Э. Т. УИТТЕКЕР и Дж. Н. ВАТСОН

КУРС СОВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
ПОД РЕДАКЦИЕЙ Ф. В. ШИРОКОВА

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

A COURSE OF MODERN ANALYSIS

AN INTRODUCTION TO THE GENERAL THEORY OF INFINITE PROCESSES AND OF ANALYTIC FUNCTIONS; WITH AN ACCOUNT OF THE PRINCIPAL TRANSCENDENTAL FUNCTIONS

BY

E. T. WHITTAKER, Sc. D., F. R. S.

Professor of Mathematics in the University of Edinburgh

AND

G. N. WATSON, Sc. D., F. R. S.

Professor of Mathematics in the University of Birmingham

FOURTH EDITION

CAMBRIDGE
AT THE UNIVERSITY PRESS
1927

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 12

ГАММА-ФУНКЦИЯ

12.1. Определение гамма-функции. Произведение Вейерштрасса

Гамма-функция[1]) $\Gamma(z)$ впервые была определена Эйлером как предел произведения (§ 12.11), из которого можно получить интеграл $\int\limits_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt$, но для изложения теории этой функции удобнее определять ее посредством бесконечного произведения в канонической форме Вейерштрасса.

Рассмотрим бесконечное произведение

$$ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\},$$

где

$$\gamma=\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ \dots\ +\frac{1}{m}-\lg m\right\}=0{,}5772157\dots$$

[Постоянная γ известна под названием постоянной Эйлера или Маскерони (Mascheroni). Ее существование вытекает из следующего: если

$$u_n=\int\limits_0^1\frac{t}{n(n+t)}\,dt=\frac{1}{n}-\lg\frac{n+1}{n},$$

то u_n будет положительным и меньшим, чем $\int\limits_0^1\frac{dt}{n^2}=\frac{1}{n^2}$; поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится,

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ \dots\ +\frac{1}{m}-\lg m\right\}=\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{n=1}^{m}u_n+\lg\frac{m+1}{m}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

---

[1]) Обозначение $\Gamma(z)$ было введено Лежандром в 1814 г.

Значение γ было вычислено Адамсом (J. C. Adams) с 260 десятичными знаками].

Рассматриваемое произведение представляет аналитическую функцию от z для всех значений z; ибо если N — такое целое число, что $|z| \leqslant \frac{1}{2}N$, то при $n > N$ мы имеем[1])

$$\left|\lg\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right| = \left|-\frac{1}{2}\frac{z^2}{n^2}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{n^3}-\dots\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|z|^2}{n^2}\left\{1+\left|\frac{z}{n}\right|+\left|\frac{z^2}{n^2}\right|+\dots\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{4}\frac{N^2}{n^2}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\right\} \leqslant \frac{1}{2}\frac{N^2}{n^2}.$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\{N^2/(2n^2)\}$ сходится, то при $|z| \leqslant \frac{1}{2}N$ ряд

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{\lg\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right\}$$

будет абсолютно и равномерно сходящимся рядом аналитических функций и, следовательно, сам будет представлять аналитическую функцию (§ 5.3, часть I). Взяв e с показателем степени, равным этому ряду, находим (§ 5.3, часть I), что бесконечное произведение

$$\prod_{n=N+1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\},$$

а потому и бесконечное произведение

$$ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

будут аналитическими функциями при $|z| \leqslant \frac{1}{2}N$, где N — произвольное целое число. Иначе говоря, последнее произведение будет аналитической функцией для всех конечных значений z.

Гамма-функция была определена Вейерштрассом[2]) с помощью равенства

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}.$$

---

[1]) Беря главное значение $\lg\left(1+\frac{z}{n}\right)$.

[2]) Journ. für Math. LI (1856). Эта формула для $\Gamma(z)$ была получена из формулы Эйлера (см. § 12.11) в 1848 г. Ньюманом (Newmann F. W., Cambridge and Dublin Math. Journ., III (1848), 60).

Из этого равенства ясно, что *функция* $\Gamma(z)$ *аналитична всюду, за исключением точек* $z=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$, *в которых она имеет простые полюсы.*

Гёльдером [1]), Муром [2]) и Барнсом [3]) были опубликованы доказательства теоремы, известной еще Вейерштрассу, что гамма-функция не может удовлетворять никакому дифференциальному уравнению с рациональными коэффициентами.

Пример 1. Доказать, что

$$\Gamma(1)=1, \quad \Gamma'(1)=-\gamma,$$

где γ есть постоянная Эйлера.

[Продифференцируйте логарифмически равенство

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}$$

(§ 4.7, часть I) и подставьте в результат $z=1$.]

Пример 2. Показать, что

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\int_{0}^{1}\frac{1-(1-t)^n}{t}\,dt,$$

и, исходя отсюда, доказать, что постоянная Эйлера равна пределу [4])

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_{0}^{1}\left\{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}\frac{dt}{t}-\int_{1}^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\frac{dt}{t}\right].$$

Пример 3. Показать, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{x}{z+n}\right)e^{\frac{x}{n}}\right\}=\frac{e^{\gamma x}\Gamma(z+1)}{\Gamma(z-x+1)}.$$

---

[1]) Hölder, Math. Ann., XXVIII (1887), 1—13.

[2]) Moore, Math. Ann., XLVIII (1897), 70—74.

[3]) Barnes, Messenger of Math., XXIX, (1900), 122—128.

[4]) Читатель увидит ниже (§ 12.2, пример 4), что этот предел равен

$$\int_{0}^{1}(1-e^{-t})\frac{dt}{t}-\int_{1}^{\infty}\frac{e^{-t}\,dt}{t}.$$

§ 12.11. Формула Эйлера для гамма-функции

По определению бесконечного произведения имеем

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\left[\lim_{m\to\infty} e^{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\lg m\right)z}\right]\left[\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}\right]=$$

$$= z\lim_{m\to\infty}\left[e^{\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}-\lg m\right)z}\prod_{n=1}^{m}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}\right]=$$

$$= z\lim_{m\to\infty}\left[m^{-z}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]=$$

$$= z\lim_{m\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{m-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-z}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{z}{n}\right)\right]=$$

$$= z\lim_{m\to\infty}\left[\prod_{n=1}^{m}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-z}\right\}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{z}\right].$$

Отсюда

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\right\}.$$

Эта формула принадлежит Эйлеру[1]), она имеет место всюду, кроме точек $z=0,\ -1,\ -2,\ \ldots$

Пример. Доказать, что

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\ldots(n-1)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}n^{z}.$$

(Euler)

12.12. Уравнение в конечных разностях для гамма-функции

Покажем теперь, что функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет уравнению в конечных разностях

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

[1]) Эта формула была дана в 1729 г. в письме к Гольдбаху, напечатанном в «Corresp. Math.» Фусса (Fuss).

В самом деле, если z не является целым неположительным числом, то по формуле Эйлера имеем

$$\Gamma(z+1)/\Gamma(z)=$$
$$=\frac{1}{z+1}\left[\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z+1}}{1+\frac{z+1}{n}}\right]:\left[\frac{1}{z}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}}{1+\frac{z}{n}}\right]=$$
$$=\frac{z}{z+1}\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left\{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)(z+n)}{z+n+1}\right\}=z\lim_{m\to\infty}\frac{m+1}{z+m+1}=z.$$

Это — одно из наиболее важных свойств гамма-функции.

Так как $\Gamma(1)=1$, то

$$\Gamma(z)=(z-1)!,$$

когда z — целое положительное число.

Пример. Доказать, что

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)}+\frac{1}{\Gamma(z+2)}+\frac{1}{\Gamma(z+3)}+\ldots=$$
$$=\frac{e}{\Gamma(z)}\left\{\frac{1}{z}-\frac{1}{1!}\frac{1}{z+1}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z+2}-\ldots\right\}.$$

[Следует рассмотреть выражение

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{z(z+1)}+\frac{1}{z(z+1)(z+2)}+\ldots+\frac{1}{z(z+1)\ldots(z+m)}.$$

Оно может быть разложено на простейшие дроби и приведено к виду $\sum_{n=0}^{m}\frac{a_n}{z+n}$, где

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(m-n)!}\right\}=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{e-\sum_{r=m-n+1}^{\infty}\frac{1}{r!}\right\}.$$

Замечая, что $\sum_{r=m-n+1}^{\infty}\frac{1}{r!}<\frac{e}{(m-n+1)!}$, надо доказать, что

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}\left\{\sum_{r=m-n+1}^{\infty}\frac{1}{r!}\right\}\to 0,$$

когда $m\to\infty$, а z не равно 0, —1, —2, ...]

12.13. Вычисление некоторых бесконечных произведений

При помощи гамма-функции можно вычислять бесконечные произведения вида

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n,$$

где u_n — любая рациональная функция индекса n.

Действительно, разлагая u_n на множители, мы можем написать это произведение в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A(n-a_1)(n-a_2)\ldots(n-a_k)}{(n-b_1)(n-b_2)\ldots(n-b_l)} \right\};$$

предполагается, что ни один из множителей знаменателя не равен нулю.

Для сходимости этого произведения, очевидно, необходимо, чтобы число множителей числителя равнялось числу множителей знаменателя и чтобы $A = 1$, ибо в противном случае u_n не будет стремиться к единице, когда n стремится к бесконечности. Поэтому мы имеем $k = l$ и, обозначая произведение через P, можем написать

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(n-a_1)\ldots(n-a_k)}{(n-b_1)\ldots(n-b_k)} \right\}.$$

Общий член в этом произведении можно написать в виде

$$\left(1-\frac{a_1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{a_k}{n}\right)\left(1-\frac{b_1}{n}\right)^{-1}\ldots\left(1-\frac{b_k}{n}\right)^{-1} = \\ = 1 - \frac{a_1+\ldots+a_k-b_1-\ldots-b_k}{n} + A_n,$$

где A_n будет $O(n^{-2})$ при больших n.

Для того чтобы бесконечное произведение было абсолютно сходящимся, необходимо (§ 2.7, часть I), чтобы

$$a_1 + \ldots + a_k - b_1 - \ldots - b_k = 0.$$

Мы можем поэтому, не меняя значения общего множителя рассматриваемого произведения, ввести в него множитель

$$\exp\{n^{-1}(a_1 + \ldots + a_k - b_1 - \ldots - b_k)\}.$$

Таким образом, получим

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left(1-\frac{a_1}{n}\right)e^{\frac{a_1}{n}}\ldots\left(1-\frac{a_k}{n}\right)e^{\frac{a_k}{n}}}{\left(1-\frac{b_1}{n}\right)e^{\frac{b_1}{n}}\ldots\left(1-\frac{b_k}{n}\right)e^{\frac{b_k}{n}}} \right\}.$$

Но из определения гамма-функции по Вейерштрассу видно, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right\}=\frac{1}{-z\Gamma(-z)\,e^{-\gamma z}}$$

и, таким образом,

$$P=\frac{b_1\Gamma(-b_1)\ldots b_k\Gamma(-b_k)}{a_1\Gamma(-a_1)\ldots a_k\Gamma(-a_k)}=\prod_{m=1}^{k}\frac{\Gamma(1-b_m)}{\Gamma(1-a_m)}.$$

Эта формула выражает бесконечное произведение P через гамма-функцию.

