0,\ \ldots,\ \mu_m,\ \ldots,$$

удовлетворяющими неравенству

$$|\mu_r|<\mu,$$

где μ — некоторое положительное число. Новые значения D_m и D обозначим через D'_m и D'. Кроме того, обозначим через $\overline{P}'_m$ и $\overline{P}'$ произведения, полученные из $\overline{P}_m$ и $\overline{P}$ отбрасыванием множителя, соответствующего индексу ноль; мы видим, что ни один из членов D'_m не может иметь большего модуля, чем соответственный член в выражении $\mu\overline{P}'_m$; следовательно, рассуждая, как в предыдущем параграфе, мы получим

$$|D'_{m+p}-D'_m|<\mu\overline{P}'_{m+p}-\mu\overline{P}'_m.$$

что достаточно для установления высказанного результата.

Пример. Показать, что необходимое и достаточное условие абсолютной сходимости бесконечного определителя

$$\lim_{m\to\infty}\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_1 & 1 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 1 & \alpha_3 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & 0 & \beta_m & 1 \end{vmatrix}$$

заключается в том, чтобы ряд $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\ldots$ был абсолютно сходящимся.

(von Koch)

ЛИТЕРАТУРА

Сходящиеся ряды

A. Pringsheim, Math. Ann., XXXV, 297—394 (1890).
T. J. I'a Bromwich, Theory of infinite series, гл. II, III, IV, 1908.

Условно сходящиеся ряды

G. F. B. Riemann, Ges. math. Werke, 221—225.
A. Pringsheim, Math. Ann., XXII, 455—503 (1883).

Двойные ряды

A. Pringsheim, Münchener Sitzungsberichte, XXVII, 101—152 (1897).
A. Pringsheim, Math. Ann., LIII, 289—321 (1900).
G. H. Hardy, Proc. London Math. Soc. (2), 1, 124—128 (1904).

Примеры

1. Определить $\lim\limits_{n\to\infty}(e^{-n^a}n^b)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^{-a}\lg n)$ при $a>0$, $b>0$.

2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{1-n\lg\frac{2n+1}{2n-1}\right\}.$$

(Trinity, 1904)

3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n}\cdot\frac{4n+3}{2n+2}\right\}^2$$

(Peterhouse, 1906)

4. Найти совокупность значений z, при которых ряд

$$2\sin^2 z-4\sin^4 z+8\sin^6 z-\ldots+(-1)^{n+1}2^n\sin^{2n} z+\ldots$$

сходится.

5. Показать, что ряд

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+3}+\ldots$$

будет условно сходящимся при всех значениях z, за исключением некоторых частных значений, а ряд

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\ldots+\frac{1}{z+p-1}-\frac{1}{z+p}-\frac{1}{z+p+1}-\ldots$$
$$\ldots-\frac{1}{z+2p+q-1}+\frac{1}{z+2p+q}+\ldots,$$

в котором всегда за p положительными членами следуют $p+q$ отрицательных членов, будет расходящимся.

(Simon)

6. Показать, что

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\ldots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

(Trinity, 1908)

7. Показать, что ряд

$$\frac{1}{1^\alpha}+\frac{1}{2^\beta}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\beta}+\ldots \qquad (1<\alpha<\beta)$$

сходится, хотя

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}}\to\infty.$$

(Cesàro)

8. Показать, что ряд

$$\alpha+\beta^2+\alpha^3+\beta^4+\ldots \qquad (0<\alpha<\beta<1)$$

сходится, хотя

$$\frac{u_{2n}}{u_{2n-1}}\to\infty.$$

(Cesàro)

9. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}\{(1+n^{-1})^n-1\}}{(z^n-1)\{z^n-(1+n^{-1})^n\}}$$

абсолютно сходится при всех значениях z, исключая значения

$$z=\left(1+\frac{a}{m}\right)e^{2k\pi i/m},$$

где $a=0, 1$; $k=0, 1, \ldots, m-1$; $m=1, 2, 3, \ldots$

10. Показать, что при $s>1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^s}+\frac{1}{s-1}\left\{\frac{1}{(n+1)^{s-1}}-\frac{1}{n^{s-1}}\right\}\right]$$

и что ряд в правой части сходится при $0<s<1$.

(De la Vallée Poussin, Mém. de l'Acad. de Belgique, LIII, № 6 (1896))

11. Для ряда, общий член которого

$$u_n = q^{n-\nu} x^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \qquad (0 < q < 1 < x),$$

где ν обозначает число цифр в числе n, записанном в обычной десятичной системе счисления, показать, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = q$$

и что ряд сходится, хотя $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \infty$.

12. Показать, что ряд

$$q_1 + q_1^2 + q_2^3 + q_1^4 + q_2^5 + q_3^6 + q_1^7 + \ldots,$$

где

$$q_n = q^{1+\frac{4}{n}},$$

сходится, хотя отношение $(n+1)$-го члена к n-му больше единицы, когда n не будет треугольным числом [1]).

13. Показать, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n\pi ix}}{(w+n)^s},$$

где w вещественно и под $(w+n)^s$ понимается значение $e^{s\lg(w+n)}$, где логарифм взят в его арифметическом смысле, будет сходящимся при всех значениях s, если $\operatorname{Im} x$ положительна. Он будет также сходящимся при всех значениях s, вещественная часть которых положительна, при условии, что x вещественно и не равно целому числу.

14. При $u_n > 0$ показать, что если ряд $\sum u_n$ сходится, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(nu_n) = 0$, и что если, сверх того, $u_n \geqslant u_{n+1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(nu_n) = 0$.

15. Показать, что если

$$a_{m,n} = \frac{m-n}{2^{m+n}} \frac{(m+n-1)!}{m!\,n!} \qquad (m, n > 0),$$

$$a_{m,0} = 2^{-m}, \quad a_{0,n} = -2^{-n}, \quad a_{0,0} = 0,$$

то

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\right) = -1, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}\right) = 1.$$

(Trinity, 1904)

---

[1]) Под треугольным числом понимается число вида $\dfrac{k(k+1)}{2}$, где k — целое. (*Прим. ред.*)

16. Обращением ряда

$$1+\frac{8q}{1-q}+\frac{16q^2}{1+q^2}+\frac{24q^3}{1-q^3}+\ldots$$

(где $|q|<1$) в двойной ряд показать, что он равен

$$1+\frac{8q}{(1-q)^2}+\frac{8q^2}{(1+q^2)^2}+\frac{8q^3}{(1-q^3)^2}+\ldots$$

(Jacobi)

17. Принимая, что $\sin z = z\prod_{r=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{r^2\pi^2}\right)$, показать, что если $m\to\infty$ и $n\to\infty$ таким образом, что $\lim\frac{m}{n}=k$, где k конечно, то

$$\lim\prod_{r=-n}^{m}{}'\left(1+\frac{z}{r\pi}\right)=k^{\frac{z}{\pi}}\frac{\sin z}{z},$$

причем штрих обозначает, что множитель, для которого $r=0$, опущен. (Math. Trip., 1904)

18. Если $u_0=u_1=u_2=0$ и если при $n>1$

$$u_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n}},\qquad u_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}},$$

то $\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n)$ сходится, хотя ряды $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}u_n^2$ расходятся.

(Math. Trip., 1906)

19. Доказать, что бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n}\right)^{n^k}\exp\left(\sum_{m=1}^{k+1}\frac{n^{k-m}z^m}{m}\right)\right\},$$

где k — любое целое положительное число, абсолютно сходится при всех значениях z.

20. Если $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ — условно сходящийся ряд с вещественными членами, то $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ будет сходящимся (но не абсолютно) к нулю или расходящимся, смотря по тому, будет ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ сходиться или расходиться.

(Cauchy)

21. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n$ абсолютно сходится. Показать, что бесконечный определитель

$$\Delta(c) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{(c-4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_3}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_4}{4^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \frac{(c-2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_3}{2^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_2}{0^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{0^2-\theta_0} & \frac{c^2-\theta_0}{0^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{0^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{0^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_3}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \frac{(c+2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \frac{-\theta_4}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_3}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_2}{4^2-\theta_0} & \frac{-\theta_1}{4^2-\theta_0} & \frac{(c+4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

сходится и что уравнение

$$\Delta(c) = 0$$

эквивалентно уравнению

$$\sin^2 \frac{1}{2} \pi c = \Delta(0) \sin^2 \frac{1}{2} \pi \theta_0^{\frac{1}{2}}.$$

(Hill; см § 19. 42)

ГЛАВА 3

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

3.1. Зависимость одного комплексного числа от другого

Задачи, которыми занимается анализ, относятся в основном к *зависимости* одного комплексного числа от другого.

Если z и ζ — два комплексных числа, связанные между собою так, что для значений z, принадлежащих к некоторой совокупности, можно определить соответственные значения ζ (например, если ζ есть квадрат z или если $\zeta=1$ при z вещественном и $\zeta=0$ для всех остальных значений z), то говорят, что ζ есть функция от z.

Эту зависимость не надо смешивать с наиболее важным случаем ее, который будет объяснен ниже под названием *аналитической функциональной* зависимости.

Если ζ есть вещественная функция от вещественной переменной z, то соотношение между ζ и z, записываемое в виде

$$\zeta=f(z),$$

может быть наглядно представлено при помощи кривой на плоскости, именно геометрическим местом точек, прямоугольные координаты которых суть (z, ζ). Но нельзя найти такого простого и удобного геометрического способа для наглядного представления соотношения $\zeta=f(z)$ в случае, когда ζ и z будут комплексными переменными, т. е.

$$\zeta=\xi+i\eta, \quad z=x+iy.$$

В этом случае представление, полностью аналогичное указанному для вещественных переменных, потребовало бы четырехмерного пространства, ибо здесь имеется четыре переменных: ξ, η, x и y.

Один из способов, предложенный Ли и Вейерштрассом, заключается в применении двупараметрической системы прямых, принадлежащих к четырехпараметрической системе прямых трехмерного пространства.

Другое предложение заключается в представлении ξ и η отдельно при помощи поверхностей

$$\xi=\xi(x, y), \quad \eta=\eta(x, y).$$

Третий прием, принадлежащий Хеффтеру [1]), заключается в том, чтобы, записав

$$\zeta = re^{i\theta},$$

построить поверхность $r = r(x, y)$, которую можно бы назвать *поверхностью модуля* функции, и на ней отмечать значения θ. Можно было бы изменить это предложение различными способами, изображая θ кривыми, вычерченными на поверхности $r = r(x, y)$.

3.2. Непрерывность функций вещественных переменных

Читатель, конечно, имеет общее представление (полученное из графического представления функций вещественной переменной) о том, что понимается под непрерывностью.

Мы должны теперь дать точное определение, которое придало бы определенность этому расплывчатому представлению.

Пусть $f(x)$ есть функция x, которая определена при $a \leqslant x \leqslant b$, и пусть x_1 таково, что $a \leqslant x_1 \leqslant b$. Если существует такое число l, что при произвольно выбранном положительном числе ε можно найти такое положительное число η, что

$$|f(x) - l| < \varepsilon,$$

когда $|x - x_1| < \eta$, $x \neq x_1$ и $a \leqslant x \leqslant b$, то l называется пределом $f(x)$ при $x \to x_1$.

Может случиться, что мы сможем найти такое число l_+ (даже тогда, когда не существует l), что $|f(x) - l_+| < \varepsilon$ при $x_1 < x < x_1 + \eta$. Мы называем тогда l_+ пределом $f(x)$ при x, стремящемся к x_1 справа, и обозначаем этот предел через $f(x_1 + 0)$; подобным же образом мы определяем $f(x_1 - 0)$, если он существует. Если $f(x_1 + 0)$, $f(x_1)$, $f(x_1 - 0)$ все существуют и равны между собой, то мы говорим, что $f(x)$ *непрерывна в* x_1. Следовательно, если $f(x)$ непрерывна в x_1, то при данном ε мы можем найти такое η, что

$$|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon,$$

когда $|x - x_1| < \eta$ и $a \leqslant x \leqslant b$.

Если l_+ и l_- существуют и не равны между собой, то говорят, что $f(x)$ имеет *разрыв первого рода* [2]) при x_1; если же $l_+ = l_- \neq f(x_1)$, то говорят, что $f(x)$ имеет *устранимый разрыв* в x_1.

Если $f(x)$ — комплексная функция вещественной переменной, т. е. если $f(x) = g(x) + ih(x)$, где $g(x)$ и $h(x)$ вещественны, то из непрерывности $f(x)$ в x_1 вытекает непрерывность $g(x)$ и $h(x)$. Ибо если $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$, то $|g(x) - g(x_1)| < \varepsilon$ и $|h(x) - h(x_1)| < \varepsilon$; поэтому высказанное утверждение очевидно.

---

[1]) Heffter, Zeitschrift für Math. und Phys., XLIX, 235, (1899).

[2]) Если говорится, что функция имеет разрыв первого рода в определенных точках интервала, то подразумевается, что она непрерывна во всех остальных точках интервала.

Пример. 1. Из примеров 1 и 2 § 2.2 вывести, что если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при x_1, то таковыми будут и $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, а если $\varphi(x_1) \neq 0$, то и $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Распространенное представление о непрерывности, поскольку оно относится к вещественной переменной $f(x)$, зависящей от другой вещественной переменной x, несколько отличается от только что установленного, и его, пожалуй, лучше всего можно выразить следующим образом: $f(x)$ — непрерывная функция x, если при прохождении x всех значений, промежуточных между любыми двумя смежными значениями x_1 и x_2 функция $f(x)$ пробегает все значения, промежуточные между соответственными значениями $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Возникает теперь вопрос, насколько это наглядное определение будет эквивалентно точному определению, данному выше.

Коши показал, что если вещественная функция $f(x)$ вещественной переменной x удовлетворяет точному определению, то она удовлетворяет и тому, которое мы назвали наглядным определением; этот результат будет доказан в § 3.63. Но обратное предложение, как показал Дарбу, неверно. Это может быть иллюстрировано следующим примером [1]). Пусть $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{2x}$ между $x = -1$ и $x = +1$ (исключая $x = 0$) и $f(0) = 0$. Можно доказать, что $f(x)$ зависит непрерывно от x вблизи $x = 0$ в смысле наглядного определения, но не будет непрерывна при $x = 0$ в смысле точного определения.

Пример 2. Если $f(x)$ будет определенной и возрастающей функцией в промежутке (a, b), то пределы $f(x \pm 0)$ существуют во всех точках внутри этого промежутка.

[В самом деле, если $f(x)$ — возрастающая функция, то можно найти такое сечение рациональных чисел, что если a и A будут какими-либо числами соответственно классов L и R, то $a < f(x+h)$ для любого положительного значения h и $A \geqslant f(x+h)$ для некоторого положительного значения h. Число, определяемое этим сечением, будет $f(x+0)$.]

3.21. Простые кривые. Континуумы [2])

Пусть x и y — две вещественные функции вещественной переменной t, непрерывные для всех значений t в промежутке $a \leqslant t \leqslant b$. Обозначим зависимость x и y от t следующим образом:

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Функции $x(t)$, $y(t)$ предполагаются такими, что они не принимают одной и той же пары значений ни при каких двух различных значениях t в промежутке $a \leqslant t \leqslant b$. Тогда совокупность точек с координатами, соответствующими этим значениям t, называется *простой кривой* [3]). Если $x(a) = x(b)$, $y(a) = y(b)$, то простая кривая называется *замкнутой*.

---

[1]) Принадлежащим Меншену (Mansion, Mathesis (2), XIX, 129—131 (1899)).

[2]) Терминология авторов отличается от принятой в русской литературе. (*Прим. ред.*)

[3]) В русской литературе употребляется термин «простая жорданова кривая». (*Прим ред.*)

Пример. Окружность $x^2+y^2=1$ представляет собой простую замкнутую кривую, ибо мы можем написать [1])

$$x=\cos t, \quad y=\sin t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Двумерным континуумом [2]) называется совокупность точек на плоскости, обладающих следующими двумя свойствами:

(I) Если (x, y) — декартовы координаты любой ее точки, то можно найти такое *положительное* число δ (зависящее от x и y), что каждая точка, расстояние которой от (x, y) меньше δ, принадлежит этой совокупности.

(II) Любые две точки совокупности могут быть соединены простой кривой, состоящей целиком из точек совокупности.

Пример. Точки, для которых $x^2+y^2<1$, образуют континуум. Если P есть одна из точек внутри единичного круга, и притом такая, что $OP=r<1$, то мы можем взять $\delta=1-r$; любые две точки внутри круга можно соединить прямой, целиком лежащей внутри круга.

Следующие две теоремы [3]) принимаются в этой книге без доказательства. Простые случаи их кажутся очевидными геометрически, в общем же случае теоремы подобного рода принимаются без доказательства потому, что точные доказательства обычно чрезвычайно длинны и трудны.

(I) Простая замкнутая кривая делит плоскость на два континуума («внутренность» и «внешность»).

(II) Если P — точка на кривой и Q — точка вне кривой, то угол между QP и Ox изменяется на $\pm 2\pi$ или на нуль, когда P описывает кривую, смотря по тому, будет ли Q внутренней или внешней точкой.

Если изменение будет $+2\pi$, то говорят, что P описывает кривую «против часовой стрелки».

Континуум, образованный из внутренности простой кривой, часто называется *открытой двумерной областью* или, короче, *открытой областью*, а кривая называется ее *контуром*; такой континуум, взятый вместе с контуром, называется *замкнутой двумерной областью* или, короче, *замкнутой областью*. Простая кривая часто называется *замкнутой одномерной областью*, а простая кривая с исключением концевых точек называется *открытой одномерной областью*.

---

[1]) Доказательство того, что синус и косинус представляют собой непрерывные функции, помещено в приложении, § A. 41.

[2]) В русской литературе употребляется термин «область». (*Прим. ред.*)

[3]) Точное доказательство можно найти в книге Ватсона: Watson, Complex integration and Cauchy's theorem (Cambridge Math. Tracts., № 15). (См. также П. С. Александров, Комбинаторная топология, гл. II, Гостехиздат, 1947.)

3.22. Непрерывные функции комплексных переменных

Пусть $f(z)$ есть функция от z, определенная во всех точках некоторой замкнутой области (одно- или двумерной) на плоскости комплексного переменного, и пусть z_1 — одна из точек этой области. Тогда говорят, что $f(z)$ является непрерывной в точке z_1, если для любого заданного положительного числа ε мы можем найти такое положительное число η, что

$$|f(z)-f(z_1)|<\varepsilon,$$

когда $|z-z_1|<\eta$, причем z — точка области.

3.3. Ряды с переменными членами. Равномерная сходимость

Рассмотрим ряд

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\ldots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\ldots$$

Этот ряд будет абсолютно сходящимся (§ 2.33) для всех вещественных значений x.

Если $S_n(x)$ — сумма n первых членов, то

$$S_n(x)=1+x^2-\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}},$$

откуда следует

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=1+x^2 \qquad (x\neq 0).$$

Но $S_n(0)=0$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n(0)=0.$$

Следовательно, хотя этот ряд непрерывных функций от x абсолютно сходится, тем не менее его сумма является разрывной функцией от x. Нас, естественно, интересуют причины этого замечательного явления, исследованного в 1841—1848 гг. Стоксом[1]), Зейделем[2]) и Вейерштрассом[3]), которые показали, что оно встречается только при наличии другого явления, а именно *неравномерной сходимости*, к объяснению которой мы теперь и перейдем.

Пусть функции $u_1(z)$, $u_2(z)$, ... определены во всех точках некоторой замкнутой области на плоскости комплексного переменного. Пусть, далее,

$$S_n(z)=u_1(z)+u_2(z)+\ldots+u_n(z).$$

---

[1]) Stokes, Camb. Phil. Trans., VIII, 533—583 (1847) (Collected Papers, 1, 236—313).

[2]) Seidel, Münchener Abhandlungen, V, 381 (1848).

[3]) Weierstrass, Ges. math. Werke, I, 67, 75.

Условие, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ был *сходящимся* для какого-нибудь частного значения z, заключается в том, что для данного ε должно существовать такое число n, что

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon$$

для *всех* положительных значений p; значение n, конечно, зависит от ε.

Пусть n — наименьшее целое число, удовлетворяющее условию. Это число *вообще* будет зависеть от рассматриваемого частного значения z. Обозначим эту зависимость через $n(z)$. *Может случиться*, что мы найдем такое *не зависящее* от z число N, что

$$n(z) < N$$

для всех значений z в рассматриваемой области.

Если это число N существует, то говорят, что ряд *сходится равномерно* во всей области.

Если же такого числа N не существует, то говорят, что сходимость ряда будет неравномерной [1]).

Равномерная сходимость является, таким образом, свойством, зависящим от *всей совокупности* значений z, между тем как раньше мы рассматривали сходимость ряда только для отдельных частных значений z, не *принимая во внимание другие его значения*.

Если существует такое положительное число δ, что ряд сходится равномерно в области, общей кругу $|z - z_1| \leqslant \delta$, и области его сходимости, то мы говорим, что он сходится равномерно *вблизи* точки z_1.

3.31. Об условии равномерной сходимости [2])

Положим $R_{n,p}(z) = u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \ldots + u_{n+p}(z)$; мы видели, что равномерная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ в области заключается в том, что для любого данного числа ε можно было найти N,

---

[1]) Читатель, незнакомый с понятием равномерной сходимости, сможет получить более ясное представление, обратившись к Бромуичу (Bromwich, Infinite series, гл. VII), где дано изложение графического исследования Осгуда (Osgood).

[2]) Авторы определяют равномерную сходимость при помощи неравенства $|R_{n,p}(z)| < \varepsilon$, выполняющегося равномерно по z, а в качестве необходимого и достаточного условия равномерной сходимости используют неравенство $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Обычно принимают обратный порядок. (*Прим. ред.*)

не *зависящее* от z (но зависящее от ε), для которого при *всех* положительных целых значениях p выполняется неравенство

$$|R_{N,p}(z)| < \varepsilon.$$

Если это условие удовлетворяется, то по § 2.22 $S_n(z)$ стремится к некоторому пределу $S(z)$ для каждого рассматриваемого значения z, и тогда, так как ε не зависит от p,

$$\left| \lim_{p\to\infty} R_{N,p}(z) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Но при $n > N$

$$S(z) - S_n(z) = \left\{ \lim_{p\to\infty} R_{N,p}(z) \right\} - R_{N,\,n-N}(z)$$

и, таким образом,

$$|S(z) - S_n(z)| < 2\varepsilon.$$

Заменяя ε на $\frac{1}{2}\varepsilon$, получаем как *необходимое* условие равномерной сходимости, что $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$, когда $n > N$, где N не зависит от z. Это условие будет также и *достаточным*, так как если оно удовлетворяется, то, как в § 2.22 (I), получаем, что $|R_{N,p}(z)| < 2\varepsilon$, что по определению и является условием равномерной сходимости.

Пример 1. Показать, что если x вещественно, то сумма ряда

$$\frac{x}{1(x+1)} + \frac{x}{(x+1)(2x+1)} + \ldots + \frac{x}{[(n-1)x+1][nx+1]} + \ldots$$

будет разрывной функцией в точке $x=0$ и ряд будет неравномерно сходящимся вблизи $x=0$.

Сумма первых n членов, как легко видеть, будет $1 - \frac{1}{nx+1}$; таким образом, при $x=0$ сумма ряда равна 0; при $x \neq 0$ сумма ряда равна 1. Значение $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ равно $\frac{1}{nx+1}$, если $x \neq 0$; таким образом, когда x мало, например $x = \frac{1}{100 \cdot 10^6}$, остаток после миллиона членов будет равен $\frac{1}{\frac{1}{100}+1}$ или $1 - \frac{1}{101}$, так что первый миллион членов ряда не дает даже одного процента суммы. И вообще, чтобы сделать $\frac{1}{nx+1} < \varepsilon$, необходимо взять

$$n > \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right).$$

Для данного ε не существует такого числа N, не зависящего от x, чтобы было $n < N$ для всех значений x в каком-либо промежутке, содержащем $x=0$, так как, взяв x достаточно малым, мы можем сделать n больше, чем любое число N, не зависящее от x. Поэтому вблизи $x=0$ сходимость будет неравномерной.

Пример 2. Рассмотреть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\{n(n+1)x^2-1\}}{\{1+n^2x^2\}\{1+(n+1)^2x^2\}},$$

в котором x вещественно.

n-й член может быть записан в виде

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2},$$

так что

$$S(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad R_n(x) = \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2}.$$

Мы видим, что в этом примере сумма ряда не имеет разрыва при $x=0$. Но $\left(\text{беря } \varepsilon < \frac{1}{2} \text{ и } x \neq 0\right)$ будем иметь

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

если

$$\varepsilon^{-1}(n+1)|x| < 1+(n+1)^2x^2,$$

т. е. если

$$n+1 > \frac{1}{2}\{\varepsilon^{-1}+\sqrt{\varepsilon^{-2}-4}\}|x|^{-1}$$

или

$$n+1 < \frac{1}{2}\{\varepsilon^{-1}-\sqrt{\varepsilon^{-2}-4}\}|x|^{-1}.$$

Мы видим, что второе неравенство не может удовлетворяться для всех значений n, больших некоторого значения, при всех значениях x; первое же неравенство дает значение $n(x)$, стремящееся к бесконечности при $x \to 0$, так что для любого промежутка, содержащего точку $x=0$, не существует числа N, *не зависящего* от x. Поэтому ряд будет неравномерно сходящимся вблизи $x=0$.

Заметим, что $n(x)$ будет разрывной функцией при $x=0$, ибо $n(x) \to \infty$ при $x \to 0$, но $n(0)=0$.

3.32. Связь разрывности с неравномерной сходимостью

Покажем теперь, *что если ряд непрерывных функций от z равномерно сходится для всех значений z в данной замкнутой области, то его сумма будет непрерывной функцией z во всех точках области.*

Пусть ряд будет

$$f(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots = S_n(z) + R_n(z),$$

где $R_n(z)$ — n-й остаточный член ряда.

Так как ряд равномерно сходится, то для любого заданного положительного числа ε мы можем найти такое целое число n, *не зависящее* от z, что $|R_n(z)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ для *всех* значений z в области. Фиксировав теперь эти n и ε, мы можем на основании непрерывности $S_n(z)$ найти такое положительное число η, что

$$|S_n(z) - S_n(z')| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

при

$$|z - z'| < \eta.$$

Следовательно, мы будем иметь

$$|f(z) - f(z')| = |S_n(z) - S_n(z')| + |R_n(z) - R_n(z')| <$$
$$< |S_n(z) - S_n(z')| + |R_n(z)| + |R_n(z')| < \varepsilon,$$

что и является условием непрерывности в точке z.

Пример 1. Показать, что вблизи $x = 0$ ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots,$$

где

$$u_1(x) = x, \quad u_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}} - x^{\frac{1}{2n-3}}$$

и x вещественно, имеет разрывную сумму и, следовательно, сходится неравномерно.

В этом примере удобно применять признак равномерной сходимости в несколько ином виде; мы покажем, что для данного произвольно малого числа ε можно найти как угодно малые значения x, зависящие от n, так что $|R_n(x)|$ будет *не меньше*, чем ε, для любого значения n, как угодно большого. Легко видеть, что существование таких значений x несовместимо с условием равномерной сходимости.

Величина $S_n(x)$ будет $x^{\frac{1}{2n-1}}$; при стремлении n к бесконечности $S_n(x)$ приближается к 1, 0 или -1, смотря по тому, будет ли x положительно, равно нулю или отрицательно. Ряд поэтому абсолютно сходится для всех значений x и имеет разрыв при $x = 0$. В этом ряде

$$R_n(x) = 1 - x^{\frac{1}{2n-1}} \qquad (x > 0),$$

и каким бы большим ни было n, если взять[1]) $x = e^{-(2n-1)}$, то мы получим остаток, равный $1 - e^{-1}$, что не будет произвольно малой величиной. Ряд будет поэтому неравномерно сходящимся вблизи $x = 0$.

Пример 2. Показать, что вблизи $z = 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z(1+z)^{n-1}}{[1 + (1+z)^{n-1}][1 + (1+z)^n]}$$

неравномерно сходится и сумма его имеет разрыв.

n-й член может быть записан в виде

$$\frac{1-(1+z)^n}{1+(1+z)^n} - \frac{1-(1+z)^{n-1}}{1+(1+z)^{n-1}},$$

[1]) Это значение x удовлетворяет условию $|x| < \delta$ при $2n - 1 > \lg \delta^{-1}$.

так что сумма первых n членов равна

$$\frac{1-(1+z)^n}{1+(1+z)^n}.$$

Рассматривая вещественные значения z, бо́льшие -1, видим, что сумма всего ряда будет равна 1, 0 или -1, смотря по тому, будет ли z отрицательным, нулем или положительным числом. Таким образом, в точке $z=0$ имеется разрыв. Этот разрыв объясняется неравномерной сходимостью ряда вблизи $z=0$. Действительно, n-й остаток ряда при положительном z равен

$$\frac{-2}{1+(1+z)^n},$$

и, как бы велико ни было n, взяв $z=\frac{1}{n}$, можно сделать этот остаток по абсолютной величине бо́льшим числа $\frac{2}{1+e}$, которое не будет произвольно малым. Ряд будет поэтому неравномерно сходящимся вблизи $z=0$.

3.33. Различие между абсолютной и равномерной сходимостью

Ряд, *равномерно* сходящийся в области, не обязательно *абсолютно* сходится в каких-либо точках этой области, и наоборот. Например, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^2}{(1+z^2)^n}$$

сходится *абсолютно*, но *неравномерно* (вблизи $z=0$). С другой стороны, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^2+n}$$

сходится только *условно*, ибо ряд модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n+z^2|}$ расходится. Но для всех вещественных значений z члены ряда будут попеременно положительными и отрицательными, убывающими по абсолютной величине, так что сумма ряда заключается между суммой его первых n членов и суммой его первых $n+1$ членов; таким образом, остаток после n членов будет меньше по абсолютной величине, чем n-й член ряда, и необходимо взять лишь конечное число членов (не зависящее от z), чтобы получить для всех вещественных значений z остаток меньший, чем любое заданное число ε. Следовательно, ряд будет *равномерно* сходящимся.

Абсолютно сходящиеся ряды подобны рядам с конечным числом членов в том отношении, что их можно перемножать и переставлять в них члены.

Равномерно сходящиеся ряды подобны рядам с конечным числом членов в том отношении, что их сумма будет непрерывной функцией, если каждый член ряда есть непрерывная функция, и что можно (как мы увидим) интегрировать эти ряды почленно.

3.34. Признак равномерной сходимости Вейерштрасса[1])

Достаточное, хотя и *не необходимое* условие для равномерной сходимости ряда может быть высказано следующим образом.

Если для всех значений z в некоторой области модули членов ряда

$$S = u_1(z) + u_2(z) + u_3(z) + \ldots$$

будут меньше соответствующих членов сходящегося ряда с положительными членами

$$T = M_1 + M_2 + M_3 + \ldots,$$

где M_n *не зависит от* z, то ряд S равномерно сходится в этой области. Это вытекает из того обстоятельства, что в силу сходимости ряда T всегда можно найти такое n, что n-й остаток ряда T, а следовательно и модуль остатка ряда S, будет меньше, чем наперед заданное положительное число ε. И так как значение n, найденное таким образом, не зависит от z, то отсюда вытекает (§ 3.31), что ряд S равномерно сходится; по § 2.34 этот ряд S будет также и абсолютно сходящимся.

Пример. Ряд

$$\cos z + \frac{1}{2^2}\cos^2 z + \frac{1}{3^2}\cos^3 z + \ldots$$

равномерно сходится для всех вещественных значений z, так как модули его членов не больше соответствующих членов сходящегося ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots,$$

члены которого — положительные постоянные числа.

3.341. Равномерная сходимость бесконечных произведений[2])

Говорят, что сходящееся произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\{1 + u_n(z)\}$ сходится равномерно в некоторой области значений z, если при заданном ε можно найти

---

[1]) Weierstrass, Abhandlungen aus der Funktionenlehre, 70. Этот признак обычно называется (например, Osgood, Ann. Math., III, 30 (1889)) M-признаком.

[2]) Приводимое определение было дано Осгудом (Osgood, Funktionentheorie, 462). Условие, данное здесь для равномерной сходимости, также установлено в этой книге.

такое *не зависящее от* z целое число m, что

$$\left| \prod_{n=1}^{m+p} \{1+u_n(z)\} - \prod_{n=1}^{m} \{1+u_n(z)\} \right| < \varepsilon$$

для всех положительных целых значений p.

Единственный признак равномерной сходимости, которым мы будем пользоваться в дальнейшем, заключается в том, что произведение сходится равномерно, если

$$|u_n(z)| < M_n,$$

где M_n не зависят от z и таковы, что ряд $\sum_{1}^{\infty} M_n$ сходится.

Чтобы доказать справедливость этого признака, отметим, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+M_n)$$

сходится (§ 2.7), и поэтому мы можем найти такое m, что

$$\prod_{1}^{m+p} \{1+M_n\} - \prod_{1}^{m} \{1+M_n\} < \varepsilon,$$

а тогда будем иметь

$$\left| \prod_{n=1}^{m+p} \{1+u_n(z)\} - \prod_{n=1}^{m} \{1+u_n(z)\} \right| =$$

$$= \left| \prod_{n=1}^{m} \{1+u_n(z)\} \left[\prod_{n=m+1}^{m+p} \{1+u_n(z)\} - 1 \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{n=1}^{m} (1+M_n) \left[\prod_{n=m+1}^{m+p} \{1+M_n\} - 1 \right] < \varepsilon,$$

причем выбор m независим от z.

3.35. Признак равномерной сходимости Харди[1])

Аналогично рассуждениям § 2.31 легко доказать, что если в данной области

$$\left| \sum_{n=1}^{p} a_n(z) \right| \leqslant k,$$

где $a_n(z)$ вещественно, а k — число, конечное и не зависящее от p и z, и если

$$f_n(z) \geqslant f_{n+1}(z) \text{ и } f_n(z) \to 0$$

[1]) Hardy, Proc. London Math. Soc. (2), IV, 247—265 (1907). Эти результаты, представляющие обобщение теоремы Абеля (§ 3.71), хотя и хорошо известны, по-видимому, были опубликованы не ранее 1907 г. По сходству с признаками сходимости Дирихле и Абеля Бромуич предложил назвать их соответственно признаками Дирихле и Абеля.

равномерно при $n\to\infty$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) f_n(z)$$

сходится равномерно.

Подобным же образом, если

$$\varkappa \geqslant u_n(z) \geqslant u_{n+1}(z) \geqslant 0,$$

где $\varkappa$ *не зависит от* n и z, и если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z)$ сходится равномерно, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z)\, u_n(z)$ сходится равномерно.

Для доказательства последнего утверждения заметим, что можно найти такое m, что

$$a_{m+1}(z),\ a_{m+1}(z)+a_{m+2}(z),\ \ldots,\ a_{m+1}(z)+a_{m+2}(z)+\ldots+a_{m+p}(z)$$

будут по абсолютной величине меньше, чем $\frac{\varepsilon}{\varkappa}$, и потому (§ 2.301)

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n(z)\, u_n(z)\right| < \frac{\varepsilon u_{m+1}(z)}{\varkappa} < \varepsilon,$$

причем выбор ε и m *не зависит от* z.

Пример 1. Показать, что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$$

ходятся равномерно на отрезке

$$\delta \leqslant \theta \leqslant 2\pi-\delta \qquad (\delta>0).$$

Получить соответствующий результат для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\theta}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin n\theta}{n}$$

путем замены θ на $\theta+\pi$.

Пример 2. Если при $a\leqslant x\leqslant b$

$$|\omega_n(x)| \leqslant k_1 \quad\text{и}\quad \sum_{n=1}^{\infty} |\omega_{n+1}(x)-\omega_n(x)| < k_2,$$

где k_1, k_2 не зависят от n и x, и если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с членами, не зависящими от x, сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\omega_n(x)$ будет равномерно сходящимся при $a\leqslant x\leqslant b$ (Hardy).

[В самом деле, можно найти такое m, не зависящее от x, что

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n\right| < \varepsilon,$$

и тогда по следствию § 2.301 мы имеем:

$$\left|\sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \omega_n(x)\right| < (k_1 + k_2)\,\varepsilon.]$$

3.4. Исследование некоторых двойных рядов

Пусть ω_1 и ω_2 — любые постоянные, отношение которых не является вещественным числом, и пусть α — положительное число.

Ряд

$$\sum_{m,\,n} \frac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^\alpha},$$

в котором суммирование распространяется на все положительные, отрицательные и нулевые значения m и n, имеет большое значение в теории эллиптических функций. В точках $z = -2m\omega_1 - 2n\omega_2$ ряд теряет смысл. Можно показать, что ряд будет абсолютно сходящимся для всех остальных значений z, если $\alpha > 2$, и что сходимость будет равномерной для тех значений z, для которых неравенство $|z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2| \geqslant \delta$ справедливо при всех целых значениях m и n, причем δ — произвольное положительное число.

Пусть $\sum'$ обозначает суммирование по всем целым значениям m и n, за исключением $m = n = 0$.

Если не оба числа m и n нули и если $|z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2| \geqslant \delta > 0$ для всех целых значений m и n, то можно найти такое положительное число C, зависящее от δ, но не от z, что

$$\left|\frac{1}{(z + 2m\omega_1 + 2n\omega_2)^\alpha}\right| < C \left|\frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^\alpha}\right|.$$

Следовательно, по признаку § 3.34 данный ряд будет абсолютно и равномерно[1]) сходящимся в рассматриваемой области, если ряд

$$\sum{}' \frac{1}{|m\omega_1 + n\omega_2|^\alpha}$$

будет сходящимся.

Чтобы исследовать сходимость последнего ряда, положим

$$\omega_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad \omega_2 = \alpha_2 + i\beta_2,$$

[1]) Читатель легко даст определение равномерной сходимости двойного ряда (см. § 3.5).

где α_1, α_2, β_1, β_2 вещественны. Так как $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ не вещественно, то $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Рассматриваемый ряд записывается в виде

$$\sum{}' \frac{1}{\{(\alpha_1 m + \alpha_2 n)^2 + (\beta_1 m + \beta_2 n)^2\}^{\alpha/2}},$$

который сходится, если сходится ряд

$$S = \sum{}' \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha/2}}.$$

Действительно, отношение соответствующих членов равно

$$\left[\frac{(\alpha_1 + \alpha_2\mu)^2 + (\beta_1 + \beta_2\mu)^2}{1 + \mu^2}\right]^{\alpha/2},$$

где $\mu = \frac{n}{m}$. Можно доказать, что это выражение, как функция вещественной переменной μ, будет иметь положительный минимум [1]) (не нуль), так как $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, и, следовательно, рассматриваемое отношение будет всегда больше некоторого *положительного* числа K (не зависящего от μ).

Поэтому нам необходимо изучить сходимость только ряда S. Пусть

$$S_{p,q} = \sum_{m=-p}^{p} \sum_{n=-q}^{q}{}' \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha/2}} \leqslant 4 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha/2}}.$$

Разбивая $S_{p,q}$ на слагаемые, в которых $m = n$, $m > n$ и $m < n$ соответственно, получим

$$\frac{1}{4} S_{p,q} = \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{(2m^2)^{\alpha/2}} + \sum_{m=1}^{p} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha/2}} + \sum_{n=1}^{q} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha/2}}.$$

Но

$$\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{(m^2 + n^2)^{\alpha/2}} < \frac{m}{(m^2)^{\alpha/2}} = \frac{1}{m^{\alpha-1}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{4} S \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha/2} m^{\alpha}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

---

[1]) Читатель без труда сумеет доказать это утверждение; минимум дается соотношением

$$K^{\frac{2}{\alpha}} = \frac{1}{2}\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 - \left\{(\alpha_1 - \beta_2)^2 + (\alpha_2 + \beta_1)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{(\alpha_1 + \beta_2)^2 + (\alpha_2 - \beta_1)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right].$$

Но последние ряды, как известно, сходятся при $\alpha - 1 > 1$. Таким образом, ряд S будет сходиться при $\alpha > 2$. Первоначальный ряд будет поэтому абсолютно и равномерно сходящимся в определенной выше области значений z, если $\alpha > 2$.

Пример. Доказать, что ряд

$$\sum \frac{1}{\left(m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_r^2\right)^{\mu}},$$

в котором суммирование распространяется на все положительные, отрицательные и нулевые значения $m_1, m_2, \ldots, m_r$, исключая совокупность одновременных нулевых значений, будет абсолютно сходящимся, если $\mu > \frac{1}{2} r$.

(Eisenstein, Journal für Math., XXXV.)

3.5. Общее понятие равномерности

Кроме суммирования рядов имеются другие процессы, в которых идея равномерности имеет важное значение.

Пусть ε — произвольное положительное число и $f(z, \zeta)$ — функция двух переменных z и ζ, которая для каждой точки z замкнутой области удовлетворяет неравенству $|f(z, \zeta)| < \varepsilon$, когда ζ дается какая-нибудь совокупность значений, которую мы обозначим через (ζ_z); эта совокупность значений, конечно, зависит от рассматриваемого частного значения z.

Если можно найти такую совокупность значений $(\zeta)_0$, что каждое значение совокупности $(\zeta)_0$ будет содержаться во *всех* совокупностях $(\zeta)_z$, то говорят, что функция $f(z, \zeta)$ удовлетворяет неравенству *равномерно* для *всех* точек z области. Если функция $\varphi(z)$ обладает некоторым свойством для любого положительного значения ε в силу неравенства $|f(z, \zeta)| < \varepsilon$, то говорят, что $\varphi(z)$ *обладает этим свойством равномерно*.

В дополнение к равномерной сходимости рядов и произведений мы рассмотрим в дальнейшем равномерную сходимость интегралов, а также равномерную непрерывность с точки зрения общего понятия равномерности.

Так, ряд будет равномерно сходящимся, если $|R_n(z)| < \varepsilon$, когда $\zeta (= n)$ принимает целые значения, не зависящие от z.

Далее, функция $f(z)$ будет непрерывной в замкнутой области, если при заданном ε мы можем найти такое положительное число η_z, что

$$|f(z + \zeta_z) - f(z)| < \varepsilon,$$

если

$$0 < |\zeta_z| < \eta_z$$

и $z + \zeta_z$ будет точкой области.

Функция будет *равномерно* непрерывной, если можно найти такое положительное число η, *не зависящее от* z, что $\eta < \eta_z$ и

$$|f(z + \zeta) - f(z)| < \varepsilon,$$

если

$$0 < |\zeta| < \eta$$

и $z+\zeta$ будет точкой области (в этом случае совокупность $(\zeta)_0$ будет совокупностью точек, модули которых будут меньше η).

Ниже мы найдем (§ 3.61), что непрерывность влечет за собой равномерную непрерывность; это составляет резкую противоположность тому факту, что сходимость не влечет за собой равномерной сходимости.

3.6. Видоизмененная теорема Гейне — Бореля

Следующая теорема имеет большое значение в связи со свойствами равномерности; мы дадим доказательство для одномерной замкнутой области [1]).

Дан (I) *отрезок CD и дан* (II) *закон, по которому соответственно каждой точке* [2]) *P отрезка CD мы можем определить замкнутый интервал I(P) на прямой CD, для которого P будет внутренней* [3]) *точкой.*

Тогда отрезок CD может быть разделен на конечное число таких замкнутых интервалов $J_1, J_2, \ldots, J_k$, *что каждый интервал* J_r *будет содержать по меньшей мере одну точку* P_r (*отличную от его концов*) *такую, что никакая точка интервала* J_r *не лежит вне интервала* $I(P_r)$, *соответствующего* (*на основании данного закона*) *этой точке* P_r [4]).

Замкнутый интервал описанного характера будем называть *подходящим* интервалом и говорить, что он удовлетворяет условию (A).

Если CD удовлетворяет условию (A), то теорема доказана, если этого нет, то разделим CD пополам; если один или оба интервала, на которые разделен CD, будут неподходящими, то неподходящий интервал или оба делим опять пополам [5]).

Процесс деления пополам неподходящих интервалов *либо закончится, либо не закончится.* Если он закончится, то теорема будет доказана, ибо CD будет разделен на подходящие интервалы.

Предположим, что процесс не закончится, и условимся говорить об интервале, который может быть разделен на подходящие интер-

---

[1]) Точное доказательство теоремы для двумерной области имеется в книге Ватсона: W a t s o n, Complex integration and Cauchy's theorem (Camb. Math. Tracts, № 15).

[2]) Примеры таких законов, связывающих интервалы с точками, приведены в §§ 3.61, 5.13.

[3]) Исключаются случаи, когда P будет в C или D, т. е. когда она будет концом интервала.

[4]) Эта формулировка теоремы Гейне — Бореля, которую иногда называют теоремой Бореля — Лебега, принадлежащая Бейкеру (B a k e r, Proc. London Math. Soc. (2), II, 24 (1904), H o b s o n, The theory of functions of a real variable, 87 (1907), показывает, что теорема по существу дана в доказательстве Гурса теоремы Коши (G o u r s a t, Trans. Amer. Math. Soc., 1, 14 (1900)); обычную форму теоремы Гейне — Бореля читатель найдет в указанном сочинении.

[5]) Подходящий интервал не подлежит делению надвое, ибо одна из частей, на которые он будет разделен, может быть и неподходящей.

валы вышеописанным процессом деления пополам, что он удовлетворяет условию (B).

Тогда по предположению CD не будет удовлетворять условию (B); поэтому по меньшей мере одна из половин CD не будет удовлетворять условию (B). Возьмем ту, которая не удовлетворяет (если условию (B) не удовлетворяет ни одна из половин, то возьмем левую); разделим ее пополам и выделим ту из половин, которая не удовлетворяет условию (B). Этот процесс деления пополам и выделения дает бесконечную последовательность интервалов $s_0, s_1, s_2, \ldots$ таких, что

(I) длина s_n равна $2^{-n}CD$,

(II) ни одна точка s_{n+1} не лежит вне s_n,

(III) интервал s_n не удовлетворяет условию (A).

Пусть расстояния концов s_n от C будут x_n и y_n; тогда $x_n \leqslant x_{n+1} < y_{n+1} \leqslant y_n$. Поэтому по теореме § 2.2 x_n и y_n имеют пределы и по условию (I) эти пределы будут одинаковы; пусть они равны ξ, и пусть Q будет точкой, расстояние которой от C равно ξ. Но по условию имеется такое число δ_Q, что каждая точка CD, расстояние которой от Q будет меньше δ_Q, будет точкой соответствующего интервала $I(Q)$. Возьмем n настолько большим, чтобы $2^{-n}CD < \delta_Q$, тогда Q будет внутренней точкой или концом интервала s_n и расстояние любой точки интервала s_n от Q будет меньше δ_Q. А потому интервал s_n удовлетворяет условию (A), что противоречит условию (III). Предположение, что процесс деления пополам не закончится, приводит к противоречию; поэтому процесс должен закончиться, и теорема, таким образом, доказана.

В теореме для двумерной области[1]) интервал CD заменяется замкнутой двумерной областью, интервал $I(P)$ — кругом[2]) с центром в P, а интервал J_r — квадратом со сторонами, параллельными координатным осям.

3.61. Равномерная непрерывность

Из только что доказанной теоремы легко вывести, что если функция $f(x)$ вещественной переменной x непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$, то $f(x)$ будет равномерно непрерывной[3]) на всем отрезке

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

---

[1]) Доказательство можно построить подобным же образом, рассматривая квадрат, содержащий область, и применяя процесс деления квадратов на 4 равных квадрата.

[2]) Или частью круга, лежащей внутри этой области.

[3]) Этот результат принадлежит Гейне (Heine, Journal für Math., LXXI, 361 (1870) и LXXIV, 188 (1872)).

Пусть ε — произвольное положительное число; тогда, в силу непрерывности $f(x)$ для любого значения x, можно найти такое положительное число δ_x, зависящее от x, что

$$|f(x') - f(x)| < \frac{1}{4}\varepsilon$$

для всех значений x', удовлетворяющих неравенству

$$|x' - x| < \delta_x.$$

Тогда по § 3.6 мы можем разделить отрезок (a, b) на *конечное* число замкнутых интервалов, обладающих тем свойством, что в каждом интервале будет находиться такое число x_1, что

$$|f(x') - f(x_1)| < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

когда x' лежит в том же интервале, что и x_1. Пусть δ_0 — длина наименьшего из этих интервалов, и пусть ξ, ξ' — любые два числа в замкнутом интервале (a, b) такие, что $|\xi - \xi'| < \delta_0$. Тогда ξ, ξ' будут лежать в одном и том же или смежных интервалах. Если они лежат в смежных интервалах, то пусть ξ_0 — общий конец этих интервалов; тогда мы можем найти такие числа x_1, x_2, по одному в каждом интервале, что

$$|f(\xi) - f(x_1)| < \frac{1}{4}\varepsilon, \quad |f(\xi_0) - f(x_1)| < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

$$|f(\xi') - f(x_2)| < \frac{1}{4}\varepsilon, \quad |f(\xi_0) - f(x_2)| < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

откуда

$$|f(\xi) - f(\xi')| = |\{f(\xi) - f(x_1)\} - \{f(\xi_0) - f(x_1)\} - \\ - \{f(\xi') - f(x_2)\} + \{f(\xi_0) - f(x_2)\}| < \varepsilon.$$

Если же ξ, ξ' лежат в одном и том же интервале, то мы можем доказать подобным же образом, что

$$|f(\xi) - f(\xi')| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

В обоих случаях мы показали, что для любого числа ξ из рассматриваемого отрезка имеем

$$|f(\xi) - f(\xi + \zeta)| < \varepsilon,$$

когда $\xi + \zeta$ принадлежит тому же отрезку и $-\delta_0 < \zeta < \delta_0$, причем δ_0 *не зависит от* ξ. *Равномерность* непрерывности, таким образом, установлена.

Следствие (I). С помощью двумерного варианта теоремы из § 3.6 мы можем доказать, что функция комплексного переменного, непрерывная во всех точках замкнутой области плоскости комплексного переменного, будет равномерно непрерывной во всей области.

Следствие (II). Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, будет ограниченной на этом отрезке, т. е. мы можем найти такое число k, не зависящее от x, что $|f(x)| < k$ для всех точек x этого отрезка.

[Пусть n — число частей, на которое разделен отрезок. Пусть a, ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, b — их концы; тогда, если x есть любая точка r-го интервала, мы можем найти такие числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что

$$|f(a)-f(x_1)| < \frac{1}{4}\varepsilon, \quad |f(x_1)-f(\xi_1)| < \frac{1}{4}\xi, \quad |f(\xi_1)-f(x_2)| < \frac{1}{4}\varepsilon,$$

$$|f(x_2)-f(\xi_2)| < \frac{1}{4}\varepsilon, \ldots, \quad |f(x_{r-1})-f(x)| < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Поэтому

$$|f(a)-f(x)| < \frac{1}{4}r\varepsilon$$

и

$$|f(x)| < |f(a)| + \frac{1}{2}n\varepsilon,$$

что и представляет требуемый результат, так как правая часть не зависит от x.]

Вывод соответствующей теоремы для функций комплексной переменной предоставляем читателю.

3.62. Вещественная функция вещественной переменной, непрерывная в замкнутом интервале, достигает своей верхней границы

Пусть $f(x)$ — вещественная непрерывная функция x при $a \leqslant x \leqslant b$. Определим сечение, класс R которого содержит такие числа r, что $r > f(x)$ для всех значений x на отрезке (a, b), а класс L — все остальные числа. Это сечение определяет такое число α, что $f(x) \leqslant \alpha$, но, *каково бы ни было* положительное число δ, на отрезке существуют такие значения x, что $f(x) > \alpha - \delta$. Это число α называется *верхней границей* функции $f(x)$. Теорема утверждает, что на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ можно найти такое число x', что $f(x') = \alpha$.

Действительно, как бы мало ни было δ, мы можем найти такие значения x, для которых $|f(x) - \alpha|^{-1} > \delta^{-1}$; поэтому $|f(x) - \alpha|^{-1}$ не ограничен на отрезке (a, b) и [§ 3.61, следствие (II)] не будет непрерывным в одной или более точках отрезка (a, b); но так как $|f(x) - \alpha|$ будет непрерывным во всех точках отрезка, то его обратная величина будет непрерывной во всех точках отрезка (§ 3.2, пример 1), за исключением тех точек, в которых $f(x) = \alpha$; поэтому $f(x) = \alpha$ в некоторой точке отрезка (a, b); теорема, таким образом, доказана.

Следствие (I). Нижняя граница непрерывной функции может быть определена подобным же образом, поэтому можно утверждать, что непрерывная функция достигает также своей нижней границы.

Следствие (II). Если $f(z)$ — функция комплексной переменной — непрерывна в замкнутой области, то $|f(z)|$ достигает своей верхней границы.

3.63. Вещественная функция вещественной переменной, непрерывная в замкнутой области, принимает все значения между верхней и нижней границами

Пусть M, m — верхняя и нижняя границы функции $f(x)$, тогда по § 3.62 можно найти такие числа $\bar{x}$, $\underline{x}$, что $f(\bar{x}) = M$, $f(\underline{x}) = m$. Пусть μ — произвольное число такое, что $m < \mu < M$. Соответственно любому заданному положительному числу ε можно (по § 3.61) разделить отрезок $(\bar{x}, \underline{x})$ на такое *конечное* число r замкнутых интервалов, что

$$|f(x_1^{(r)}) - f(x_2^{(r)})| < \varepsilon,$$

где $x_1^{(r)}$, $x_2^{(r)}$ — любые точки r-го интервала; примем за $x_1^{(r)}$, $x_2^{(r)}$ концы r-го интервала, тогда найдется по крайней мере один интервал, для которого $f(x_1^{(r)}) - \mu$, $f(x_2^{(r)}) - \mu$ будут иметь разные знаки, а так как

$$|\{f(x_1^{(r)}) - \mu\} - \{f(x_2^{(r)}) - \mu\}| < \varepsilon,$$

то

$$|f(x_1^{(r)}) - \mu| < \varepsilon.$$

Поскольку для каждого сколь угодно малого значения ε можно найти число $x_1^{(r)}$, удовлетворяющее этому неравенству, нижней границей функции $|f(x) - \mu|$ будет нуль, и в силу непрерывности этой функции от x получаем по следствию (I) § 3.62, что $f(x) - \mu$ равняется нулю при некотором значении x.

3.64. Полная вариация функции вещественной переменной[1])

Пусть $f(x)$ — вещественная ограниченная функция, определенная при $a \leqslant x \leqslant b$, и пусть

$$a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant b.$$

Тогда $|f(a) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \ldots + |f(x_n) - f(b)|$ называется *вариацией* функции $f(x)$ на отрезке (a, b) для разбиения $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Если вариация имеет верхнюю границу F_a^b при всевозможных значениях n и чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то говорят, что $f(x)$ имеет *ограниченную вариацию* на отрезке (a, b). Число F_a^b называется *полной вариацией* на отрезке (a, b).

---

[1]) Терминология этого параграфа принадлежит частично Гобсону (Hobson, The Theory of functions of a real variable, 1907), а частично Юнгу (Young, The theory of sets of points, 1906).

Пример 1. Если $f(x)$ монотонна [1]) на отрезке (a, b), то ее полная вариация на этом отрезке равна $|f(a)-f(b)|$.

Пример 2. Функция ограниченной вариации может быть представлена как разность двух положительных возрастающих монотонных функций. За такие функции можно принять $\frac{1}{2}\left\{F_a^x+f(x)\right\}$, $\frac{1}{2}\left\{F_a^x-f(x)\right\}$.

Пример 3. Если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке (a, b), то существуют пределы $f(x \pm 0)$ во всех точках этого отрезка (см. пример § 3.2).

Пример 4. Если функции $f(x)$, $g(x)$ имеют ограниченную вариацию на отрезке (a, b), то функция $f(x)g(x)$ также имеет на нем ограниченную вариацию.

[Действительно,

$$|f(x')g(x')-f(x)g(x)| \leqslant |f(x')|\,|g(x')-g(x)|+|g(x)|\,|f(x')-f(x)|,$$

и следовательно, вариация функции $f(x)g(x)$ не может превосходить $gF_a^b+fG_a^b$, где f, g — верхние границы функций $|f(x)|$, $|g(x)|$.]

3.7. Равномерная сходимость степенных рядов

Пусть

$$a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

абсолютно сходится при $z=z_0$.

Тогда при $|z| \leqslant |z_0|$ будет $|a_nz^n| \leqslant |a_nz_0^n|$.

Но так как ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_nz_0^n|$ сходится, то согласно § 3.34 получаем, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ сходится равномерно относительно переменной z, когда $|z| \leqslant |z_0|$.

Отсюда, согласно § 3.32, следует, что степенной ряд будет непрерывной функцией от z во всякой замкнутой области, состоящей из точек внутри и на границе всякого круга, концентрического с кругом сходимости и имеющего меньший радиус (§ 2.6).

3.71. Теорема Абеля о непрерывности вплоть до границы круга сходимости [2])

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ — степенной ряд, радиус сходимости которого равен единице, и пусть он будет таков, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ сходится;

---

[1]) Функция называется монотонной, если $\dfrac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ одного знака или равно нулю для всех пар различных значений x и x'.

[2]) Abel, Journal für Math., 1, 311—399 (1826), теорема IV. Доказательство Абеля использует непосредственно приемы, которыми были доказаны теоремы §§ 3.32 и 3.65. В том случае, когда ряд $\sum|a_n|$ сходится, теорема очевидна по § 3.7.

пусть, далее, $0 \leqslant x \leqslant 1$; тогда теорема Абеля утверждает, что

$$\lim_{x \to 1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Действительно, в обозначениях § 3.35 функция x^n удовлетворяет условиям, наложенным на $u_n(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$; следовательно, ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится *равномерно* на всем отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$; поэтому согласно § 3.32 его сумма будет непрерывной функцией от x на всем отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$; отсюда $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = f(1)$, что и доказывает теорему.

3.72. Теорема Абеля [1]) об умножении рядов

Эта теорема представляет собой видоизменение теоремы § 2.53 для абсолютно сходящихся рядов.

Пусть

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0.$$

Тогда сходимость рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *является достаточным условием для того, чтобы*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

В самом деле, пусть

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Тогда ряды $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ абсолютно сходятся при $|x| < 1$ (см. § 2.6) и, следовательно, согласно § 2.53

$$A(x) B(x) = C(x)$$

при $0 < x < 1$; поэтому по примеру 2 § 2.2

$$\left\{ \lim_{x \to 1-0} A(x) \right\} \left\{ \lim_{x \to 1-0} B(x) \right\} = \left\{ \lim_{x \to 1-0} C(x) \right\},$$

если предположить, что эти три предела существуют. Но по § 3.71 этими пределами будут ряды $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$; таким образом, теорема доказана.

---

[1]) A b e l, Journal für Math., 1, 311—399 (1826), теорема VI. Мы приводим первоначальное доказательство Абеля. В некоторых учебниках дается более сложное доказательство с помощью сумм Чезаро (§ 8.43).

3.73. Степенные ряды, тождественно равные нулю

Если сходящийся степенной ряд равен нулю при всех значениях z, для которых $|z| < r_1$, где $r_1 > 0$, то все коэффициенты этого степенного ряда равны нулю.

В самом деле, если не все коэффициенты равны нулю, то пусть a_m будет первым из коэффициентов, отличных от нуля.

Тогда $a_m + a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \ldots$ равняется нулю при всех значениях z, кроме нуля, и абсолютно сходится, когда $|z| \leqslant r < r_1$; отсюда, полагая $s = a_{m+1} + a_{m+2}z + \ldots$, имеем

$$|s| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m+n}| r^{n-1}$$

и, таким образом, можно найти[1]) такое *положительное число* $\delta \leqslant r$, что при $|z| \leqslant \delta$

$$|a_{m+1}z + a_{m+2}z^2 + \ldots| \leqslant \frac{1}{2}|a_m|;$$

тогда

$$|a_m + sz| \geqslant |a_m| - |sz| > \frac{1}{2}|a_m|$$

и, следовательно, $|a_m + sz| \neq 0$ при $|z| < \delta$.

Мы пришли, таким образом, к противоречию, предположив, что некоторые коэффициенты не равны нулю. Поэтому все коэффициенты равны нулю.

Следствие 1. Если суммы двух степенных рядов равны в области $|z| < \delta$, где $\delta > 0$, то коэффициенты в членах с одинаковыми степенями z соответственно равны.

Следствие 2. Если суммы двух степенных рядов равны хотя бы при z вещественных, то коэффициенты в членах с одинаковыми степенями z также соответственно равны.

ЛИТЕРАТУРА

T. J. I'a Bromwich, Theory of infinite series, гл. VII, 1908.

Э. Гурса, Курс математического анализа, гл. I, XIV, ОНТИ, 1936.

Ш. Ж. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, ГТТИ, 1933, гл. I, XI.

Г. Харди, Курс чистой математики, ИЛ, 1949, гл. V.

W. E. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, гл. II, III, Leipzig, 1912.

G. N. Watson, Complex integration and Cauchy's theorem, гл. I, II, Camb. Math. Tracts., № 15, 1914.

[1]) Достаточно выбрать δ так, чтобы

$$\delta \leqslant r \quad \text{и} \quad \delta \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m+n}| r^{n-1} \leqslant \frac{1}{2}|a_m|.$$

Примеры

1. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$$

равен $\frac{1}{(1-z)^2}$ при $|z|<1$ и равен $\frac{1}{z(1-z)^2}$ при $|z|>1$.

Связано ли это обстоятельство с теорией равномерной сходимости?

2. Показать, что ряд

$$2\sin\frac{1}{3z}+4\sin\frac{1}{9z}+\ldots+2^n\frac{1}{3^n z}+\ldots$$

сходится абсолютно для всех значений z (исключая $z=0$), но не будет равномерно сходящимся вблизи $z=0$.

3. Пусть

$$u_n(x)=-2(n-1)^2 xe^{-(n-1)^2x^2}+2n^2xe^{-n^2x^2},$$

показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ не будет равномерно сходящимся вблизи $x=0$.

(Math. Trip., 1907)

4. Показать, что ряд $\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots$ сходится, но его квадрат (образованный по правилу Абеля)

$$\frac{1}{1}-\frac{2}{\sqrt{2}}+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{2}{\sqrt{4}}+\frac{2}{\sqrt{6}}\right)-\ldots$$

расходится.

5. Показать, что если сходящийся ряд $s=\frac{1}{1^r}-\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}-\frac{1}{4^r}+\ldots$ $(r>0)$ умножить на себя и члены произведения разместить по правилу Абеля, то полученный ряд расходится при $r\leqslant\frac{1}{2}$, но сходится к сумме s^2 при $r>\frac{1}{2}$.

(Cauchy и Cajori)

6. Показать, что если два условно сходящихся ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^r} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s},$$

где r и s заключаются между 0 и 1, умножить друг на друга, и произведение представить в форме Абеля, то необходимым и достаточным условием сходимости полученного ряда является неравенство $r+s>1$.

(Cajori)

7. Показать, что если ряд

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

умножить на себя любое число раз и произведение представить в форме Абеля, то полученный ряд будет сходящимся.

(Cajori)

8. Показать, что q-я степень ряда

$$a_1 \sin \theta + a_2 \sin 2\theta + \ldots + a_n \sin n\theta + \ldots$$

будет сходящейся, если $q(1-r) < 1$, где r — наибольшее число, удовлетворяющее неравенству $a_n \leqslant n^{-r}$ для всех значений n.

9. Показать, что если $\theta \neq 0$ и не кратно 2π и если $u_0, u_1, u_2, \ldots$ — такая последовательность, что $u_n \to 0$ монотонно, то ряд $\sum u_n \cos(n\theta + \alpha)$ сходится.

Показать также, что если предел $u_n \neq 0$, но $\{u_n\}$ все же монотонна, то ряд расходится, колеблясь, если $\frac{\theta}{\pi}$ рационально, но если $\frac{\theta}{\pi}$ иррационально, то сумма может принимать любое значение между определенными границами, разность которых равна $a \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\theta$, где $a = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

(Math. Trip., 1896)

ГЛАВА 4

ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

4.1. Понятие интегрирования

Читатель, несомненно, знаком с идеей интегрирования как операции, обратной дифференцированию, а также и с тем, что интеграл (в этом смысле) от данной элементарной функции не всегда может быть выражен через элементарные же функции. Поэтому, чтобы дать определение интеграла функции, годное во всех случаях, даже если нахождение функции, производная от которой равнялась бы данной функции, является практически неосуществимым, мы должны обратиться к геометрическому смыслу интеграла[1]) $f(x)$ в пределах от a до b, который выражает площадь, ограниченную кривой $y=f(x)$, осью x и ординатами $x=a$, $x=b$. Это послужит исходной точкой для точного определения интегрирования.

4.11. Верхний и нижний интегралы[2])

Пусть $f(x)$ — ограниченная функция от x на отрезке (a, b). Разобьем этот отрезок на части точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ($a \leqslant x_1 \leqslant \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant b$). Пусть U, L — границы $f(x)$ на отрезке (a, b), и пусть U_r, L_r — границы $f(x)$ на отрезке (x_{r-1}, x_r), причем $x_0=a$, $x_n=b$.

Рассмотрим суммы[3])

$$S_n = U_1(x_1-a)+U_2(x_2-x_1)+\ldots+U_n(b-x_{n-1}),$$
$$s_n = L_1(x_1-a)+L_2(x_2-x_1)+\ldots+L_n(b-x_{n-1}).$$

---

[1]) Определяемого как (элементарная) функция, производная которой равна $f(x)$.

[2]) Данное изложение теорем существования, относящихся к интегралам, основано на изложении, данном Гурса, Курс анализа, т. I, гл. IV. Понятия верхнего и нижнего интегралов принадлежат Дарбу (D a r b o u x, Ann. de l'Ecole norm. sup. (2), IV, 64 (1875)).

[3]) S_n и s_n представляют суммы площадей некоторого числа прямоугольников и соответственно больше и меньше площади, ограниченной кривой $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ и $y=0$, если предполагается, что такая площадь вообще существует.

Тогда
$$U(b-a) \geqslant S_n \geqslant s_n \geqslant L(b-a).$$

Для данного n суммы S_n и s_n будут ограниченными функциями от $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Пусть их верхняя и нижняя границы[1]) будут соответственно $\underline{S}_n$, $\overline{s}_n$, так что $\underline{S}_n$, $\overline{s}_n$ зависят только от n и от вида $f(x)$, но не зависят от способа разбиения интервала на n частей.

Пусть нижняя и верхняя границы этих функций от n будут соответственно S, s.

Тогда
$$S_n \geqslant S, \quad s_n \leqslant s.$$

Мы покажем, что s самое большее равно S, т. е. $S \geqslant s$.

Пусть отрезки (a, x_1), (x_1, x_2), ... разбиты на меньшие отрезки новыми точками, и пусть
$$a, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_k(=x_1), \quad y_{k+1}, \ldots, y_{l-1}, y_l(=x_2),$$
$$y_{l+1}, \ldots, y_{m-1}, b$$
будут концами меньших отрезков. Обозначим через U_r', L_r' границы $f(x)$ на отрезке (y_{r-1}, y_r) и положим
$$T_m = \sum_{r=1}^{m} (y_r - y_{r-1}) U_r', \quad t_m = \sum_{r=1}^{m} (y_r - y_{r-1}) L_r'.$$

Так как $U_1', U_2', \ldots, U_k'$ не могут превосходить U_1, то легко получаем, что
$$S_n \geqslant T_m \geqslant t_m \geqslant s_n.$$

Теперь рассмотрим разбиение отрезка (a, b) точками x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$ и другой системой точек $x_1', x_2', \ldots, x_{n'-1}'$. Пусть $S_{n'}'$, $s_{n'}'$ — суммы, соответствующие разбиению второй системой так же, как S_n, s_n соответствуют разбиению первой системой. Примем *все* точки $x_1, \ldots x_{n-1}$; $x_1', \ldots x_{n'-1}'$ за точки $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Тогда
$$S_n \geqslant T_m \geqslant t_m \geqslant s_n$$
и
$$S_{n'}' \geqslant T_m \geqslant t_m \geqslant s_{n'}'.$$

Таким образом, всякая сумма S_n *больше* (или по меньшей мере равна) любой суммы $s_{n'}'$, и поэтому S не может быть меньше s. [Ибо если $S < s$ и $s - S = 2\eta$, то мы можем найти такое S_n и такое $s_{n'}'$, что $S_n - S < \eta$, $s - s_{n'}' < \eta$ и, следовательно, $s_{n'}' > S_n$, что невозможно.]

[1]) Границы функции от n переменных определяются таким же точно образом, как границы функции одной переменной (§ 3.62).

Граница S называется *верхним* интегралом $f(x)$ и обозначается символом $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$; s называется *нижним* интегралом и обозначается символом $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

Если $S = s$, то их общая величина называется *интегралом*, взятым между пределами[1]) интегрирования a и b.

Он обозначается символом

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Когда $a < b$, мы определяем интеграл $\int_b^a f(x)\,dx$ как $-\int_a^b f(x)\,dx$.

Пример 1.

$$\int_a^b \{f(x) + \varphi(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Пример 2. При помощи примера 1 определить интеграл непрерывной комплексной функции вещественной переменной.

4.12. Условие интегрируемости в смысле Римана[2])

Говорят, что функция «интегрируема в смысле Римана», если (в обозначениях § 4.11) S_n и s_n имеют общий предел (называемый *интегралом Римана* от этой функции), когда число отрезков (x_{r-1}, x_r) стремится к бесконечности и длина наибольшего из них стремится к нулю.

Необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции заключается в том, чтобы $S_n - s_n$ *стреми-*

[1]) «Крайние значения» было бы более подходящим термином, но «предел» имеет санкцию давности и привычки. Лэмбом было предложено слово «termini» (Lamb, Infinitesimal calculus, 207, 1897).

[2]) Риман (Riemann, Ges. math. Werke, 239) обосновал свое определение интеграла на пределе суммы, встречающейся в § 4.13, но тогда очень трудно доказать единственность предела. Более общее определение интегрирования (которое имеет весьма большое значение в современной теории функции вещественной переменной) дано Лебегом (Lebesgue, Annali di Mat. (3), VII, 231—359 (1902)). См. его «Интегрирование и отыскание примитивных функций», ГТТИ, 1934.

См. также И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, М., 1957. (*Прим. ред.*)

лось к нулю, когда число отрезков (x_{r-1}, x_r) *беспредельно растет таким образом, что длина наибольшего из них стремится к нулю.*

Условие, очевидно, необходимо, ибо если S_n и s_n имеют общий предел, то $S_n - s_n \to 0$, когда $n \to \infty$. И оно достаточно, ибо из неравенства $S_n \geqslant S \geqslant s \geqslant s_n$ следует, что при $S_n - s_n \to 0$ имеем

$$\lim S_n = \lim s_n = S = s.$$

Примечание. Непрерывная функция $f(x)$ будет интегрируемой. В самом деле, для данного ε мы можем найти такое δ, что

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

когда

$$|x' - x''| < \delta.$$

Пусть все отрезки (x_{s-1}, x_s) меньше, чем δ, тогда $U_s - L_s < \frac{\varepsilon}{b-a}$ и, таким образом, $S_n - s_n < \varepsilon$; поэтому $S_n - s_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\delta \to 0$, что дает условие интегрируемости.

Следствие. Если S_n и s_n имеют один и тот же предел S для одного определенного способа разбиения отрезка (a, b) на части, то предел S_n и s_n для любого другого способа разбиения будет также S.

Пример 1. Произведение двух интегрируемых функций будет также интегрируемой функцией.

Пример 2. Функция непрерывная, за исключением конечного числа разрывов первого рода, будет интегрируемой.

[Если $f(x)$ имеет разрыв первого рода в c, то заключим c в интервал длины δ_1; для данного ε мы можем найти такое δ, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, когда $|x' - x| < \delta$ и x, x' не находятся в этом интервале.

Тогда $S_n - s_n \leqslant \varepsilon(b - a - \delta_1) + k\delta_1$, где k — наибольшее значение выражения $|f(x') - f(x)|$, когда x, x' лежат в этом интервале.

Когда $\delta_1 \to 0$, $k \to |f(c+0) - f(c-0)|$, а отсюда

$$\lim_{n \to \infty} (S_n - s_n) = 0.]$$

Пример 3. Функция ограниченной вариации с конечным числом разрывов первого рода интегрируема (см. § 3.64, пример 2).

4.13. Одна общая теорема об интеграле Римана

Пусть $f(x)$ — интегрируемая функция, а ε — какое-нибудь положительное число. Тогда можно выбрать δ так, чтобы

$$\left| \sum_{p=1}^{n} (x_p - x_{p-1}) f(x'_{p-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

при условии, что

$$x_p - x_{p-1} \leqslant \delta, \quad x_{p-1} \leqslant x'_{p-1} \leqslant x_p.$$

Чтобы доказать эту теорему, заметим, что при данном ε мы можем выбрать длину наибольшего из промежутков δ настолько малой, что $S_n - s_n < \varepsilon$.

Далее,

$$S_n \geqslant \sum_{p=1}^{n} (x_p - x_{p-1}) f(x'_{p-1}) \geqslant s_n$$

и

$$S_n \geqslant \int_a^b f(x)\,dx \geqslant s_n.$$

Поэтому

$$\left| \sum_{p=1}^{n} (x_p - x_{p-1}) f(x'_{p-1}) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant S_n - s_n < \varepsilon.$$

В качестве примера[1]) на вычисление определенного интеграла, основанного непосредственно на теореме этого параграфа, рассмотрим интеграл

$$\int_0^X \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}},$$

где $X < 1$.

Положим $\delta = \frac{1}{p} \arcsin X$, и пусть $x_s = \sin s\delta$ $\left(0 < s\delta < \frac{1}{2}\pi\right)$, так что

$$x_{s+1} - x_s = 2 \sin \frac{1}{2}\delta \cos\left(s + \frac{1}{2}\right)\delta < \delta;$$

пусть, далее,

$$x'_s = \sin\left(s + \frac{1}{2}\right)\delta.$$

Тогда

$$\sum_{s=1}^{p} \frac{x_s - x_{s-1}}{\left(1 - x'^2_{s-1}\right)^{1/2}} = \sum_{s=1}^{p} \frac{\sin s\delta - \sin(s-1)\delta}{\cos\left(s - \frac{1}{2}\right)\delta} = 2p \sin \frac{1}{2}\delta = \frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2} \arcsin X.$$

Взяв p достаточно большим, мы можем сделать

$$\left| \int_0^X \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} - \sum_{s=1}^{p} \frac{x_s - x_{s-1}}{\left(1 - x'^2_{s-1}\right)^{1/2}} \right|$$

произвольно малым.