Пример 1. Доказать, что

$$\prod_{s=1}^{\infty}\frac{s(a+b+s)}{(a+s)(b+s)}=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

Пример 2. Показать, что при $a=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ имеет место равенство

$$x\left(1-\frac{x}{1^n}\right)\left(1-\frac{x}{2^n}\right)\ldots=\left\{-\Gamma\left(-x^{\frac{1}{n}}\right)\Gamma\left(-ax^{\frac{1}{n}}\right)\ldots\Gamma\left(-a^{n-1}x^{\frac{1}{n}}\right)\right\}^{-1}.$$

§ 12.14. Связь между гамма-функцией и тригонометрическими функциями

Докажем еще одно весьма важное свойство гамма-функции, выражаемое равенством [1])

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

По определению Вейерштрасса (§ 12.1) имеем

$$\Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\}^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right\}^{-1}=$$
$$=\frac{-\pi}{z\sin\pi z},$$

если примем во внимание пример 1 § 7.5 части I. Так как согласно § 12.12

$$\Gamma(1-z)=-z\Gamma(-z),$$

то отсюда и получим требуемый результат.

---

[1]) Эту формулу часто называют *формулой дополнения.* — *Прим. ред.*

Следствие 1. Если мы дадим z значение $\frac{1}{2}$, то полученная формула дает $\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2=\pi$, и так как по формуле Вейерштрасса $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ положительно, то мы имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\pi^{\frac{1}{2}}.$$

Следствие 2. Если $\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, то

$$\psi(1-z)-\psi(z)=\pi\operatorname{ctg}\pi z.$$

12.15. Теорема умножения Гаусса[1]) и Лежандра

Докажем равенство

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz).$$

Положим

$$\varphi(z)=\frac{n^{nz}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right)}{n\Gamma(nz)}.$$

Тогда имеем по формуле Эйлера (пример § 12.11)

$$\varphi(z)=\frac{n^{nz}\prod\limits_{r=0}^{n-1}\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1\cdot 2\ldots(m-1)\cdot m^{z+\frac{r}{n}}}{\left(z+\frac{r}{n}\right)\left(z+\frac{r}{n}+1\right)\ldots\left(z+\frac{r}{n}+m-1\right)}}{n\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1\cdot 2\ldots(nm-1)\cdot(nm)^{nz}}{nz(nz+1)\ldots(nz+nm-1)}}=$$

$$=n^{nz-1}\lim_{m\to\infty}\frac{\{(m-1)!\}^n m^{nz+\frac{1}{2}(n-1)}n^{mn}}{(nm-1)!\,(nm)^{nz}}=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{\{(m-1)!\}^n m^{\frac{1}{2}(n-1)}n^{mn-1}}{(nm-1)!}.$$

Из этого последнего выражения видно, что $\varphi(z)$ не зависит от z. Таким образом, $\varphi(z)$ равна значению, которое она имеет при $z=\frac{1}{n}$, т. е.

$$\varphi(z)=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

---

[1]) Gauss, Werke, III, 149. Случай $n=2$ был дан Лежандром.

Следовательно,

$$\{\varphi(z)\}^2 = \prod_{r=1}^{n-1} \left\{ \Gamma\left(\frac{r}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{r}{n}\right) \right\} =$$

$$= \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n} \sin\frac{2\pi}{n} \ldots \sin\frac{(n-1)\pi}{n}} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\ ^{1)},$$

или так как $\varphi(n^{-1})$ положительна, то

$$\varphi(z) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{-\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right) \ldots \Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz} (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} \Gamma(nz).$$

Следствие. Полагая $n = 2$, имеем

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z).$$

Эта формула называется *формулой удвоения*.

Пример. Пусть $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$; показать, что

$$B(np, nq) = n^{-nq} \frac{B(p, q) B\left(p+\frac{1}{n}, q\right) \ldots B\left(p+\frac{n-1}{n}, q\right)}{B(q, q) B(2q, q) \ldots B((n-1)q, q)}.$$

12.16. Разложения для логарифмических производных гамма-функции

Мы имеем

$$\{\Gamma(z+1)\}^{-1} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \right\}.$$

Взяв логарифмическую производную (§ 4.7, часть I), получим

$$\frac{d \lg \Gamma(z+1)}{dz} = -\gamma + \frac{z}{1(z+1)} + \frac{z}{2(z+2)} + \frac{z}{3(z+3)} + \ldots$$

или, так как $\lg \Gamma(z+1) = \lg z + \lg \Gamma(z)$,

$$\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(z+n)}.$$

---

[1]) Вычисление $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n}$ см., например, в книге: М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958, стр. 558. — *Прим. ред.*

Дифференцируя вторично, получаем

$$\frac{d^2}{dz^2}\lg\Gamma(z+1)=\frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{1(z+1)}+\frac{z}{2(z+2)}+\ldots\right\}=\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\ldots$$

Эти разложения иногда применяются в приложениях.

12.2. Интегральное представление Эйлера для $\Gamma(z)$

Несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ представляет аналитическую функцию от z, когда [1]) вещественная часть z положительна (§ 5.32, часть I). Он называется *интегралом Эйлера второго рода* [2]). Покажем теперь, что при $\operatorname{Re} z>0$ этот интеграл равен $\Gamma(z)$. Обозначив вещественную часть z через x, имеем $x>0$. Если теперь обозначить [3])

$$\Pi(z,\ n)=\int\limits_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt,$$

то, положив $t=n\tau$, получим

$$\Pi(z,\ n)=n^z\int\limits_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}\,d\tau;$$

n-кратным интегрированием по частям легко показать, что при $x>0$ и n целом положительном

$$\int\limits_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}\,d\tau=$$

$$=\left[\frac{1}{z}\tau^z(1-\tau)^n\right]_0^1+\frac{n}{z}\int\limits_0^1(1-\tau)^{n-1}\tau^z\,d\tau=\ldots=$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots1}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\int\limits_0^1\tau^{z+n-1}\,d\tau,$$

---

[1]) Если вещественная часть z не положительна, то интеграл не сходится из-за особенности подинтегрального выражения при $t=0$.

[2]) Это название было дано Лежандром, см. § 12.4 об интеграле Эйлера первого рода.

[3]) Многозначность функции t^{z-1} устраняется, если определить эту функцию равенством $t^{z-1}=e^{(z-1)\lg t}$, где $\lg t$ веществен.

а потому

$$\Pi(z,\ n)=\frac{1\cdot 2\ldots n}{z(z+1)\ldots(z+n)}\,n^z.$$

Отсюда, согласно примеру § 12.11, $\Pi(z,\ n)\to\Gamma(z)$, когда $n\to\infty$, т. е.

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt.$$

Итак, если положим

$$\Gamma_1(z)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,$$

то имеем

$$\Gamma_1(z)-\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\left[\int\limits_0^n\left\{e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}t^{z-1}dt+\int\limits_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\right].$$

Но

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt=0,$$

ибо интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ сходится.

Для того чтобы показать, что и первый интеграл в выражении для $\Gamma_1(z)-\Gamma(z)$ имеет пределом нуль, заметим, что

$$0\leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant n^{-1}t^2e^{-t},\qquad 0\leqslant t\leqslant n.$$

[Чтобы установить эти неравенства, мы рассуждаем следующим образом. Если $0\leqslant y<1$, то, как это следует из разложений функций e^y и $(1-y)^{-1}$ в ряды, имеют место неравенства

$$1+y\leqslant e^y\leqslant(1-y)^{-1}.$$

Подставив $\frac{t}{n}$ вместо y, будем иметь

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}\geqslant e^{-t}\geqslant\left(1-\frac{t}{n}\right)^n,$$

а потому

$$0\leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=e^{-t}\left\{1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\}\leqslant e^{-t}\left\{1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right\}.$$

Далее, если $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то $(1-\alpha)^n \geqslant 1-n\alpha$. При $n\alpha \geqslant 1$ это очевидно, а при $n\alpha < 1$ легко доказывается методом индукции. Положив здесь $\alpha = \frac{t^2}{n^2}$, получим

$$1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}$$

и, следовательно, [1])

$$0 \leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}\frac{t^2}{n},$$

что и требовалось доказать.]

Из доказанных неравенств непосредственно получаем, что

$$\left|\int_0^n \left\{e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right\} t^{z-1}dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^n n^{-1}e^{-t}t^{x+1}dt < n^{-1}\int_0^\infty e^{-t}t^{x+1}dt \to 0,$$

когда $n \to \infty$, ибо последний интеграл сходится.

Следовательно, $\Gamma_1(z) = \Gamma(z)$, когда интеграл, которым определяется $\Gamma_1(z)$, сходится, т. е.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt,$$

когда вещественная часть z положительна.

Таким образом, когда вещественная часть z положительна, $\Gamma(z)$ можно определять как этим интегралом, так и бесконечным произведением Вейерштрасса.

Пример 1. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^1 \left(\lg\frac{1}{x}\right)^{z-1} dx.$$

Пример 2. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} s > 0$

$$\int_0^\infty e^{-zx}x^{s-1}dx = \frac{\Gamma(s)}{z^s}.$$

---

[1]) Эти рассуждения представляют собой видоизменение способа, данного Шлёмильхом (Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, II, 243). Простой способ получения менее точного неравенства (достаточного для требуемой цели) дан Бромуичем (Bromwich, Infinite Series, 459).

Пример 3. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Re} s > 1$

$$\frac{1}{(z+1)^s}+\frac{1}{(z+2)^s}+\frac{1}{(z+3)^s}+\ldots=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-xz}x^{s-1}dx}{e^x-1}.$$

Пример 4. Из результата примера 2 § 12.1, пользуясь неравенством

$$0 \leqslant e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2e^{-t}}{n},$$

получить, что

$$\gamma=\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-t}-e^{-\frac{1}{t}}}{t}\,dt.$$

12.21. Распространение интегрального представления гамма-функции на случай отрицательного аргумента

Формула последнего параграфа непригодна для случая, когда вещественная часть z отрицательна. Коши [1]) и Залшютц [2]) показали тем не менее, что существует аналогичная формула и для отрицательных значений.

Она может быть получена следующим путем.

Рассмотрим функцию

$$\Gamma_2(z)=\int\limits_0^\infty t^{z-1}\left(e^{-t}-1+t-\frac{t^2}{2!}+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{t^k}{k!}\right)dt,$$

где k — целое число, такое, что $-k > x > -k-1$, x — вещественная часть z.