Мы можем также сделать произвольно малым и выражение

$$\left\{ \frac{\sin(\delta/2)}{\delta/2} - 1 \right\} \arcsin X.$$

А это значит, что при данном произвольно малом числе ε мы можем сделать

$$\left| \int_0^X \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} - \arcsin X \right| < \varepsilon,$$

[1]) Netto, Zeitschrift für Math. und Phys., XL (1895).

взяв p достаточно большим. Но рассматриваемое выражение *не зависит* от p, поэтому оно должно равняться нулю, так как ε произвольно мало. Итак,

$$\int_0^X \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}} = \arcsin X.$$

Пример 1. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\cos\dfrac{x}{n}+\cos\dfrac{2x}{n}+\ldots+\cos\dfrac{n-1}{n}x}{n} = \frac{\sin x}{x}.$$

Пример 2. Если $f(x)$ имеет разрывы первого рода в точках

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,$$

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\left\{\int_a^{a_1-\delta_1} + \int_{a_1+\varepsilon_1}^{a_2-\delta_2} + \ldots + \int_{a_k+\varepsilon_k}^{b} f(x)\,dx\right\},$$

где предел взят в предположении, что $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ стремятся к $+0$ независимо друг от друга.

Пример 3. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$; при $a_1 \leqslant a < b < b_1$ положим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(a, b),$$

тогда

$$\lim_{\delta\to+0} \frac{\varphi(a, b+\delta)-\varphi(a, b)}{\delta} = f(b+0),$$

если $f(b+0)$ существует.

Показать, что если $f(x)$ непрерывна в точках a и b, то

$$\frac{d}{da}\int_a^b f(x)\,dx = -f(a),\quad \frac{d}{db}\int_a^b f(x)\,dx = f(b).$$

Пример 4. Доказать дифференцированием, что если $\varphi(x)$ — непрерывная функция от x, а $\dfrac{dx}{dt}$ — непрерывная функция от t, то

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x)\frac{dx}{dt}\,dt.$$

Пример 5. Пусть $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$; показать, пользуясь примером 3, что

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx + \int_a^b \varphi'(x)f(x)\,dx = f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a).$$

Пример 6. Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке (a, c) и $a \leqslant b \leqslant c$; показать, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ будет непрерывной функцией от b.

4.14. Теоремы о среднем значении

Следующие две общие теоремы являются особенно полезными.

(I) Пусть U и L будут верхней и нижней границами подинтегральной функции $f(x)$ на отрезке (a, b). Тогда из определения интеграла ясно, что

$$\int\limits_a^b \{U - f(x)\}\,dx, \qquad \int\limits_a^b \{f(x) - L\}\,dx$$

будут не отрицательными и, следовательно,

$$U(b-a) \geqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant L(b-a).$$

Этот результат известен как *первая теорема о среднем значении*. Если $f(x)$ — *непрерывная* функция, то мы можем найти такое число ξ на отрезке (a, b), что $f(\xi)$ принимает любое заданное значение, лежащее между U и L (§ 3.63). Поэтому мы можем найти такое число ξ, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi).$$

Если $F(x)$ имеет непрерывную производную $F'(x)$ на отрезке (a, b), мы будем иметь, взяв $F'(x)$ вместо $f(x)$,

$$F(b) - F(a) = (b-a)\,F'(\xi),$$

где ξ — некоторое значение, для которого $a \leqslant \xi \leqslant b$.

Пример. Пусть $f(x)$ непрерывна и $\varphi(x) \geqslant 0$; доказать, что найдется такое ξ, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

(II) Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — интегрируемые функции на отрезке (a, b), и пусть $\varphi(x)$ — *положительная убывающая функция от x*. Тогда *вторая теорема о среднем значении в форме Бонне*[1]) утвер-

[1]) Bonnet, Journal de Math., XIV, 249 (1849). Данное доказательство есть видоизмененная форма доказательства, принадлежащего Гёльдеру (Hölder, Gött. Nach., 38—47 (1889).

ждает, что найдется такое число ξ на отрезке (a, b), для которого имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Действительно, пользуясь обозначениями §§ 4.1—4.13, рассмотрим сумму

$$S = \sum_{s=1}^{p}(x_s - x_{s-1}) f(x_{s-1})\varphi(x_{s-1}).$$

Положив

$$(x_s - x_{s-1}) f(x_{s-1}) = a_{s-1}, \quad \varphi(x_{s-1}) = \varphi_{s-1}, \quad a_0 + a_1 + \ldots + a_s = b_s,$$

будем иметь

$$S = \sum_{s=1}^{p-1} b_{s-1}(\varphi_{s-1} - \varphi_s) + b_{p-1}\varphi_{p-1}.$$

Каждый член суммы увеличится, если вместо b_{s-1} написать $\overline{b}$, и уменьшится, если вместо b_{s-1} написать $\underline{b}$, где $\overline{b}$ и $\underline{b}$ — наибольшее и наименьшее из значений $b_0, b_1, \ldots, b_{p-1}$; следовательно, $\underline{b}\varphi_0 \leqslant S \leqslant \overline{b}\varphi_0$. Поэтому S лежит между наибольшей и наименьшей из сумм

$$\varphi(x_0)\sum_{s=1}^{m}(x_s - x_{s-1}) f(x_{s-1}),$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots, p$. Но при заданном ε мы можем найти такое δ, что при $x_s - x_{s-1} < \delta$

$$\left|\sum_{s=1}^{p}(x_s - x_{s-1}) f(x_{s-1})\varphi(x_{s-1}) - \int_{x_0}^{x_p} f(x)\varphi(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

$$\left|\varphi(x_0)\sum_{s=1}^{m}(x_s - x_{s-1}) f(x_{s-1}) - \varphi(x_0)\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

откуда, написав a, b вместо x_0, x_p, мы найдем, что $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ лежит между верхней и нижней границами выражений[1] $\varphi(a)\int_0^{\xi_1} f(x)\,dx \pm 2\varepsilon$, где ξ_1 может принимать все значения

[1]) Согласно примеру 6 § 4.13 интеграл $\int_a^{\xi_1} f(x)\,dx$ будет непрерывной функцией от ξ_1, так как $f(x)$ — ограниченная функция.

между a и b. Пусть U и L будут верхней и нижней границами выражения $\varphi(a)\int\limits_a^{\xi_1} f(x)\,dx$. Тогда

$$U+2\varepsilon \geqslant \int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \geqslant L-2\varepsilon$$

для всех положительных как угодно малых значений ε; поэтому

$$U \geqslant \int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \geqslant L.$$

Но так как $\varphi(a)\int\limits_a^{\xi_1} f(x)\,dx$, как функция ξ_1, принимает все значения между своими верхней и нижней границами, то найдется такое значение ξ переменной ξ_1, для которого эта функция равна $\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$. Это и доказывает вторую теорему о среднем значении.

Пример. Написав $\varphi(x)-\varphi(b)$ вместо $\varphi(x)$ в теореме о среднем значении в форме Бонне, доказать, что если $\varphi(x)$ — монотонная функция, то существует такое число ξ на отрезке (a, b), что

$$\int\limits_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int\limits_x^{\xi} f(x)\,dx + \varphi(b)\int\limits_{\xi}^b f(x)\,dx.$$

(Du Bois Reymond)

4.2. Дифференцирование интегралов, содержащих параметр

Равенство [1])

$$\frac{d}{d\alpha}\int\limits_a^b f(x, \alpha)\,dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx$$

будет справедливым, *если $f(x, \alpha)$ интегрируема в смысле Римана относительно x, а $f_\alpha\left(=\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)$ — непрерывная функция обеих* [2]) *переменных x и α.*

---

[1]) Эта формула была дана Лейбницем без указания на ограничения, налагаемые на $f(x, \alpha)$.

[2]) $\varphi(x, y)$ называется непрерывной функцией обеих переменных, если при заданном ε мы можем найти такое δ, что $|\varphi(x', y')-\varphi(x, y)| < \varepsilon$ при $\{(x'-x)^2+(y'-y)^2\}^{1/2} < \delta$. Можно показать с помощью § 3.6, что если $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция обеих переменных во всех точках замкну-

В самом деле,

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\,dx = \lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x, \alpha+h)-f(x, \alpha)}{h}\,dx,$$

если этот предел существует. Так как по предположению f_α — непрерывная функция от α, то по первой теореме о среднем значении подинтегральное выражение во втором интеграле будет равно $f_\alpha(x, \alpha+\theta h)$, где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Но для любого данного ε существует (поскольку непрерывность f_α равномерна[1]) относительно переменной x) такое *не зависящее* от x число δ, что

$$|f_\alpha(x, \alpha') - f_\alpha(x, \alpha)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

если $|\alpha' - \alpha| < \delta$.

Взяв $|h| < \delta$, мы видим, что $|\theta h| < \delta$, и следовательно, *когда* $|h| < \delta$, всегда

$$\left|\int_a^b \frac{f(x, \alpha+h)-f(x, a)}{h}\,dx - \int_a^b f_\alpha(x, \alpha)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f_\alpha(x, a+\theta h) - f_\alpha(x, \alpha)|\,dx < \varepsilon.$$

Поэтому по определению предела функции (§ 3.2) предел

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x, \alpha+h)-f(x, \alpha)}{h}\,dx$$

существует и равен

$$\int_a^b f_\alpha\,dx.$$

той ограниченной области, то она будет *равномерно* непрерывной во всей этой области (доказательство почти тождественно с данным в § 3.61). Следует заметить, что если $\varphi(x, y)$ — непрерывная функция *каждой* переменной, то из этого еще не следует, что она будет непрерывной функцией от обеих переменных; для примера возьмем

$$\varphi(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, \quad \varphi(0, 0) = 1;$$

в точке (0, 0) это — непрерывная функция от x и от y, но не от обеих координат x и y.

[1]) Ясно, что достаточно было бы принять, что f_α интегрируема в смысле Римана и непрерывна как функция от α (причем непрерывность равномерна относительно x), вместо того, чтобы принимать, что f_α — непрерывная функция обеих переменных. Так именно поступает Гобсон (Hobson, Functions of a real variable, 599).

Пример 1. Пусть a, b не постоянные, а функции от α с непрерывными производными; показать, что

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\,dx = f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} - f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha} + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx.$$

Пример 2. Если $f(x, \alpha)$ — непрерывная функция обеих переменных, то $\int_a^b f(x, \alpha)\,dx$ будет непрерывной функцией от α.

4.3. Двойные и повторные интегралы

Пусть $f(x, y)$ будет функцией, непрерывной относительно обеих переменных x и y в области $a \leqslant x \leqslant b$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$.

Из примера 2 § 4.2 ясно, что существуют оба интеграла

$$\int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, y)\,dy \right\} dx, \quad \int_\alpha^\beta \left\{ \int_a^b f(x, y)\,dx \right\} dy.$$

Последние называются *повторными интегралами.*

Ясно также, как в § 3.62, что $f(x, y)$, будучи непрерывной функцией обеих переменных, достигает верхней и нижней границ.

Будем теперь рассматривать совокупность значений x и y как точки внутри и на границе прямоугольника в декартовых координатах; разделим его на $n\nu$ прямоугольников прямыми, параллельными осям.

Пусть $U_{m,\mu}$, $L_{m,\mu}$ — верхняя и нижняя границы функции $f(x, y)$ в одном из этих меньших прямоугольников, площадь которого обозначим через $A_{m,\mu}$; положим

$$\sum_{m=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} U_{m,\mu}A_{m,\mu} = S_{n,\nu}, \quad \sum_{m=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} L_{m,\mu}A_{m,\mu} = s_{n,\nu}.$$

Тогда $S_{n,\nu} > s_{n,\nu}$, и, как в § 4.11, мы можем найти числа $\underline{S}_{n,\nu}$, $\overline{s}_{n,\nu}$, которые будут соответственно нижней и верхней границами величин $S_{n,\nu}$ и $s_{n,\nu}$, причем $\underline{S}_{n,\nu}$, $\overline{s}_{n,\nu}$ зависят только от числа прямоугольников, но не от их формы и $\underline{S}_{n,\nu} \geqslant \overline{s}_{n,\nu}$.

Найдем затем соответственно нижнюю и верхнюю границы S и s величин $\underline{S}_{n,\nu}$, $\overline{s}_{n,\nu}$ как функций от n и ν; имеем, как в § 4.11,

$$S_{n,\nu} \geqslant S \geqslant s \geqslant s_{n,\nu}.$$

Благодаря равномерной непрерывности функций $f(x, y)$ мы можем при данном ε найти такое δ, что

$$U_{m,\mu} - L_{m,\mu} < \varepsilon$$

(для всех значений m и μ), когда стороны всех малых прямоугольников меньше δ, зависящего только от вида функции $f(x, y)$ и от ε.

Тогда

$$S_{n,\nu} - s_{n,\nu} < \varepsilon (b-a)(\beta-\alpha)$$

и, следовательно,

$$S - s < \varepsilon (b-a)(\beta-\alpha).$$

Но S и s *не зависят* от ε, и следовательно, $S = s$.

Общее значение для S и s называется *двойным интегралом* функции $f(x, y)$ и обозначается символом

$$\int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx\, dy.$$

Легко показать, что повторные интегралы и двойной интеграл будут равны, когда $f(x, y)$ — непрерывная функция обеих переменных.

Действительно, пусть Υ_m, Λ_m — верхняя и нижняя границы интеграла

$$\int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy,$$

когда x изменяется между x_{m-1} и x_m.

Тогда

$$\sum_{m=1}^{n} \Upsilon_m (x_m - x_{m-1}) \geqslant \int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy \right\} dx \geqslant \sum_{m=1}^{n} \Lambda_m (x_m - x_{m-1}).$$

Но [1])

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} U_{m,\mu} (y_\mu - y_{\mu-1}) \geqslant \Upsilon_m \geqslant \Lambda_m \geqslant \sum_{\mu=1}^{\nu} L_{m,\mu} (y_\mu - y_{\mu-1}).$$

Умножая эти последние неравенства на $x_m - x_{m-1}$, суммируя и принимая во внимание предыдущие неравенства, получим

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\nu} U_{m,\mu} A_{m,\mu} \geqslant \int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy \right\} dx \geqslant \sum_{m=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\nu} L_{m,\mu} A_{m,\mu}$$

и, переходя к пределу,

$$S \geqslant \int_a^b \left\{ \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy \right\} dx \geqslant s.$$

Но

$$S = s = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dx\, dy,$$

[1]) Верхняя граница функции $f(x, y)$ в прямоугольнике $A_{m,\mu}$ будет не меньше, чем верхняя граница функции $f(x, y)$ на той части прямой $x = \xi$, которая лежит в этом прямоугольнике.

так что один из повторных интегралов равен двойному интегралу. Подобным же образом доказывается и равенство другого повторного интеграла двойному интегралу.

Следствие. Если $f(x, y)$ — непрерывная функция обеих переменных, то

$$\int_0^1 dx \left\{ \int_0^{1-x} f(x, y)\, dy \right\} = \int_0^1 dy \left\{ \int_0^{1-y} f(x, y)\, dx \right\}.$$

4.4. Интегралы с бесконечными пределами

Если существует предел

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx,$$

то мы обозначаем его символом $\int_a^\infty f(x)\, dx$ и называем *интегралом с бесконечным пределом* (infinite integral[1])).

Примеры.

1) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{a} \qquad (a > 0).$

2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\, dx}{(x^2 + a^2)^2} = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{2(b^2 + a^2)^2} + \frac{1}{2a^2} \right) = \frac{1}{2a^2}.$

3) Интегрированием по частям показать, что

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = n! \qquad \text{(Euler.)}$$

Подобным же образом мы определяем интеграл $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$ как предел $\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx$, если таковой существует, а интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ определяется как сумма $\int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx$. В этом последнем определении выбор величины a безразличен.

---

[1]) Это название, принадлежащее Харди (Hardy, Proc. London Math. Soc., XXXIV, 16 (1902)), подчеркивает аналогию между интегралами с бесконечными пределами и бесконечными рядами (infinite series).

4.41. Интегралы с бесконечными пределами от непрерывных функций. Необходимое и достаточное условие сходимости

Покажем, что для сходимости интеграла $\int_a^\infty f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε существовало такое положительное число X, что $\left|\int_{x'}^{x''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ всякий раз, когда $x'' \geqslant x' \geqslant X$.

Условие это, очевидно, необходимо; для доказательства его достаточности предположим, что оно удовлетворяется; тогда, если $n \geqslant X - a$, где n — положительное целое число, и $S_n = \int_a^{a+n} f(x)\,dx$, то мы имеем

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Отсюда, согласно § 2.22, вытекает, что S_n стремится к некоторому пределу S; далее, если $\xi > a+n$, то

$$\left|S - \int_a^\xi f(x)\,dx\right| \leqslant \left|S - \int_a^{a+n} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{a+n}^\xi f(x)\,dx\right| < 2\varepsilon,$$

и следовательно,

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_a^\xi f(x)\,dx = S.$$

Таким образом, условие и достаточно.

4.42. Равномерная сходимость интеграла с бесконечными пределами

Говорят, что интеграл $\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx$ сходится равномерно относительно α в данной области значений α, если для произвольного положительного числа ε существует такое число X, не зависящее от α, что

$$\left|\int_{x'}^\infty f(x, \alpha)\,dx\right| \leqslant \varepsilon$$

для всех значений α в рассматриваемой области и для всех значений $x' \geqslant X$. Читатель легко убедится, сравнивая §§ 2.22 и 3.31 с § 4.41, что для равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\,dx$ в данной области значений α необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε существовало такое число X, не зависящее от α, что

$$\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(x, \alpha)\,dx\right| < \varepsilon$$

для всех значений α в рассматриваемой области, когда $x'' \geqslant x' \geqslant X$.

4.43. Признаки сходимости интегралов с бесконечными пределами

Существуют признаки сходимости интегралов с бесконечными пределами, аналогичные данным в гл. 2 для сходимости бесконечных рядов.

Нижеследующие признаки играют особенно важную роль.

(I) Абсолютно сходящиеся интегралы. Можно показать, что $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ заведомо будет сходиться, если $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,dx$ сходится; о первом интеграле тогда говорят, что он абсолютно сходится. Доказательство подобно приведенному в § 2.32.

Пример. *Признак сравнения.* Если $|f(x)| \leqslant g(x)$ и $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ будет абсолютно сходящимся.

[Примечание. Дирихле[1]) указал, что для сходимости $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *не необходимо*, чтобы $f(x) \to 0$, когда $x \to \infty$. Это можно видеть из рассмотрения функции

$$f(x) = 0 \qquad (n \leqslant x \leqslant n+1-(n+1)^{-2}),$$
$$f(x) = (n+1)^4 (n+1-x)\{x-(n+1)+(n+1)^{-2}\}$$
$$(n+1-(n+1)^{-2} \leqslant x \leqslant n+1),$$

---

[1]) Пример, данный Дирихле, был $f(x) = \sin x^2$ (Dirichlet, Journal für Math, XVII, 60 (1837)).

где n принимает все целые значения. В самом деле, $\int_0^\xi f(x)\,dx$ возрастает вместе с ξ и $\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \frac{1}{6}(n+1)^{-2}$, отсюда следует, что $\int_0^\infty f(x)\,dx$ сходится. Но при $x = n+1-\frac{1}{2}(n+1)^{-2}$ имеем $f(x)=\frac{1}{4}$; следовательно, $f(x)$ не стремится к нулю.]

(II) Признак Маклорена — Коши[1]. Если $f(x)>0$ и $f(x)\to 0$ монотонно, то $\int_1^\infty f(x)\,dx$ и ряд $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ сходятся или расходятся одновременно.

Ибо

$$f(m) \geqslant \int_m^{m+1} f(x)\,dx \geqslant f(m+1),$$

откуда

$$\sum_{m=1}^{n} f(m) \geqslant \int_n^{n+1} f(x)\,dx \geqslant \sum_{m=2}^{n+1} f(m).$$

Первое неравенство показывает, что если ряд сходится, то возрастающая последовательность $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ сходится (§ 2.2), когда $n\to\infty$, принимая целые значения, а отсюда непосредственно следует, что $\int_1^{x'} f(x)\,dx$ сходится, когда $x'\to\infty$; обратно, если интеграл расходится, то будет расходящимся и ряд.

Второе неравенство показывает, что если ряд расходится, то расходится и интеграл, а если интеграл сходится, то будет сходиться и ряд (§ 2.2).

(III) Признак Бертрана[2]. Если $f(x)=O(x^{\lambda-1})$, то $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится при $\lambda<0$; если $f(x)=O\left(x^{-1}\{\lg x\}^{\lambda-1}\right)$, то $\int_a^\infty f(x)\,dx$ сходится при $\lambda<0$.

Эти результаты являются частными случаями признака сравнения, данного в (I).

---

[1]) Маклорен (Maclaurin, Fluxions, 1, стр. 289, 290) высказывает в словесной форме утверждение, по существу эквивалентное этому признаку. Вывод Коши дан в его сочинениях (Cauchy, Oeuvres (2), VII, 269).

[2]) Bertrand, Journal de Math., VII, стр. 38, 39 (1892).

(IV) Признак Шартье[1]) **для интегралов, содержащих периодические функции.** Если $f(x) \to 0$ монотонно, когда $x \to \infty$, и если $\left| \int\limits_a^x \varphi(x)\,dx \right|$ ограничен при $x \to \infty$, то $\int\limits_a^\infty f(x)\varphi(x)\,dx$ сходится.

В самом деле, пусть верхней границей для $\left| \int\limits_a^x \varphi(x)\,dx \right|$ будет A; мы можем найти такое X, что $f(x) < \frac{\varepsilon}{2A}$ при $x \geqslant X$, и тогда по второй теореме о среднем значении при $x'' \geqslant x' \geqslant X$ имеем

$$\left| \int\limits_{x'}^{x''} f(x)\varphi(x)\,dx \right| = \left| f(x') \int\limits_{x'}^{\xi} \varphi(x)\,dx \right| =$$

$$= f(x') \left| \int\limits_a^{\xi} \varphi(x)\,dx - \int\limits_a^{x} \varphi(x)\,dx \right| \leqslant 2Af(x') < \varepsilon,$$

что и является условием сходимости.

Пример 1. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится.

Пример 2. $\int\limits_0^\infty x^{-1}\sin(x^3 - ax)\,dx$ сходится.

4.431. Признаки равномерной сходимости интегралов с бесконечными пределами[2])

(I) Признак Валле-Пуссена[3]). Читатель легко установит, пользуясь рассуждением § 3.34, что интеграл $\int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\,dx$ сходится равномерно относительно α в некоторой области значений α, если при этих значениях $|f(x, \alpha)| < \mu(x)$, где $\mu(x)$ — не зависит от α и интеграл $\int\limits_a^\infty \mu(x)\,dx$ сходится. [Ибо, выбирая X так, что

---

[1]) Chartier, Journal de Math., XVIII, 201—212 (1853). Замечательно, что этот признак для *условно* сходящихся интегралов был дан за несколько лет до точных определений абсолютной сходимости интеграла.

[2]) Результаты этого параграфа и § 4.44 принадлежат Валле-Пуссену (de la Vallée Poussin, Ann. de la Soc. Scientifique de Bruxelles, XVI, 150—180 (1892)).

[3]) Это название принадлежит Осгуду.

$\int\limits_{x'}^{x''} \mu(x)\,dx < \varepsilon$ при $x'' \geqslant x' \geqslant X$, мы имеем $\left| \int\limits_{x'}^{x''} f(x, \alpha)\,dx \right| < \varepsilon$, причем выбор X не зависит от α.]

Пример. $\int\limits_{0}^{\infty} x^{a-1} e^{-x}\,dx$ сходится равномерно на любом отрезке (A, B) значений a таком, что $1 \leqslant A \leqslant B$[1]).

(II) Метод замены переменной. Мы позволим себе разъяснить этот метод на примере. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$, где α вещественно. Имеем

$$\int\limits_{x'}^{x''} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \int\limits_{\alpha x'}^{\alpha x''} \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Так как $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy$ сходится, то мы можем найти такое Y, что

$$\left| \int\limits_{y'}^{y''} \frac{\sin y}{y}\,dy \right| < \varepsilon, \quad \text{когда } y'' \geqslant y' \geqslant Y.$$

Таким образом,

$$\left| \int\limits_{x'}^{x''} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx \right| < \varepsilon,$$

когда $|\alpha x'| \geqslant Y$; если $|\alpha| \geqslant \delta > 0$, то

$$\left| \int\limits_{x'}^{x''} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx \right| < \varepsilon,$$

когда $x'' \geqslant x' \geqslant X = \frac{Y}{\delta}$, и этот выбор X не зависит от α. Таким образом, сходимость будет равномерной, когда $\alpha \geqslant \delta > 0$ и когда $\alpha \leqslant -\delta < 0$.

Пример. $\int\limits_{1}^{\infty} \left\{ \int\limits_{0}^{\alpha} \sin(\beta^2 x^3)\,d\beta \right\} dx$ равномерно сходится в любой области вещественных значений α.

(de la Vallée Poussin)

[1]) Ограничение $1 \leqslant A$ излишне и нужно только для того, чтобы интеграл не был несобственным в начале координат. (*Прим. ред.*)

[Полагаем $\beta^2 x^3 = z$ и пользуемся тем, что $\left|\int\limits_0^{\alpha^2 x^3} z^{-1/2} \sin z\, dz\right|$ не превосходит постоянной, не зависящей от α и x, так как $\int\limits_0^\infty z^{-1/2} \sin z\, dz$ сходится.]

(III) Метод интегрирования по частям. Если

$$\int f(x, \alpha)\, dx = \varphi(x, \alpha) + \int \chi(x, \alpha)\, dx$$

и если $\varphi(x, \alpha) \to 0$ равномерно относительно α при $x \to \infty$, а $\int\limits_0^\infty \chi(x, \alpha)\, dx$ сходится равномерно относительно α, то очевидно, что $\int\limits_0^\infty f(x, \alpha)\, dx$ сходится равномерно относительно α.

(IV) Метод разложения.

Пример.

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos x \sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\alpha+1)x}{x}\, dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sin(\alpha-1)x}{x}\, dx;$$

оба последних интеграла будут равномерно сходящимися в любой замкнутой области вещественных значений α, не содержащей точек $\alpha = \pm 1$.

4.44. Теоремы, относящиеся к равномерно сходящимся интегралам с бесконечными пределами

(I) *Пусть* $\int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\, dx$ *сходится равномерно, когда* α *лежит в области* S.

Если $f(x, \alpha)$ — *непрерывная функция обеих переменных, когда* $x \geqslant a$ *и* α *лежит в* S, *то* $\int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\, dx$ *будет непрерывной функцией от* α[1]).

Действительно, для данного ε мы можем найти такое X, *не зависящее от* α, что $\left|\int\limits_\xi^\infty f(x, \alpha)\, dx\right| < \varepsilon$ при $\xi \geqslant X$.

---

[1]) Этот результат принадлежит Стоксу. Утверждение Стокса гласит, что интеграл будет непрерывной функцией от α, если он сходится «не бесконечно медленно».

Затем мы можем найти такое δ, *не зависящее от* x и α, что

$$|f(x, \alpha)-f(x, \alpha')| < \frac{\varepsilon}{X-a},$$

когда

$$|\alpha-\alpha'| < \delta.$$

А это значит, что для данного ε мы можем найти такое δ, не зависящее от α, что

$$\left|\int\limits_a^\infty f(x, \alpha')\,dx-\int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^X \{f(x, \alpha)-f(x, \alpha')\}\,dx\right| + \\ + \left|\int\limits_X^\infty f(x, \alpha')\,dx\right| + \left|\int\limits_X^\infty f(x, \alpha)\,dx\right| < 3\varepsilon,$$

когда $|\alpha'-\alpha| < \delta$, что и является условием непрерывности.

(II) *Если* $f(x, \alpha)$ *удовлетворяет тем же самым условиям, что и в* (I), *и если область* S *содержит отрезок*

$$A \leqslant \alpha \leqslant B,$$

то

$$\int\limits_A^B \left\{\int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\,dx\right\} d\alpha = \int\limits_a^\infty \left\{\int\limits_A^B f(x, \alpha)\,d\alpha\right\} dx.$$

В самом деле, согласно § 4.3

$$\int\limits_A^B \left\{\int\limits_a^\xi f(x, \alpha)\,dx\right\} d\alpha = \int\limits_a^\xi \left\{\int\limits_A^B f(x, \alpha)\,d\alpha\right\} dx.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_A^B \left\{\int\limits_a^\infty f(x, \alpha)\,dx\right\} d\alpha - \int\limits_a^\xi \left\{\int\limits_A^B f(x, \alpha)\,d\alpha\right\} dx\right| = \\ = \left|\int\limits_A^B \left\{\int\limits_\xi^\infty f(x, \alpha)\,dx\right\} d\alpha\right| < \int\limits_A^B \varepsilon\,d\alpha < \varepsilon(B-A)$$

для всех достаточно больших значений ξ.

Но согласно §§ 2.1 и 4.41 это и есть условие того, что существует предел

$$\lim_{\xi\to\infty} \int\limits_0^\xi \left\{\int\limits_A^B f(x, \alpha)\,d\alpha\right\} dx$$

и что он равен

$$\int_A^B \left\{ \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx \right\} d\alpha.$$

Следствие. Соотношение $\frac{d}{d\alpha} \int_a^\infty \varphi(x, \alpha)\, dx = \int_a^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\, dx$ справедливо, если интеграл справа равномерно сходится, если его подинтегральная функция есть непрерывная функция обеих переменных, когда $x \geqslant a$ и α лежит в области S, и если интеграл слева сходится.

Пусть A — точка области S, и пусть $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = f(x, \alpha)$, так что согласно примеру 3 § 4.13

$$\int_A^\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha = \varphi(x, \alpha) - \varphi(x, A).$$

Тогда интеграл $\int_a^\infty \left\{ \int_A^\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha \right\} dx$ будет сходиться, а это значит, что интеграл $\int_a^\infty \{\varphi(x, \alpha) - \varphi(x, A)\}\, dx$ сходится; следовательно, поскольку $\int_a^\infty \varphi(x, \alpha)\, dx$ сходится, должен сходиться и $\int_a^\infty \varphi(x, A)\, dx$.

Далее,

$$\frac{d}{d\alpha}\left[\int_a^\infty \varphi(x, \alpha)\, dx\right] = \frac{d}{d\alpha}\left[\int_a^\infty \{\varphi(x, \alpha) - \varphi(x, A)\}\, dx\right] =$$

$$= \frac{d}{d\alpha}\left[\int_a^\infty \left\{ \int_A^\alpha f(x, \alpha)\, d\alpha \right\} dx\right] = \frac{d}{d\alpha} \int_A^\alpha \left\{ \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx \right\} d\alpha =$$

$$= \int_a^\infty f(x, \alpha)\, dx = \int_a^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\, dx,$$

а это и есть требуемый результат. Законность изменения порядка интегрирования была обоснована только что, а законность дифференцирования интеграла $\int^\alpha$ по α основана на § 4.44 (I) и примере 3 § 4.13.

4.5 Несобственные интегралы. Главные значения

Если $|f(x)| \to \infty$ при $x \to a+0$ и если предел

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx,$$

все же существует, то его обозначают обычным символом

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

и называют *несобственным интегралом*.

Если $|f(x)| \to \infty$, когда $x \to c$, где $a < c < b$, то сумма

$$\lim_{\delta \to +0} \int_{a}^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\delta' \to +0} \int_{c+\delta'}^{b} f(x)\,dx,$$

все же может существовать, в этом случае ее опять обозначают символом $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ и также называют несобственным интегралом. Может, однако, случиться, что ни один из этих пределов не существует, когда δ, $\delta' \to 0$ независимо друг от друга, но существует предел

$$\lim_{\delta \to +0} \left\{ \int_{a}^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx \right\};$$

этот предел называется тогда главным значением Коши интеграла $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ и обозначается для краткости символом $P\int_{a}^{b} f(x)\,dx$.

Для несобственных интегралов могут быть получены результаты, аналогичные разультатам §§ 4.4—4.44. Но для практики требуется главным образом (I) понятие абсолютной сходимости, (II) аналог признака сходимости Бертрана, (III) аналог признака равномерности сходимости Валле-Пуссена. Вывод их предоставляется читателю, как и рассмотрение интегралов, в которых подинтегральная функция имеет бесконечный предел более чем в одной точке области интегрирования[1]).

[1]) Подробное изложение несобственных интегралов дано в книгах Гобсона и Пирпонта (Pierpont, Functions of a real variable), к которым мы и отсылаем читателя. Связь между интегралами с бесконечными пределами и несобственными интегралами установлена Бромуичем (Bromwich, Infinite series, § 164).

Примеры. 1) $\int\limits_0^\pi x^{-1/2} \cos x\, dx$ — несобственный интеграл.

2) $\int\limits_0^1 x^{\lambda-1}(1-x)^{\mu-1}\, dx$ — несобственный интеграл при $0 < \lambda < 1$, $0 < \mu < 1$. Он не сходится для отрицательных значений λ_2 и μ.

3) $P\int\limits_0^2 \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\, dx$ — главное значение несобственного интеграла при $0 < \alpha < 1$.

4.51. Изменение порядка интегрирования в некоторых повторных интегралах

Общие условия законности изменения порядка интегрирования, когда подинтегральная функция не непрерывна, получить трудно. Следующий пример хорошо показывает затруднения, которые приходится преодолевать при изменении порядка интегрирования в повторных несобственных интегралах.

Пусть $f(x, y)$ — *непрерывная функция обеих переменных*, и пусть

$$0 < \lambda \leqslant 1, \quad 0 < \mu \leqslant 1, \quad 0 < \nu \leqslant 1,$$

тогда

$$\int\limits_0^1 dx \left\{ \int\limits_0^{1-x} x^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1} f(x, y)\, dy \right\} = \\ = \int\limits_0^1 dy \left\{ \int\limits_0^{1-y} x^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1} f(x, y)\, dx \right\}.$$

Эта формула, впервые указанная Дирихле, играет важную роль в теории интегральных уравнений; исследование, которое мы здесь дадим, принадлежит Гурвицу [1]).

Пусть $x^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1} f(x, y) = \varphi(x, y)$, и пусть M будет верхней границей модуля $|f(x, y)|$.

Пусть δ — любое положительное число, меньшее $\frac{1}{3}$.

Построим треугольник со сторонами

$$x = \delta, \quad y = \delta, \quad x + y = 1 - \delta;$$

во всех точках внутри и на контуре этого треугольника функция $\varphi(x, y)$ будет непрерывна, и отсюда, по следствию § 4.3,

$$\int\limits_\delta^{1-2\delta} dx \left\{ \int\limits_\delta^{1-x-\delta} \varphi(x, y)\, dy \right\} = \int\limits_\delta^{1-2\delta} dy \left\{ \int\limits_\delta^{1-y-\delta} \varphi(x, y)\, dx \right\}.$$

[1]) W. A. Hurwitz, Annals of Mathematics, IX, 183 (1908).

Далее,

$$\int_{\delta}^{1-2\delta} dx \left\{ \int_{0}^{1-x} \varphi(x, y)\, dy \right\} = \int_{\delta}^{1-2\delta} dx \left\{ \int_{\delta}^{1-x-\delta} \varphi(x, y)\, dy \right\} + \int_{\delta}^{1-2\delta} I_1\, dx + \int_{\delta}^{1-2\delta} I_2\, dx,$$

где

$$I_1 = \int_{0}^{\delta} \varphi(x, y)\, dy, \qquad I_2 = \int_{1-x-\delta}^{1-x} \varphi(x, y)\, dy.$$

Но

$$|I_1| \leqslant \int_{0}^{\delta} Mx^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1}\, dy \leqslant Mx^{\lambda-1} (1-x-\delta)^{\nu-1} \int_{0}^{\delta} y^{\mu-1}\, dy,$$

так как

$$(1-x-y)^{\nu-1} \leqslant (1-x-\delta)^{\nu-1}.$$

Поэтому положив $x = (1-\delta) x_1$, будем иметь [1])

$$\left| \int_{\delta}^{1-2\delta} I_1\, dx \right| \leqslant M\delta^{\mu}\mu^{-1} \int_{0}^{1-\delta} x^{\lambda-1} (1-x-\delta)^{\nu-1}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant M\delta^{\mu}\mu^{-1} (1-\delta)^{\lambda+\nu-1} \int_{0}^{1} x_1^{\lambda-1} (1-x_1)^{\nu-1}\, dx_1 <$$

$$< M\delta^{\mu}\mu^{-1} (1-\delta)^{\lambda+\nu-1} B(\lambda, \nu) \to 0, \quad \text{когда} \quad \delta \to 0.$$

Подобным же образом можно убедиться в том, что $\int_{\delta}^{1-2\delta} I_2\, dx \to 0$ при $\delta \to 0$.

Отсюда [2])

$$\int_{0}^{1} dx \left\{ \int_{0}^{1-x} \varphi(x, y)\, dy \right\} = \lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{1-2\delta} dx \left\{ \int_{0}^{1-x} \varphi(x, y)\, dy \right\} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{1-2\delta} dx \left\{ \int_{\delta}^{1-x-\delta} \varphi(x, y)\, dy \right\} = \lim_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{1-2\delta} dy \left\{ \int_{\delta}^{1-y-\delta} \varphi(x, y)\, dx \right\}$$

---

[1]) $\int_{0}^{1} x_1^{\lambda-1} (1-x_1)^{\lambda-1}\, dx_1 = B(\lambda, \nu)$ существует, если $\lambda > 0$, $\nu > 0$ (§ 4.5, пример 2).

[2]) Этот повторный интеграл существует и даже абсолютно сходится, ибо

$$\int_{0}^{1-x} |x^{\lambda-1} y^{\mu-1} (1-x-y)^{\nu-1} f(x, y)\, dy| <$$

$$< Mx^{\lambda-1} (1-x)^{\mu+\nu-1} \int_{0}^{1} s^{\mu-1} (1-s)^{\nu-1}\, ds,$$

по доказанному выше; точно таким же рассуждением убедимся, что последний интеграл равен

$$\int_0^1 dy \left\{ \int_0^{1-y} \varphi(x, y)\, dx \right\}.$$

Следовательно, предложенная теорема доказана [1]).

Следствие. Положив $\xi = a + (b-a)x$, $\eta = b - (b-a)y$, видим, что если функция $\varphi(\xi, \eta)$ непрерывна, то

$$\int_a^b d\xi \left\{ \int_\xi^b (\xi - a)^{\lambda-1} (b-\eta)^{\mu-1} (\eta - \xi)^{\nu-1} \varphi(\xi, \eta)\, d\eta \right\} =$$
$$= \int_a^b d\eta \left\{ \int_a^\eta (\xi - a)^{\lambda-1} (b-\eta)^{\mu-1} (\eta - \xi)^{\nu-1} \varphi(\xi, \eta)\, d\xi \right\}.$$

Это соотношение называется *формулой Дирихле.*

Примечание. Интегралы с бесконечными пределами и несобственные интегралы были введены Коши (Cauchy, Leçons sur le calc. inf., 1823), хотя идея интегралов с бесконечными пределами, кажется, существует со времени Маклорена (1742). Признак сходимости имеется у Шартье (1853). Стокс различал «существенно» (абсолютно) и «несущественно» сходящиеся интегралы, хотя он и не дал для них точного определения. Такое определение было дано Дирихле в 1854 и 1858 гг. (см. Dirichlet, Vorlesungen, 39, 1904). В первой половине XIX столетия несобственные интегралы привлекали больше внимания, чем интегралы с бесконечными пределами, по всей вероятности, потому, что не вполне сознавалось, что интеграл с бесконечными пределами в действительности является пределом интеграла.

где положено $y = (1-x)s$; интеграл же

$$\int_0^1 Mx^{\lambda-1}(1-x)^{\mu+\nu-1}\, dx \int_0^1 s^{\mu-1}(1-s)^{\nu-1}\, ds$$

существует. А поскольку этот интеграл существует, то его значение, равное $\lim\limits_{\delta, \varepsilon \to 0} \int_\delta^{1-\varepsilon}$, может быть обозначено $\lim\limits_{\delta \to 0} \int_\delta^{1-2\delta}$.

[1]) С появлением интеграла Лебега и связанного с ним *принципа Фубини* («сумма» положительных слагаемых не зависит от способа «суммирования») необходимость в подобных исследованиях отпала. Теорема сразу же следует из общих утверждений, см., например, И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1957, стр. 379—387, и в частности, теорему 2 на стр. 387. (*Прим. ред.*)

4.6. Интегрирование комплексных функций[1]

Интегрирование по вещественной переменной x можно рассматривать как интегрирование вдоль специального пути (а именно по части вещественной оси) в плоскости комплексного переменного. Пусть $f(z)(=P+iQ)$ — функция комплексной переменной z, непрерывная вдоль простой кривой AB в плоскости комплексного переменного.

Пусть уравнения кривой будут

$$x=x(t), \qquad y=y(t) \qquad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Пусть, далее,

$$x(a)+iy(a)=z_0, \quad x(b)+iy(b)=Z.$$

Если[2] $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные[3], то мы *определяем* $\int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$, взятый вдоль простой кривой AB, как

$$\int\limits_a^b (P+iQ)\left(\frac{dx}{dt}+i\frac{dy}{dt}\right)dt.$$

«Длина» кривой AB определяется интегралом

$$\int\limits_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Она, очевидно, существует, если $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ непрерывны; таким образом, мы свели вопрос об интеграле в области комплексной переменной к рассмотрению четырех вещественных интегралов, а именно:

$$\int\limits_a^b P\frac{dx}{dt}\,dt, \quad \int\limits_a^b P\frac{dy}{dt}\,dt, \quad \int\limits_a^b Q\frac{dx}{dt}\,dt, \quad \int\limits_a^b Q\frac{dy}{dt}\,dt.$$

Согласно примеру 4 § 4.13 это определение согласуется с определением интеграла в том случае, когда AB является частью вещественной оси.

---

[1]) Теорию интегрирования комплексных функций, основанную на иной системе понятий и не заключающую так много предположений относительно кривой AB, можно найти у Ватсона (W a t s o n, Complex integration and Cauchy's theorem).

[2]) Такое предположение будет делаться во всем последующем изложении.

[3]) См. § 4.13, пример 4.

Примеры. $\int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = -\int\limits_{Z}^{z_0} f(z)\,dz$, где путь интегрирования один и тот же (но проходится в противоположных направлениях);

$$\int\limits_{z_0}^{Z} dz = Z - z_0; \quad \int\limits_{z_0}^{Z} z\,dz = \int\limits_{a}^{b}\left\{x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt} + i\left(x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}\right)\right\}dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + ixy\right]_{t=a}^{t=b} = \frac{1}{2}\left(Z^2 - z_0^2\right).$$

4.61. Основная теорема для интегралов в комплексной области

Из результатов § 4.13 легко вывести следующую теорему.

Пусть взята бесконечная последовательность точек на простой кривой z_0Z; первые n из них, расположенные в порядке величины параметра, обозначим через $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots, z_n^{(n)}$ $\left(z_0^{(n)} = z_0,\ z_{n+1}^{(n)} = Z\right)$, а соответствующие значения параметра — через $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}$; пусть последовательность такова, что при любом данном числе $\delta > 0$ мы можем найти такое N, что при $n > N$ будем иметь $t_{r+1}^{(n)} - t_r^{(n)} < \delta$ для $r = 0, 1, 2, \ldots, n$; пусть $\zeta_r^{(n)}$ — любая точка, параметр которой лежит между $t_r^{(n)}$, $t_{r+1}^{(n)}$; тогда выражение

$$\left|\sum_{r=0}^{n}\left(z_{r+1}^{(n)} - z_r^{(n)}\right) f\left(\zeta_r^{(n)}\right) - \int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dz\right|$$

можно сделать произвольно малым, взяв n достаточно большим.

4.62. Верхняя граница модуля интеграла в комплексной области

Пусть M — верхняя граница непрерывной функции $|f(z)|$. Тогда

$$\left|\int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{a}^{b} |f(z)| \left|\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)\right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{a}^{b} M\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} dt \leqslant Ml,$$

где l — длина кривой z_0Z.

Иными словами, $\left|\int\limits_{z_0}^{Z} f(z)\,dz\right|$ не может превосходить Ml,

4.7. Интегрирование бесконечных рядов

Покажем теперь, что если $S(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots$ — равномерно сходящийся ряд непрерывных функций для значений z, содержащихся в некоторой области, то ряд

$$\int_C u_1(z)\,dz + \int_C u_2(z)\,dz + \ldots$$

(где все интегралы берутся вдоль некоторого пути C в этой области) будет сходиться и его суммой будет

$$\int_C S(z)\,dz.$$

В самом деле, положив

$$S(z) = u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + R_n(z),$$

будем иметь

$$\int_C S(z)\,dz = \int_C u_1(z)\,dz + \ldots + \int_C u_n(z)\,dz + \int_C R_n(z)\,dz.$$

Так как данный ряд равномерно сходится, то каждому положительному числу ε соответствует такое число r, *не зависящее от* z, что при $n \geqslant r$ имеем $|R_n(z)| < \varepsilon$ для всех значений z в рассматриваемой области.

Поэтому, если l — длина пути интегрирования, то мы имеем (§ 4.62)

$$\left| \int_C R_n(z)\,dz \right| < \varepsilon l,$$

т. е. модуль разности между

$$\int_C S(z)\,dz \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{n} \int_C u_m(z)\,dz,$$

можно сделать меньше, чем любое положительное число, давая n достаточно большое значение. Это доказывает, что ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \int_C u_m(z)\,dz$ сходится и что его сумма равна

$$\int_C S(z)\,dz.$$

Следствие. Как и в следствии § 4.44, можно показать, что [1])

$$\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} u_n(z),$$

если ряд справа сходится равномерно и ряд слева сходится.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x\{n(n+1)\sin^2 x^2 - 1\}\cos x^2}{\{1+n^2\sin^2 x^2\}\{1+(n+1)^2\sin^2 x^2\}},$$

в котором x вещественно.

Здесь n-й член равен

$$\frac{2xn\cos x^2}{1+n^2\sin^2 x^2} - \frac{2x(n+1)\cos x^2}{1+(n+1)^2\sin^2 x^2},$$

и следовательно, сумма n первых членов равна

$$\frac{2x\cos x^2}{1+\sin^2 x^2} - \frac{2x(n+1)\cos x^2}{1+(n+1)^2\sin^2 x^2}.$$

Отсюда следует, что ряд абсолютно сходится для всех вещественных значений x, исключая $\pm\sqrt{m\pi}$, где $m = 1, 2, \ldots$; но

$$R_n(x) = \frac{2x(n+1)\cos x^2}{1+(n+1)^2\sin^2 x^2},$$

и если n — какое-нибудь целое число, то при $x = (n+1)^{-1}$ пределом $R_n(x)$ при $n \to \infty$ будет 2. Поэтому, вблизи $x = 0$, ряд сходится неравномерно. Его сумма равна

$$\frac{2x\cos x^2}{1+\sin^2 x^2}.$$

Интеграл же этой суммы от 0 до x равен $\operatorname{arctg}\{\sin x^2\}$. С другой стороны, сумма интегралов от 0 до x первых n членов ряда равна

$$\operatorname{arctg}\{\sin x^2\} - \operatorname{arctg}\{(n+1)\sin x^2\}$$

и при $n \to \infty$ она стремится к $\operatorname{arctg}\{\sin x^2\} - \frac{1}{2}\pi$. Поэтому интеграл суммы ряда отличается от суммы ряда интегралов его членов на $\frac{1}{2}\pi$.

Пример 2. Рассмотреть подобным же образом ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^n x\{1-n(e-1)+e^{n+1}x^2\}}{n(n+1)(1+e^n x^2)(1+e^{n+1}x^2)}$$

для вещественных значений x.

---

[1]) $\dfrac{df(z)}{dz}$ означает $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$, где $h \to 0$ вдоль определенной простой кривой; это определение будет слегка видоизменено в § 5.12 для случая, когда $f(z)$ — *аналитическая* функция.

Пример 3. Рассмотреть ряд

$$u_1+u_2+u_3+\ldots,$$

где

$$u_1=ze^{-z^2},\quad u_n=nze^{-nz^2}-(n-1)\,ze^{-(n-1)\,z^2}$$

для вещественных значений z.

Сумма первых n членов равна nze^{-nz^2}, так что сумма бесконечного ряда равна 0 для всех вещественных значений z. Так как члены u_n вещественны и при достаточно большом n имеют одинаковые знаки, то сходимость будет абсолютной.

В ряде

$$\int_0^z u_1\,dz+\int_0^z u_2\,dz+\ldots$$

сумма n первых членов равна $\frac{1}{2}(1-e^{-nz^2})$ и стремится к пределу $\frac{1}{2}$ при стремлении n к бесконечности. Эта сумма не равна интегралу от 0 до z суммы ряда $\sum u_n$. Это несовпадение объясняется неравномерной сходимостью вблизи $z=0$. В самом деле, остаточный член ряда $u_1+u_2+\ldots$ равен $-nze^{-nz^2}$; если взять $z=n^{-1}$, он будет равняться $-e^{-1/n}$, то есть не будет произвольно малым числом, поэтому ряд не будет равномерно сходиться вблизи $z=0$.

Пример 4. Сравнить значения

$$\int_0^z\left\{\sum_{n=1}^{\infty}u_n\right\}dz \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z u_n\,dz,$$

где

$$u_n=\frac{2n^2z}{(1+n^2z^2)\lg(n+1)}-\frac{2(n+1)^2z}{\{1+(n+1)^2z^2\}\lg(n+2)}.$$

(Trinity, 1903)

ЛИТЕРАТУРА

G. F. B. Riemann, Ges. Math. Werke, 239—241.
P. G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen (Braunschweig, 1904).
F. G. Meyer, Bestimmte Integrale (Leipzig, 1871).
Э. Гурса, Курс математического анализа, гл. IV, XIV, ОНТИ, 1936.
Ш. Ж. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, гл. VI, ГТТИ, 1933.
E. W. Hobson, Functions of a real variable, гл. V, 1907.
T. J. I'a Bromwich, Theory of infinite series, приложение III, 1908.

Примеры

1. Показать, что интегралы

$$\int_0^{\infty}\sin(x^2)\,dx,\quad \int_0^{\infty}\cos(x^2)\,dx,\quad \int_0^{\infty}x\exp(-x^6\sin^2 x)\,dx$$

сходятся.

(Dirichlet и Du Bois Reymond)

2. Если a вещественно, то интеграл

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,dx$$

есть непрерывная функция от параметра a.

(Stokes)

3. Рассмотреть вопрос о равномерной сходимости интеграла

$$\int_0^\infty x\sin(x^3-ax)\,dx.$$

$$\Big[3\int x\sin(x^3-ax)\,dx = -\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{3x^3}\right)\cos(x^3-ax) - \\ -\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x^4}\right)\cos(x^3-ax)\,dx + \frac{1}{3}a^2\int\frac{\sin(x^3-ax)}{x^3}\,dx.\Big]$$

(De la Vallée Poussin)

4. Показать, что интеграл $\int\limits_0^\infty \exp[-e^{i\alpha}(x^3-nx)]\,dx$ равномерно сходится в интервале $\left(-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi\right)$ значений α.

(Stokes)

5. Рассмотреть вопрос о сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{x^\mu\,dx}{1+x^\nu|\sin x|^p}$, когда ν, μ, p положительны.

(Hardy, Messenger, XXXI, 177 (1902))

6. Исследовать сходимость интегралов

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{1-e^x}\right)\frac{dx}{x}, \qquad \int_0^\infty\frac{\sin(x+x^2)\,dx}{x^n}.$$

(Math. Trip., 1914)

7. Показать, что интеграл $\int\limits_\pi^\infty \frac{dx}{x^2(\sin x)^{2/3}}$ существует.

8. Показать, что интеграл $\int\limits_a^\infty x^{-n}e^{\sin x}\sin 2x\,dx$ сходится при $a>0, n>0$.

9. Пусть ряд $g(z)=\sum\limits_{\nu=0}^\infty (c_\nu-c_{\nu+1})\sin(2\nu+1)\pi z$ (в котором $c_0=0$) сходится равномерно в некотором интервале; показать, что $g(z)\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$ будет производной ряда $f(z)=\sum\limits_{\nu=1}^\infty \frac{c_\nu}{\nu}\sin 2\nu\pi z$.

(Lerch, Ann. de l'Èc. norm. sup.) (3), XII, 351 (1895)

10. Показать, что интегралы

$$\int^{\infty}\int^{\infty}\cdots\int^{\infty}\frac{dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_n}{(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{\alpha}}$$

и

$$\int^{\infty}\int^{\infty}\cdots\int^{\infty}\frac{dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_n}{x_1^{\alpha}+x_2^{\beta}+\ldots+x_n^{\lambda}}$$

сходятся, когда соответственно

$$\alpha>\frac{1}{2}n \quad \text{и} \quad \alpha^{-1}+\beta^{-1}+\ldots+\lambda^{-1}<1.$$

(Math. Trip., 1904)

11. Пусть $f(x,\ y)$ — непрерывная функция обеих переменных x и y в области $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$, если не считать разрывов «первого рода» в точках конечного числа кривых с непрерывно вращающимися касательными, каждая из которых пересекает любую прямую, параллельную координатным осям, конечное число раз; тогда $\int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx$ будет непрерывной функцией от y.

[Рассмотреть $\int\limits_a^{a_1-\delta_1}+\int\limits_{a_1+\varepsilon_1}^{a_2-\delta_2}+\ldots+\int\limits_{a_n+\varepsilon_n}^{b}\{f(x,\ y+h)-f(x,\ y)\}\,dx$

где числа δ_1, δ_2, ..., ε_1, ε_2, ... выбраны так, что они исключают разрывы функции $f(x,\ y+h)$ из области интегрирования; a_1, a_2, ... — разрывы функции $f(x,\ y)$.]

(Bocher)

ГЛАВА 5

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ТЕОРЕМЫ ТЕЙЛОРА, ЛОРАНА И ЛИУВИЛЛЯ

5.1. Свойства элементарных функций

Предполагается, что читатель знаком с термином *элементарная функция*, употребляемым (в учебниках по алгебре, тригонометрии и дифференциальному исчислению) для обозначения определенных аналитических выражений[1]), зависящих от переменной z. Сюда входят функции, образуемые посредством действий элементарной алгебры, а также показательные, логарифмические и тригонометрические функции; примерами подобных выражений служат

$$z^2,\ e^z,\ \lg z,\ \arcsin z^{3/2}.$$

Комбинации таких элементарных функций анализа обладают некоторым общим им всем замечательным свойством, которое мы теперь и исследуем.

Возьмем для примера функцию e^z. Положим

$$e^z = f(z).$$

Тогда, если z — фиксированная точка и z' — какая-нибудь другая точка, то мы имеем

$$\frac{f(z')-f(z)}{z'-z} = \frac{e^{z'}-e^z}{z'-z} = e^z\,\frac{e^{z'-z}-1}{z'-z} =$$
$$= e^z\left\{1+\frac{z'-z}{2!}+\frac{(z'-z)^2}{3!}+\ldots\right\},$$

и так как ряд в скобках равномерно сходится для всех значений z', то заключаем (§ 3.7), что при $z'\to z$ отношение

$$\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}$$

стремится к пределу e^z равномерно для всех значений $\arg(z'-z)$.

[1]) Следует отметить, что смысл этого термина не тот, который придан термину функция (§ 3.1) в этой книге. Так, например, $x-iy$ и $|z|$, являясь *функциями* $z\,(=x+iy)$ в смысле § 3.1, не будут элементарными функциями рассматриваемого типа.

Это показывает, что *предел*

$$\frac{f(z')-f(z)}{z'-z}$$

в этом случае не зависит от пути, по которому точка z' стремится к совпадению с z.

Оказывается, что этим свойством обладают многие хорошо известные элементарные функции; а именно, если $f(z)$ — одна из таких функций, а h — какое-нибудь комплексное число, то существует предельное значение выражения

$$\frac{1}{h}\{f(z+h)-f(z)\},$$

не зависящее от способа стремления h к нулю.

Читатель, однако, легко покажет, что если $f(z)=x-iy$, где $z=x+iy$, то $\lim \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ *будет зависеть* от того, каким образом $h \to 0$.

5.11. Отступления от рассматриваемого свойства

Для каждой из элементарных функций тем не менее существуют определенные точки z, в которых это свойство перестает иметь место. Например, оно не имеет места для функции $\frac{1}{z-a}$ в точке $z=a$, так как

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{z-a+h}-\frac{1}{z-a}\right\}$$

не существует при $z=a$. Подобным же образом это свойство не имеет места для функций $\lg z$ и $z^{1/2}$ в точке $z=0$.

Эти исключительные точки называются *особыми точками* или *особенностями* рассматриваемой функции $f(z)$; в остальных точках функция $f(z)$ будет, как говорят, *аналитической функцией*. Для функции $|z|$ указанное свойство не имеет места *ни в одной точке.*

5.12. Определение аналитической функции комплексного переменного по Коши[1])

Свойство, рассмотренное в § 5.1, принимается за основу для определения *аналитической функции*; это определение может быть сформулировано следующим образом.

Пусть дана двумерная область в плоскости z, и пусть u — функция от z, определенная однозначно во всех точках области. Пусть

[1]) См. мемуар, упомянутый в § 5.2.

z и $z+\delta z$ — значения переменной z в двух точках, а u, $u+\delta u$ — соответствующие значения u. Тогда, если в любой точке z рассматриваемой области $\frac{\delta u}{\delta z}$ стремится к определенному пределу, когда $\delta x \to 0$, $\delta y \to 0$ независимо друг от друга ($\delta z = \delta x + i\delta y$), то говорят, что u есть функция от z, *моногенная* или *аналитическая* [1]) в этой точке. Если функция будет аналитической и однозначной во всех точках области, то мы говорим, что функция *аналитична во всей области* [2]).

Мы будем часто употреблять слово «функция» для обозначения аналитической функции, так как функции, изучаемые в этой книге, почти исключительно будут аналитическими.

В предыдущем определении функция u была задана лишь в некоторой области плоскости z. Как мы увидим из дальнейшего, функция u, вообще говоря, может быть определена также для значений z, не входящих в эту область, и (как и в уже рассмотренном случае элементарных функций) может иметь *особенности* в определенных точках вне области, в которых основное свойство перестает иметь место.

Дадим теперь определение аналитической функциональной зависимости в более строгой форме.

Пусть $f(z)$ — аналитическая в точке z, а ε — произвольное положительное число; тогда мы можем найти такие числа l и δ (δ зависит от ε), что

$$\left|\frac{f(z')-f(z)}{z'-z} - l\right| < \varepsilon$$

при $|z'-z| < \delta$.

Если $f(z)$ — аналитическая во всех точках z некоторой области, то l, очевидно, зависит от z, и мы пишем поэтому $l = f'(z)$.

Отсюда

$$f(z') = f(z) + (z'-z)\, f'(z) + v\,(z'-z),$$

где v — такая функция от z и z', что $|v| < \varepsilon$, когда $|z'-z| < \delta$.

Пример 1. Найти точки, в которых следующие функции не будут аналитическими:

(I) z^2,

(II) $\operatorname{cosec} z$ ($z = n\pi$, n — любое целое число),

(III) $\dfrac{z-1}{z^2-5z+6}$ $(z = 2, 3)$,

(IV) $e^{\frac{1}{z}}$ $(z = 0)$,

(V) $\{(z-1)z\}^{\frac{1}{3}}$ $(z = 0, 1)$.

---

[1]) Иногда употребляются слова «регулярная» и «голоморфная». Борель делает различие между «моногенной» и «аналитической» функциями в случае функций с бесконечным числом особенностей. См. § 5.51.

[2]) См. следствие § 5.2, подстрочное примечание.

Пример 2. Пусть $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, где u, v, x, y вещественны и f — аналитическая функция; показать, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(Riemann)

5.13. Приложение видоизмененной теоремы Гейне — Бореля

Пусть $f(z)$ — аналитическая во всех точках внутри некоторой области[1]; пусть, далее, в каждой точке z границы этой области существуют такие числа $f_1(z)$, δ (где δ зависит от z), что

$$|f(z') - f(z) - (z' - z) f_1(z)| < \varepsilon |z' - z|,$$

когда $|z' - z| < \delta$ и z' — точка, лежащая внутри области или на ее границе.

[Мы пишем $f_1(z)$ вместо $f'(z)$, так как производная может и не существовать, когда z' приближается к z извне области, так что $f_1(z)$ не обязательно будет единственной производной.]

Приведенное неравенство, очевидно, удовлетворяется также для всех точек z внутри области.

Применяя двумерный вариант теоремы § 3.6, увидим, что рассматриваемая область, взятая вместе с ее границей, может быть разделена на *конечное* число частей (квадратов со сторонами, параллельными осям координат, или частей таких квадратов) так, что внутри или на границе любой части найдется такая точка z_1, что неравенство

$$|f(z') - f(z_1) - (z' - z_1) f_1(z_1)| < \varepsilon |z' - z_1|$$

будет справедливо для всех точек z' внутри или на границе этой части.

5.2. Теорема Коши[2] об интеграле по контуру

Простую замкнутую кривую C в плоскости переменной z часто называют *контуром*: если A, B, D — точки, взятые на дуге контура в направлении против часовой стрелки, и если $f(z)$ — однозначная непрерывная функция от z (не обязательно аналитическая) во всех

---

[1] В оригинале „континуум“, см. § 3.21. (*Прим. ред.*)

[2] Cauchy, Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, 1825. Доказательство, данное здесь, принадлежит Гурса (Goursat, Trans. American Math. Soc., 1, 14 (1900)).

точках дуги [1]), то

$$\int_{ABDA} f(z)\,dz \quad \text{или} \quad \int_C f(z)\,dz,$$

взятый по контуру, начиная от точки A и кончая той же точкой A, называется *интегралом функции $f(z)$ по этому контуру*. Ясно, что значение интеграла, взятого по контуру, не изменится, если за исходную точку на контуре вместо A будет взята другая точка.

Докажем теперь теорему, принадлежащую Коши, которую можно сформулировать следующим образом. *Если $f(z)$ — функция от z, аналитическая во всех точках* [2]) *на контуре C и внутри него, то*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Разделим область, ограниченную C, прямыми, параллельными вещественной и мнимой осям, как в § 5.13; тогда область, ограниченная C, разделится на некоторое число областей, границами которых, C_1, C_2, ..., C_M, будут периферии квадратов, и другие области, границами которых, D_1, D_2, ..., D_N, будут части периферий квадратов и части контура C. Рассмотрим

$$\sum_{n=1}^{M} \int_{C_n} f(z)\,dz + \sum_{n=1}^{N} \int_{D_n} f(z)\,dz,$$

где все пути интегрирования берутся против часовой стрелки.

В общей сумме каждая сторона любого квадрата, как путь интегрирования, встречается дважды, а интегралы берутся вдоль таких сторон в противоположных направлениях и, следовательно, взаимно сокращаются [3]). Единственными частями суммы, которые сохраняются, будут интегралы, взятые вдоль отдельных дуг, составляющих вместе контур C, причем каждая дуга описывается в том же самом напра-

---

[1]) Впрочем, достаточно, чтобы $f(z)$ была непрерывной, когда z изменяется только вдоль дуги.

[2]) Не необходимо, чтобы $f(z)$ была аналитической *на* C (достаточно, чтобы она была непрерывной на и внутри C), но если $f(z)$ не будет аналитической на C, то доказать теорему будет гораздо труднее. Данное доказательство предполагает просто, что $f'(z)$ *существует* во всех точках на и внутри C. Прежние доказательства основывались на бо́льших предположениях; так, доказательство Коши предполагало *непрерывность* $f'(z)$. Доказательство Римана основывается на эквивалентном предположении. Первое доказательство Гурса предполагало, что $f(z)$ *равномерно* дифференцируема на и внутри C.

[3]) См. пример § 4.6.

влении, как и в $\int\limits_C f(z)\,dz$; в сумме эти интегралы дают поэтому как раз $\int\limits_C f(z)\,dz$.

Рассмотрим теперь $\int\limits_{C_n} f(z)\,dz$. Используя обозначения § 5.12, имеем

$$\int\limits_{C_n} f(z)\,dz = \int\limits_{C_n} \{f(z_1) + (z - z_1) f'(z_1) + (z - z_1) v\}\,dz =$$

$$= \{f(z_1) - z_1 f'(z_1)\} \int\limits_{C_n} dz + f'(z_1) \int\limits_{C_n} z\,dz + \int\limits_{C_n} (z - z_1) v\,dz.$$

Но

$$\int\limits_{C_n} dz = [z]_{C_n} = 0, \quad \int\limits_{C_n} z\,dz = \left[\frac{1}{2} z^2\right]_{C_n} = 0$$

согласно примеру § 4.6, так как концы C_n совпадают.

Обозначим теперь через l_n и A_n сторону и площадь C_n. Тогда, пользуясь оценкой § 4.62, найдем

$$\left|\int\limits_{C_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{C_n} (z - z_1) v\,dz\right| \leqslant \int\limits_{C_n} |(z - z_1) v\,dz| <$$

$$< \varepsilon l_n \sqrt{2} \int\limits_{C_n} |dz| = \varepsilon l_n \sqrt{2}\, 4 l_n = 4\varepsilon A_n \sqrt{2}.$$

Подобным же образом

$$\left|\int\limits_{D_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{D_n} |(z - z_1) v\,dz| \leqslant 4\varepsilon (A_n' + l_n' \lambda_n) \sqrt{2},$$

где A_n' — площадь квадрата, частью которого является область, ограниченная D_n, l_n' — сторона этого квадрата и λ_n — длина части контура C, лежащей внутри этого квадрата. Отсюда, если λ — полная длина контура C, в то время как l — сторона квадрата, вмещающего все квадраты C_n и области D_n, будем иметь

$$\left|\int\limits_C f(z)\,dz\right| \leqslant \sum_{n=1}^{M} \left|\int\limits_{C_n} f(z)\,dz\right| + \sum_{n=1}^{N} \left|\int\limits_{D_n} f(z)\,dz\right| <$$

$$< 4\varepsilon \sqrt{2} \left\{ \sum_{n=1}^{M} A_n + \sum_{n=1}^{N} A_n' + l \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \right\} < 4\varepsilon \sqrt{2} (l^2 + l\lambda).$$

Но ε — произвольно малая величина, а l, λ и $\int_C f(z)\,dz$ *не зависят от* ε.

Поэтому из полученного неравенства следует, что единственное значение, которое может иметь $\int_C f(z)\,dz$, будет нуль. Это и есть теорема Коши.

Следствие 1. Если имеются два пути z_0AZ и z_0BZ от z_0 к Z и если $f(z)$ — функция, аналитическая во всех точках этих кривых и во всей области, охватываемой этими путями, то интеграл $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ будет иметь одно и то же значение для путей интегрирования z_0AZ и z_0BZ. Это следует из того, что z_0AZBz_0 есть контур и интеграл, взятый по этому контуру (равный разности интегралов вдоль z_0AZ и z_0BZ), равен нулю. Таким образом, если $f(z)$ — аналитическая функция от z, то значение $\int_{AB} f(z)\,dz$ не зависит в известной степени от выбора дуги AB, а зависит только от конечных точек A и B. Следует помнить, что *это верно только в том случае, когда $f(z)$ является аналитической функцией* в смысле § 5.12.

Следствие 2. Предположим, что даны такие две простые замкнутые кривые C_0 и C_1, что C_0 охватывает C_1, как это имеет, например, место, если C_0 и C_1 будут софокусными эллипсами.

Предположим, кроме того, что $f(z)$ будет функцией, аналитической [1]) во всех точках на C_0 и C_1 и во всей кольцеобразной области между C_0 и C_1. Тогда, построив сетку пересекающихся прямых в этой кольцеобразной области, можно показать точно таким же образом, как в только что доказанной теореме, что *интеграл*

$$\int f(z)\,dz,$$

взятый по всей границе кольцеобразной области, равен нулю; эта граница состоит из двух кривых C_0 и C_1, из которых одна описывается в направлении, обратном часовой стрелке, а другая — по часовой стрелке.

Следствие 3. Вообще, если на плоскости z дана какая-нибудь связная область, ограниченная любым числом простых замкнутых кривых C_0, C_1, $C_2, \ldots$, и если $f(z)$ — какая-нибудь функция от z, аналитическая и однозначная всюду в этой области, то *интеграл*

$$\int f(z)\,dz,$$

взятый по всей границе области, равен нулю; эта граница состоит из кривых C_0, C_1, $\ldots$, каждая из которых описывается в таком направле-

[1]) Выражение «аналитическая во всей области» предполагает однозначность (§ 5.12); это значит, что после того, как z опишет замкнутый путь, окружающий C_0, $f(z)$ примет начальное значение. О такой функции, как, например, $\lg z$, рассматриваемой в области $1 \leqslant |z| \leqslant 2$, говорят, что она «аналитическая во всех точках области».

нии, что область остается или всегда справа, или всегда слева от лица, идущего (в рассматриваемом направлении) по границе.

Распространение теоремы Коши $\left(\text{т. е.} \int f(z)\,dz = 0\right)$ на кривые, лежащие на конусе с вершиной в начале координат, было сделано Равю (R a v u t, Nouv. Ann. de Math. (3), XVI, 365—367 (1897)); Морера (Morera, Rend. del. Ist. Lombardo, XXII, 191 (1889)) и Осгуд (Osgood, Bull. Amer. Math. Soc., II, 296—302 (1896)) показали, что свойство $\int f(z)\,dz = 0$ может быть принято за свойство, определяющее аналитическую функцию. Остальные свойства выводятся отсюда как следствия (см. в конце главы пример 16).

Пример. Кольцеобразная область ограничена двумя окружностями $|z| = 1$ и $|z| = 2$ на плоскости z. Убедиться, что значение интеграла $\int \frac{dz}{z}$, взятого по границе области, равно нулю.

В самом деле, граница состоит из окружности $|z| = 1$, описываемой по направлению часовой стрелки, вместе с окружностью $|z| = 2$, описываемой в направлении против часовой стрелки. Таким образом, если для точек на первой окружности положим $z = e^{i\theta}$, а для точек на второй окружности $z = 2e^{i\varphi}$, то θ и φ будут вещественны и интеграл равняется

$$\int_0^{-2\pi} \frac{ie^{i\theta}\,d\theta}{e^{i\theta}} + \int_0^{2\pi} \frac{i2e^{i\varphi}\,d\varphi}{2e^{i\varphi}} = -2\pi i + 2\pi i = 0.$$

5.21. Выражение значения аналитической функции в точке через интеграл, взятый по контуру, окружающему эту точку

Пусть C — контур, внутри которого и на котором $f(z)$ есть аналитическая функция z.

Тогда, если a — какая-нибудь точка внутри контура, то

$$\frac{f(z)}{z-a}$$

будет функцией от z, аналитической во всех точках внутри контура C, кроме точки $z = a$. Далее, для данного ε можно найти такое δ, что

$$|f(z) - f(a) - (z-a)f'(a)| \leqslant \varepsilon |z-a|$$

при $|z-a| < \delta$; опишем около точки a как центра окружность γ радиуса $r < \delta$, причем r настолько мало, что γ лежит полностью внутри C.

Тогда в области между γ и C функция $f(z)/(z-a)$ будет аналитической, и таким образом, по следствию § 5.2 будем иметь

$$\int_C \frac{f(z)dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a},$$

где $\int_C$ и $\int_\gamma$ обозначают интегралы, взятые соответственно против часовой стрелки вдоль кривых C и γ.

Но так как $|z-a|<\delta$ на γ, то мы имеем

$$\int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a}=\int_\gamma \frac{f(a)+(z-a)f'(a)+v(z-a)}{z-a}\,dz,$$

где $|v|<\varepsilon$, и таким образом,

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}=f(a)\int_\gamma \frac{dz}{z-a}+f'(a)\int_\gamma dz+\int_\gamma v\,dz.$$

Далее, если z лежит на γ, то мы можем написать

$$z-a=re^{i\theta},$$

где r — радиус окружности γ, и следовательно,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{ire^{i\theta}\,d\theta}{re^{i\theta}}=i\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi i$$

и

$$\int_\gamma dz=\int_0^{2\pi} ire^{i\theta}\,d\theta=0;$$

кроме того, согласно § 4.62,

$$\left|\int_\gamma v\,dz\right|\leqslant\varepsilon\,2\pi r.$$

Таким образом,

$$\left|\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}-2\pi i f(a)\right|=\left|\int_\gamma v\,dz\right|\leqslant 2\pi r\varepsilon.$$

Но выражение в левой части не зависит от ε и, таким образом, должно быть равно нулю, так как ε произвольно, откуда следует, что

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}.$$

Эта замечательная формула выражает значение функции $f(z)$ (*аналитической* на и внутри C) в любой точке a *внутри* контура C через интеграл, зависящий только от значений $f(z)$ в точках самого контура.

Следствие. Если $f(z)$ — аналитическая однозначная функция от z в кольцеобразной области, ограниченной кривыми C и C', и a — точка этой области, то

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

где C — внешний контур и оба интеграла берутся в направлении против часовой стрелки.

5.22. Производные аналитической функции $f(z)$

Функция $f'(z)$, представляющая собой предел выражения

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

при стремлении h к нулю, называется *производной* от функции $f(z)$. Покажем теперь, что $f'(z)$ *сама является аналитической функцией от z и, следовательно, сама имеет производную.*

В самом деле, если C — контур, окружающий точку a и расположенный целиком в области, в которой $f(z)$ аналитическая, то мы имеем

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i h}\left\{\int_C\frac{f(z)\,dz}{z-a-h}-\int_C\frac{f(z)\,dz}{z-a}\right\}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)(z-a)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}+\lim_{h\to 0}\frac{h}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2(z-a-h)}.$$

Функция $f(z)$ на C непрерывна и потому ограничена, и то же самое относится к функции $(z-a)^{-2}$; тогда как $|h|$ можно взять меньшим, чем нижняя граница выражения $\frac{1}{2}|z-a|$.

Поэтому выражение $\left|\frac{f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}\right|$ будет ограничено на C; пусть K — его верхняя граница. Тогда, если l — длина C, то

$$\left|\lim_{h\to 0}\frac{h}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2(z-a-h)}\right|\leqslant\lim_{h\to 0}|h|(2\pi)^{-1}Kl=0$$

и, следовательно,

$$f'(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z(dz)}{(z-a)^2};$$

эта формула выражает значение производной функции в точке через интеграл, взятый по контуру, окружающему эту точку.