Интегрированием по частям получаем при $x < -1$

$$\Gamma_2(z)=\left[\frac{t^z}{z}\left(e^{-t}-1+t-\frac{t^2}{2!}+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{t^k}{k!}\right)\right]_0^\infty+$$
$$+\frac{1}{z}\int\limits_0^\infty t^z\left(e^{-t}-1+t-\ldots+(-1)^k\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right)dt.$$

Обинтегрированный член стремится к нулю при обоих пределах, так как $x+k$ отрицательно, а $x+k+1$ положительно. Таким образом, имеем

$$\Gamma_2(z)=\frac{1}{z}\Gamma_2(z+1).$$

То же самое рассуждение применимо и в том случае, когда x лежит между 0 и -1, и приводит к формуле

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma_2(z) \qquad (0 > x > -1).$$

Последнее равенство показывает, что при $-1 < x < 0$

$$\Gamma_2(z)=\Gamma(z).$$

[1]) Cauchy, Exercices de Math. (1827), 91—92.

[2]) Saalschütz, Zs. für Math. und Phys., XXXII (1887), XXXIII (1888).

Из предпоследнего равенства следует затем, что $\Gamma_2(z)$ равно $\Gamma(z)$ для всех отрицательных значений $\operatorname{Re} z$, меньших -1. Таким образом, для всех отрицательных значений $\operatorname{Re} z$ мы имеем следующую формулу Коши и Залшютца:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}\left(e^{-t}-1+t-\frac{t^2}{2!}+\ldots+(-1)^{k+1}\frac{t^k}{k!}\right)dt,$$

где k — ближайшее целое число, меньшее $-\operatorname{Re} z$.

Пример. Пусть функция $P(\mu)$ определена для положительных значений μ равенством

$$P(\mu)=\int_0^1 x^{\mu-1}e^{-x}dx,$$

и пусть для отрицательных значений μ функция $P_1(\mu)$ определена равенством

$$P_1(\mu)=\int_0^1 x^{\mu-1}\left(e^{-x}-1+x-\ldots+(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k!}\right)dx,$$

где k — ближайшее целое число, меньшее $-\mu$. Показать, что

$$P_1(\mu)=P(\mu)-\frac{1}{\mu}+\frac{1}{1!(\mu+1)}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k!(\mu+k)}.$$

(Saalschütz)

12.22. Представление Ханкеля функции $\Gamma(z)$ в виде контурного интеграла

Интегралы, полученные для $\Gamma(z)$ в §§ 12.2, 12.21, являются лишь наиболее известными из обширного класса определенных интегралов, при помощи которых может быть определена гамма-функция. Наиболее общий интеграл этого класса принадлежит Ханкелю [1]). Этот интеграл мы сейчас и рассмотрим.

Пусть D — контур, который начинается в точке ρ на вещественной оси, обходит один раз начало координат против часовой стрелки и возвращается обратно в ρ.

Рассмотрим $\int_D (-t)^{z-1}e^{-t}dt$, когда вещественная часть z положительна, а само z не есть целое число.

Многозначную функцию $(-t)^{z-1}$ сделаем однозначной, приняв $(-t)^{z-1}=e^{(z-1)\lg(-t)}$, где $\lg(-t)$ веществен, когда t находится на отрицательной части вещественной оси, так что на контуре D имеем $-\pi\leqslant\arg(-t)\leqslant\pi$.

[1]) Hankel, Zs. für Math. und Phys., IX (1864), 7.

Подинтегральная функция не будет аналитической внутри D, но, по следствию 1 § 5.2 части I, путь интегрирования можно деформировать (не меняя значения интеграла) в путь, начинающийся в ρ, идущий вдоль вещественной оси до δ, описывающий окружность радиуса δ вокруг начала координат против часовой стрелки и возвращающийся обратно в ρ вдоль вещественной оси.

На вещественной оси в первой части этого нового пути интегрирования мы имеем $\arg(-t) = -\pi$, так что $(-t)^{z-1} = e^{-i\pi(z-1)}t^{z-1}$ (где $\lg t$ вещественен), а на последней части пути $(-t)^{z-1} = e^{i\pi(z-1)}t^{z-1}$.

На окружности положим $-t = \delta e^{i\theta}$; тогда получим

$$\int_D (-t)^{z-1}e^{-t}dt = \int_\rho^\delta e^{-i\pi(z-1)}t^{z-1}e^{-t}dt + \\ + \int_{-\pi}^{\pi} (\delta e^{i\theta})^{z-1}e^{\delta(\cos\theta+i\sin\theta)}\,\delta e^{i\theta}i\,d\theta + \int_\delta^\rho e^{i\pi(z-1)}t^{z-1}e^{-t}\,dt = \\ = -2i\sin\pi z\int_\delta^\rho t^{z-1}e^{-t}dt + i\delta^z\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta+\delta(\cos\theta+i\sin\theta)}\,d\theta.$$

Это соотношение справедливо для всех положительных значений $\delta \leqslant \rho$. Будем теперь приближать δ к 0; тогда $\delta^z \to 0$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta+\delta(\cos\theta+i\sin\theta)}\,d\theta \to \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta}\,d\theta,$$

так как подинтегральная функция стремится к своему пределу равномерно.

Следовательно, мы приходим к заключению, что равенство

$$\int_D (-t)^{z-1}e^{-t}\,dt = -2i\sin\pi z\int_0^\rho t^{z-1}\,e^{-t}\,dt$$

будет справедливым для всех положительных значений ρ. Пусть $\rho \to \infty$, и пусть C — контур, в который переходит D.

Тогда

$$\int_C (-t)^{z-1}e^{-t}dt = -2i\sin\pi z\int_0^\infty t^{z-1}\,e^{-t}\,dt$$

и, следовательно,

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i\sin\pi z}\int_C (-t)^{z-1}\,e^{-t}\,dt.$$

Далее, поскольку контур C не проходит через точку $t = 0$, уже не надо требовать, чтобы вещественная часть z была положительной;

интеграл $\int\limits_C (-t)^{z-1}e^{-t}dt$ будет однозначной аналитической функцией z для всех значений z. *Поэтому, согласно* § 5.5 *части I, равенство, только что доказанное для случая, когда вещественная часть z положительна, сохраняет силу для всех значений z, за исключением значений* 0, ± 1, ± 2, ...

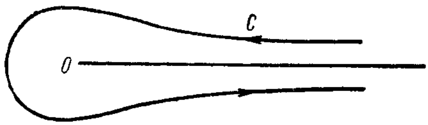

Рис. 1.

Следовательно, для всех значений z, за исключением 0, ± 1, ± 2, ...,

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i \sin \pi z} \int\limits_C (-t)^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

Это и есть *формула Ханкеля*. Если мы заменим в ней z на $1-z$ и используем формулу § 12.14, то получим дальнейший результат

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{i}{2\pi} \int\limits_C (-t)^{-z} e^{-t}\, dt.$$

Вместо $\int\limits_C$ мы будем писать $\int\limits_{\infty}^{+0}$, подразумевая под этим, что путь интегрирования идет из бесконечности на вещественной оси, обходит начало координат в положительном направлении и возвращается к исходной точке.

Пример 1. Показать, что если вещественная часть z положительна и a — какое-либо положительное постоянное число, то $\int (-t)^{-z} e^{-t}\, dt$ стремится к нулю при $\rho \to \infty$, когда путь интегрирования есть четверть окружности радиуса $\rho + a$ с центром в точке $-a$, концами которой служат точки ρ и $-a + i(\rho + a)$ или точки ρ и $-a - i(\rho + a)$.

Вывести формулу

$$\lim_{\rho \to \infty} \int\limits_{-a+i\rho}^{-a-i\rho} (-t)^{-z} e^{-t}\, dt = \lim_{\rho \to \infty} \int\limits_C (-t)^{-z} e^{-t}\, dt \;{}^{1})$$

и отсюда, положив $t = -a - iu$, получить, что

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{a+iu} (a + iu)^{-z}\, du.$$

---

[1]) Здесь C — контур, представленный выше на рисунке. — *Прим. ред.*

[Эта формула была дана Лапласом (Laplace, Theorie Analitique des Probabilites (1812), 134) и по существу эквивалентна формуле Ханкеля с контурным интегралом.]

Пример 2. Взяв $a=1$ и положив $t=-1+i\operatorname{tg}\theta$ в примере 1, показать, что

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{e}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\operatorname{tg}\theta-z\theta)\cos^{z-2}\theta\,d\theta.$$

Пример 3. Взяв за контур интегрирования параболу с фокусом в начале координат, показать, что при $a>0$ [1])

$$\Gamma(z)=\frac{2a^z e^a}{\sin\pi z}\int_0^\infty e^{-at^2}(1+t^2)^{z-\frac{1}{2}}\cos\{2at+(2z-1)\operatorname{arctg}t\}\,dt.$$

(Bourguet, Acta Math., I)

Пример 4. Найти значения x, для которых интеграл

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty t^{x-1}\sin t\,dt$$

будет сходящимся; для этих значений x выразить его через гамма-функцию и затем показать, что он равен

$$e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^\infty\left\{\left(1-\frac{x}{2n}\right)e^{x/(2n)}\right\}\Big/\prod_{n=1}^\infty\left\{\left(1+\frac{x}{2n-1}\right)e^{-x/(2n-1)}\right\}.$$

(St. John's, 1902)

Пример 5. Доказать, что $\int\limits_0^\infty (\lg t)^m\frac{\sin t}{t}\,dt$ сходится при $m>0$, и, пользуясь результатом примера 4, определить его величину при $m=1$ и $m=2$.

(St. John's, 1902)

12.3. Интегральное представление Гаусса для логарифмической производной от гамма-функции [2])

Представим теперь функцию $\frac{d}{dz}\lg\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ в виде несобственного интеграла, когда вещественная часть z положительна; рассматриваемая функция часто обозначается через $\psi(z)$. Но сначала нам нужна новая формула для γ.

---

[1]) a — расстояние от вершины до фокуса. — *Прим. ред.*

[2]) Gauss, Werke, III, 159.

Из формулы примера 4 § 12.2 находим

$$\gamma=\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,dt-\int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt=\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_\delta^1 \frac{dt}{t}-\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_\Delta^1 \frac{dt}{t}-\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right\},$$

где $\Delta=1-e^{-\delta}$; замена δ на Δ допустима, так как

$$\int_\Delta^\delta \frac{dt}{t}=\lg\frac{\delta}{1-e^{-\delta}}\to 0 \quad \text{при} \quad \delta\to 0.$$

Положив $t=1-e^{-u}$ в первом из этих интегралов и обозначая затем u снова через t, получим

$$\gamma=\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt-\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt\right\}=\int_0^\infty\left\{\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right\}e^{-t}\,dt.$$

Это и есть необходимая нам формула для γ.

Чтобы получить формулу Гаусса, возьмем равенство (§ 12.16)

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\frac{1}{z}+\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{z+m}\right)$$

и положим

$$\frac{1}{z+m}=\int_0^\infty e^{-t(z+m)}\,dt,$$

что допустимо при $m=0, 1, 2, \ldots$, если вещественная часть z положительна.