Из этой формулы мы получаем, если точки a и $a+h$ лежат внутри C,

$$\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\,dz}{h}\left\{\frac{1}{(z-a-h)^2}-\frac{1}{(z-a)^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz\frac{2\left(z-a-\frac{1}{2}h\right)}{(z-a-h)^2(z-a)^2}=\frac{2}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^3}+hA_h,$$

и легко видеть, что A_h будет ограниченной функцией при

$$|h| < \frac{1}{2}|z-a|.$$

Поэтому $\{f'(a+h)-f'(a)\}/h$ стремится к определенному пределу при $h \to 0$, а именно

$$\frac{2}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^3}.$$

Так как $f'(a)$ имеет единственную производную, то она будет аналитической функцией от a; ее производная, представляемая только что полученным выражением, обозначается через $f''(a)$ и называется *второй производной от* $f(a)$.

Подобным же образом можно показать, что $f''(a)$ будет аналитической функцией a, имеющей производную, равную

$$\frac{2\cdot 3}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^4};$$

последняя обозначается через $f'''(a)$ и называется *третьей производной от* $f(a)$. И вообще, существует n-я производная $f^{(n)}(a)$ от функции $f(a)$, которая выражается интегралом

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

и также имеет производную вида

$$\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+2}}.$$

Читатель сообразит, что это легко доказать по индукции.

Таким образом, если функция имеет первую производную относительно *комплексной* переменной z во всех точках замкнутой двумерной области в плоскости z, то она имеет также и производные любого порядка во всех точках *внутри* области.

5.23. Неравенство Коши $f^{(n)}(a)$

Пусть $f(z)$ — аналитическая функция внутри и на окружности C с центром a и радиусом r. Пусть M — верхняя граница функции $f(z)$ на этой окружности. Тогда согласно оценке § 4.62

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{2\pi}\int_C \frac{M}{r^{n+1}}|dz| = \frac{Mn!}{r^n}.$$

Пример. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция от $z = x + iy$ и $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; показать, что $\nabla^2 \lg |f(z)| = 0$, а $\nabla^2 |f(z)| > 0$, если $f(z) \neq 0$ или $f'(z) \neq 0$.

(Trinity, 1910)

5.3. Аналитические функции, представляемые равномерно сходящимися рядами

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ обладает следующими свойствами: (I) он равномерно сходится на контуре C, (II) $f_n(z)$ — аналитическая функция на C и внутри него.

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ сходится и сумма его является аналитической функцией на контуре C и внутри него.

Пусть a — какая-либо точка внутри контура C; на контуре C положим $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \Phi(z)$.

Согласно § 4.7 [1])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(z)}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left\{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right\}\frac{dz}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_n(z)}{z-a}\,dz.$$

Но этот последний ряд в силу § 5.21 будет равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(a),$$

следовательно, рассматриваемый ряд будет сходиться во всех точках внутри C; обозначим его сумму внутри C (как прежде на C) через $\Phi(z)$. Эта функция будет аналитической, если она имеет единственную производную во всех точках внутри контура C.

Но если a и $a+h$ лежат внутри контура C, то

$$\frac{\Phi(a+h)-\Phi(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Phi(z)\,dz}{(z-a)(z-a-h)},$$

---

[1]) Так как $|z-a|^{-1}$ ограничена, когда a фиксировано и z лежит на C, то равномерная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)/(z-a)$ следует из равномерной сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$.

а отсюда, как в § 5.22, следует, что предел $\lim\limits_{h\to 0}\left[\{\Phi(a+h)-\Phi(a)\}\, h^{-1}\right]$ существует и равен $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\Phi(z)}{(z-a)^2}\,dz$, и поэтому $\Phi(z)$—аналитическая функция внутри C. Далее, преобразуя этот последний интеграл тем же самым способом, каким мы преобразовали первый, мы увидим, что $\Phi'(a)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(a)$, так что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(a)$ можно дифференцировать почленно.

Если ряд аналитических функций сходится только в точках незамкнутой кривой, то о сходимости ряда производных[1]) ничего нельзя утверждать.

Например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$ сходится равномерно для вещественных значений x (§ 3.34). Но ряд первых производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$ сходится неравномерно вблизи $x=(2m+1)\pi$ (m — любое целое число), а ряд вторых производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{-n}\cos nx$ не сходится вовсе.

Следствие. Из результата § 3.7 вытекает, что сумма степенного ряда будет аналитической функцией внутри его круга сходимости.

5.31. Аналитические функции, представляемые интегралами

Пусть $f(t, z)$ удовлетворяет следующим условиям: если t лежит на определенном пути интегрирования (a, b); а z — любая точка области S, то

(I) f и $\frac{\partial f}{\partial z}$ являются непрерывными функциями t;

(II) f является аналитической функцией z;

(III) непрерывность $\frac{\partial f}{\partial z}$ как функции от z является равномерной относительно t.

Тогда интеграл $\int\limits_a^b f(t, z)\,dt$ будет аналитической функцией от z, ибо согласно § 4.2 он имеет единственную производную $\int\limits_a^b \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\,dt$.

---

[1]) Этого можно было ожидать, так как главная теорема этого раздела относится к равномерной сходимости в *двумерной* области.

5.32. Аналитические функции, представляемые интегралами с бесконечными пределами

Из следствия § 4.44 (II) вытекает, что $\int_a^\infty f(t, z)\,dt$ будет аналитической функцией от z во всех точках области S, если: (I) интеграл является сходящимся, (II) $f(t, z)$ является аналитической функцией от z, когда t лежит на пути интегрирования, а z — в S, (III) производная $\frac{\partial f(t, z)}{\partial z}$ является непрерывной функцией обеих переменных, (IV) интеграл $\int_a^\infty \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\,dt$ сходится равномерно по всей области S.

Ибо если эти условия удовлетворены, то интеграл $\int_a^\infty f(t, z)\,dt$ будет иметь единственную производную $\int_a^\infty \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\,dt$.

Применим полученную теорему к весьма важному интегралу

$$\int_0^\infty e^{-tz} f(t)\,dt,$$

где $f(t)$ — непрерывная функция, а $|f(t)| < Ke^{rt}$, где K, r не зависят от t. Из приведенных условий очевидно, что интеграл будет аналитической функцией от z, когда $\operatorname{Re} z \geqslant r_1 > r$.

[Условие (IV) удовлетворяется согласно признаку § 4.431 (I), так как интеграл $\int_0^\infty te^{(r-r_1)t}\,dt$ сходится.]

5.4. Теорема Тейлора[1]

Рассмотрим функцию $f(z)$, аналитическую в окрестности точки $z = a$. Пусть C — окружность в плоскости z с центром в точке a, которая не содержит ни внутри, ни на самой себе особых точек функции $f(z)$, так что $f(z)$ — аналитическая во всех точках внутри и на окружности C. Пусть $z = a + h$ — какая-нибудь точка внутри окружности C.

---

[1]) Формальное разложение впервые было опубликовано доктором Бруком Тейлором (Brook Taylor, Methodus Incrementorum, 1715).

Тогда по формулам § 5.22 имеем

$$f(a+h)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz}{z-a-h}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\left\{\frac{1}{z-a}+\frac{h}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{h^n}{(z-a)^{n+1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}\right\}dz=$$

$$=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz\cdot h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}.$$

Но когда z лежит на C, выражение $\frac{f(z)}{z-a-h}$ будет непрерывной функцией и, стало быть, его модуль по следствию (II) § 3.61 не будет превосходить некоторого конечного числа M.

Поэтому в силу оценки § 4.62

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,dz h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}\right|\leqslant\frac{M2\pi R}{2\pi}\left(\frac{|h|}{R}\right)^{n+1},$$

где R — радиус окружности C, так что $2\pi R$ есть длина пути интегрирования в последнем интеграле и $R=|z-a|$ для точек z на окружности C.

Выражение в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$. Имеем поэтому

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots,$$

что можно переписать в виде

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

Этот результат известен как *теорема Тейлора*; доказательство, данное здесь, принадлежит Коши.

Из него вытекает, *что радиус сходимости степенного ряда не меньше радиуса наибольшего круга, не содержащего ближайшей особой точки функции, представляемой этим рядом.* А по следствию § 5.3 радиус сходимости *не больше чем радиус только что указанного круга.* Следовательно, радиус сходимости как раз такой, какой необходим для исключения из внутренности круга ближайшей к a особенности функции.

Введем некоторые термины, которыми будем часто пользоваться.

Если $f(a)=0$, то говорят, что $f(z)$ имеет *нуль* в точке $z=a$. Если в такой точке $f'(a)$ отлична от нуля, то говорят, что нуль функции $f(a)$ *простой*; если же все производные $f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f^{(n-1)}(a)$ будут нулями, так что разложение Тейлора функции $f(z)$ в точке $z=a$ начинается с члена $(z-a)^n$, то говорят, что *функция $f(z)$ имеет нуль n-го порядка в точке $z=a$.*

Пример 1. Найти функцию $f(z)$, аналитическую внутри и на окружности C, центр которой находится в начале координат и радиус которой равен единице, имеющую в точках окружности C значение

$$\frac{a-\cos\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}+i\frac{\sin\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}$$

(где $a>1$ и θ — аргумент z).

[Мы имеем

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}=$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ni\theta}i\,d\theta\,\frac{a-\cos\theta+i\sin\theta}{a^2-2a\cos\theta+1}=(\text{положив } z=e^{i\theta})$$

$$=\frac{n!}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-ni\theta}\,d\theta}{a-e^{i\theta}}=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C\frac{dz}{z^{n+1}(a-z)}=\left[\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{a-z}\right]_{z=0}=\frac{n!}{a^{n+1}}.$$

Поэтому по теореме Маклорена [1])

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}},$$

т. е. $f(z)=(a-z)^{-1}$ для всех точек внутри круга.

Этот пример возбуждает интересный вопрос о том, насколько целесообразно определять $f(z)$ как $(a-z)^{-1}$ в точках вне круга. Этот вопрос будет рассмотрен в § 5.51.]

Пример 2. Доказать, что среднее арифметическое всех значений $z^{-n}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$ для точек z на окружности $|z|=1$ равно a_n, если $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$ является функцией, аналитической внутри и на границе круга $|z|\leqslant 1$.

[Пусть $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu=f(z)$, так что $a_\nu=\dfrac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}$. Тогда, полагая $z=e^{i\theta}$ и подразумевая под C окружность $|z|=1$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(z)\,d\theta}{z^n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=a_n.]$$

---

[1]) Формула $f(z)=f(0)+zf'(0)+\frac{z^2}{2}f''(0)+\ \dots$, получаемая из формулы Тейлора, если положить $a=0$, обычно называется *формулой Маклорена*; она была открыта Стирлингом (1717) и опубликована Маклореном (1742) в его «Fluxions».

Пример 3. Пусть $f(z)=z^r$; тогда $f(z+h)$ для всех значений r будет аналитической функцией h, когда $|h|<|z|$, так что $(z+h)^r=z^r+rz^{r-1}h+$ $+\frac{r(r-1)}{2}z^{r-2}h^2+\ldots$, причем ряд будет сходиться, когда $|h|<|z|$. Это — биномиальная теорема.

Пример 4. Доказать, что если h — положительное постоянное число и функция $(1-2zh+h^2)^{-1/2}$ разложена в ряд

$$1+hP_1(z)+h^2P_2(z)+h^3P_3(z)+\ldots \tag{A}$$

(где $P_n(z)$, как легко видеть, будет полиномом степени n от z), то этот ряд сходится во всех внутренних точках z внутри эллипса, фокусы которого находятся в точках $z=1$ и $z=-1$ и большая полуось которого равна $\frac{1}{2}(h+h^{-1})$.

Рассмотрим сначала этот ряд как функцию от h. Он будет степенным рядом по h и поэтому будет сходиться до тех пор, пока точка h лежит внутри некоторого круга в плоскости h. Центром этого круга является точка $h=0$, и его окружность проходит через ближайшую к $h=0$ особую точку функции $(1-2zh+h^2)^{-1/2}$.

Но

$$1-2zh+h^2=\{h-z+(z^2-1)^{1/2}\}\{h-z-(z^2-1)^{1/2}\},$$

так что особыми точками функции $(1-2zh+h^2)^{-1/2}$ будут точки

$$h=z-(z^2-1)^{1/2} \quad \text{и} \quad h=z+(z^2-1)^{1/2}.$$

Эти особые точки являются точками ветвления (см. § 5.7).]

Таким образом, ряд (A) сходится до тех пор, пока $|h|$ будет меньше, чем оба выражения

$$|z-(z^2-1)^{1/2}| \quad \text{и} \quad |z+(z^2-1)^{1/2}|.$$

Построим на плоскости z эллипс, проходящий через точку z, с фокусами в точках ± 1. Пусть a — его большая полуось, а θ — эксцентрический угол точки z на нем.

Тогда

$$z=a\cos\theta+i(a^2-1)^{1/2}\sin\theta,$$

что дает

$$z\pm(z^2-1)^{1/2}=\{a\pm(a^2-1)^{1/2}\}(\cos\theta\mp i\sin\theta),$$

так что

$$|z\pm(z^2-1)^{1/2}|=a\pm(a^2-1)^{1/2}.$$

Таким образом, ряд (A) будет сходящимся до тех пор, пока $|h|$ будет меньше наименьшего из чисел $a+(a^2-1)^{1/2}$ и $a-(a^2-1)^{1/2}$, т. е. до тех пор, пока $|h|$ будет меньше, чем $a-(a^2-1)^{1/2}$. Но $h=a-(a^2-1)^{1/2}$, когда $a=\frac{1}{2}(h+h^{-1})$. Поэтому ряд (A) будет сходящимся до тех пор, пока z остается внутри эллипса, фокусы которого $+1$ и -1 и большая полуось которого равна $\frac{1}{2}(h+h^{-1})$.

5.41. Формы остаточного члена в ряде Тейлора

Пусть $f(x)$ — *вещественная* функция *вещественной* переменной, и пусть она имеет непрерывные производные первых n порядков, когда $a \leqslant x \leqslant a+h$.

При $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеем

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m}{m!}(1-t)^m f^{(m)}(a+th)\right\}=$$
$$=\frac{h^n(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+th)-hf'(a+th).$$

Интегрируя это соотношение между пределами 0 и 1, получим

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(a)+\int_0^1\frac{h^n(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+th)\,dt.$$

Обозначим

$$R_n=\frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}f^{(n)}(a+th)\,dt,$$

и пусть p — целое положительное число $\leqslant n$.

Тогда

$$R_n=\frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{p-1}(1-t)^{n-p}f^{(n)}(a+th)\,dt.$$

Пусть, далее, U, L — верхняя и нижняя границы выражения

$$(1-t)^{n-p}f^{(n)}(a+th).$$

Тогда

$$\int_0^1 L(1-t)^{p-1}\,dt<$$
$$<\int_0^1(1-t)^{p-1}(1-t)^{n-p}f^{(n)}(a+th)\,dt<\int_0^1 U(1-t)^{p-1}\,dt.$$

Так как $(1-t)^{n-p}f^{(n)}(a+th)$ — непрерывная функция, то она проходит через все значения между U и L, и следовательно, мы можем найти такое θ, что $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ и

$$\int_0^1(1-t)^{n-1}f^{(n)}(a+th)\,dt=p^{-1}(1-\theta)^{n-p}f^{(n)}(a+\theta h).$$

Таким образом,

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!\,p}(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta h).$$

Положив $p=n$, получим $R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h)$ — *остаточный член в форме Лагранжа*, а положив $p=1$, получим

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(a+\theta h)$$

— *остаточный член в форме Коши.*

Взяв $n=1$ в этом результате, мы получаем

$$f(a+h)-f(a) = hf'(a+\theta h),$$

если $f'(x)$ непрерывна на отрезке $a \leqslant x \leqslant a+h$; этот результат известен под названием *первой теоремы о среднем значении* (см. также § 4.14). Дарбу указал в 1876 г. (Darboux, Journal de Math. (3), II, 291) форму остаточного члена в ряде Тейлора, которая применима к комплексным переменным и похожа на вышеприведенную форму, данную Лагранжем для случая вещественной переменной.

5.5. Процесс аналитического продолжения

Если вблизи точки P с аффиксом z_0 функция $f(z)$ аналитическая то, как мы видели, вблизи этой точки существует разложение $f(z)$ в ряд, расположенный по возрастающим положительным целым степеням $z-z_0$, причем коэффициенты этого разложения выражаются через последовательные производные функции $f(z)$ при $z=z_0$.

Пусть теперь A — особая точка функции $f(z)$, ближайшая к P. Тогда круг, внутри которого это разложение справедливо, имеет точку P центром и PA — радиусом.

Предположим, что нам известны только значения функции во всех точках окружности круга несколько меньшего, чем круг сходимости, и концентрического с ним и известно, что функция $f(z)$ аналитическая всюду внутри большего круга. Тогда предыдущие теоремы позволяют нам найти значения функции во всех точках меньшего круга и определить коэффициенты в разложении Тейлора по степеням $z-z_0$. Возникает вопрос: можно ли определить функцию в точках вне круга таким образом, чтобы функция была аналитической в области, большей внутренней области круга?

Другими словами, имея *степенной ряд, который сходится и представляет функцию только в точках внутри круга, определить с его помощью значения функции в точках вне круга.*

Для этой цели возьмем какую-нибудь точку P_1 внутри круга, но не на линии PA. Мы знаем значение функции и всех ее производных в P_1 и, таким образом, можем составить ряд Тейлора (для той же самой функции) с P_1 как исходной точкой, который определит аналитическую функцию в некотором круге с центром в P_1. Этот круг простирается до ближайшей особой точки[1]), которая может быть, а может и не быть точкой A. Но в обоих случаях новый круг обычно будет[2]) лежать частично вне старого круга сходимости, и *в точках области, содержащихся в новом круге и не содержащихся в старом, новый ряд может быть применен для определения значений функции, хотя прежний ряд для этого неприменим.*

Подобным же образом мы можем взять любую другую точку P_2 в области, в которой значения функции теперь известны, и составить ряд Тейлора с P_2 как исходной точкой, ряд, который, вообще говоря, позволит нам определить функцию в других точках, в которых ее значения прежде не были известны, и т. д.

Этот процесс называется *аналитическим* продолжением[3]). При помощи этого процесса, исходя из представления функции каким-либо степенным рядом, мы можем найти любое число других степенных рядов, которые определяют значения функции в области, к любой точке которой можно подойти из P, не проходя через особые точки функции; совокупность[4]) всех степенных рядов, полученных таким образом, образует аналитическое выражение функции.

Весьма важно знать, дает ли продолжение по двум различным путям PBQ, $PB'Q$ один и тот же окончательный степенной ряд; легко следующим путем убедиться, что так будет в том случае, когда функция не имеет особой точки внутри замкнутой кривой $PBQB'P$. Пусть функция первоначально задана степенным рядом S, сходящимся в круге C с центром в точке P, и пусть P_1 — какая-либо точка на PBQ, лежащая внутри круга C. Построим аналитическое продолжение функции — степенной ряд S_1, сходящийся в круге C_1 с центром в точке P_1. Пусть, наконец, P_1' — какая-либо точка, лежащая внутри обоих кругов и внутри кривой $PBQB'P$, и S_1' — степенной ряд с центром в P_1', являющийся продолжением ряда S. Тогда, если P_1' взята достаточно близко к P_1, будет иметь место равенство $S_1 \equiv S_1'$[5]) в некоторой области, содержащей P_1, а потому S_1 будет аналитическим продолжением ряда S_1', ибо если T_1 есть продолжение ряда S_1', то мы имеем $T_1 \equiv S_1$ в области, содержащей P_1, и таким образом (§ 3.73), соответствующие коэффициенты S_1 и T_1 одни и те же. Повторением такого действия достаточное число раз мы деформируем путь PBQ в путь $PB'Q$, если внутри $PBQB'P$ нет особых

---

[1]) Функции, определяемой новым рядом.

[2]) Слово «обычно» относится к случаям, с которыми читатель может столкнуться при изучении сравнительно элементарных вопросов.

[3]) По-французски prolongement, по-немецки Fortsetzung, по-английски continuation.

[4]) Такая совокупность степенных рядов была для различных функций получена Хиллом чисто алгебраическим путем (Hill, Proc. London Math. Soc., XXXV, 388—416 (1903)).

[5]) Так как каждый равен S.

точек. Читатель убедится, сделав чертеж, что весь процесс можно выполнить в конечное число шагов.

Пример. Ряд

$$\frac{1}{a}+\frac{z}{a^2}+\frac{z^2}{a^3}+\frac{z^3}{a^4}+\ldots$$

представляет функцию

$$f(z)=\frac{1}{a-z}$$

только для точек z внутри круга $|z|\leqslant|a|$.

Но существует много других степенных рядов, представляющих ту же функцию,

$$\frac{1}{a-b}+\frac{z-b}{(a-b)^2}+\frac{(z-b)^2}{(a-b)^3}+\frac{(z-b)^3}{(a-b)^4}+\ldots;$$

если $\frac{b}{a}$ не равно вещественному положительному числу, то такой ряд будет сходиться в точках внутри круга, который находится частично внутри и частично вне $|z|\leqslant|a|$; эти ряды представляют рассматриваемую функцию в точках вне круга $|z|\leqslant|a|$.

5.501. О функциях, к которым не может быть применен процесс аналитического продолжения

Выполнить процесс аналитического продолжения оказывается не всегда возможным. Возьмем в качестве примера функцию $f(z)$, определяемую степенным рядом

$$f(z)=1+z^2+z^4+z^8+\ldots+z^{2^n}+\ldots,$$

который, очевидно, сходится внутри круга с радиусом единица и центром в начале координат.

Ясно, что $f(z)\to+\infty$ при $z\to 1-0$, точка $+1$ будет поэтому особой точкой функции $f(z)$.

Но

$$f(z)=z^2+f(z^2),$$

и если $z^2\to 1-0$, то $f(z^2)\to\infty$, а стало быть, $f(z)\to\infty$; поэтому точки, для которых $z^2=1$, будут особыми точками функции $f(z)$ и значит точка $z=-1$ также будет особой точкой функции $f(z)$.

Аналогично, поскольку

$$f(z)=z^2+z^4+f(z^4),$$

мы видим, что если $z^4=1$, то точка z будет особой; вообще любой корень любого из уравнений

$$z^2=1,\quad z^4=1,\quad z^8=1,\quad z^{16}=1,\ \ldots$$

будет особой точкой функции $f(z)$. Но все эти точки лежат на окружности $|z|=1$, и на любой дуге этой окружности, как угодно малой, их имеется неограниченное число. Попытка выполнить процесс аналитического продолжения оказывается тщетной вследствие существования этой сплошной линии особенностей, через которую невозможно пройти.

В этом случае функция $f(z)$ *совсем не может быть продолжена до точек z*, расположенных вне окружности $|z|=1$, такая функция называется *непродолжимой функцией*, а про окружность говорят, что она является *естественной границей функции*.

5.51. Тождественность двух функций

Два ряда

$$1+z+z^2+z^3+\ldots$$

и

$$-1+(z-2)-(z-2)^2+(z-2)^3-(z-2)^4+\ldots$$

не сходятся одновременно ни для какого значения z и являются различными разложениями.

Тем не менее мы обычно говорим, что они представляют *одну и ту же функцию*, на основании того факта, что они оба могут быть представлены одним и тем же рациональным выражением $\frac{1}{1-z}$.

Здесь возникает вопрос о *тождественности* двух функций. Когда можно сказать, что два *различных* разложения представляют *одну и ту же функцию*?

Мы могли бы определить функцию (следуя Вейерштрассу) по методу предыдущего параграфа как совокупность, состоящую из некоторого степенного ряда и всех других степенных рядов, которые могут быть получены из него процессом аналитического продолжения. Два различных аналитических выражения определят тогда одну и ту же функцию, если они представляют собой степенные ряды, получаемые один из другого продолжением.

Так как функция, аналитическая (в смысле Коши, § 5.12) в окрестности некоторой точки и в самой этой точке, может быть разложена в ряд Тейлора и так как сходящийся степенной ряд имеет единственную производную (§ 5.3), то заключаем, что определение Вейерштрасса эквивалентно на самом деле определению Коши.

Важно отметить, что *предел последовательности аналитических функций может представлять различные аналитические функции в различных частях плоскости*. Это можно видеть, например, из рассмотрения ряда

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{1+z^n}-\frac{1}{1+z^{n-1}}\right).$$

Сумма первых $n+1$ членов этого ряда равна

$$\frac{1}{z}+\left(z-\frac{1}{z}\right)\frac{1}{1+z^n}.$$

Ряд поэтому будет сходящимся для всех значений z (кроме нуля), не лежащих на окружности $|z|=1$. Но при $n\to\infty$ $|z^n|\to 0$ или $|z^n|\to\infty$, смотря по тому, будет ли $|z|$ больше или меньше единицы; отсюда мы видим, что сумма бесконечного ряда равна z, когда $|z|<1$, и равна $\frac{1}{z}$, когда $|z|>1$. *Этот ряд представляет, таким образом, одну функцию в точках внутри окруж-*

ности $|z|=1$ *и совсем иную функцию в точках вне той же самой окружности.* Читатель увидит из § 5.3, что этот результат связан с неравномерной сходимостью ряда вблизи $|z|=1$.

Борель[1]) показал, что если область C и совокупность точек S таковы, что точки совокупности S будут произвольно близки к каждой точке области C, то может оказаться возможным определить функцию, имеющую единственную производную (т. е. моногенную) во всех точках C, не принадлежащих к S, но функция не будет аналитической в C в смысле Вейерштрасса.

Подобной функцией является

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n}\frac{\exp(-\exp n^4)}{z-(p+qi)/n}.$$

5.6. Теорема Лорана

Весьма важная теорема была опубликована в 1843 г. Лораном[2]); она относится к разложениям функций, к которым теорема Тейлора неприменима.

Пусть C и C' — две концентрические окружности с центром в a, из которых C' внутренняя, и пусть $f(z)$ — аналитическая функция[3]) во всех точках на C и C' и в кольце между C и C'. Пусть $a+h$ — какая-нибудь точка в этом кольце. Тогда мы имеем по следствию § 5.21

$$f(a+h)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{f(z)}{z-a-h}dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{f(z)}{z-a-h}dz,$$

где предполагается, что интегралы взяты в положительном направлении (против часовой стрелки) по соответствующим окружностям. Это соотношение может быть записано в виде

$$f(a+h)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}f(z)\left\{\frac{1}{z-a}+\frac{h}{(z-a)^2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{h^n}{(z-a)^{n+1}}+\frac{h^{n+1}}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}\right\}dz+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}f(z)\left\{\frac{1}{h}+\frac{z-a}{h^2}+\ldots+\frac{(z-a)^n}{h^{n+1}}-\frac{(z-a)^{n+1}}{h^{n+1}(z-a-h)}\right\}dz.$$

---

[1]) Borel, Proc. Math. Congress, Cambridge 1, 137—138 (1912); Leçons sur les fonctions monogènes, 1917. Функции не будут строго моногенными в смысле § 5.1, так как в цитируемом примере при рассмотрении $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ нужно предполагать, что $\operatorname{Re}(z+h)$ и $\operatorname{Im}(z+h)$ не будут одновременно рациональными дробями.

[2]) Laurent, Comptes Rendus, XVII, 348—349 (1843). Теорема содержится в сочинении, написанном Вейерштрассом в 1841 г., но не опубликованном, вероятно, до 1894 г. (Weierstrass, Werke, 1, 51—66).

[3]) См. подстрочное примечание к следствию 2 § 5.2.

Мы найдем, как при доказательстве теоремы Тейлора, что интегралы

$$\int_C \frac{f(z)\, h^{n+1}\, dz}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)} \quad \text{и} \quad \int_{C'} \frac{f(z)\,(z-a)^{n+1}\, dz}{(z-a-h)\, h^{n+1}}$$

стремятся к нулю при $n \to \infty$, и таким образом, мы имеем

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + \frac{b_1}{h} + \frac{b_2}{h^2} + \ldots,$$

где [1])

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{n+1}} \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} (z-a)^{n-1} f(z)\, dz.$$

Этот результат и есть *теорема Лорана*; изменяя обозначения, ее можно выразить в следующей форме: *если функция $f(z)$ — аналитическая на концентрических окружностях C и C' с центром a и в кольце между ними, то в любой точке z этого кольца функция $f(z)$ может быть разложена в ряд*

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots + \frac{b_1}{z-a} + \frac{b_2}{(z-a)^2} + \ldots,$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)\, dt}{(t-a)^{n+1}} \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} (t-a)^{n-1} f(t)\, dt.$$

Важный случай теоремы Лорана получается, когда внутри внутренней окружности C' имеется только одна особая точка, а именно центр a. В этом случае окружность C' можно взять как угодно малой и, таким образом, разложение Лорана будет справедливо для всех точек внутри окружности C, исключая центр a.

Пример 1. Доказать, что

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = J_0(x) + zJ_1(x) + z^2 J_2(x) + \ldots + z^n J_n(x) + \ldots$$
$$\ldots - \frac{1}{z} J_1(x) + \frac{1}{z^2} J_2(x) - \ldots + \frac{(-)^n}{z^n} J_n(x) + \ldots,$$

где

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta - x \sin\theta)\, d\theta.$$

---

[1]) Мы не можем писать $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, как в теореме Тейлора, так как $f(z)$ не обязательно будет аналитической внутри C'.

[В самом деле, рассматриваемая функция от z будет аналитической в любой области, не содержащей точку $z=0$; следовательно, по теореме Лорана

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\ldots,$$

где

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{z^{n+1}} \quad \text{и} \quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}z^{n-1}\,dz$$

и где C и C' — любые окружности с центром в начале координат. Приняв за C окружность радиуса единица и положив $z=e^{i\theta}$, получим

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta}e^{-ni\theta}i\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta,$$

так как $\int\limits_0^{2\pi}\sin(n\theta-x\sin\theta)\,d\theta$ равен нулю, как это можно видеть, сделав подстановку $\theta=2\pi-\varphi$. Таким образом, $a_n=J_n(x)$, а $b_n=(-1)^n a_n$, так как разлагаемая функция не изменится, если заменить в ней z на $-z^{-1}$; таким образом, $b_n=(-1)^n J_n(x)$, чем доказательство заканчивается.]

Пример 2. Показать, что в кольце $|a|<|z|<|b|$ функция

$$\left\{\frac{bz}{(z-a)(b-z)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

может быть разложена в ряд

$$S_0+\sum_{n=1}^{\infty}S_n\left(\frac{a^n}{z^n}+\frac{z^n}{b^n}\right),$$

где

$$S_n=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2l-1)\cdot 1\cdot 3\ldots(2l+2n-1)}{2^{2l+n}l!\,(l+n)!}\left(\frac{a}{b}\right)^l.$$

Функция является однозначной и аналитической в этом кольце (см. § 5.7), ибо точки ветвления 0, a нейтрализуют друг друга, и таким образом, по теореме Лорана коэффициент при z^n в требуемом разложении равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{dz}{z^{n+1}}\left\{\frac{bz}{(z-a)(b-z)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где C — окружность $|z|=r$, $|a|<r<|b|$. Положив $z=re^{i\theta}$, преобразуем этот интеграл в

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ni\theta}r^{-n}\left(1-\frac{r}{b}e^{i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a}{r}e^{-i\theta}\right)^{-\frac{1}{2}}d\theta$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ni\theta}r^{-n}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2^k k!}\frac{r^k e^{ki\theta}}{b^k}\right\}\times$$

$$\times\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2l-1)}{2^l l!}\frac{a^l e^{-li\theta}}{r^l}\right\}d\theta.$$

Ряды здесь сходятся абсолютно и равномерно относительно θ.

Единственные члены, дающие интегралы, отличные от нуля, будут те, для которых $k=l+n$.

Таким образом, коэффициент при z^n равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\ldots(2l-1)}{2^l l!}\,\frac{1\cdot 3\ldots(2l+2n-1)}{2^{l+n}(l+n)!}\,\frac{a^l}{b^{l+n}}=\frac{S_n}{b^n}.$$

Подобным же образом можно доказать, что коэффициент при $\frac{1}{z^n}$ равен $S_n a^n$.

Пример 3. Показать, что

$$e^{uz+\frac{v}{z}}=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\ldots,$$

где

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(u+v)\cos\theta}\cos\{(u-v)\sin\theta-n\theta\}\,d\theta$$

и

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(u+v)\cos\theta}\cos\{(v-u)\sin\theta-n\theta\}\,d\theta.$$

5.61. Природа особенностей однозначных функций

Рассмотрим сначала функцию $f(z)$, аналитическую в некоторой замкнутой области S всюду, кроме одной точки a внутри области.

Пусть можно определить такую функцию $\varphi(z)$, что:

(I) φ аналитическая в области S,

(II) при $z\neq a$

$$f(z)=\varphi(z)+\frac{B_1}{z-a}+\frac{B_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{B_n}{(z-a)^n}.$$

Тогда говорят, что $f(z)$ имеет *полюс порядка n в точке a*, а сумму $\frac{B_1}{z-a}+\frac{B_2}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{B_n}{(z-a)^n}$ называют *главной частью функции $f(z)$ вблизи a*. По определению особых точек (§ 5.12) полюс является особой точкой. Если $n=1$, то такая особая точка называется *простым полюсом*.

Особая точка однозначной функции, не являющаяся полюсом, называется *существенно особой точкой*.

Если существенно особая точка a изолированная (т. е. если можно найти область, для которой a будет внутренней точкой и в которой не будет содержаться других особых точек, кроме a), то можно найти разложение Лорана по возрастающим и убывающим степеням $z-a$, справедливое при $\Delta > |z-a| > \delta$, где Δ зависит от других особых точек функции, а δ — произвольно малая величина. Таким образом, *главная часть* функции вблизи изолированной существенно особой точки представляет собой бесконечный ряд.

Следует отметить, что полюс по определению является изолированной особой точкой, так что все неизолированные особые точки (например, предельная точка последовательности полюсов) будут существенно особыми точками.

Не существует, вообще говоря, разложения функции, которое было бы справедливо вблизи неизолированной особой точки, наподобие того как разложение Лорана справедливо вблизи изолированной особой точки.

Следствие. Если $f(z)$ имеет полюс порядка n в точке a и

$$\psi(z)=(z-a)^n f(z) \ (z\neq a), \qquad \psi(a)=\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z),$$

то $\psi(z)$ будет аналитической в этой точке.

Пример 1. Вблизи изолированной особой точки функция не ограничена.

[Доказать, что если функция ограничена вблизи $z=a$, то коэффициенты при всех отрицательных степенях $z-a$ равны нулю.]

Пример 2. Найти особые точки функции $e^{\frac{c}{z-a}}\Big/\left\{e^{\frac{z}{a}}-1\right\}$.

При $z=0$ числитель аналитичен и не равен 0, а знаменатель имеет простой нуль. Следовательно, функция имеет простой полюс в $z=0$.

Подобным же образом имеется простой полюс в каждой из точек $2n\pi i a$ $(n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$; для других значений знаменатель будет аналитическим и не будет равняться нулю.

При $z=a$ числитель имеет изолированную особую точку, так что теорема Лорана применима, а коэффициенты в разложении Лорана могут быть найдены делением степенных рядов:

$$\frac{1+\dfrac{c}{z-a}+\dfrac{c^2}{2!\,(z-a)^2}+\ldots}{e\left(1+\dfrac{z-a}{a}+\ldots\right)-1},$$

что дает разложение, содержащее все положительные и отрицательные степени $z-a$. Таким образом, при $z=a$ имеется существенно особая точка.

Пример 3. Показать, что функция, определяемая рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^{n-1}\{(1+n^{-1})^n-1\}}{(z^n-1)\{z^n-(1+n^{-1})^n\}},$$

имеет простые полюсы в точках $z=(1+n^{-1})\,e^{2ki\pi/n}$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n-1;$ $n=1, 2, 3, \ldots)$

(Math. Trip., 1899)

5.62. «Бесконечно удаленная точка»

Поведение функции $f(z)$ при $|z| \to \infty$ можно рассматривать таким же образом, как ее поведение в случае, когда z стремится к конечному пределу.

Если мы положим $z = \frac{1}{z'}$, так что большие значения z будут представлены малыми значениями z' в плоскости z', то между z и z' будет взаимно однозначное соответствие, лишь бы только ни z, ни z' не было нулем; чтобы сделать соответствие полным, иногда удобно говорить, что когда z' попадает в начало координат, z становится бесконечно удаленной точкой. Но читателю следует особенно отметить, что в этом случае z *не будет* определенной точкой и всякое предложение, к ней относящееся, в действительности является предложением, относящимся к точке $z' = 0$.

Пусть $f(z) = \varphi(z')$. Тогда $\varphi(z')$ не определена *при* $z' = 0$, но ее поведение *вблизи* $z' = 0$ определяется ее разложением (Тейлора или Лорана) по степеням z', и мы определяем $\varphi(0)$ как $\lim\limits_{z' \to 0} \varphi(z')$, если этот предел существует. Например, функция $\varphi(z')$ может иметь нуль порядка m в точке $z' = 0$; в этом случае разложение Тейлора функции $\varphi(z')$ будет иметь вид

$$Az'^m + Bz'^{m+1} + Cz'^{m+2} + \ldots,$$

и таким образом, разложение функции $f(z)$, справедливое для достаточно больших значений $|z|$, будет иметь вид

$$f(z) = \frac{A}{z^m} + \frac{B}{z^{m+1}} + \frac{C}{z^{m+2}} + \ldots$$

В этом случае говорят, что $f(z)$ имеет *нуль порядка m «в бесконечности»*.

Далее, функция $\varphi(z')$ может иметь полюс порядка m в точке $z' = 0$; в этом случае

$$\varphi(z') = \frac{A}{z'^m} + \frac{B}{z'^{m-1}} + \frac{C}{z'^{m-2}} + \ldots + \frac{L}{z'} + M + Nz' + Pz'^2 + \ldots,$$

и таким образом, для достаточно больших значений $|z|$ функция $f(z)$ может быть разложена в ряд

$$f(z) = Az^m + Bz^{m-1} + Cz^{m-2} + \ldots + Lz + M + \frac{N}{z} + \frac{P}{z^2} + \ldots$$

В этом случае говорят, что $f(z)$ имеет *полюс порядка m «в бесконечности»*.

Подобным же образом говорят, что $f(z)$ *имеет существенно особую точку в бесконечности*, если $\varphi(z')$ имеет существенную особенность в точке $z'=0$. Так функция e^z имеет существенно особую точку в бесконечности, поскольку функция $e^{\frac{1}{z'}}$, или

$$1+\frac{1}{z'}+\frac{1}{2!z'^2}+\frac{1}{3!z'^3}+\ldots,$$

имеет существенную особенность при $z'=0$.

Пример. Исследовать функцию, представленную рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{1+a^{2n}z^2}\qquad (a>1).$$

Функция, представляемая этим рядом, имеет особые точки $z=\frac{i}{a^n}$ и $z=-\frac{i}{a^n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, так как в каждой из этих точек знаменатель одного из членов ряда будет равен нулю. Эти особые точки лежат на мнимой оси и имеют $z=0$ предельной точкой; таким образом, для этой функции нельзя составить ни разложения Тейлора, ни разложения Лорана, справедливого в какой-либо области, для которой начало координат будет внутренней точкой.

Для значений z, отличных от этих особых точек, ряд будет абсолютно сходящимся, так как предел отношения $(n+1)$-го члена к n-му равен

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{-1}a^{-2}=0.$$

Рассматриваемая функция является четной функцией от z (т. е. она не меняется при изменении знака z), она стремится к нулю при $|z|\to\infty$ и будет аналитической вне и на окружности C радиуса большего, чем единица, с центром в начале. Таким образом, для точек вне этой окружности она может быть разложен в ряд

$$\frac{b_2}{z^2}+\frac{b_4}{z^4}+\frac{b_6}{z^6}+\ldots,$$

где по теореме Лорана

$$b_{2k}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C z^{2k-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{a^{-2n}}{a^{-2n}+z^2}\,dz.$$

Но

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{-2n}z^{2k-1}}{n!\,(a^{-2n}+z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2k-3}a^{-2n}}{n!}(-1)^m a^{-2nm}z^{-2m}.$$

Этот двойной ряд абсолютно сходится при $|z|>1$, и если члены его расположить по степеням z, то он будет равномерно сходящимся.

Так как коэффициент при z^{-1} равен

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}a^{-2kn}}{n!}$$

и единственный член, который дает не равный нулю интеграл, есть член с z^{-1}, то мы имеем

$$b_{2k}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}a^{-2kn}}{n!}\frac{dz}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{n!a^{2kn}}=(-1)^{k-1}e^{a^{\frac{1}{2k}}}.$$

Поэтому при $|z|>1$ функция может быть разложена в ряд

$$\frac{e^{\frac{1}{a^2}}}{z^2}-\frac{e^{\frac{1}{a^4}}}{z^4}+\frac{e^{\frac{1}{a^6}}}{z^6}-\ldots$$

Функция имеет нуль второго порядка в бесконечности, так как разложение начинается с члена z^{-2}.

5.63. Теорема Лиувилля[1])

Пусть $f(z)$ — *аналитическая функция для всех значений* z, *и пусть* $|f(z)|<K$ *при всех значениях* z, *где* K — *постоянная* (*так что* $|f(z)|$ *будет ограниченным, когда* $|z|\to\infty$). *Тогда* $f(z)$ *есть постоянная.*

Пусть z, z' — любые две точки и C — такой контур, что z, z' лежат внутри него. Тогда по формуле § 5.21

$$f(z')-f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\left\{\frac{1}{\zeta-z'}-\frac{1}{\zeta-z}\right\}f(\zeta)\,d\zeta;$$

примем за контур C окружность с центром в z и радиусом $\rho\geqslant 2|z'-z|$; на C положим $\zeta=z+\rho e^{i\theta}$; так как $|\zeta-z'|\geqslant\frac{1}{2}\rho$, когда ζ лежит на C, то по оценке § 4.62 находим, что

$$|f(z')-f(z)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\frac{z'-z}{(\zeta-z')(\zeta-z)}f(\zeta)\,d\zeta\right|<$$

$$<\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{|z'-z|}{\frac{1}{2}\rho}K\,d\theta=2|z'-z|\,K\rho^{-1}.$$

Заставим $\rho\to\infty$, сохраняя z и z' неподвижными; тогда ясно, что $f(z')-f(z)=0$, а это значит, что $f(z)$ есть постоянная.

Как будет видно из ближайшего параграфа и части II этой книги (главы XX, XXI и XXII), теорема Лиувилля позволяет дать краткие и простые доказательства некоторых из важнейших результатов анализа.

---

[1]) Этой теореме, принадлежащей в действительности Коши (Cauchy, Comptes Rendus, XIX, 1377—1378 (1844)), название было дано Борхардтом (Borchardt, Journal für Math., LXXXVIII, 277—310 (1880)), который слышал ее на лекциях Лиувилля в 1847.

5.64. Функции без существенно особых точек

Покажем теперь, *что единственными однозначными функциями, не имеющими никаких особых точек, кроме полюсов, во всей плоскости (включая ∞) являются рациональные функции.*

Пусть $f(z)$ — такая функция; пусть $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — ее особые точки в конечной части плоскости, и пусть главная часть (§ 5.61) ее разложения в полюсе c_r имеет вид,

$$\frac{a_{r,1}}{z-c_r}+\frac{a_{r,2}}{(z-c_r)^2}+\ldots+\frac{a_{r,n_r}}{(z-c_r)^{n_r}}.$$

Пусть, наконец, главная часть ее разложения в полюсе в бесконечности имеет вид

$$a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n;$$

если полюса в бесконечности нет, то все коэффициенты в этом разложении равны нулю.

Тогда функция

$$f(z)-\sum_{r=1}^{k}\left\{\frac{a_{r,1}}{z-c_r}+\frac{a_{r,2}}{(z-c_r)^2}+\ldots+\frac{a_{r,n_r}}{(z-c_r)^{n_r}}\right\}-\\ -a_1z-a_2z^2-\ldots-a_nz^n,$$

очевидно, не имеет особенностей ни в точках $c_1, c_2, \ldots, c_k$, ни в бесконечности; она будет поэтому аналитической всюду и ограниченной, когда $|z|\to\infty$, и, таким образом, по теореме Лиувилля равна постоянной, а это значит, что

$$f(z)=C+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\\ +\sum_{r=1}^{k}\left\{\frac{a_{r,1}}{z-c_r}+\frac{a_{r,2}}{(z-c_r)^2}+\ldots+\frac{a_{r,n_r}}{(z-c_r)^{n_r}}\right\},$$

где C — постоянная; $f(z)$ будет, таким образом, рациональной функцией, и теорема доказана.

Из теоремы Лиувилля и следствия (II) § 3.61 очевидно, что функция, аналитическая всюду (включая ∞), будет просто постоянной. Функции, которые являются аналитическими всюду, *исключая* ∞, имеют большое значение; они называются *целыми функциями*[1]). Примерами таких функций служат e^z, $\sin z$, e^{e^z}. Из результатов § 5.4

[1]) По-французски fonction entière, по-немецки ganze Funktion, по-английски integral function.

вытекает, что для таких функций радиус сходимости ряда Тейлора будет бесконечным, а из результата данного параграфа ясно, что все целые функции (кроме полиномов) имеют существенно особые точки в бесконечности.

5.7. Многозначные функции

Рассмотренные в предыдущем изложении функции имели единственное значение (или предел) для каждого значения аргумента, кроме особых точек.

Но могут быть определены функции, имеющие более чем одно значение для каждого значения z; так, например, если $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, то функция $z^{\frac{1}{2}}$ имеет два значения:

$$r^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{1}{2}\theta + i\sin\frac{1}{2}\theta\right),\quad r^{\frac{1}{2}}\left\{\cos\frac{1}{2}(\theta+2\pi) + i\sin\frac{1}{2}(\theta+2\pi)\right\},$$

функция же $\operatorname{arctg} x$ (x вещественно) имеет неограниченное число значений, а именно значения $\operatorname{Arctg} x + n\pi$, где $-\frac{1}{2}\pi < \operatorname{Arctg} x < \frac{1}{2}\pi$ и n — любое целое число; другими примерами многозначных функций являются $\lg z$, $z^{-3/5}$, $\sin(z^{1/2})$.

Каждая из двух функций, представляемых выражением $z^{1/2}$, будет тем не менее аналитической всюду, за исключением точки $z = 0$, и мы можем применять к ним теоремы этой главы. Эти две функции называются «*ветвями* многозначной функции $z^{1/2}$» [1]).

Вообще говоря, имеются определенные точки, в которых совпадают две или более ветвей или в которых одна из ветвей имеет бесконечный предел; эти точки называются «точками ветвления». Так функция $z^{1/2}$ имеет точку ветвления в 0, и если мы рассмотрим изменение $z^{1/2}$, когда z описывает окружность против часовой стрелки вокруг 0, то мы увидим, что θ возрастает на 2π, z остается неизменным и *каждая ветвь функции переходит в другую ветвь*. Последнее представляет собой общую черту точек ветвления. Настоящая книга не стремится дать полное изложение свойств многозначных функций, так как нам всегда придется рассматривать частные ветви функций в областях, не содержащих точек ветвления. Таким образом, будет сравнительно нетрудно видеть, применима или неприменима теорема Коши.

Так, мы не можем применить теорему Коши к такой функции, как $z^{3/2}$, когда путем интегрирования является окружность, охватывающая начало координат; но можно применить ее к одной из ветвей функции $z^{3/2}$, когда

---

[1]) Эти рассуждения не вполне точны. Авторы не оговаривают, в какой области они рассматривают ветви. (*Прим. ред.*)

путь интегрирования подобен пути, показанному в § 6.24, ибо на всем контуре и внутри него функция имеет единственное определенное значение.

Пример. Доказать, что если различные значения a^z, соответствующие данному значению z, представлены точками на плоскости комплексного переменного, то эти точки будут вершинами равноугольной ломаной, вписанной в логарифмическую спираль; угол между касательной и радиусом-вектором спирали не зависит от a.

(Math. Trip., 1899)

Идея различных *ветвей* функции оказывает нам помощь в понимании такого парадокса, как нижеследующий.

Рассмотрим функцию

$$y = x^x,$$

для которой

$$\frac{dy}{dx} = x^x (1 + \lg x).$$

Когда x вещественно и отрицательно, $\frac{dy}{dx}$ не будет вещественной. Но если x отрицательно и имеет форму $\frac{p}{2q+1}$ (где p и q — положительные или отрицательные целые числа), то y будет вещественно.

Поэтому, если мы вычертим вещественную кривую

$$y = x^x,$$

то мы будем иметь для отрицательных значений x совокупность вещественных точек кривой, соответствующих рациональным значениям x с нечетным знаменателем. Тогда мы могли бы попробовать получить касательную как предел хорды, как если бы кривая была непрерывной, и таким образом, $\frac{dy}{dx}$, выведенная из наклона касательной к оси x, окажется вещественной. Возникает вопрос: почему обычный процесс дифференцирования дает невещественное значение для $\frac{dy}{dx}$? Объяснением служит то обстоятельство, что эти вещественные точки принадлежат не одной и той же ветви функции.

Действительно, имеем

$$y = e^{x \lg x + 2k\pi i x},$$

где k — любое целое число. Каждому значению k соответствует одна ветвь функции y. Теперь, чтобы получить вещественное значение, когда x отрицательно, мы должны взять надлежащее значение для k, и *это значение k будет изменяться, когда мы переходим от одной вещественной точки к другой.* Итак, вещественные точки не представляют значений y, принадлежащих одной и той же ветви функции $y = x^x$, и следовательно, мы не можем ожидать, что значение $\frac{dy}{dx}$, находимое для определенной ветви, дается тангенсом наклона к оси x прямой, соединяющей две произвольно близкие вещественные точки.

ЛИТЕРАТУРА

Э. Гурса, Курс математического анализа, гл. XIV, XVI, ОНТИ, 1936.
J. Hadamard, La série de Taylor et son prolongement analytique, Scientia (1901).
E. Lindelöf, Le Calcul des Résidus, Paris, 1905.

Ш. Ж. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, ГТТИ, 1933, гл. XI.
E. Borel, Leçons sur les fonctions entières, Paris, 1900.
G. N. Watson, Complex integration and Cauchy's theorem, Camb. Math. Tracts, № 15 (1914).

Примеры

1. Получить разложение

$$f(z)=f(a)+2\left\{\frac{z-a}{2}f'\left(\frac{z+a}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{(z-a)^3}{2^3\cdot 3!}f'''\left(\frac{z+a}{2}\right)+\frac{(z-a)^5}{2^5\cdot 5!}f^{(5)}\left(\frac{z+a}{2}\right)+\ldots\right\}$$

и определить условия и область его применимости.

2. Получить при надлежащих условиях разложение

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{m}\left[f'\left(a+\frac{z-a}{2m}\right)+f'\left(a+\frac{3(z-a)}{2m}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+f'\left(a+\frac{(2m-1)(z-a)}{2m}\right)\right]+$$
$$+\frac{2}{3!}\left(\frac{z-a}{2m}\right)^3\left[f'''\left(a+\frac{z-a}{2m}\right)+f'''\left(a+\frac{3(2-a)}{2m}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+f'''\left(a+\frac{(2m-1)(z-a)}{2m}\right)\right]+$$
$$+\frac{2}{5!}\left(\frac{z-a}{2m}\right)^5\left[f^{(5)}\left(a+\frac{z-a}{2m}\right)+f^{(5)}\left(a+\frac{3(z-a)}{2m}\right)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+f^{(5)}\left(a+\frac{(2m-1)(z-a)}{2m}\right)\right]+\ldots$$

(Corey, Ann. of Math. (2), 1, 77, (1900)).

3. Показать, что для ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n+z^{-n}}$$

область сходимости состоит из двух отдельных областей, а именно внешней и внутренней области окружности радиуса единица, и что в каждой из них ряд представляет одну функцию и представляет ее вполне.

(Weierstrass, Berliner Monatsberichte, 731 (1880), Ges. Werke, II, 227, 1895)

4. Показать, что функция $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ стремится к бесконечности при $z\to\exp\left(\frac{2\pi ip}{m!}\right)$ вдоль радиуса, проведенного через эту точку; m — любое целое число, а p принимает значения $0, 1, 2, \ldots, (m!-1)$.

Вывести отсюда, что функция не может быть продолжена за единичную окружность.

(Lerch, Sitz. Bohm. Acad., 571—582 (1885—1886))

5. Показать, что если z^2-1 не является положительным вещественным числом, то

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}z^4+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}z^{2n}+$$
$$+\frac{3\cdot 5\ldots(2n+1)}{2\cdot 4\ldots 2n}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^z t^{2n+1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

(Jacobi и Scheibner)

6. Показать, что если $z-1$ не является положительным вещественным числом, то

$$(1-z)^{-m} = 1+\frac{m}{1}z+\frac{m(m+1)}{2!}z^2+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}z^n+$$
$$+\frac{m(m+1)\ldots(m+n)}{n!}(1-z)^{-m}\int\limits_0^z t^n(1-t)^{m-1}\,dt.$$

(Jacobi и Scheibner)

7. Показать, что если z и $1-z$ не яляются отрицательными вещественными числами, то

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_0^z t^m(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt =$$
$$=\frac{z^{m+1}}{m+1}\left\{1+\frac{m+2}{m+3}z^2+\ldots+\frac{(m+2)\ldots(m+2n-2)}{(m+3)\ldots(m+2n-1)}z^{2n-2}\right\}+$$
$$+(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{(m+2)(m+4)\ldots(m+2n)}{(m+1)(m+3)\ldots(m+2n-1)}\int\limits_0^z t^{m+2n}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

(Jacobi и Scheibner)

8. В разложении выражения $(a+a_1z+a_2z^2)^m$ по степеням z остаточный член после n членов обозначен через $R_n(z)$, так что

$$(a+a_1z+a_2z^2)^m = A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots+A_{n-1}z^{n-1}+R_n(z);$$

требуется показать, что

$$R_n(z) = (a+a_1z+a_2z^2)^m\int\limits_0^z \frac{naA_nt^{n-1}+(2m-n+1)a_2A_{n-1}t^n}{(a+a_1t+a_2t^2)^{m+1}}\,dt.$$

(Scheibner)

9. Пусть функция

$$(a_0+a_1z+a_2z^2)^{-m-1}\int\limits_0^z (a_0+a_1t+a_2t^2)^m\,dt$$

разложена по возрастающим степеням z:

$$A_1z+A_2z^2+\ldots;$$

требуется показать, что остаточный член после $n-1$ членов будет

$$(a_0+a_1z+a_2z^2)^{-m-1}\int_0^z (a_0+a_1t+a_2t^2)^m \times$$
$$\times \{na_0A_n-(2m+n+1)\,a_2A_{n-1}t\}\, t^{n-1}\,dt.$$

(Scheibner [1]))

10. Показать, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{1+\lambda_n(z)\,e^z\}\,\frac{d^n\varphi(z)}{dz^n},$$

где

$$\lambda_n(z)=-1+z-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}-\ldots+(-)^n\frac{z^n}{n!}$$

и где $\varphi(z)$ — функция, аналитическая вблизи $z=0$, сходится вблизи точки $z=0$; показать также, что если сумму ряда обозначить через $f(z)$, то $f(z)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$f'(z)=f(z)-\varphi(z).$$

(Pincherle, Rend. dei Lincei (5), V, 27 (1896))

11. Показать, что среднее арифметическое квадрата модуля значений ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ на окружности $|z|=r$, расположенной внутри его круга сходимости, равно сумме квадратов модулей отдельных членов.

(Gutzmer, Math. Ann., XXXII, 596—600 (1888))

12. Показать, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2(am)^{1/2}}\,z^{m-1}$$

сходится при $|z|<1$ и что при $a>0$ функция, представляемая им, может быть также представлена при $|z|<1$ интегралам

$$\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x-z}\,\frac{dx}{x^{3/2}}$$

и что она не имеет особых точек, кроме точки $z=1$.

(Lerch, Monatshefte für Math und Phys. VIII)

13. Показать, что ряд

$$\frac{2}{\pi}(z+z^{-1})+$$
$$+\frac{2}{\pi}\sum\left\{\frac{z}{(1-2\nu-2\nu' zi)\,(2\nu+2\nu' zi)^2}+\frac{z^{-1}}{(1-2\nu-2\nu' z^{-1}i)\,(2\nu+2\nu' z^{-1}i)^2}\right\},$$

---

[1]) Результаты примеров 5, 6 и 7 являются частными случаями формул, содержащихся в диссертации Якоби (Berlin, 1825), опубликованной в его Ges. Werke, III, 1—44, 1881. Формулы Якоби были обобщены Шайбнером (Scheibner, Leipziger Berichte, XLV, 432—443 (1893)).

в котором суммирование распространяется на все целые значения ν, ν', кроме комбинации $\nu=0$, $\nu'=0$, абсолютно сходится для всех значений z, кроме чисто мнимых, и что его сумма будет равна $+1$ или -1 соответственно тому, будет ли вещественная часть z положительной или отрицательной.

(Weierstrass, Berliner Monatsberichte, 735 (1880))

14. Показать, что $\sin\left\{\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}$ может быть разложен в ряд вида

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+\frac{b_1}{z}+\frac{b_2}{z^2}+\ldots,$$

в котором коэффициентом как при z^n, так и при z^{-n} будет

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(2u\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta.$$

15. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2z^2+a^2};$$

показать, что $f(z)$ — конечная и непрерывная для вещественных значений z, но не может быть разложена в ряд Маклорена по возрастающим степеням z; объяснить эту кажущуюся аномалию.

[Относительно других случаев непригодности теоремы Маклорена см. посмертный мемуар Селлерье (Cellérier, Bull. des Sci. Math. (2), XIV, 145—599 (1890)); Lerch, Journal für Math., CIII, 126—138 (1888); Pringsheim, Math. Ann., XLII, 153—184 (1893), Du Bois Reymond, Münchener Sitzungsberichte, VI, 235 (1876).]

16. Если $f(z)$ — *непрерывная* однозначная функция от z в некоторой двумерной области и если

$$\int_C f(z)\,dz=0$$

для всех замкнутых контуров C, лежащих внутри области, то $f(z)$ будет аналитической функцией от z всюду внутри области.

[Пусть a — любая точка области, и пусть

$$F(z)=\int_a^z f(z)\,dz.$$

Из условий следует, что $F(z)$ имеет единственную производную $f(z)$. Поэтому $F(z)$ будет аналитической (§ 5.1) и, таким образом (§ 5.22), ее производная $f(z)$ будет также аналитической. Это важное обращение теоремы Коши принадлежит Морера (Morera, Rendiconti del R. Ist. Lombardo (Milano), XXII, 191 (1889).]

ГЛАВА 6

ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ И ПРИЛОЖЕНИЕ ЕЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

6.1. Вычеты

Если функция $f(z)$ имеет полюс порядка m при $z=a$, то, по определению полюса, вблизи точки $z=a$ она будет иметь разложение вида

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}+\frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}}+\ \ldots\ +\frac{a_{-1}}{z-a}+\varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция вблизи a и в a.

Коэффициент a_{-1} в этом разложении называется *вычетом* функции $f(z)$ в полюсе a.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz$, где путем интегрирования является окружность[1]), центр которой есть точка a, а радиус ρ настолько мал, что $\varphi(z)$ будет аналитической внутри и на самой окружности.

Мы имеем

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz=\sum_{r=1}^{m} a_{-r}\int\limits_{\alpha}\frac{dz}{(z-a)^r}+\int\limits_{\alpha}\varphi(z)\,dz.$$

Но $\int\limits_{\alpha}\varphi(z)\,dz=0$ согласно § 5.2, и (положив $z-a=\rho e^{i\theta}$) мы имеем, если $r\neq 1$,

$$\int\limits_{\alpha}\frac{dz}{(z-a)^r}=\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{\rho e^{i\theta}i\,d\theta}{\rho^r e^{ri\theta}}=$$

$$=\rho^{-r+1}\int\limits_{0}^{2\pi}e^{(1-r)\,i\theta}i\,d\theta=\rho^{-r+1}\left[\frac{e^{(1-r)\,i\theta}}{1-r}\right]_0^{2\pi}=0.$$

---

[1]) Существование такой окружности вытекает из определения полюса как изолированной особой точки.

Если же $r=1$, то

$$\int\limits_{\alpha} \frac{dz}{z-a} = \int\limits_{0}^{2\pi} i\,d\theta = 2\pi i.$$

Отсюда окончательно

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Пусть теперь C — какой-либо контур, содержащий внутри себя некоторое число полюсов a, b, c, ... функции $f(z)$ с вычетами a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, ... соответственно; предположим, что $f(z)$ будет аналитической в остальных точках внутри C и на нем самом.

Окружим точки a, b, c, ... окружностями α, β, γ, ... настолько малыми, что особыми точками в каждой из них будут только их центры; тогда функция $f(z)$ будет аналитической в замкнутой области, ограниченной контурами C, α, β, γ, ...

Отсюда по следствию 3 § 5.2

$$\int\limits_{C} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha} f(z)\,dz + \int\limits_{\beta} f(z)\,dz + \ldots = 2\pi i a_{-1} + 2\pi i b_{-1} + \ldots$$

Таким образом, получаем *теорему о вычетах*, а именно: *если $f(z)$ — аналитическая на контуре C и внутри него, за исключением некоторого числа полюсов внутри контура, то*

$$\int\limits_{C} f(z)\,dz = 2\pi i \sum R,$$

где $\sum R$ обозначает сумму вычетов функции $f(z)$ в полюсах, лежащих внутри контура C.

Эта теорема является обобщением теоремы § 5. 21.

Примечание Если a — *простой* полюс функции $f(z)$, то вычет в этом полюсе равен $\lim\limits_{z\to a}\{(z-a)f(z)\}$.

6.2. Вычисление определенных интегралов

Применим теперь результат § 6.1 к вычислению различных классов определенных интегралов. Методы, которые следует применять в том или ином частном случае, большей частью ясны из следующих типичных примеров.

6.21. Вычисление интегралов некоторых периодических функций, взятых между пределами 0 и 2π

Интеграл типа

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta,$$

где подинтегральная функция является рациональной функцией от $\cos\theta$ и $\sin\theta$, конечной в области интеграции, можно вычислить, положив $e^{i\theta}=z$. Так как

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \qquad \sin\theta=\frac{1}{2i}(z-z^{-1}),$$

то интеграл принимает вид $\int_C S(z)\,dz$, где $S(z)$ будет рациональной функцией от z, конечной на пути интегрирования C, где C — окружность радиуса единица с центром в начале.

Поэтому согласно § 6.1 *интеграл равен* $2\pi i$, *умноженному на сумму вычетов функции* $S(z)$ *в тех из ее полюсов, которые лежат внутри этой окружности.*

Пример 1. Если $0<p<1$, то

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\int_C\frac{dz}{i(1-pz)(z-p)}.$$

Единственным полюсом подинтегральной функции внутри окружности является простой полюс в p; соответствующий вычет равен

$$\lim_{z\to p}\frac{z-p}{i(1-pz)(z-p)}=\frac{2\pi}{i(1-p^2)}.$$

Отсюда

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}=\frac{2\pi}{1-p^2}.$$

Пример 2. Если $0<p<1$, то

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 3\theta}{1-2p\cos 2\theta+p^2}\,d\theta=$$

$$=\int_C\frac{dz}{iz}\left(\frac{1}{2}z^3+\frac{1}{2}z^{-3}\right)^2\frac{1}{(1-pz^2)(1-pz^{-2})}=2\pi\sum R,$$

где $\sum R$ обозначает сумму вычетов функции $\dfrac{(z^6+1)^2}{4z^5(1-pz^2)(z^2-p)}$ в ее полюсах, лежащих внутри C; эти полюсы будут 0, $-p^{1/2}$, $p^{1/2}$, а вычеты в них равны соответственно $-\frac{1+p^2+p^4}{4p^3}$, $\frac{(p^3+1)^2}{8p^3(1-p^2)}$, $\frac{(p^3+1)^2}{8p^3(1-p^2)}$; поэтому интеграл равен

$$\frac{\pi(1-p+p^2)}{1-p}.$$

Пример 3. Если a — положительное целое число, то

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)\,d\theta=\frac{2\pi}{n!},\quad \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(n\theta-\sin\theta)\,d\theta=0.$$

Пример 4. Если $a>b>0$, то

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}=\frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}},\quad \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos^2\theta)^2}=\frac{\pi(2a+b)}{a^{3/2}(a+b)^{3/2}}.$$

6.22. Вычисление определенных интегралов, взятых между пределами $-\infty$ и $+\infty$

Вычислим теперь $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\,dx$, где $Q(z)$ — функция, (I) аналитическая, когда мнимая часть z положительна или нуль (всюду, за исключением конечного числа полюсов), (II) не имеющая полюсов на вещественной оси и (III) такая, что при $|z|\to\infty$ $zQ(z)\to 0$ равномерно для всех значений $\arg z$, которые удовлетворяют неравенству $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$; для вещественных z, сверх того, (IV) предполагается, что $xQ(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$ таким образом[1]), что оба интеграла $\int_0^{\infty} Q(x)\,dx$ и $\int_{-\infty}^{0} Q(x)\,dx$ будут сходящимися.

При заданном ε мы можем взять такое ρ_0 (не зависящее от $\arg z$), что $|zQ(z)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$, когда $|z|>\rho_0$ и $0\leqslant\arg z\leqslant\pi$. Рассмотрим $\int_C Q(z)\,dz$, взятый по контуру C, состоящему из части вещественной оси, соединяющей точки $\pm\rho$ (где $\rho>\rho_0$), и полуокружности Γ радиуса ρ с центром в начале координат, лежащей над вещественной осью.

Тогда согласно § 6.1

$$\int_C Q(z)\,dz=2\pi i\sum R,$$

[1]) Условие $xQ(x)\to 0$ само по себе недостаточно для обеспечения сходимости $\int^{\infty} Q(x)\,dx$; рассмотреть пример $Q(x)=(x\lg x)^{-1}$.

где $\sum R$ обозначает сумму вычетов функции $Q(z)$ в ее полюсах, лежащих выше вещественной оси[1]).

Поэтому

$$\left| \int_{-\rho}^{\rho} Q(x)\, dx - 2\pi i \sum R \right| = \left| \int_{\Gamma} Q(z)\, dz \right|.$$

Положив в этом последнем интеграле $z = \rho e^{i\theta}$, имеем согласно оценке § 4.62

$$\left| \int_{\Gamma} Q(z)\, dz \right| = \left| \int_{0}^{\pi} Q(\rho e^{i\theta})\, \rho e^{i\theta} i\, d\theta \right| < \int_{0}^{\pi} \frac{\varepsilon}{\pi}\, d\theta = \varepsilon.$$

Отсюда получаем $\lim\limits_{\rho \to \infty} \int\limits_{-\rho}^{\rho} Q(x)\, dx = 2\pi i \sum R.$

Но значение интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\, dx$ равно $\lim\limits_{\rho,\, \sigma \to \infty} \int\limits_{-\rho}^{\sigma} Q(x)\, dx$; поскольку существуют оба предела $\lim\limits_{\sigma \to \infty} \int\limits_{0}^{\sigma} Q(x)\, dx$ и $\lim\limits_{\rho \to \infty} \int\limits_{-\rho}^{0} Q(x) dx$. этот двойной предел совпадает с $\lim\limits_{\rho \to \infty} \int\limits_{-\rho}^{\rho} Q(x)\, dx$.

Таким образом, мы доказали, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\, dx = 2\pi i \sum R.$$

Эта теорема особенно полезна в специальном случае, когда $Q(x)$ — рациональная функция.

[Примечание. Если даже условие (IV) не удовлетворяется, то мы все же имеем

$$\int_{0}^{\infty} \{Q(x) + Q(-x)\}\, dx = \lim_{\rho \to \infty} \int_{-\rho}^{\rho} Q(x)\, dx = 2\pi i \sum R.]$$

Пример 1. Единственным полюсом функции $(z^2+1)^{-3}$ в верхней полуплоскости является полюс в точке $z = i$ с вычетом в нем $-\frac{3}{16} i$.

[1]) $Q(z)$ не имеет полюсов над вещественной осью вне контура.

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3}{8}\pi.$$

Пример 2. Пусть $a > 0$, $b > 0$; показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4\,dx}{(a+bx^2)^4} = \frac{\pi}{16a^{3/2}b^{5/2}}.$$

Пример 3. Рассматривая интеграл $\int e^{-\lambda z^2}dz$ по прямоугольному контуру, вершины которого лежат в точках $-R$, R, $R+ai$, $-R+ai$, показать, заставляя $R\to\infty$, что если $\lambda > 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\cos(2\lambda ax)\,dx = e^{-\lambda a^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\,dx = 2\lambda^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda a^2}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

6.221. Некоторые интегралы с бесконечными пределами, содержащие синусы и косинусы

Если $Q(z)$ удовлетворяет условием (I), (II) и (III) § 6.22 и $m > 0$, то $Q(z)e^{miz}$ также удовлетворяет этим условиям.

Отсюда вытекает, что $\int_0^{\infty}\{Q(x)e^{mix}+Q(-x)e^{-mix}\}\,dx$ равен $2\pi i\sum R'$, где $\sum R'$ — сумма вычетов функции $Q(z)e^{miz}$ в ее полюсах, лежащих в верхней полуплоскости. Следовательно,

(I) если $Q(x)$ — четная функция, т. е. если $Q(-x)=Q(x)$, то

$$\int_0^{\infty} Q(x)\cos mx\,dx = \pi i\sum R';$$

(II) если $Q(x)$ — нечетная функция, то

$$\int_0^{\infty} Q(x)\sin mx\,dx = \pi\sum R'.$$

6.222. Лемма Жордана [1])

Результаты § 6.221 верны, если $Q(z)$ подчиняется менее ограничительному условию, именно: $Q(z)\to 0$ равномерно при $0\leqslant \arg z\leqslant\pi$, когда $|z|\to\infty$, вместо условия, что $zQ(z)\to 0$ равномерно.

Для доказательства этого нам необходима теорема, известная под названием леммы Жордана:

[1]) Jordan, Cours d'analyse, II, 285—286, 1894.

Если $Q(z) \to 0$ равномерно относительно $\arg z$, когда $z \to \infty$ в области $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, и если $Q(z)$ — аналитическая[1]*, когда $|z| > c$ (c — постоянная) и $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$, то*

$$\lim_{\rho \to \infty} \left(\int_{\Gamma} e^{miz} Q(z)\, dz \right) = 0,$$

где Γ — полуокружность радиуса ρ, лежащая над вещественной осью, с центром в начале координат, m — вещественное положительное число.

По данному ε выберем такое ρ_0, что $|Q(z)| < \frac{\varepsilon}{\pi}$, если $|z| > \rho_0$ и $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$; тогда при $\rho > \rho_0$ имеем

$$\left| \int_{\Gamma} e^{miz} Q(z)\, dz \right| = \left| \int_0^{\pi} e^{mi(\rho \cos \theta + i\rho \sin \theta)} Q(\rho e^{i\theta}) \rho e^{i\theta} i\, d\theta \right|.$$

Но $|e^{mi\rho \cos \theta}| = 1$, и таким образом,

$$\left| \int_{\Gamma} e^{miz} Q(z)\, dz \right| < \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon}{\pi} \rho e^{-m\rho \sin \theta} d\theta = 2\frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \rho e^{-m\rho \sin \theta} d\theta.$$

Далее, $\sin \theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$, когда $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$[2], и следовательно,

$$\left| \int_{\Gamma} e^{miz} Q(z)\, dz \right| < 2\frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \rho e^{-\frac{2m\rho\theta}{\pi}} d\theta = 2\frac{\varepsilon}{\pi} \frac{\pi}{2m} \left[-e^{-\frac{2m\rho\theta}{\pi}} \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} < \frac{\varepsilon}{m}.$$

Отсюда

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{\Gamma} e^{miz} Q(z)\, dz = 0.$$

Этот результат и есть лемма Жордана.

Далее,

$$\int_0^{\rho} \{ e^{mix} Q(x) + e^{-mix} Q(-x) \}\, dx = 2\pi i \sum R' - \int_{\Gamma} e^{miz} Q(z)\, dz,$$

[1]) Для самой леммы это условие излишне, оно нужно только для ее применения. (*Прим. ред.*)

[2]) Это неравенство становится очевидным, если вычертить графики кривых $y = \sin x$, $y = 2x/\pi$; его можно доказать, показав, что $(\sin \theta)/\theta$ уменьшается, когда θ возрастает от 0 до $\pi/2$.

и, заставляя $\rho \to \infty$, мы видим сразу, что

$$\int_0^\infty \{e^{mix}Q(x) + e^{-mix}Q(-x)\}\,dx = 2\pi i \sum R'$$

— результат, соответствующий результату § 6.221.

Пример 1. Показать, что при $a > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a}.$$

Пример 2. Показать, что при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}\,dx = \pi (b - a).$$

(Взять контур, состоящий из большой полуокружности радиуса ρ, малой полуокружности радиуса δ, обе с центром в начале координат, и из отрезков вещественной оси, соединяющих их концы; затем перейти к пределу, заставляя $\rho \to \infty$, $\delta \to 0$.)

Пример 3. Показать, что при $b > 0$, $m \geqslant 0$

$$\int_0^\infty \frac{3x^2 - a^2}{(x^2 + b^2)^2} \cos mx\,dx = \frac{\pi e^{-mb}}{4b^3} \{3b^2 - a^2 - mb(3b^2 + a^2)\}.$$

Пример 4. Показать, что при $k > 0$, $a > 0$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2}\,dx = \frac{1}{2} \pi e^{-ka}.$$

Пример 5. Показать, что при $m \geqslant 0$, $a > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(x^2 + a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2a^4} - \frac{\pi e^{-ma}}{4a^3}\left(m + \frac{2}{a}\right).$$

(Взять контур, как в примере 2.)

Пример 6. Показать, что если вещественная часть z положительна, то

$$\int_0^\infty (e^{-t} - e^{-tz}) \frac{dt}{t} = \lg z.$$

[Мы имеем

$$\int_0^\infty (e^{-t}-e^{-tz})\frac{dt}{t} = \lim_{\delta\to 0,\,\rho\to\infty}\left\{\int_\delta^\rho \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_\delta^\rho \frac{e^{-tz}}{t}\,dt\right\} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0,\,\rho\to\infty}\left\{\int_\delta^\rho \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_{\delta z}^{\rho z} \frac{e^{-u}}{u}\,du\right\} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0,\,\rho\to\infty}\left\{\int_\delta^{\delta z} \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_\rho^{\rho z} \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right\},$$

так как $t^{-1}e^{-1}$ — аналитическая внутри четырехугольника с вершинами δ, δz, ρz, ρ.