Получаем

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\int_0^\infty e^{-zt}\,dt+\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\sum_{m=1}^{n}\left(e^{-mt}-e^{-(m+z)t}\right)dt=$$

$$=-\gamma+\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-zt}-e^{-(n+1)t}+e^{-(z+n+1)t}}{1-e^{-t}}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right)dt-\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\,e^{-(n+1)t}\,dt.$$

Но если $0 < t \leqslant 1$, то $\left|\frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right|$ будет ограниченной функцией от t, предел которой при $t \to 0$ будет конечным, а при $t \geqslant 1$

$$\left|\frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right| < \frac{1+|e^{-zt}|}{1-e^{-1}} < \frac{2}{1-e^{-1}}.$$

Поэтому мы можем найти такое число K, не зависящее от t, что на пути интегрирования

$$\left|\frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right| < K;$$

и таким образом,

$$\left|\int_0^\infty \frac{1-e^{-zt}}{1-e^{-t}} e^{-(n+1)t}\,dt\right| < K\int_0^\infty e^{-(n+1)t}\,dt = K(n+1)^{-1} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Мы доказали формулу

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\lg\Gamma(z) = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right) dt,$$

которая и является гауссовым представлением $\psi(z)$ в виде несобственного интеграла.

Следует отметить, что это первый из числа встречавшихся нам в связи с гамма-функцией несобственных интегралов, в котором подинтегральная функция однозначна.

Положив в формуле Гаусса $t = \lg(1+x)$, получаем, полагая $\Delta = e^\delta - 1$,

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^\infty \left\{\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right\} dt =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\left\{\int_\delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_\Delta^\infty \frac{dx}{x(1+x)^z}\right\} = \lim_{\delta\to 0}\left\{\int_\Delta^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt - \int_\Delta^\infty \frac{dx}{x(1+x)^z}\right\},$$

так как при $\delta \to 0$

$$0 < \int_\delta^\Delta \frac{e^{-t}}{t}\,dt < \int_\delta^\Delta \frac{dt}{t} = \lg\frac{e^\delta - 1}{\delta} \to 0.$$

Отсюда

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{\Delta\to 0}\int_\Delta^\infty \left\{e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^z}\right\}\frac{dx}{x},$$

или

$$\Gamma'(z) = \Gamma(z) \int_0^\infty \left\{ e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^z} \right\} \frac{dx}{x}$$

— формула, принадлежащая Дирихле [1]).

Пример 1. Доказать, что

$$\psi(z) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{-\lg t} - \frac{t^{z-1}}{1-t} \right\} dt,$$

если вещественная часть z положительна.

(Gauss)

Пример 2. Показать, что

$$\gamma = \int_0^\infty \{(1+t)^{-1} - e^{-t}\} t^{-1} dt.$$

(Dirichlet)

12.31. Первое интегральное представление Бине для $\lg \Gamma(z)$

Бине [2]) дал два выражения для $\lg \Gamma(z)$, которые имеют большое значение потому, что они показывают, как ведет себя $\lg \Gamma(z)$ при $|z| \to \infty$.

Для того чтобы получить первое из этих выражений, отметим, что если вещественная часть z положительна, то

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{e^t - 1} \right\} dt,$$

что легко проверить, заменяя z на $z+1$ в формуле § 12.3.

Далее, согласно примеру 6 § 6.222 части I,

$$\lg z = \int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{t} dt,$$

и поскольку

$$\frac{1}{2z} = \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-tz} dt,$$

имеем

$$\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z+1) = \frac{1}{2z} + \lg z - \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t - 1} \right\} e^{-tz} dt.$$

---

[1]) Dirichlet, Werke, I, 275.

[2]) Binet, Journ. de l'école polytechnique, XVI (1839), 123—143.

Подинтегральная функция в последнем интеграле будет непрерывной при $t \to 0$; и так как $\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}$ ограничена, когда $t\to\infty$, то легко получаем, что интеграл сходится равномерно, когда вещественная часть z будет положительной. Мы можем, следовательно, интегрировать от 1 до z под знаком интеграла (§ 4.44, часть I), после чего получим [1])

$$\lg\Gamma(z+1)=\left(z+\frac{1}{2}\right)\lg z-z+1+\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right\}\frac{e^{-tz}-e^{-t}}{t}\,dt.$$

Так как, согласно § 7.2 части I, функция $\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right\}\frac{1}{t}$ непрерывна при $t\to 0$ и так как

$$\lg\Gamma(z+1)=\lg z+\lg\Gamma(z),$$

то имеем

$$\lg\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+1+\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right\}\frac{e^{-tz}}{t}\,dt-$$
$$-\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right\}\frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

Чтобы вычислить второй из этих интегралов, положим [2])

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{e^{-t}}{t}\,dt=I,\qquad \int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}=J;$$

тогда, взяв $z=\frac{1}{2}$ в последнем выражении для $\Gamma(z)$, получим

$$\frac{1}{2}\lg\pi=\frac{1}{2}+J-I.$$

Но так как $I=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{t}+\frac{1}{e^{\frac{t}{2}}-1}\right)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}\,dt$, то мы имеем

$$J-I=\int_0^\infty\left(\frac{1}{t}-\frac{e^{\frac{t}{2}}}{e^t-1}\right)\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}\,dt=\int_0^\infty\left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}-\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{dt}{t},$$

[1]) $\lg\Gamma(z+1)$ означает сумму главных значений логарифмов множителей произведения Вейерштрасса.

[2]) Этот прием принадлежит Прингсгейму (Pringsheim, Math. Ann., XXXI (1888), 473).

откуда

$$J=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t}-\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{e^{-t}}{t}+\frac{e^{-t}}{e^t-1}\right\}\frac{dt}{t}=$$

$$=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}}{t}-\frac{1}{2}e^{-t}\right\}\frac{dt}{t}=$$

$$=\int_0^\infty\left\{-\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}}{t}\right)-\frac{\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}}{t}-\frac{e^{-t}}{2t}\right\}dt=$$

$$=\left[-\frac{e^{-\frac{t}{2}}-e^{-t}}{t}\right]_0^\infty+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-\frac{t}{2}}}{t}\,dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lg\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$I=1-\frac{1}{2}\lg 2\pi.$$

Поэтому, когда вещественная часть z положительна, мы имеем следующую формулу Бине:

$$\lg\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{1}{2}\lg 2\pi+\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{e^{-tz}}{t}\,dt.$$

Полагая $z=x+iy$, видим, что если обозначить верхнюю грань выражения $\left|\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{e^t-1}\right)\frac{1}{t}\right|$ для вещественных значений t через K, то

$$\left|\lg\Gamma(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z+z-\frac{1}{2}\lg 2\pi\right|<K\int_0^\infty e^{-tx}\,dt=Kx^{-1},$$

так что при больших x выражение $\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{1}{2}\lg 2\pi$ дает приближенное значение для $\lg\Gamma(z)$.

Пример 1. Доказать, что при $\operatorname{Re} z>0$

$$\lg\Gamma(z)=\int_0^\infty\left\{\frac{e^{-zt}-e^{-t}}{1-e^{-t}}+(z-1)e^{-t}\right\}\frac{dt}{t}.$$

(Malmstén)

Пример 2. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\lg\Gamma(z)=\int_0^\infty\left\{(z-1)e^{-t}+\frac{(1+t)^{-z}-(1+t)^{-1}}{\lg(1+t)}\right\}\frac{dt}{t}.$$

(Féaux)

Пример 3. С помощью формулы § 12.14 показать, что при $0<x<1$

$$2\lg\Gamma(x)-\lg\pi+\lg\sin\pi x=\int_0^\infty\left\{\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}-x\right)t}{\operatorname{sh}\frac{1}{2}t}-(1-2x)e^{-t}\right\}\frac{dt}{t}.$$

(Kummer)

Пример 4. Разлагая $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}-x\right)t$ и $1-2x$ в ряды Фурье по синусам, показать, исходя из примера 3, что при $0<x<1$

$$\lg\Gamma(x)=\frac{1}{2}\lg\pi-\frac{1}{2}\lg\sin\pi x+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin 2n\pi x,$$

где

$$a_n=\int_0^\infty\left\{\frac{2n\pi}{t^2+4n^2\pi^2}-\frac{e^{-t}}{2n\pi}\right\}\frac{dt}{t}.$$

Далее показать, исходя из примера 2 § 12.3, что

$$a_n=\frac{1}{2n\pi}(\gamma+\lg 2\pi+\lg n).$$

(Kummer, Journ. für Math., XXXV (1847), 1)

12.32. Второе интегральное представление Бине для $\lg\Gamma(z)$

Применим формулу Плана, приведенную в примере 7 главы 7 части I, к суммированию ряда (§ 12.16)

$$\frac{d^2}{dz^2}\lg\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

Условия, установленные там как достаточные для выражения ряда через интегралы, очевидно, удовлетворяются функцией $\varphi(\zeta)=\frac{1}{(z+\zeta)^2}$, если вещественная часть z положительна; поэтому имеем

$$\frac{d^2}{dz^2}\lg\Gamma(z)=\frac{1}{2z^2}+\int_0^\infty\frac{d\xi}{(z+\xi)^2}-2\int_0^\infty\frac{q(t,z)}{e^{2\pi t}-1}dt+$$

$$+2\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty\frac{q(t,z+n)}{e^{2\pi t}-1}dt,$$

где

$$2iq(t,\ z)=\frac{1}{(z+it)^2}-\frac{1}{(z-it)^2}.$$

Так как $|q(t,\ z+n)|$, как легко видеть, будет меньше $K_1\frac{t}{n}$, где K_1 не зависит от t и n, то предел последнего интеграла равен нулю.

Отсюда

$$\frac{d^2}{dz^2}\lg\Gamma(z)=\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{z}+\int\limits_0^\infty\frac{4tz}{(z^2+t^2)^2}\,\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Так как $\left|\frac{2z}{z^2+t^2}\right|$ не превосходит K (где K зависит только от δ), когда вещественная часть z превосходит δ, то интеграл сходится равномерно, и мы можем его проинтегрировать (§ 4.44, часть I) в пределах от 1 до z.

Получим

$$\frac{d}{dz}\lg\Gamma(z)=-\frac{1}{2z}+\lg z+C-2\int\limits_0^\infty\frac{t\,dt}{(z^2+t^2)(e^{2\pi t}-1)},$$

где C — постоянная. Интегрируя это выражение еще раз, получим

$$\lg\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z+(C-1)z+C'+2\int\limits_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{e^{2\pi t}-1}\,dt,$$

где C' — новая постоянная.