Далее, $\int_\rho^{\rho z} t^{-1}e^{-t}\,dt \to 0$ при $\rho\to\infty$, когда $\operatorname{Re} z > 0$, а

$$\int_\delta^{\delta z} t^{-1}e^{-t}\,dt = \lg z - \int_\delta^{\delta z} t^{-1}(1-e^{-t})\,dt \to \lg z,$$

так как $t^{-1}(1-e^{-t}) \to 1$ при $t\to 0$.]

6.23. Главные значения интегралов

В §§ 6.22, 6.221, 6.222 было предположено, что функция $Q(x)$ не имеет полюсов на вещественной оси; если функция имеет конечное число *простых* полюсов на вещественной оси, то мы можем получить теоремы, соответствующие уже полученным, с тем, однако, отличием, что теперь под интегралами понимаются их главные значения (§ 4.5), а $\sum R$ заменяется на $\sum R + \frac{1}{2}\sum R_0$, где $\sum R_0$ — сумма вычетов в полюсах на вещественной оси. Чтобы получить этот результат, мы должны вместо прежнего контура взять за контур ту же полуокружность радиуса ρ, отрезки вещественной оси, соединяющие точки

$$-\rho,\quad a-\delta_1;\quad a+\delta_1,\quad b-\delta_2;\quad b+\delta_2,\quad c-\delta_3;\ \ldots,$$

и малые полуокружности над вещественной осью радиусов $\delta_1, \delta_2, \ldots$ и с центрами в $a, b, c, \ldots$, где $a, b, c, \ldots$ — полюсы функции $Q(z)$ на вещественной оси, и затем заставить $\delta_1, \delta_2, \ldots \to 0$. Обозначим малые полуокружности через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$; тогда вместо соотношения

$$\int_{-\rho}^{\rho} Q(z)\,dz + \int_\Gamma Q(z)\,dz = 2\pi i \sum R$$

будем иметь

$$P\int_{-\rho}^{\rho} Q(z)\,dz + \sum_n \lim_{\delta_n\to 0}\int_{\gamma_n} Q(z)\,dz + \int_\Gamma Q(z)\,dz = 2\pi i\sum R.$$

Пусть a' — вычет функции $Q(z)$ в a; тогда, положив $z = a + \delta_1 e^{i\theta}$ на γ_1, мы получим

$$\int_{\gamma_1} Q(z)\,dz = \int_{\pi}^{0} Q(a + \delta_1 e^{i\theta})\,\delta_1 e^{i\theta}\, i d\theta.$$

Но $Q(a + \delta_1 e^{i\theta})\,\delta_1 e^{i\theta} \to a'$ равномерно, когда $\delta_1 \to 0$; поэтому

$$\lim_{\delta_1 \to 0} \int_{\gamma_1} Q(z)\,dz = -\pi i a'$$

и, таким образом,

$$P\int_{-\rho}^{\rho} Q(z)\,dz + \int_{\Gamma} Q(z)\,dz = 2\pi i \sum R + \pi i \sum R_0,$$

а отсюда, применяя рассуждения § 6.22, получим

$$P\int_{-\infty}^{\infty} Q(x)\,dx = 2\pi i \left(\sum R + \frac{1}{2}\sum R_0\right).$$

Легко убедиться, что теоремы §§ 6.221, 6.222 имеют совершенно такие же обобщения.

Метод, примененный выше и заключающийся в выделении дуг малых окружностей, называется методом *вырезания* контура.

6.24. Вычисление интегралов вида $\int_0^{\infty} x^{a-1} Q(x)\,dx$

Пусть $Q(x)$ — рациональная функция от x, не имеющая полюсов на положительной части вещественной оси, и $x^a Q(x) \to 0$ при $x \to 0$ и при $x \to \infty$.

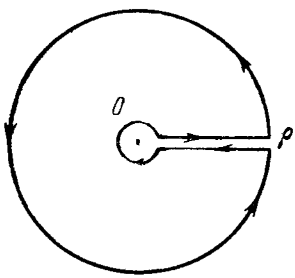

Рис. 1.

Рассмотрим интеграл $\int (-z)^{a-1} Q(z)\,dz$, взятый по контуру C, показанному на рис. 1 и состоящему из дуг окружностей радиусов ρ, δ и прямых линий, соединяющих их концы; $(-z)^{a-1}$ понимается как

$$\exp\{(a-1)\lg(-z)\},$$

где

$$\lg(-z) = \lg|z| + i\arg(-z),$$

а

$$-\pi \leqslant \arg(-z) \leqslant \pi;$$

при этих условиях подинтегральная функция будет однозначной и аналитической на контуре и внутри него, если не считать полюсов функции $Q(z)$.

Отсюда, если через $\sum r$ обозначим сумму вычетов выражения $(-z)^{a-1}Q(z)$ во всех его полюсах, то

$$\int\limits_C (-z)^{a-1}Q(z)\,dz = 2\pi i\sum r.$$

На малой окружности положим $-z=\delta e^{i\theta}$; тогда интеграл по ней будет равен $-\int\limits_{\pi}^{-\pi}(-z)^a Q(z)\,i\,d\theta$ и будет стремиться к нулю при $\delta\to 0$.

На большой окружности положим $-z=\rho e^{i\theta}$, интеграл по ней будет равен $-\int\limits_{-\pi}^{\pi}(-z)^a Q(z)\,i\,d\theta$ и будет стремиться к нулю при $\rho\to\infty$.

На одной из прямых положим $-z=xe^{\pi i}$, а на другой $-z=xe^{-\pi i}$; тогда $(-z)^{a-1}$ станет равной $x^{a-1}e^{\pm(a-1)\pi i}$.

Отсюда

$$\lim_{\delta\to 0,\,\rho\to\infty}\int\limits_{\delta}^{\rho}\left\{x^{a-1}e^{-(a-1)\pi i}Q(x)-x^{a-1}e^{(a-1)\pi i}Q(x)\right\}dx = 2\pi i\sum r,$$

а потому

$$\int\limits_0^\infty x^{a-1}Q(x)\,dx = \pi\operatorname{cosec} a\pi\sum r.$$

Следствие. Если $Q(x)$ имеет некоторое число простых полюсов на положительной части вещественной оси, то вырезанием контура можно показать, что

$$P\int\limits_0^\infty x^{a-1}Q(x)\,dx = \pi\operatorname{cosec} a\pi\sum r - \pi\operatorname{ctg} a\pi\sum r',$$

где $\sum r'$ — сумма вычетов функции $z^{a-1}Q(z)$ в этих полюсах.

Пример 1. Если $0<a<1$, то

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \pi\operatorname{cosec} a\pi,\qquad P\int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx = \pi\operatorname{ctg} a\pi.$$

Пример 2. Если $0<z<1$ и $-\pi<\alpha<\pi$, то

$$\int\limits_0^\infty \frac{t^{z-1}}{t+e^{i\alpha}}\,dt = \frac{\pi e^{i(z-1)\alpha}}{\sin\pi z}.$$

(Minding)

Пример 3. Показать, что при $-1 < z < 3$

$$\int_0^\infty \frac{x^z}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{\pi(1-z)}{4\cos\frac{1}{2}\pi z}.$$

Пример 4. Показать, что при $-1 < p < 1$ и $-\pi < \lambda < \pi$

$$\int_0^\infty \frac{x^{-p}\,dx}{1+2x\cos\lambda + x^2} = \frac{\pi}{\sin p\pi}\,\frac{\sin p\lambda}{\sin\lambda}.$$

(Euler)

6.3. Интегралы Коши

Рассмотрим класс контурных интегралов, которые нередко полезны при аналитических исследованиях.

Пусть C — контур в плоскости z, а $f(z)$ — функция, аналитическая внутри и на самом контуре C. Пусть $\varphi(z)$ — другая функция, аналитическая внутри и на самом контуре, за исключением конечного числа полюсов; пусть $a_1, a_2, \ldots$ — нули функции $\varphi(z)$, лежащие внутри C [1]), $r_1, r_2, \ldots$ — их кратности; пусть, далее, $b_1, b_2, \ldots$ — полюсы этой функции внутри C, а $s_1, s_2, \ldots$ — их порядки.

Тогда по основной теореме о вычетах $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz$ будет равен сумме вычетов функции $\frac{f(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ в ее полюсах, лежащих внутри C.

Но $\frac{f(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ может иметь особые точки только в полюсах и в нулях функции $\varphi(z)$. Вблизи одного из нулей, например a_1, мы имеем

$$\varphi(z) = A(z-a_1)^{r_1} + B(z-a_1)^{r_1+1} + \ldots$$

Поэтому

$$\varphi'(z) = Ar_1(z-a_1)^{r_1-1} + B(r_1+1)(z-a_1)^{r_1} + \ldots$$

и

$$f(z) = f(a_1) + (z-a_1)f'(a_1) + \ldots,$$

следовательно, функция $\frac{f(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{r_1 f(a_1)}{z-a_1}$ будет аналитической в точке a_1, и значит вычет функции $\frac{f(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ в этой точке будет равен $r_1 f(a_1)$.

Подобным же образом вычет при $z=b_1$ равен $-s_1 f(b_1)$, ибо вблизи $z=b_1$ мы имеем

$$\varphi(z) = C(z-b_1)^{-s_1} + D(z-b_1)^{-s_1+1} + \ldots,$$
$$f(z) = f(b_1) + (z-b_1)f'(b_1) + \ldots,$$

и таким образом, функция $\frac{f(z)\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{s_1 f(b_1)}{z-b_1}$ будет аналитической в точке b_1.

[1]) $\varphi(z)$ не должна иметь ни нулей, ни полюсов на C.

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0} f(z)\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz = \sum r_1 f(a_1) - \sum s_1 f(b_1),$$

причем суммирование распространяется на все нули и полюсы функции $\varphi(z)$.

6.31. Число корней уравнения, содержащихся внутри контура

Результат предыдущего параграфа сразу может быть применен к нахождению числа корней уравнения $\varphi(z)=0$, лежащих внутри контура C.

Ибо, положив $f(z)=1$ в предыдущем результате, мы получим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz$$

равно избытку числа нулей над числом полюсов функции $\varphi(z)$, содержащихся внутри C, считая каждый полюс и нуль соответственно их кратности.

Пример 1. Показать, что полином $\varphi(z)$ степени m имеет m корней. Пусть

$$\varphi(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m \qquad (a_0 \neq 0).$$

Тогда

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{m a_0 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1}}{a_0 z^m + \ldots + a_m}.$$

Следовательно, для больших значений $|z|$

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{m}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Таким образом, если C — окружность радиуса ρ с центром в начале координат, мы получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz = \frac{m}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{dz}{z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} O\left(\frac{1}{z^2}\right)dz = m + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} O\left(\frac{1}{z^2}\right)dz.$$

Но, как в § 6.22,

$$\int\limits_{C} O\left(\frac{1}{z^2}\right)dz \to 0$$

при $\rho \to \infty$, и, поскольку $\varphi(z)$ не имеет полюсов внутри C, общее число нулей функции $\varphi(x)$ равно

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz = m.$$

Пример 2. Если во всех точках контура C справедливо неравенство

$$|a_k z^k| > |a_0 + a_1 z + \ldots + a_{k-1} z^{k-1} + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots + a_m z^m|,$$

то контур содержит k корней уравнения

$$a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Действительно, обозначим

$$f(z)=a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\ \dots\ +a_1 z+a_0,$$

тогда

$$f(z)=a_k z^k\left(1+\frac{a_m z^m+\ \dots\ +a_{k+1}z^{k+1}+a_{k-1}z^{k-1}+\ \dots +a_0}{a_k z^k}\right)=$$
$$=a_k z^k(1+U),$$

где $|U|\leqslant a<1$ на контуре и a не зависит от z [1]).

Поэтому число корней функции $f(z)$, содержащихся в C, равно

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\left(\frac{k}{z}+\frac{1}{1+U}\,\frac{dU}{dz}\right)dz.$$

Но $\int\limits_C \frac{dz}{z}=2\pi i$; далее, так как $|U|\leqslant a$, то мы можем разложить $(1+U)^{-1}$ в равномерно сходящийся ряд

$$1-U+U^2-U^3+\ \dots,$$

и таким образом,

$$\int\limits_C \frac{1}{1+U}\,\frac{dU}{dz}\,dz=\left[U-\frac{1}{2}U^2+\frac{1}{3}U^3-\ \dots\right]_C=0.$$

Поэтому число корней, содержащихся в C, равно k.

Пример 3. Найти, сколько корней уравнения

$$z^6+6z+10=0$$

содержится в каждом квадранте комплексной плоскости.

(Clare, 1900)

6.4. Связь между нулями функции и нулями ее производной

Макдональд [2]) показал, что *если $f(z)$ — функция от z, аналитическая внутри простого замкнутого контура C, определяемого уравнением $|f(z)|=M$, где M — постоянная, то число нулей функции $f(z)$ в этой области превосходит число нулей производной $f'(z)$ в той же самой области на единицу.*

На C можем написать $f(z)=Me^{i\theta}$; тогда в точках контура C

$$f'(z)=Me^{i\theta}i\,\frac{d\theta}{dz},\quad f''(z)=Me^{i\theta}\left\{i\,\frac{d^2\theta}{dz^2}-\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2\right\}.$$

---

[1]) $|U|$ — непрерывная функция от z на C, и таким образом, она *достигает* своей верхней границы (§ 3.62). Поэтому ее верхняя граница a должна быть меньше 1.

[2]) Macdonald, Proc. London Math. Soc., XXIX, 576—577 (1898).

Согласно § 6.31 избыток числа нулей функции $f(z)$ над числом нулей производной $f'(z)$ внутри C [1]) будет равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f''(z)}{f'(z)}\,dz=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \left(\frac{d^2\theta}{dz^2}\Big/\frac{d\theta}{dz}\right)dz.$$

Пусть s — дуга на C, измеряемая от определенной точки, и пусть ψ — угол касательной к C с осью Ox; тогда

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \left(\frac{d^2\theta}{dz^2}\Big/\frac{d\theta}{dz}\right)dz=-\frac{1}{2\pi i}\left[\lg\frac{d\theta}{dz}\right]_C=-\frac{1}{2\pi i}\left[\lg\frac{d\theta}{ds}-\lg\frac{dz}{ds}\right]_C.$$

Далее, $\lg\frac{d\theta}{ds}$ есть чисто вещественная величина, начальное и конечное значения которой совпадают, а $\lg\frac{dz}{ds}=i\psi$; поэтому избыток числа нулей функции $f(z)$ над числом нулей $f'(z)$ равен приращению $\frac{\psi}{2\pi}$ при обходе кривой C; вполне очевидно [2]), что если C — обыкновенная кривая, то ψ возрастает на 2π, когда точка касания касательной описывает кривую C, что и доказывает теорему.

Пример 1. Вывести из результата Макдональда теорему, что полином степени n имеет n нулей.

Пример 2. Показать, что если полином $f(z)$ имеет вещественные коэффициенты и если все нули его вещественны и различны, то между двумя последовательными нулями полинома $f(z)$ лежит один и только один нуль его производной $f'(z)$.

[Полиа указал, что этот результат не обязательно справедлив для функций, отличных от полиномов, что можно видеть на примере функции $(z^2-4)\exp(z^2/3)$.]

ЛИТЕРАТУРА

M. C. Jordan, Cours d'analyse, II, гл. VI, Paris, 1894.
Э. Гурса, Курс математического анализа, гл. XIV, ОНТИ, 1936.
E. Lindelöf, Le Calcul des résidus, гл. II, Paris, 1905.

Примеры

1. Пусть $\varphi(z)$ равна нулю при $z=0$, вещественна прн z вещественном и аналитична в круге $|z|\leqslant 1$, и пусть $f(x, y)$ — коэффициент при i

[1]) $f'(z)$ не может равняться нулю на C, если C не имеет ни кратной, ни какой-либо другой особой точки, ибо если $f=\varphi+i\psi$, где φ и ψ вещественны, то в силу $i\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$ очевидно, что при $f'(z)=0$ в какой-либо точке $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ все равняются нулю, а это и является достаточным условием для особой точки на

$$\varphi^2+\psi^2=M^2.$$

[2]) Относительно точного доказательства см. Proc. London Math. Soc. (2), XV, 227—242 (1916).

в $\varphi(x+iy)$; показать, что при $-1<x<1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} f(\cos\theta,\ \sin\theta)\,d\theta = \pi\varphi'(x).$$

(Trinity, 1898)

2. Интегрируя $\dfrac{e^{\pm aiz}}{e^{2\pi z}-1}$ по контуру прямоугольника с вершинами 0, R, $R+i$, i (причем прямоугольник вырезан при 0 и i) и заставляя $R\to\infty$, показать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}\,dx = \frac{1}{4}\,\frac{e^a+1}{e^a-1} - \frac{1}{2a}.$$

(Legendre)

3. Интегрируя по контуру § 6.24 функцию $\lg(-z)\,Q(z)$, где $Q(z)$ — такая рациональная функция, что $zQ(z)\to 0$, когда $|z|\to 0$ и когда $|z|\to\infty$, показать, что если $Q(z)$ не имеет полюсов на положительной части вещественной оси, то $\int\limits_0^{\infty} Q(x)dx$ равен минус сумме вычетов функции $\lg(-z)Q(z)$ в полюсах функции $Q(z)$; здесь мнимая часть выражения $\lg(-z)$ берется между $\pm\pi$.

4. Показать, что при $a>0$, $b>0$

$$\int_0^{\infty} e^{a\cos bx}\sin(a\sin bx)\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\pi(e^a-1).$$

5. Показать, что

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{a\sin 2x}{1-2a\cos 2x+a^2}\,x\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\pi\lg(1+a) & \text{при}\quad -1<a<1, \\[2mm] \dfrac{1}{4}\pi\lg(1+a^{-1}) & \text{при}\quad a^2>1. \end{cases}$$

(Cauchy)

6. Показать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\varphi_1 x}{x}\,\frac{\sin\varphi_2 x}{x}\cdots\frac{\sin\varphi_n x}{x}\cos a_1x\ldots\cos a_mx\,\frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, a_1, a_2, \ldots, a_m$ — вещественные, a — положительная величина и

$$a > |\varphi_1| + |\varphi_2| + \ldots + |\varphi_n| + |a_1| + \ldots + |a_m|.$$

(Strömer, Acta Math., XIX)

7. Если точка z описывает окружность C с центром a и если $f(z)$ — аналитическая на C и внутри нее, за исключением некоторого числа полюсов внутри C, то точка $u=f(z)$ опишет замкнутую кривую γ в плоскости u. Показать, что если каждому элементу кривой γ приписывается масса, пропорциональная соответствующему элементу окружности C, то центром тя-

жести γ будет точка r, где r — сумма вычетов функции $\frac{f(z)}{z-a}$ в ее полюсах, лежащих внутри C.

(Amigues, Nouv. Ann. de Math., (3), XII, стр. 142—148 (1893))

8. Показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+b^2)(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi(2a+b)}{2a^3b(a+b)^2}.$$

9. Показать, что

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n} = \frac{\pi}{2^n b^{1/2}} \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-3)}{1\cdot 2 \ldots (n-1)} \frac{1}{a^{n-\frac{1}{2}}}.$$

10. Пусть $F_n(z) = \prod\limits_{m=1}^{n-1} \prod\limits_{p=1}^{n-1} (1-z^{mp})$; показать, что ряд

$$f(z) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n(zn^{-1})}{(z^n n^{-n}-1)\, n^{n-1}}$$

будет аналитической функцией при значениях z, не равных ни одному из корней уравнений $z^n = n^n$, и что сумма вычетов функции $f(z)$ в полюсах, лежащих в кольце между двумя окружностями с центрами в начале координат и радиусами, из которых один мал, а другой заключается между n и $n+1$, будет равна числу простых чисел, меньших $n+1$.

(Laurent, Nouv. Ann. de Math. (3), XVIII, 234—241 (1899))

11. Пусть A и B представляют на комплексной плоскости два данных корня (вещественных или комплексных) уравнения $f(z)=0$ степени n с вещественными или комплексными коэффициентами; показать, что имеется по крайней мере один корень уравнения $f'(z)=0$ внутри окружности, центром которой служит середина отрезка AB и радиус которой равен $\frac{1}{2} AB \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$.

(Grace, Proc. Camb. Phil. Soc., XI)

12. Показать, что при $0<\nu<1$

$$\frac{e^{2\pi i \nu x}}{1-e^{2\pi i x}} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \frac{e^{2k\nu\pi i}}{k-x}.$$

[Рассмотреть $\int \frac{e^{(2\nu-1)z\pi i}}{\sin \pi z} \frac{dz}{z-x}$, взятый по окружности радиуса $n+\frac{1}{2}$, и перейти к пределу, устремив $n\to\infty$.]

(Kronecker, Journal für Math., CV)

13. Показать, что при $m>0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^n mt}{t^n}\,dt=\frac{\pi m^{n-1}}{2^n(n-1)!}\left\{n^{n-1}-\frac{n}{1}(n-2)^{n-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)}{2!}(n-4)^{n-1}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(n-6)^{n-1}+\ldots\right\}.$$

Исследовать разрыв интеграла при $m=0$.

14. Пусть $A+B+C+\ldots=0$ и a, b, $c,\ldots$ — положительные величины; показать, что

$$\int_0^\infty \frac{A\cos ax+B\cos bx+\ldots+K\cos kx}{x}\,dx=$$
$$=-A\lg a-B\lg b-\ldots-K\lg k.$$

(Wolstenholme)

15. Рассматривая $\int \frac{e^{x(k+ti)}}{k+ti}\,dt$, взятый по прямоугольнику, вырезанному в начале координат, показать, что при $k>0$

$$i\lim_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho}\frac{e^{x(k+ti)}}{k+ti}\,dt=\pi i+\lim_{\rho\to\infty}P\int_{-\rho}^{\rho}\frac{e^{xti}}{t}\,dt,$$

и вывести отсюда, пользуясь контуром примера 2 § 6.222 или его отражением относительно вещественной оси (смотря по тому, будет ли $x\geqslant 0$ или $x<0$), что

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\rho}^{\rho}\frac{e^{x(k+ti)}}{k+ti}\,dt=2,\ 1\ \text{или}\ 0,$$

смотря по тому, будет ли $x>0$, $x=0$ или $x<0$. [Этот интеграл известен под названием *разрывного множителя Коши.*]

16. Показать, что при $0<a<2$, $b>0$, $r>0$

$$\int_0^\infty x^{a-1}\sin\left(\frac{1}{2}a\pi-bx\right)\frac{r\,dx}{x^2+r^2}=\frac{1}{2}\pi r^{a-1}e^{-br}.$$

17. Пусть $t>0$, и пусть $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2\pi t}=\psi(t)$.

Рассматривая интеграл $\int\frac{e^{-z^2\pi t}}{e^{2\pi iz}-1}\,dz$, взятый по прямоугольнику с вершинами в точках $\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)\pm i$, где N — целое число, и заставляя $N\to\infty$, показать, что

$$\psi(t)=\int_{-\infty-i}^{\infty-i}\frac{e^{-z^2\pi t}}{e^{2\pi iz}-1}\,dz-\int_{-\infty+i}^{\infty+i}\frac{e^{-z^2\pi t}}{e^{2\pi iz}-1}\,dz.$$

Разложением подинтегральных функций соответственно по степеням $e^{-2\pi iz}$, $e^{2\pi iz}$ и почленным интегрированием вывести, пользуясь примером 3 § 6.22, что

$$\psi(t)=\frac{1}{(\pi t)^{1/2}}\psi\left(\frac{1}{t}\right)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\,dx.$$

Отсюда, положив $t=1$, показать, что $\psi(t)=t^{-1/2}\psi\left(\frac{1}{t}\right)$.

Этот результат принадлежит Пуассону (Poisson, Journal de l'Ecole polytechnique, XII, тетрадь XIX, 420 (1823)); см. также Jacobi, Journal für Math., XXXVI, 109 (1898), Ges. Werke, II, 188, 1882).

18. Показать, что при $t>0$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2\pi t-2n\pi at}=t^{-\frac{1}{2}}e^{\pi a^2t}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi}{t}}\cos 2n\pi a\right\}$$

(Poisson, Mém. de l'Acad. des Sci., VI, 592 (1827); Jacobi, Journal für Math., III, 403—404 (1828), Ges. Werke, I, 264—265, 1881 и Landsberg, Journal für Math., CXI, 234—253 (1893), см. также § 21.51).

ГЛАВА 7

РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

7.1. Формула Дарбу [1])

Пусть $f(z)$ — аналитическая во всех точках отрезка, соединяющего a с z, и $\varphi(t)$ — произвольный полином степени n от t.

Тогда при $0 \leqslant t \leqslant 1$ дифференцированием получаем

$$\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{n}(-1)^m (z-a)^m \varphi^{(n-m)}(t) f^{(m)}[a+t(z-a)] =$$
$$= -(z-a)\varphi^{(n)}(t) f'[a+t(z-a)] +$$
$$+(-1)^n (z-a)^{n+1}\varphi(t) f^{(n+1)}[a+t(z-a)].$$

Замечая, что $\varphi^{(n)}(t)$ — постоянная, равная $\varphi^{(n)}(0)$, и интегрируя по t от 0 до 1, получим

$$\varphi^{(n)}(0)\{f(z)-f(a)\} =$$
$$= \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}(z-a)^m \{\varphi^{(n-m)}(1) f^{(m)}(z) - \varphi^{(n-m)}(0) f^{(m)}(a)\} +$$
$$+(-1)^n (z-a)^{n+1}\int_0^1 \varphi(t) f^{(n+1)}[a+t(z-a)]\,dt,$$

что и представляет собой искомую формулу.

Ряд Тейлора можно получить как частный случай этой формулы, положив в ней $\varphi(t) = (t-1)^n$ и заставляя $n \to \infty$.

Пример. Заменяя в формуле Дарбу n на $2n$ и беря $\varphi(t) = t^n(t-1)^n$, получить разложение (предполагая, что оно сходится)

$$f(z) - f(a) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(z-a)^n}{2^n n!}\{f^{(n)}(z) + (-1)^{n-1} f^{(n)}(a)\}$$

и найти выражение n-го остаточного члена.

---

[1]) Darboux, Journal de Math. (3), II, 271 (1876).

7.2. Числа и полиномы Бернулли

Функция $\frac{1}{2}z\operatorname{ctg}\frac{1}{2}z$ — аналитическая при $|z|<2\pi$, и так как она четная, то может быть разложена в ряд Маклорена следующим образом:

$$\frac{1}{2}z\operatorname{ctg}\frac{1}{2}z=1-B_1\frac{z^2}{2!}-B_2\frac{z^4}{4!}-B_3\frac{z^6}{6!}-\ldots$$

Коэффициент B_n называется n-м *числом Бернулли*[1]).

Можно показать, что[2])

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\quad B_5=\frac{5}{66},\ \ldots$$

Эти числа могут быть выражены определенными интегралами.

В самом деле, согласно примеру 2 гл. 6 (стр. 172)

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin px\,dx}{e^{\pi x}-1}=-\frac{1}{2p}+\frac{i}{2}\operatorname{ctg}ip=$$
$$=-\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p}\left\{1+B_1\frac{(2p)^2}{2!}-B_2\frac{(2p)^4}{4!}+\ldots\right\}.$$

Но поскольку интеграл

$$\int\limits_0^\infty\frac{x^n\sin\left(px+\frac{1}{2}n\pi\right)}{e^{\pi x}-1}\,dx$$

равномерно сходится (по признаку Валле-Пуссена) вблизи $p=0$, то по следствию § 4.44 мы можем дифференцировать обе части этого соотношения любое число раз и затем положить $p=0$; проделав это и положив $2t=x$, получим

$$B_n=4n\int\limits_0^\infty\frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Другое доказательство этой формулы, основанное на интегрировании по контуру, дано Карда (C a r d a, Monatshefte für Math. und Phys., V, 321—324 (1894)).

П р и м е р. Показать, что

$$B_n=\frac{2n}{\pi^{2n}(2^{2n}-1)}\int\limits_0^\infty\frac{x^{2n-1}dx}{\operatorname{sh}x}>0.$$

---

1) Эти числа были введены Яковом Бернулли (Jakob Bernoulli) в его «Ars Conjectandi», стр. 97 (опубликовано после его смерти, 1713).

2) Таблицы первых шестидесяти двух чисел Бернулли даны Адамсом (A d a m s, Brit. Ass. Reports, 1877); первые девять значащих цифр первых 250 чисел Бернулли были потом опубликованы Глешером (G l a i s h e r, Trans. Camb. Phil. Soc., XII, 384—391 (1879)).

Рассмотрим теперь функцию $t\dfrac{e^{zt}-1}{e^t-1}$, которую можно разложить в ряд Маклорена по степеням t при $|t|<2\pi$.

Полином Бернулли[1]) *порядка n* определяется как коэффициент при $\dfrac{t^n}{n!}$ в этом разложении. Он обозначается через $\varphi_n(z)$, так что

$$t\frac{e^{zt}-1}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(z)\,t^n}{n!}.$$

Эти полиномы обладают многочисленными важными свойствами. Заменяя z на $z+1$ в предыдущем соотношении и вычитая первоначальное выражение из вновь полученного, найдем, что

$$te^{zt}=\sum_{n=1}^{\infty}\{\varphi_n(z+1)-\varphi_n(z)\}\frac{t^n}{n!}.$$

Сравнивая коэффициенты при t^n в обеих частях этого равенства, получим

$$nz^{n-1}=\varphi_n(z+1)-\varphi_n(z),$$

что представляет собой уравнение в конечных разностях, которому удовлетворяет функция $\varphi_n(z)$.

Явное выражение для полиномов Бернулли может быть получено следующим образом. Мы имеем

$$e^{zt}-1=zt+\frac{z^2t^2}{2!}+\frac{z^3t^3}{3!}+\ldots$$

и

$$\frac{t}{e^t-1}=\frac{t}{2i}\operatorname{ctg}\frac{t}{2i}-\frac{t}{2}=1-\frac{t}{2}+\frac{B_1t^2}{2!}-\frac{B_2t^4}{4!}+\ldots$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(z)\,t^n}{n!}=\left\{zt+\frac{z^2t^2}{2!}+\frac{z^3t^3}{3!}+\ldots\right\}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{t}{2}+\frac{B_1t^2}{2!}-\frac{B_2t^4}{4!}+\ldots\right\}.$$

Сравнивая коэффициенты при t^n (§ 3.73), получим

$$\varphi_n(z)=z^n-\frac{1}{2}nz^{n-1}+C_n^2B_1z^{n-2}-C_n^4B_2z^{n-4}+C_n^6B_3z^{n-6}-\ldots;$$

последним будет член с z или с z^2, а C_n^2, C_n^4, … — биномиальные коэффициенты; это выражение представляет собой ряд Маклорена для n-го полинома Бернулли.

---

[1]) Это название было дано Раабе (Raabe, Journal für Math., XLII, 348 (1851)). Подробный обзор свойств полиномов Бернулли дан Нёрлундом [Nörlund, Acta Math., XLIII, 121—196 (1920)].

Если z — целое число, то из уравнения в конечных разностях получается

$$\frac{\varphi_n(z)}{n} = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + (z-1)^{n-1}.$$

Ряд Маклорена для выражения в правой части был дан Бернулли.

Пример. Показать, что при $n > 1$

$$\varphi_n(z) = (-1)^n \varphi_n(1-z).$$

7.21. Разложение Эйлера—Маклорена

В формуле Дарбу (§ 7.1) за $\varphi(t)$ примем $\varphi_n(t)$, где $\varphi_n(t)$ — n-й полином Бернулли.

Дифференцируя равенство

$$\varphi_n(t+1) - \varphi_n(t) = nt^{n-1}$$

$n-k$ раз, будем иметь

$$\varphi_n^{(n-k)}(t+1) - \varphi_n^{(n-k)}(t) = n(n-1)\ldots kt^{k-1}.$$

Положив $t=0$, получим $\varphi_n^{(n-k)}(1) = \varphi_n^{(n-k)}(0)$. Из ряда Маклорена для $\varphi_n(z)$ имеем при $k > 0$

$$\varphi_n^{(n-2k-1)}(0) = 0, \qquad \varphi_n^{(n-2k)}(0) = (-1)^{k-1}\frac{n!}{(2k)!}B_k,$$

$$\varphi_n^{(n-1)}(0) = -\frac{1}{2}n!, \qquad \varphi_n^{(n)}(0) = n!$$

Подставляя эти значения для $\varphi_n^{(n-k)}(0)$ и $\varphi_n^{(n-k)}(1)$ в формулу Дарбу, получим формулу Эйлера — Маклорена[1])

$$(z-a)f'(a) = f(z) - f(a) - \frac{z-a}{2}\{f'(z) - f'(a)\} + \\ + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^{m-1}B_m(z-a)^{2m}}{(2m)!}\{f^{(2m)}(z) - f^{(2m)}(a)\} - \\ - \frac{(z-a)^{2n+1}}{(2n)!}\int_0^1 \varphi_{2n}(t)\,f^{(2n+1)}\{a+(z-a)t\}\,dt.$$

---

[1]) История формулы дается у Барнса (Barnes, Proc. London Math. Soc. (2), III, 253 (1905)). Она была открыта Эйлером (1732), но своевременно не была опубликована. Эйлер сообщил ее (9 июня 1736) Стирлингу, который ответил (16 апреля 1738), что она включает его собственную теорему (см. § 12.33) как частный случай, а также, что общая теорема открыта Маклореном; Эйлер в пространном ответе отказывается от приоритета. Теорема была опубликована Эйлером (Euler, Comm. Acad. Imp. Petrop., VI, 68—97 (1732), вышло из печати в 1738) и Маклореном в 1742 г. (Maclaurin, Treatise on fluxions, стр. 672). Информацией относительно корреспонденции между Эйлером и Стирлингом мы обязаны Туиди (C. Tweedie).

В некоторых случаях последний член стремится к нулю, когда $n \to \infty$, и мы можем, таким образом, получить бесконечный ряд для $f(z) - f(a)$.

Написав ω вместо $z - a$ и $F(x)$ вместо $f'(x)$, перепишем последнюю формулу в виде

$$\int_a^{a+\omega} F(x)\,dx = \frac{1}{2}\omega\{F(a) + F(a+\omega)\} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^m B_m \omega^{2m}}{(2m)!} \{F^{(2m-1)}(a+\omega) - F^{(2m-1)}(a)\} + \frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi_{2n}(t) F^{(2n)}(a+\omega t)\,dt.$$

Если напишем в этой формуле $a+\omega$, $a+2\omega$, $a+(r-1)\omega$ вместо a и сложим, то получим

$$\int_a^{a+r\omega} F(x)\,dx = \omega\left\{\frac{1}{2} F(a) + F(a+\omega) + F(a+2\omega) + \ldots + \frac{1}{2} F(a+r\omega)\right\} + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^m B_m \omega^{2m}}{(2m)!} \{F^{(2m-1)}(a+r\omega) - F^{(2m-1)}(a)\} + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{\omega^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi_{2n}(t) \left\{\sum_{m=0}^{r-1} F^{(2n)}(a+m\omega+\omega t)\right\} dt.$$

Эта последняя формула весьма важна для численного вычисления определенных интегралов. Она годна в случае, когда $F(x)$ — аналитическая во всех точках отрезка, соединяющего a с $a+r\omega$.

Пример 1. Пусть $f(z)$ — нечетная функция от z; показать, что

$$zf'(z) = f(z) + \sum_{m=2}^{n} (-1)^m \frac{B_{m-1}(2z)^{2m-2}}{(2m-2)!} f^{(2m-2)}(z) - \frac{2^{2n} z^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi_{2n}(t) f^{(2n+1)}(-z+2zt)\,dt.$$

Пример 2. Показать интегрированием по частям, что остаточный член после n членов разложения $\frac{1}{2} z \operatorname{ctg} \frac{1}{2} z$ может быть представлен в форме

$$\frac{(-1)^{n-1} z^{2n+1}}{(2n)! \sin z} \int_0^1 \varphi_{2n}(t) \cos zt \, dt.$$

(Math. Trip. 1904)

7.3. Теорема Бюрмана[1])

Рассмотрим теперь несколько теорем, цель которых — *разложение некоторой функции по степеням другой функции.*

Пусть $\varphi(z)$ — аналитическая функция от z в замкнутой области S; пусть, далее, a будет внутренней точкой этой области и

$$\varphi(a) = b.$$

Предположим также, что $\varphi'(a) \neq 0$. Тогда теорема Тейлора дает разложение

$$\varphi(z) - b = \varphi'(a)(z-a) + \frac{\varphi''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots,$$

и если является законным обращение этого ряда, то мы получим ряд

$$z - a = \frac{1}{\varphi'(a)}\{\varphi(z) - b\} - \frac{1}{2}\frac{\varphi''(a)}{\{\varphi'(a)\}^3}\{\varphi(z) - b\}^2 + \ldots,$$

выражающий z как аналитическую функцию переменной $\{\varphi(z) - b\}$ для достаточно малых значений $|z - a|$. Если теперь $f(z)$ — аналитическая функция вблизи $z = a$, то отсюда следует, что $f(z)$ будет также аналитической функцией от $\{\varphi(z) - b\}$ при $|z - a|$ достаточно малом; таким образом, мы будем иметь разложение вида

$$f(z) = f(a) + a_1\{\varphi(z) - b\} + \frac{a_2}{2!}\{\varphi(z) - b\}^2 + \frac{a_3}{3!}\{\varphi(z) - b\}^3 + \ldots$$

Коэффициенты этого разложения даются следующей теоремой, известной под названием *теоремы Бюрмана.*

Пусть $\psi(z)$ — функция от z, определяемая формулой

$$\psi(z) = \frac{z - a}{\varphi(z) - b},$$

тогда аналитическая функция $f(z)$ может быть представлена в определенной области значений z в виде

$$f(z) = f(a) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\{\varphi(z) - b\}^m}{m!} \frac{d^{m-1}}{da^{m-1}}[f'(a)\{\psi(a)\}^m] + R_n,$$

---

[1]) Bürmann, Mémoires de l'Institut, II, 13 (1799). См. также Dixon, Proc. London Math. Soc., XXXIV, 151—153 (1902).

где

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_a^z \int_\gamma \left[\frac{\varphi(z)-b}{\varphi(t)-b}\right]^{n-1} \frac{f'(t)\,\varphi'(z)\,dt\,dz}{\varphi(t)-\varphi(z)}$$

и γ — контур на плоскости t, содержащий внутри точки a и z и такой, что если ζ будет какой-либо точкой внутри него, то уравнение $\varphi(t)=\varphi(\zeta)$ не имеет иных корней ни на контуре, ни внутри него, кроме[1]) *простого корня $t=\zeta$.*

Переходя к доказательству, имеем

$$f(z)-f(a)=\int_a^z f'(\zeta)\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_a^z\int_\gamma \frac{f'(t)\,\varphi'(\zeta)\,dt\,d\zeta}{\varphi(t)-\varphi(\zeta)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_a^z\int_\gamma \frac{f'(t)\,\varphi'(\zeta)\,dt\,d\zeta}{\varphi(t)-b}\left[\sum_{m=0}^{n-2}\left\{\frac{\varphi(\zeta)-b}{\varphi(t)-b}\right\}^m+\right.$$

$$\left.+\frac{\{\varphi(\zeta)-b\}^{n-1}}{\{\varphi(t)-b\}^{n-2}\{\varphi(t)-\varphi(\zeta)\}}\right].$$

Но согласно § 4.3

$$\frac{1}{2\pi i}\int_a^z\int_\gamma \left[\frac{\varphi(\zeta)-b}{\varphi(t)-b}\right]^m \frac{f'(t)\,\varphi'(\zeta)\,dt\,d\zeta}{\varphi(t)-b}=$$

$$=\frac{\{\varphi(z)-b\}^{m+1}}{2\pi i\,(m+1)}\int_\gamma \frac{f'(t)\,dt}{\{\varphi(t)-b\}^{m+1}}=$$

$$=\frac{\{\varphi(z)-b\}^{m+1}}{2\pi i\,(m+1)}\int_\gamma \frac{f'(t)\,\{\psi(t)\}^{m+1}\,dt}{(t-a)^{m+1}}=$$

$$=\frac{\{\varphi(z)-b\}^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{d^m}{da^m}\left[f'(a)\,\{\psi(a)\}^{m+1}\right].$$

Поэтому, заменяя m на $m-1$, получим

$$f(z)=f(a)+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{\{\varphi(z)-b\}^m}{m!}\,\frac{d^{m-1}}{da^{m-1}}\left[f'(a)\,\{\psi(a)\}^m\right]+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_a^z\int_\gamma \left[\frac{\varphi(\zeta)-b}{\varphi(t)-b}\right]^{n-1}\frac{f'(t)\,\varphi'(\zeta)\,dt\,d\zeta}{\varphi(t)-\varphi(\zeta)}.$$

---

[1]) Предполагается, что такой контур может быть выбран, если $|z-a|$ будет достаточно малым; см. § 7.31.

Если последний интеграл стремится к нулю, когда $n \to \infty$, то мы можем правую часть этого соотношения записать в виде бесконечного ряда.

Пример 1. Доказать, что

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} C_n (z-a)^n e^{n(z^2-a^2)}}{n!},$$

где

$$C_n = (2na)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1!}(2na)^{n-3} + \\ + \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2!}(2na)^{n-5} - \dots$$

Чтобы получить это разложение, положим в разложении Бюрмана

$$f(z) = z, \quad \varphi(z) - b = (z-a)e^{z^2-a^2}, \quad \psi(z) = e^{a^2-z^2};$$

тогда будем иметь

$$z = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(z-a)^n e^{n(z^2-a^2)} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{n(a^2-z^2)} \right\}_{z=a}.$$

Но, положив $z = a + t$, получим $\left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{n(a^2-z^2)} \right\}_{z=a} = \left\{ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} e^{-n(2at+t^2)} \right\}_{t=0} =$

$= (n-1)! \times$ коэффициент при t^{n-1} в разложении функции $e^{-nt(2a+t)} =$

$$= (n-1)! \times \text{коэффициент при } t^{n-1} \text{ в } \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r n^r t^r (2a+t)^r}{r!} =$$

$$= (n-1)! \times \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r n^r (2a)^{2r-n+1}}{(n-1-r)!\,(2r-n+1)!}.$$

Наибольшим значением r, принимаемым в сумме, будет $r = n-1$. Располагая поэтому сумму по убывающим индексам r, начиная с $r = n-1$, получим

$$\left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} e^{n(a^2-z^2)} \right\}_{z=a} = \\ = (-1)^{n-1} \left\{ (2na)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1!}(2na)^{n-3} + \dots \right\} = (-1)^{n-1} C_n,$$

что и дает требуемый результат.

Пример 2. Получить разложение

$$z^2 = \sin^2 z + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin^4 z + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3} \sin^6 z + \dots$$

Пример 3. Пусть прямая p проходит через начало координат на плоскости z перпендикулярно к прямой, соединяющей начало координат с какой-либо точкой a. Показать, что если z — любая точка на плоскости z, лежащая с той же самой стороны от прямой p, что и a, то

$$\lg z = \lg a + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \left(\frac{z-a}{z+a} \right)^{2m+1}$$

7.31. Обобщение теоремы Бюрмана, данное Тейшейра

В предыдущем параграфе мы не исследовали подробно условия сходимости ряда Бюрмана по тем соображениям, что предполагали установить вскоре более общую теорему; это обобщение стоит в том же отношении к только что данной теореме, в каком теорема Лорана стоит к теореме Тейлора, а именно: в последнем параграфе мы занимались разложением функции только по *положительным* степеням другой функции, между тем как теперь мы рассмотрим разложение функции *по положительным и отрицательным* степеням другой функции.

Общая теорема принадлежит Тейшейра[1]), изложению которого мы и следуем в этом параграфе.

Предположим (I), что $f(z)$ — аналитическая функция от z в кольцеобразной области A, ограниченной наружной кривой C и внутренней кривой c; (II) что $\theta(z)$ — аналитическая функция внутри и на самом контуре C и имеет только один нуль внутри этого контура, причем этот нуль простой; (III) что x — данная точка внутри A; (IV) что для всех точек z на C мы имеем

$$|\theta(x)| < |\theta(z)|,$$

а для всех точек z на c имеем

$$|\theta(x)| > |\theta(z)|.$$

Уравнение

$$\theta(z) - \theta(x) = 0$$

имеет в этом случае единственный простой корень $z = x$ внутри C, как это видно из соотношения[2])

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)} = \frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_C \frac{\theta'(z)}{\theta(z)}\,dz + \theta(x)\int\limits_C \frac{\theta'(z)}{\{\theta(z)\}^2}\,dz + \ldots\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\theta'(z)\,dz}{\theta(z)},$$

в котором левая и правая части представляют соответственно число корней рассматриваемого уравнения (§ 6.31) и число корней уравнения $\theta(z) = 0$, содержащихся внутри C.

---

[1]) Teixeira, Journal für Math., CXXII, 97—123 (1900). См. также Bateman, Trans. Amer. Math. Soc., XXVIII, 346—356 (1926).

[2]) Разложение справедливо согласно § 4.7, ибо $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\theta(x)}{\theta(z)}\right\}^n$ равномерно сходится, когда z лежит на C.

Теорема Коши дает поэтому

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_C \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}-\int\limits_c \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}\right].$$

Интегралы в этом выражении могут быть разложены, так же как в теореме Лорана, по степеням $\theta(x)$ по формулам

$$\int\limits_C \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\{\theta(x)\}^n\int\limits_C \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\{\theta(z)\}^{n+1}},$$

$$\int\limits_c \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\theta(z)-\theta(x)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\{\theta(x)\}^n}\int\limits_c f(z)\{\theta(z)\}^{n-1}\theta'(z)\,dz.$$

Таким образом, мы имеем формулу

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\{\theta(x)\}^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{\{\theta(x)\}^n},$$

где

$$A_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)\,\theta'(z)\,dz}{\{\theta(z)\}^{n+1}},\qquad B_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_c f(z)\{\theta(z)\}^{n-1}\theta'(z)\,dz.$$

Интегрированием по частям мы получаем при $n\neq 0$

$$A_n=\frac{1}{2\pi i n}\int\limits_C \frac{f'(z)}{\{\theta(z)^n\}}\,dz,\qquad B_n=\frac{-1}{2\pi i n}\int\limits_c \{\theta(z)\}^n f'(z)\,dz.$$

Это и дает разложение функции $f(x)$ по положительным и отрицательным степеням $\theta(x)$, годное для всех точек x внутри кольцеобразной области A[1]).

Если нули и полюсы функций $f(z)$ и $\theta(z)$ внутри C известны, то A_n и B_n могут быть вычислены по методам § 5.22 или § 6.1.

Пример 1. Показать, что при $|x|<1$

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)+\frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5+\ldots$$

Показать также, что при $|x|>1$ правая часть представляет x^{-1}.

Пример 2. Пусть $S_{2n}^{(m)}$ обозначает сумму всех произведений чисел $2^2, 4^2, 6^2, \ldots, (2n-2)^2$, взятых по m; показать, что

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\sin z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}\left\{\frac{1}{2n+3}-\frac{S_{2(n+1)}^{(1)}}{2n+1}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(-1)^n S_{2(n+1)}^{(n)}}{3}\right\}(\sin z)^{2n+1}$$

[1]) Контур c в интеграле, определяющем B_n, можно заменить на C. (*Прим. ред.*)

и разложение справедливо для всех значений z, представляемых точками внутри того из овалов, представляемых уравнением $|\sin z| = 1$, который содержит точку $z = 0$.

(Teixeira)

7.32. Теорема Лагранжа

Предположим теперь, что функция $f(z)$ § 7.31 аналитическая во всех точках внутри C, и пусть $\theta(x) = (x-a)\theta_1(x)$. Тогда функция $\theta_1(x)$ будет аналитической и не равной нулю на самом контуре C и внутри него и можно обойтись без контура c. Поэтому формулы, дающие A_n и B_n, превращаются согласно § 5.22 и § 6.1 в

$$A_n = \frac{1}{2\pi i n}\int_C \frac{f'(z)\,dz}{(z-a)^n\{\theta_1(z)\}^n} = \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}\left\{\frac{f'(a)}{\theta_1^n(a)}\right\} (n \geqslant 1),$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,\theta'(z)}{\theta_1(z)}\,\frac{dz}{z-a} = f(a),$$

$$B_n = 0.$$

Теорема последнего параграфа принимает согласно этому следующую форму, если положить $\theta_1(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$.

Пусть $f(z)$ и $\varphi(z)$ — функции от z, аналитические на контуре C, окружающем точку a, и внутри него, и пусть t таково, что для всех точек z на контуре C удовлетворяется неравенство

$$|t\varphi(z)| < |z-a|;$$

тогда уравнение

$$\zeta = a + t\varphi(\zeta),$$

рассматриваемое как уравнение относительно ζ, имеет один корень внутри контура C; далее, любая функция от ζ, аналитическая на и внутри C, может быть разложена в степенной ряд по t по формуле

$$f(\zeta) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{da^{n-1}}[f'(a)\{\varphi(a)\}^n].$$

Этот результат был опубликован Лагранжем[1]) в 1770 г.

Пример 1. Внутри петли лемнискаты, окружающей a и определяемой равенством $|z(z-a)| = \dfrac{|a|^2}{4}$, уравнение

$$z - a - \frac{a}{z} = 0$$

---

[1]) Lagrange, Mém. de l'Acad. de Berlin, XXIV; Oeuvres, II, 25.

при $|\alpha| < \frac{|a|^2}{4}$ будет иметь один корень ζ, разложение которого дается теоремой Лагранжа

$$\zeta = a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{n!(n-1)!\,a^{2n-1}} \alpha^n.$$

Из элементарной теории квадратных уравнений мы знаем, что уравнение $z - a - \frac{\alpha}{z} = 0$ имеет два корня, а именно:

$$\frac{a}{2}\left\{1 + \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{a^2}}\right\} \quad \text{и} \quad \frac{a}{2}\left\{1 - \sqrt{1 + \frac{4\alpha}{a^2}}\right\},$$

и наше разложение *представляет только первый из этих корней*[1] — пример необходимости тщательного рассмотрения таких рядов.

Пример 2. Пусть y — тот из корней уравнения

$$y = 1 + zy^2,$$

который стремится к 1 при $z \to 0$; показать, что

$$y^n = 1 + nz + \frac{n(n+3)}{2!}z^2 + \frac{n(n+4)(n+5)}{3!}z^3 + \\ + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{4!}z^4 + \frac{n(n+6)(n+7)(n+8)(n+9)}{5!}z^5 + \ldots,$$

пока $|z| < \frac{1}{4}$.

Пример 3. Пусть x — тот из корней уравнения

$$x = 1 + yx^a,$$

который стремится к 1, когда $y \to 0$; показать, что

$$\lg x = y + \frac{2a-1}{2}y^2 + \frac{(3a-1)(3a-2)}{2\cdot 3}y^3 + \ldots,$$

причем разложение справедливо при

$$|y| < \left|(a-1)^{a-1}a^{-a}\right|.$$

(McClintock)

7.4. Разложение функций некоторого класса на простейшие дроби[2]

Рассмотрим функцию $f(z)$, единственными особыми точками которой в конечной части плоскости являются простые полюсы a_1, a_2, a_3, ..., где $|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant |a_3| \leqslant \ldots$; пусть b_1, b_2, b_3, ... — вычеты в этих полюсах. Допустим, что можно выбрать последовательность таких окружностей C_m (радиус окружности C_m обозначим R_m) с центром в O, не проходящих ни через один из полюсов, что $|f(z)|$ будет ограничен на C_m. [Как пример рассматриваемых функций можно

[1]) Второй будет вне данного контура.

[2]) Mittag-Leffler, Acta Soc. Scient. Fennicae, XI, 273—293 (1880). См. также Acta Math., IV, 1—79 (1884).

привести $\operatorname{cosec} z$, и в этом случае можно взять $R_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$.] Предположим, далее, что $R_m \to \infty$, когда $m \to \infty$, и что верхняя граница[1]) функции $|f(z)|$ на C_m будет ограниченной, когда $m \to \infty$[2]), так что для всех точек на окружностях C_m $|f(z)| < M$, где M не зависит от m.

Если x не является полюсом функции $f(z)$, то единственными полюсами функции $\frac{f(z)}{z-x}$ будут полюсы функции $f(z)$ и точка $z = x$; тогда согласно § 6.1 будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_m} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = f(x) + \sum_r \frac{b_r}{a_r - x},$$

где суммирование распространяется на все полюсы, лежащие внутри C_m. Но

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_m} \frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_m} \frac{f(z)\,dz}{z} + \frac{x}{2\pi i}\int\limits_{C_m} \frac{f(z)}{z(z-x)}\,dz =$$
$$= f(0) + \sum_r \frac{b_r}{a_r} + \frac{x}{2\pi i}\int\limits_{C_m} \frac{f(z)\,dz}{z(z-x)},$$

если предположить, что функция $f(z)$ аналитическая в начале координат.

Далее, при $m \to \infty$ интеграл $\int\limits_{C_m} \frac{f(z)\,dz}{z(z-x)}$ будет $O\left(R_m^{-1}\right)$ и, таким образом, стремится к нулю, когда m стремится к бесконечности.

Поэтому, заставляя $m \to \infty$, мы получим

$$0 = f(x) - f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{ \frac{1}{a_n - x} - \frac{1}{a_a} \right\} - \lim_{m\to\infty} \frac{x}{2\pi i}\int\limits_{C_m} \frac{f(z)\,dz}{z(z-x)},$$

т. е.

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left\{ \frac{1}{x - a_n} + \frac{1}{a_n} \right\},$$

что и представляет разложение функции $f(x)$ на простейшие дроби; суммирование распространяется на *все* полюсы функции $f(x)$.

---

[1]) Которая будет функцией от m.

[2]) Конечно, R_m не обязательно должно (а часто и совсем не должно) стремиться к бесконечности непрерывно; во взятом примере $R_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$, где m принимает только целые значения.

Если $|a_n| < |a_{n+1}|$, то этот ряд будет равномерно сходиться во всем круге $|x| \leqslant a$, где a — любая постоянная (за исключением окрестностей точек a_n). В самом деле, если R_m — радиус окружности, охватывающей точки $a_1, \ldots, a_n$, то модуль остаточного члена ряда после первых n членов будет

$$\left| \frac{x}{2\pi i} \int\limits_{C_m} \frac{f(z)\,dz}{z(z-x)} \right| < \frac{Ma}{R_m - a}$$

по оценке § 4.62, и для заданного ε мы можем взять такое n, *не зависящее от* x, что $\dfrac{Ma}{R_m - a} < \varepsilon$.

Сходимость, очевидно, будет равномерной, даже если $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$, если члены ряда, соответствующие полюсам с одинаковыми модулями, будут сгруппированы.

Если вместо условия $|f(z)| < M$ мы имели бы условие $|z^{-p} f(z)| < M$, где M не зависит от m, когда z лежит на C_m, а p — положительное целое число, то мы разлагали бы интеграл $\int \dfrac{f(z)\,dz}{z-x}$, положив $\dfrac{1}{z-x} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{x}{z^2} + \ldots + \dfrac{x^{p+1}}{z^{p+1}(z-x)}$, и получили бы подобное, но несколько более сложное разложение.

Пример 1. Доказать, что

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \sum{}' (-1)^n \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right),$$

причем суммирование распространяется на все положительные и отрицательные значения n.

Чтобы получить эту формулу, положим $\operatorname{cosec} z - \dfrac{1}{z} = f(z)$. Особенности этой функции расположены в точках $z = n\pi$, где n — любое положительное или отрицательное целое число. Вычет функции $f(z)$ в особой точке $n\pi$ равен $(-1)^n$, и легко видеть, что $|f(z)|$ будет ограничен на окружностях $|z| = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi$, когда $n \to \infty$.

Применяя теперь общую формулу

$$f(z) = f(0) + \sum b_n \left[\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right],$$

где b_n — вычет в особой точке a_n, имеем

$$f(z) = f(0) + \sum (-1)^n \left\{ \frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right\}.$$

Но

$$f(0) = \lim_{z \to 0} \frac{z - \sin z}{z \sin z} = 0.$$

Поэтому

$$\operatorname{cosec} z = \frac{1}{z} + \sum (-1)^n \left[\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right],$$

что и представляет собой требуемое разложение.

Пример 2. Пусть $0 < a < 1$, показать, что

$$\frac{e^{az}}{e^z-1}=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z\cos 2na\pi-4n\pi\sin 2na\pi}{z^2+4n^2\pi^2}.$$

Пример 3. Доказать, что

$$\frac{1}{2\pi x^2(\operatorname{ch} x-\cos x)}=\frac{1}{2\pi x^4}-\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\frac{1}{\pi^4+\frac{1}{4}x^4}+$$
$$+\frac{2}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\frac{1}{(2\pi)^4+\frac{1}{4}x^4}-\frac{3}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\frac{1}{(3\pi)^4+\frac{1}{4}x^4}+\ldots$$

Общий член в правой части будет

$$\frac{(-1)^r r}{(e^{r\pi}-e^{-r\pi})\left\{(r\pi)^4+\frac{1}{4}x^4\right\}},$$

что представляет собой вычет в каждой из четырех особых точек r, $-r$, ri, $-ri$ функции

$$\frac{\pi z}{\left(\pi^4z^4+\frac{1}{4}x^4\right)(e^{\pi z}-e^{-\pi z})\sin\pi z}.$$

Эта функция, помимо точек r, $-r$, ri, $-ri$, имеет еще следующие пять особых точек:

$$0,\ \frac{(\pm1\pm i)x}{2\pi}.$$

В точке $z=0$ вычет равен $\frac{2}{\pi x^4}$; в каждой из четырех точек $z=\frac{(\pm1\pm i)x}{2\pi}$ вычет равен

$$\{2\pi x^2(\cos x-\operatorname{ch} x)\}^{-1}.$$

Поэтому

$$4\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r r}{e^{r\pi}-e^{-r\pi}}\frac{1}{(r\pi)^4+\frac{1}{4}x^4}+\frac{2}{\pi x^4}-\frac{2}{\pi x^2(\operatorname{ch} x-\cos x)}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int_C\frac{\pi z\,dz}{\left(\pi^4z^4+\frac{1}{4}x^4\right)(e^{\pi z}-e^{-\pi z})\sin},$$

где C — окружность с центром в начале координат и радиусом $n+\frac{1}{2}$ (n — целое число).

Но в точках на C подинтегральная функция есть $O(|z|^{-3})$; поэтому предел интеграла по C равен нулю.

Отсюда и из последнего соотношения вытекает требуемый результат.

Пример 4. Доказать, что

$$\sec x=4\pi\left(\frac{1}{\pi^2-4x^2}-\frac{3}{9\pi^2-4x^2}+\frac{5}{25\pi^2-4x^2}-\ldots\right).$$

Пример 5. Доказать, что

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{x} - 2x\left(\frac{1}{\pi^2+x^2} - \frac{1}{4\pi^2+x^2} + \frac{1}{9\pi^2+x^2} - \ldots\right).$$

Пример 6. Доказать, что

$$\operatorname{sech} x = 4\pi\left(\frac{1}{\pi^2+4x^2} - \frac{3}{9\pi^2+4x^2} + \frac{5}{25\pi^2+4x^2} - \ldots\right).$$

Пример 7. Доказать, что

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + 2x\left(\frac{1}{\pi^2+x^2} + \frac{1}{4\pi^2+x^2} + \frac{1}{9\pi^2+x^2} + \ldots\right).$$

Пример 8. Доказать, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(m^2+a^2)(n^2+b^2)} = \frac{\pi^2}{ab}\operatorname{cth}\pi a \operatorname{cth}\pi b.$$

(Math. Trip., 1899)

7.5. Разложение функций некоторого класса в бесконечные произведения

Теорема последнего параграфа может быть применена к разложению некоторого класса функций в бесконечные произведения.

Пусть $f(z)$ — функция, имеющая простые нули в точках a_1, a_2, a_3, ...[1]), где $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|$ бесконечен, и пусть $f(z)$ — аналитическая для всех значений z.

Тогда $f'(z)$ будет аналитической для всех значений z (§ 5.22) и, следовательно, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ может иметь особенности только в точках a_1, a_2, a_3, ...

По теореме Тейлора

$$f(z) = (z-a_r)f'(a_r) + \frac{(z-a_r)^2}{2}f''(a_r) + \ldots$$

и

$$f'(z) = f'(a_r) + (z-a_r)f''(a_r) + \ldots$$

Отсюда непосредственно следует, что в каждой из точек a_r функция $\frac{f'(z)}{f(z)}$ имеет простой полюс с вычетом $+1$. Если мы можем найти последовательность окружностей C_m характера, описанного в § 7.4, так что $\frac{f'(z)}{f(z)}$ будет ограничена на C_m, когда $m\to\infty$, то из разложения, данного в § 7.4, следует

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(0)}{f(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n}\right\}.$$

---

[1]) Причем это единственные нули функции $f(z)$ и $a_n \neq 0$.

Так как этот ряд будет равномерно сходиться при соответствующей группировке членов (§ 7.4), то мы можем его интегрировать почленно (§ 4.7). Проделав это и взяв показательную функцию от обеих частей равенства, получим

$$f(z)=ce^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}\right\},$$

где c не зависит от z.

Положив $z=0$, мы видим, что $f(0)=c$, и таким образом, общая формула принимает вид

$$f(z)=f(0)e^{\frac{f'(0)}{f(0)}z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}}\right\}.$$

Эта формула дает разложение в бесконечное произведение любой функции $f(z)$, удовлетворяющей высказанным условиям.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, имеющую простые нули в точках $r\pi$, где r — любое положительное или отрицательное целое число.

В этом случае мы имеем $f(0)=1$, $f'(0)=0$, и теорема непосредственно дает

$$\frac{\sin z}{z}=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{\frac{z}{n\pi}}\right\}\left\{\left(1+\frac{z}{n\pi}\right)e^{-\frac{z}{n\pi}}\right\},$$

ибо легко видеть, что условие, касающееся поведения функции $\frac{f'(z)}{f(z)}$ при $|z|\to\infty$, выполнено.

Пример 2. Доказать, что

$$\left\{1+\left(\frac{k}{x}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{k}{2x-\pi}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{k}{2\pi+x}\right)^2\right\}\times$$
$$\times\left\{1+\left(\frac{k}{4\pi-x}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{k}{4\pi+x}\right)^2\right\}\ldots=\frac{\operatorname{ch}k-\cos x}{1-\cos x}.$$

(Trinity, 1899)

7.6. Теорема Вейерштрасса о бесконечных произведениях [1])

Теорема § 7.5 является частным случаем более общей теоремы, в которой характер функции $f(z)$ при $|z|\to\infty$ не так сильно ограничен.

Пусть $f(z)$ — функция от z без существенно особых точек (кроме «бесконечно удаленной точки»); пусть нули и полюсы функции $f(z)$

[1]) Weierstrass, Berliner Abh., 11—60 (1876); Math Werke II, 77—124, 1895.

лежат в точках $a_1, a_2, a_3, \ldots$, где $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \ldots$ Пусть нуль [1]) в a_n имеет (целый) порядок m_n.

Если число нулей и полюсов не ограничено, то необходимо, чтобы $|a_n| \to \infty$, когда $n \to \infty$, ибо если бы этого не было, то точки a_n имели бы предельную точку [2]), которая была бы существенно особой точкой функции $f(z)$.

Прежде всего покажем, что можно найти такие полиномы $g_n(z)$, что произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{g_n(z)}\right\}^{m_n}\right]$$

сходится для всех [3]) конечных значений z.

Пусть K — какая-нибудь постоянная, и пусть $|z| < K$; тогда, поскольку $|a_n| \to \infty$, мы можем найти такое N, что $|a_n| > 2K$ при $n > N$.

Первые N множителей произведения не влияют на его сходимость; рассмотрим какое-нибудь значение n, большее N, и пусть

$$g_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{k_n - 1}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n-1}.$$

Тогда

$$\left|-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{z}{a_n}\right)^m + g_n(z)\right| = \left|\sum_{m=k_n}^{\infty}\frac{1}{m}\left(\frac{z}{a_n}\right)^m\right| <$$

$$< \left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n}\sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|^m < 2\left|(Ka_n^{-1})^{k_n}\right|,$$

поскольку

$$|z_n a_n^{-1}| < \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{g_n(z)}\right\}^{m_n} = e^{u_n(z)},$$

где

$$|u_n(z)| \leqslant 2\left|m_n(Ka_n^{-1})^{k_n}\right|.$$

Далее, m_n и a_n даны, но k_n находится в нашем распоряжении; так как $|Ka_n^{-1}| < \frac{1}{2}$, то в качестве k_n можно выбрать такое наи-

---

[1]) Мы рассматриваем здесь полюс как нуль отрицательного порядка.
[2]) На основании двумерного аналога теоремы § 2.21.
[3]) Предполагается, что z не будет ни одной из тех точек a_n, для которых m_n отрицательно.

меньшее число, что $2\left|m_n(Ka_n^{-1})^{k_n}\right| < b_n$, где $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — какой-либо сходящийся ряд [1]) с положительными членами.

Тогда

$$\prod_{n=N+1}^{\infty}\left[\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{g_n(z)}\right\}^{m_n}\right]=\prod_{n=N+1}^{\infty} e^{u_n(z)},$$

где $|u_n(z)| < b_n$, а потому, поскольку b_n не зависит от z, произведение будет абсолютно и равномерно сходиться, когда $|z| < K$, за исключением окрестностей точек a_n.

Пусть теперь

$$F(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{g_n(z)}\right\}^{m_n}\right].$$

Положим $G_1(z)=\frac{f(z)}{F(z)}$, тогда $G_1(z)$ будет целой функцией (§ 5.64) от z, не имеющей нулей.

Отсюда следует, что функция $\frac{1}{G_1(z)}\frac{d}{dz}G_1(z)$ будет аналитической для всех конечных значений z, и следовательно, по теореме Тейлора эта функция может быть выражена рядом $\sum_{n=1}^{\infty} nb_n z^{n-1}$, который сходится всюду; интегрируя, получим

$$G_1(z)=ce^{G(z)},$$

где $G(z)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, а c — постоянная; этот ряд сходится всюду, и следовательно, $G(z)$ является целой функцией. Поэтому окончательно получим

$$f(z)=f(0)\,e^{G(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{g_n(z)}\right\}^{m_n}\right],$$

где $G(z)$ — некоторая целая функция, такая, что $G(0)=0$.

Примечание. Произвольный элемент $G(z)$, встречающийся в этой формуле для $f(z)$, возникает благодаря отсутствию условий относительно поведения $f(z)$ при $|z|\to\infty$.

Следствие. Если $m_n=1$, то согласно § 2.36 достаточно взять $k_n=n$.

---

[1]) Например, мы можем взять $b_n = 2^{-n}$.

7.7. Разложение периодических функций некоторого класса в ряд по котангенсам

Пусть $f(z)$ — периодическая функция от z, аналитическая всюду, кроме некоторого числа простых полюсов; пусть ради удобства π — период функции $f(z)$, так что

$$f(z)=f(z+\pi).$$

Положим $z=x+iy$, и пусть $f(z)\to l$ при $y\to+\infty$ равномерно относительно x, когда $0\leqslant x\leqslant\pi$; подобным же образом пусть $f(z)\to l'$ равномерно, когда $y\to-\infty$.

Пусть полюсами функции $f(z)$ в полосе $0<x\leqslant\pi$ являются точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с вычетами в них $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Пусть, далее, $ABCD$ — прямоугольник с вершинами [1])

$$-i\rho', \quad \pi-i\rho', \quad \pi+i\rho \quad \text{и} \quad i\rho.$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(t)\operatorname{ctg}(t-z)\,dt,$$

взятый по контуру этого прямоугольника; вычет подинтегральной функции в a_r равен $c_r\operatorname{ctg}(a_r-z)$, а вычет в z равен $f(z)$. Интегралы по DA и BC взаимно уничтожаются благодаря периодичности подинтегральной функции; когда $\rho'\to\infty$, подинтегральная функция на AB стремится равномерно к $l'i$, в то время как при $\rho\to\infty$ подинтегральная функция на CD стремится равномерно к $-li$; поэтому

$$\frac{1}{2}(l'+l)=f(z)+\sum_{r=1}^{n}c_r\operatorname{ctg}(a_r-z).$$

А это значит, что мы имеем разложение

$$f(z)=\frac{1}{2}(l'+l)+\sum_{r=1}^{n}c_r\operatorname{ctg}(z-a_r).$$

Пример 1. $\operatorname{ctg}(x-a_1)\operatorname{ctg}(x-a_2)\ldots\operatorname{ctg}(x-a_n)=$

$$=\sum_{r=1}^{n}\operatorname{ctg}(a_r-a_1)\ldots * \ldots\operatorname{ctg}(a_r-a_n)\operatorname{ctg}(x-a_r)+(-1)^{\frac{1}{2}n}$$

или

$$=\sum_{r=1}^{n}\operatorname{ctg}(a_r-a_1)\ldots * \ldots\operatorname{ctg}(a_r-a_n)\operatorname{ctg}(x-a_r),$$

[1]) Если какой-либо из полюсов лежит на прямой $x=\pi$, то перенесем прямоугольник несколько вправо: ρ, ρ' берем настолько большими, чтобы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лежали внутри прямоугольника.

смотря по тому, будет ли n четным или нечетным, знак * указывает, что множитель $\operatorname{ctg}(a_r - a_r)$ опущен.

Пример 2. Доказать, что

$$\frac{\sin(x-b_1)\sin(x-b_2)\ldots\sin(x-b_n)}{\sin(x-a_1)\sin(x-a_2)\ldots\sin(x-a_n)} =$$
$$= \frac{\sin(a_1-b_1)\ldots\sin(a_1-b_n)}{\sin(a_1-a_2)\ldots\sin(a_1-a_n)}\operatorname{ctg}(x-a_1) +$$
$$+\frac{\sin(a_2-b_1)\ldots\sin(a_2-b_n)}{\sin(a_2-a_1)\ldots\sin(a_2-a_n)}\operatorname{ctg}(x-a_2)+\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\cos(a_1+a_2+\ldots+a_n-b_1-b_2-\ldots-b_n).$$

7.8. Теорема Бореля [1])

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — аналитическая функция при $|z| \leqslant r$, так что по неравенству § 5.23 $|a_n r^n| < M$, где M не зависит от n. Отсюда, если $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$, то $\varphi(z)$ будет целой функцией и

$$|\varphi(z)| < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M|z^n|}{r^n n!} = Me^{\frac{|z|}{r}}$$

и подобным же образом $|\varphi^{(n)}(z)| < \dfrac{Me^{\frac{|z|}{r}}}{r^n}$.

Рассмотрим $f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}\varphi(zt)\,dt$; этот интеграл согласно условиям § 5.32 будет аналитической функцией от z, когда $|z| < r$.

Далее, интегрируя по частям, получим

$$f_1(z) = [-e^{-t}\varphi(zt)]_0^{\infty} + z\int_0^{\infty} e^{-t}\varphi'(zt)\,dt =$$
$$= \sum_{m=0}^{n} z^m[-e^{-t}\varphi^{(m)}(zt)]_0^{\infty} + z^{n+1}\int_0^{\infty} e^{-t}\varphi^{(n+1)}(zt)\,dt.$$

Но

$$\lim_{t\to 0} e^{-t}\varphi^{(m)}(zt) = a_m, \text{ и при } |z| < r \lim_{t\to\infty} e^{-t}\varphi^{(m)}(zt) = 0.$$

[1]) Borel, Leçons sur les séries divergentes, 94, 1901. См. также цитированные там мемуары. См. также Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, 1951. (*Прим. ред.*)

Поэтому

$$f_1(z)=\sum_{m=0}^{n} a_m z^m + R_n,$$

где

$$|R_n|<|z^{n+1}|\int_0^\infty e^{-t}Me^{\frac{|zt|}{r}}r^{-n-1}\,dt=|zr^{-1}|^{n+1}M\{1-|z|r^{-1}\}^{-1}\to 0,$$

когда $n\to\infty$.

Следовательно, при $|z|<r$

$$f_1(z)=\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m = f(z),$$

и таким образом,

$$f(z)=\int_0^\infty e^{-t}\varphi(zt)\,dt,$$

где $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^n}{n!}$; функция $\varphi(z)$ называется *функцией, ассоциированной по Борелю с* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Если $S=\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n z^n}{n!}$ и если мы можем установить соотношение $S=\int_0^\infty e^{-t}\varphi(t)\,dt$, то говорят (§ 8.41), что ряд S *«суммируем* (B)», следовательно, доказанная теорема показывает, что ряд Тейлора, представляющий аналитическую функцию, будет суммируем (B).

7.81. Интеграл Бореля и аналитическое продолжение

Докажем теперь теорему Бореля, состоящую в том, что интеграл Бореля представляет аналитическую функцию в более широкой области, чем внутренняя область окружности $|z|=r$.

Эта расширенная область получается следующим образом: возьмем особые точки $a, b, c, \ldots$ функции $f(z)$ и проведем через каждую из них прямую, перпендикулярную к прямой, соединяющей эту особую точку с началом координат. Проведенные таким образом прямые разделят плоскость на области, из которых одна будет многоугольником, содержащим внутри начало координат.

Тогда интеграл Бореля представит аналитическую функцию (которая по § 5.5 и § 7.8 будет, очевидно, определяться функцией $f(z)$ и ее продолжением) *всюду внутри этого многоугольника.* Читатель должен заметить, что это — первая настоящая формула, полученная для аналитического продолжения функции, если не считать тривиальной формулы в примере § 5.5.

Действительно, возьмем какую-нибудь точку P (рис. 2) с аффиксом ζ внутри рассматриваемого многоугольника; тогда окружность, построенная на OP как на диаметре, не будет содержать особых точек ни на себе самой, ни внутри [1]); следовательно, мы можем построить немного большую концентрическую окружность C [2]), не имеющую ни одной особой точки ни внутри, ни на себе самой. Тогда в силу § 5.4

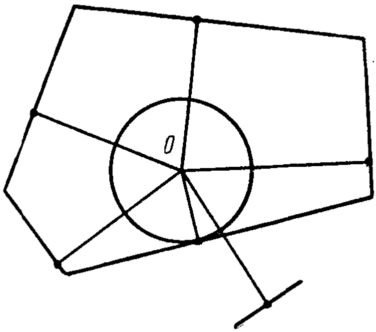

Рис. 2.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

и, таким образом,

$$\varphi(\zeta t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n t^n}{n!} \int\limits_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz.$$

Но ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\zeta^n t^n f(z)}{n!\, z^{n+1}}$ будет равномерно сходящимся (§ 3.34) на C, так как $f(z)$ ограничена, а $|z| \geqslant \delta > 0$, где δ не зависит от z; поэтому согласно § 4.7

$$\varphi(\zeta t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C z^{-1} f(z) \exp(\zeta t z^{-1})\,dz.$$

Таким образом, при t положительном $|\varphi(\zeta t)| < F(\zeta)\, e^{\lambda t}$, где $F(\zeta)$ ограничена в любой замкнутой области, лежащей полностью *внутри* многоугольника [3]), и независима от t; λ будет наибольшим значением вещественной части $\dfrac{\zeta}{z}$ на C.