Если z вещественно, то $0<\operatorname{arctg}\frac{t}{z}\leqslant\frac{t}{z}$, а потому

$$\left|\lg\Gamma(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-(C-1)z-C'\right|<\frac{2}{z}\int\limits_0^\infty\frac{t}{e^{2\pi t}-1}\,dt.$$

Но в § 12.31 было показано, что

$$\left|\lg\Gamma(z)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z+z-\frac{1}{2}\lg 2\pi\right|\to 0,$$

когда $z\to\infty$ по вещественной оси. Сравнивая эти результаты, видим, что

$$C=0,\quad C'=\frac{1}{2}\lg 2\pi.$$

Следовательно, для всех значений z, вещественная часть которых положительна, имеем

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{e^{2\pi t} - 1}\, dt,$$

где $\operatorname{arctg} u$ определяется интегралом

$$\operatorname{arctg} u = \int_0^u \frac{dt}{1+t^2},$$

в котором путь интегрирования есть прямая линия.

Это и есть второе выражение Бинé для $\lg \Gamma(z)$.

Пример. Проверить законность дифференцирования по z под знаком интеграла и получить этим путем равенство

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lg z - \frac{1}{2z} - 2 \int_0^\infty \frac{t\, dt}{(t^2+z^2)(e^{2\pi t} - 1)}.$$

12.33. Асимптотическое разложение логарифма гамма-функции (ряд Стирлинга)

Теперь мы можем вывести асимптотическое разложение (§ 8.2, часть I) $\lg \Gamma(z)$ для больших значений $|z|$, применяемое при вычислении гамма-функции.

Пусть $z = x + iy$, где $x \geqslant \delta > 0$.

По второй формуле Бине будем иметь

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + \varphi(z),$$

где

$$\varphi(z) = 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(t/z)}{e^{2\pi t} - 1}\, dt.$$

Но

$$\operatorname{arctg} \frac{t}{z} = \frac{t}{z} - \frac{1}{3}\frac{t^3}{z^3} + \frac{1}{5}\frac{t^5}{z^5} - \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{t^{2n-1}}{z^{2n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^{n-1}} \int_0^t \frac{u^{2n}\, du}{u^2+z^2}.$$

Подставляя это разложение в интеграл и вспоминая (§ 7.2, часть I), что

$$\int_0^\infty \frac{t^{2n-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1}=\frac{B_n}{4n},$$

где B_1, B_2, ... — числа Бернулли, получим

$$\varphi(z)=\sum_{r=1}^{n}\frac{(-1)^{r-1}B_r}{2r(2r-1)z^{2r-1}}+\frac{2(-1)^n}{z^{2n-1}}\int_0^\infty\left\{\int_0^t\frac{u^{2n}\,du}{u^2+z^2}\right\}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Пусть K_z — верхняя граница[1]) выражения $\left|\frac{z^2}{u^2+z^2}\right|$ для положительных значений u.

Тогда

$$\left|\int_0^\infty\left\{\int_0^t\frac{u^{2n}\,du}{u^2+z^2}\right\}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\right|\leqslant K_z|z|^{-2}\int_0^\infty\left\{\int_0^t u^{2n}\,du\right\}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{K_zB_{n+1}}{4(n+1)(2n+1)|z|^2}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{2(-1)^n}{z^{2n-1}}\int_0^\infty\left\{\int_0^t\frac{u^{2n}\,du}{u^2+z^2}\right\}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\right|<\frac{K_zB_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)|z|^{2n+1}}.$$

Очевидно, что это выражение стремится к нулю равномерно при $|z|\to\infty$, если $|\arg z|\leqslant\frac{1}{2}\pi-\Delta$, где $\frac{1}{4}\pi>\Delta>0$, так как тогда $K_z\leqslant\operatorname{cosec}2\Delta$. Ясно также, что если $|\arg z|\leqslant\frac{1}{4}\pi$ (так что $K_z=1$), то, взяв сумму n первых членов ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}B_r}{2r(2r-1)}\,\frac{1}{z^{2r-1}}$$

---

[1]) K_z^{-2} является нижней границей выражения $\frac{\{u^2+(x^2-y^2)\}^2+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ и, следовательно, равно $\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ или 1 в зависимости от того, будет ли $x^2<y^2$ или $x^2\geqslant y^2$.

как приближение к $\varphi(z)$, получим погрешность, численно меньшую $(n+1)$-го члена. Но так как при $|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\pi - \Delta$ имеем

$$z^{2n-1}\left|\left\{\varphi(z) - \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1)}\right\}\right| < \operatorname{cosec}^2 2\Delta \frac{B_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)} |z|^{-2} \to 0,$$

когда $z \to \infty$, то ясно, что ряд

$$\frac{B_1}{1 \cdot 2 \cdot z} - \frac{B_2}{3 \cdot 4 \cdot z^3} + \frac{B_3}{5 \cdot 6 \cdot z^5} - \ldots$$

представляет собою асимптотическое разложение[1]) (§ 8.2, часть I) функции $\varphi(z)$.

Таким образом, мы видим, что ряд

$$\left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} B_r}{2r(2r-1) z^{2r-1}}$$

будет асимптотическим разложением $\lg \Gamma(z)$, когда $|\arg z| \leqslant \frac{1}{2}\pi - \Delta$.

Это выражение обычно называют *рядом Стирлинга.*

В § 13.6 оно будет распространено на более широкую область $|\arg z| \leqslant \pi - \Delta$.

В частном случае при z положительном $(= x)$ имеем

$$0 < 2 \int_0^\infty \left\{ \int_0^t \frac{u^{2n}\, du}{u^2 + x^2} \right\} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1} < \frac{B_{n+1}}{2(n+1)(2n+1)x^2},$$

т. е. *при* $x > 0$ *значение функции* $\varphi(x)$ *всегда лежит между суммой* n *и суммой* $n+1$ *членов ряда при всех значениях* n.

В частности, $0 < \varphi(x) < \frac{B_1}{1 \cdot 2x}$, так что $\varphi(x) = \frac{\theta}{12x}$, где $0 < \theta < 1$.

Следовательно,

$$\Gamma(x) = x^{x - \frac{1}{2}} e^{-x} (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{12x}}.$$

---

[1]) Разложение действительно является асимптотическим, ибо если бы оно сходилось при $|z| \geqslant \rho$, то по § 2.6 части I мы нашли бы такое K, что $B_n < (2n-1)\, 2nK\rho^{2n}$, а тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} B_n t^{2n}}{(2n)!}$ был бы целой функцией, что противоречит § 7.2 части I.

Потенцированием ряда Стирлинга получаем

$$\Gamma(x)=e^{-x}x^{x-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{139}{51\,840x^3}-\frac{571}{2\,488\,320x^4}+O\left(\frac{1}{x^5}\right)\right\},$$

что и дает *асимптотическое выражение для гамма-функции.* В сочетании с формулой

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

оно весьма полезно при нахождении численного значения гамма-функции для вещественных x.

Этим способом Лежандр составил таблицы функции $\lg_{10}\Gamma(x)$ с 12 десятичными знаками для значений x от 1 до 2; они напечатаны в его «Exercices de Calcul Intégral», II, (1817), 85 и в его «Traité des fonctions elliptiques» (1826), 489.

Заметим, что $\Gamma(x)$ имеет один минимум для положительных значений x, а именно при $x=1{,}4616321\ldots$; значение же $\lg\Gamma(x)$ тогда будет равно $\bar{1}{,}9472391\ldots$

Пример. Получить разложение

$$\lg\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{1}{2}\lg 2\pi+J(z),$$

сходящееся при $\operatorname{Re} z>0$, где

$$J(z)=\frac{1}{2}\left\{\frac{c_1}{z+1}+\frac{c_2}{2(z+1)(z+2)}+\frac{c_3}{3(z+1)(z+2)(z+3)}+\ldots\right\},$$

причем

$$c_1=\frac{1}{6},\quad c_2=\frac{1}{3},\quad c_3=\frac{59}{60},\quad c_4=\frac{227}{60}$$

и вообще

$$c_n=\int_0^1(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)(2x-1)\,x\,dx.$$

(Binet)

12.4. Интеграл Эйлера первого рода

Название *интеграл Эйлера первого рода* было дано Лежандром интегралу

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

изученному впервые Эйлером и Лежандром[1]). В этом интеграле вещественные части p и q предполагаются положительными, а под x^{p-1}, $(1-x)^{q-1}$ понимаются те значения величин $e^{(p-1)\lg x}$ и $e^{(q-1)\lg(1-x)}$, которые соответствуют вещественным значениям логарифмов. При этих условиях легко видеть, что интеграл $\mathrm{B}(p, q)$ (возможно, несобственный) имеет смысл (§ 4.5, часть I, пример 2).

Заменяя x на $1-x$, получим

$$\mathrm{B}(p, q)=\mathrm{B}(q, p).$$

Далее, интегрируя по частям, находим

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx=\left[\frac{x^p(1-x)^q}{p}\right]_0^1+\frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx,$$

так что

$$\mathrm{B}(p, q+1)=\frac{q}{p}\mathrm{B}(p+1, q).$$

Пример 1. Показать, что

$$\mathrm{B}(p, q)=\mathrm{B}(p+1, q)+\mathrm{B}(p, q+1).$$

Пример 2. Исходя из примера 1, доказать, что

$$\mathrm{B}(p, q+1)=\frac{q}{p+q}\mathrm{B}(p, q).$$

Пример 3. Доказать, что при целом положительном n

$$\mathrm{B}(p, n+1)=\frac{1\cdot 2\ldots n}{p(p+1)\ldots(p+n)}.$$

Пример 4. Доказать, что

$$\mathrm{B}(x, y)=\int_0^\infty \frac{a^{x-1}}{(1+a)^{x+y}}\,da.$$

Пример 5. Доказать, что

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty} n^z\mathrm{B}(z, n).$$

---

[1]) Euler, Nov. Comm. Petrop., XVI (1772); Legendre, Exercices, I, 221.

12.41. Выражение интеграла Эйлера первого рода через гамма-функцию

Докажем теперь важную теорему, выражаемую равенством

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Пусть сначала вещественные части m и n больше $\frac{1}{2}$. Тогда

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{m-1}\,dx \times \int_0^\infty e^{-y} y^{n-1}\,dy.$$

Заменяя x на x^2 и y на y^2, получим

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4 \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-x^2} x^{2m-1}\,dx \int_0^R e^{-y^2} y^{2n-1}\,dy =$$

$$= 4 \lim_{R\to\infty} \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} x^{2m-1} y^{2n-1}\,dx\,dy.$$

Но для рассматриваемых значений m и n подинтегральная функция непрерывна во всей области интегрирования, а потому интеграл можно рассматривать как двойной интеграл, взятый по квадрату S_R. Обозначая через $f(x, y)$ подинтегральную функцию, через Q_R — четверть круга с центром в начале координат и с радиусом R и через T_R — часть S_R вне Q_R, получим

$$\left| \int\int_{S_R} f(x, y)\,dx\,dy - \int\int_{Q_R} f(x, y)\,dx\,dy \right| =$$

$$= \left| \int\int_{T_R} f(x, y)\,dx\,dy \right| \leqslant \int\int_{T_R} |f(x, y)|\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\int_{S_R} |f(x, y)|\,dx\,dy - \int\int_{S_{\frac{1}{2}R}} |f(x, y)|\,dx\,dy \to 0, \text{ когда } R\to\infty,$$

так как $\int\int_{S_R} |f(x, y)|\,dx\,dy$ стремится к следующему пределу:

$$2\int_0^\infty e^{-x^2} |x^{2m-1}|\,dx \times 2\int_0^\infty e^{-y} |y^{2n-1}|\,dy.$$

Поэтому

$$\lim_{R\to\infty} \int\int_{S_R} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{R\to\infty} \int\int_{Q_R} f(x, y)\,dx\,dy.$$

Переходя к полярным координатам[1]) ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$), имеем

$$\iint\limits_{Q_R} f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}(r\cos\theta)^{2m-1}(r\sin\theta)^{2n-1}\,r\,dr\,d\theta.$$

Следовательно,

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int\limits_0^\infty e^{-r^2}r^{2(m+n)-1}\,dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\theta\,\sin^{2n-1}\theta\,d\theta =$$

$$= 2\Gamma(m+n)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m-1}\theta\,\sin^{2n-1}\theta\,d\theta.$$

Положив $\cos^2\theta = u$, окончательно получаем

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n)\,\mathrm{B}(m, n).$$

Мы доказали справедливость этой формулы только для случая, когда вещественные части m и n больше $\frac{1}{2}$, но, пользуясь результатом примера 2 § 12.4, ее легко доказать и для случая, когда они меньше $\frac{1}{2}$.

Этот результат, найденный Эйлером, устанавливает связь между интегралом Эйлера первого рода и гамма-функцией.

Пример 1. Показать, что

$$\int\limits_{-1}^{1} (1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = 2^{p+q-1}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Пример 2. Показать, что для функции

$$f(x, y) = \frac{1}{x} - y\frac{1}{x+1} + \frac{y(y-1)}{2!}\frac{1}{x+2} - \frac{y(y-1)(y-2)}{3!}\frac{1}{x+3} + \ldots$$

имеет место соотношение

$$f(x, y) = f(y+1, x-1),$$

если значения x и y такие, что оба ряда сходятся.

(Jesus, 1901)

[1]) Способом § 4.11 части I легко показать, что площади $A_{m,\mu}$ § 4.3 не обязательно должны быть прямоугольными; требуется лишь, чтобы их наибольший поперечник мог быть сделан произвольно малым, когда число площадей будет взято достаточно большим, так что за эти площади могут быть приняты и области, ограниченные радиусами-векторами и дугами окружностей.

Пример 3. Доказать, что

$$\int_0^1 \int_0^1 f(xy)(1-x)^{\mu-1} y^{\mu} (1-y)^{\nu-1}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \int_0^1 f(z)(1-z)^{\mu+\nu-1}\, dz.$$

(Math. Trip., 1894)

12.42. Выражение интегралов от тригонометрических функций через гамма-функции

Мы можем вычислить теперь интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x \sin^{n-1} x\, dx$, где m и n не обязательно целые, но имеют положительные вещественные части.

Положив $\cos^2 x = t$, имеем, как в § 12.41,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x \sin^{n-1} x\, dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.$$

Отсюда легко могут быть выведены обычные элементарные формулы для случаев, когда m и n — целые числа.

Пример. Доказать, что при $|k| < 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m \theta \sin^n \theta\, d\theta}{(1-k\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}\right)\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{m+n}\theta\, d\theta}{(1-k\sin^2\theta)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

(Trinity, 1898)

12.43. Обобщение интеграла Эйлера первого рода (Похгаммер)

В § 12.22 мы видели, что интеграл Эйлера второго рода для $\Gamma(z)$ можно заменить интегралом по контуру, сходящимся для всех значений z. Для интегралов первого рода аналогичный результат был получен Похгаммером. Пусть P — какая-нибудь точка на вещественной оси между 0 и 1; рассмотрим интеграл [1])

$$e^{-\pi i(\alpha+\beta)} \int\limits_P^{(1+,0+,1-,0-)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt = \varepsilon(\alpha, \beta).$$

Применяемое здесь обозначение введено в конце § 12.22, оно означает, что путь интегрирования начинается в точке P, обходит точку 1 в положительном направлении (против часовой стрелки), возвращается к P, затем обходит начало координат в положительном направлении и возвращается опять в P и т. д.

В исходной точке аргументы обеих величин t и $1-t$ равны нулю. После обхода $(1+)$ они будут 0 и 2π; после обхода $(0+)$ эти аргументы станут 2π и 2π; после обхода $(1-)$ значения их будут 2π и 0, и, наконец, после обхода $(0-)$ оба аргумента будут равны нулю, так что конечное значение подинтегральной функции будет такое же, как и начальное.

Легко видеть, что, поскольку путь интегрирования можно деформировать любым образом, лишь бы только он не переходил через точки ветвления 0, 1 подинтегральной функции, этот путь можно

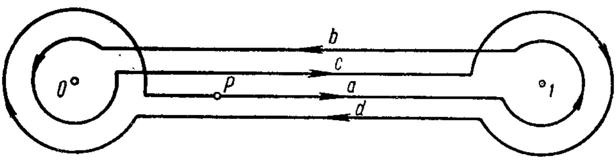

Рис. 2.

взять, как показано на рисунке, где четыре параллельные прямые подразумеваются совпадающими с вещественной осью.

Если вещественные части α *и* β *положительны*, то интегралы по окружностям стремятся к нулю, когда радиусы окружностей стремятся к нулю [2]). На путях же a, b, c, d подинтегральная функция равна соответственно

$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}, \quad t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}e^{2\pi i(\beta-1)},$$
$$t^{\alpha-1}e^{2\pi i(\alpha-1)}(1-t)^{\beta-1}e^{2\pi i(\beta-1)}, \quad t^{\alpha-1}e^{2\pi i(\alpha-1)}(1-t)^{\beta-1},$$

где *аргументы величин* t *и* $1-t$ *теперь равны нулю на всех путях.*

[1]) Pochhammer, Math. Ann., XXXV (1890), 495. Применение интегралов по двойным петлям принадлежит, по-видимому, Жордану (Jordan, Cours d'Analyse, III (1887)).

[2]) Доказательство этого не затруднит читателя.

Отсюда следует, что $\varepsilon(\alpha, \beta)$ можно представить как сумму четырех (возможно, несобственных) интегралов, именно:

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = e^{-\pi i(\alpha+\beta)} \left[\int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt + \right.$$

$$+ \int_1^0 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} e^{2\pi i\beta} dt + \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} e^{2\pi i(\alpha+\beta)} dt +$$

$$\left. + \int_1^0 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} e^{2\pi i\alpha} dt \right]$$

или

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = e^{-\pi i(\alpha+\beta)} \left(1 - e^{2\pi i\alpha}\right)\left(1 - e^{2\pi i\beta}\right) \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt =$$

$$= -4 \sin(\alpha\pi) \sin(\beta\pi) \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{-4\pi^2}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Но $\varepsilon(\alpha, \beta)$ и это последнее выражение являются аналитическими функциями от α и β для *всех* значений α и β. Поэтому, по теории аналитического продолжения, это равенство, доказанное для случая, когда вещественные части α и β положительны, сохраняет силу для всех значений α и β. *Итак, мы доказали, что для всех значений α и β*

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = \frac{-4\pi^2}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

12.5. Интеграл Дирихле[1])

Покажем теперь, как кратный интеграл

$$I = \int\int \ldots \int f(t_1 + t_2 + \ldots + t_n) t_1^{\alpha_1-1} t_2^{\alpha_2-1} \ldots t_n^{\alpha_n-1} dt_1 dt_2 \ldots dt_n$$

может быть преобразован в простой, если предположить, что f — непрерывная функция, $\alpha_r > 0$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ и что интегрирование распространяется на все положительные значения переменных такие, что $t_1 + t_2 + \ldots + t_n \leqslant 1$.

Чтобы упростить выражение

$$\int_0^{1-\lambda} \int_0^{1-\lambda-T} f(t + T + \lambda) t^{\alpha-1} T^{\beta-1} dt\, dT$$

[1]) Dirichlet, Werke, I, 375, 391.

(где мы написали t, T, α, β вместо t_1, t_2, α_1, α_2 и λ вместо $t_3+t_4+\ldots+t_n$), положим $t=\frac{T(1-v)}{v}$. Тогда получим (при $\lambda\neq 0$)

$$\int_0^{1-\lambda}\int_{\frac{T}{1-\lambda}}^{1} f\left(\lambda+\frac{T}{v}\right)(1-v)^{\alpha-1}v^{-\alpha-1}T^{\alpha+\beta-1}\,dv\,dT$$

или, изменив порядок интегрирования (§ 4.51, часть I),

$$\int_0^1\int_0^{(1-\lambda)v} f\left(\lambda+\frac{T}{v}\right)(1-v)^{\alpha-1}v^{-\alpha-1}T^{\alpha+\beta-1}\,dT\,dv.$$

Положив $T=v\tau_2$, получим

$$\int_0^1\int_0^{1-\lambda} f(\lambda+\tau_2)(1-v)^{\alpha-1}v^{\beta-1}\tau_2^{\alpha+\beta-1}\,d\tau_2\,dv=$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^{1-\lambda} f(\lambda+\tau_2)\,\tau_2^{\alpha+\beta-1}\,d\tau_2.$$

Отсюда

$$I=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\int\int\ldots\int f(\tau_2+t_3+\ldots+t_n)\,\tau_2^{\alpha_1+\alpha_2-1}t_3^{\alpha_3-1}\ldots$$
$$\ldots t_n^{\alpha_n-1}\,d\tau_2\,dt_3\ldots dt_n,$$

причем интегрирование распространяется на все такие положительные значения переменных, что $\tau_2+t_3+\ldots+t_n\leqslant 1$.

Редуцируя таким же образом дальше, найдем:

$$I=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\ldots\Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)}\int_0^1 f(\tau)\,\tau^{\Sigma\alpha-1}\,d\tau,$$

что и представляет собой результат, полученный Дирихле.

Пример 1. Привести интеграл

$$\int\int\int f\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma}\right\}x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\,dx\,dy\,dz$$

к простому интегралу; область интегрирования распространяется на все такие положительные значения переменных, что

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\beta}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma}\leqslant 1,$$

причем предполагается, что a, b, c, α, β, γ, p, q, r положительны.

(Dirichlet)

Пример 2. Вычислить $\iint x^p y^q \, dx \, dy$, где область интегрирования определяется неравенствами: $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^m + y^n \leqslant 1$, m и n положительны.

(Pembroke, 1907)

Пример 3. Показать, что момент инерции однородного эллипсоида плотности 1, взятый относительно оси z, равен $\frac{4}{15}(a^2+b^2)\pi abc$, где a, b, c — полуоси.