Если мы проведем окружность, описываемую точкой $\dfrac{z}{\zeta}$, то увидим, что вещественная часть выражения $\dfrac{\zeta}{z}$ будет наибольшей, когда z лежит на конце диаметра, проходящего через ζ вблизи точки ζ, и таким образом, значение λ равно $|\zeta|\{|\zeta| + \delta\}^{-1} < 1$.

Подобным же образом мы можем получить неравенство для $\varphi'(\zeta t)$, а отсюда согласно условиям § 5.32 найдем, что функция $\int\limits_0^{\infty} e^{-t} \varphi(\zeta t)\,dt$ — аналитическая и, очевидно, однозначная функция от ζ.

А это и есть результат, сформулированный выше.

---

1) Читатель увидит это из чертежа; ибо, если бы существовала такая особая точка, то соответствующая ей прямая прошла бы между O и P или через P, т. е. P была бы расположена вне многоугольника или на его границе.

2) Разность радиусов окружностей обозначим через δ.

3) Окружность C зависит от ζ и от выбора δ; число δ можно выбрать непрерывно зависящим от ζ так, что $F(\zeta) = \dfrac{1}{2\pi} \int\limits_C \left|\dfrac{f(z)}{z}\right| |dz|$ будет непрерывна в многоугольнике. (*Прим. ред.*)

7.82. Разложение в ряд обратных факториалов

Один из способов разложения функций, который, после применения Николем [1]) и Стирлингом [2]) в XVIII столетии, был систематически исследован Шлёмильхом [3]) в 1863 г., заключается в разложении в ряд обратных факториалов.

Чтобы получить такое разложение функции, аналитической при $|z|>r$, допустим, что $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$, и воспользуемся формулой

$$f(z)=\int_0^{\infty} ze^{-tz}\varphi(t)\,dt\ ^{4)},$$

где $\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n t^n}{n!}$; эта формула может быть получена аналогично формуле в § 7.8. Видоизменим ее, положив $e^{-t}=1-\xi$, $\varphi(t)=F(\xi)$; тогда $f(z)=\int_0^1 z(1-\xi)^{z-1}F(\xi)\,d\xi$.

Если $t=u+iv$ и t заключено в полосе $-\pi<v<\pi$, то t будет однозначной функцией от ξ, а $F(\xi)$ — аналитической функцией от ξ; при этом ξ ограничено неравенством $-\pi<\arg(1-\xi)<\pi$.

Далее, внутренняя область окружности $|\xi|=1$ соответствует внутренней области кривой, определяемой равенством

$$t=-\lg\left(2\cos\frac{1}{2}\theta\right)-\frac{1}{2}i\theta$$

(мы полагаем $\xi=\exp\{i(\theta+\pi)\}$); внутри же этой кривой

$$|t|-\operatorname{Re}t\leqslant[\{\operatorname{Re}t\}^2+\pi^2]^{\frac{1}{2}}-\operatorname{Re}t\to 0,$$

когда $\operatorname{Re}t\to\infty$.

Отсюда следует, что при $|\xi|\leqslant 1$ $|F(\xi)|<Me^{r|t|}<M_1|e^{rt}|$, где M_1 не зависит от t; таким образом, $F(\xi)<M_1\left|(1-\xi)^{-r}\right|$.

---

[1]) Nicole, Mém. de l'Acad. des Sci., Paris (1717); см. Tweedie, Proc. Edin. Math. Soc., XXXVI (1918).

[2]) Stirling, Methodus Differentialis, London, 1730.

[3]) Schlömilch, Compendium der höheren Analysis. Более современные исследования принадлежат Клёйверу (Kluyver), Нильсену (Hielsen) и Пинкерле (Pincherle). См. Comptes Rendus, CXXXIII (1901); CXXXIV (1902); Annales de l'École norm. sup. (3), XIX, XXII, XXIII; Rendiconti dei Lincei (5), XI (1902) и Palermo Rendiconti, XXXIV (1912). Свойства функций, определяемых рядами обратных факториалов, изучены в весьма важной работе Нёрлунда (Nörlund), Acta Math., XXXVII, 327—387 (1914).

[4]) Этот интеграл сходится при $\operatorname{Re}z>r$. (*Прим. ред.*)

Предположим теперь, что $0 \leqslant \xi < 1$, тогда по неравенству § 5.23

$$|F^{(n)}(\xi)| < M_2 n! \rho^{-n},$$

где M_2 — верхняя граница $|F(z)|$ на окружности с центром ξ и радиусом $\rho < 1 - \xi$.

Положив $\rho = \frac{n}{n+1}(1-\xi)$ и замечая, что[1] $(1+n^{-1})^n < e$, мы найдем

$$|F^{(n)}(\xi)| < M_1 \left[1 - \left\{\xi + \frac{n}{n+1}(1-\xi)\right\}\right]^{-r} n! \left\{\frac{n(1-\xi)}{n+1}\right\}^{-n} <$$
$$< M_1 e (n+1)^r n! (1-\xi)^{-r-n}.$$

Вспоминая, что, согласно § 4.5, $\int\limits_0^1$ обозначает $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \int\limits_0^{1-\varepsilon}$, и повторно интегрируя по частям, будем иметь

$$f(z) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ [-(1-\xi)^z F(\xi)]_0^{1-\varepsilon} + \int\limits_0^{1-\varepsilon} (1-\xi)^z F'(\xi)\, d\xi \right\} =$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ [-(1-\xi)^z F(\xi)]_0^{1-\varepsilon} + \frac{1}{z+1} [-(1-\xi)^{z+1} F'(\xi)]_0^{1-\varepsilon} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{z+1} \int\limits_0^{1-\varepsilon} (1-\xi)^{z+1} F''(\xi)\, d\xi \right\} = \ldots$$
$$\ldots = b_0 + \frac{b_1}{z+1} + \frac{b_2}{(z+1)(z+2)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{b_n}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} + R_n,$$

где

$$b_n = \lim_{\varepsilon \to 0} [-(1-\xi)^{z+n} F^{(n)}(\xi)]_0^{1-\xi} = F^{(n)}(0),$$

---

[1]) Функция $(1+x^{-1})^x$ возрастает вместе с x, ибо $\frac{1}{1-y} > e^y$, когда $y < 1$, и, следовательно, $\lg\left(\frac{1}{1-y}\right) > y$; отсюда, положив $y^{-1} = 1 + x$, получим

$$\frac{d}{dx} x \lg(1+x^{-1}) = \lg(1+x^{-1}) - \frac{1}{1+x} > 0.$$

если вещественная часть выражения $z+n-r-n$ положительна, т. е. если $\operatorname{Re} z > r$; далее,

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{|(z+1)(z+2)\ldots(z+n)|} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} |(1-\xi)^{z+n} F^{(n+1)}(\xi)|\, d\xi <$$

$$< \frac{M_1 e (n+2)^r n!}{|(z+1)(z+2)\ldots(z+n)| \operatorname{Re}(z-r)} <$$

$$< \frac{M_1 e (n+2)^r n!}{(r+1+\delta)(r+2+\delta)\ldots(r+n+\delta)\delta},$$

где

$$\delta = \operatorname{Re}(z-r).$$

Далее, $\prod_{m=1}^{n} \left\{\left(1+\frac{r+\delta}{m}\right) e^{-\frac{r+\delta}{m}}\right\}$ стремится к пределу (§ 2.71), когда $n \to \infty$, и следовательно, $|R_n| \to 0$, если

$$(n+2)^r \exp\left\{-(r+\delta)\sum_1^n \frac{1}{m}\right\}$$

стремится к нулю; но

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} > \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \lg(n+1)$$

по § 4.43 (II) и $(n+2)^r (n+1)^{-r-\delta} \to 0$ при $\delta > 0$; поэтому $R_n \to 0$, когда $n \to \infty$, и следовательно, при $\operatorname{Re} z > r$ мы имеем сходящееся разложение

$$f(z) = b_0 + \frac{b_1}{z+1} + \frac{b_2}{(z+1)(z+2)} + \ldots + \frac{b_n}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n)} + \ldots$$

Пример 1. Получить то же самое разложение, воспользовавшись формулами

$$\frac{1}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n+1)} = \frac{1}{n!}\int_0^1 u^n (1-u)^z\, du,$$

$$\int_C \frac{f(t)\, dt}{z-t} = \int_C dt \int_0^1 f(t)(1-u)^{z-t-1}\, du.$$

Пример 2. Получить разложение

$$\lg\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{a_1}{z(z+1)} - \frac{a_2}{z(z+1)(z+2)} - \ldots,$$

где

$$a_n = \int_0^1 t(1-t)(2-t)\ldots(n-1-t)\, dt,$$

и рассмотреть область, в которой оно будет сходиться.

(Schlömilch).

ЛИТЕРАТУРА

Э. Гурса, Курс математического анализа, ОНТИ, 1936.
E. Borel, Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1901.
T. J. I'a Bromwich [1]), Theory of infinite series, гл. VIII, X, XI, 1908.
O. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, II, Dresden, 1874.

Примеры

1. Пусть $y - x - \varphi(y) = 0$, где $\varphi(y)$ — данная функция от y; получить разложение

$$f(y) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \{\varphi(x)\}^m \left(\frac{1}{1-\varphi'(x)} \frac{d}{dx}\right)^m f(x),$$

где f обозначает любую аналитическую функцию своего аргумента, и рассмотреть область его сходимости.

(Levi-Civitá, Rend. dei Lincei, (5), XVI, 3, 1907.)

2. Получить (по формуле Дарбу или другим путем) разложение

$$f(z) - f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(z-a)^n}{n!(1-r)^n} \{f^{(n)}(z) - r^n f^{(n)}(a)\};$$

найти остаточный член после n членов и рассмотреть сходимость ряда.

3. Показать, что

$$f(x+h) - f(x) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2m-1)}{(m!)^2} \frac{h^m}{2^m} \{f^{(m)}(x+h) - (-1)^m f^{(m)}(x)\} +$$

$$+ (-1)^n h^{n+1} \int_0^1 \gamma_n(t) f^{(n+1)}(x+ht)\, dt,$$

где

$$\gamma_n(x) = \frac{x^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{n+\frac{1}{2}}}{(n!)^2} \frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi n!} \int_0^1 (x-z)^n z^{-\frac{1}{2}} (1-z)^{-\frac{1}{2}}\, dz,$$

и показать, что $\gamma_n(x)$ представляет собой коэффициент при $n!\,t^n$ в разложении выражения $\{(1-tx)(1+t-tx)\}^{-\frac{1}{2}}$ по возрастающим степеням t.

---

[1]) Бромуич получает разложения элементарными способами, т. е. не применяя теоремы Коши.

4. Полагая в формуле Дарбу

$$\varphi(x+1)=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{du^n}\left\{\frac{(1-r)\,e^{xu}}{1-re^{-u}}\right\}\right]_{u=0},$$

показать, что

$$f(x+h)-f(x)=-\sum_{m=1}^{n} a_m \frac{h^m}{m!}\left\{f^{(m)}(x+h)-\frac{1}{r}f^{(m)}(x)\right\}+$$
$$+(-1)^n h^{n+1}\int_0^1 \varphi(t)\,f^{(n+1)}(x+ht)\,dt,$$

где

$$\frac{1-r}{1-re^{-u}}=1-a_1\frac{u}{1!}+a_2\frac{u^2}{2!}-a_3\frac{u^3}{3!}+\ldots$$

5. Показать, что

$$f(z)-f(a)=$$
$$=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\frac{2B_m(2^{2n}-1)(z-a)^{2m-1}}{2m!}\left\{f^{(2m-1)}(a)+f^{(2m-1)}(z)\right\}+$$
$$+\frac{(z-a)^{2n+1}}{2n!}\int_0^1 \psi_{2n}(t)\,f^{(2n+1)}\{a+t(z-a)\}\,dt,$$

где

$$\psi_n(t)=\frac{2}{n+1}\left[\frac{d^{n+1}}{du^{n+1}}\left(\frac{ue^{tu}}{e^u+1}\right)\right]_{u=0}.$$

6. Доказать, что

$$f(z_2)-f(z_1)=C_1(z_2-z_1)f'(z_2)+C_2(z_2-z_1)^2 f''(z_1)-$$
$$-C_3(z_2-z_1)^3 f'''(z_2)-C_4(z_2-z_1)^4 f^{(\mathrm{IV})}(z_1)+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^n(z_2-z_1)^{n+1}\int_0^1\left\{\frac{d^n}{du^n}(e^{tu}\operatorname{sech} u)\right\}_{u=0} f^{(n+1)}(z_1+tz_2-tz_1)\,dt.$$

Знаки плюс и минус в ряде повторяются каждый раз дважды; последний член перед интегралом есть член с $(z_2-z_1)^n$; C_n — коэффициент при z^n в разложении $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{z}{2}\right)$ по возрастающим степеням z.

(Trinity, 1899)

7. Пусть x_1 и x_2 — целые числа, а $\varphi(z)$ — функция, аналитическая и ограниченная для всех значений z, для которых $x_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant x_2$; показать, взяв интеграл

$$\int \frac{\varphi(z)\,dz}{e^{\pm 2\pi i z}-1}$$

по вырезанным прямоугольникам, имеющим вершины в точках $x_1, x_2, x_2 \pm \infty i$, $x_1 \pm \infty i$, что

$$\frac{1}{2}\varphi(x_1)+\varphi(x_1+1)+\varphi(x_1+2)+\ \ldots\ +\varphi(x_2-1)+\frac{1}{2}\varphi(x_2)=$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(z)\,dz+\frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{\varphi(x_2+iy)-\varphi(x_1+iy)-\varphi(x_2-iy)+\varphi(x_1-iy)}{e^{2\pi y}-1}\,dy.$$

Отсюда, применяя формулу

$$4n\int_0^\infty \frac{y^{2n-1}}{e^{2\pi y}-1}\,dy=B_n,$$

где $B_1, B_2, \ldots$ — числа Бернулли, показать, что

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\ \ldots\ +\varphi(n)=C+\frac{1}{2}\varphi(n)+\int^n \varphi(z)\,dz+$$

$$+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}B_r}{2r!}\varphi^{(2r-1)}(n)$$

(где C — постоянная, не зависящая от n) при условии, что последний ряд сходится.

(Эта важная формула принадлежит Плана (Plana, Mem. della R. Accad. di Torino, XXV, 403—418 (1820); доказательство при помощи контурного интегрирования было опубликовано Кронекером (Kronecker, Journal für Math., CV, 345—348 (1889)). Относительно подробной истории см. книгу Линделёфа (Lindelöf, Le calcul des résidus). Некоторые приложения формулы даны в гл. 12.)

8. Получить разложение

$$u=\frac{x}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{n!}\frac{x^n}{2^n}$$

для одного из корней уравнения $x=2u+u^2$ и показать, что оно будет сходиться до тех пор, пока $|x|<1$.

9. Пусть $S_{2(n+1)}^{(m)}$ обозначает сумму всех произведений чисел

$$2^2,\ 4^2,\ 6^2,\ \ldots,\ (2n)^2,$$

взятых по m; показать, что

$$\frac{\cos z}{z}=\frac{1}{\sin z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}\left\{\frac{2^{2(n+1)}}{2n+3}-S_{2(n+1)}^{(1)}\frac{2^{2n}}{2n+1}+\ \ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ +(-1)^n S_{2(n+1)}^{(n)}\frac{2^2}{3}\right\}\sin^{2n+1}z.$$

(Teixeira)

10. Пусть функция $f(z)$ аналитическая внутри того из овалов, уравнение которых есть $|\sin z|=C$ (где $C\leqslant 1$), который охватывает начало

координат; показать, что $f(z)$ для всех точек z внутри этого овала может быть разложена в ряд

$$f(z)=f(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(2n)}(0)+S_{2n}^{(1)}f^{(2n-2)}(0)+\ldots+S_{2n}^{(n-1)}f''(0)}{2n!}\sin^{2n}z+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n+1)}(0)+S_{2n+1}^{(1)}f^{(2n-1)}(0)+\ldots+S_{2n+1}^{(n)}f'(0)}{(2n+1)!}\sin^{2n+1}z,$$

где $S_{2n}^{(m)}$ — сумма всех произведений чисел

$$2^2,\ 4^2,\ 6^2,\ \ldots,\ (2n-2)^2,$$

взятых по m, а $S_{2n+1}^{(m)}$ обозначает сумму всех произведений чисел

$$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ \ldots,\ (2n-1)^2,$$

взятых по m.

(Teixeira)

11. Показать, что два ряда

$$2z+\frac{2z^3}{3^2}+\frac{2z^5}{5^2}+\ldots$$

и

$$\frac{2z}{1-z^2}-\frac{2}{1\cdot 3^2}\left(\frac{2z}{1-z^2}\right)^3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5^2}\left(\frac{2z}{1-z^2}\right)^5-\ldots$$

представляют одну и ту же функцию в некоторой области плоскости z и могут быть преобразованы один в другой при помощи теоремы Бюрмана.

(Kapteyn, Nieuw Archief (2), III, 225 (1897))

12. Пусть функция $f(z)$ периодическая с периодом 2π и аналитическая во всех точках в бесконечной полосе плоскости, заключенной между двумя ветвями кривой $|\sin z|=C$ (где $C>1$); показать, что во всех точках полосы такая функция может быть разложена в бесконечный ряд вида

$$f(z)=A_0+A_1\sin z+\ldots+A_n\sin^n z+\ldots$$
$$\ldots+\cos z\,(B_1+B_2\sin z+\ldots+B_n\sin^{n-1}z+\ldots),$$

и найти коэффициенты A_n и B_n.

13. Пусть φ и f связаны уравнением

$$\varphi(x)+\lambda f(x)=0,$$

один из корней которого равен a; показать, что

$$F(x)=F-\frac{\lambda}{1}\frac{1}{\varphi'}fF'+$$
$$+\frac{\lambda^2}{1!\,2!}\frac{1}{\varphi'^3}\begin{vmatrix}\varphi' & f^2F'\\ \varphi'' & (f^2F')'\end{vmatrix}-\frac{\lambda^3}{1!\,2!\,3!}\frac{1}{\varphi'^6}\begin{vmatrix}\varphi' & (\varphi^2)' & (f^3F')\\ \varphi'' & (\varphi^2)'' & (f^3F')'\\ \varphi''' & (\varphi^2)''' & (f^3F')''\end{vmatrix}+\ldots,$$

где общий член равен $(-1)^m\dfrac{\lambda^m}{1!\cdot 2!\ldots m!\,(\varphi')^{\frac{1}{2}m(m+1)}}$, умноженному на определитель, в котором элементы первой строки суть φ', $(\varphi^2)'$, $(\varphi^3)'$, ..., $(\varphi^{m-1})'$, (f^mF'), а каждая следующая строка есть производная предыдущей относительно a; F, f, F', ... обозначают $F(a)$, $f(a)$, $F'(a)$, ...

(Wronski, Philosophie de la Technie, Section II, 381. Относительно доказательств теоремы см. Cayley, Quarterly Journal, XII (1873); Transon, Nouv. Ann. de Math., XIII (1874) и C. Lagrange, Brux. Mém. Couronnés, 4°, XLVII, № 2 (1886).)

14. Пусть функция $W(a, b, x)$ определяется рядом

$$W(a, b, x) = x + \frac{a-b}{2!}x^2 + \frac{(a-b)(a-2b)}{3!}x^3 + \ldots,$$

сходящимся при $|x| < \frac{1}{|b|}$; показать, что

$$\frac{d}{dx} W(a, b, x) = 1 + (a-b)\, W(a-b, b, x);$$

кроме того, доказать, что если $y = W(a, b, x)$, то $x = W(b, a, y)$.

Примерами таких функций являются:

$$W(1, 0, x) = e^x - 1,$$
$$W(0, 1, x) = \lg(1+x),$$
$$W(a, 1, x) = \frac{(1+x)^a - 1}{a}.$$

(Ježek)

15. Доказать, что

$$\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n} = \frac{1}{a_0} + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!\, a_0^{n+1}} G_n,$$

где

$$G_n = \begin{vmatrix} 2a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 4a_2 & 3a_1 & 2a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 6a_3 & 5a_2 & 4a_1 & 3a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (2n-2)\, a_{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & (n-1)\, a_0 \\ na_n & (n-1)\, a_{n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_1 \end{vmatrix},$$

и получить подобное же выражение для

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(Mangeot, Ann. de l'École norm. sup. (3), XIV)

16. Показать, что

$$\frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{n} a_r x^r} = -\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r+1} \frac{\partial S_{r+1}}{\partial a_1} x^r,$$

где S_r — сумма r-х степеней обратных величин корней уравнения

$$\sum_{r=0}^{n} a_r x^r = 0.$$

(Gambioli, Bologna Memorie, 1892)

17. Пусть $f_n(z)$ обозначает n-ю производную функции $f(z)$, и пусть $f_{-n}(z)$ обозначает тот из n кратных интегралов функции $f(z)$, который имеет нуль n-го порядка в $z=0$; требуется показать, что если ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f_n(z)\, g_{-n}(x)$ сходится, то он представляет функцию от $z+x$; если область сходимости включает начало координат в плоскости x, то ряд равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{-n}(z+x)\, g_n(0).$$

Из этого результата, положив $g(z)=1$, получить ряд Тейлора.

(Guichard)

18. Показать, что если x не является целым числом, то

$$\sum_{m=-\nu}^{\nu} \sum_{n=-\nu}^{\nu} \frac{2x+m+n}{(x+m)^2(x+n)^2} \to 0,$$

когда $\nu \to \infty$, предполагая, что все члены, для которых $m=n$, исключаются из суммирования.

(Math. Trip., 1895)

19. Вычислить предел суммы

$$\sum_{n=-q}^{p} \left(\frac{1}{(-1)^n x - a - n} + \frac{1}{n} \right),$$

где значение $n=0$ исключается, а p, q — положительные целые числа, которые нужно безгранично увеличивать.

(Math. Trip., 1896)

20. Пусть $F(x) = e^{\int\limits_0^x x\pi \operatorname{ctg}(x\pi)\, dx}$; показать, что

$$F(x) = e^{x} \frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{n}} \right\}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x+\frac{1}{2}\frac{x^2}{n}} \right\}}$$

и что функция, определенная таким образом, удовлетворяет соотношениям

$$F(-x) = \frac{1}{F(x)}, \quad F(x)\cdot F(1-x) = 2\sin x\pi.$$

Далее, полагая

$$\psi(z) = z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \ldots = -\int_0^z \lg(1-t)\frac{dt}{t},$$

показать, что

$$F(x) = e^{\frac{1}{2}\pi i x^2 - \frac{1}{2\pi i}\psi\left(1-e^{-2\pi i x}\right)}$$

при

$$|1-e^{-2\pi i x}| < 1.$$

(Trinity, 1898)

21. Показать, что

$$\left[1+\left(\frac{k}{x}\right)^n\right]\left[1+\left(\frac{k}{2\pi-x}\right)^n\right]\left[1+\left(\frac{k}{2\pi+x}\right)^n\right]\times$$
$$\times\left[1+\left(\frac{k}{4\pi-x}\right)^n\right]\left[1+\left(\frac{k}{4\pi+x}\right)^n\right]\ldots=$$
$$=\frac{\prod\limits_{g=1}^{\leqslant\frac{1}{2}n}\left\{1-2e^{-\alpha_g}\cos(x+\beta_g)+e^{-2\alpha_g}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{1-2e^{-\alpha_g}\cos(x-\beta_g)+e^{-2\alpha_g}\right\}^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}n}(1-\cos x)^{\frac{1}{2}n}e^{-k\cos\frac{\pi}{n}}},$$

где

$$\alpha_g=k\sin\frac{2g-1}{n}\pi,\quad \beta_g=k\cos\frac{2g-1}{n}\pi,\qquad 0<x<2\pi.$$

(Mildner)

22. Пусть $|x|<1$ и a не является целым положительным числом; показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n-a}=\frac{2\pi i x^a}{1-e^{2a\pi i}}+\frac{x}{1-e^{2a\pi i}}\int\limits_C\frac{t^{a-1}-x^{a-1}}{t-x}\,dt,$$

где C — контур в плоскости t, окружающий точки 0, x.

(Lerch, Časopis, XXI, 65—68 (1892))

23. Пусть $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ... — любые многочлены от z, $F(z)$ — любая интегрируемая функция и $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, ... — многочлены, определяемые формулами

$$\int_a^b F(x)\frac{\varphi_1(z)-\varphi_1(x)}{z-x}\,dx=\psi_1(z),$$

$$\int_a^b F(x)\varphi_1(x)\frac{\varphi_2(z)-\varphi_2(x)}{z-x}\,dx=\psi_2(z),$$

$$\int_a^b F(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_{m-1}(x)\frac{\varphi_m(z)-\varphi_m(x)}{z-x}\,dx=\psi_m(z);$$

показать, что

$$\int_a^b\frac{F(x)\,dx}{z-x}=\frac{\psi_1(z)}{\varphi_1(z)}+\frac{\psi_2(z)}{\varphi_1(z)\varphi_2(z)}+\frac{\psi_3(z)}{\varphi_1(z)\varphi_2(z)\varphi_3(z)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\psi_m(z)}{\varphi_1(z)\varphi_2(z)\ldots\varphi_m(z)}+$$
$$+\frac{1}{\varphi_1(z)\varphi_2(z)\ldots\varphi_m(z)}\int_a^b F(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_m(x)\frac{dx}{z-x}.$$

24. Система функций $p_0(z)$, $p_1(z)$, $p_2(z), \ldots$ определяется формулами

$$p_0(z) = 1, \quad p_{n+1}(z) = (z^2 + a_n z + b_n) p_n(z),$$

где a_n и b_n — данные функции от n, которые стремятся соответственно к пределам 0 и -1, когда $n \to \infty$.

Показать, что областью сходимости ряда вида $\sum e_n p_n(z)$, где $e_1, e_2, \ldots$ не зависят от z, будет овал Кассини с фокусами $+1$, -1.

Показать, что всякая функция $f(z)$, аналитическая внутри овала и на его контуре, для внутренних точек овала может быть разложена в ряд

$$f(z) = \sum \left(c_n + z c_n'\right) p_n(z),$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int (a_n + z)\, q_n(z) f(z)\, dz, \quad c_n' = \frac{1}{2\pi i} \int q_n(z) f(z)\, dz,$$

причем интегралы берутся по границе области, а функции $q_n(z)$ определяются формулами

$$q_0(z) = \frac{1}{z^2 + a_0 z + b_0}, \quad q_{n+1}(z) = \frac{1}{z^2 + a_{n+1} z + b_{n+1}} q_n(z).$$

(Pincherle, Rend. dei Lincei (4), V, 8 (1889))

25. Пусть C — контур, окружающий точку a, и пусть функции $\varphi(z)$ и $f(z)$ аналитические, когда z лежит на C или внутри него. Пусть t будет настолько мало, что

$$|t\varphi(z)| < |z - a|,$$

когда z лежит на контуре C.

Разложением интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z) \frac{1 - t\varphi'(z)}{z - a - t\varphi(z)}\, dz$$

по возрастающим степеням t показать, что он равен

$$f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} [f'(a) \{\varphi(a)\}^n].$$

Отсюда, применяя результаты §§ 6.3, 6.31, получить теорему Лагранжа.

ГЛАВА 8

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ И СУММИРУЕМЫЕ РЯДЫ

8.1. Простой пример асимптотического разложения

Рассмотрим функцию $f(x)=\int\limits_x^\infty t^{-1}e^{x-t}\,dt$, где x — вещественная и положительная величина и интеграл взят по вещественной оси.

Повторным интегрированием по частям получим

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}+(-1)^n n!\int\limits_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt.$$

В связи с функцией $f(x)$ мы рассмотрим выражение

$$u_{n-1}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

и будем писать

$$\sum_{m=0}^{n} u_m=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2!}{x^3}-\ \ldots\ +\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}=S_n(x).$$

Тогда мы имеем

$$\left|\frac{u_m}{u_{m-1}}\right|=mx^{-1}\to\infty \quad \text{при} \quad m\to\infty.$$

Ряд $\sum u_m$ *будет поэтому расходящимся для всех значений* x. Тем не менее этот ряд может быть применен для вычисления $f(x)$, что можно видеть из следующего.

Возьмем определенное значение для числа n и вычислим значение S_n.

Мы имеем

$$f(x)-S_n(x)=(-1)^{n+1}(n+1)!\int\limits_x^\infty \frac{e^{x-t}\,dt}{t^{n+2}},$$

отсюда, поскольку $e^{x-t} \leqslant 1$,

$$|f(x) - S_n(x)| = (n+1)! \int_x^\infty \frac{e^{x-t}\,dt}{t^{n+2}} < (n+1)! \int_x^\infty \frac{dt}{t^{n+2}} = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Для значений x, достаточно больших, правая часть этого неравенства будет весьма мала. Так, для $x \geqslant 2n$ будем иметь

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{1}{2^{n+1}n^2},$$

которое для больших значений n будет весьма мало. Поэтому получается, что *значение функции $f(x)$ может быть вычислено с большой точностью для больших значений x, если взять сумму надлежащего числа членов ряда $\sum u_m$*.

Беря даже довольно малые значения x и n, получим

$$S_5(10) = 0{,}09152, \quad \text{причем} \quad 0 < f(10) - S_5(10) < 0{,}00012.$$

В силу этого обстоятельства говорят, что ряд является *асимптотическим разложением* функции $f(x)$. Точное определение асимптотического разложения мы сейчас дадим.

8.2. Определение асимптотического разложения

Будем говорить, что расходящийся ряд

$$A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \ldots + \frac{A_n}{z^n} + \ldots,$$

сумму первых $n+1$ членов которого обозначим через $S_n(z)$, представляет собой *асимптотическое разложение* функции $f(z)$ в данной области значений $\arg z$, если выражение $R_n(z) = z^n\{f(z) - S_n(z)\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|z| \to \infty} R_n(z) = 0 \qquad (n \text{ фиксировано}),$$

даже если

$$\lim_{n \to \infty} |R_n(z)| = \infty \qquad (z \text{ фиксировано}).$$

В этом случае мы можем сделать

$$|z^n\{f(z) - S_n(z)\}| < \varepsilon,$$

где ε — произвольно малая величина, взяв $|z|$ достаточно большим.

То обстоятельство, что данный ряд есть асимптотическое разложение функции $f(z)$, обозначается так:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{-n}.$$

Определение, данное только что, принадлежит Пуанкаре[1]). Однако частные случаи асимптотических разложений были открыты и применялись в XVIII столетии Стирлингом, Маклореном и Эйлером. Асимптотические разложения играют большую роль в теории линейных дифференциальных уравнений и в небесной механике; некоторые приложения будут даны в дальнейших главах настоящей книги.

Рассмотренный в § 8.1 пример, очевидно, удовлетворяет только что данному определению, ибо, если x положительно, то

$$|x^n\{f(x)-S_n(x)\}|<n!\,x^{-1}\to 0, \quad \text{когда} \quad x\to\infty.$$

Для простоты изложения мы будем рассматривать в этой главе большинство асимптотических разложений только при положительных значениях аргумента. Для комплексных значений аргумента рассуждения нуждаются лишь в некоторых дополнениях.

8.21. Другой пример асимптотического разложения

В качестве второго примера рассмотрим функцию $f(x)$, представляемую рядом

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{x+k},$$

где $x>0$ и $0<c<1$.

Отношение k-го члена этого ряда к $(k-1)$-му будет меньше c, и следовательно, ряд будет сходящимся для всех положительных значений x. Ограничимся положительными значениями x. Мы имеем при $x>k$

$$\frac{1}{x+k}=\frac{1}{x}-\frac{k}{x^2}+\frac{k^2}{x^3}-\frac{k^3}{x^4}+\frac{k^4}{x^5}-\ldots$$

Если бы мы имели право[2]) разложить каждую дробь $\frac{1}{x+k}$ таким образом и расположить затем ряд для $f(x)$ по убывающим степеням x, то формально мы получили бы ряд

$$\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots+\frac{A_n}{x^n}+\ldots,$$

где

$$A_n=(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}k^{n-1}c^k.$$

Но это действие незаконно, и действительно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}A_nx^{-n}$ расходится. Тем не менее мы можем показать, что он представляет собой асимптотическое разложение функции $f(x)$.

---

[1]) Poincaré, Acta Mathematica, VIII, 295—344 (1886).

[2]) Мы не имеем права поступить таким образом потому, что $k>x$ для всех членов ряда, начиная с некоторого места.

Положим

$$S_n(x) = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_n}{x^{n+1}}.$$

Тогда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c^k}{x} - \frac{kc^k}{x^2} + \frac{k^2c^k}{x^3} - \ldots + \frac{(-1)^n k^n c^k}{x^{n+1}} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 1 - \left(-\frac{k}{x} \right)^{n+1} \right\} \frac{c^k}{x+k},$$

так что

$$|f(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{k}{x} \right)^{n+1} \frac{c^k}{x+k} \right| < x^{-n-2} \sum_{k=1}^{\infty} k^{n+1} c^k.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{n+1} c^k$ сходится для любого данного значения n; пусть его сумма равна C_n. Тогда

$$|f(x) - S_n(x)| < C_n x^{-n-2}$$

и, следовательно,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{-n}.$$

Пример. Пусть $f(x) = \int\limits_x^{\infty} e^{x^2 - t^2}\, dt$, где x положительно и путем интегрирования служит вещественная ось; доказать, что

$$f(x) \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + \ldots$$

[Стокс в 1857 г. показал, что

$$\int\limits_0^x e^{x^2 - t^2}\, dt \sim \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2} - \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + \ldots \right);$$

верхний или нижний знак берется соответственно тому, будет ли

$$-\frac{1}{2}\pi < \arg x < \frac{1}{2}\pi \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\pi < \arg x < \frac{3}{2}\pi.]$$

8.3. Умножение асимптотических разложений

Покажем теперь, что два асимптотических разложения, годных для одной и той же области значений $\arg z$, могут быть перемножены таким же образом, как и обыкновенные ряды, причем результатом этого умножения является новое асимптотическое разложение.

Пусть

$$f(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^{-m}, \quad \varphi(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} B_m z^{-m},$$

и пусть $S_n(z)$ и $T_n(z)$ будут суммы их первых $n+1$ членов, так что при фиксированном n

$$f(z) - S_n(z) = o(z^{-n}), \quad \varphi(z) - T_n(z) = o(z^{-n})\,^{1)}.$$

Тогда, если

$$C_m = A_0 B_m + A_1 B_{m-1} + \ldots + A_m B_0,$$

то, очевидно,

$$S_n(z) T_n(z) = \sum_{m=0}^{n} C_m z^{-m} + o(z^{-n}).$$

Но

$$f(z)\varphi(z) = \{S_n(z) + o(z^{-n})\}\{T_n(z) + o(z^{-n})\} =$$
$$= S_n(z) T_n(z) + o(z^{-n}) = \sum_{m=0}^{n} C_m z^{-m} + o(z^{-n}).$$

Этот результат верен для *любого* фиксированного значения n, и мы видим, что

$$f(z)\varphi(z) \sim \sum_{m=0}^{\infty} C_m z^{-m}.$$

8.31. Интегрирование асимптотических разложений

Покажем теперь, что можно интегрировать асимптотическое разложение почленно и что полученный в результате ряд будет асимптотическим разложением интеграла функции, представляемой первоначальным рядом.

Пусть

$$f(x) \sim \sum_{m=2}^{\infty} A_m x^{-m},$$

положим

$$S_n(x) = \sum_{m=2}^{n} A_m x^{-m}.$$

Тогда при заданном положительном числе ε мы можем найти такое x_0, что

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon x^{-n}, \quad \text{когда } x > x_0,$$

---

[1]) См. § 2.11; мы употребляем символ $o(z^{-n})$ для обозначения *любой* функции $\psi(z)$ такой, что $z^n \psi(z) \to 0$, когда $|z| \to \infty$.

и поэтому

$$\left|\int_x^\infty f(x)\,dx-\int_x^\infty S_n(x)\,dx\right|\leqslant\int_x^\infty |f(x)-S_n(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{(n-1)x^{n-1}}.$$

Но

$$\int_x^\infty S_n(x)\,dx=\frac{A_2}{x}+\frac{A_3}{2x^2}+\ldots+\frac{A_n}{(n-1)x^{n-1}},$$

и поэтому

$$\int_x^\infty f(x)\,dx\sim\sum_{m=2}^\infty\frac{A_m}{(m-1)x^{m-1}}.$$

С другой стороны, дифференцировать асимптотическое разложение, вообще говоря, недопустимо [1]), что можно видеть из рассмотрения $e^{-x}\sin(e^x)$.

8.32. Единственность асимптотического разложения

Естественно возникает вопрос: может ли данный ряд представлять асимптотическое разложение нескольких различных функций? Ответ на это будет утвердительный. Чтобы показать это, заметим сначала, что существуют функции $L(x)$, которые асимптотически представляются рядом, все члены которого нули, т. е. такие функции, что $\lim\limits_{x\to\infty} x^nL(x)=0$ для любого фиксированного значения n. Функция e^{-x} будет такой функцией для положительных x. Асимптотическое разложение некоторой функции $J(x)$ будет поэтому асимптотическим разложением и функции $J(x)+L(x)$ [2]).

С другой стороны, функция не может быть представлена более чем одним определенным асимптотическим разложением в данной области значений z, ибо если

$$f(z)\sim\sum_{m=0}^\infty A_mz^{-m},\quad f(z)\sim\sum_{m=0}^\infty B_mz^{-m},$$

то

$$\lim_{z\to\infty} z^n\left(A_0+\frac{A_1}{z}+\ldots+\frac{A_n}{z^n}-B_0-\frac{B_1}{z}-\ldots-\frac{B_n}{z^n}\right)=0,$$

что возможно только при $A_0=B_0$, $A_1=B_1$, ...

Важные примеры асимптотических разложений будут рассмотрены ниже в связи с гамма-функцией (гл. 12) и функциями Бесселя (гл. 17).

---

[1]) В статье Ritt, Bull. American Math. Soc., XXIV, 225—227 (1918) приведена теорема относительно дифференцирования асимптотических разложений, представляющих аналитические функции.

[2]) Доказано, что когда коэффициенты в разложении удовлетворяют определенным неравенствам, то существует только одна *аналитическая* функция с таким асимптотическим разложением. См. Phil. Trans. 213, A, 279—313 (1911).

8.4. Методы «суммирования» рядов

Мы видели, что можно получить разложение вида

$$f(x)=\sum_{m=0}^{n} A_m x^{-m}+R_n(x),$$

где $R_n(x)\to\infty$ при $n\to\infty$ и ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} A_m x^{-m}$ не сходится.

Установим теперь, какой вообще смысл можно придать понятию «сумма» в случае расходящегося ряда. Иными словами, мы собираемся сформулировать определенные правила, согласно которым по заданным числам a_0, a_1, a_2, ... может быть получено число S такое, что $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится; при этом число S может существовать и в том случае, когда рассматриваемый ряд расходится.

8.41. Метод суммирования Бореля[1])

Мы видели (§ 7.81), что формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n=\int_0^{\infty} e^{-t}\varphi(tz)\,dt,$$

где

$$\varphi(tz)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n t^n z^n}{n!},$$

имеет место внутри круга сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Если интеграл существует в точках z вне этого круга, то мы будем считать этот интеграл «суммой по Борелю» ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

---

[1]) Borel, Leçons sur les séries divergentes, 97—115, 1901.

Так, например, при $\operatorname{Re} z < 1$ «суммой по Борелю» для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ будет

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-t} e^{tz}\, dt = (1 - z)^{-1}.$$

Если существует «сумма Бореля», то мы говорим, что ряд «суммируем (B)».

8.42. Метод суммирования Эйлера[1])

К методу суммирования, по существу принадлежащему Эйлеру, приводит теорема § 3.71; «сумма» ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ может быть определена как

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

если этот предел существует.

Так, «сумма» ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ равна

$$\lim_{x \to 1-0} (1 - x + x^2 - \ldots) = \lim_{x \to 1-0} (1 + x)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

8.43. Метод суммирования Чезаро[2])

Пусть $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$; тогда, если существует предел

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n),$$

то мы говорим, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *«суммируем* (C 1)» и что его (C 1)-сумма равна S. Необходимо установить «условие совместности»[3]), а именно, что

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

если этот ряд сходится.

Для получения требуемого результата положим

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m = s, \quad \sum_{m=1}^{n} s_m = nS_n;$$

---

[1]) Euler, Institut. Calc. Diff. (1755). См. «Введение» цитированной выше книги Бореля. (Этот метод чаще называют методом Абеля или методом Пуассона. — *Прим. ред.*)

[2]) Cesàro, Bulletin des Sciences Math. (2), XIV, 114.

[3]) См. конец § 8.4.

тогда мы должны доказать, что $S_n \to s$. При заданном ε мы можем выбрать такое n, что $\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| < \varepsilon$ для всех значений p и, следовательно, $|s - s_n| \leqslant \varepsilon$.

Далее, если $\nu > n$, мы имеем

$$S_\nu = a_1 + a_2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) + \ldots + a_n\left(1 - \frac{n-1}{\nu}\right) + \\ + a_{n+1}\left(1 - \frac{n}{\nu}\right) + \ldots + a_\nu\left(1 - \frac{\nu-1}{\nu}\right).$$

Так как $1,\ 1 - \nu^{-1},\ 1 - 2\nu^{-1}, \ldots$ есть положительная убывающая последовательность, то из неравенства Абеля (§ 2.301) следует, что

$$\left|a_{n+1}\left(1 - \frac{n}{\nu}\right) + a_{n+2}\left(1 - \frac{n+1}{\nu}\right) + \ldots + a_\nu\left(1 - \frac{\nu-1}{\nu}\right)\right| < \left(1 - \frac{n}{\nu}\right)\varepsilon.$$

Поэтому

$$\left|S_\nu - \left\{a_1 + a_2\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) + \ldots + a_n\left(1 - \frac{n-1}{\nu}\right)\right\}\right| < \left(1 - \frac{n}{\nu}\right)\varepsilon.$$

Заставляя $\nu \to \infty$, мы видим, что если S — любая из предельных точек (§ 2.21) последовательности S_ν, то

$$\left|S - \sum_{m=1}^{n} a_m\right| \leqslant \varepsilon.$$

Поэтому, так как $|s - s_n| \leqslant \varepsilon$, мы имеем

$$|S - s| \leqslant 2\varepsilon.$$

Это неравенство верно для *любого* положительного значения ε, и мы заключаем, как в § 2.21, что $S = s$; отсюда следует, что S_ν имеет единственный предел s, а это и есть то утверждение, которое требовалось доказать.

Пример 1. Дать определение «равномерной суммируемости $(C\,1)$ для ряда с переменными членами».

Пример 2. Пусть $b_{n,\nu} \geqslant b_{n+1,\nu} \geqslant 0$, когда $n < \nu$, и пусть при n фиксированном $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_{n,\nu} = 1$; тогда, если $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m = s$, то

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\nu} a_n b_{n,\nu}\right\} = s.$$

8.431. Общий метод суммирования Чезаро

Говорят, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ «суммируем $(C\ r)$», если существует $\lim_{\nu \to \infty} \sum_{n=0}^{\nu} a_n b_{n,\nu}$, где

$$b_{0,\nu}=1, \qquad b_{n,\nu}=\left\{\left(1+\frac{r}{\nu+1-n}\right)\left(1+\frac{r}{\nu+2-n}\right)\dots\left(1+\frac{r}{\nu-1}\right)\right\}^{-1}.$$

Из примера 2§8.43 следует, что «условие совместности» удовлетворено; в самом деле, можно доказать [1]), что если ряд суммируем $(C\ r')$, то он будет также суммируем $(C\ r)$, когда $r > r'$; условие совместности является частным случаем этого результата, когда $r' = 0$.

8.44. Метод суммирования Рисса [2])

Более общий метод «суммирования» ряда, чем предыдущий, состоит в суммировании при помощи предела

$$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{n=1}^{\nu} \left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda_\nu}\right)^r a_n,$$

где λ_n — любая вещественная функция n, стремящаяся к бесконечности вместе с n. Про ряд, для которого существует этот предел, говорят, что он будет «суммируем $(R\ r)$ с сумматорной функцией λ_n».

8.5. Теорема Харди [3])

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *суммируем* $(C\ 1)$. *Тогда, если*

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится* [4]).

Пусть $s_n = a_1 + a_3 + \dots + a_n$; тогда, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем $(C\ 1)$, имеем

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n = n\{s + o(1)\},$$

где s — $(C\ 1)$-сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

---

[1]) Bromwich, Infinite series, § 122.

[2]) Riesz, Comptes Rendus, CXLIX, 18—21 (1910).

[3]) Hardy, Proc. London Math. Soc. (2), VIII, 302—304 (1910). Доказательством, данным здесь, мы обязаны Литлвуду.

[4]) Теорема Харди относится к числу так называемых тауберовых теорем. Подробней об этом см. книгу Харди «Расходящиеся ряды», ИЛ, 1951 (*Прим. ред.*)

Положим

$$s_m - s = t_m \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

и

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = \sigma_n.$$

При этих обозначениях достаточно показать, что если $|a_n| < Kn^{-1}$, где K не зависит от n, и если $\sigma_n = no(1)$, то $t_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Предположим сначала, что $a_1, a_2, \ldots$ вещественны. Тогда, если t_n не стремится к нулю, то существует такое положительное число h, что найдется бесконечное множество чисел t_n, которые удовлетворяют *или* (I) условию $t_n > h$, *или* (II) условию $t_n < -h$. Покажем,

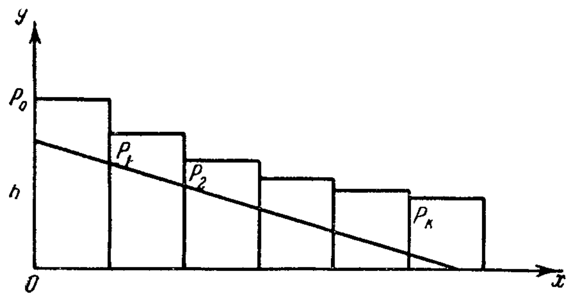

Рис. 3.

что и то и другое из этих предположений приводит к противоречию. Возьмем первое предположение[1]) и выберем n так, что $t_n > h$.

Мы имеем при $r = 0, 1, 2, \ldots$

$$|a_{n+r}| < \frac{K}{n}.$$

Отметим на чертеже точки P_r, координаты которых в декартовой системе координат будут (r, t_{n+r}). Так как $t_{n+r+1} - t_{n+r} = a_{n+r+1}$, то наклон отрезка $P_r P_{r+1}$ будет меньше, чем $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{K}{n}\right)$.

Поэтому точки $P_0, P_1, P_2, \ldots$ лежат выше линии $y = h - x \operatorname{tg} \theta$. Пусть P_k — последняя из точек $P_0, P_1, \ldots$, лежащая слева от $x = h \operatorname{ctg} \theta$, так что $k \leqslant h \operatorname{ctg} \theta$.

Начертим прямоугольники, как показано на рис. 3. Площадь этих прямоугольников превосходит площадь треугольника, ограниченного

---

[1]) Читатель легко увидит, что второе предположение также приводится к противоречию с помощью рассуждений, совершенно сходных с теми, которые мы употребим при разборе первого предположения.

прямой $y=h-x\operatorname{tg}\theta$ и осями координат; а это значит, что

$$\sigma_{n+k}-\sigma_{n-1}=t_n+t_{n+1}+\ldots+t_{n+k}>\frac{1}{2}h^2\operatorname{ctg}\theta=\frac{1}{2}h^2K^{-1}n.$$

Но

$$|\sigma_{n+k}-\sigma_{n-1}|\leqslant|\sigma_{n+k}|+|\sigma_{n-1}|=$$
$$=(n+k)\cdot o(1)+(n-1)\cdot o(1)=n\cdot o(1),$$

поскольку $k\leqslant hnK^{-1}$, а h и K не зависят от n.

Поэтому для некоторой последовательности значений n, стремящихся к бесконечности,

$$\frac{1}{2}h^2K^{-1}n<n\cdot o(1),$$

что невозможно, так как $\frac{1}{2}h^2K^{-1}$ *не есть* $o(1)$ *при* $n\to\infty$. Это противоречие получено в предположении, что $\overline{\lim}\,t_n\geqslant h>0$; поэтому $\overline{\lim}\,t_n\leqslant 0$. Подобным же образом, взяв аналогичный случай, в котором $t_n\leqslant -h$, мы придем к заключению, что $\underline{\lim}\,t_n\geqslant 0$. Поэтому в силу неравенства $\overline{\lim}\,t_n\geqslant\underline{\lim}\,t_n$ мы имеем

$$\overline{\lim}\,t_n=\underline{\lim}\,t_n=0,$$

и таким образом, $t_n\to 0$.

Иначе говоря, $s_n\to s$, то есть *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходится и сумма его равна* s.

Если бы a_n было комплексной величиной, то, рассматривая отдельно $\operatorname{Re}a_n$ и $\operatorname{Im}a_n$, мы нашли бы, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{Re}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{Im}a_n$ сходятся по только что доказанной теореме, а поэтому будет сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Читатель увидит в гл. 9, что этот результат играет большую роль в современной теории рядов Фурье.

Следствие. *Если* $a_n(\xi)$ — *такие функции от* ξ, *что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(\xi)$ *равномерно суммируем* $(C\,1)$ *в некоторой области значений* ξ, *и если* $|a_n(\xi)|<Kn^{-1}$, *где* K *не зависит от* ξ, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(\xi)$ *будет равномерно сходиться в той же области.*

Сохраним прежние обозначения; если $t_n(\xi)$ не стремится равномерно к нулю, то мы можем найти такое положительное число h, не зависящее от n и ξ, что найдется бесконечная последовательность значений n таких, что $t_n(\xi_n) > h$ или $t_n(\xi_n) < -h$ для некоторой последовательности точек ξ_n из рассматриваемой области[1]); значение ξ_n зависит от рассматриваемого значения n.

Тогда, как и в первой теореме, мы найдем

$$\frac{1}{2} h^2 K^{-1} n < no(1)$$

для некоторой последовательности значений n, стремящихся к бесконечности. Противоречие, заключающееся в неравенстве[2]), показывает, что такого числа h не существует; следовательно, $t_n(\xi) \to 0$ равномерно.

ЛИТЕРАТУРА

H. Poincaré, Acta Mathematica, VIII, 295—344 (1886).
E. Borel, Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1901.
T. J. I'a Bromwich, Theory of infinite series, гл. XI, 1908.
E. W. Barnes, Phil. Trans. of the Royal Society, 206A, 249—297 (1906).
G. H. Hardy и J. E. Littlewood[3]), Proc. London Math. Soc. (2), XI, 1—16 (1913).
G. N. Watson, Phil. Trans. of the Royal Society, 213A, 279—313 (1911).
S. Chapman[4]), Proc. London Math. Soc. (2), IX, 369—409 (1911).
Hj. Mellin, Congrès des math. à Helsingfors, 1—17 (1922).
Г. Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, 1951.
Н. Г. де Брёйн, Асимптотические методы в анализе, ИЛ, М., 1961.
А. Эрдейи, Асимптотические разложения, Физматгиз, М., 1962.

Примеры

1. Показать, что

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt \sim \frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \ldots,$$

когда x вещественно и положительно.

2. Рассмотреть представление функции

$$f(x) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\, e^{tx}\,dt$$

(где x предполагается вещественным и положительным, а φ — функцией,

---

[1]) Предполагается, что $a_n(\xi)$ вещественно; распространение на комплексные переменные может быть сделано, как и в первой теореме. Если бы не существовало такого числа h, то $t_n(\xi)$ стремилось бы к нулю равномерно.

[2]) Необходимо отметить, что постоянные, входящие в неравенство, не зависят от ξ_n. Если бы K зависело от ξ_n, то K^{-1} было бы в действительности функцией от n и, может быть, было бы $o(1)$, как функция от n, и неравенство не привело бы к противоречию.

[3]) Эта работа содержит много ссылок на новые результаты.

[4]) На стр. 372 этого мемуара приведена библиография работ по суммируемым рядам.

подчиняющейся некоторым общим условиям) в виде ряда:

$$f(x)=\frac{\varphi(0)}{x}-\frac{\varphi'(0)}{x^2}+\frac{\varphi''(0)}{x^3}+\ldots$$

Показать, что в некоторых случаях (например, при $\varphi(t)=e^{at}$) этот ряд абсолютно сходится и представляет $f(x)$ для больших положительных значений x и что в некоторых других случаях он представляет собой асимптотическое разложение функции $f(x)$.

3. Показать, что

$$e^z z^{-a}\int\limits_z^\infty e^{-x}x^{a-1}\,dx\sim\frac{1}{z}+\frac{a-1}{z^2}+\frac{(a-1)(a-2)}{z^3}+\ldots$$

для больших положительных значений z.

(Legendre, Exercices de Calc. Int., 340, (1811))

4. Показать, что если при $x>0$

$$f(x)=\int\limits_0^\infty\left\{\lg u+\lg\left(\frac{1}{1-e^{-u}}\right)\right\}e^{-xu}\frac{du}{u},$$

то

$$f(x)\sim\frac{1}{2x}-\frac{B_1}{2^2x^2}+\frac{B_2}{4^2x^4}-\frac{B_3}{6^2x^6}+\ldots,$$

и, кроме того, показать, что $f(x)$ можно разложить в абсолютно сходящийся ряд вида

$$f(x)=\sum_{k=0}^\infty\frac{c_k}{(x+1)(x+2)\ldots(x+k)}.\qquad\text{(Schlömilch)}$$

5. Показать, что ряд $1+0+0-1+0+1+0+0-1+\ldots$, в котором два нуля предшествуют -1, а один нуль предшествует $+1$, «суммируется» методом Чезаро к сумме $\frac{3}{5}$.

(Euler, Borel)

6. Показать, что ряд $1-2!+4!-\ldots$ несуммируем методом Бореля, а ряд $1+0-2!+0+4!+\ldots$ суммируем.

ГЛАВА 9

РЯДЫ ФУРЬЕ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

9.1. Определение ряда Фурье[1])

Ряды типа

$$\frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots = \\ = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где a_n, b_n не зависят от x, играют большую роль во многих исследованиях. Они называются *тригонометрическими рядами*. Если имеется функция $f(t)$ такая, что $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$ существует как интеграл Римана или как несобственный интеграл, сходящийся абсолютно, и такая, что

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\,dt, \quad \pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\,dt,$$

то тригонометрический ряд называется *рядом Фурье*.

Тригонометрические ряды появились впервые в анализе в связи с исследованиями Даниила Бернулли о колебаниях струны. Даламбер ранее нашел решение уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ в виде $y = \frac{1}{2} \{f(x + at) + f(x - at)\}$, где $y = f(x)$ определяет начальную форму струны, с которой начинается переход от покоя к движению. Бернулли же показал, что формальным решением будет

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l},$$

---

[1]) Во всей этой главе (исключая § 9.11) предполагается, что все встречающиеся в ней числа *вещественные*.

если закрепленные концы струны имеют координаты $(0, 0)$ и $(l, 0)$, и утверждал, что это наиболее общее решение вопроса. Это показалось Даламберу и Эйлеру невозможным, поскольку таким рядом, имеющим период $2l$, казалось невозможным представить при $t=0$ такую функцию, как $cx(l-x)$ [1]). Между этими математиками возник спор, изложение которого приведено в книге Гобсона: Hobson, Functions of a Real Variable.

Фурье в своей «Теории теплоты» (Fourier, Théorie de la chaleur) исследовал большое число тригонометрических рядов и показал, что в большинстве частных случаев ряды Фурье *действительно сходятся к сумме* $f(x)$. Пуассон пытался дать общее доказательство этой теоремы (Poisson, Journal de l'École polytechnique, XII, 404—509 (1823)). Два доказательства были даны Коши (Cauchy, Mém. de l'Acad. R. des Sci., VI, 603—612 (1823), опубликовано в 1826 г., Oeuvres (1), II, 12—19, и Exercices de Math., II, 341—376, 1827, Oeuvres (2), VII, 393—430). Эти доказательства, основанные на теории интегрирования по контуру, относились скорее к частным классам функций, а одно из них несостоятельно. Второе доказательство было исследовано Харнаком (Harnack, Math. Ann., XXXII, 175—202 (1888)).

В 1829 г. Дирихле дал первое строгое доказательство [2]) того, что ряды Фурье, определяемые, как указано выше, действительно сходятся для довольно общего класса функций к сумме $f(x)$. Видоизменение этого доказательства было дано позже Бонне [3]).

Результат Дирихле состоит в следующем [4]): если $f(t)$ определена и ограничена в промежутке $(-\pi, \pi)$ и имеет только конечное число максимумов и минимумов и конечное число разрывов в этом промежутке, и если $f(t)$ определяется равенством

$$f(t+2\pi)=f(t)$$

вне области $(-\pi, \pi)$, то при

$$\pi a_n=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad \pi b_n=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

ряд $\frac{1}{2}a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ сходится к сумме

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

Позже Риман и Кантор развили теорию тригонометрических рядов в общей форме, а в последнее время Гурвиц, Фейер и другие исследовали свойства рядов Фурье для случая, когда ряд не обязательно сходится. Так, Фейер доказал замечательную теорему о том, что ряд Фурье (даже если он и не сходится) будет «суммируем $(C\ 1)$» во всех точках, в которых существуют $f(x\pm 0)$, и его $(C\ 1)$-сумма равна $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ при

---

[1]) Эта функция дает одну из простых начальных форм струны.

[2]) Dirichlet, Journal für Math., IV, 157—169 (1829).

[3]) Bonnet, Mémoires des Savants étrangers (Бельгийской академии), XXIII (1848—1850). Бонне применяет прямо вторую теорему о среднем, в то время как Дирихле при первоначальном доказательстве применяет приемы, в точности подобные тем, которыми доказывается теорема о среднем. См. § 9.4.

[4]) Условия, постулированные для $f(t)$, известны под названием *условий Дирихле*; мы увидим в §§ 9.2, 9.42, что они излишне ограничивают функцию.

условии, что интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$ абсолютно сходится. Одно из исследований о сходимости рядов Фурье, которое мы дадим позже (§ 9.42), основано на этом выводе. Подробные сведения об исследованиях вплоть до Римана можно найти в книге Гобсона (Hobson, Functions of a real variable) и в курсе анализа бесконечно малых Валле-Пуссена.

9.11. Область, внутри которой тригонометрический ряд сходится

Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nz+b_n\sin nz),$$

где z может быть комплексным. Если мы обозначим e^{iz} через ζ, то ряд примет вид

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(a_n-ib_n)\zeta^n+\frac{1}{2}(a_n+ib_n)\zeta^{-n}\right\}.$$

Этот ряд Лорана сходится, если только он вообще сходится, в некоторой области $a\leqslant|\zeta|\leqslant b$, где a, b — положительные постоянные.

Но если $z=x+iy$, то $|\zeta|=e^{-y}$, и таким образом, мы получаем в качестве области сходимости тригонометрического ряда полосу в плоскости z, определяемую неравенством

$$\lg a\leqslant -y\leqslant \lg b.$$

Практически наиболее важным случаем является случай, когда $a=b=1$, т. е. когда полоса состоит из прямой линии, именно вещественной оси.

Пример 1. Пусть

$$f(z)=\sin z-\frac{1}{2}\sin 2z+\frac{1}{3}\sin 3z-\frac{1}{4}\sin 4z+\ldots,$$

где $z=x+iy$.

Переписав это в виде

$$f(z)=-\frac{1}{2}i\left(e^{iz}-\frac{1}{2}e^{2iz}+\frac{1}{3}e^{3iz}-\ldots\right)+$$
$$+\frac{1}{2}i\left(e^{-iz}-\frac{1}{2}e^{-2iz}+\frac{1}{3}e^{-3iz}-\ldots\right),$$

мы замечаем, что первый ряд сходится[1]) только при $y\geqslant 0$, а второй только при $y\leqslant 0$.

Заменяя z на x (x вещественно), мы видим по теореме Абеля (§ 3.71), что

$$f(x)=\lim_{r\to 1}\left(r\sin x-\frac{1}{2}r^2\sin 2x+\frac{1}{3}r^3\sin 3x-\ldots\right)=$$
$$=\lim_{r\to 1}\left\{-\frac{1}{2}i\left(re^{ix}-\frac{1}{2}r^2e^{2ix}+\frac{1}{3}r^3e^{3ix}-\ldots\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}i\left(re^{-ix}-\frac{1}{2}r^2e^{-2ix}+\frac{1}{3}r^3e^{-3ix}-\ldots\right)\right\}.$$

[1]) Эти ряды *действительно сходятся* при $y=0$, см. § 2.31, пример 2.

Но это есть предел одного из значений выражения

$$-\frac{1}{2} i \lg (1+re^{ix}) + \frac{1}{2} i \lg (1+re^{-ix}),$$

а при $r \to 1$ (если $-\pi < x < \pi$) последнее стремится к $\frac{1}{2} x + k\pi$, где k — некоторое целое число.

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n}$ сходится равномерно (§ 3.35, пример 1) на отрезке $-\pi + \delta \leqslant x \leqslant \pi - \delta$, где δ — любая положительная постоянная и следовательно, представляет на этом отрезке непрерывную функцию.

Так как $\frac{1}{2} x$ непрерывна, то k имеет одно и то же значение, где бы ни лежало x на этом отрезке; положив $x = 0$, видим, что $k = 0$.

Поэтому $f(x) = \frac{1}{2} x$ *при* $-\pi < x < \pi$. Однако при $\pi < x < 3\pi$

$$f(x) = f(x-2\pi) = \frac{1}{2}(x-2\pi) = \frac{1}{2} x - \pi,$$

и вообще если

$$(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi,$$

то

$$f(x) = \frac{1}{2} x - n\pi.$$

Мы пришли, таким образом, к примеру, в котором $f(x)$ не представляется единым аналитическим выражением.

Следует заметить, что такое явление может наблюдаться только в том случае, когда полоса, в которой ряд Фурье сходится, сводится к прямой. Ибо если ширина полосы не нуль, то соответствующий ряд Лорана сходится в кольце ненулевой ширины и представляет аналитическую функцию от ζ в этом кольце; а так как ζ — аналитическая функция от z, то ряд Фурье представляет аналитическую функцию от z; таков, например, ряд

$$r \sin x - \frac{1}{2} r^2 \sin 2x + \frac{1}{3} r^3 \sin 3x - \ldots,$$

где $0 < r < 1$; его сумма равна $\operatorname{arctg} \frac{r \sin x}{1 + r \cos x}$, где arctg представляет угол, заключенный между $\pm \frac{1}{2} \pi$.

Пример 2. Если $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos nx}{n^2} = \frac{1}{12} \pi^2 - \frac{1}{4} x^2.$$

Этот ряд сходится только когда x вещественно; согласно § 3.34 сходимость будет абсолютной и равномерной.

Так как

$$\frac{1}{2} x = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \ldots \quad (-\pi + \delta \leqslant x \leqslant \pi - \delta, \ \delta > 0)$$

и этот ряд сходится равномерно, то мы можем проинтегрировать его почленно от 0 до x (§ 4.7), и следовательно,

$$\frac{1}{4}x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(1-\cos nx)}{n^2} \qquad (-\pi+\delta\leqslant x\leqslant\pi-\delta).$$

Иначе говоря, если $-\pi+\delta\leqslant x\leqslant\pi-\delta$, то

$$C-\frac{1}{4}x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2},$$

где C — постоянная, пока неопределенная.

Но так как ряд в правой части сходится равномерно на всем отрезке $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, то его сумма будет непрерывной функцией от x на этом отрезке, и таким образом, переходя к пределу при $x\to\pm\pi$, мы видим, что последнее соотношение остается справедливым, когда $x=\pm\pi$.

Для определения C проинтегрируем каждую часть последнего соотношения (§ 4.7) в пределах $-\pi$, π; получим

$$2\pi C-\frac{1}{6}\pi^3=0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{12}\pi^2-\frac{1}{4}x^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cos nx}{n^2} \qquad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

Пример 3. Заменив x на $\pi-2x$ в примере 2, показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nx}{n^2}=\begin{cases}\frac{1}{2}x(\pi-x) & (0\leqslant x\leqslant\pi),\\ \frac{1}{2}\{\pi|x|-x^2\} & (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).\end{cases}$$

9.12. Выражение коэффициентов через сумму тригонометрического ряда

Пусть тригонометрический ряд $\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)$ равномерно сходится на отрезке $(-\pi, \pi)$, и пусть его сумма равна $f(x)$. Пользуясь очевидными равенствами

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ \pi & (m=n\neq 0),\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ \pi & (m=n\neq 0),\end{cases} \qquad \int_{-\pi}^{\pi}dx=2\pi,$$

мы найдем, умножая равенство

$$\frac{1}{2}c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nx+d_n\sin nx)=f(x)$$

на $\cos nx$ и на $\sin nx$[1]) и затем почленно интегрируя (§ 4.7), что[2])

$$\pi c_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad \pi d_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

Следствие. Тригонометрический ряд, равномерно сходящийся на отрезке $(-\pi, \pi)$, является рядом Фурье.

Примечание. Лебег дал доказательство (Lebesgue, Séries trigonométriques, 124) теоремы, сообщенной ему Фату: тригонометрический ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\lg n}$, сходящийся для всех вещественных значений x (§ 2.31, пример 1), *не является* рядом Фурье.

9.2. Об условиях Дирихле и теореме Фурье

Теорему типа, указанного в § 9.1, о разложении функции вещественной переменной в тригонометрический ряд, обычно называют *теоремой* Фурье. Вследствие сложности и трудности строгого доказательства такой теоремы (даже в том случае, когда разлагаемая функция подчиняется излишне жестким ограничениям) мы откладываем это доказательство до §§ 9.42, 9.43. Тем не менее удобно привести здесь некоторые *достаточные* условия для разложения функции в тригонометрический ряд.

Пусть $f(t)$ определяется при $-\pi\leqslant t<\pi$ произвольно[3]), *а для всех остальных вещественных значений t равенством*

$$f(t+2\pi)=f(t),$$

так что $f(t)$ будет периодической функцией с периодом 2π. Пусть $f(t)$ такова, что интеграл $\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt$ существует; если этот интеграл является несобственным, то мы предположим, что он абсолютно сходится.

---

[1]) Умножение на эти множители не нарушает равномерной сходимости.

[2]) Эти формулы с пределами 0 и 2π даны Эйлером (Euler, Nova Acta Acad. Petrop., XI (1793)).

[3]) Это определение нередко ведет к тому, что $f(t)$ не представляется единым аналитическим выражением для всех вещественных значений t. Ср. § 9.11, пример 1.

Пусть a_n, b_n определяются равенствами[1])

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt, \quad \pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Тогда, если x — внутренняя точка какого-либо интервала (a, b), в котором $f(t)$ имеет ограниченную вариацию, то ряд

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сходится и его сумма равна[2])

$$\frac{1}{2} \{f(x+0) + f(x-0)\}.$$

Если $f(t)$ непрерывна при $t = x$, то эта сумма равна $f(x)$.

Эта теорема считается известной в §§ 9.21—9.32; в этих параграфах мы рассматриваем теоремы о рядах Фурье, имеющие некоторое значение в приложениях. Следует отметить, что все функции, которые в прикладной математике приходится разлагать в ряды Фурье, удовлетворяют только что наложенным на $f(t)$ условиям, так что анализ, данный ниже в этой главе, устанавливает законность всех разложений в ряды Фурье, встречающихся в физических исследованиях.

Читатель видит, что сформулированная теорема подчиняет $f(t)$ менее сильным ограничениям по сравнению с условиями Дирихле, и это ослабление ограничений представляет значительную практическую важность. Например, такой простой ряд, как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos nx}{n},$$

является разложением функции $\lg\left|2 \cos \frac{1}{2} x\right|$[3]), и эта функция не удовлетворяет условию ограниченности Дирихле при $\pm\pi$.

Принято называть ряд

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

---

[1]) Числа a_n, b_n называются *коэффициентами Фурье функции* $f(t)$, и символы a_n, b_n будут применяться в §§ 9.2—9.5 в этом смысле. Можно показать, что сходимость и абсолютная сходимость интегралов, определяющих коэффициенты Фурье, является следствием сходимости и абсолютной сходимости интеграла $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$ (§§ 2.32, 4.5).

[2]) Пределы $f(x \pm 0)$ существуют согласно примеру 3 § 3.64.

[3]) Ср. пример 6 в конце главы (стр. 269).

рядом Фурье, соответствующим функции $f(t)$. Это название тем не менее никоим образом не подразумевает сходимости рассматриваемого ряда.

9.21. Представление функции рядом Фурье на произвольном отрезке

Рассмотрим функцию $f(x)$ с (абсолютно) сходящимся интегралом и с ограниченной вариацией на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

Положим

$$x = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(a-b)\pi^{-1}x', \quad f(x) = F(x').$$

Тогда известно (§ 9.2), что

$$\frac{1}{2}\{F(x'+0)+F(x'-0)\} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx' + b_n \sin nx'),$$

и таким образом,

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} =$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} + b_n \sin\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\right\},$$

где в силу очевидного преобразования

$$\frac{1}{2}(b-a)\,a_n = \int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\,dx,$$

$$\frac{1}{2}(b-a)\,b_n = \int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\,dx.$$

9.22. Ряды косинусов и ряды синусов

Пусть $f(x)$ — функция, определенная на отрезке $(0, l)$, и пусть она имеет (абсолютно) сходящийся интеграл и ограниченную вариацию на этом отрезке.

Определим $f(x)$ на отрезке $(0, -l)$ равенством

$$f(-x) = f(x).$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right\},$$

где согласно § 9.21

$$la_n = \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi t}{l}\, dt = 2 \int_{0}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi t}{l}\, dt,$$

$$lb_n = \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l}\, dt = 0,$$

так что при $-l \leqslant x \leqslant l$

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l};$$

последнее выражение называется *рядом косинусов.* Если, однако, мы определим $f(x)$ на отрезке $(0, -l)$ равенством

$$f(-x) = -f(x).$$

то получим при $-l \leqslant x \leqslant l$

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$lb_n = 2 \int_{0}^{l} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l}\, dt;$$

последний ряд называется *рядом синусов.*

Таким образом, ряды

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$\frac{1}{2} la_n = \int_{0}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi t}{l}\, dt, \qquad \frac{1}{2} lb_n = \int_{0}^{l} f(t) \sin \frac{n\pi t}{l}\, dt,$$

имеют одну и ту же сумму при $0 \leqslant x \leqslant l$; их суммы при $0 \geqslant x \geqslant -l$ будут равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку.

Ряд косинусов был введен Клеро (Clairaut, Hist. de l'Acad. R. des Sci, 1754, опубликовано в 1759 г.) в мемуаре, датированном 8 июля 1757 г.; ряд синусов был получен Лагранжем между 1762 и 1765 гг. (Lagrange, Oeuvres, I, 553).

Пример 1. Разложить функцию $\frac{1}{2}(\pi-x)\sin x$ в ряд косинусов на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

[Мы имеем по только что полученной формуле

$$\frac{1}{2}(\pi-x)\sin x=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

где

$$\frac{1}{2}\pi a_n=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\sin x\cos nx\,dx.$$

Но при $n\neq 1$, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^{\pi}2(\pi-x)\sin x\cos nx\,dx=\int_0^{\pi}(\pi-x)\{\sin(n+1)x-\sin(n-1)x\}\,dx$$

$$=\left[(x-\pi)\left\{\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right\}\right]_0^{\pi}-$$

$$-\int_0^{\pi}\left\{\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right\}dx=$$

$$=\pi\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)=\frac{-2\pi}{(n+1)(n-1)}.$$

Если же $n=1$, то

$$\int_0^{\pi}2(\pi-x)\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\pi;$$

следовательно, искомое имеет вид

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos x-\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x-\frac{1}{2\cdot 4}\cos 3x-\frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x-\ldots$$

Следует отметить, что только для значений x между 0 и π сумма этого ряда оказывается равной $\frac{1}{2}(\pi-x)\sin x$. Если же, например, x лежит между 0 и $-\pi$, то сумма ряда равна $-\frac{1}{2}(\pi-x)\sin x$, а не $\frac{1}{2}(\pi-x)\sin x$; когда x лежит между π и 2π, сумма ряда снова оказывается равной $\frac{1}{2}(\pi-x)\sin x$, однако это чисто случайное совпадение, возникающее благодаря специальному виду данной функции и не имеющее места в общем случае.

Пример 2. Разложить $\frac{1}{8}\pi x(\pi-x)$ в ряд синусов на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

[Этот ряд имеет вид $\sin x+\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}+\ldots$]

Пример 3. Показать, что при $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$\frac{1}{96} \pi (\pi - 2x)(\pi^2 + 2\pi x - 2x^2) = \cos x + \frac{\cos 3x}{3^4} + \frac{\cos 5x}{5^4} + \ldots$$

[Обозначая левую часть через $f(x)$, мы имеем, интегрируя по частям и замечая, что $f'(0) = f'(\pi) = 0$,

$$\int_0^\pi f(x) \cos nx\, dx = \frac{1}{n} [f(x) \sin nx]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi f'(x) \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{n^2} [f'(x) \cos nx]_0^\pi - \frac{1}{n^2} \int_0^\pi f''(x) \cos nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{n^3} [f''(x) \sin nx]_0^\pi + \frac{1}{n^3} \int_0^\pi f'''(x) \sin nx\, dx =$$

$$= -\frac{1}{n^4} [f'''(x) \cos nx]_0^\pi = \frac{\pi}{4n^4} (1 - \cos n\pi).\Big]$$

Пример 4. Показать, что для значений x между 0 и π функцию e^{sx} можно разложить в ряд косинусов

$$\frac{2s}{\pi} (e^{s\pi} - 1) \left(\frac{1}{2s^2} + \frac{\cos 2x}{s^2 + 4} + \frac{\cos 4x}{s^2 + 16} + \ldots \right) -$$

$$- \frac{2s}{\pi} (e^{s\pi} + 1) \left(\frac{\cos x}{s^2 + 1} + \frac{\cos 3x}{s^2 + 9} + \ldots \right)$$

и вычертить графики функции e^{sx} и суммы ряда.

Пример 5. Показать, что для значений x между 0 и π функцию $\frac{1}{8} \pi (\pi - 2x)$ можно разложить в ряд косинусов

$$\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots$$

и вычертить график функции $\frac{1}{8} \pi (\pi - 2x)$ и суммы ряда.

9.3. Свойства коэффициентов ряда Фурье[1])

Предположим (как и во многих из рассмотренных примеров), что отрезок $(-\pi, \pi)$ может быть разделён на конечное число отрезков $(-\pi, k_1)$, (k_1, k_2), ..., (k_n, π), так что в каждом отрезке $f(x)$ и все ее производные суть непрерывные функции с ограниченной

---

[1]) Рассуждения этого параграфа и § 9.31 содержатся в большом мемуаре Стокса (Stockes, Camb. Phil. Trans., VIII, 533—583 (1849), Math. Papers, 1, 236—313).

вариацией, имеющие пределы справа и слева (§ 3.2) в концах этих отрезков[1]. Тогда

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{k_1} f(t)\cos mt\,dt + \int_{k_1}^{k_2} f(t)\cos mt\,dt + \ldots + \int_{k_n}^{\pi} f(t)\cos mt\,dt.$$

Интегрированием по частям получаем

$$\pi a_m = [m^{-1}f(t)\sin mt]_{-\pi}^{k_1} + [m^{-1}f(t)\sin mt]_{k_1}^{k_2} + \ldots$$
$$\ldots + [m^{-1}f(t)\sin mt]_{k_n}^{\pi} - m^{-1}\int_{-\pi}^{k_1} f'(t)\sin mt\,dt -$$
$$- m^{-1}\int_{k_1}^{k_2} f'(t)\sin mt\,dt - \ldots - m^{-1}\int_{k_n}^{\pi} f'(t)\sin mt\,dt,$$

так что

$$a_m = \frac{A_m}{m} - \frac{b'_m}{m},$$

где

$$\pi A_m = \sum_{r=1}^{n} \sin mk_r\,\{f(k_r - 0) - f(k_r + 0)\},$$

а b'_m — коэффициент Фурье функции $f'(x)$.

Подобным же образом

$$b_m = \frac{B_m}{m} + \frac{a'_m}{m},$$

где

$$\pi B_m = -\sum_{r=1}^{n} \cos mk_r\,\{f(k_r - 0) - f(k_r + 0)\} -$$
$$- \cos m\pi\,\{f(\pi - 0) - f(-\pi + 0)\},$$

а a'_m — коэффициент Фурье функции $f'(x)$.

Подобным же образом мы получаем

$$a'_m = \frac{A'_m}{m} - \frac{b''_m}{m}, \quad b'_m = \frac{B'_m}{m} + \frac{a''_m}{m},$$

где a''_m, b''_m — коэффициенты Фурье функции $f''(x)$ и

$$\pi A'_m = \sum_{r=1}^{n} \sin mk_r\,\{f'(k_r - 0) - f'(k_r + 0)\},$$

$$\pi B'_m = -\sum_{r=1}^{n} \cos mk_r\,\{f'(k_r - 0) - f'(k_r + 0)\} -$$
$$- \cos m\pi\,\{f'(\pi - 0) - f'(-\pi + 0)\}.$$

---

[1]) Непрерывная функция ограниченной вариации на отрезке обязательно имеет конечные пределы в концах отрезка. (*Прим. ред.*)

Поэтому

$$a_m = \frac{A_m}{m} - \frac{B'_m}{m^2} - \frac{a''_m}{m^2}, \quad b_m = \frac{B_m}{m} + \frac{A'_m}{m^2} - \frac{b''_m}{m^2}.$$

Далее, мы видим, что при $m \to \infty$

$$A'_m = O(1), \quad B'_m = O(1),$$

и так как подинтегральные функции, входящие в a''_m и b''_m, ограничены, то ясно, что

$$a''_m = O(1), \quad b''_m = O(1).$$

Поэтому, если $A_m = 0$, $B_m = 0$, то ряд Фурье для $f(x)$ сходится абсолютно и равномерно согласно § 3.34.

Необходимые и достаточные условия того, чтобы $A_m = B_m = 0$ для всех значений m, состоят в том, что

$$f(k_r - 0) = f(k_r + 0), \quad f(\pi - 0) = f(-\pi + 0),$$

иначе говоря, в том, что $f(x)$ непрерывна для *всех* значений x [1]).

9.31. Дифференцирование рядов Фурье

Почленно дифференцируя ряд

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \cos mx + b_m \sin mx),$$

получаем

$$\sum_{m=1}^{\infty}\{mb_m \cos mx - ma_m \sin mx\}.$$

В обозначениях § 9.3 это то же самое, что

$$\frac{1}{2}a'_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a'_m \cos mx + b'_m \sin mx),$$

если только

$$A_m = B_m = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = 0;$$

эти условия удовлетворяются, если $f(x)$ непрерывна для всех значений x.

[1]) Конечно, $f(x)$ также подчиняется условиям, указанным в начале параграфа.

Вследствие этого достаточными условиями законности почленного дифференцирования ряда Фурье являются следующие: чтобы $f(x)$ была непрерывной функцией для *всех* значений x, чтобы $f'(x)$ имела конечное число точек разрыва на отрезке $(-\pi, \pi)$ и чтобы обе функции имели ограниченную вариацию на всем отрезке.

9.32. Определение точек разрыва

Выражения для a_m и b_m, найденные в § 9.3, часто могут применяться на практике для определения точек, в которых сумма данного ряда Фурье оказывается разрывной. Так, пусть требуется определить точки, в которых сумма ряда

$$\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots$$

имеет разрывы.

Предполагая, что данный ряд есть ряд Фурье (а не *общий* тригонометрический ряд), и замечая, что $a_m = 0$, $b_m = (2m)^{-1}(1 - \cos m\pi)$, мы получим из рассмотрения формул, найденных в § 9.3,

$$A_m = 0, \quad B_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos m\pi, \quad a'_m = b'_m = 0.$$

Отсюда, если $k_1, k_2, \ldots$ — точки, в которых аналитический характер суммы нарушается, то мы имеем

$$0 = \pi A_m = \sin mk_1 \{f(k_1 - 0) - f(k_1 + 0)\} + \\ + \sin mk_2 \{f(k_2 - 0) - f(k_2 + 0)\} + \ldots$$

Так как это равенство имеет место для всех значений m, то числа $k_1, k_2, \ldots$ должны быть кратны числу π, но имеется только одно кратное π внутри промежутка $-\pi < x < \pi$, а именно нуль. Таким образом, $k_1 = 0$, а $k_2, k_3, \ldots$ не существуют. Подставляя $k_1 = 0$ в равенство

$$B_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos m\pi,$$

получаем

$$\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos m\pi\right) = -[\cos m\pi \{f(\pi - 0) - f(-\pi + 0)\} + f(-0) - f(+0)].$$

Так как это соотношение справедливо для всех значений m, то мы имеем

$$\frac{1}{2}\pi = f(+0) - f(-0),$$

$$\frac{1}{2}\pi = f(\pi - 0) - f(\pi + 0).$$

Это показывает, что если рассматриваемый ряд есть ряд Фурье, то $f(x)$

имеет разрывы в точках $n\pi$ (n — любое целое число), а так как $a'_m = b'_m = 0$, то мы можем ожидать[1]), что $f(x)$ будет постоянной в открытом промежутке $(-\pi, 0)$ и будет другой постоянной в открытом промежутке $(0, \pi)$.

9.4. Теорема Фейера

Начнем теперь изложение теории рядов Фурье с доказательства следующей теоремы Фейера[2]) относительно суммируемости ряда Фурье, соответствующего произвольной функции $f(t)$.

Пусть $f(t)$ — функция вещественной переменной t, произвольно определенная при $-\pi \leqslant t < \pi$ и определяемая равенством

$$f(t+2\pi) = f(t)$$

для всех остальных вещественных значений t; пусть интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$ существует и (если это несобственный интеграл) абсолютно сходится.

Тогда ряд Фурье, соответствующий функции $f(t)$, будет суммируем $(C\,1)$[3]) во всех точках x, в которых существуют пределы $f(x \pm 0)$.

Его $(C\,1)$-сумма равна $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$.

Пусть a_n, b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — коэффициенты Фурье (§ 9.2) функции $f(t)$, и пусть

$$\frac{1}{2} a_0 = A_0, \quad a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n(x), \quad \sum_{n=0}^{m} A_n(x) = S_m(x).$$

Тогда мы должны доказать, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \{A_0 + S_1(x) + S_2(x) + \ldots + S_{m-1}(x)\} = \\ = \frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$$

при условии, что пределы в правой части существуют.

---

1) Это так и есть:

$$f(x) = -\frac{1}{4}\pi \quad \text{при} \quad -\pi < x < 0,$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\pi \quad \text{при} \quad 0 < x < \pi.$$

2) Fejér, Math. Ann., LVIII, 51—69 (1904).

3) См. § 8.43.

Если мы подставим вместо коэффициентов Фурье их выражения в виде интегралов (§ 9.2), то легко убедимся[1]), что

$$A_0+\sum_{n=1}^{m-1} S_n(x)=$$
$$=mA_0+(m-1)A_1(x)+(m-2)A_2(x)+\ldots+A_{m-1}(x)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2}m+(m-1)\cos(x-t)-(m-2)\cos 2(x-t)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\cos(m-1)\right\}f(t)\,dt=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{1}{2}m(x-t)}{\sin^2\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x}\frac{\sin^2\frac{1}{2}m(x-t)}{\sin^2\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\,dt;$$

последнее преобразование следует из периодичности подинтегрального выражения.

Если теперь разобьем путь интегрирования на две равные части и на первой из них заменим t на $x-2\theta$, а на второй t на $x+2\theta$, то получим

$$A_0+\sum_{n=1}^{m-1} S_n(x)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}f(x+2\theta)\,d\theta+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}f(x-2\theta)\,d\theta.$$

Следовательно, достаточно будет доказать, что при $m\to\infty$

$$\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}f(x+2\theta)\,d\theta\to\frac{1}{2}\pi f(x+0),$$
$$\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}f(x-2\theta)\,d\theta\to\frac{1}{2}\pi f(x-0).$$

---

[1]) Очевидно, что если мы напишем λ вместо $e^{i(x-t)}$ в сумме $m+2(m-1)\cos(x-t)+\ldots$, то получим
$$m+(m-1)(\lambda+\lambda^{-1})+(m-2)(\lambda^2+\lambda^{-2})+\ldots+(\lambda^{m-1}+\lambda^{1-m})=$$
$$=(1-\lambda)^{-1}\{\lambda^{1-m}+\lambda^{2-m}+\ldots+\lambda^{-1}+1-\lambda-\lambda^2-\ldots-\lambda^m\}=$$
$$=(1-\lambda)^{-2}\{\lambda^{1-m}-2\lambda+\lambda^{m+1}\}=\frac{\left(\lambda^{\frac{1}{2}m}-\lambda^{-\frac{1}{2}m}\right)^2}{\left(\lambda^{\frac{1}{2}}-\lambda^{-\frac{1}{2}}\right)^2}.$$

Если мы проинтегрируем равенство

$$\frac{\sin^2 m\theta}{2\sin^2\theta}=\frac{1}{2}m+(m-1)\cos 2\theta+\ldots+\cos 2(m-1)\theta,$$

то найдем, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{2}\pi m,$$

и таким образом, нам требуется доказать, что

$$\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\varphi(\theta)\,d\theta\to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty,$$

где $\varphi(\theta)$ представляет поочередно каждую из двух функций

$$f(x+2\theta)-f(x+0),\quad f(x-2\theta)-f(x-0).$$

Далее, для произвольного положительного числа ε мы можем выбрать такое δ, что [1])

$$|\varphi(\theta)|<\varepsilon,$$

когда $0<\theta\leqslant\frac{1}{2}\delta$. Этот выбор δ, очевидно, не зависит от m. Тогда

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\varphi(\theta)\,d\theta\right|\leqslant\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}|\varphi(\theta)|\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{m}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}|\varphi(\theta)|\,d\theta<$$

$$<\frac{\varepsilon}{m}\int_0^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta+\frac{1}{m\sin^2\frac{1}{2}\delta}\int_{\frac{1}{2}\delta}^{\frac{\pi}{2}}|\varphi\theta|\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta+\frac{1}{m\sin^2\frac{1}{2}\delta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\varphi(\theta)|\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\varepsilon+\frac{1}{m\sin^2\frac{1}{2}\delta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\varphi(\theta)|\,d\theta.$$

[1]) В предположении, что существует $f(x\pm 0)$.

Но из сходимости интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$$

вытекает сходимость интеграла

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(\theta)|\, d\theta,$$

и таким образом, когда ε (а следовательно, и δ) задано, мы можем сделать

$$\frac{1}{2}\pi\varepsilon m \sin^2\frac{1}{2}\delta > \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(\theta)|\, d\theta,$$

взяв m достаточно большим. Отсюда вытекает, что при достаточно больших m мы будем иметь

$$\left| \frac{1}{m} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\, \varphi(\theta)\, d\theta \right| < \pi\varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число; следовательно, по определению предела

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\, \varphi(\theta)\, d\theta = 0,$$

и таким образом, теорема Фейера доказана.

Следствие 1. Пусть U и L — верхняя и нижняя границы $f(t)$ в некотором интервале (a, b), величина которого не превосходит 2π, и пусть

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt = \pi A.$$

Тогда, если $a+\eta\leqslant x\leqslant b-\eta$, где η — положительное число, то мы имеем

$$U-\frac{1}{m}\left\{A_0+\sum_{n=1}^{m-1}S_n(x)\right\}=$$

$$=\frac{1}{2m\pi}\left\{\int_{-\pi+x}^{x-\eta}+\int_{x-\eta}^{x+\eta}+\int_{x+\eta}^{\pi+x}\right\}\frac{\sin^2\frac{1}{2}m(x-t)}{\sin^2\frac{1}{2}(x-t)}\{U-f(t)\}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2m\pi}\left\{\int_{-\pi+x}^{x-\eta}+\int_{x+\eta}^{\pi+x}\right\}\frac{\sin^2\frac{1}{2}m(x-t)}{\sin^2\frac{1}{2}(x-t)}\{U-f(t)\}\,dt\geqslant$$

$$\geqslant-\frac{1}{2m\pi}\left\{\int_{-\pi+x}^{x-\eta}+\int_{x+\eta}^{\pi+x}\right\}\frac{|U|+|f(t)|}{\sin^2\frac{1}{2}\eta}\,dt,$$

так что

$$\frac{1}{m}\left\{A_0+\sum_{n=1}^{m-1}S_n(x)\right\}\leqslant U+\frac{|U|+\frac{1}{2}A}{m\sin^2\frac{1}{2}\eta}.$$

Подобным же образом

$$\frac{1}{m}\left\{A_0+\sum_{n=1}^{m-1}S_n(x)\right\}\geqslant L-\frac{|L|+\frac{1}{2}A}{m\sin^2\frac{1}{2}\eta}.$$

Следствие 2. Пусть $f(t)$ непрерывна на отрезке $a\leqslant t\leqslant b$. Так как непрерывность влечет за собой равномерную непрерывность (§ 3.61), то выбор δ соответственно какому-либо значению x в (a, b) будет независим от x и верхняя граница выражений $|f(x\pm 0)|$, т. е. $|f(x)|$, будет также независима от x, так что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\varphi(\theta)|\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|f(x\pm 2\theta)-f(x\pm 0)|\,d\theta\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt+\frac{1}{2}\pi\,|f(x\pm 0)|,$$

и верхняя граница последнего выражения будет независима от x. Отсюда — выбор величины m, при котором

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 m\theta}{\sin^2\theta}\varphi(\theta)\,d\theta\right|<\pi\varepsilon,$$

будет независим от x, и *следовательно*, $\frac{1}{m}\left\{A_0+\sum_{n=1}^{m-1}S_n(x)\right\}$ *стремится к пределу* $f(x)$ *при* $m\to\infty$ *равномерно на всем отрезке* $a\leqslant x\leqslant b$.

9.41. Леммы Римана — Лебега

Чтобы иметь возможность применить теорему Харди (§ 8.5) для вывода сходимости ряда Фурье из теоремы Фейера, мы нуждаемся в следующих двух леммах:

(I) *Пусть* $\int_a^b \psi(\theta)\,d\theta$ *существует и (если это несобственный интеграл) абсолютно сходится. Тогда при* $\lambda \to \infty$

$$\int_a^b \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta \quad \text{будет } o(1).$$

(II) *Если, далее,* $\psi(\theta)$ *имеет ограниченную вариацию на отрезке* (a, b), *то при* $\lambda \to \infty$

$$\int_a^b \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta \quad \text{будет } O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Первый из этих результатов был высказан Гамильтоном [1]) и Риманом [2]) для ограниченных функций. Справедливость леммы (II), кажется, была хорошо известна раньше, чем была осознана ее важность; она является обобщением результата, установленного Дирксеном [3]) и Стоксом (см. § 9.3) для функций с непрерывной производной.

Читателю следует отметить, что рассуждения этого параграфа сохраняют силу и в том случае, если синусы заменить всюду косинусами.

(I) Удобно доказать [4]) эту лемму сначала для случая функции $\psi(\theta)$, ограниченной на отрезке (a, b). В этом случае пусть K — верхняя граница $|\psi(\theta)|$, а ε — произвольное положительное число. Разделим отрезок (a, b) на n частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ и составим суммы S_n, s_n, соответствующие функции $\psi(\theta)$, по способу § 4.1. Возьмем n настолько большим, чтобы $S_n - s_n < \varepsilon$; это возможно, так как $\psi(\theta)$ — интегрируемая функция.

На отрезке (x_{r-1}, x_r) положим

$$\psi(\theta) = \psi_r(x_{r-1}) + \omega_r(\theta),$$

так что

$$|\omega_r(\theta)| \leqslant U_r - L_r,$$

---

[1]) W. R. Hamilton, Trans. Dublin Acad., XIX, 287 (1834).

[2]) Riemann, Ges. math. Werke, 241. Относительно исследования Лебега см. его книгу «Séries trigonométriques», гл. III, 1906.

[3]) Dirksen, Journal für Math., IV, 172 (1829).

[4]) Этим доказательством мы обязаны Харди; оно кажется более изящным, чем доказательства, данные другими авторами, например Валле-Пуссеном в его «Курсе анализа бесконечно малых», т. II.

где U_r и L_r — верхняя и нижняя границы функции $\psi(\theta)$ на отрезке (x_{r-1}, x_r).

Тогда ясно, что

$$\left|\int_a^b \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right| = \left|\sum_{r=1}^{n} \psi_r(x_{r-1})\int_{x_{r-1}}^{x_r} \sin\lambda\theta\,d\theta + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^{n}\int_{x_{r-1}}^{x_r} \omega_r(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{n} |\psi_r(x_{r-1})| \left|\int_{x_{r-1}}^{x_r} \sin\lambda\theta\,d\theta\right| + \sum_{r=1}^{n}\int_{x_{r-1}}^{x_r} |\omega_r(\theta)|\,d\theta \leqslant$$

$$\leqslant nK\frac{2}{\lambda} + (S_n - s_n) < \frac{2nK}{\lambda} + \varepsilon.$$

Взяв λ достаточно большим (n остается фиксированным, после того как ε выбрано), последнее выражение можно сделать меньше, чем 2ε, так что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta = 0,$$

что и требовалось доказать.

В случае, когда $\psi(\theta)$ не ограничена, если она имеет абсолютно сходящийся интеграл, то, согласно § 4.5, мы можем заключить точки, в которых эта функция не ограничена, в конечное[1]) число интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$, так что

$$\sum_{r=1}^{p}\int_{\delta_r} |\psi(\theta)|\,d\theta < \varepsilon.$$

Пусть K обозначает верхнюю границу $|\psi(\theta)|$ для значений θ вне этих интервалов, и пусть $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{p+1}$ обозначают части отрезка (a, b), остающиеся после удаления интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$; тогда мы можем доказать, как и раньше, что

$$\left|\int_a^b \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right| = \left|\sum_{r=1}^{p+1}\int_{\gamma_r} \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta + \sum_{r=1}^{p}\int_{\delta_r} \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{r=1}^{p+1}\int_{\gamma_r} \psi(\theta)\sin\lambda\theta\,d\theta\right| + \sum_{r=1}^{p}\int_{\delta_r} |\psi(\theta)\sin\lambda\theta|\,d\theta < \frac{2nK}{\lambda} + 2\varepsilon.$$

[1]) *Конечность* числа интервалов содержится в определении несобственного интеграла § 4.5.

Так как выбор ε фиксирует n и K, то последнее выражение можно сделать меньше, чем 3ε, если взять λ достаточно большим. Иначе говоря, даже если $\psi(\theta)$ не ограничена,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_a^b \psi(\theta) \sin \lambda\theta \, d\theta = 0,$$

если только (несобственный) интеграл от $\psi(\theta)$ абсолютно сходится.

Первая лемма, таким образом, доказана полностью.

(II) Если $\psi(\theta)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке (a, b), то, принимая во внимание пример 2 § 3.64, мы можем написать

$$\psi(\theta) = \chi_1(\theta) - \chi_2(\theta),$$

где $\chi_1(\theta)$, $\chi_2(\theta)$ — положительные неубывающие ограниченные функции.

Тогда по второй теореме о среднем значении (§ 4.14) существует такое число ξ, что $a \leqslant \xi \leqslant b$ и

$$\left| \int_a^b \chi_1(\theta) \sin \lambda\theta \, d\theta \right| = \left| \chi_1(b) \int_\xi^b \sin \lambda\theta \, d\theta \right| \leqslant \frac{2\chi_1(b)}{\lambda}.$$

Если мы проделаем то же самое с $\chi_2(\theta)$, то получим

$$\left| \int_a^b \psi(\theta) \sin \lambda\theta \, d\theta \right| \leqslant \left| \int_a^b \chi_1(\theta) \sin \lambda\theta \, d\theta \right| + \left| \int_a^b \chi_2(\theta) \sin \lambda\theta \, d\theta \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\{\chi_1(b) + \chi_2(b)\}}{\lambda} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

и таким образом, вторая лемма доказана.

Следствие. Если $f(t)$ такова, что интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$ абсолютно сходится, то коэффициенты Фурье a_n, b_n функции $f(t)$ будут $o(1)$, когда $n \to \infty$; если, далее, $f(t)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $(-\pi, \pi)$, коэффициенты Фурье будут $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

[Конечно, эти результаты сами по себе недостаточны для обеспечения сходимости ряда Фурье, соответствующего функции $f(t)$, ибо ряд, члены которого имеют порядок членов гармонического ряда (§ 2.3), не обязательно будет сходящимся.]

9.42. Доказательство теоремы Фурье

Докажем теперь теорему, высказанную в § 9.2, а именно:

Пусть $f(t)$ — функция, произвольная при $-\pi \leqslant t < \pi$ и определяемая равенством $f(t + 2\pi) = f(t)$ для всех остальных *вещественных значений* t; *пусть* $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$ *существует и (если это несобственный интеграл) абсолютно сходится.*

Пусть a_n, b_n *определяются равенствами*

$$\pi a_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad \pi b_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt.$$

Тогда, если x — *внутренняя точка какого-либо отрезка* (a, b), *на котором* $f(t)$ *имеет ограниченную вариацию, то ряд*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

сходится на этом отрезке и его сумма равна

$$\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

Удобно дать два доказательства: одно, относящееся к функциям, для которых можно принять за отрезок (a, b) весь отрезок $(-\pi+x, \pi+x)$, а другое, относящееся к функциям, для которых этого сделать нельзя.

(I) Если за отрезок (a, b) можно принять отрезок $(-\pi+x, \pi+x)$, то из § 9.41 (II) следует, что $a_n\cos nx + b_n\sin nx$ будет $O\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n\to\infty$. По теореме Фейера (§ 9.4) рассматриваемый ряд суммируем $(C\,1)$ и его $(C\,1)$-сумма равна $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ [1]. Поэтому по теореме Харди (§ 8.5) рассматриваемый ряд будет сходиться и его сумма будет равна (по § 8.43) $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$.

(II) Если же невозможно принять за отрезок (a, b) весь отрезок $(-\pi+x, \pi+x)$, то по условию можно найти такое положительное число δ, меньшее π, что $f(t)$ будет иметь ограниченную вариацию на отрезке $(x-\delta, x+\delta)$. Введем вспомогательную функцию $g(t)$, равную $f(t)$, когда $x-\delta\leqslant t\leqslant x+\delta$, и равную нулю в остальной части отрезка $(-\pi+x, \pi+x)$, причем $g(t+2\pi)=g(t)$ для всех вещественных значений t.

Тогда $g(t)$ будет удовлетворять условиям, наложенным на функции, рассмотренные в (I), а именно: она имеет абсолютно сходящийся интеграл и ограниченную вариацию на отрезке $(-\pi+x, \pi+x)$; таким образом, если $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$ — коэффициенты Фурье функции $g(t)$,

[1] Пределы $f(x\pm 0)$ существуют согласно примеру 3 § 3.64.

то результат, полученный в (I), показывает, что ряд Фурье, соответствующий функции $g(t)$, а именно

$$\frac{1}{2}a_0^{(1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{(1)}\cos nx+b_n^{(1)}\sin nx\right),$$

сходится к сумме

$$\frac{1}{2}\{g(x+0)+g(x-0)\},$$

которая равна

$$\frac{1}{2}\{f(x+0\}+f(x-0)\}.$$

Пусть теперь $S_m(x)$ и $S_m^{(1)}(x)$ обозначают суммы $m+1$ первых членов рядов Фурье, соответствующих функциям $f(t)$ и $g(t)$. Тогда легко видеть, что

$$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\cos(x-t)+\cos 2(x-t)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\cos m(x-t)\right\}f(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}f(x+2\theta)\,d\theta+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}f(x-2\theta)\,d\theta$$

аналогично § 9.4.

Подобным же образом

$$S_m^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}g(x+2\theta)\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}g(x-2\theta)\,d\theta,$$

и следовательно, пользуясь определением функции $g(t)$, имеем

$$S_m(x) - S_m^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2m+1)\theta\,\frac{f(x+2\theta)}{\sin\theta}\,d\theta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2m+1)\theta\,\frac{f(x-2\theta)}{\sin\theta}\,d\theta.$$

Так как $\operatorname{cosec}\theta$ является непрерывной функцией на отрезке

$$\left(\frac{\delta}{2},\ \frac{\pi}{2}\right),$$

то отсюда следует, что $f(x\pm 2\theta)\operatorname{cosec}\theta$ будут интегрируемыми функциями с абсолютно сходящимися интегралами; следовательно, по лемме Римана — Лебега [§ 9.41 (I)] *оба интеграла справа в последнем равенстве стремятся к нулю, когда* $m\to\infty$.

Иначе говоря,

$$\lim_{m\to\infty}\left\{S_m(x) - S_m^{(1)}(x)\right\} = 0.$$

Отсюда в силу

$$\lim_{m\to\infty} S_m^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\left\{(x+0) + f(x-0)\right\}$$

следует, что

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = \frac{1}{2}\left\{f(x+0) + f(x-0)\right\}.$$

Итак, мы доказали, что ряд Фурье, соответствующий функции $f(t)$, *а именно ряд* $\frac{1}{2}a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$, *сходится и его сумма равна*

$$\frac{1}{2}\left\{f(x+0) + f(x-0)\right\}.$$

9.43. Доказательство Дирихле — Бонне теоремы Фурье

Представляет некоторый интерес доказать теорему § 9.42 непосредственно, не прибегая к теории суммирования. Соответственно этому мы дадим теперь доказательство, имеющее тот же общий характер, что и доказательства, принадлежащие Дирихле и Бонне.

Как обычно, обозначим сумму первых $m+1$ членов ряда Фурье через $S_m(x)$; тогда согласно § 9.42 имеем

$$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}f(x+2\theta)\,d\theta+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}f(x-2\theta)\,d\theta.$$

Но, интегрируя равенство

$$\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}=1+2\cos2\theta+2\cos4\theta+\ldots+2\cos2m\theta,$$

имеем

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{2},$$

так что

$$S_m(x)-\frac{1}{2}f\{(x+0)+f(x-0)\}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\{f(x+2\theta)-f(x+0)\}\,d\theta+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\{f(x-2\theta)-f(x-0)\}\,d\theta.$$

Для доказательства равенства

$$\lim_{m\to\infty}S_m(x)=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

достаточно показать, что

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\varphi(\theta)\,d\theta=0,$$

где за $\varphi(\theta)$ поочередно принимается одна из функций

$$f(x+2\theta)-f(x+0),\quad f(x-2\theta)-f(x-0).$$

Но, согласно примеру 4 § 3.64, $\theta\varphi(\theta)\operatorname{cosec}\theta$ является функцией с ограниченной вариацией на некотором отрезке, у которого одной из концевых точек будет $\theta=0$ [1]); поэтому можно написать

$$\theta\varphi(\theta)\operatorname{cosec}\theta=\chi_1(\theta)-\chi_2(\theta),$$

где $\chi_1(\theta)$, $\chi_2(\theta)$ — такие ограниченные положительные неубывающие функции от θ, что

$$\chi_1(+0)=\chi_2(+0)=0.$$

Поэтому для данного произвольного положительного числа ε мы можем выбрать такое положительное число δ, что

$$0\leqslant\chi_1(\theta)<\varepsilon,\quad 0\leqslant\chi_2(\theta)<\varepsilon,$$

когда

$$0<\theta\leqslant\frac{\delta}{2}.$$

Выведем теперь неравенства, которым удовлетворяют три интеграла справа в очевидном равенстве

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\varphi(\theta)\,d\theta=\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin(2m+1)\theta\,\frac{\varphi(\theta)}{\sin\theta}\,d\theta+$$
$$+\int_0^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\theta}\chi_1(\theta)\,d\theta-\int_0^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\theta}\chi_2(\theta)\,d\theta.$$

Модуль первого интеграла может быть сделан меньше, чем ε, если взять m достаточно большим; это следует из § 9.41 (I), так как интеграл от $\varphi(\theta)\operatorname{cosec}\theta$ по отрезку $\left(\frac{\delta}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ абсолютно сходится. Далее, по второй теореме о среднем значении имеется такое число ξ между 0 и δ, что

$$\left|\int_0^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\theta}\chi_1(\theta)\,d\theta\right|=$$
$$=\left|\chi_1\left(\frac{\delta}{2}\right)\int_{\frac{\xi}{2}}^{\frac{\delta}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\theta}\,d\theta\right|=\chi_1\left(\frac{\delta}{2}\right)\left|\int_{\left(m+\frac{1}{2}\right)\xi}^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\delta}\frac{\sin u}{u}\,du\right|.$$

[1]) Другой концевой точкой будет $\theta=(b-x)/2$ или $\theta=(x-a)/2$ соответственно тому, будет ли $\varphi(\theta)$ представлять первую или вторую из рассматриваемых функций.

Так как $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt$ сходится, то

$$\left|\int\limits_\beta^\infty \frac{\sin u}{u}\,du\right|$$

имеет верхнюю границу B [1]), не зависящую от β; отсюда ясно, что

$$\left|\int\limits_0^{\frac{\delta}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\theta}\chi_1(\theta)\,d\theta\right| \leqslant 2B\chi_1\left(\frac{\delta}{2}\right) < 2B\varepsilon.$$

Поступая с третьим интегралом подобным же образом, видим что мы можем сделать

$$\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\varphi(\theta)\,d\theta\right| < (4B+1)\varepsilon,$$

взяв m достаточно большим; *таким образом, мы доказали, что*

$$\lim_{m\to\infty}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\varphi(\theta)\,d\theta = 0.$$

Но мы уже видели, что это является достаточным условием для того, чтобы предел суммы $S_m(x)$ был равен $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$; поэтому сходимость ряда Фурье при условиях, изложенных в § 9.42, установлена.

Примечание. Читателю следует заметить, что в обоих доказательствах сходимости ряда Фурье требуется *вторая* теорема о среднем значении, а для доказательства суммируемости ряда достаточно *первой* теоремы о средием значении. Следует также отметить, что, в то время как при доказательстве суммируемости в какой-либо точке x накладываются ограничения на $f(t)$ во всей области $(-\pi, \pi)$, необходимым дополнительным ограничением для обеспечения сходимости ряда является только ограничение поведения функции в непосредственном соседстве с точкой x. Факт зависимости сходимости только от поведения функции в непосредственном

---

[1]) Читателю будет интересно доказать, что

$$B = \int\limits_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

соседстве с x (при условии, что функция имеет абсолютно сходящийся интеграл) был замечен Риманом и подчеркнут Лебегом (Lebesgue, Séries trigonomètriques, 60).

Условие [1]), что x есть внутренняя точка интервала, в котором $f(t)$ имеет ограниченную вариацию, является, очевидно, только достаточным для сходимости ряда Фурье, и оно может быть заменено любым условием, при котором

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\,\varphi(\theta)\,d\theta=0.$$

Условие Жордана тем не менее является естественным видоизменением условия Дирихле, состоящего в том, что функция $f(t)$ имеет конечное число максимумов и минимумов; оно не увеличивает трудности доказательства.

Другое условие принадлежит Дини (Dini, Sopra le serie di Fourier, Pisa, 1880); оно состоит в том, что интеграл $\int_0^a \Phi(\theta)\,d\theta$, где

$$\Phi(\theta)=\frac{f(x+2\theta)+f(x-2\theta)-f(x+0)-f(x-0)}{\theta},$$

должен сходиться абсолютно при каком-нибудь положительном значении a.

[Если это условие выполнено, то для данного ε мы можем найти такое δ, что

$$\int_0^{\frac{\delta}{2}}|\Phi(\theta)|\,d\theta<\varepsilon,$$

а тогда

$$\left|\int_0^{\frac{\delta}{2}}\sin(2m+1)\theta\,\frac{\theta}{\sin\theta}\,\Phi(\theta)\,d\theta\right|<\frac{1}{2}\pi\varepsilon;$$

утверждение, что

$$\left|\int_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}\,\Phi(\theta)\,d\theta\right|<\varepsilon,$$

для достаточно больших значений m вытекает при этом из леммы Римана — Лебега.]

Более ограничительное условие, чем условие Дини, принадлежит Липшицу (Lipschitz, Journal für Math., LXIII, 296 (1864)), а именно: $|\varphi(\theta)|<C\theta^k$, где C и k положительны и не зависят от θ. Относительно других условий, принадлежащих Лебегу и Валле-Пуссену, см. книгу последнего «Курс анализа бесконечно малых», т. II, стр. 134—138. Следует отметить,

---

[1]) Принадлежащее Жордану (Jordan, Comptes Rendus, XCII, 228 (1881)).

что условие Жордана отличается по характеру от условия Дини; условие Дини есть условие того, чтобы ряд сходился в некоторой *точке* интервала $(-\pi, \pi)$, а условие Жордана есть условие того, чтобы ряд сходился в некотором *интервале*.

9.44. Равномерная сходимость рядов Фурье

Пусть $f(t)$ удовлетворяет указанным в § 9.42 условиям, и пусть она будет *непрерывной* (в дополнение к ограниченности вариации) в интервале (a, b). *Тогда ряд Фурье, соответствующий функции $f(t)$, сходится равномерно к сумме $f(x)$ во всех точках x, для которых $a+\delta \leqslant x \leqslant b-\delta$, где δ — любое положительное число.*

Пусть $h(t)$ — вспомогательная функция, равная $f(t)$ при $a \leqslant t \leqslant b$ и нулю для остальных значений t на отрезке $(-\pi, \pi)$, и пусть α_n, β_n обозначают коэффициенты Фурье функции $h(t)$. Далее, пусть $S_m^{(2)}(x)$ обозначает сумму первых $m+1$ членов ряда Фурье, соответствующего функции $h(t)$ Тогда по следствию 2 § 9.4 ряд

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

будет *равномерно суммируем* на всем отрезке $(a+\delta, b-\delta)$; а так как

$$|\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx| \leqslant (\alpha_n^2 + \beta_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

где правая часть не зависит от x и, согласно § 9.41 (II), будет $O(1/n)$, то по следствию § 8.5 ряд

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

сходится равномерно к сумме $h(x)$, равной $f(x)$.

Теперь, как в § 9.42,

$$S_m(x) - S_m^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\frac{b-x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta} f(x+2\theta)\, d\theta + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\frac{x-a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta} f(x-2\theta)\, d\theta.$$

Как в § 9.41, возьмем произвольное положительное число ε и затем заключим точки, в которых $f(t)$ будет не ограничена, в такие интервалы $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$, что

$$\sum_{r=1}^{p} \int\limits_{\delta_r} |f(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Если K — верхняя граница $|f(t)|$ вне этих интервалов, то мы имеем, как в § 9.41,

$$|S_m(x) - S_m^{(2)}(x)| < \left(\frac{2nK}{2m+1} + 2\varepsilon\right) \operatorname{cosec} \delta,$$

где выбор n зависит только от a и b и от вида функции $f(t)$. Отсюда видно, что мы можем сделать $|S_m(x) - S_m^{(2)}(x)|$ произвольно малым, выбирая m *независимо* от x, так что $S_m(x) - S_m^{(2)}(x)$ стремится к нулю равномерно. Поскольку $S_m^{(2)}(x) \to f(x)$ равномерно, ясно, что и $S_m(x) \to f(x)$ также равномерно, а это и есть результат, который требовалось доказать.

Примечание. Следует отметить, что нельзя сделать общего утверждения относительно равномерной или абсолютной сходимости рядов Фурье. Так, например, ряд в примере 1 § 9.11 сходится равномерно, за исключением окрестностей точек $x = (2n+1)\pi$, но сходится абсолютно только при $x = n\pi$, в то время как ряд в примере 2 § 9.11 сходится равномерно и абсолютно для всех вещественных значений x.

Пример 1. Пусть $\varphi(\theta)$ удовлетворяет надлежащим условиям на отрезке $(0, \pi)$; показать, что

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta} \varphi(\theta)\, d\theta = \lim_{m\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta} \varphi(\theta)\, d\theta +$$

$$+ \lim_{m\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta} \varphi(\pi-\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\pi\{\varphi(+0) + \varphi(\pi-0)\}.$$

Пример 2. Доказать, что при $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} e^{-a\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\pi \operatorname{cth} \frac{a\pi}{2}.$$

(Math. Trip., 1894)

[Показать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} e^{-a\theta}\, d\theta = \lim_{m\to\infty} \int_0^{m\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} e^{-a\theta}\, d\theta =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} \{e^{-a\theta} + e^{-a(\theta+\pi)} + \ldots + e^{-a(\theta+m\pi)}\}\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta} \frac{e^{-a\theta}\, d\theta}{1-e^{-a\pi}},$$

и воспользоваться примером 1.]

Пример 3. Рассмотреть равномерную сходимость рядов Фурье при помощи интегралов Дирихле — Бонне, не пользуясь теорией суммируемости.

9.5. Теорема Гурвица — Ляпунова[1]) о коэффициентах Фурье

Пусть $f(x)$ *ограничена в интервале* $(-\pi, \pi)$, *и пусть* $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ *существует, так что существуют коэффициенты Фурье* a_n, b_n *функции* $f(x)$. *Тогда ряд*

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

сходится и его сумма равна[2])

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx.$$

Покажем сначала, используя обозначения § 9.4, что

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x) - \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}S_n(x)\right\}^2 dx = 0.$$

Разделим отрезок $(-\pi, \pi)$ на $4r$ частей, каждая длиной δ; пусть U_p и L_p — верхняя и нижняя границы $f(x)$ на отрезке

$$\{(2p-1)\delta - \pi,\ (2p+3)\delta - \pi\},$$

а верхняя граница $|f(x)|$ на отрезке $(-\pi, \pi)$ равна K. Тогда по следствию 1 § 9.4

$$\left|f(x) - \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}S_n(x)\right| < U_p - L_p + \frac{2K}{m\sin^2\frac{\delta}{2}} < 2K\left(1 + \frac{1}{m\sin^2\frac{\delta}{2}}\right),$$

когда x лежит между $2p\delta - \pi$ и $(2p+2)\delta - \pi$.

Следовательно, по первой теореме о среднем значении

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f(x) - \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1}S_n(x)\right\}^2 dx <$$

$$< 2K\left\{1 + \frac{1}{m\sin^2\frac{\delta}{2}}\right\}\left\{2\delta\sum_{p=0}^{2r-1}(U_p - L_p) + \frac{8Kr\delta}{m\sin^2\frac{\delta}{2}}\right\}.$$

---

[1]) Math. Ann., LVII, 429 (1903). Ляпунов открыл теорему в 1896 г. и опубликовал ее в Известиях математического о-ва Харьковского университета. См. Comptes Rendus, CXXXVI, 1024 (1898).

[2]) Этот интеграл существует согласно примеру 1 § 4.12. Доказательство теоремы, данное Валле-Пуссеном, налагает на функцию $f(x)$ единственное ограничение, что должны существовать несобственные интегралы функций $f(x)$ и $\{f(x)\}^2$ по отрезку $(-\pi, \pi)$. См. его «Курс анализа бесконечно малых», т. II, стр. 153—154.

Так как $f(x)$ интегрируема в смысле Римана (§ 4.12), то оба выражения

$$4\delta \sum_{p=0}^{r-1} (U_{2p} - L_{2p}) \quad \text{и} \quad 4\delta \sum_{p=0}^{r-1} (U_{2p+1} - L_{2p+1})$$

можно сделать произвольно малыми, если взять r достаточно большим. Выбрав такое r (и тем самым выбрав δ), мы можем затем выбрать m_1 столь большим, что $\dfrac{r}{m_1 \sin^2(\delta/2)}$ будет произвольно малым. Иначе говоря, мы можем сделать выражение справа в последнем неравенстве произвольно малым, давая m любое значение, большее, чем выбранное значение m_1. Отсюда следует, что выражение в левой части неравенства будет стремиться к нулю при $m \to \infty$.

Но очевидно, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} S_n(x) \right\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{m-n}{m} A_n(x) \right\}^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{n}{m} A_n(x) \right\}^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\}^2 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} \frac{n}{m} A_n(x) \right\}^2 dx +$$

$$+ 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\} dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\}^2 dx + \frac{\pi}{m^2} \sum_{n=0}^{m-1} n^2 (a_n^2 + b_n^2),$$

так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) A_r(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\} A_r(x)\, dx$$

при $r = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Интеграл слева стремится к нулю, и по доказанному он равен сумме двух положительных выражений; следовательно, каждое из этих выражений стремится к нулю; таким образом,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\}^2 dx \to 0.$$

Но здесь выражение слева равно

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(x) - \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\} \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\} dx -$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\}^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx - \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{m-1} A_n(x) \right\}^2 dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx - \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{m-1} (a_n^2 + b_n^2) \right\},$$

так что при $m \to \infty$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx - \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{m-1} (a_n^2 + b_n^2) \right\} \to 0.$$

Таким образом, теорема доказана.

Следствие. Теорема Парсеваля [1]).

Пусть функции $f(x)$, $F(x)$ удовлетворяют условиям, наложенным на $f(x)$ в начале этого параграфа, и пусть A_n, B_n — коэффициенты Фурье функции $F(x)$, тогда почленным вычитанием следующих двух равенств, которые записаны в виде одного равенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x) \pm F(x)\}^2 dx =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} (a_0 \pm A_0)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n \pm A_n)^2 + (b_n \pm B_n)^2\} \right],$$

получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) F(x) dx = \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0 A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n A_n + b_n B_n) \right\}.$$

9.6. Риманова теория тригонометрических рядов

Теория Дирихле для рядов Фурье посвящена рядам, которые представляют заданные функции. Важный шаг вперед в этой теории был сделан Риманом, который рассмотрел свойства функций, опре-

[1]) Parseval, Mém. par. divers savants, 1, 639—648 (1805). Парсеваль, конечно, предполагал возможность почленного интегрирования тригонометрических рядов.

деляемых рядами типа [1])

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

где предполагается, что

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = 0.$$

Предварительно мы дадим предложения, ведущие к теореме Римана [2]), состоящей в том, что если два тригонометрических ряда сходятся и равны во всех точках отрезка $(-\pi, \pi)$ с возможным исключением конечного числа точек, то соответствующие коэффициенты обоих рядов будут равны.

9.61. Ассоциированная функция Римана

Обозначим сумму ряда

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)$$

во всякой точке, где он сходится, через $f(x)$. Пусть, далее,

$$F(x) = \frac{1}{2}A_0x^2 - \sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}A_n(x).$$

Тогда, если ряд, определяющий $f(x)$, сходится во всех точках какого-либо интервала, то ряд, определяющий $F(x)$, сходится для всех вещественных значений x.

Чтобы это доказать, нам нужна будет следующая лемма, принадлежащая Кантору:

Лемма Кантора [3]). *Если* $\lim_{n\to\infty}A_n(x) = 0$ *для всех значений x на некотором отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, то $a_n \to 0$, $b_n \to 0$.*

Возьмем две точки x, $x+\delta$ этого отрезка. Тогда для заданного ε мы можем найти такое n_0 [4]), что при $n > n_0$

$$|a_n\cos nx + b_n\sin nx| < \varepsilon, \quad |a_n\cos n(x+\delta) + b_n\sin n(x+\delta)| < \varepsilon.$$

---

[1]) В § 9.6 — 9.632 буквы a_n, b_n не обязательно обозначают коэффициенты Фурье.

[2]) Данное доказательство принадлежит Г. Кантору (G. Cantor, Journal für Math., LXXII, 130—142 (1870)).

[3]) Риман, по-видимому, считал этот результат очевидным. Данное здесь доказательство является видоизменением доказательства Кантора (Cantor, Math. Ann., IV, 139—143 (1871) и Journal für Math. LXXII, 130—138 (1870)).

[4]) Значение n_0 зависит от x и δ.

Поэтому

$$|\cos n\delta\,(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \sin n\delta\,(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)| < \varepsilon.$$

Но так как

$$|\cos n\delta\,(a_n \cos nx + b_n \sin nx)| < \varepsilon,$$

то

$$|\sin n\delta\,(-a_n \sin nx + b_n \cos nx)| < 2\varepsilon;$$

с другой стороны, очевидно, что

$$|\sin n\delta\,(a_n \cos nx + b_n \sin nx)| < 2\varepsilon.$$

Возводя в квадрат последние два неравенства и складывая, получим

$$\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} |\sin n\delta| < 2\varepsilon\sqrt{2}.$$

Теперь предположим, что a_n, b_n не стремятся к единственному пределу 0; покажем, что это предположение приводит к противоречию. Действительно, по этому предположению существует *некоторое* положительное число ε_0 такое, что найдется бесконечная возрастающая последовательность n_1, n_2, ... значений n, для которых $\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{1/2} > 4\varepsilon_0$.

Назовем область значений δ на вещественной оси отрезком I_1 длины L_1.

Пусть n_1' — наименьшее из целых чисел n_r, для которых $n_1'L_1 > 2\pi$; тогда $\sin n_1' y$ пройдет через все свои значения на отрезке I_1; назовем I_2 отрезок [1]), содержащийся в I_1, в котором $\sin n_1' y > \frac{1}{\sqrt{2}}$; его длина равна $\frac{\pi}{2n_1'} = L_2$. Пусть затем n_2' — наименьшее из целых чисел $n_r\left(> n_1'\right)$, для которых $n_2'L_2 > 2\pi$, так что $\sin n_2' y$ проходит через все свои значения на отрезке I_2; назовем I_3 тот из отрезков, содержащихся в I_2, в котором $\sin n_2' y > \frac{1}{\sqrt{2}}$; его длина равна $\frac{\pi}{2n_2'} = L_3$. Мы получим, таким образом, последовательность убывающих отрезков I_1, I_2, ..., из которых каждый последующий содержится в предыдущем. Ясно из определения иррационального числа, что имеется точка α, содержащаяся во всех этих отрезках, и

$$\sin n\alpha \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{для } n = n_1', n_2', \ldots \left(n_{r+1}' > n_r'\right).$$

Для этих значений n

$$\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \sin n\alpha > 2\varepsilon_0\sqrt{2}.$$

Но нами было показано, что по данным числам α и ε мы можем найти такое n_0, что при $n > n_0$

$$\left(a_n^2 + b_n^2\right)^{\frac{1}{2}} |\sin n\alpha| < 2\varepsilon\sqrt{2};$$

так как некоторые значения n_r' будут больше, чем n_0, то мы пришли к противоречию, ибо мы можем взять $\varepsilon < \varepsilon_0$; следовательно, $a_n \to 0$, $b_n \to 0$.

---

[1]) Если имеется больше чем один такой отрезок, то следует взять тот, который лежит слева.

Предполагая, что ряд, определяющий $f(x)$, сходится во всех точках некоторого отрезка вещественной оси, мы получаем, что $a_n \to 0$, $b_n \to 0$. Поэтому для всех вещественных значений x

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leqslant (a_n^2 + b_n^2)^{\frac{1}{2}} \to 0,$$

а значит, согласно § 3.34, ряд

$$\frac{1}{2} A_0 x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} A_n(x) = F(x)$$

сходится абсолютно и равномерно для всех вещественных значений x; следовательно, $F(x)$ представляет собой непрерывную функцию от x (§ 3.32).

9.62. Свойства ассоциированной функции Римана; первая лемма Римана

Теперь мы можем доказать первую лемму Римана: *Пусть*

$$G(x, \alpha) = \frac{F(x+2\alpha) + F(x-2\alpha) - 2F(x)}{4\alpha^2},$$

тогда

$$\lim_{\alpha \to 0} G(x, \alpha) = f(x)$$

при условии, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ *сходится для рассматриваемого значения* x.

Так как ряды, определяющие $F(x)$, $F(x \pm 2\alpha)$, сходятся, то мы можем складывать их почленно и, замечая, что

$$\cos n(x+2\alpha) + \cos n(x-2\alpha) - 2\cos nx = -4\sin^2 n\alpha \cos nx,$$
$$\sin n(x+2\alpha) + \sin n(x-2\alpha) - 2\sin nx = -4\sin^2 n\alpha \sin nx,$$

найдем, что

$$G(x, \alpha) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 A_n(x).$$

Покажем теперь, что этот ряд сходится равномерно относительно α для всех значений α при условии, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$$

сходится. Требуемый результат является тогда непосредственным следствием § 3.32, ибо если

$$f_n(\alpha) = \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 \quad (\alpha \neq 0) \quad \text{и} \quad f_n(0) = 1,$$

то $f_n(\alpha)$ будет непрерывна для всех значений α и, таким образом, $G(x, \alpha)$ будет непрерывной функцией от α, так что согласно § 3.2

$$G(x, 0) = \lim_{\alpha \to 0} G(x, \alpha).$$

Чтобы доказать, что ряд, определяющий $G(x, \alpha)$, сходится равномерно, применим признак, данный в примере 2 § 3.35. Выражение, соответствующее $\omega_n(x)$, будет $f_n(\alpha)$, и ясно, что $|f_n(\alpha)| \leqslant 1$; поэтому достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(\alpha) - f_n(\alpha)| < K,$$

где K не зависит от α.

В самом деле, пусть s — такое число, что $s|\alpha| < \pi < (s+1)|\alpha|$; когда $\alpha \neq 0$, мы имеем [1])

$$\sum_{n=1}^{s-1} |f_{n+1}(\alpha) - f_n(\alpha)| = \sum_{n=1}^{s-1} (f_n(\alpha) - f_{n+1}(\alpha)) = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} - \frac{\sin^2 s\alpha}{(s\alpha)^2}.$$

Далее,

$$\sum_{n=s+1}^{\infty} |f_{n+1}(\alpha) - f_n(\alpha)| =$$

$$= \sum_{n=s+1}^{\infty} \left| \left\{ \frac{\sin^2 n\alpha}{\alpha^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \right\} + \frac{\sin^2 n\alpha - \sin^2 (n+1)\alpha}{(n+1)^2 \alpha^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{|\sin^2 n\alpha - \sin^2 (n+1)\alpha|}{(n+1)^2 \alpha^2} =$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2 \alpha^2} + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{|\sin \alpha \sin (2n+1)\alpha|}{(n+1)^2 \alpha^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(s+1)^2 \alpha^2} + \frac{|\sin \alpha|}{\alpha^2} \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} <$$

$$< \frac{1}{\pi^2} + \frac{|\sin \alpha|}{\alpha^2} \int_s^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} \leqslant \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(s+1)|\alpha|}.$$

[1]) Так как $x^{-1} \sin x$ уменьшается при возрастании x от 0 до π.

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(\alpha)-f_n(\alpha)| < \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2} - \frac{\sin^2 s\alpha}{s^2\alpha^2} + \left(\frac{\sin^2 s\alpha}{s^2\alpha^2} + \frac{\sin^2(s+1)\alpha}{(s+1)^2\alpha^2}\right) + \\ + \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi} < 1 + \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi^2}.$$

Так как это выражение не зависит от α, то требуемый результат доказан[1]).

Следовательно, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ сходится, то ряд, определяющий $G(x, \alpha)$, сходится равномерно относительно α для всех значений α и, как мы и утверждали выше,

$$\lim_{\alpha\to 0} G(x, \alpha) = G(x, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) = f(x).$$

Пример. Пусть

$$H(x, \alpha, \beta) = \frac{F(x+\alpha+\beta) - F(x+\alpha-\beta) - F(x-\alpha+\beta) + F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta},$$

и пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ сходится; доказать, что

$$H(x, \alpha, \beta) \to f(x),$$

когда $\alpha, \beta \to 0$ таким образом, что $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\beta}{\alpha}$ остаются ограниченными.

(Riemann)

9.621. Вторая лемма Римана

Пусть в обозначениях §§ 9.6—9.62 коэффициенты $a_n, b_n \to 0$, *тогда*

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{F(x+2\alpha) + F(x-2\alpha) - 2F(x)}{4\alpha} = 0$$

для всех значений x.

Действительно,

$$\frac{1}{4\alpha}\{F(x+2\alpha) + F(x-2\alpha) - 2F(x)\} = A_0\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha} A_n(x);$$

но, согласно примеру 3 § 9.11, при $\alpha > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha} = \frac{1}{2}(\pi - \alpha);$$

[1]) Это неравенство, очевидно, справедливо, когда $\alpha = 0$.

и таким образом, поскольку

$$A_0(x)\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2\alpha}A_n(x)=A_0(x)\alpha+\frac{1}{2}(\pi-\alpha)A_1(x)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(\pi-\alpha)-\sum_{m=1}^{n}\frac{\sin^2 m\alpha}{m^2\alpha}\right\}\{A_{n+1}(x)-A_n(x)\},$$

мы видим, согласно примеру 2 § 3.35, что этот ряд сходится равномерно относительно α для всех значений α, больших нуля или равных нулю [1]).

Но

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{4\alpha}\{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)\}=$$
$$=\lim_{\alpha\to+0}\left[A_0(x)\alpha+\frac{1}{2}(\pi-\alpha)A_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}g_n(\alpha)\{A_{n+1}(x)-A_n(x)\}\right],$$

и этот предел в силу теоремы по § 3.32 равен значению функции при $\alpha=0$; это значение равно нулю, так как $\lim\limits_{n\to\infty}A_n(x)=0$. По симметрии заключаем, что $\lim\limits_{\alpha\to+0}=\lim\limits_{\alpha\to-0}$.

9.63. Теорема Римана [2]) о тригонометрических рядах

У двух тригонометрических рядов, сходящихся и равных во всех точках отрезка $(-\pi, \pi)$, с возможным исключением конечного числа точек, соответствующие коэффициенты равны.

Непосредственным выводом из этой теоремы будет то, что функция типа, рассмотренного в § 9.42, не может быть представлена на отрезке $(-\pi, \pi)$ никаким тригонометрическим рядом, кроме ряда Фурье. Это обстоятельство впервые было отмечено Дю Буа Реймоном.

Отметим, что можно найти и другие разложения, например вида

$$\alpha_0+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\alpha_m\cos\frac{1}{2}mx+\beta_m\sin\frac{1}{2}mx\right),$$

---

[1]) Если мы определим $g_n(\alpha)$ равенствами

$$g_n(\alpha)=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)-\sum_{m=1}^{n}\frac{\sin^2 m\alpha}{m^2\alpha}\quad(\alpha\neq 0)\quad\text{и}\quad g_n(0)=\frac{1}{2}\pi,$$

то при $\alpha\geqslant 0$ функция $g_n(\alpha)$ будет непрерывной и $g_{n+1}(\alpha)\leqslant g_n(\alpha)$.

[2]) Доказательство, приводимое нами, принадлежит Г. Кантору (G. Cantor, Journal für Math., LXXII, 139—142 (1870)).

представляющие $f(x)$ между $-\pi$ и π; действительно, положив $x=2\xi$, рассмотрим функцию $\varphi(\xi)$ такую, что $\varphi(\xi)=f(2\xi)$ при $-\frac{\pi}{2}<\xi<\frac{\pi}{2}$ и $\varphi(\xi)=$ $=g(\xi)$ при $-\pi<\xi<-\frac{\pi}{2}$ и при $\frac{\pi}{2}<\xi<\pi$, где $g(\xi)$ — какая-нибудь функция, удовлетворяющая условиям § 9.43. Тогда, если мы разложим $\varphi(\xi$ в ряд Фурье вида

$$\alpha_0+\sum_{m=0}^{\infty}(\alpha_m\cos m\xi+\beta_m\cos m\xi),$$

то это разложение представит $f(x)$ при $-\pi<x<\pi$ и ясно, что, меняя функцию $g(\xi)$, можно получить неограниченное число таких разложений. Вопрос, рассматриваемый сейчас, состоит в том, существуют ли ряды, расположенные по синусам и косинусам *целочисленных* кратных x, которые отличаются от рядов Фурье и все же представляют $f(x)$ между $-\pi$ и π.

Допустим, что имеется два тригонометрических ряда, удовлетворяющих данным условиям, и пусть их разностью будет ряд

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x)=f(x).$$

Тогда $f(x)=0$ во всех точках промежутка $(-\pi, \pi)$, за исключением конечного числа точек; пусть ξ_1, ξ_2 — две соседние из этих исключительных точек, и пусть $F(x)$ — ассоциированная функция Римана. Перейдем к доказательству леммы относительно значений $F(x)$ при $\xi_1<x<\xi_2$.

9.631. Лемма Шварца[1])

В промежутке $\xi_1<x<\xi_2$ функция $F(x)$ будет линейной функцией от x, если $f(x)=0$ в этом промежутке.

Действительно, функция

$$\varphi(x)=\theta\left[F(x)-F(\xi_1)-\frac{x-\xi_1}{\xi_2-\xi_1}\{F(\xi_2)-F(\xi_1)\}\right]-\frac{1}{2}h^2(x-\xi_1)(\xi_2-x),$$

где $\theta=1$ или -1, непрерывна на отрезке $\xi_1\leqslant x\leqslant\xi_2$ и $\varphi(\xi_1)=\varphi(\xi_2)=0$.

Если первый член в $\varphi(x)$ не равен тождественно нулю во всем промежутке[2]), то найдется некоторая точка $x=c$, в которой он будет отличен от нуля. Возьмем знак θ так, чтобы первый член был положителен в точке c, и затем выберем h столь малым, чтобы $\varphi(c)$ была все еще положительной.

Так как $\varphi(x)$ непрерывна, то она достигает своей верхней границы (§ 3.62), и эта верхняя граница будет положительной, так как $\varphi(c)>0$.

---

[1]) Цитируется Г. Кантором (G. Cantor, Journal für Math., LXXII (1870)).

[2]) Если он равен нулю во всем промежутке, то $F(x)$ будет линейной функцией от x.

Пусть $\varphi(x)$ достигает своей верхней границы в c_1, так что $c_1 \neq \xi_1$, $c_1 \neq \xi_2$. Тогда по первой лемме Римана

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\varphi(c_1+\alpha)+\varphi(c_1-\alpha)-2\varphi(c_1)}{\alpha^2} = h^2.$$

Но

$$\varphi(c_1+\alpha) \leqslant \varphi(c_1), \quad \varphi(c_1-\alpha) \leqslant \varphi(c_1),$$

так что этот предел должен быть отрицательным или нулем.

Таким образом, предполагая, что первый член в $\varphi(x)$ не равен тождественно нулю в промежутке (ξ_1, ξ_2), мы пришли к противоречию. Поэтому он тождественно равен нулю и, следовательно, $F(x)$ является линейной функцией от x в области $\xi_1 < x < \xi_2$. Лемма, таким образом, доказана.

9. 632. Доказательство теоремы Римана

Мы видим, что кривая $y = F(x)$ состоит из ряда отрезков, начала и концы которых соответствуют исключительным точкам, и так как ряд, определяющий $F(x)$, будучи равномерно сходящимся, является непрерывной функцией от x, то эти отрезки соединяются в одну непрерывную ломаную линию.

Но по второй лемме Римана, даже если ξ — исключительная точка, имеем

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{F(\xi+\alpha)+F(\xi-\alpha)-2F(\xi)}{\alpha} = 0.$$

Дробь, входящая в этот предел, представляет разность наклонов двух отрезков прямых, встречающихся в точке с абсциссой ξ; поэтому оба отрезка имеют одно направление, так что уравнение $y = F(x)$ представляет одну прямую линию. Если мы напишем $F(x) = cx + c'$, то отсюда следует, что c и c' имеют одни и те же значения для *всех* значений x. Таким образом,

$$\frac{1}{2} A_0 x^2 - cx - c' = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} A_n(x),$$

причем правая часть этого равенства периодическая с периодом 2π.

Поэтому левая часть равенства также должна быть периодической с периодом 2π. Отсюда

$$A_0 = 0, \quad c = 0$$

и

$$-c' = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} A_n(x).$$

Ряд в правой части этого равенства сходится равномерно, так что мы можем умножить его на $\cos nx$ или $\sin nx$ и проинтегрировать.

Это дает

$$\pi n^{-2}a_n = -c' \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = 0,$$

$$\pi n^{-2}b_n = -c' \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0.$$

Поэтому все коэффициенты здесь равны нулю и у двух тригонометрических рядов, разность которых равна $A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)$, соответствующие коэффициенты равны.

А это и есть результат, высказанный в § 9.63.

9.7. Представление функции интегралом Фурье[1])

Из § 9.43 следует, что если $f(x)$ — непрерывная функция, за исключением конечного числа разрывов, и если она имеет ограниченную вариацию в промежутке $(-\infty, \infty)$, то для всякой *внутренней* точки x отрезка $(-\alpha, \beta)$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{\sin(2m+1)(t-x)}{t-x} f(t)\,dt =$$
$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{2}\pi\theta^{-1}\sin\theta\,\{f(x+2\theta)+f(x-2\theta)\}.$$

Пусть теперь λ — любое вещественное число; возьмем целое число m так, что $\lambda = 2m+1+2\eta$, где $0 \leqslant \eta < 1$.

Тогда согласно § 9.41 (II)

$$\int_{-\alpha}^{\beta} \{\sin\lambda(t-x) - \sin(2m+1)(t-x)\}(t-x)^{-1} f(t)\,dt =$$
$$= \int_{-\alpha}^{\beta} 2\{\cos(2m+1+\eta)(t-x)\}\{\sin\eta(t-x)\}(t-x)^{-1} f(t)\,dt \to 0,$$

когда $m\to\infty$, так как функция $(t-x)^{-1} f(t)\sin\eta(t-x)$ имеет ограниченную вариацию. Следовательно, по доказанной в § 9.41 лемме Римана — Лебега ясно, что если интегралы

$$\int_0^{\infty} |f(t)|\,dt \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{0} |f(t)|\,dt$$

[1]) Fourier, La théorie analitique de la chaleur, гл. IX. О позднейшей работе по интегралам Фурье и о современной теории «преобразований Фурье» см. Titchmarsch, Proc. Camb. Phil. Soc., XXI, 462—473 (1923) и Proc. London Math. Soc. (2), XXIII, 279—289 (1924).

сходятся, то[1])

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda(t-x)}{t-x}f(t)\,dt=\frac{1}{2}\pi\,\{f(x+0)+f(x-0)\}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\lambda}\cos u(t-x)\,du\right\}\cdot f(t)\,dt=\frac{1}{2}\pi\,\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

Чтобы получить формулу Фурье, мы должны изменить порядок интегрирования в этом повторном интеграле.

Для любого заданного значения λ и любого положительного значения ε существует такое число β, что

$$\int_{\beta}^{\infty}|f(t)|\,dt<\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\lambda};$$

положив $\cos u(t-x)f(t)=\varphi(t,\ u)$, мы имеем[2])

$$\left|\int_{0}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\lambda}\varphi(t,\ u)\,du\right\}dt-\int_{0}^{\lambda}\left\{\int_{0}^{\infty}\varphi(t,\ u)\,dt\right\}du\right|=$$

$$=\left|\int_{0}^{\beta}\left\{\int_{0}^{\lambda}\varphi(t,\ u)\,du\right\}dt+\int_{\beta}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\lambda}\varphi(t,\ u)\,du\right\}dt-\right.$$

$$\left.-\int_{0}^{\lambda}\left\{\int_{0}^{\beta}\varphi(t,\ u)\,dt\right\}du-\int_{0}^{\lambda}\left\{\int_{\beta}^{\infty}\varphi(t,\ u)\,dt\right\}du\right|=$$

$$=\left|\int_{\beta}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\lambda}\varphi(t,\ u)\,du\right\}dt-\int_{0}^{\lambda}\left\{\int_{\beta}^{\infty}\varphi(t,\ u)\,dt\right\}du\right|<$$

$$<\int_{\beta}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\lambda}|\varphi(t,\ u)|\,du\right\}dt+\int_{0}^{\lambda}\int_{\beta}^{\infty}|\varphi(t,\ u)|\,dt\,du<2\lambda\int_{\beta}^{\infty}|f(t)|\,dt<\varepsilon.$$

---

[1]) $\int_{-\infty}^{\infty}$ обозначает двойной предел $\lim\limits_{\rho\to\infty,\ \sigma\to\infty}\int_{-\rho}^{\sigma}$. Если этот предел существует, то он, конечно, будет равен $\lim\limits_{\rho\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho}$.

[2]) Равенство $\int_{0}^{\beta}\int_{0}^{\lambda}=\int_{0}^{\lambda}\int_{0}^{\beta}$ легко обосновать по § 4.5, рассматривая промежутки, внутри которых $f(x)$ непрерывна.

Так как это справедливо для всех значений ε как угодно малых, то мы заключаем, что

$$\int_0^\infty \int_0^\lambda = \int_0^\lambda \int_0^\infty;$$

подобным же образом

$$\int_{-\infty}^0 \int_0^\lambda = \int_0^\lambda \int_{-\infty}^0.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}\pi\{f(x+0)+f(x-0)\} = \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda \int_{-\infty}^\infty \cos u(t-x) f(t)\,dt\,du =$$
$$= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \cos u(t-x) f(t)\,dt\,du.$$

Этот результат известен под названием *интегральной формулы Фурье* [1]).

Пример. Проверить интегральную формулу Фурье непосредственно; (I) для функции

$$f(x) = (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

(II) для функции, определяемой равенствами

$$f(x) = 1 \quad (-1 < x < 1), \quad f(x) = 0 \qquad (|x| > 1).$$

(Rayleigh)

ЛИТЕРАТУРА

G. F. B. Riemann, Ges. math. Werke, 213—250.
E. W. Hobson, Functions of a real variable, гл. VII, 1907.
H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, Paris, 1906.
Ш. Ж. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. II. ГТТИ, 1933.
H. Burkhardt, Encyklopädie der Math. Wiss., II, 1 (7), Leipzig, 1914.
G. A. Carse и G. Shearer, A course in Fourier's analysis and periodogram analysis, Edinburgh Math. Tracts, № 4 (1915).
Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, Физматгиз, 1961.
А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939.
Ч. Э. Титчмарш, Введение в теорию интеграла Фурье, Гостехиздат, 1948.

[1]) Относительно доказательства справедливости формулы, когда $f(x)$ подчинена менее сильным ограничениям, см. Hobson, Functions of a real variable, §§ 492—493. Следует отметить, что хотя $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \int_0^\lambda$ и существует, но повторный интеграл $\int_{-\infty}^\infty \left\{\int_0^\infty \sin u(t-x)\,du\right\} f(t)\,dt$ не существует.

Примеры

1. Получить разложения:

a) $$\frac{1-r\cos z}{1-2r\cos z+r^2}=1+r\cos z+r^2\cos 2z+\ldots,$$

b) $$\frac{1}{2}\lg(1-2r\cos z+r^2)=-r\cos z-\frac{1}{2}r^2\cos 2z-\frac{1}{3}r^3\cos 3z-\ldots,$$

c) $$\operatorname{arctg}\frac{r\sin z}{1-r\cos z}=r\sin z+\frac{1}{2}r^2\sin 2z+\frac{1}{3}r^3\sin 3z+\ldots,$$

d) $$\operatorname{arctg}\frac{2r\sin z}{1-r^2}=r\sin z+\frac{1}{3}r^3\sin 3z+\frac{1}{5}r^5\sin 5z+\ldots$$

и показать, что при $|r|<1$ они сходятся для всех значений z в некоторых полосах, параллельных вещественной оси в плоскости z.

2. Разложить x^3 и x в ряд Фурье по синусам, годный при $-\pi<x<\pi$, и отсюда найти значение суммы ряда

$$\sin x-\frac{1}{2^3}\sin 2x+\frac{1}{3^3}\sin 3x-\frac{1}{4^3}\sin 4x+\ldots$$

для всех значений x.

(Jesus, 1902)

3. Показать, что функция от x, представленная рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx\sin^2 n\alpha}{n},$$

будет постоянной при $0<x<2\alpha$ и нулем при $2\alpha<x<\pi$; вычертить график функции.

(Pembroke, 1907)

4. Найти разложение функции $f(x)$, определяемой равенствами

$$f(x)=\sin x+\cos x \qquad \left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f(x)=\sin x-\cos x \qquad \left(\frac{\pi}{2}\leqslant x<\pi\right),$$

в ряд по косинусам.

(Peterhouse, 1906)

5. Показать, что

$$\sin\pi x+\frac{\sin 3\pi x}{3}+\frac{\sin 5\pi x}{5}+\frac{\sin 7\pi x}{7}+\ldots=\frac{1}{4}\pi[x],$$

где $[x]$ обозначает $+1$ или -1 соответственно тому, будет ли ближайшее целое число, меньшее x, четным или нечетным, и нуль, если x — целое число.

(Trinity, 1895)

6. Показать, что разложения

$$\lg\left|2\cos\frac{1}{2}x\right|=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x-\ldots$$

и

$$\lg\left|2\sin\frac{1}{2}x\right|=-\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{3}\cos 3x-\ldots$$

справедливы для всех вещественных значений x, кроме значений, кратных π.

7. Получить разложение

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos mx}{(m+1)(m+2)} = (\cos x + \cos 2x) \lg \left(2 \cos \frac{1}{2} x\right) + \\ + \frac{1}{2} x (\sin 2x + \sin x) - \cos x$$

и найти промежуток значений x, для которых оно применимо.

(Trinity, 1898)

8. Доказать, что при $0 < x < 2\pi$

$$\frac{\sin x}{a^2+1^2} + \frac{2 \sin 2x}{a^2+2^2} + \frac{3 \sin 3x}{a^2+3^2} + \ldots = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{sh} a(\pi - x)}{\operatorname{sh} a\pi}.$$

(Trinity, 1895)

9. Показать, что для значений x между $-\pi$ и $+\pi$ имеют место следующие разложения:

$$\sin mx = \frac{2}{\pi} \sin m\pi \left(\frac{\sin x}{1^2 - m^2} - \frac{2 \sin 2x}{2^2 - m^2} + \frac{3 \sin 3x}{3^2 - m^2} - \ldots\right),$$

$$\cos mx = \frac{2}{\pi} \sin m\pi \left(\frac{1}{2m} + \frac{m \cos x}{1^2 - m^2} - \frac{m \cos 2x}{2^2 - m^2} + \frac{m \cos 3x}{3^2 - m^2} - \ldots\right),$$

$$\frac{e^{mx} + e^{-mx}}{e^{m\pi} - e^{-m\pi}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2m} - \frac{m \cos x}{1^2 + m^2} + \frac{m \cos 2x}{2^2 + m^2} - \frac{m \cos 3x}{3^2 + m^2} + \ldots\right).$$

10. Пусть x — вещественная переменная между 0 и 1 и n — нечетное число $\geqslant 3$. Показать, что

$$(-1)^s = \frac{1}{n} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{tg} \frac{m\pi}{n} \cos 2m\pi x,$$

если x не кратно $\frac{1}{n}$, причем s — наибольшее целое число, содержащееся в nx, но что

$$0 = \frac{1}{n} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \operatorname{tg} \frac{m\pi}{n} \cos 2m\pi x,$$

если x — целое кратное $\frac{1}{n}$. (Berger)

11. Показать, что сумма ряда

$$\frac{1}{3} + 4\pi^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1} \sin \frac{2}{3} m\pi \cos 2m\pi x$$

равна 1 при $0 < x < \frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3} < x < 1$ и равна -1 при $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$.

(Trinity, 1901)

12. Пусть

$$\frac{ae^{ax}}{e^a - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n V_n(x)}{n!};$$

показать, что при $-1 < x < 1$

$$\cos 2\pi x + \frac{\cos 4\pi x}{2^{2n}} + \frac{\cos 6\pi x}{3^{2n}} + \ldots = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{2n!} V_{2n}(x),$$

$$\sin 2\pi x + \frac{\sin 4\pi x}{2^{2n+1}} + \frac{\sin 6\pi x}{3^{2n+1}} + \ldots = (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}\pi^{2n+1}}{2n+1!} V_{2n+1}(x).$$

(Math. Trip., 1896)

13. Пусть m — целое число; показать, что для всех вещественных значений x

$$\cos^{2m} x = 2\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2m}\left\{\frac{1}{2} + \frac{m}{m+1}\cos 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)}\cos 4x + \frac{m(m-1)(m-2)}{(m+1)(m+2)(m+3)}\cos 6x + \ldots\right\},$$

$$|\cos^{2m-1} x| = \frac{4}{\pi}\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2m-2)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}\left\{\frac{1}{2} + \frac{2m-1}{2m+1}\cos 2x + \right.$$

$$\left. + \frac{(2m-1)(2m-3)}{(2m+1)(2m+3)}\cos 4x + \ldots\right\}.$$

14. Точка движется по прямой со скоростью, которая вначале была u и которая получает постоянные приращения, равные u, через равные промежутки времени τ. Доказать, что скорость в момент t после начала движения будет

$$\frac{u}{2} + \frac{ut}{\tau} + \frac{u}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sin\frac{2m\pi t}{\tau},$$

а пройденный путь

$$\frac{ut}{2\tau}(t+\tau) + \frac{u\tau}{12} - \frac{u\tau}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\cos\frac{2m\pi t}{\tau}.$$

(Trinity, 1894)

15. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(6n-3)x - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x +$$

$$+ \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left\{\sin x - \frac{\sin 5x}{5^2} + \frac{\sin 7x}{7^2} - \frac{\sin 11x}{11^2} + \ldots\right\};$$

показать, что

$$f(+0) = f(\pi - 0) = -\frac{\pi}{4}$$

и

$$f\left(\frac{\pi}{3}+0\right) - f\left(\frac{\pi}{3}-0\right) = -\frac{\pi}{2},$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}+0\right) - f\left(\frac{2\pi}{3}-0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Замечая, что последний ряд равен

$$\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{3}(2n-1)\pi\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2},$$

вычертить график функции $f(x)$.