Пример 4. Показать, что площадь астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$ равна $\frac{3}{8}\pi l^2$.

ЛИТЕРАТУРА

N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gamma-funktion[1]) (Leipzig, 1906).
O. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, II (Brunswick, 1874).
E. L. Lindelöf, Le Calcul des Résidus, Ch. IV (Paris, 1905).
A Pringsheim, Math. Ann.. XXXI (1888), 455—481.
Hj. Mellin, Math. Ann., LXVIII (1910), 305—337.
Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Гостехиздат (1953).

Примеры

1. Показать, что

$$(1-z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{z}{3}\right)\left(1+\frac{z}{4}\right)\ldots = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right)}.$$

(Trinity, 1897)

2. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x}\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}x}\,\frac{1}{1+\frac{1}{3}x}\cdots\frac{1}{1+\frac{1}{n}x}\,n^x = \Gamma(x+1).$$

(Trinity, 1885)

3. Показать, что

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\lg 2.$$

(Jesus, 1903)

4. Показать, что

$$\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^4}{16\pi^2} = \frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2-1}{5^2}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{9^2-1}{9^2}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdots$$

(Trinity, 1891)

[1]) Этот труд содержит полную библиографию.

5. Показать, что

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{(n-\alpha)(n+\beta+\gamma)}{(n+\beta)(n+\gamma)}\left(1+\frac{\alpha}{n+1}\right)\right\}=-\frac{1}{\pi}\sin(\alpha\pi)\,\mathrm{B}(\beta,\gamma).$$

(Trinity, 1905)

6. Показать, что

$$\prod_{r=1}^{8}\Gamma\left(\frac{r}{3}\right)=\frac{640}{3^6}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

(Peterhouse, 1906)

7. Показать, что при $z=i\zeta$, где ζ вещественно,

$$|\Gamma(z)|=\sqrt{\frac{\pi}{\zeta\operatorname{sh}\pi\zeta}}.$$

(Trinity, 1904)

8. Показать, что при x положительном [1])

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n!}{2^{2n}\cdot n!\,n!}\,\frac{1}{x+n}.$$

(Math. Trip., 1897)

9. Показать, что при a положительном

$$\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(a+1)}{\Gamma(z+a)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a\cdot(a-1)(a-2)\ldots(a-n)}{n!}\,\frac{1}{z+n}.$$

10. Показать, что при $x>0$ для $P(x)=\int\limits_0^1 e^{-t}t^{x-1}\,dt$ имеют место соотношения

$$P(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1!}\,\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2!}\,\frac{1}{x+2}-\frac{1}{3!}\,\frac{1}{x+3}+\ldots$$

и

$$P(x+1)=xP(x)-e^{-1}.$$

11. Показать, что при $\lambda>0$, $x>0$, $-\frac{1}{2}\pi<\alpha<\frac{1}{2}\pi$

$$\int\limits_0^{\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\cos(\lambda t\sin\alpha)\,dt=\lambda^{-x}\Gamma(x)\cos\alpha x,$$

$$\int\limits_0^{\infty} t^{x-1}e^{-\lambda t\cos\alpha}\sin(\lambda t\sin\alpha)\,dt=\lambda^{-x}\Gamma(x)\sin\alpha x.$$

(Euler)

[1]) Этот и некоторые другие примеры легче всего решить, пользуясь результатом § 14.11.

12. Доказать, что при $b>0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x^z}\,dx = \frac{1}{2}\pi b^{z-1}\frac{\operatorname{cosec}\left(\frac{1}{2}\pi z\right)}{\Gamma(z)} \quad \text{при} \quad 0<z<2,$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{x^z}\,dx = \frac{1}{2}\pi b^{z-1}\frac{\sec\left(\frac{1}{2}\pi z\right)}{\Gamma(z)} \quad \text{при} \quad 0<z<1.$$

(Euler)

13. Доказать, что при $0<n<1$

$$\int_0^\infty (1+x)^{n-1}\cos x\,dx = \Gamma(n)\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}-1\right)-\frac{1}{\Gamma(n+1)}+\frac{1}{\Gamma(n+3)}+\ldots\right\}.$$

(Peterhouse, 1895)

14. Взяв за контур интегрирования параболу с вершиной в начале координат, вывести из формулы

$$\Gamma(\alpha) = -\frac{1}{2i\sin\alpha\pi}\int_\infty^{(0+)} (-z)^{\alpha-1}e^{-z}\,dz$$

формулу

$$\Gamma(\alpha) = \frac{1}{2\sin\alpha\pi}\int_0^\infty e^{-x^2}x^{\alpha-1}(1+x^2)^{\frac{1}{2}\alpha}\,[3\sin\{x+\alpha\operatorname{arcctg}(-x)\}+$$
$$+\sin\{x+(\alpha-2)\operatorname{arcctg}(-x)\}]\,dx,$$

где arcctg обозначает тупой угол.

(Bourguet, Acta Math., I, 367)

15. Показать, что если вещественные части a_n положительны и ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n^2}$ сходится, то бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^\infty\left[\frac{\Gamma(a_n)}{\Gamma(z+a_n)}\exp\left\{\sum_{s=1}^m \frac{z^s}{s!}\psi^{(s)}(a_n)\right\}\right],$$

где

$$\psi^{(s)}(z) = \frac{d^s}{dz^s}\lg\Gamma(z),$$

будет сходящимся при $m>2$.

(Math. Trip., 1907)

16. Доказать, что

$$\frac{d \lg \Gamma(z)}{dz} = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} - e^{-z\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \, d\alpha - \gamma =$$

$$= \int_0^\infty \left\{ (1 + \alpha^{-1}) - (1 + \alpha)^{-z} \right\} \frac{d\alpha}{\alpha} - \gamma = \int_0^1 \frac{x^{z-1} - 1}{x - 1} \, dx - \gamma.$$

(Legendre)

17. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\lg \Gamma(z) = \int_0^1 \left\{ \frac{x^z - x}{x - 1} - x(z - 1) \right\} \frac{dx}{x \lg x}.$$

(Binet)

18. Доказать, что

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi +$$

$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2 \cdot 3} \sum_{r=1}^\infty \frac{1}{(z + r)^2} + \frac{2}{3 \cdot 4} \sum_{r=1}^\infty \frac{1}{(z + r)^3} + \frac{3}{4 \cdot 5} \sum_{r=1}^\infty \frac{1}{(z + r)^4} + \ldots \right\}$$

для всех значений z, кроме отрицательных вещественных значений.

19. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\frac{d}{dz} \lg \Gamma(z) = \lg z - \int_0^1 \frac{x^{z-1} \{ 1 - x + \lg x \}}{(1 - x) \lg x} \, dx.$$

20. Доказать, что при $\operatorname{Re} z > 0$

$$\frac{d^2}{dz^2} \lg \Gamma(z) = \int_0^\infty \frac{x e^{-xz} \, dx}{1 - e^{-x}}.$$

21. Положив $\int_z^{z+1} \lg \Gamma(t) \, dt = u$, показать, что

$$\frac{du}{dz} = \lg z,$$

и, пользуясь § 12.33, доказать, что для всех, кроме отрицательных вещественных, значений z

$$u = z \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi.$$

(Raabe, Journ. für. Math., XXV)

22. Доказать, что

$$\lg \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \lg z - z + \frac{1}{2} \lg 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x+z} \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}$$

для всех значений z, кроме отрицательных вещественных

(Bourguet [1]))

23. Доказать, что

$$\mathrm{B}(p, p)\, \mathrm{B}\left(p + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{4p-1} p}.$$

(Binet)

24. Доказать, что при $-t < r < t$

$$\mathrm{B}(t + r, t - r) = \frac{1}{4^{t-1}} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2ru)\, du}{\operatorname{ch}^{2t} u}.$$

25. Доказать, что при $q > 1$

$$\mathrm{B}(p, q) + \mathrm{B}(p+1, q) + \mathrm{B}(p+2, q) + \ldots = \mathrm{B}(p, q-1).$$

26. Доказать, что при $p - a > 0$

$$\frac{\mathrm{B}(p-a, q)}{\mathrm{B}(p, q)} = 1 + \frac{aq}{p+q} + \frac{a(a+1)\, q(q+1)}{1 \cdot 2 \cdot (p+q)(p+q+1)} + \ldots$$

27. Доказать, что

$$\mathrm{B}(p, q)\, \mathrm{B}(p+q, r) = \mathrm{B}(q, r)\, \mathrm{B}(q+r, p).$$

(Euler)

28. Показать, что при $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} \frac{dx}{(x+p)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a)\, \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \frac{1}{(1+p)^a p^b}.$$

(Trinity, 1908)

29. Показать, что при $m > 0$, $n > 0$

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{2m-1} (1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}}\, dx = 2^{m+n-2} \frac{\Gamma(m)\, \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

и, считая α вещественным и не кратным $\frac{\pi}{2}$, вывести формулу

$$\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \left(\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}\right)^{\cos 2\alpha} d\theta = \frac{\pi}{2 \sin(\pi \cos^2 \alpha)}.$$

(St. John's, 1904)

---

[1]) Стилтьес приписывает этот результат Бурге (Bourguet, Journ. de Math. (4), V, 432).

30. Показать, что при $\alpha > 0$, $\beta > 0$

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t}\,dt = \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$$

и

$$\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}-t^{\beta-1}}{(1+t)\lg t}\,dt = \lg \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\beta\right)}.$$

(Kummer)

31. Показать, что при $a > 0$, $a+b > 0$

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x^b)}{1-x}\,dx = \lim_{\delta\to 0}\left\{\frac{\Gamma(a)\Gamma(\delta)}{\Gamma(a+\delta)} - \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(\delta)}{\Gamma(a+b+\delta)}\right\} = \psi(a+b) - \psi(a).$$

Доказать, что при дополнительном условии $a+c>0$, $a+b+c>0$ имеем

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x)(-\lg x)}\,dx = \lg\frac{\Gamma(a)\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a+b)\Gamma(a+c)}.$$

32. Показать, что

$$\int_0^1 \frac{(1-x^a)(1-x^b)(1-x^c)}{(1-x)(-\lg x)}\,dx = \lg\frac{\Gamma(b+c+1)\Gamma(c+a+1)\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\Gamma(c+1)\Gamma(a+b+c+1)},$$

если a, b, c таковы, что интеграл сходится.

33. Подстановкой $\cos\theta = 1 - 2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ показать, что

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(3-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^2}{4\sqrt{\pi}}.$$

(St. John's, 1896)

34. Выразить через гамма-функции интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x}\,dx$, где p — дробь, большая единицы, числитель и знаменатель которой — нечетные целые числа.