(Math. Trip., 1893)

16. Показать, что при $0<x<\pi$

$$f(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\cos x-\frac{1}{5}\cos 5x+\frac{1}{7}\cos 7x-\frac{1}{11}\cos 11x+\ldots\right)=$$

$$=\sin 2x+\frac{1}{2}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 8x+\frac{1}{5}\sin 10x+\ldots,$$

где

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{3}, & 0<x<\frac{\pi}{3},\\ 0, & \frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3},\\ -\frac{\pi}{3}, & \frac{2\pi}{3}<x<\pi.\end{cases}$$

Найти сумму каждого ряда для $x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi$ и для всех остальных значений x.

(Trinity, 1908)

17. Доказать, что геометрическое место точек, представляемое уравнением

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sin nx\sin ny=0,$$

будет состоять из двух систем взаимно перпендикулярных прямых, делящих координатную плоскость на квадраты площади π^2.

(Math. Trip., 1895)

18. Показать, что уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin ny\cos nx}{n^3}=0$$

представляет прямые линии $y=\pm m\pi$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$ вместе с дугами эллипсов, полуоси которых равны π и $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$; дуги расположены в квадратах площади $2\pi^2$. Вычертить график этого геометрического места.

(Trinity, 1903)

19. Показать, что если точка (x, y, z) лежит внутри октаэдра, ограниченного плоскостями $\pm x\pm y\pm z=\pi$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx\sin ny\sin nz}{n^3}=\frac{1}{2}xyz.$$

(Math. Trip., 1904)

20. Начерчены окружности радиуса a с центрами в вершинах, взятых через одну, правильного шестиугольника со стороной a. Показать, что уравнение трилистника, образованного внешними дугами окружностей, может быть написано в виде

$$\frac{\pi r}{6\sqrt{3a}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4}\cos 3\theta - \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\theta + \frac{1}{8\cdot 10}\cos 9\theta - \ldots,$$

если полярная ось берется таким образом, что она проходит через центр одной из окружностей.

(Pembroke, 1902)

21. Вычертить график, представляемый уравнением

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{2m}{\pi}\sin\frac{\pi}{m}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nm\theta}{1-(nm)^2}\right\},$$

где m — целое число. (Jesus, 1908)

22. Из каждой вершины правильного шестиугольника со стороной $2a$ как из центра проведены дуги окружностей радиуса $2a$, лежащие внутри шестиугольника. Показать, что уравнение фигуры, образованной этими шестью дугами, имеет вид

$$\frac{\pi r}{4a} = 6 - 3\sqrt{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{(-1)^{n-1}\, 6 + 3\sqrt{3}\}}{(6n-1)(6n+1)}\cos 6n\theta.$$

Начальный радиус-вектор делит пополам лепесток.

(Trinity, 1905)

23. Показать, что при $c > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-cx}\operatorname{ctg} x \sin(2n+1)x\,dx = \frac{1}{2}\pi \operatorname{th}\frac{1}{2}c\pi.$$

(Trinity, 1894)

24. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\pi\operatorname{cth} 1.$$

(King's, 1901)

25. Показать, что при $-1 < x < 1$ и a вещественном

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\theta\,\sin(1+x)\theta}{\sin\theta}\,\frac{\theta}{a^2+\theta^2}\,d\theta = -\frac{1}{2}\pi\frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} a}.$$

(Math. Trip., 1905)

26. Предполагая возможность разложения $f(x)$ в равномерно сходящийся ряд вида $\sum_k A_k \sin kx$, где k — корень уравнения $k\cos ak + b\sin ak = 0$, а суммирование распространяется на все положительные корни этого уравнения, определить постоянные A_k.

(Math. Trip., 1898)

27. Пусть ряд

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

является рядом Фурье; показать, что если $f(x)$ удовлетворяет некоторым общим условиям, то

$$a_n=\frac{4}{\pi}P\int_0^{\infty}f(t)\cos nt\operatorname{tg}\frac{t}{2}\frac{dt}{t},\quad b_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\sin nt\operatorname{tg}\frac{t}{2}\frac{dt}{t}.$$

(Beau)

28. Пусть

$$S_n(x)=2\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\frac{\sin rx}{r};$$

доказать, что наибольший максимум суммы $S_n(x)$ в промежутке $(0, \pi)$ достигается при $x=\frac{n\pi}{n+1}$; доказать также, что при $n\to\infty$

$$S_n\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)\to 2\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Показать, что, когда $n\to\infty$, форма кривой $y=S_n(x)$ в промежутке $(0, \pi)$ стремится приблизиться к форме линии, образованной отрезком $y=x\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$ и отрезком $x=\pi\,(0\leqslant y\leqslant G)$, где

$$G=2\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt.$$

[То обстоятельство, что $G=3{,}704\ldots>\pi$, называется *явлением Гиббса*; см. Gibbs, Nature, LXIX, 606 (1899). Явление это характерно для ряда Фурье в соседстве с точкой разрыва первого рода функции, представляемой рядом. Относительно полного разъяснения явления, открытого Уилбрэмом (Wilbraham, Camb. and Dublin Math. Journal, III, 198—201 (1848)), см. книгу Carslaw, Fourier's series and integrals, гл. IX, 1921.]

ГЛАВА 10

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

10.1. Линейные дифференциальные уравнения[1]). Обыкновенные и особые точки

В некоторых из дальнейших глав этой книги мы займемся исследованием обширных и важных классов функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. Поэтому желательно установить некоторые общие результаты, касающиеся решений таких дифференциальных уравнений.

За каноническую форму линейного дифференциального уравнения второго порядка примем

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p(z)\frac{du}{dz}+q(z)u=0 \tag{A}$$

и будем предполагать, что имеется некоторая область S, в которой как $p(z)$, так и $q(z)$ будут аналитическими функциями, за исключением конечного числа полюсов.

Всякую точку области S, в которой $p(z)$, $q(z)$ обе аналитические, будем называть *обыкновенной точкой* уравнения; остальные точки области S будем называть *особыми точками.*

10.2. Решение[2]) дифференциального уравнения в окрестности обыкновенной точки

Пусть b — обыкновенная точка дифференциального уравнения и S_b — область, образованная кругом радиуса r_b с центром в b

[1]) Изложение в этой главе главным образом теоретическое; оно состоит большей частью из теорем существования. Предполагается, что читатель имеет некоторое знакомство с практическими методами решения дифференциальных уравнений; эти методы даны в работах, специально посвященных этому предмету, как, например, Forsyth, A treatise on differential equations, 1914.

[2]) Этот способ применим только к уравнениям второго порядка. Относительно способа, применимого к уравнениям любого порядка, см. Forsyth, Theory of differential equations, IV, гл. 1, 1902.

вместе с окружностью; радиус круга таков, что каждая точка S_b является точкой S и обыкновенной точкой уравнения.

Пусть z — переменная точка области S_b. Положим в уравнении (А)

$$u = v \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_b^z p(\zeta)\,d\zeta\right\},$$

получим уравнение

$$\frac{d^2v}{dz^2} + J(z)\,v = 0, \tag{B}$$

где

$$J(z) = q(z) - \frac{1}{2}\frac{dp(z)}{dz} - \frac{1}{4}\{p(z)\}^2.$$

Легко видеть (§ 5.22), что обыкновенная точка уравнения (А) будет также обыкновенной точкой уравнения (В).

Рассмотрим теперь последовательность функций $v_n(z)$, аналитических в S_b, определяемых равенствами

$$v_0(z) = a_0 + a_1(z-b),$$

$$v_n(z) = \int_b^z (\zeta - z)\,J(\zeta)\,v_{n-1}(\zeta)\,d\zeta \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где a_0, a_1 — произвольные постоянные.

Пусть M, μ — верхние границы $|J(z)|$ и $|v_0(z)|$ в области S_b. *Тогда во всех точках этой области*

$$|v_n(z)| \leqslant \frac{\mu M^n |z-b|^{2n}}{n!}.$$

Это неравенство справедливо при $n=0$; если оно справедливо при $n=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1$, то, принимая за путь интегрирования отрезок прямой линии, получим

$$|v_m(z)| = \left|\int_b^z (\zeta - z)\,J(\zeta)\,v_{m-1}(\zeta)\,d\zeta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(m-1)!}\int_b^z |\zeta - z|\,|J(\zeta)|\,\mu M^{m-1}\,|\zeta - b|^{2m-2}\,|d\zeta| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(m-1)!}\,\mu M^m\,|z-b|\int_0^{|z-b|} t^{2m-2}\,dt < \frac{1}{m!}\,\mu M^m\,|z-b|^{2m},$$

поэтому по индукции неравенство имеет место для всех значений n.

Далее, так как

$$|v_n(z)| \leqslant \frac{\mu M^n r_b^{2n}}{n!},$$

когда z лежит в S_b и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu M^n r_b^{2n}}{n!}$$

сходится, то заключаем (§ 3.34), что

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(z)$$

есть ряд аналитических функций, равномерно сходящийся в S_b; но по определению $v_n(z)$

$$\frac{d}{dz} v_n(z) = -\int_b^z J(\zeta) v_{n-1}(\zeta)\, d\zeta \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

$$\frac{d^2}{dz^2} v_n(z) = -J(z) v_{n-1}(z),$$

отсюда получаем (§ 5.3), что

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = \frac{d^2 v_0(z)}{dz^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2 v_n(z)}{dz^2} = -J(z) v(z).$$

Поэтому $v(z)$ будет аналитической в S_b функцией от z, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} + J(z) v(z) = 0,$$

и из формулы, полученной для $\frac{d}{dz} v_n(z)$, ясно, что

$$v(b) = a_0, \quad v'(b) = \left\{ \frac{d}{dz} v(z) \right\}_{z=b} = a_1.$$

где a_0, a_1 — произвольные постоянные.

10.21. Единственность решения

Если бы имелось два аналитических решения уравнения для v, скажем $v_1(z)$ и $v_2(z)$, таких, что $v_1(b) = v_2(b) = a_0$, $v_1'(b) = v_2'(b) = a_1$, то тогда, положив $w(z) = v_1(z) - v_2(z)$, мы имели бы

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} + J(z) w(z) = 0.$$

Дифференцируя это уравнение $n-2$ раза и полагая $z = b$, получим

$$w^{(n)}(b) + J(b) w^{(n-2)}(b) + C_{n-2}^1 J'(b) w^{(n-3)}(b) + \ldots$$
$$\ldots + J^{(n-2)}(b) w(b) = 0.$$

Полагая последовательно $n=2, 3, 4, \ldots$, мы видим, что все производные функции $w(z)$ равняются нулю при $z=b$, и таким образом, по теореме Тейлора $w(z)\equiv 0$; иначе говоря, два решения $v_1(z)$, $v_2(z)$ тождественны.

Положив

$$u(z)=v(z)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_b^z p(\zeta)\,d\zeta\right\},$$

мы легко убеждаемся в том, что $u(z)$ будет единственным аналитическим решением уравнения (А) таким, что

$$u(b)=A_0,\quad u'(b)=A_1,\quad \text{где}\quad A_0=a_0,\quad A_1=a_1-\frac{1}{2}p(b)\,a_0.$$

Теперь, когда мы знаем, что решение уравнения (А) существует, что оно будет аналитическим в S_b и таким, что $u(b)$ и $u'(b)$ имеют произвольные значения A_0, A_1, простейший способ получения этого решения в виде ряда Тейлора состоит в том, что мы полагаем

$$u(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-b)^n,$$

затем подставляем этот ряд в дифференциальное уравнение и приравниваем нулю коэффициенты при последовательных степенях $z-b$ (§ 3.73), а затем последовательно выражаем A_2, A_3, ..., через A_0, A_1.

Примечание. Для выполнения этого процесса подстановки на практике гораздо проще иметь уравнение «освобожденным от дробей», чем иметь его в канонической форме (А) § 10.1. Поэтому в приведенных ниже примерах 1, 2 следует пользоваться уравнениями в той форме, в какой они даны, т. е. *не нужно* делить на $1-z^2$, $(z-2)(z-3)$. То же самое замечание относится и к примерам §§ 10.3, 10.32.

Из общей теории аналитического продолжения (§ 5.5) вытекает, что полученное решение будет аналитическим во всех точках области S, за исключением особых точек дифференциального уравнения. Тем не менее решение *не будет* вообще «аналитическим по всей области S» (§ 5.2, сноска к следствию 2), за исключением особых точек, так как оно может не быть однозначным, т. е. оно может не вернуться к исходному значению, если z опишет контур, окружающий одну или несколько особых точек уравнения.

[Свойство, что решение линейного дифференциального уравнения будет аналитическим во всех точках, за исключением особых точек коэффициентов уравнения, является общим для линейных уравнений всех порядков.]

Про два частных решения уравнения второго порядка, отношение которых не постоянно, говорят, что они образуют *фундаментальную систему решений*.

Пример 1. Показать, что уравнение

$$(1-z^2)u''-2zu'+\frac{3}{4}u=0$$

имеет фундаментальную систему решений

$$u_1=1-\frac{3}{8}z^2-\frac{21}{128}z^4-\ldots,$$

$$u_2=z+\frac{5}{24}z^3+\frac{15}{128}z^5+\ldots$$

Определить общий коэффициент в каждом ряде и показать, что радиус сходимости каждого ряда равен 1.

Пример 2. Рассмотреть уравнение

$$(z-2)(z-3)u''-(2z-5)u'+2u=0$$

подобным же образом, как и в примере 1.

10.3. Правильные точки дифференциального уравнения

Предположим, что в некоторой точке c области S функции $p(z)$ и $q(z)$ (или хотя бы одна из них) имеют полюсы, причем такого порядка, что $(z-c)p(z)$ и $(z-c)^2q(z)$ будут аналитическими в c. Такая точка называется *правильной точкой*[1]) дифференциального уравнения. Все другие полюсы функции $p(z)$ или $q(z)$, не обладающие указанным выше свойством, называются *неправильными точками*. Основание для различения станет ясным из изложения этого параграфа.

Если c — правильная точка, то уравнение можно переписать в виде[2])

$$(z-c)^2\frac{d^2u}{dz^2}+(z-c)P(z-c)\frac{du}{dz}+Q(z-c)u=0,$$

где $P(z-c)$, $Q(z-c)$ будут аналитическими в точке c; отсюда по теореме Тейлора

$$P(z-c)=p_0+p_1(z-c)+p_2(z-c)^2+\ldots,$$

$$Q(z-c)=q_0+q_1(z-c)+q_2(z-c)^2+\ldots,$$

где $p_0, p_1, \ldots, q_0, q_1, \ldots$ — постоянные, и эти ряды сходятся в области S_c, образованной кругом радиуса r (с центром в c), где r настолько мало, что c будет единственной особой точкой уравнения, лежащей в S_c.

---

[1]) Название «правильная точка» (regular point) принадлежит Томé (Thomé, Journal für Math., LXXV, 266 (1873)). Фукс раньше употреблял термин «точка определенности» (point of determinateness).

[2]) Фробениус называет это нормальной формой уравнения.

Предположим, что *формальное* решение уравнения имеет вид

$$u=(z-c)^{\alpha}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-c)^n\right],$$

где α, a_1, a_2, ... — постоянные, подлежащие определению. Подстановкой в дифференциальное уравнение (предполагая, что почленное дифференцирование и умножение рядов допустимо) получаем

$$(z-c)^{\alpha}\left[\alpha(\alpha-1)+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\alpha+n)(\alpha+n-1)(z-c)^n\right]+$$
$$+(z-c)^{\alpha}P(z-c)\left[\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\alpha+n)(z-c)^n\right]+$$
$$+(z-c)^{\alpha}Q(z-c)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-c)^n\right]=0.$$

Далее, подстановкой рядов вместо $P(z-c)$, $Q(z-c)$, умножением и приравниванием нулю коэффициентов последовательных степеней $z-c$ получаем следующую последовательность уравнений:

$$\alpha^2+(p_0-1)\alpha+q_0=0,$$
$$a_1\{(\alpha+1)^2+(p_0-1)(\alpha+1)+q_0\}+\alpha p_1+q_1=0,$$
$$a_2\{(\alpha+2)^2+(p_0-1)(\alpha+2)+q_0\}+a_1\{(\alpha+1)p_1+q_1\}+\alpha p_2+q_2=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n\{(\alpha+n)^2+(p_0-1)(\alpha+n)+q_0\}+$$
$$+\sum_{m=1}^{n-1}a_{n-m}\{(\alpha+n-m)p_m+q_m\}+\alpha p_n+q_n=0.$$

Первое из этих уравнений, называемое *определяющим* (indicial) *уравнением*[1]), дает два значения α (которые могут оказаться и равными). Читатель легко убедится, что если бы c была *неправильной* точкой, то определяющее уравнение имело бы (самое большее) первую степень; он оценит теперь различие между правильными и неправильными особыми точками.

Пусть $\alpha=\rho_1$, $\alpha=\rho_2$ — корни[2]) определяющего уравнения

$$F(\alpha)\equiv\alpha^2+(p_0-1)\alpha+q_0=0;$$

тогда при выбранном α последующие уравнения однозначно определяют по порядку a_1, a_2, ..., если только $F(\alpha+n)$ не равняется нулю при $n=1, 2, 3, \dots$; иначе говоря, если $\alpha=\rho_1$, то ρ_2 не должно

[1]) Название indicial принадлежит Кэли (Cayley, Quarterly Journal, XXI, 326 (1886)).

[2]) Корни ρ_1, ρ_2 определяющего уравнения мы будем называть *показателями* дифференциального уравнения в точке c.

быть одним из чисел ρ_1+1, ρ_1+2, ..., и если $\alpha=\rho_2$, то ρ_1 не должно быть одним из чисел ρ_2+1, ρ_2+2, ...

Таким образом, если разность показателей не равна нулю или целому числу, то всегда можно получить два различных ряда, формально удовлетворяющих уравнению.

Пример. Показать, что если m не равно нулю или целому числу, то уравнение

$$u''+\left(\frac{\frac{1}{4}-m^2}{z^2}-\frac{1}{4}\right)u=0$$

формально удовлетворяется двумя рядами, первые члены которых будут

$$z^{\frac{1}{2}+m}\left\{1+\frac{z^2}{16(1+m)}+\ldots\right\},\quad z^{\frac{1}{2}-m}\left\{1+\frac{z^2}{16(1-m)}+\ldots\right\};$$

определить коэффициенты общего члена в каждом ряде и показать, что ряды сходятся для всех значений z.

10.31. Сходимость разложения из § 10.3

Если показатели ρ_1, ρ_2 не равны, то пусть ρ_1 будет тот из показателей, вещественная часть которого не меньше вещественной части другого, и пусть $\rho_1-\rho_2=s$; имеем

$$F(\rho_1+n)=n(s+n).$$

По оценке § 5.23 мы можем найти такое положительное число M, что $|p_n|<Mr^{-n}$, $|q_n|<Mr^{-n}$, $|\rho_1 p_n+q_n|<Mr^{-n}$, где M не зависит от n; удобно взять $M\geqslant 1$.

Взяв $\alpha=\rho_1$, видим, что

$$|a_1|=\frac{|\rho_1 p_1+q_1|}{|F(\rho_1+1)|}<\frac{M}{r|s+1|}<\frac{M}{r},$$

так как $|s+1|\geqslant 1$.

Если мы теперь предположим, что $|a_n|<M^n r^{-n}$, когда $n=1, 2, \ldots, m-1$, то получим

$$|a_m|=\left|\frac{\sum\limits_{t=1}^{m-1} a_{m-t}\{(\rho_1+m-t)p_t+q_t\}+\rho_1 p_m+q_m}{F(\rho_1+m)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sum\limits_{t=1}^{m-1}|a_{m-t}||\rho_1 p_t+q_t|+|\rho_1 p_m+q_m|+\sum\limits_{t=1}^{m-1}(m-t)|a_{m-t}||p_t|}{m|s+m|}<$$

$$<\frac{mM^m r^{-m}+\left\{\sum\limits_{t=1}^{m-1}(m-t)\right\}M^m r^{-m}}{m^2|1+sm^{-1}|}.$$

Так как $|1+sm^{-1}|\geqslant 1$, ибо $\operatorname{Re} s$ неотрицательна, то мы получим

$$|a_m|<\frac{m+1}{2m}M^m r^{-m}<M^m r^{-m},$$

и таким образом, по индукции $|a_n|<M^n r^{-n}$ для всех значений n.

Если значения коэффициентов, соответствующие показателю ρ_2, будут a'_1, a'_2, ..., то мы получим подобной же индукцией

$$|a'_n|<M^n \varkappa^n r^{-n},$$

где $\varkappa$ — верхняя граница выражений

$$|1-s|^{-1},\quad \left|1-\frac{1}{2}s\right|^{-1},\quad \left|1-\frac{1}{3}s\right|^{-1},\ \ldots;$$

эта граница существует, когда s не есть положительное целое число.

Таким образом, мы сначала получили два формальных ряда

$$w_1(z)=(z-c)^{\rho_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(z-c)^n\right],$$

$$w_2(z)=(z-c)^{\rho_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a'_n(z-c)^n\right].$$

Но первый ряд будет равномерно сходящимся рядом аналитических функций, когда $|z-c|<rM^{-1}$, второй, — когда $|z-c|<rM^{-1}\varkappa^{-1}$, лишь бы только в каждом случае $\arg(z-c)$ был ограничен таким образом, чтобы ряды представляли однозначные функции; следовательно, формальная подстановка этих рядов в левую часть дифференциального уравнения оправдана, и каждый из этих рядов представляет решение уравнения; при этом все время предполагается, что $\rho_1-\rho_2$ не будет положительным целым числом или нулем[1]).

Итак, мы получили основную систему решений, годных в окрестности правильной особой точки, если $\rho_1-\rho_2$ не есть целое число или нуль. По теории аналитического продолжения мы видим, что если все особые точки уравнения, лежащие в S, будут правильными, то каждое из двух решений фундаментальной системы будет аналитическим во всех точках, за исключением особых точек уравнения, которые будут точками ветвления решения.

---

[1]) Если $\rho_1-\rho_2$ — положительное целое число, то значение $\varkappa$ не существует; если $\rho_1=\rho_2$, то оба решения одинаковы.

10.32. Нахождение второго решения в случае, когда разность показателей будет целым числом или нулем

В том случае, когда $\rho_1 - \rho_2 = s$ — положительное целое число или нуль, решение $w_2(z)$, найденное в § 10.31, может потерять смысл[1]) или совпасть с $w_1(z)$.

Если мы положим $u = w_1(z)\zeta$, то уравнение, определяющее ζ, будет

$$(z-c)^2 \frac{d^2\zeta}{dz^2} + \left\{ 2(z-c)^2 \frac{w_1'(z)}{w_1(z)} + (z-c)P(z-c) \right\} \frac{d\zeta}{dz} = 0;$$

общее решение этого уравнения имеет вид

$$\zeta = A + B \int^z \frac{1}{\{w_1(z)\}^2} \exp\left\{ -\int^z \frac{P(z-c)}{z-c}\, dz \right\} dz =$$

$$= A + B \int^z \frac{(z-c)^{-p_0}}{\{w_1(z)\}^2} \exp\left\{ -p_1(z-c) - \frac{1}{2} p_2 (z-c)^2 - \ldots \right\} dz =$$

$$= A + B \int^z (z-c)^{-p_0 - 2\rho_1} g(z)\, dz,$$

где A, B — произвольные постоянные, а $g(z)$ — аналитическая функция внутри всякого круга, центр которого лежит в c и который не содержит ни особых точек функции $P(z-c)$, ни особых точек или нулей функции $(z-c)^{-\rho_1} w_1(z)$; кроме того, $g(c) = 1$.

Пусть

$$g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n (z-c)^n.$$

Тогда, если $s \neq 0$, то

$$\zeta = A + B \int^z \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n (z-c)^n \right\} (z-c)^{-s-1}\, dz =$$

$$= A + B \left[-\frac{1}{s}(z-c)^{-s} - \sum_{n=1}^{s-1} \frac{g_n}{s-n} (z-c)^{n-s} + \right.$$

$$\left. + g_s \lg(z-c) + \sum_{n=s+1}^{\infty} \frac{g_n}{n-s} (z-c)^{n-s} \right].$$

---

[1]) Коэффициент a_s' может оказаться неопределенным или бесконечным; в первом случае $w_2(z)$ будет решением, содержащим две произвольные постоянные a_0' и a_s'; ряд, у которого a_s' будет множителем, будет отличаться от $w_1(z)$ лишь постоянным множителем.

Поэтому общим решением дифференциального уравнения, аналитическим во всех точках S_c (кроме c), будет

$$Aw_1(z)+B\,[g_s w_1(z)\lg(z-c)+\overline{w}(z)],$$

где по § 2.53

$$\overline{w}(z)=(z-c)^{\rho_2}\left\{-\frac{1}{s}-\sum_{n=1}^{\infty}h_n(z-c)^n\right\},$$

причем коэффициенты h_n будут постоянными.

При $s=0$ соответствующая форма решения имеет вид

$$Aw_1(z)+B\left[w_1(z)\lg(z-c)+(z-c)^{\rho_2}\sum_{n=1}^{\infty}h_n(z-c)^n\right].$$

Утверждение, приведенное в конце § 10.31, сохраняется, как теперь видим, и в исключительном случае, когда s — нуль или положительное целое число.

В частном случае, когда $g_s=0$, второе решение не содержит логарифма.

Полученные решения, годные в окрестности правильной точки уравнения, называются *правильными интегралами*.

Интегралы уравнения, годные вблизи правильной точки c, можно практически получить, найдя сначала $w_1(z)$ и определив затем коэффициенты функции $\overline{w}_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-c)^{\rho_2+n}$ подстановкой $w_1(z)\lg(z-c)+\overline{w}_1(z)$ в левую часть уравнениия и приравниванием нулю коэффициентов различных степеней $(z-c)$ в окончательном выражении. Другой способ, принадлежащий Фробениусу[1]), приведен у Форсайта (Forsyth, Treatise on differential equations, 243—258).

Пример 1. Показать, что интегралы уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}-m^2u=0,$$

правильные вблизи $z=0$, будут

$$w_1(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^{2n}z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$w_1(z)\lg z-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^{2n}z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Проверить, что эти ряды сходятся для всех значений z.

---

[1]) Frobenius, Journal für Math., LXXVI, 214—224 (1874).

Пример 2. Показать, что интегралы уравнения

$$z(z-1)\frac{d^2u}{dz^2}+(2z-1)\frac{du}{dz}+\frac{1}{4}u=0,$$

правильные вблизи $z=0$, будут

$$w_1(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n}\right)^2 z^n$$

и

$$w_1(z)\lg z+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\ldots 2n-1}{2\cdot 4\ldots 2n}\right)^2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n}\right)z^n.$$

Проверить, что эти ряды сходятся при $|z|<1$, и получить интегралы, правильные вблизи $z=1$.

Пример 3. Показать, что гипергеометрическому уравнению

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\{c-(a+b+1)z\}\frac{du}{dz}-abu=0$$

удовлетворяет гипергеометрический ряд § 2.38. Получить полное решение уравнения при $c=1$.

10.4. Решения, годные для больших значений $|z|$

Пусть $z=1/z_1$; тогда говорят, что решение дифференциального уравнения годно для «больших значений $|z|$», если оно годно для достаточно малых значений $|z_1|$, и говорят также, что «точка на бесконечности есть обыкновенная (или правильная, или неправильная) точка уравнения», когда точка $z_1=0$ — обыкновенная (или правильная, или неправильная) точка уравнения, в которое преобразуется заданное уравнение, если вместо z принять за независимую переменную z_1.

Так как

$$\frac{d^2u}{dz^2}+p(z)\frac{du}{dz}+q(z)u\equiv$$
$$\equiv z_1^4\frac{d^2u}{dz_1^2}+\left\{2z_1^3-z_1^2p\left(\frac{1}{z_1}\right)\right\}\frac{du}{dz_1}+q\left(\frac{1}{z_1}\right)u,$$

то мы видим, что условия, чтобы точка $z=\infty$ была (I) обыкновенной точкой или (II) правильной точкой, заключаются в том, чтобы (I) $2z-z^2p(z)$, $z^4q(z)$ были аналитическими на бесконечности (§ 5.62) и (II) чтобы $zp(z)$, $z^2q(z)$ были аналитическими на бесконечности.

Пример 1. Показать, что каждая точка (включая бесконечность) будет или обыкновенной точкой, или правильной точкой каждого из уравнений

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\{(c-(a+b+1)z\}\frac{du}{dz}-abu=0,$$

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+n(n+1)u=0,$$

где $a, в, c, n,$ —постоянные.

Пример 2. Показать, что каждая точка (исключая бесконечность) будет или обыкновенной точкой, или правильной точкой уравнения

$$z^2\frac{d^2u}{dz^2}+z\frac{dn}{dz}+(z^2-n^2)u=0,$$

где n — постоянная.

Пример 3. Показать, что уравнение

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+6u=0$$

имеет решения

$$z^2-\frac{1}{3},\quad \frac{1}{z^3}+\frac{3\cdot 4}{2\cdot 7}\frac{1}{z^5}+\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 7\cdot 4\cdot 9}\frac{1}{z^7}+\ldots,$$

причем последнее решение будет сходиться, если $|z|>1$.

10.5. Неправильные особые точки и слияние

Вблизи точки, которая не является правильной, уравнение второго порядка не может иметь двух правильных интегралов, ибо определяющее уравнение будет, самое большее, первой степени; в рассматриваемом случае может быть или один правильный интеграл, или ни одного. Ниже мы увидим (§ 16.3), каков характер решения вблизи таких точек в некоторых простых случаях. Общее исследование таких решений не входит в задачи этой книги[1]).

Часто случается, что некоторое дифференциальное уравнение может быть получено из другого дифференциального уравнения, если заставить две или более особые точки последнего стремиться к совпадению. Такой предельный процесс называется *слиянием* (confluence), и первое уравнение называется предельной формой (confluent form) второго при слиянии. В § 10.6 мы увидим, что особые точки первого уравнения могут быть более сложного характера, чем особые точки второго уравнения.

10.6. Дифференциальные уравнения математической физики

Наиболее общее дифференциальное уравнение второго порядка, у которого всякая точка, за исключением a_1, a_2, a_3, a_4 и ∞, является обыкновенной, причем эти пять точек будут правильными точками с показателями α_r, β_r в a_r $(r=1, 2, 3, 4)$ и показателями μ_1, μ_2

---

[1]) Некоторые элементарные исследования даны Форсайтом (Forsyth, Differential equations, 1914). Полное исследование дано в его «Theory of differential equations», IV, 1902.

на ∞, как легко проверить[1]), имеет вид

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\sum_{r=1}^{4}\frac{1-\alpha_r-\beta_r}{z-a_r}\right\}\frac{du}{dz}+\left\{\sum_{r=1}^{4}\frac{\alpha_r\beta_r}{(z-a_r)^2}+\frac{Az^2+2Bz+C}{\prod\limits_{r=1}^{4}(z-a_r)}\right\}u=0,$$

где A таково, что μ_1 и μ_2 будут корнями уравнения

$$\mu^2+\mu\left\{\sum_{r=1}^{4}(\alpha_r+\beta_r)-3\right\}+\sum_{r=1}^{4}\alpha_r\beta_r+A=0,$$

а B, C — постоянные[2]).

Клейном[3]) и Бохером[4]) была доказана замечательная теорема: все линейные дифференциальные уравнения, встречающиеся в определенных областях математической физики, могут быть получены путем слияния из частного уравнения только что указанного типа, в котором *разность показателей в каждой особой точке равна* $\frac{1}{2}$; краткое исследование предельных уравнений мы сейчас дадим.

Если положить $\beta_r=\alpha_r+\frac{1}{2}$ $(r=1, 2, 3, 4)$ и написать ζ вместо z, то написанное выше уравнение примет вид

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2}+\left\{\sum_{r=1}^{4}\frac{\frac{1}{2}-2\alpha_r}{\zeta-a_r}\right\}\frac{du}{d\zeta}+\\
+\left\{\sum_{r=1}^{4}\frac{\alpha_r\left(\alpha_r+\frac{1}{2}\right)}{(\zeta-a_r)^2}+\frac{A\zeta^2+2B\zeta+C}{\prod\limits_{r=1}^{4}(\zeta-a_r)}\right\}u=0,$$

---

[1]) Коэффициенты при $\frac{du}{dz}$ и u должны быть рациональными, так как в противном случае они имели бы существенно особые точки; знаменателями у $p(z)$, $q(z)$ должны быть соответственно $\prod\limits_{r=1}^{4}(z-a_r)$, $\prod\limits_{r=1}^{4}(z-a_r)^2$; разлагая $p(z)$ и $q(z)$ на простейшие дроби и вспоминая, что $p(z)=O(z^{-1})$, $q(z)=O(z^{-2})$ при $|z|\to\infty$, мы получим требуемый результат без затруднений.

[2]) Отсюда видно, что μ_1, μ_2 связаны соотношением

$$\mu_1+\mu_2+\sum_{r=1}^{4}(\alpha_r+\beta_r)=3.$$

[3]) F. Klein, Ueber lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, 40, 1894; см. также Vorlesung über Lamé'schen Funktionen.

[4]) Bocher, Ueber die Reihenentwickelungen der Potenzialtheorie, 193, 1894.

где $\left(\text{на основании условия } \mu_2 - \mu_1 = \frac{1}{2}\right)$

$$A = \left(\sum_{r=1}^{4} \alpha_r\right)^2 - \sum_{r=1}^{4} \alpha_r^2 - \frac{3}{2}\sum_{r=1}^{4} \alpha_r + \frac{3}{16}\ ^{1)}.$$

Это дифференциальное уравнение называется *обобщенным уравнением Ламе.*

Если положить в этом уравнении $a_1 = a_2$, то очевидно, что слияние особых точек a_1, a_2 порождает особую точку, в которой показатели α, β даются уравнениями

$$\alpha + \beta = 2(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \alpha\beta = \alpha_1\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\right) + \alpha_2\left(\alpha_2 + \frac{1}{2}\right) + D,$$

где

$$D = \frac{Aa_1^2 + 2Ba_1 + C}{(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)}.$$

Поэтому разность показателей в слитной особой точке *будет не* $\frac{1}{2}$, *а может иметь любое заданное значение при соответственном выборе B и C.* Подобным же образом слиянием трех или более особых точек мы можем получить одну неправильную особую точку.

Надлежащим слиянием пяти особых точек, находящихся в нашем распоряжении, мы можем получить шесть типов уравнений, которые можно классифицировать (a) по числу особых точек с разностью показателей $\frac{1}{2}$, (b) по числу других правильных особых точек, (c) по числу неправильных особых точек при помощи следующей схемы, которая, как легко видеть, будет исчерпывающей [2]).

	(a)	(b)	(c)	
(I)	3	1	0	Ламé
(II)	2	0	1	Матье
(III)	1	2	0	Лежандр
(IV)	0	1	1	Бессель
(V)	1	0	1	Вебер, Эрмит
(VI)	0	0	1	Стокс [3])

[1]) Действительно, в общем случае $A = \mu_1\mu_2 - \sum_{1}^{4} \alpha_r\beta_r$, $\mu_1\mu_2 = \frac{1}{4} \times \times [(\mu_1 + \mu_2)^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2]$ и $\mu_1 + \mu_2 = 3 - \sum_{1}^{4}(\alpha_r + \beta_r)$. (*Прим. ред.*)

[2]) Например, тип (a) 3, (b) 0, (c) 1 невозможен, так как он вызывает необходимость в шести начальных особых точках.

[3]) Уравнение этого типа было рассмотрено Стоксом в его исследованиях о дифракции (Stokes, Camb. Phil. Trans, IX, 168—182 (1856)); впрочем, оно легко преобразуется в частный случай уравнения Бесселя (пример 6, ниже).

Эти уравнения обычно называют по фамилиям математиков, приведенным в последнем столбце. Вообще говоря, чем ниже поставлено уравнение в этой схеме, тем более просты свойства его решения. Решения уравнений (II)—(VI) рассматриваются в гл. 15—19 этой книги, а решение уравнения (I)[1] — в гл. 23. Выводы канонических форм этих уравнений из обобщенного уравнения Ламе указаны в следующих примерах.

Пример 1. Получить уравнение Ламе

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2}+\left\{\sum_{r=1}^{3}\frac{\frac{1}{2}}{\zeta-a_r}\right\}\frac{du}{d\zeta}-\frac{\{n(n+1)\zeta+h\}u}{4\prod\limits_{r=1}^{3}(\zeta-a_r)}=0$$

(где h и n — постоянные), полагая

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0, \qquad 8B=n(n+1)a_4, \qquad 4C=ha_4$$

и заставляя $a_4\to\infty$.

Пример 2. Получить уравнение

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2}+\left(\frac{\frac{1}{2}}{\zeta}+\frac{\frac{1}{2}}{\zeta-1}\right)\frac{du}{d\zeta}-\frac{(a-16q+32q\zeta)u}{4\zeta(\zeta-1)}=0$$

(где a и q — постоянные), полагая $a_1=0$, $a_2=1$ и заставляя $a_3=a_4\to\infty$. Вывести отсюда уравнение Матье (§ 19.1)

$$\frac{d^2u}{dz^2}+(a+16q\cos 2z)u=0$$

при помощи подстановки $\zeta=\cos^2 z$.

Пример 3. Получить уравнение

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2}+\left(\frac{\frac{1}{2}}{\zeta}+\frac{1}{\zeta-1}\right)\frac{du}{d\zeta}+\frac{1}{4}\left\{\frac{n(n+1)}{\zeta}-\frac{m^2}{\zeta-1}\right\}\frac{u}{\zeta(\zeta-1)}=0,$$

полагая

$$a_1=a_2=1, \qquad a_3=a_4=0, \qquad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0, \qquad \alpha_4=\frac{1}{4}.$$

Вывести отсюда уравнение Лежандра (§§ 15.13, 15.5)

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right\}u=0$$

при помощи подстановки $\zeta=z^{-2}$.

Пример 4. Полагая $a_1=a_2=0$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$ и заставляя $a_3=a_4\to\infty$, получить уравнение

$$\zeta^2\frac{d^2u}{d\zeta^2}+\zeta\frac{du}{d\zeta}+\frac{1}{4}(\zeta-n^2)u=0.$$

[1]) О свойствах уравнений типа (I) см. работы Клейна и Форсайта, цитируемые в конце этой главы; см. также Todhunter, The Functions of Laplace, Lamé and Bessel, 1875.

Вывести отсюда уравнение Бесселя (§ 17.11)

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + (z^2 - n^2) u = 0$$

при помощи подстановки $\zeta = z^2$.

Пример 5. Полагая $a_1 = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ и заставляя $a_2 = a_3 = a_4 \to \infty$, получить уравнение

$$\zeta \frac{d^2u}{d\zeta^2} + \frac{1}{2} \frac{du}{d\zeta} + \frac{1}{4} \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \zeta\right) u = 0.$$

Вывести отсюда уравнение Вебера (§ 16.5)

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2\right) u = 0$$

при помощи подстановки $\zeta = z^2$.

Пример 6. Полагая $\alpha_r = 0$ и заставляя $a_r \to \infty$ $(r = 1, 2, 3, 4)$, получить уравнение

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2} + (B_1\zeta + C_1) u = 0.$$

Полагая затем

$$u = (B_1\zeta + C_1)^{\frac{1}{2}} v, \quad B_1\zeta + C_1 = \left(\frac{3}{2} B_1 z\right)^{\frac{2}{3}},$$

показать, что

$$z^2 \frac{d^2v}{dz^2} + z \frac{dv}{dz} + \left(z^2 - \frac{1}{9}\right) v = 0.$$

Пример 7. Показать, что общая форма обобщенного уравнения Ламе не изменится (I) при любом дробнолинейном преобразовании независимой переменной, при котором ∞ остается особой точкой преобразованного уравнения; (II) при любой замене зависимой переменной типа $u = (z - a_r)^{\lambda} v$.

Пример 8. Вывести из примера 7, что различные предельные формы обобщенного уравнения Ламе всегда могут быть сведены к формам в примерах 1—6. [Заметьте, что подходящее дробнолинейное преобразование переменной преобразует любые три различные точки в точки 0, 1, ∞.]

10.7. Линейные дифференциальные уравнения с тремя особыми точками

Пусть

$$\frac{d^2u}{dz^2} + p(z) \frac{du}{dz} + q(z) u = 0$$

имеет три и только три особые точки a, b, c [1]); пусть эти точки будут правильными точками с показателями α, α'; β, β'; γ, γ'.

Тогда коэффициент $p(z)$ будет рациональной функцией с простыми полюсами в a, b, c, его вычеты в этих полюсах будут равны

[1]) Точка на бесконечности должна быть обыкновенной точкой.

$1-\alpha-\alpha'$, $1-\beta-\beta'$, $1-\gamma-\gamma'$, и $p(z)-2z^{-1}$ при $z\to\infty$ будет $O(z^{-2})$. Поэтому

$$p(z)=\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}$$

и[1])

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1.$$

Подобным же образом

$$q(z)=\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right\}\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)},$$

и следовательно, дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right\}\frac{du}{dz}+$$
$$+\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right\}\frac{u}{(z-a)(z-b)(z-c)}=0.$$

Это уравнение было впервые дано Папперитцем[2]).

Чтобы выразить тот факт, что u удовлетворяет уравнению этого типа (которое мы будем называть P-уравнением Римана), Риман писал[3])

$$u=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}.$$

Особые точки уравнения помещены в первой строке с соответственными показателями непосредственно под ними, а независимая переменная помещена в четвертом столбце.

Пример. Показать, что гипергеометрическое уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+\{c-(a+b+1)z\}\frac{du}{dz}-abu=0$$

[1]) Показатели должны удовлетворять этому уравнению.

[2]) Papperitz, Math. Ann., XXV, 213 (1885).

[3]) Riemann, Abh. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, VII (1857). Из этого мемуара видно, что хотя Риман и не составлял этого уравнения явно, но выводил его существование из гипергеометрического уравнения.

определяется схемой

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & z \\ 1-c & b & c-a-b & \end{matrix}\right\}.$$

10.71. Преобразования P-уравнения Римана

Два преобразования, представляемые схематически равенствами

$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}=$$

$$=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha+k & \beta-k-l & \gamma+l & z \\ \alpha'+k & \beta'-k-l & \gamma'+l & \end{matrix}\right\}, \qquad \text{(I)}$$

$$P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}=P\left\{\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & z_1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\} \qquad \text{(II)}$$

(где z_1, a_1, b_1, c_1 получены из z, a, b, c некоторым дробнолинейным преобразованием), имеют большое значение. Они могут быть получены прямым преобразованием дифференциального уравнения Папперитца — Римана путем надлежащей замены зависимой и независимой переменных; но верность результатов преобразований можно видеть интуитивно, если заметить, что P-уравнение Римана определяется однозначно знанием трех особых точек и их показателей, а также что (I), если

$$u=P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\},$$

то $u_1=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^k\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^l u$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка с теми же самыми тремя особыми точками и показателями $\alpha+k$, $\alpha'+k$; $\beta-k-l$, $\beta'-k-l$; $\gamma+l$, $\gamma'+l$ и сумма этих показателей будет 1; (II) если мы положим $z=\frac{Az_1+B}{Cz_1+D}$, то уравнение относительно z_1 будет линейным уравнением второго порядка с особыми точками в точках, полученных из a, b, c при помощи этого дробнолинейного преобразования, с показателями α, α', β, β', γ, γ' при них.

10.72. Связь P-уравнения Римана с гипергеометрическим уравнением

На основании результатов § 10.71 заключаем, что

$$P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix} = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ 0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & z \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{Bmatrix} =$$

$$= \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma} P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \beta+\alpha+\gamma & 0 & x \\ \alpha'-\alpha & \beta'+\alpha+\gamma & \gamma'-\gamma & \end{Bmatrix},$$

где

$$x = \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}.$$

Поэтому, согласно примеру § 10.7, решение P-уравнения Римана можно всегда получить из решения гипергеометрического уравнения, элементы которого a, b, c, x соответственно равны

$$\alpha+\beta+\gamma, \quad \alpha+\beta'+\gamma, \quad 1+\alpha-\alpha', \quad \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}.$$

10.8. Линейные дифференциальные уравнения с двумя особыми точками

Если в § 10.7 мы сделаем точку c обыкновенной точкой, то мы должны будем иметь $1-\gamma-\gamma'=0$, $\gamma\gamma'=0$, а

$$\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}$$

должно делиться на $(z-c)$ для того, чтобы $p(z)$ и $q(z)$ были аналитическими в c. Отсюда $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'=0$, $\alpha\alpha'=\beta\beta'$, и мы получаем уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1+\alpha+\alpha'}{z-b}\right\}\frac{du}{dz} + \frac{\alpha\alpha'(a-b)^2 u}{(z-a)^2(z-b)^2} = 0,$$

решение которого будет

$$u = A\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} + B\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'};$$

таким образом, решение содержит только элементарные функции.

Когда $\alpha=\alpha'$, решение имеет вид

$$u = A\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} + B_1\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\lg\left(\frac{z-a}{z-b}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

L. Fuchs, Journal für Math., LXVI, 121—160 (1866).
L. W. Thomé, Journal für Math., LXXV, 265—291 (1873); LXXXVII, 222—349 (1879).
L. Schlesinger, Handbuch der linearen Differentialgleichungen (Leipzig, 1895—1898).
G. Frobenius, Journal für Math., LXXVI, 214—235 (1874).
Б. Риман, Сочинения, Гостехиздат, 159—175, 1948.
F. C. Klein, Ueber lineare Differentialgleichungen der zweiten Ordnung, Göttingen, 1894.
A. R. Forsyth, Theory of differential equations, IV, 1902.
T. Craig, Differential equations, New York, 1889.
Э. Гурса, Курс математического анализа, ОНТИ, 1936.
В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1950.
Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.

Примеры

1. Показать, что уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2}+zu=0$$

имеет решения $z-\frac{1}{12}z^4+\ldots$, $1-\frac{1}{6}z^3+\ldots$, а также исследовать область сходимости этих рядов.

2. Получить интегралы уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{4z^2}(1-z^2)\,u=0,$$

правильные вблизи $z=0$, в форме

$$u_1=z^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{z^2}{16}+\frac{z^4}{1024}+\ldots\right\},$$

$$u_2=u_1\lg z-\frac{z^{\frac{3}{2}}}{16}+\ldots$$

3. Показать, что уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^2\right)u=0$$

имеет решения

$$1-\frac{2n+1}{4}z^2+\frac{4n^2+4n+3}{96}z^4-\ldots,$$

$$z-\frac{2n+1}{12}z^3+\frac{4n^2+4n+7}{480}z^5-\ldots$$

и что эти ряды сходятся для всех значений z.

4. Показать, что уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\sum_{r=1}^{n}\frac{1-\alpha_r-\beta_r}{z-a_r}\right\}\frac{du}{dz}+\left\{\sum_{r=1}^{n}\frac{\alpha_r\beta_r}{(z-a_r)^2}+\sum_{r=1}^{n}\frac{D_r}{z-a_r}\right\}u=0,$$

где

$$\sum_{r=1}^{n}(\alpha_r+\beta_r)=n-2,\quad \sum_{r=1}^{n}D_r=0,\quad \sum_{r=1}^{n}(a_rD_r+\alpha_r\beta_r)=0,$$

$$\sum_{r=1}^{n}(a_r^2D_r+2a_r\alpha_r\beta_r)=0,$$

является наиболее общим уравнением, для которого все точки (включая ∞), кроме точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$, будут обыкновенными, а точки a_r будут правильными точками с показателями α_r, β_r соответственно.

(Klein)

5. Показать, что при $\beta+\gamma+\beta'+\gamma'=\frac{1}{2}$

$$P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \beta & \gamma & z^2 \\ \frac{1}{2} & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix} -1 & \infty & 1 & \\ \gamma & 2\beta & \gamma & z \\ \gamma' & 2\beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

(Riemann)

[Дифференциальное уравнение в обоих случаях будет

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{2z(1-\gamma-\gamma')}{z^2-1}\frac{du}{dz}+\left\{\beta\beta'+\frac{\gamma\gamma'}{z^2-1}\right\}\frac{4u}{z^2-1}=0.]$$

6. Показать, что если $\gamma+\gamma'=\frac{1}{3}$ и ω, ω^2 — комплексные кубичные корни из единицы, то

$$P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & 0 & \gamma & z^3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \gamma' & \end{Bmatrix}=P\begin{Bmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \\ \gamma & \gamma & \gamma & z \\ \gamma' & \gamma' & \gamma' & \end{Bmatrix}.$$

(Riemann)

[Дифференциальное уравнение в обоих случаях будет

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{2z^2}{z^3-1}\frac{du}{dz}+\frac{9\gamma\gamma'zu}{(z^3-1)^2}=0.]$$

7. Показать, что уравнение

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-(2a+1)z\frac{du}{dz}+n(n+2a)u=0$$

определяется схемой

$$P\begin{Bmatrix} 1 & \infty & -1 & \\ 0 & -n & 0 & z \\ \frac{1}{2}-a & n+2a & \frac{1}{2}-a & \end{Bmatrix},$$

и что уравнение

$$(1+\zeta^2)^2 \frac{d^2u}{d\zeta^2} + n(n+2)u = 0$$

можно получить из него, положив $a=1$ и произведя замену независимой переменной.

(Halm)

8. Рассмотреть решения уравнения

$$z\frac{d^2u}{dz^2} + (z+1+m)\frac{du}{dz} + \left(n+1+\frac{1}{2}m\right)u = 0,$$

годные вблизи $z=0$, и решения, годные вблизи $z=\infty$.

(Cunningham)

9. Рассмотреть решения уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2\mu}{z}\frac{du}{dz} - 2z\frac{du}{dz} + 2z(\nu-\mu)u = 0,$$

годные вблизи $z=0$, и решения, годные вблизи $z=\infty$.

Рассмотреть следующие частные случаи:

$$\text{(I)}\ \mu = -\frac{3}{2}, \qquad \text{(II)}\ \mu = \frac{1}{2}, \qquad \text{(III)}\ \mu+\nu = 3.$$

(Curzon)

10. Доказать, что уравнение

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}(1-2z)\frac{du}{dz} + (az+b)u = 0$$

имеет два частных интеграла, произведение которых есть однозначная трансцендентная функция. При каких обстоятельствах эти два частных интеграла совпадают? Обозначив их произведение через $F(z)$, доказать, что частные интегралы будут

$$u_1, u_2 = \{F(z)\}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ \pm C \int^{z} \frac{dz}{F(z)\sqrt{z(1-z)}} \right\},$$

где C — определенная постоянная. (Lindemann; см. § 19.5).

11. Доказать, что общее линейное дифференциальное уравнение третьего порядка, особые точки которого суть 0, 1, ∞ и которое имеет все свои интегралы правильными вблизи каждой особой точки (причем показатели в каждой особой точке будут 1, 1, —1), будет

$$\frac{d^3u}{dz^3} + \left\{\frac{2}{z} + \frac{2}{z-1}\right\}\frac{d^2u}{dz^2} - \left\{\frac{1}{z^2} - \frac{3}{z(z-1)} + \frac{1}{(z-1)^2}\right\}\frac{du}{dz} +$$
$$+ \left\{\frac{1}{z^3} - \frac{3\cos^2\alpha}{z^2(z-1)} - \frac{3\sin^2\alpha}{z(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3}\right\}u = 0,$$

где α может иметь любое постоянное значение.

(Math. Trip., 1912)

ГЛАВА 11

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

11.1. Определение интегрального уравнения

Уравнение называется интегральным, если неизвестная функция содержится под знаком интеграла. Определение неизвестной функции называется решением уравнения[1]).

Введение интегральных уравнений в анализ принадлежит Лапласу (1782), который рассматривал уравнения

$$f(x)=\int e^{xt}\varphi(t)\,dt, \qquad g(x)=\int t^{x-1}\varphi(t)\,dt$$

(где в обоих случаях φ представляет собой неизвестную функцию) в связи с решением дифференциальных уравнений. Первым интегральным уравнением, решение которого было получено, было уравнение Фурье

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos xt\,\varphi(t)\,dt.$$

Его решением[2]) при известных обстоятельствах будет

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\cos ux\,f(u)\,du;$$

$f(x)$ должна быть четной функцией от x, так как $\cos xt$ — четная функция.

Позже Абель[3]) пришел к интегральному уравнению в связи с одной механической задачей и получил два его решения; после этого Лиувилль исследовал интегральное уравнение, которое воз-

---

[1]) Исключая случай интеграла Фурье (§ 9.7), мы практически *всегда* нуждаемся в *непрерывных* решениях интегральных уравнений.

[2]) Действительно, если это значение для φ подставить в уравнение, то получится формула, доказанная в § 9.7.

[3]) Abel, Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, 1823. См. Oeuvres, 1, 11—97.

никло в процессе его занятий дифференциальными уравнениями, и открыл важный способ решения интегральных уравнений [1]), рассматриваемый нами в § 11.4.

В последние годы интегральные уравнения приобрели большое значение в различных отраслях математики; в такие уравнения (в физических проблемах) часто входят кратные интегралы, и исследование их, естественно, представляет бо́льшие трудности по сравнению с исследованием элементарных уравнений, которые будут рассмотрены в этой главе.

Для облегчения изложения мы предположим, что постоянные a, b и переменные x, y, ξ вещественны и, далее, что $a \leqslant x, y, \xi \leqslant b$. Заданная функция [2]) $K(x, y)$, встречающаяся под знаком интеграла, в большинстве рассматриваемых уравнений будет вещественной функцией от x и y и или (I) непрерывной функцией обеих переменных в области ($a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$), или (II) непрерывной функцией обеих переменных в области $a \leqslant y \leqslant x \leqslant b$ и нулем при $y > x$; в последнем случае $K(x, y)$ имеет правильно распределенные разрывы, и в обоих случаях легко доказать, что если $f(y)$ — непрерывная функция при $a \leqslant y \leqslant b$, то $\int\limits_a^b f(y) K(x, y) dy$ будет непрерывной функцией от x при $a \leqslant x \leqslant b$.

11.11. Алгебраическая лемма

Предложение алгебраического характера, которое мы сейчас получим, играет большую роль в теории интегральных уравнений Фредгольма.

Пусть (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) — три точки, находящиеся на расстоянии единица от начала координат. Наибольшее (по абсолютной величине) значение объема параллелепипеда, построенного на отрезках, соединяющих начало с данными точками, равно $+1$, причем ребра будут тогда перпендикулярны. Поэтому, если $x_r^2 + y_r^2 + z_r^2 = 1$ $(r = 1, 2, 3)$, то верхняя и нижняя границы определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

равны ± 1.

[1]) Численное вычисление решений интегральных уравнений было исследовано в последнее время Уиттекером (Whittaker, Proc. Royal Soc., XCIV, (A), 367—383 (1918)).

[2]) Бохер в своей важной работе по интегральным уравнениям (Bôcher, Camb. Math. Tracts, № 10) всегда рассматривает более общий случай, в котором разрывы $K(x, y)$ *распределены правильно*, т. е. разрывы имеют характер, описанный в примере 11 гл. 4. Читатель увидит из указанного примера, что почти все результаты этой главы могут быть обобщены и на случай любого правильного распределения. Чтобы сделать эту главу более простой, мы не будем рассматривать таких обобщений.

Лемма, принадлежащая Адамару [1]), обобщает этот результат: Пусть

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D,$$

где элементы a_{mr} вещественны и $\sum_{r=1}^{n} a_{mr}^2 = 1$ ($m = 1, 2, \dots, n$); пусть A_{mr} — дополнение элемента a_{mr} в D, и пусть Δ — определитель, элементы которого суть A_{mr}; тогда по известной теореме [2])

$$\Delta = D^{n-1}.$$

Так как D является непрерывной функцией своих элементов и, следовательно, будет ограниченной, то к ней применима обычная теория максимума и минимума. Если мы заставим изменяться только a_{1r} ($r = 1, 2, \dots, n$), то D будет стационарной при таких изменениях, когда $\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial a_{1r}} \delta a_{1r} = 0$, причем вариации δa_{1r} подчинены только одному условию $\sum_{r=1}^{n} a_{1r} \delta a_{1r} = 0$, поэтому [3])

$$A_{1r} = \frac{\partial D}{\partial a_{1r}} = \lambda a_{1r};$$

но

$$\sum_{r=1}^{n} a_{1r} A_{1r} = D,$$

следовательно,

$$\lambda \sum_{r=1}^{n} a_{1r}^2 = D$$

и

$$A_{1r} = D a_{1r}.$$

Рассматривая изменения других элементов определителя D, мы видим, что D будет стационарным при изменении всех элементов, когда $A_{mr} = D a_{mr}$ ($m = 1, 2, \dots n$; $r = 1, 2, \dots n$). Следовательно, $\Delta = D^n D$, откуда $D^{n+1} = D^{n-1}$. Отсюда следует, что максимальное и минимальное значения D будут ± 1.

Следствие. Если a_{mr} вещественны и подчинены только условию $|a_{mr}| < M$, то из неравенства

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\frac{a_{mr}}{n^{1/2} M} \right)^2 \leqslant 1$$

---

[1]) Hadamard, Bulletin des Sci. Math. (2), XVII, 240 (1893).

[2]) Burnside and Panton, Theory of equations, II, 40. (См. также Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, 1954. — *Прим. ред.*)

[3]) По обычной теории множителей Лагранжа.

легко видеть, что максимальное значение $|D|$ равно

$$\left(n^{\frac{1}{2}}M\right)^n = n^{\frac{1}{2}n}M^n.$$

11.2. Уравнение Фредгольма[1]) и его предполагаемое решение

Важным интегральным уравнением общего типа является уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi,$$

где $f(x)$ — заданная непрерывная функция, λ — параметр (в общем случае комплексный), а $K(x, \xi)$ подчиняется условиям[2]), указанным в § 11.1. $K(x, \xi)$ называется *ядром* (nucleus)[3]) уравнения. Это интегральное уравнение известно под названием *уравнения Фредгольма* или *интегрального уравнения второго рода* (см. § 11.3). Вольтерра заметил, что уравнение этого типа можно рассматривать как предельный случай системы линейных уравнений. В своем исследовании Фредгольм эвристически проводит подобный предельный процесс, а затем проверяет результат рассуждениями, приводимыми ниже, в § 11.21. Гильберт (Hilbert, Göttinger Nach., 49—91 (1904)) обосновал предельный процесс непосредственно.

Мы приступим теперь к рассмотрению системы линейных уравнений и исследуем затем способ Фредгольма для оправдания перехода к пределу.

Интегральное уравнение является предельной формой при $\delta \to 0$ уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{q=1}^{n} K(x, x_q)\, \varphi(x_q)\, \delta,$$

где $x_q - x_{q-1} = \delta$, $x_0 = a$, $x_n = b$.

---

[1]) Первая работа Фредгольма (Fredholm) по этому вопросу появилась в «Öfversigt af K. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar», LVII, 39—46 (1900). Его изыскания напечатаны также в «Acta Math.», XXVII, 365—390 (1903).

[2]) Читатель заметит, что если $K(x, \xi) = 0$ $(\xi > x)$, то уравнение может быть переписано в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Такое уравнение называется уравнением *с переменным верхним пределом*.

[3]) По-английски также kernel, по-французски noyau, по-немецки Kern.

Так как это уравнение должно быть верным при $a \leqslant x \leqslant b$, то оно будет верным, в частности, когда x принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и таким образом,

$$-\lambda\delta \sum_{q=1}^{n} K(x_p, x_q)\,\varphi(x_q) + \varphi(x_p) = f(x_p) \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Эта система уравнений для $\varphi(x_p)$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ имеет единственное решение, если определитель, составленный из коэффициентов при $\varphi(x_p)$, не равен нулю. Этот определитель равен

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\delta K(x_1, x_1) & -\lambda\delta K(x_1, x_2) & \ldots & -\lambda\delta K(x_1, x_n) \\ -\lambda\delta K(x_2, x_1) & 1 - \lambda\delta K(x_2, x_2) & \ldots & -\lambda\delta K(x_2, x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda\delta K(x_n, x_1) & -\lambda\delta K(x_n, x_2) & \ldots & 1 - \lambda\delta K(x_n, x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - \lambda \sum_{p=1}^{n} \delta K(x_p, x_p) + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{p,\,q=1}^{n} \delta^2 \begin{vmatrix} K(x_p, x_p) & K(x_p, x_q) \\ K(x_q, x_p) & K(x_q, x_q) \end{vmatrix} -$$

$$- \frac{\lambda^3}{3!} \sum_{p,\,q,\,r=1}^{n} \delta^3 \begin{vmatrix} K(x_p, x_p) & K(x_p, x_q) & K(x_p, x_r) \\ K(x_q, x_p) & K(x_q, x_q) & K(x_q, x_r) \\ K(x_r, x_p) & K(x_r, x_q) & K(x_r, x_r) \end{vmatrix} + \ldots,$$

если разложить его[1]) по степеням λ.

Заставляя $\delta \to 0$, $n \to \infty$ и заменяя соответственно этому суммирования интегрированиями, мы приходим, таким образом, к рассмотрению ряда

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b K(\xi_1, \xi_1)\, d\xi_1 + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(\xi_1, \xi_1) & K(\xi_1, \xi_2) \\ K(\xi_2, \xi_1) & K(\xi_2, \xi_2) \end{vmatrix} d\xi_1\, d\xi_2 - \ldots$$

Далее, если $D_n(x_\mu, x_\nu)$ есть алгебраическое дополнение элемента, содержащего $K(x_\nu, x_\mu)$ в определителе $D_n(\lambda)$, то решение системы линейных уравнений будет иметь вид

$$\varphi(x_\mu) = \frac{f(x_1)\,D_n(x_\mu, x_1) + f(x_2)\,D_n(x_\mu, x_2) + \ldots + f(x_n)\,D_n(x_\mu, x_n)}{D_n(\lambda)}.$$

Легко видеть, что предельной формой для $D_n(x_\mu, x_\mu)$ следует считать $D(\lambda)$; если же $\mu \neq \nu$, то

$$D_n(x_\mu, x_\nu) = \lambda\delta \left\{ K(x_\mu, x_\nu) - \lambda\delta \sum_{p=1}^{n} \begin{vmatrix} K(x_\mu, x_\nu) & K(x_\mu, x_p) \\ K(x_p, x_\nu) & K(x_p, x_p) \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!} \lambda^2\delta^2 \sum_{p,\,q=1}^{n} \begin{vmatrix} K(x_\mu, x_\nu) & K(x_\mu, x_p) & K(x_\mu, x_q) \\ K(x_p, x_\nu) & K(x_p, x_p) & K(x_p, x_q) \\ K(x_q, x_\nu) & K(x_q, x_p) & K(x_q, x_q) \end{vmatrix} - \ldots \right\},$$

---

[1]) Факториалы появляются потому, что каждый определитель из s строк и столбцов встречается $s!$ раз, когда $p, q, \ldots$ принимают *все* значения $1, 2, \ldots, n$, между тем как он встречается только один раз в первоначальном определителе $D_n(\lambda)$.

так что предельной формой[1]) для $\delta^{-1}D(x_\mu, x_\nu)$ следует считать

$$D(x_\mu, x_\nu; \lambda) = \lambda K(x_\mu, x_\nu) - \lambda^2 \int_a^b \begin{vmatrix} K(x_\mu, x_\nu) & K(x_\mu, \xi_1) \\ K(\xi_1, x_\nu) & K(\xi_1, \xi_1) \end{vmatrix} d\xi_1 +$$

$$+\frac{1}{2!}\lambda^3 \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(x_\mu, x_\nu) & K(x_\mu, \xi_1) & K(x_\mu, \xi_2) \\ K(\xi_1, x_\nu) & K(\xi_1, \xi_1) & K(\xi_1, \xi_2) \\ K(\xi_2, x_\nu) & K(\xi_2, \xi_1) & K(\xi_2, \xi_2) \end{vmatrix} d\xi_1\, d\xi_2 - \ldots$$

Следовательно, мы приходим к рассмотрению функции

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{D(\lambda)} \int_a^b D(x, \xi; \lambda) f(\xi)\, d\xi$$

как возможного решения интегрального уравнения.

Пример 1. Показать, что в случае уравнения

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 xy\varphi(y)\, dy$$

мы имеем

$$D(\lambda) = 1 - \frac{1}{3}\lambda, \quad D(x, y; \lambda) = \lambda xy$$

и что

$$\varphi(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$$

будет решением.

Пример 2. Показать, что в случае уравнения

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xy + y^2)\varphi(y)\, dy$$

мы имеем

$$D(\lambda) = 1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{72}\lambda^2,$$

$$D(x, y; \lambda) = \lambda(xy + y^2) + \lambda^2\left(\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}y\right),$$

и получить некоторое решение уравнения.

11.21. Исследование решения Фредгольма

До сих пор построение решения носило эвристический характер; теперь мы начнем все сначала и убедимся, что мы действительно получаем таким образом решение интегрального уравнения; чтобы сделать это, рассмотрим две функции $D(\lambda)$ и $D(x, y; \lambda)$, к которым мы пришли в § 11.2.

---

[1]) Закон составления последующих членов виден по тем, которые выписаны.

Напишем ряд, которым определялось $D(\lambda)$ в § 11.2, в форме

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\lambda^n}{n!},$$

так что

$$a_n=(-1)^n\int_a^b\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix} K(\xi_1,\ \xi_1) & K(\xi_1,\ \xi_2) & \ldots & K(\xi_1,\ \xi_n)\\ K(\xi_2,\ \xi_1) & K(\xi_2,\ \xi_2) & \ldots & K(\xi_2,\ \xi_n)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ K(\xi_n,\ \xi_1) & K(\xi_n,\ \xi_2) & \ldots & K(\xi_n,\ \xi_n)\end{vmatrix}d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_n;$$

так как $K(x,\ y)$ непрерывна и поэтому ограничена, то мы имеем $|K(x,\ y)|<M$, где M не зависит от x и y; так как, далее, $K(x,\ y)$ — вещественная функция, то мы можем применить лемму Адамара (§ 11.11) и получим сразу, что

$$|a_n|<n^{\frac{1}{2}n}M^n(b-a)^n.$$

Положим $n^{\frac{1}{2}n}M^n(b-a)^n=n!b_n$; тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)\,M}{(n+1)^{1/2}}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{\frac{1}{2}}=0,$$

так как $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\lambda^n$ будет поэтому абсолютно сходиться для всех значений λ; таким образом (§ 2.34), ряд $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\lambda^n}{n!}$ сходится для всех значений λ и, следовательно (§ 5.64), представляет целую функцию от λ.

Напишем теперь ряд для $D(x,\ y;\ \lambda)$ в форме

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n(x,\ y)\,\lambda^{n+1}}{n!}.$$

Тогда по лемме Адамара (§ 11.11)

$$|v_{n-1}(x,\ y)|<n^{\frac{1}{2}n}M^n(b-a)^{n-1};$$

отсюда $\left|\frac{v_n(x,\ y)}{n!}\right|<c_n$, где c_n не зависит от x и y, причем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\lambda^{n+1}$ абсолютно сходится.

Поэтому $D(x, y; \lambda)$ также будет целой функцией от λ. Далее, ряд для $D(x, y; \lambda) - \lambda K(x, y)$ является равномерно сходящимся (§ 3.34) рядом непрерывных[1]) функций от x и y, когда $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$.

Соберем в $D(x, y; \lambda)$ все члены, содержащие $K(x, y)$; мы получим

$$D(x, y; \lambda) = \lambda D(\lambda) K(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda^{n+1} \frac{Q_n(x, y)}{n!},$$

где

$$Q_n(x, y) =$$
$$= \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} 0 & K(x, \xi_1) & K(x, \xi_2) \dots & K(x, \xi_n) \\ K(\xi_1, y) & K(\xi_1, \xi_1) & K(\xi_1, \xi_2) \dots & K(\xi_1, \xi_n) \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ K(\xi_n, y) & K(\xi_n, \xi_1) & K(\xi_n, \xi_2) \dots & K(\xi_n, \xi_n) \end{vmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Разлагая по элементам первого столбца, мы получаем $Q_n(x, y)$ в виде интеграла суммы n определителей; написав $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}, \xi, \xi_m, \dots, \xi_{n-1}$ вместо $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ в m-м определителе, мы видим, что интегралы всех определителей равны[2]) и, таким образом,

$$Q_n(x, y) = -n \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b K(\xi, y) P_n \, d\xi \, d\xi_1 \dots d\xi_{n-1},$$

где

$$P_n = \begin{vmatrix} K(x, \xi) & K(x, \xi_1) & \dots & K(x, \xi_{n-1}) \\ K(\xi_1, \xi) & K(\xi_1, \xi_1) & \dots & K(\xi_1, \xi_{n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(\xi_{n-1}, \xi) & K(\xi_{n-1}, \xi_1) & \dots & K(\xi_{n-1}, \xi_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

Отсюда получается непосредственно, что

$$D(x, y; \lambda) = \lambda D(\lambda) K(x, y) + \lambda \int_a^b D(x, \xi; \lambda) K(\xi, y) \, d\xi.$$

Возьмем теперь уравнение

$$\varphi(\xi) = f(\xi) + \lambda \int_a^b K(\xi, y) \varphi(y) \, dy,$$

---

[1]) Легко убедиться, что каждый член (за исключением, возможно, первого) ряда для $D(x, y; \lambda)$ будет непрерывной функцией при обоих предположениях (I) и (II) § 11.1.

[2]) Порядок интегрирования несуществен (§ 4.3).

умножим на $D(x, \xi; \lambda)$ и проинтегрируем; получим

$$\int_a^b f(\xi) D(x, \xi; \lambda) d\xi = \int_a^b \varphi(\xi) D(x, \xi; \lambda) d\xi -$$

$$-\lambda \int_a^b \int_a^b D(x, \xi; \lambda) K(\xi, y) \varphi(y) dy\, d\xi;$$

интегрирование в двойном интеграле можно производить в любом порядке; таким образом,

$$\int_a^b f(\xi) D(x, \xi; \lambda) d\xi =$$

$$= \int_a^b \varphi(\xi) D(x, \xi; \lambda) d\xi - \int_a^b \{D(x, y; \lambda) - \lambda D(\lambda) K(x, y)\} \varphi(y) dy =$$

$$= \lambda D(\lambda) \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy = D(\lambda) \{\varphi(x) - f(x)\}$$

в силу заданного уравнения.

Поэтому, если $D(\lambda) \neq 0$ и если уравнение Фредгольма имеет решение, то это решение дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b f(\xi) \frac{D(x, \xi; \lambda)}{D(\lambda)} d\xi;$$

произведя подстановку этого значения $\varphi(x)$ в интегральное уравнение, мы видим, что оно в самом деле является решением.

Это решение поэтому будет единственным непрерывным решением уравнения, если $D(\lambda) \neq 0$.

Следствие. Если положим $f(x) = 0$, то получим «однородное» уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi;$$

оно не имеет непрерывного решения, кроме очевидного $\varphi(x) = 0$, если только $D(\lambda) \neq 0$.

Пример 1. Разлагая определитель, содержащийся в $Q_n(x, y)$, по элементам первой строки показать, что

$$D(x, y; \lambda) = \lambda D(\lambda) K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) D(\xi, y; \lambda) d\xi.$$

Пример 2. Пользуясь формулами

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \lambda^n}{n!},$$

$$D(x, y; \lambda) = \lambda D(\lambda) K(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{n+1} Q_n(x, y)}{n!},$$

показать, что

$$\int_a^b D(\xi, \xi; \lambda)\, d\xi = -\lambda \frac{dD(\lambda)}{d\lambda}.$$

Пример 3. Пусть $K(x, y) = 1$ $(y \leqslant x)$, $K(x, y) = 0$ $(y > x)$; показать что $D(\lambda) = \exp\{-(b-a)\lambda\}$.

Пример 4. Показать, что если $K(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ и если

$$\int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx = A,$$

то

$$D(\lambda) = 1 - A\lambda, \quad D(x, y; \lambda) = \lambda f_1(x) f_2(y)$$

и решение соответствующего интегрального уравнения имеет вид

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda f_1(x)}{1 - A\lambda} \int_a^b f_1(\xi) f_2(\xi)\, d\xi.$$

Пример 5. Показать, что если

$$K(x, y) = f_1(x) g_1(y) + f_2(x) g_2(y),$$

то $D(\lambda)$ и $D(x, y; \lambda)$ будут квадратными полиномами относительно λ; вообще, если

$$K(x, y) = \sum_{m=1}^{n} f_m(x) g_m(y),$$

то $D(\lambda)$ и $D(x, y; \lambda)$ будут полиномами степени n относительно λ.

11.22. Взаимные функции Вольтерра

Говорят, что две функции $K(x, y)$, $k(x, y; \lambda)$ *взаимны*, если они ограничены в области $a \leqslant x, y \leqslant b$, если разрывы, которые они могут иметь, распределены правильно (§ 11.1, примечание) и если

$$K(x, y) + k(x, y; \lambda) = \lambda \int_a^b k(x, \xi; \lambda) K(\xi, y)\, d\xi.$$

Так как правая часть есть непрерывная функция[1]), то сумма двух взаимных функций есть непрерывная функция.

Функция $K(x, y)$ может иметь только одну взаимную функцию, если $D(\lambda) \neq 0$; ибо, если бы их было две, то их разность $k_1(x, y; \lambda)$ была бы непрерывным решением однородного уравнения

$$k_1(x, y; \lambda) = \lambda \int_a^b k_1(x, \xi; \lambda) K(\xi, y)\, d\xi$$

(где x рассматривается как параметр), а по следствию § 11.21 единственным непрерывным решением этого уравнения будет нуль.

С помощью взаимных функций Вольтерра получил замечательное взаимное соотношение между парами уравнений типа Фредгольма.

Заметим сначала, принимая во внимание соотношение

$$D(x, y; \lambda) = \lambda D(\lambda) K(x, y) + \lambda \int_a^b D(x, \xi; \lambda) K(\xi, y)\, d\xi,$$

доказанное в § 11.21, что значение $k(x, y; \lambda)$ равно

$$\frac{-D(x, y; \lambda)}{\lambda D(\lambda)}$$

и что на основании примера 1 § 11.21 выполняется соотношение

$$k(x, y; \lambda) + K(x, y) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) k(\xi, y; \lambda)\, d\xi.$$

Если мы теперь возьмем интегральное уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi,$$

где $a \leqslant x \leqslant b$, то получим, умножая уравнение

$$\varphi(\xi) = f(\xi) + \lambda \int_a^b K(\xi, \xi_1) \varphi(\xi_1)\, d\xi_1$$

на $k(x, \xi; \lambda)$ и интегрируя,

$$\int_a^b k(x, \xi; \lambda) \varphi(\xi)\, d\xi = \int_a^b k(x, \xi; \lambda) f(\xi)\, d\xi + \\ + \lambda \int_a^b \int_a^b k(x, \xi; \lambda) K(\xi, \xi_1) \varphi(\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi.$$

[1]) Согласно примеру 11 в конце гл. 4.

Изменяя порядок интегрирования[1]) в двойном интеграле и пользуясь соотношением, определяющим взаимные функции, мы получим

$$\int_a^b k(x,\ \xi;\ \lambda)\,\varphi(\xi)\,d\xi = \int_a^b k(x,\ \xi;\ \lambda)\,f(\xi)\,d\xi + \\ + \int_a^b \{K(x,\ \xi_1) + k(x,\ \xi_1;\ \lambda)\}\,\varphi(\xi_1)\,d\xi_1$$

и, таким образом,

$$\lambda\int_a^b k(x,\ \xi;\ \lambda)\,f(\xi)\,d\xi = -\lambda\int_a^b K(x,\ \xi_1)\,\varphi(\xi_1)\,d\xi_1 = -\varphi(x) + f(x).$$

Отсюда

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda\int_a^b k(x,\ \xi;\ \lambda)\,f(\xi)\,d\xi;$$

подобным же образом из этого уравнения мы можем вывести уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,\ \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

так что каждое из этих уравнений с взаимными ядрами можно рассматривать как равенство, дающее решение другого.

11.23. Однородные интегральные уравнения

Уравнение $\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,\ \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$ называется однородным интегральным уравнением. Мы видели (§ 11.21, следствие), что единственным непрерывным решением однородного уравнения, когда $D(\lambda)\neq 0$, будет $\varphi(x) = 0$.

Корни уравнения $D(\lambda) = 0$ играют поэтому весьма важную роль в теории интегральных уравнений. Они называются *характеристическими числами*[2]) ядра.

Покажем теперь, что при $D(\lambda) = 0$ можно получить решение, которое не будет тождественно равным нулю.

---

[1]) Читатель без затруднений распространит теорему § 4.3 на рассматриваемый интеграл.

[2]) По-английски characteristic numbers of the nucleus, по-французски valeurs caractéristiques, по-немецки Eigenwerte (собственные значения).

Пусть[1]) $\lambda=\lambda_0$ — корень уравнения $D(\lambda)=0$ кратности m.

Так как $D(\lambda)$ — целая функция, то мы можем разложить ее в сходящийся ряд

$$D(\lambda)=c_m(\lambda-\lambda_0)^m+c_{m+1}(\lambda-\lambda_0)^{m+1}+\ldots \qquad (m>0,\ c_m\neq 0).$$

Подобным же образом, поскольку $D(x,\ y;\ \lambda)$ — также целая функция от λ, существует ряд Тейлора вида

$$D(x,\ y;\ \lambda)=\frac{g_l(x,\ y)}{l!}(\lambda-\lambda_0)^l+$$
$$+\frac{g_{l+1}(x,\ y)}{(l+1)!}(\lambda-\lambda_0)^{l+1}+\ldots\ (l\geqslant 0,\ g_l\not\equiv 0),$$

по § 3.34 легко убедиться, что ряд, определяющий $g_n(x,\ y)$ $(n=l,\ l+1,\ \ldots)$, сходится абсолютно и равномерно при $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant y\leqslant b$, откуда следует, что ряд для $D(x,\ y;\ \lambda)$ сходится абсолютно и равномерно в той же самой области значений x и y.

Но, согласно примеру 2 § 11.21, имеем

$$\int_a^b D(\xi,\ \xi;\ \lambda)\,d\xi=-\lambda\frac{dD(\lambda)}{d\lambda};$$

в нашем случае правая часть имеет нуль порядка $m-1$ при $\lambda=\lambda_0$, в то время как левая часть имеет нуль порядка не меньше l, *и таким образом, мы имеем* $m-1\geqslant l$. Подставляя только что указанные ряды для $D(\lambda)$ и $D(x,\ y;\ \lambda)$ в соотношение примера 1 § 11.21, т. е. в соотношение

$$D(x,\ y;\ \lambda)=\lambda D(\lambda)K(x,\ y)+\lambda\int_a^b K(x,\ \xi)D(\xi,\ y;\ \lambda)\,d\xi,$$

деля на $(\lambda-\lambda_0)^l$ и устремляя $\lambda\to\lambda_0$, мы получим

$$g_l(x,\ y)=\lambda_0\int_a^b K(x,\ \xi)\,g_l(\xi,\ y)\,d\xi.$$

Таким образом, если y имеет какое-либо постоянное значение, то $g_l(x,\ y)$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению; всякая линейная комбинация таких решений, которые можно получить, давая y различные значения, также будет решением.

---

[1]) В § 11.51 будет доказано, что если $K(x,\ y)\equiv K(y,\ x)$, то уравнение $D(\lambda)=0$ имеет по крайней мере один корень.

Следствие. Уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_0 \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

или не имеет ни одного решения, или имеет бесконечно много решений. Ибо, если $\varphi(x)$ — решение, то таковым будет и $\varphi(x) + \sum_y c_y g_l(x, y)$, где c_y может быть любой функцией от y.

Пример 1. Показать, что уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^n(x - \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

имеет решения $\varphi(x) = \cos(n - 2r)\, x$ и $\varphi(x) = \sin(n - 2r)\, x$, где r принимает все целые положительные значения (включая нуль), не превосходящие $\frac{1}{2} n$.

Пример 2. Показать, что уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^n(x + \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

имеет те же решения, что и в примере 1, и что соответствующие значения λ дают все корни уравнения $D(\lambda) = 0$.

11.3. Интегральные уравнения первого и второго рода

Уравнение Фредгольма иногда называют *интегральным уравнением второго рода*, уравнение же

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

называют *интегральным уравнением первого рода*.

В том случае, когда $K(x, \xi) = 0$ при $\xi > x$, мы можем написать уравнения первого и второго рода соответственно в формах

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Эти уравнения называются *уравнениями с переменным верхним пределом*.

11.31. Уравнение Вольтерра

Уравнение первого рода с переменным верхним пределом часто называют еще уравнением Вольтерра. Задача его решения сведена этим автором к решению уравнения Фредгольма.

Предполагая, что $K(x, \xi)$ — непрерывная функция обеих переменных при $\xi \leqslant x$, мы имеем

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Правая часть имеет производную (§ 4.2, пример 1), если $\frac{\partial K}{\partial x}$ существует и непрерывна, и в этом случае

$$f'(x) = \lambda K(x, x)\varphi(x) + \lambda \int_a^x \frac{\partial K}{\partial x}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Это — уравнение типа Фредгольма. Если мы обозначим его решение через $\varphi(x)$, то получим после интегрирования от a до x

$$f(x) = f(a) + \lambda \int_a^x K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi,$$

и таким образом, решение полученного уравнения Фредгольма будет также решением уравнения Вольтерра, если $f(a) = 0$.

Решение уравнения первого рода с постоянным верхним пределом часто можно получить в форме ряда[1].

11.4. Метод последовательных подстановок Лиувилля—Неймана[2]

Лиувиллю принадлежит способ решения уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi,$$

имеющий историческое значение. Он состоит в последовательной подстановке значения функции $\varphi(x)$, получаемого в левой части, на место $\varphi(\xi)$, стоящей в правой части.

[1] См. пример 7, стр. 326. Бохер нашел решение при более слабых ограничениях.

[2] Liouville, Journal de Math., II (1837), III (1838). Исследования К. Неймана имели место позже (1870); см. K. Neumann, Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential.

Этот процесс приводит к ряду

$$S(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^m \int_a^b K(x, \xi_1) \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) \ldots \int_a^b K(\xi_{m-1}, \xi_m) f(\xi_m)\, d\xi_m \ldots d\xi_1.$$

Пусть верхние границы $|K(x, y)|$ и $|f(x)|$ равны M, M'. Тогда модуль общего члена ряда не превосходит

$$|\lambda|^m M^m M' (b-a)^m,$$

поэтому ряд для $S(x)$ будет равномерно сходиться при

$$|\lambda| < M^{-1} (b-a)^{-1},$$

и непосредственной подстановкой мы убеждаемся, что он действительно удовлетворяет интегральному уравнению.

Если $K(x, y) = 0$, когда $y > x$, то по индукции находим, что модуль общего члена в ряде для $S(x)$ не превосходит

$$\frac{|\lambda|^m M^m M' (x-a)^m}{m!} \leqslant \frac{|\lambda|^m M^m M' (b-a)^m}{m!},$$

а значит, ряд будет сходиться равномерно для *всех* значений λ, и мы убеждаемся в этом случае, что решение Фредгольма будет целой функцией от λ.

Из формы решения очевидно, что при $|\lambda| < M^{-1}(b-a)^{-1}$ взаимная функция $k(x, \xi; \lambda)$ может быть написана в форме

$$k(x, \xi; \lambda) = -K(x, \xi) -$$

$$- \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^{m-1} \int_a^b K(x, \xi_1) \int_a^b K(\xi_1, \xi_2) \ldots \int_a^b K(\xi_{m-1}, \xi)\, d\xi_{m-1}\, d\xi_{m-2} \ldots d\xi_1.$$

В самом деле, при этом определении $k(x, \xi; \lambda)$ мы видим, что

$$S(x) = f(x) - \lambda \int_a^b k(x, \xi; \lambda) f(\xi)\, d\xi,$$

так что $k(x, \xi; \lambda)$ будет взаимной функцией, а согласно § 11.22 имеется *только одна* взаимная функция, если $D(\lambda) \neq 0$.

Положив

$$K(x, \xi) = K_1(x, \xi), \qquad \int_a^b K(x, \xi') K_n(\xi', \xi)\, d\xi' = K_{n+1}(x, \xi),$$

имеем

$$-k(x, \xi; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}(x, \xi)$$

и

$$\int_a^b K_m(x, \xi') K_n(\xi', \xi) \, d\xi' = K_{m+n}(x, \xi),$$

как это можно видеть сразу, написав обе части как $(m+n-1)$-кратные интегралы.

Функции $K_m(x, \xi)$ называются *итерированными* (iterated) или *повторными* ядрами.

11.5. Симметричные ядра

Пусть $K_1(x, y) \equiv K_1(y, x)$, тогда говорят, что ядро $K(x, y)$ *симметрично*.

Повторные ядра такого ядра будут также симметричными, т. е. $K_n(x, y) = K_n(y, x)$ для всех значений n; ибо, если $K_n(x, y)$ симметрично, то

$$K_{n+1}(x, y) = \int_a^b K_1(x, \xi) K_n(\xi, y) \, d\xi = \int_a^b K_1(\xi, x) K_n(y, \xi) \, d\xi =$$

$$= \int_a^b K_n(y, \xi) K_1(\xi, x) \, d\xi = K_{n+1}(y, x)$$

и требуемый результат получается по индукции.

Далее, ни одно из повторных ядер не будет тождественно равно нулю; в самом деле, допустим, что $K_p(x, y) \equiv 0$, и пусть n выбрано так, что $2^{n-1} < p \leqslant 2^n$; тогда, так как $K_p(x, y) \equiv 0$, то по формуле, определяющей повторные ядра, получается, что $K_{2^n}(x, y) \equiv 0$.

Но тогда

$$0 \equiv K_{2^n}(x, x) = \int_a^b K_{2^{n-1}}(x, \xi) K_{2^{n-1}}(\xi, x) \, d\xi = \int_a^b \{K_{2^{n-1}}(x, \xi)\}^2 \, d\xi,$$

следовательно, $K_{2^{n-1}}(x, \xi) \equiv 0$; продолжая это рассуждение, мы придем к тому, что $K_1(x, y) \equiv 0$, а тогда интегральное уравнение будет тривиальным.

11.51. Теорема Шмидта[1]: если ядро симметрично, то уравнение $D(\lambda)=0$ имеет по меньшей мере один корень

Для доказательства этой теоремы положим

$$U_n = \int_a^b K_n(x, x)\, dx,$$

так что при $|\lambda| < M^{-1}(b-a)^{-1}$ мы имеем по примеру 2 § 11.21 и по § 11.4, что

$$-\frac{1}{D(\lambda)}\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \lambda^{n-1}.$$

Далее, поскольку

$$\int_a^b \int_a^b \{\mu K_{n+1}(x, \xi) + K_{n-1}(x, \xi)\}^2 d\xi\, dx \geqslant 0$$

для всех вещественных значений μ, то мы имеем

$$\mu^2 U_{2n+2} + 2\mu U_{2n} + U_{2n-2} \geqslant 0$$

и, следовательно,

$$U_{2n+2}U_{2n-2} \geqslant U_{2n}^2, \quad U_{2n-2} > 0.$$

Поэтому все $U_2, U_4, \ldots$ положительны; положим $\frac{U_4}{U_2} = \nu$, тогда из неравенства $U_{2n+2}U_{2n-2} \geqslant U_{2n}^2$ по индукции получаем, что $\frac{U_{2n+2}}{U_2} \geqslant \nu^n$. Поэтому при $|\lambda^2| \geqslant \nu^{-1}$ члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n \lambda^{n-1}$ не стремятся к нулю и, следовательно, согласно § 5.4 функция $\frac{1}{D(\lambda)}\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}$ имеет особую точку внутри или на границе круга $|\lambda| = \nu^{-\frac{1}{2}}$; но так как $D(\lambda)$ — целая функция, то единственными возможными особыми точками выражения

$$\frac{1}{D(\lambda)}\frac{dD(\lambda)}{d\lambda}$$

являются корни функции $D(\lambda)$; поэтому $D(\lambda)$ имеет нуль внутри или на границе круга $|\lambda| = \nu^{-\frac{1}{2}}$.

---

[1]) Данное доказательство принадлежит Кнезеру (Kneser, Palermo Rendiconti, XXII, 236 (1906)).

[Примечание. По § 11.21 $D(\lambda)$ будет или целой функцией, или просто полиномом; в последнем случае она имеет нуль согласно примеру 1 § 6.31; сущность теоремы состоит в том, что в первом случае $D(\lambda)$ не может быть, например, такой функцией, как e^{λ^2}, которая не имеет нулей.]

11.6. Ортогональные функции

Говорят, что вещественные непрерывные функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... ортогональны и нормальны[1]) на отрезке (a, b), если

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Если задано n вещественных непрерывных линейно независимых функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_n(x)$, то мы можем составить из них n линейных комбинаций, которые будут ортогональны.

Действительно, предположим, что мы можем построить $m-1$ ортогональных функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ так, что φ_p будет линейной комбинацией функций $u_1, u_2, \ldots, u_p$ (где $p = 1, 2, \ldots, m-1$); покажем теперь, как построить функцию φ_m так, чтобы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ были все нормальны и ортогональны.

Пусть ${}_1\varphi_m(x) = c_{1,m}\varphi_1(x) + c_{2,m}\varphi_2(x) + \ldots + c_{m-1,m}\varphi_{m-1}(x) + u_m(x)$, так что ${}_1\varphi_m$ будет линейной комбинацией функций $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Тогда, умножая на φ_p и интегрируя, получим

$$\int_a^b {}_1\varphi_m(x)\,\varphi_p(x)\,dx = c_{p,m} + \int_a^b u_m(x)\,\varphi_p(x)\,dx \qquad (p < m).$$

Отсюда

$$\int_a^b {}_1\varphi_m(x)\,\varphi_p(x)\,dx = 0,$$

если

$$c_{p,m} = -\int_a^b u_m(x)\,\varphi_p(x)\,dx;$$

функция ${}_1\varphi_m$, ортогональная к $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_{m-1}(x)$, таким образом, построена.

---

[1]) Говорят, что они будут ортогональны, если выполняется только первое соотношение; систематическое изучение таких функций принадлежит Мерфи (Murphy, Camb. Phil. Trans., IV, 353—408 (1833) и V, 113—148, 315—394 (1835)).

Выберем теперь α так, чтобы

$$\alpha^2 \int_a^b \{{}_1\varphi_m(x)\}^2 dx = 1,$$

и положим

$$\varphi_m(x) = \alpha \, {}_1\varphi_m(x).$$

Тогда

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_p(x) dx = \begin{cases} 0, & p < m, \\ 1, & p = m. \end{cases}$$

Таким способом мы можем последовательно получить функции φ_1, $\varphi_2, \ldots$

Ортогональные функции в конечном числе всегда линейно независимы. Ибо если

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0,$$

то, умножая на $\varphi_p(x)$ и интегрируя, мы получим $\alpha_p = 0$; поэтому все коэффициенты α_p равняются нулю и, следовательно, линейной зависимости нет.

Очевидно, что $\pi^{-1/2}\cos mx$, $\pi^{-1/2}\sin mx$ составляют совокупность нормальных и ортогональных функций на отрезке $(-\pi, \pi)$.

Пример 1. Составить из функций $1, x, x^2, \ldots$ следующую совокупность функций, ортогональных (но не нормальных) на отрезке $(-1, 1)$:

$$1, \; x, \; x^2 - \frac{1}{3}, \quad x^3 - \frac{3}{5}x, \quad x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}, \ldots$$

Пример 2. Составить из функций $1, x, x^2, \ldots$ совокупность функций

$$f_0(x), \quad f_1(x), \quad f_2(x), \ldots,$$

ортогональных (но не нормальных) на отрезке (a, b); здесь

$$f_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\{(x-a)^n (x-b)^n\}.$$

(Подобное исследование приведено в § 15.14.)

11.61. Связь ортогональных функций с однородными интегральными уравнениями

Рассмотрим однородное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda_0 \int_a^b \varphi(\xi) K(x, \xi) d\xi,$$

где λ_0 — *вещественное*[1]) характеристическое число ядра $K(x, \xi)$; мы уже видели, как могут быть построены решения такого уравнения; пусть дано n линейно независимых решений; составим по ним n нормальных ортогональных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Тогда, так как функции φ_m ортогональны и нормальны, то

$$\int_a^b \left[\sum_{m=1}^n \varphi_m(y) \int_a^b K(x, \xi)\varphi_m(\xi)\,d\xi\right]^2 dy =$$

$$= \sum_{m=1}^n \int_a^b \left[\varphi_m(y) \int_a^b K(x, \xi)\varphi_m(\xi)\,d\xi\right]^2 dy,$$

и легко видеть, что выражение в правой части может быть переписано в виде

$$\sum_{m=1}^n \left\{\int_a^b K(x, \xi)\varphi_m(\xi)\,d\xi\right\}^2,$$

если выполнить интегрирование по y, а это будет то же самое, что и

$$\sum_{m=1}^n \int_a^b K(x, y)\varphi_m(y)\,dy \int_a^b K(x, \xi)\varphi_m(\xi)\,d\xi.$$

Поэтому, если мы напишем K вместо $K(x, y)$ и Λ вместо

$$\sum_{m=1}^n \varphi_m(y) \int_a^b K(x, \xi)\varphi_m(\xi)\,d\xi,$$

то будем иметь

$$\int_a^b \Lambda^2\,dy = \int_a^b K\Lambda\,dy,$$

или иначе

$$\int_a^b \Lambda^2\,dy = \int_a^b K^2\,dy - \int_a^b (K-\Lambda)^2\,dy.$$

Поэтому

$$\int_a^b \left\{\sum_{m=1}^n \frac{\varphi_m(y)\,\varphi_m(x)}{\lambda_0}\right\}^2 dy \leqslant \int_a^b \{K(x, y)\}^2\,dy$$

---

[1]) Вскоре будет показано, что все характеристические числа симметричного ядра вещественны.

и, таким образом,

$$\lambda_0^{-2}\sum_{m=1}^{n}\{\varphi_m(x)\}^2 \leqslant \int_a^b \{K(x, y)\}^2\,dy.$$

Интегрируя, получаем

$$n \leqslant \lambda_0^2 \int_a^b \int_a^b \{K(x, y)\}^2\,dy\,dx.$$

Эта формула дает верхнюю границу для числа n ортогональных функций, соответствующих какому-либо характеристическому числу λ_0.

Эти n ортогональных функций называются *характеристическими функциями* (или *собственными функциями*), соответствующими характеристическому числу λ_0.

Пусть теперь $\varphi^{(0)}(x)$, $\varphi^{(1)}(x)$ — характеристические функции, соответствующие *различным* характеристическим числам λ_0, λ_1.

Тогда

$$\varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x, \xi)\,\varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(\xi)\,d\xi;$$

отсюда

$$\int_a^b \varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(x)\,dx = \lambda_1 \int_a^b \int_a^b K(x, \xi)\,\varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(\xi)\,d\xi\,dx \tag{1}$$

и аналогично

$$\int_a^b \varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(x)\,dx = \lambda_0 \int_a^b \int_a^b K(x, \xi)\,\varphi^{(0)}(\xi)\,\varphi^{(1)}(x)\,d\xi\,dx =$$

$$= \lambda_0 \int_a^b \int_a^b K(\xi, x)\,\varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(\xi)\,dx\,d\xi \tag{2}$$

после замены x на ξ.

Мы видим из (1) и (2), что если $\lambda_1 \neq \lambda_0$ и если

$$K(x, \xi) = K(\xi, x),$$

то

$$\int_a^b \varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(x)\,dx = 0$$

и, таким образом, функции $\varphi^{(0)}(x)$, $\varphi^{(1)}(x)$ будут *взаимно* ортогональны.

Итак, *если ядро симметрично* и если для каждого характеристического числа мы составим полную систему ортогональных функций, то *все* функции, таким образом полученные, будут ортогональны.

Далее, если ядро симметрично, *то все характеристические числа вещественны*; ибо если λ_0, λ_1 — комплексно-сопряженные числа и если $u_0(x) = v(x) + iw(x)$ [1]) — решение, соответствующее характеристическому числу λ_0, то $u_1(x) = v(x) - iw(x)$ будет решением, соответствующим характеристическому числу λ_1; заменяя $\varphi^{(0)}(x)$, $\varphi^{(1)}(x)$ в соотношении

$$\int_a^b \varphi^{(0)}(x)\,\varphi^{(1)}(x)\,dx = 0$$

через $v(x) + iw(x)$; $v(x) - iw(x)$ (что, очевидно, допустимо), мы получаем

$$\int_a^b [\{v(x)\}^2 + \{w(x)\}^2]\,dx = 0,$$

откуда вытекает, что $v(x) \equiv w(x) \equiv 0$, так что интегральное уравнение не имеет ненулевых решений, соответствующих характеристическим числам λ_0, λ_1. Но это противоречит § 11.23; отсюда следует, что если ядро симметрично, то характеристические числа вещественны.

11.7. Разложение симметричного ядра [2])

Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ... — полная система ортогональных функций, удовлетворяющих однородному интегральному уравнению с симметричным ядром

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ — соответствующие характеристические числа [3]).

Предположим [4]), что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{\lambda_n}$$

---

[1]) $v(x)$ и $w(x)$ вещественны.

[2]) Приводимое рассуждение принадлежит Шмидту, а результат — Гильберту.

[3]) Эти числа не все различны, если имеется более чем одна ортогональная функция для каждого из характеристических чисел.

[4]) Это предположение, конечно, нуждается в проверке в каждом частном случае.

равномерно сходится, когда $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant y \leqslant b$. Покажем в этом случае, что

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}.$$

В самом деле, рассмотрим симметричное ядро

$$H(x, y) = K(x, y) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}.$$

Если это ядро не равно тождественно нулю, то оно имеет (§ 11.51) по крайней мере одно характеристическое число μ.

Пусть $\psi(x)$ — какое-либо решение уравнения

$$\psi(x) = \mu \int_a^b H(x, \xi)\psi(\xi)\,d\xi,$$

не равное тождественно нулю.

Умножая на $\varphi_n(x)$ и интегрируя, получим

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_n(x)\,dx = \mu \int_a^b \int_a^b \left\{K(x, \xi) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_m(x)\varphi_m(\xi)}{\lambda_m}\right\}\psi(\xi)\varphi_n(x)\,dx\,d\xi;$$

так как ряд сходится равномерно, то можно интегрировать почленно, и мы получаем

$$\int_a^b \psi(x)\varphi_n(x)\,dx = \frac{\mu}{\lambda_n}\int_a^b \psi(\xi)\varphi_n(\xi)\,d\xi - \frac{\mu}{\lambda_n}\int_a^b \varphi_n(\xi)\psi(\xi)\,d\xi = 0,$$

т. е. $\psi(x)$ будет ортогональна к $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., и следовательно, из соотношения

$$\psi(x) = \mu \int_a^b \left\{K(x, \xi) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(\xi)}{\lambda_n}\right\}\varphi(\xi)\,d\xi$$

мы получаем

$$\psi(x) = \mu \int_a^b K(x, \xi)\psi(\xi)\,d\xi.$$

Поэтому μ является характеристическим числом для $K(x, y)$, а $\psi(x)$ должно быть линейной комбинацией (конечного числа) функций $\varphi_n(x)$, соответствующих этому числу; пусть

$$\psi(x) = \sum_m a_m \varphi_m(x).$$

Умножим на $\varphi_m(x)$ и проинтегрируем; тогда, так как $\psi(x)$ ортогональна ко всем функциям $\varphi_n(x)$, мы видим, что $a_m = 0$, и следовательно, $\psi(x) \equiv 0$, что противоречит условию.

Это противоречие показывает, что ядро $H(x, y)$ тождественно равно нулю; иначе говоря, $K(x, y)$ может быть разложено в данный ряд, если он равномерно сходится.

Пример. Показать, что если λ_0 — характеристическое число, то уравнение с симметричным ядром

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_0 \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

не имеет решения, если $f(x)$ не ортогональна ко всем характеристическим функциям, соответствующим λ_0.

11.71. Решение уравнения Фредгольма при помощи рядов

Сохраняя обозначения § 11.7, рассмотрим интегральное уравнение

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \Phi(\xi)\, d\xi,$$

где $K(x, \xi)$ — симметричная функция.

Если мы *предположим*, что $\Phi(x)$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(\xi),$$

то будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_n} a_n \varphi_n(x),$$

так что $f(x)$ может быть разложена в ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\lambda_n - \lambda}{\lambda_n} \varphi_n(x).$$

Следовательно, обратно, *если функция $f(x)$ может быть разложена в сходящийся ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x),$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x),$$

если он сходится равномерно на отрезке (a, b), *будет решением уравнения Фредгольма.*

Для определения коэффициентов b_n отметим, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x)$$

согласно § 3.35 сходится равномерно [1]), так что, умножая на $\varphi_n(x)$ и интегрируя, получим

$$b_n = \int_a^b \varphi_n(x) f(x)\, dx.$$

11.8. Решение интегрального уравнения Абеля

Это уравнение имеет вид

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^\mu}\, d\xi \qquad (0 < \mu < 1,\ a \leqslant x \leqslant b),$$

где $f'(x)$ — непрерывная функция и $f(a) = 0$; найдем непрерывное решение $u(x)$.

Пусть

$$\varphi(x) = \int_a^x u(\xi)\, d\xi;$$

умножим обе части равенства [2])

$$\frac{\pi}{\sin \mu\pi} = \int_\xi^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\mu}(x-\xi)^\mu}$$

на $u(\xi)$ и проинтегрируем; тогда получим, применяя формулу Дирихле, § 4.51, следствие:

$$\frac{\pi}{\sin \mu\pi} \{\varphi(z) - \varphi(a)\} = \int_a^z d\xi \int_\xi^z \frac{u(\xi)\, dx}{(z-x)^{1-\mu}(x-\xi)^\mu} =$$

$$= \int_a^z dx \int_a^x \frac{u(\xi)\, d\xi}{(z-x)^{1-\mu}(x-\xi)^\mu} = \int_a^z \frac{f(x)\, dx}{(z-x)^{1-\mu}}.$$

---

[1]) Так как все числа λ_n вещественны, то мы можем разбить их на два класса: один с отрицательными, другой с положительными членами, причем члены каждого класса расположить по их абсолютной величине; тогда при $|\lambda_n| > \lambda$ очевидно, что $\dfrac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda}$ будет монотонной последовательностью для каждого из указанных классов.

[2]) Оно следует из примера 1 § 6.24, если заменить x на $(z-x)/(x-\xi)$.

Так как первое из этих выражений имеет непрерывную производную, то и последнее выражение имеет таковую; поэтому непрерывное решение, *если оно существует*, должно даваться формулой

$$u(z)=\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\frac{d}{dz}\int\limits_a^z\frac{f(x)\,dx}{(z-x)^{1-\mu}};$$

подстановкой [1]) можно убедиться, что эта функция действительно *является* решением.

11.81. Интегральное уравнение Шлёмильха [2])

Пусть $f(x)$ *имеет непрерывную производную при* $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$. *Тогда уравнение*

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x\sin\theta)\,d\theta$$

имеет только одно решение с непрерывной производной при $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$, *а именно*

$$\varphi(x)=f(0)+x\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x\sin\theta)\,d\theta.$$

Из § 4.2 следует, что

$$f'(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi'(x\sin\theta)\sin\theta\,d\theta$$

[так что $\varphi(0)=f(0)$, $\varphi'(0)=\frac{\pi}{2}f'(0)$].

Заменяя x на $x\sin\psi$, умножая затем на x и интегрируя, получим

$$x\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x\sin\psi)\,d\psi=\frac{2x}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\varphi'(x\sin\theta\sin\psi)\,d\theta\right\}d\psi.$$

Меняя порядок интегрирования в двойном интеграле (§ 4.3) и вводя вместо новую переменную χ, определяемую уравнением

$$\sin\chi=\sin\theta\sin\psi,$$

получим

$$x\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x\sin\psi)\,d\psi=\frac{2x}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int\limits_0^{\theta}\frac{\varphi'(x\sin\chi)\cos\chi\,d\chi}{\cos\psi}\right\}d\theta.$$

---

[1]) Относительно деталей отсылаем читателя к трактату Бохера.

[2]) Schlömilch, Zeitschrift für Math. und Phys., II (1857). Читатель легко увидит, что это уравнение может быть приведено к некоторому случаю уравнения Вольтерра с разрывным ядром.

Меняя вновь порядок интегрирования (§ 4.51), будем иметь

$$x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin\psi)\,d\psi = \frac{2x}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_\chi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi'(x\sin\chi)\cos\chi\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta-\sin^2\chi}}\,d\theta\right\}d\chi.$$

Но

$$\int_\chi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos^2\chi-\cos^2\theta}} = \left[-\arcsin\left(\frac{\cos\theta}{\cos\chi}\right)\right]_\chi^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

и, таким образом,

$$x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin\psi)\,d\psi = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(x\sin\chi)\cos\chi\,d\chi = \varphi(x)-\varphi(0).$$

Так как $\varphi(0)=f(0)$, то окончательно получаем

$$\varphi(x) = f(0) + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x\sin\psi)\,d\psi;$$

подстановкой можно убедиться, что эта функция действительно является решением.

ЛИТЕРАТУРА

H. Bateman, Report to the British Association, 1910.

M. Bôcher, Introduction to integral equations, Cambridge Math. Tracts., № 10 (1909).

H. B. Heywood et M. Fréchet, L'équation de Fredholm, Paris, 1912.

V. Volterra, Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, Paris, 1913.

T. Lalesco, Introduction à la théorie des équations intégrales, Paris, 1912.

I. Fredholm, Acta Mathematica, XXVII, 365—390 (1903).

D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig, 1912.

E. Schmidt, Math. Ann., LXIII, 433—476 (1907).

Э. Гурса, Курс математического анализа, ОНТИ, 1936.

Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, Гостехиздат, 1951.

С. Г. Михлин, Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, 1959.

И. Г. Петровский, Лекции по теории интегральных уравнений, Гостехиздат, 1951.

Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.

Примеры

1. Показать, что если время спуска частицы по гладкой кривой до ее наинизшей точки не зависит от исходной точки (при условии, что частица начинает движение из состояния покоя), то кривая будет циклоидой.

(Abel)

2. Показать, что если $f(x)$ непрерывна, то решением уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^\infty \cos(2xs)\,\varphi(s)\,ds$$

будет

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + \lambda \int_0^\infty f(s)\cos(2xs)\,ds}{1 - \frac{1}{4}\lambda^2\pi};$$

предполагается законность некоторой перестановки порядка интегрирования

3. Показать, что функции Вебера — Эрмита

$$D_n(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{4}x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$$

удовлетворяют уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}isx}\,\varphi(s)\,ds$$

для характеристических значений λ.

(A. Milne)

4. Показать, что четные периодические решения (с периодом 2π) дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + (a^2 + k^2\cos^2 x)\,\varphi(x) = 0$$

удовлетворяют интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos x\cos s}\varphi(s)\,ds.$$

(Whittaker; см. § 19.21)

5. Показать, что характеристическими функциями уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{4\pi}(x-y)^2 - \frac{1}{2}|x-y| \right\} \varphi(y)\,dy$$

будут

$$\varphi(x) = \cos mx, \quad \sin mx,$$

где $\lambda = m^2$ и m — любое целое число.

6. Показать, что уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \xi^{x-\xi} \varphi(\xi)\, d\xi$$

имеет разрывное решение

$$\varphi(x) = kx^{x-1}.$$

(Bôcher)

7. Показать, что интегральное уравнение с симметричным ядром

$$f(x) = \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

имеет решение

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \varphi_n(x)$$

при условии, что этот ряд сходится равномерно, причем λ_n, $\varphi_n(x)$ — характеристические числа и функции для $K(x, \xi)$, а $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ — разложение функции $f(x)$.

8. Показать, что если $|h| < 1$, то характеристическими функциями уравнения

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-h^2}{1-2h\cos(\xi - x) + h^2}\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

будут 1, $\cos mx$, $\sin mx$, а соответствующими характеристическими числами будут 1, $\frac{1}{h^m}$, $\frac{1}{h^m}$, где m принимает все положительные целые значения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

А.1. О некоторых допущениях, принятых в главах 1—4

В первых четырех главах этой книги мы предпочли принять без доказательств некоторые свойства элементарных трансцендентных функций, а именно: показательных, логарифмических и тригонометрических; представлялось также удобным пользоваться некоторыми положениями, которые читатель склонен принимать интуитивно на основании геометрического представления комплексных чисел точками на плоскости.

Укажем на два примера: (I) было допущено (§ 2.7), что $\lim(\exp z) = \exp(\lim z)$; (II) геометрическое представление угла на комплексной плоскости делало правдоподобным, что аргумент комплексного числа является многозначной функцией, обладающей тем свойством, что любые два ее значения отличаются друг от друга на число, кратное 2π.

Допущение первого типа, очевидно, нелогично; нелогично также обосновывать арифметические понятия геометрическими рассуждениями. Ибо, чтобы обосновать геометрию удовлетворительно, не только желательно использовать аксиомы арифметики, но необходимо также использовать особую совокупность аксиом геометрического характера, относящуюся к свойствам точек, прямых и плоскостей [1]).

Далее, арифметическая теория логарифма комплексного числа, по-видимому, является предварительно необходимой для логической теории углов.

Помимо того, математику кажется эстетически неудовлетворительным применять одну ветвь математики как существенную составную часть другой, в особенности когда первая имеет в известной степени материальную основу, в то время как другая — чисто отвлеченного характера [2]).

Причины несколько нелогичного и неэстетичного порядка изложения, принятого в начале этой книги, состояли, во-первых, в том, что свойства

---

[1]) В этой книге не имеется в виду дать какой-либо анализ основ геометрии. Его можно найти во многих специальных книгах, как, например, у Уайтхеда (Whitehead, Axioms of projective geometry, Cambridge Math. Tracts., № 4 (1906)) и Мэтьюса (Mathews, Projective geometry, London, 1914). Чтение глав I, XX, XXII и XXV последней книги убеждает в том, что логически изложить геометрию, исходя из минимума аксиом, значительно труднее, чем изложить теорию круговых функций при помощи чисто аналитических методов. Полный анализ основных положений как арифметики, так и геометрии дан Уайтхедом и Расселом (Whitehead, Russel, Principia mathematica, 1910—1913).

[2]) См. Merz, History of European thought in the nineteenth century, II, London (1903), 631 (примечание 2) и 707 (примечание 1), где цитируется письмо Вейерштрасса к Шварцу. См. также Sylvester, Phil. Mag. (5), II, 307 (1876) (Math. Papers, III, 50 (1909)).

элементарных трансцендентных функций использовались в гл. II постепенно, и поэтому было нежелательно прерывать изложение общей теории бесконечных процессов доказательством теорем, относящихся к функциям частного вида (с которыми читатель, по всей вероятности, уже был знаком); во-вторых (что касается применения результатов, вытекающих из геометрических соображений), в том, что чисто арифметический способ изложения глав 1—4, не прибегающий к помощи геометрической иллюстрации, затруднял бы читателя, незнакомого с методами и духом анализа.

А.11. Содержание настоящего приложения

Содержание приложения следующее:

В § А.2—А.22 показательная функция определяется при помощи степенного ряда. Из этого определения в сочетании с результатами, содержащимися в гл. 2, выводятся элементарные свойства этой функции (кроме периодичности). После этого легко выводятся соответствующие свойства логарифмов от положительных чисел (§ А.3—А.33).

Далее определяются степенными рядами синус и косинус, откуда тотчас же вытекает связь этих функций с показательной функцией. В §§ А.4 — А.42 дается краткое изложение метода, которым могут быть выведены формулы элементарной тригонометрии.

Полученные таким образом результаты дают возможность выявить периодичность показательных и тригонометрических функций *чисто арифметическими методами* (§§ А.5, А.51).

В §§ А.52 — А.522 рассматривается, главным образом, непрерывность обратных тригонометрических функций. После того как эти функции уже достаточно исследованы, не представляет более никаких трудностей и теория логарифмов комплексных чисел (§ А.6).

Наконец, в § А.7 показано, что угол, определяемый чисто аналитическим способом, обладает свойствами, согласующимися с обычным представлением об угле, основанным на нашем повседневном опыте.

Ясно, что мы не претендуем здесь на полный анализ элементарных трансцендентных функций, а ограничиваемся лишь кратким логическим обоснованием их теории[1]). Полное же изложение можно найти в различных курсах, как, например: Hobson, Plane trigonometry; Харди, Курс чистой математики, ИЛ, 1949; Bromwich, Theory of infinite series.

А.12. Логический порядок развития элементов анализа

Читатель найдет поучительным вторично прочесть главы 1—4 и приложение в следующем порядке:

Глава 1 (опуская[2]) весь § 1.5, кроме первых двух абзацев).

Глава 2 до конца § 2.61 (опуская примеры в § 2.31 — 2.61).

Глава 3 до конца § 3.34 и затем §§ 3.5 — 3.73.

---

[1]) При составлении приложения часто приходилось прибегать к статье по алгебраическому анализу в Encyklopädie der Math. Wissenschaften, написанной Прингсгеймом и Фабером (Pringsheim, Faber), которая в переработанном французском переводе Молька помещена в Encyclopédie des Sciences Math., и к книге Tannery, Introduction á la théorie des fonctions d'une variable, Paris, 1904 (русский перевод: Жюль Таннери, Введение в теорию функций с одной переменной, М., 1912, тт. I и II. — *Прим. ред.*).

[2]) Свойства аргумента (или фазы) комплексного числа не требуются в тексте раньше гл. 5.

Приложение, §§ А. 2 — А. 6 (опуская §§ А. 32, А. 33).
Глава 2, примеры §§ 2.31 — 2.61.
Глава 3, §§ 3.341 — 3.4.
Глава 4, вставляя §§ А. 32, А. 33, А. 7 после § 4.13.
Глава 2, §§ 2.7 — 2.82.

Читателю предлагается убедиться в том, что (в этом порядке) можно выработать чисто арифметическое изложение анализа, в котором обычный графический язык геометрии [1]) является чисто условным.

А.2. Показательная функция exp z

Показательная функция комплексной переменной z определяется рядом [2])

$$\exp z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Этот ряд по признаку Даламбера сходится абсолютно для всех значений z (вещественных и комплексных) (§ 2.36), так как $\lim\limits_{n \to \infty} |z/n| = 0 < 1$; таким образом, это определение имеет смысл для всех значений z.

Далее, ряд сходится равномерно во всякой ограниченной области значений z; ибо если область такова, что $|z| \leqslant R$, когда z лежит в этой области, то

$$\left|\frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{R^n}{n!},$$

и равномерная сходимость следует отсюда по признаку Вейерштрасса (§ 3.34), так как ряд $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{n!}$ сходится и его члены не зависят от z.

Кроме того, так как для любого фиксированного значения n функция $\frac{z^n}{n!}$ непрерывна, то по § 3.32 заключаем, что показательная функция будет непрерывной для всех значений z; и следовательно (см. § 3.2), если переменная z стремится к пределу ζ, то имеем

$$\lim_{z \to \zeta} \exp z = \exp \zeta.$$

---

[1]) То есть термин «точка» употребляется вместо «упорядоченная пара чисел», «окружность единичного радиуса с центром в начале координат» — вместо «совокупность упорядоченных пар чисел (x, y), удовлетворяющих условию $x^2 + y^2 = 1$», «точки прямой» — вместо «совокупность упорядоченных пар чисел (x, y), удовлетворяющих соотношению типа $Ax + By + C = 0$» и т. д.

[2]) Раньше было принято определять $\exp z$ как $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$; см. Cauchy, Cours d'analyse, I, 167. Коши (там же, 168, 309) выводил также свойства этой функции из ряда, но его исследование, когда z не рационально, неполно. См. также Schlömilch, Handbuch der alg. Analysis 29, 178, 246, 1889. Харди отмечает (Hardy, Math. Gasette, III, 284), что определение, основанное на пределе, имеет много недостатков.

А.21. Теорема сложения для показательной функции и ее следствия

Из теоремы Коши об умножении абсолютно сходящихся рядов (§ 2.53) следует, что[1])

$$(\exp z_1)(\exp z_2) = \left(1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{z_1^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{z_2^2}{2!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + \frac{z_1 + z_2}{1!} + \frac{z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2}{2!} + \ldots = \exp(z_1 + z_2),$$

так что $\exp(z_1 + z_2)$ может быть выражена через показательные функции от z_1 и от z_2 по формуле

$$\exp(z_1 + z_2) = (\exp z_1)(\exp z_2).$$

Этот результат известен под названием *теоремы сложения* для показательной функции. Из этой теоремы по индукции получаем, что

$$(\exp z_1)(\exp z_2) \ldots (\exp z_n) = \exp(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)$$

и, в частности,

$$\{\exp z\}\{\exp(-z)\} = \exp 0 = 1.$$

Это соотношение показывает, что не существует значений z, для которых $\exp z = 0$, ибо если бы такое значение z существовало, то, так как $\exp(-z)$ существует для этого значения z, мы получили бы $0 = 1$.

Далее, если x вещественно, то $\exp x > 0$, ибо из определения посредством ряда следует, что $\exp x \geqslant 1$, если $x \geqslant 0$, а если $x \leqslant 0$, то

$$\exp x = \frac{1}{\exp(-x)} > 0.$$

Далее, $\exp x$ *возрастает* с возрастанием x, ибо если $k > 0$, то

$$\exp(x + k) - \exp x = \exp x\,\{\exp k - 1\} > 0,$$

так как $\exp x > 0$ и $\exp k > 1$.

Так как, наконец,

$$\frac{\exp h - 1}{h} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \ldots$$

и ряд справа (как легко убедиться по методу § А.2) является непрерывной функцией для всех значений h, то имеем

$$\lim_{h \to 0} \{\exp h - 1\}/h = 1$$

и, следовательно,

$$\frac{d \exp z}{dz} = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(z + h) - \exp z}{h} = \exp z.$$

---

[1]) Легко убедиться непосредственно, что общий член ряда, полученного почленным перемножением двух рядов, будет

$$\frac{z_1^n + C_n^1 z_1^{n-1} z_2 + C_n^2 z_1^{n-2} z_2^2 + \ldots + z_2^n}{n!} = \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}.$$

А.22. Различные свойства показательной функции

Возвращаясь к формуле

$$(\exp z_1)(\exp z_2)\ldots(\exp z_n)=\exp(z_1+z_2+\ldots+z_n),$$

видим, что если n — положительное целое число, то

$$(\exp z)^n=\exp(nz),$$

откуда

$$(\exp z)^{-n}=\frac{1}{(\exp z)^n}=\frac{1}{\exp(nz)}=\exp(-nz).$$

В частности, взяв $z=1$ и написав e вместо $\exp 1=2{,}71828\ldots$, видим, что если m — положительное или отрицательное целое число, то

$$e^m=\exp m=1+\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\ldots$$

Далее, если μ — любое рациональное число $\left(=\frac{p}{q}\right.$, где p и q — целые числа, q — положительное$\left.\right)$, то

$$(\exp\mu)^q=\exp\mu q=\exp p=e^p,$$

так что q-я степень выражения $\exp\mu$ равна e^p; другими словами, $\exp\mu$ есть одно из значений выражения $e^{p/q}=e^{\mu}$, и очевидно (§ А.21), что это именно вещественное положительное значение.

Если же x — иррациональное вещественное число (определяемое сечением) и a_1 и a_2 — любые числа соответственно класса L и класса R, то *иррациональную степень* e^x проще всего определить как $\exp x$; таким образом, имеем для всех значений x, рациональных и иррациональных,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots$$

(формула, данная впервые Ньютоном [1])).

Поэтому законно писать e^x вместо $\exp x$, когда x вещественно; принято также писать e^z вместо $\exp z$, когда z комплексно. Функция e^z (которая, конечно, не должна рассматриваться как степень e), определяемая таким образом, подчиняется обычным правилам:

$$e^z e^{\zeta}=e^{z+\zeta},\qquad e^{-z}=\frac{1}{e^z}.$$

[Примечание. Таннери (Tannery, Leçons d'algèbre et d'analyse, I, 45, 1906) определяет e^x при x иррациональном как такое число X, что $e^{a_1}\leqslant X\leqslant e^{a_2}$ для любых a_1 и a_2. Из нашего определения легко видеть, что такое число существует, и притом *только одно*. Ибо $\exp x\,(=X)$ удовлетворяет этому неравенству, и если $X'\,(\neq X)$ также удовлетворяет ему, то

$$\exp a_2-\exp a_1=e^{a_2}-e^{a_1}\geqslant|X'-X|;$$

[1]) Newton, De analysi per aequat. num. term. inf. (написано до 1669 г., но опубликовано только в 1711 г.); дана также Ньютоном и Лейбницем в письмах к Ольденбургу в 1676 г.; впервые эта формула была опубликована Валлисом (Wallis) в 1685 г. в его «Treatise on algebra», 343. При x иррациональном справедливость этой формулы явно высказана Шлёмильхом (Schlömilch, Handbuch der alg. Analysis, 182, 1889).

в силу непрерывности показательной функции это показывает, что $a_2 - a_1$ не может быть взято произвольно малым, и, таким образом, (a_1, a_2) не определяет сечения.]

А.3. Логарифмы положительных чисел [1]

Мы видели (§§ А.2, А21), что при x вещественном $\exp x$ — положительная непрерывная возрастающая функция от x, и, очевидно, $\exp x \to +\infty$, когда $x \to +\infty$, и

$$\exp x = \frac{1}{\exp(-x)} \to 0, \quad \text{когда} \quad x \to -\infty.$$

Если теперь a — произвольное положительное число, то из § 3.63 следует, что уравнение относительно x

$$\exp x = a$$

имеет один и только один вещественный корень. Этот корень (который, конечно, будет функцией от a) обозначается [2] $\mathrm{Lg}_e\, a$ или просто $\mathrm{Lg}\, a$; он называется *логарифмом положительного числа* a.

Так как между x и a установлено взаимно однозначное соответствие и так как a — возрастающая функция от x, то x должен быть возрастающей функцией от a; другими словами, логарифм есть возрастающая функция.

Пример. Вывести, исходя из § А.21, что

$$\mathrm{Lg}\, a + \mathrm{Lg}\, b = \mathrm{Lg}\, ab.$$

А.31. Непрерывность логарифма

Покажем теперь, что при a положительном $\mathrm{Lg}\, a$ является непрерывной функцией от a.

Положим

$$\mathrm{Lg}\, a = x, \quad \mathrm{Lg}(a+h) = x + k,$$

так что

$$e^x = a, \quad e^{x+k} = a + h, \quad 1 + \frac{h}{a} = e^k.$$

Сначала предположим, что $h > 0$, а следовательно, и $k > 0$; тогда

$$1 + \frac{h}{a} = 1 + k + \frac{1}{2}k^2 + \ldots > 1 + k$$

и, таким образом,

$$0 < k < \frac{h}{a};$$

другими словами,

$$0 < \mathrm{Lg}(a+h) - \mathrm{Lg}\, a < \frac{h}{a}.$$

---

[1]) Многие математики определяют логарифм при помощи интегральной формулы, данной в § А.32. Читателю следует ознакомиться с мемуаром Гурвица (Hurwitz, Math. Ann., LXX, 33—47 (1911)) об основаниях теории логарифма.

[2]) Это согласуется с обозначением, принятым в большинстве руководств, в которых Lg обозначает главное значение (см. § А.6) логарифма комплексного числа.

Отсюда следует, что если h положительно, то разность $\mathrm{Lg}(a+h)-\mathrm{Lg}\, a$ можно сделать произвольно малой, взяв h достаточно малым.

Предположим теперь, что $h<0$, так что и $k<0$, тогда $\frac{a}{a+h}=e^{-k}$. Отсюда $\left(\text{взяв } 0<-h<\frac{a}{2}, \text{ что, очевидно, допустимо}\right)$ получим

$$\frac{a}{a+h}=1+(-k)+\frac{1}{2}k^2-\ldots>1-k$$

и, следовательно,

$$-k<-1+\frac{a}{a+h}=-\frac{h}{a+h}<-\frac{2h}{a}.$$

Итак, будет ли h положительно или отрицательно, если ε — произвольное положительное число и если $|h|$ меньше, чем $a/2$, и меньше, чем $a\varepsilon/2$, то

$$|\mathrm{Lg}(a+h)-\mathrm{Lg}\, a|<\varepsilon$$

и условие непрерывности (§ 3.2) для $\mathrm{Lg}\, x$ удовлетворяется.

А.32. Дифференцирование логарифма

Сохраняя обозначение § А.31, видим по доказанному там результату, что при $h\to 0$ (a фиксировано) также и $k\to 0$. Поэтому при $a>0$

$$\frac{d\,\mathrm{Lg}\, a}{da}=\lim_{k\to 0}\frac{k}{e^{x+k}-e^x}=\frac{1}{e^x}=\frac{1}{a}.$$

Так как $\mathrm{Lg}\, 1=0$, то согласно примеру 3 § 4.13 имеем

$$\mathrm{Lg}\, a=\int_1^a t^{-1}\, dt.$$

А.33. Разложение функции $\mathrm{Ln}(1+a)$ по степеням a

По § А.32 имеем

$$\mathrm{Ln}(1+a)=\int_0^a (1+t)^{-1}\, dt=$$

$$=\int_0^a \left\{1-t+t^2-\ldots+(-1)^{n-1}t^{n-1}+(-1)^n t^n(1+t)^{-1}\right\} dt=$$

$$=a-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a^3-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}a^n+R_n,$$

где

$$R_n=(-1)^n\int_0^a t^n(1+t)^{-1}\, dt.$$

Если теперь $-1 < a < 1$, то

$$|R_n| \leqslant \int_0^{|a|} t^n (1-|a|)^{-1}\,dt = |a|^{n+1}\{(n+1)(1-|a|)\}^{-1} \to 0,$$

когда $n \to \infty$, и, следовательно, при $-1 < a < 1$ функцию $\operatorname{Ln}(1+a)$ можно разложить в сходящийся ряд [1])

$$\operatorname{Ln}(1+a) = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{a^n}{n}.$$

Если $a = +1$, то

$$|R_n| = \int_0^1 t^n (1+t)^{-1}\,dt < \int_0^1 t^n\,dt = (n+1)^{-1} \to 0,$$

когда $n \to \infty$; таким образом, разложение сохраняет силу и при $a = +1$, но оно теряет силу при $a = -1$.

Пример. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

[Имеем

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{Lg}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\ldots\right) = 1,$$

и требуемый результат получается с помощью результата § A.2: $\lim\limits_{z\to\zeta} e^z = e^{\zeta}$.]

A.4. Определение синуса и косинуса

Функции [2]) $\sin z$ и $\cos z$ определяются аналитически при помощи степенных рядов, а именно:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!};$$

эти ряды согласно § 2.36 сходятся абсолютно для всех значений z (вещественных и комплексных), и таком образом, данные определения годны для всех значений z.

---

[1]) Этот метод получения логарифмического ряда принадлежит Валлису (Wallis, Phil. Trans., II, 754 (1668)).

[2]) Эти ряды были даны Ньютоном (Newton, De analysi..., 1711), см. сноску к § A.22. Прочие тригонометрические функции определяются, как обычно, отношениями и обратными величинами синусов и косинусов.

Сравнивая эти ряды с показательным рядом, видим, что синус и косинус не являются по существу новыми функциями, ибо они могут быть выражены через показательную функцию при помощи формул [1])

$$2i \sin z = \exp(iz) - \exp(-iz), \quad 2\cos z = \exp(iz) + \exp(-iz).$$

Ясно, что $\sin z$ и $\cos z$ являются соответственно нечетной и четной функциями от z; другими словами,

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

A.41. Основные свойства функций $\sin z$ и $\cos z$

Можно доказать, как и в случае показательной функции (§ A.2), что ряды для $\sin z$ и $\cos z$ сходятся равномерно в любой ограниченной области значений z и, следовательно, $\sin z$ и $\cos z$ являются непрерывными функциями от z для всех значений z.

Далее, можно доказать подобным же образом, что и ряд

$$1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots$$

определяет непрерывную функцию от z для всех значений z и, в частности, эта функция будет непрерывной при $z = 0$; таким образом, получаем, что

$$\lim_{z \to 0} (z^{-1} \sin z) = 1.$$

A.42. Теорема сложения для функций $\sin z$ и $\cos z$

Пользуясь формулами Эйлера (§ A.4), легко вывести из свойств показательной функции, что

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

и

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

Эти результаты известны под названием *теорем сложения* для $\sin z$ и $\cos z$.

Можно также доказать, пользуясь формулами Эйлера, что

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

При помощи этого результата $\sin(z_1 + z_2)$ можно выразить как алгебраическую функцию от $\sin z_1$ и $\sin z_2$, а $\cos(z_1 + z_2)$ — как алгебраическую функцию от $\cos z_1$ и $\cos z_2$; таким образом, формулы сложения можно рассматривать как теоремы сложения в точном смысле (см. часть II, §§ 20.3, 22.732, примечание).

Дифференцирование формул Эйлера, очевидно, дает

$$\frac{d \sin z}{dz} = \cos z, \quad \frac{d \cos z}{dz} = -\sin z.$$

[1]) Эти формулы были выведены Эйлером (они были даны в письме к И. Бернулли в 1740 г. и опубликованы в «Hist. Acad. Berlin», V, 279, 1749) из геометрических определений синуса и косинуса, на которых в те годы обычно основывали теорию тригонометрических функций.

Пример. Показать, что

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z, \quad \cos 2z = 2\cos^2 z - 1;$$

эти формулы называются формулами удвоения.

A.5. Периодичность показательной функции

Если z_1 и z_2 таковы, что $\exp z_1 = \exp z_2$, то, умножая обе стороны этого соотношения на $\exp(-z_2)$, получим $\exp(z_1 - z_2) = 1$; положив $\gamma = z_1 - z_2$, видим, что для всех значений z и всех целых значений n

$$\exp(z + n\gamma) = \exp z\,(\exp\gamma)^n = \exp z.$$

О показательной функции тогда можно сказать, что она *имеет период* γ, так как увеличение z на γ или на целое кратное γ не изменяет значения этой функции.

Покажем теперь, что такие числа γ (отличные от нуля) действительно существуют и что *все* числа γ, обладающие только что описанным свойством, содержатся в выражении

$$2n\pi i \quad (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

где π — некоторое положительное число [1]), которое больше $2\sqrt{2}$ и меньше 4.

A.51. Решение уравнения $\exp\gamma = 1$

Пусть $\gamma = \alpha + i\beta$, где α и β вещественны; тогда задача решения уравнения $\exp\gamma = 1$ тождественна задаче решения уравнения

$$\exp\alpha\exp i\beta = 1.$$

Сравнивая здесь вещественные и мнимые части, имеем

$$\exp\alpha\cos\beta = 1, \quad \exp\alpha\sin\beta = 0.$$

Возведя в квадрат, сложив эти уравнения и воспользовавшись тождеством $\cos^2\beta + \sin^2\beta \equiv 1$, получим

$$\exp 2\alpha = 1.$$

Теперь, если бы α было положительным, то $\exp 2\alpha$ была бы больше 1, а если бы α было отрицательным, то $\exp 2\alpha$ была бы меньше 1; *таким образом, единственное возможное значение для α равно нулю.*

Тогда получаем, что $\cos\beta = 1$, $\sin\beta = 0$.

Но уравнение $\sin\beta = 0$ является необходимым следствием уравнения $\cos\beta = 1$ вследствие тождества $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$. Поэтому достаточно рассмотреть решения (если таковые существуют) уравнения $\cos\beta = 1$. Однако вместо уравнения $\cos\beta = 1$ более удобно рассматривать уравнение $\cos x = 0$ [2]).

---

[1]) Тот факт, что π — иррациональное число, значение которого 3,14159 ..., не относится к настоящему исследованию. Обзор попыток определить значение π, заканчивающийся доказательством теоремы, что π не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению с рациональными коэффициентами, см. в монографии Гобсона: Hobson, Squaring the circle, 1913.

[2]) Если $\cos x = 0$, то непосредственным следствием формулы удвоения будет, что $\cos 2x = -1$, а затем, что $\cos 4x = 1$, так что если x — решение уравнения $\cos x = 0$, то $4x$ будет решением уравнения $\cos\beta = 1$.

Покажем теперь, что уравнение $\cos x = 0$ имеет один и только один корень, лежащий между 0 и 2, и что этот корень превосходит $\sqrt{2}$; для доказательства воспользуемся следующими соображениями:

(I) Функция $\cos x$ непрерывна в интервале $0 \leqslant x \leqslant 2$.

(II) При $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ имеем [1])

$$1-\frac{x^2}{2!} \geqslant 0, \quad \frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!} \geqslant 0, \quad \frac{x^8}{8!}-\frac{x^{10}}{10!} \geqslant 0, \ \ldots,$$

и следовательно, при $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ имеем неравенство $\cos x > 0$.

(III) Значение $\cos 2$ равно

$$1-2+\frac{2}{3}-\frac{2^6}{720}\left(1-\frac{4}{7\cdot 8}\right)-\frac{2^{10}}{10!}\left(1-\frac{4}{11\cdot 12}\right)-\ \ldots\ = -\frac{1}{3}-\ \ldots\ < 0.$$

(IV) При $0 < x \leqslant 2$

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{6}\right)+\frac{x^4}{120}\left(1-\frac{x^2}{6\cdot 7}\right)+\ \ldots\ > 1-\frac{x^2}{6} \geqslant \frac{1}{3},$$

и таким образом, при $0 \leqslant x \leqslant 2$ имеем неравенство $\sin x \geqslant \frac{1}{3} x$.

Из (II) и (III) совместно с (I) и из результата § 3.63 заключаем, что уравнение $\cos x = 0$ имеет *по крайней мере* один корень в интервале $\sqrt{2} < x < 2$ и не имеет ни одного корня на отрезке $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$.

Далее, имеется *не более чем* один корень в интервале $\sqrt{2} < x < 2$; действительно, предположим, что имеется два корня x_1 и x_2 $(x_2 > x_1)$; тогда $0 < x_2 - x_1 < 2-\sqrt{2} < 1$ и

$$\sin(x_2-x_1)=\sin x_2 \cos x_1-\sin x_1 \cos x_2 = 0,$$

а это несовместимо с (IV), из которого следует, что $\sin(x_2-x_1) \geqslant \frac{1}{3}(x_2-x_1)$.

Уравнение $\cos x = 0$ *имеет поэтому один и только один корень, лежащий между* 0 *и* 2. Этот корень лежит между $\sqrt{2}$ и 2 и обозначается через $\frac{\pi}{2}$; его фактическое значение, как указано в примечании к § А.5, равно 1,57079 ...

Из теорем сложения тотчас получается по индукции, что

$$\cos n\pi = (-1)^n, \quad \sin n\pi = 0,$$

где n — любое целое число.

Отсюда $\cos 2n\pi = 1$ при любом целом n.

Более того, не имеется значений β, отличных от $2n\pi$, для которых $\cos\beta = 1$, ибо если бы имелось такое значение, то оно было бы вещественным [2]) и, таким образом, мы могли бы выбрать целое число m так, что

$$-\pi \leqslant 2m\pi - \beta < \pi.$$

---

[1]) Символ $\geqslant$ может быть заменен символом $>$, за исключением случая $x = \sqrt{2}$ в первом из этих неравенств и случая $x = 0$ в остальных.

[2]) Из уравнения $\cos\beta = 1$ вытекает, что $\exp i\beta = 1$, а мы видели, что это уравнение не имеет комплексных корней.

Тогда

$$\sin\left|m\pi-\frac{1}{2}\beta\right| = \pm\sin\left(m\pi-\frac{1}{2}\beta\right) = \pm\sin\frac{1}{2}\beta = \pm 2^{-\frac{1}{2}}(1-\cos\beta)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

а это несовместимо[1]) с неравенством $\sin\left|m\pi-\frac{1}{2}\beta\right| \geqslant \frac{1}{3}\left|m\pi-\frac{1}{2}\beta\right|$, если $\beta \neq 2m\pi$.

Следовательно, для чисел $2n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *и только для них косинус равен единице.*

Отсюда следует, что существует положительное число π такое, что $\exp z$ *имеет период* $2\pi i$ *и что* $\exp z$ *не имеет периода, существенно отличного от* $2\pi i$.

Формулы элементарной тригонометрии, относящиеся к периодичности тригонометрических функций, могут быть теперь доказаны без всяких затруднений аналитически.

Пример 1. Показать, что $\sin\frac{1}{2}\pi$ равен 1, а не -1.

Пример 2. Показать, что $\operatorname{tg} x > x$, когда $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.

[Ибо $\cos x > 0$, и

$$\sin x - x\cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}\left\{4n-2-\frac{x^2}{4n+1}\right\},$$

и каждый член ряда положителен.]

Пример 3. Показать, что $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}$ будет положительным, когда $x=\frac{25}{16}$, и что $1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}$ равен нулю, когда $x=\sqrt{6-2\sqrt{3}} = 1{,}5924\ldots$; вывести отсюда, что[2]) $3{,}125 < \pi < 3{,}185$.

А.52. Решение одной системы тригонометрических уравнений

Пусть λ, μ — пара вещественных чисел, таких, что $\lambda^2+\mu^2=1$.

Тогда, если $\lambda \neq -1$, то уравнения

$$\cos x = \lambda, \quad \sin x = \mu$$

имеют бесконечное множество решений, из которых одно и только одно лежит между $-\pi$ и π[3]).

Пусть сначала λ и μ неотрицательны; тогда (§ 3.63) уравнение $\cos x = \lambda$ имеет по меньшей мере одно решение x_1, такое, что $0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, так как

---

[1]) Неравенство справедливо по (IV), так как

$$0 \leqslant \left|m\pi-\frac{1}{2}\beta\right| \leqslant \frac{1}{2}\pi < 2.$$

[2]) См. De Morgan, A budget of paradoxes, London, 316, 1872, где приводятся соображения, в силу которых $\pi > \frac{25}{8}$.

[3]) Если $\lambda = -1$, то $\pm\pi$ являются решениями и других решений на отрезке $(-\pi, \pi)$ не имеется.

$\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Это уравнение не может иметь двух различных решений на этом отрезке, ибо если бы x_1 и x_2 были такими решениями, то можно было бы доказать (см. § А.51), что $\sin(x_1 - x_2) = 0$, что противоречило бы § А.51 (IV), так как

$$0 < |x_2 - x_1| \leqslant \frac{\pi}{2} < 2.$$

Далее,

$$\sin x_1 = +\sqrt{1 - \cos^2 x_1} = +\sqrt{1 - \lambda^2} = \mu,$$

так что x_1 является решением *обоих* уравнений.

Уравнения не имеют решений на отрезках $(-\pi, 0)$ и $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, так как на этих отрезках или $\sin x$, или $\cos x$ будет отрицательным. Таким образом, уравнения имеют одно и только одно решение на отрезке $(-\pi, \pi)$.

Если λ или μ (или оба) отрицательны, то можно исследовать этот случай аналогично; подробности предоставляются читателю.

Очевидно, что если x_1 есть решение данных уравнений, то и $x_1 + 2n\pi$ также будет их решением при любом целом n, и следовательно, уравнения имеют бесконечное множество вещественных решений.

А.521. Главное решение системы тригонометрических уравнений

Единственное решение уравнений $\cos x = \lambda$, $\sin x = \mu$ (где $\lambda^2 + \mu^2 = 1$), лежащее между $-\pi$ и π, называется *главным решением* [1]), и всякое другое решение отличается от него на целое, кратное 2π.

Главное значение [2]) *аргумента* комплексного числа $z\,(\neq 0)$ теперь может быть определено аналитически как главное решение уравнений

$$|z| \cos \varphi = \operatorname{Re} z, \quad |z| \sin \varphi = \operatorname{Im} z,$$

а тогда, если

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta),$$

то мы должны иметь $\theta = \varphi + 2n\pi$, где θ называется *одним из значений аргумента числа* z и обозначается символом $\arg z$ (см. § 1.5).

А.522. Непрерывность аргумента комплексного переменного

Покажем теперь, что можно выбрать значение аргумента $\theta(z)$ комплексного переменного z, которое будет непрерывной функцией от z при условии, что z не проходит через нулевое значение.

Пусть z_0 — данное значение z, и пусть θ_0 — какое-нибудь значение его аргумента; тогда, чтобы доказать, что $\theta(z)$ — непрерывная функция вблизи z_0, достаточно показать, что существует такое число θ_1, что $\theta_1 = \arg z_1$ и что $|\theta_1 - \theta_0|$ можно сделать меньше, чем произвольное положительное число ε, давая $|z_1 - z_0|$ любое значение, меньшее некоторого положительного числа η. Пусть

$$z_0 = x_0 + iy_0, \quad z_1 = x_1 + iy_1.$$

---

[1]) Если $\lambda = -1$, то за главное решение принимается $+\pi$; см. стр. 20.

[2]) Термин «главное значение» был введен в 1845 г. Бьёрлингом, (Björling, Archiv der Math. und Phys., IX, 408 (1847)).

Пусть, далее, $|z_1 - z_0|$ взято настолько малым, что удовлетворяются следующие неравенства [1]):

(I) $|x_1 - x_0| < \frac{1}{2}|x_0|$, если только $x_0 \neq 0$,

(II) $|y_1 - y_0| < \frac{1}{2}|y_0|$, если только $y_0 \neq 0$,

(III) $|x_1 - x_0| < \frac{1}{4}\varepsilon|z_0|$, $|y_1 - y_0| < \frac{1}{4}\varepsilon|z_0|$.

Из (I) и (II) следует, что x_0x_1 и y_0y_1 будут неотрицательными и

$$x_0x_1 \geqslant \frac{1}{2}x_0^2, \quad y_0y_1 \geqslant \frac{1}{2}y_0^2,$$

так что

$$x_0x_1 + y_0y_1 \geqslant \frac{1}{2}|z_0|^2.$$

Пусть теперь взято то значение θ_1, которое отличается от θ_0 меньше чем на π; тогда, так как x_0 и x_1 имеют одинаковые знаки и y_0 и y_1 также имеют одинаковые знаки [2]), то из решения уравнений § А.52 получается, что θ_1 и θ_0 *отличаются друг от друга менее чем на* $\frac{\pi}{2}$.

Далее,

$$\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_0) = \frac{x_0y_1 - x_1y_0}{x_0x_1 + y_0y_1},$$

и таким образом (§ А.51, пример 2),

$$|\theta_1 - \theta_0| \leqslant \frac{|x_0y_1 - x_1y_0|}{x_0x_1 + y_0y_1} = \frac{|x_0(y_1 - y_0) - y_0(x_1 - x_0)|}{x_0x_1 + y_0y_1} \leqslant$$
$$\leqslant 2|z_0|^{-2}\{|x_0||y_1 - y_0| + |y_0||x_1 - x_0|\}.$$

Но $|x_0| \leqslant |z_0|$ и $|y_0| \leqslant |z_0|$, поэтому

$$|\theta_1 - \theta_0| \leqslant 2|z_0|^{-1}\{|y_1 - y_0| + |x_1 - x_0|\} < \varepsilon.$$

Далее, если взять $|z_1 - z_0|$ меньше, чем числа $\frac{1}{2}|x_0|$ (если $x_0 \neq 0$), $\frac{1}{2}|y_0|$ (если $y_0 \neq 0$) и $\frac{1}{4}\varepsilon|z_0|$, то неравенства (I), (II), (III) удовлетворяются; иными словами, если η — наименьшее из трех чисел $\frac{1}{2}|x_0|$, $\frac{1}{2}|y_0|$, $\frac{1}{4}\varepsilon|z_0|$ [3]), то, взяв $|z_1 - z_0| < \eta$, получим $|\theta_1 - \theta_0| < \varepsilon$; а это и есть условие того чтобы $\theta(z)$ было непрерывной функцией комплексного переменного z.

---

[1]) (I) или (II) соответственно отбрасываются в случае, когда $x_0 = 0$ или когда $y_0 = 0$.

[2]) Геометрическая интерпретация этих условий заключается в том, что z_0 и z_1 лежат в одном и том же квадранте плоскости.

[3]) Если какое-нибудь из этих чисел равно нулю, то оно опускается.

А.6. Логарифмы комплексных чисел

Говорят, что число ζ является *логарифмом* числа z, если $z = e^{\zeta}$.

Чтобы решить это уравнение относительно ζ, положим $\zeta = \xi + i\eta$, где ξ и η вещественны; тогда имеем

$$z = e^{\xi} (\cos \eta + i \sin \eta).$$

Взяв модули от обеих частей, видим, что $|z| = e^{\xi}$, так что (§ А.3) $\xi = \mathrm{Lg}\,|z|$, а тогда

$$z = |z| (\cos \eta + i \sin \eta),$$

так что η должно быть равно одному из значений $\arg z$.

Логарифм комплексного числа является, следовательно, многозначной функцией и может быть выражен через более элементарные функции при помощи формулы

$$\lg z = \mathrm{Lg}\,|z| + i \arg z.$$

Непрерывность $\lg z$ (когда $z \neq 0$) следует из § А.31 и § А.522, поскольку $|z|$ есть непрерывная функция от z.

Производная каждой отдельной ветви функции $\lg z$ (§ 5.7) может быть определена, как в § А.32; разложение § А.33 может быть установлено для $\lg(1 + a)$ при $|a| < 1$.

Следствие. Если a^z определить как $e^{z \lg a}$, то a^z будет непрерывной функцией от z и от a при $a \neq 0$.

А.7. Аналитическое определение углов.

Пусть z_1, z_2, z_3 — три комплексных числа, представляемых точками P_1, P_2, P_3 на комплексной плоскости z. Тогда угол между прямыми (см. сноску к § А.12) P_1P_2 и P_1P_3 определяется как какое-либо значение разности

$$\arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1).$$

Покажем теперь[1]), что площадь (определяемая как интеграл), ограниченная двумя радиусами и дугой данной окружности, пропорциональна одному из значений угла, составляемого радиусами, так что угол (в аналитическом смысле) обладает известным свойством, которое указывается во всех руководствах по тригонометрии[2]).

Пусть (x_1, y_1) — некоторая точка (обе координаты которой положительны) окружности $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$. Пусть θ — главное значение $\arg(x_1 + iy_1)$, так что $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Тогда площадь, ограниченная отрезком оси OX, отрезком прямой, соединяющей точки $(0, 0)$ и (x_1, y_1), и дугой окружности, соеди-

---

[1]) Доказательство, данное здесь, приложимо только к острым углам; читатель без труда распространит его и на углы, большие $\frac{\pi}{2}$, и на случай, когда OX не будет одним из граничных радиусов.

[2]) Евклидово определение угла не дает само по себе *меры* угла; в сочинениях по тригонометрии показывается (см. Hobson, Plane trigonometry, гл. 1, 1918), что угол измеряется двойной площадью сектора, высекаемого углом из единичного круга, центр которого находится в вершине угла.

няющей точку (x_1, y_1) с $(a, 0)$, равна $\int\limits_0^a f(x)\,dx$, где [1])

$$f(x) = x \operatorname{tg} \theta \qquad (0 \leqslant x \leqslant a \cos\theta),$$

$$f(x) = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (a \cos\theta \leqslant x \leqslant a),$$

если площадь определяется как надлежаще выбранный интеграл (см. стр. 88).

Остается доказать, что интеграл $\int\limits_0^a f(x)\,dx$ пропорционален углу θ.

Имеем

$$\int\limits_0^a f(x)\,dx = \int\limits_0^{a\cos\theta} x \operatorname{tg}\theta\,dx + \int\limits_{a\cos\theta}^a (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}\int\limits_{a\cos\theta}^a \left\{a^2 (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{d}{dx}\, x(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \int\limits_{a\cos\theta}^a (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \left\{\int\limits_0^1 (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt - \int\limits_0^{\cos\theta} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \left\{\frac{1}{2}\pi - \left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right)\right\} = \frac{1}{2} a^2\theta,$$

где положено $x = at$ и использован пример, разобранный в § 4.13.

Другими словами, площадь сектора пропорциональна углу сектора.

Итак, мы показали, что обычное понятие угла совместимо с аналитическим его определением.

---

[1]) Читатель легко найдет геометрическое истолкование этого интеграла, сделав чертеж.

Э. Т. УИТТЕКЕР, ДЖ. Н. ВАТСОН

КУРС СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

СОДЕРЖАНИЕ