[Показать, что интеграл равен

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^p x\left\{\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\left(\frac{1}{x+n\pi}+\frac{1}{x-n\pi}\right)\right\}dx.\Big]$$

(Clare, 1898)

35. Показать, что

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(1-\frac{1}{2}\sin^2 x\right)^{n-\frac{1}{2}} dx = \frac{n!}{2^{n+2}\pi^{\frac{1}{2}}} \sum_{r=0}^{n} \frac{2^{3r}}{2r!\,(n-r)!} \left\{\Gamma\left(\frac{2r+1}{4}\right)\right\}^2.$$

36. Доказать, что

$$\lg \mathrm{B}(p, q) = \lg\left(\frac{p+q}{pq}\right) + \int_0^1 \frac{(1-v^p)(1-v^q)}{(1-v)\lg v}\, dv.$$

(Euler)

37. Доказать, что при $p>0$, $p+s>0$

$$\mathrm{B}(p, p+s) = \frac{\mathrm{B}(p, p)}{2^s}\left\{1+\frac{s(s-1)}{2(2p+1)}+\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{2\cdot 4(2p+1)(2p+3)}+\ldots\right\}.$$

(Binet)

38. Кривая $r^m = 2^{m-1}a^m \cos m\theta$ состоит из m равных петель. Показать, что длина дуги половины петли равна

$$m^{-1}a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(\frac{1}{2}\cos x\right)^{\frac{1}{m}-1} dx,$$

и вывести отсюда, что длина всей кривой равна

$$\frac{a\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\right\}^2}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}.$$

39. Проведем прямую, соединяющую точки $\pm i$, и полуокружность $|z|=1$, лежащую справа от этой прямой. Пусть C — контур, образованный из этой фигуры вырезанием ее в точках $-i$, 0, i. Рассматривая интеграл $\int\limits_C z^{p-q-1}(z+z^{-1})^{p+q-2}\,dz$, показать, что при $p+q>1$, $q<1$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{p+q-2}\theta \cos(p-q)\theta\, d\theta = \frac{\pi}{(p+q-1)\,2^{p+q-1}\,\mathrm{B}(p, q)}.$$

Доказать, что результат остается справедливым для значений p и q, ограниченных только условием $p+q>1$.

(Cauchy)

40. Показать, что при s положительном (не обязательно целом) и $-\frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi$

$$\cos^s x = \frac{1}{2^{s-1}}\,\frac{\Gamma(s+1)}{\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)\right\}^2}\left\{\frac{1}{2}+\frac{s}{s+2}\cos 2x+\frac{s(s-2)}{(s+2)(s+4)}\cos 4x+\ldots\right\}.$$

Вычертить графики ряда и функции $\cos^s x$.

41. Получить разложение

$$\cos^s x = \frac{\alpha}{2^{s-1}}\Gamma(s+1)\left[\frac{\cos\alpha x}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\alpha+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\alpha+1\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\cos 3\alpha x}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s+\frac{3}{2}\alpha+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}s-\frac{3}{2}\alpha+1\right)}+\ldots\right]$$

и найти значения x, для которых оно пригодно.

(Cauchy)

42. Доказать, что при $p > \frac{1}{2}$

$$\Gamma(2p) = \frac{2^{2p-1}}{\sqrt{\pi}}\{\Gamma(p)\}^2\left[\frac{2p^2}{2p+1}\left\{1+\frac{1^2}{2(2p+3)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 4(2p+3)(2p+5)}+\ldots\right\}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

(Binet)

43. Показать, что при $x < 0$, $x+z > 0$

$$\frac{\Gamma(-x)}{\Gamma(z)}\left\{\frac{-x}{z}+\frac{1}{2}\frac{(-x)(1-x)}{z(1+z)}+\frac{1}{3}\frac{(-x)(1-x)(2-x)}{z(1+z)(2+z)}+\ldots\right\}=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(x+z)}\int_0^1 t^{-x-1}\{-\lg(1-t)\}(1-t)^{x+z-1}\,dt,$$

и вывести, что при $x+z > 0$

$$\frac{d}{dz}\lg\frac{\Gamma(z+x)}{\Gamma(z)}=\frac{x}{z}-\frac{1}{2}\frac{x(x-1)}{z(z+1)}+\frac{1}{3}\frac{x(x-1)(x-2)}{z(z+1)(z+2)}-\ldots$$

44. Пользуясь результатом примера 43, доказать, что

$$\lg\Gamma(z+a)=\lg\Gamma(z)+a\lg z-\frac{a-a^2}{2z}-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\int_0^1 t(1-t)(2-t)\ldots(n-t)\,dt-\int_0^a t(1-t)(2-t)\ldots(n-t)\,dt}{(n+1)z(z+1)(z+2)\ldots(z+n)},$$

и исследовать область сходимости ряда.

(Binet, Journal de l'École polytechnique, XVI, 1839, 256)

45. Доказать, что при $p > 0$, $q > 0$

$$\mathrm{B}(p, q)=\frac{p^{p-\frac{1}{2}}q^{q-\frac{1}{2}}}{(p+q)^{p+q-\frac{1}{2}}}(2\pi)^{\frac{1}{2}}e^{M(p,\,q)},$$

где

$$M(p, q) = 2\rho \int_0^\infty \frac{dt}{e^{2\pi t\rho} - 1} \operatorname{arctg}\left\{\frac{(t^3+t)\rho^3}{pq(p+q)}\right\},$$

а

$$\rho^2 = p^2 + q^2 + pq.$$

46. Пусть

$$U = \frac{2^{\frac{1}{2}x}}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{2}x\right)}, \quad V = \frac{2^{\frac{1}{2}x}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right)},$$

и пусть функция $F(x)$ определяется равенством

$$F(x) = \pi^{\frac{1}{2}}\left(V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}\right).$$

Показать, что

1) $F(x)$ удовлетворяет уравнению

$$F(x+1) = xF(x) + \frac{1}{\Gamma(1-x)};$$

2) для всех положительных целых значений x

$$F(x) = \Gamma(x);$$

3) $F(x)$ будет аналитической функцией для всех конечных значений x

4) $F(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1-x)}\dfrac{d}{dx}\lg\dfrac{\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)}$.

47. Разложить

$$\{\Gamma(a)\}^{-1}$$

в ряд по возрастающим степеням a.

[Различные способы определения коэффициентов в этом разложении даны Бурге (Bourguet), Bull. des Sci. Math., V (1881), 43; Bourguet, Acta Math., II (1880), 261; Шлёмильхом (Schlömilch), Zeitschrift für Math. und Phys., XXV (1880), 35, 351.]

48. Доказать, что функция G, определяемая равенством

$$G(z+1) = (2\pi)^{\frac{1}{2}z} e^{-\frac{1}{2}z(z+1) - \frac{1}{2}\gamma z^2} \prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n e^{-z+\frac{z^2}{2n}}\right\},$$

есть целая функция, удовлетворяющая соотношениям

$$G(z+1) = \Gamma(z)\,G(z), \quad G(1) = 1,$$

$$\frac{(n!)^n}{G(n+1)} = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n.$$

(Алексеевский)

[Наиболее важные свойства функции G рассмотрены в мемуаре Барнса (Barnes), Quarterly Journal, XXXI.]

49. Показать, что

$$\frac{G'(z+1)}{G(z+1)}=\frac{1}{2}\lg 2\pi+\frac{1}{2}-z+z\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

и вывести отсюда, что

$$\lg\frac{G(1-z)}{G(1+z)}=\int_0^z \pi z \operatorname{ctg}\pi z\,dz-z\lg 2\pi.$$

50. Показать, что

$$\int_0^z \lg\Gamma(t+1)\,dt=\frac{1}{2}z\lg 2\pi-\frac{1}{2}z(z+1)+z\lg\Gamma(z+1)-\lg G(z+1).$$

ГЛАВА 13

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА

13.1. Определение дзета-функции

Пусть $s = \sigma + it$, где σ и t вещественны [1]. Тогда при $\delta > 0$ ряд

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

будет равномерно сходящимся рядом аналитических функций (§§ 2.33, 3.34, часть I) во всякой области, в которой

$$\sigma \geqslant 1 + \delta.$$

Следовательно, в такой области ряд будет аналитической функцией от s. Эта функция называется *дзета-функцией*. Хотя она была известна еще Эйлеру [2], наиболее замечательные ее свойства были открыты только Риманом [3], который рассмотрел эту функцию в своем мемуаре о простых числах.

С этого момента она приобрела громадное значение не только в теории простых чисел, но также в высших разделах теории гамма-функции и других родственных функций.

13.11. Обобщенная дзета-функция [4]

Многие свойства, которыми обладает дзета-функция, являются частными случаями свойств, присущих более общей функции, опре-

---

[1] Буквы σ и t будут использованы в этом смысле на протяжении всей главы.

[2] Euler, Commentationes Acad. Sci. Imp. Petropolitanae, IX (1737), 160—188.

[3] Riemann, Berliner Monatsberichte (1859), 671—680; Ges. Werke (1876) 136—144.

[4] Определение этой функции, по-видимому, принадлежит Гурвицу, (Hurwitz, Zs. für Math. und Phys., XXVII (1882), 86—101).

делимой при $\sigma \geqslant 1+\delta$ равенством

$$\zeta(s, a)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s},$$

где a — постоянная. Для простоты предположим [1]), что $0 < a \leqslant 1$, и возьмем $\arg(a+n)=0$. Очевидно, что $\zeta(s, 1)=\zeta(s)$.

13.12. Представление функции $\zeta(s, a)$ в виде несобственного интеграла

Так как

$$(a+n)^{-s}\Gamma(s)=\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-(n+a)x}\,dx,$$

когда $\arg x=0$ и $\sigma>0$ (и *a fortiori*, когда $\sigma \geqslant 1+\delta$), то при $\sigma \geqslant 1+\delta$ мы будем иметь

$$\Gamma(s)\zeta(s, a)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-(n+a)x}\,dx=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\left\{\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx-\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{1-e^{-x}}e^{-(N+1+a)x}\,dx\right\}.$$

Но при $x \geqslant 0$ имеем $e^x \geqslant 1+x$, а потому модуль второго из этих интегралов не превосходит интеграла

$$\int_0^{\infty} x^{\sigma-2}e^{-(N+a)x}\,dx=(N+a)^{1-\sigma}\Gamma(\sigma-1),$$

который (при $\sigma \geqslant 1+\delta$) стремится к нулю, когда $N\to\infty$.

Отсюда при $\sigma \geqslant 1+\delta$ и $\arg x=0$ имеем

$$\zeta(s, a)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}e^{-ax}}{1-e^{-x}}\,dx.$$

Эта формула в некоторых отношениях соответствует интегралу Эйлера для гамма-функции.

---

[1]) Если a лежит в этом промежутке, то свойства функции будут, вообще говоря, более простыми, чем соответствующие свойства для других значений a. Результаты § 13.14 остаются верными для всех значений a (за исключением целых отрицательных значений). Результаты §§ 13.12, 13.13, 13.2 остаются верными только при $\operatorname{Re} a>0$.

13.13. Представление [1]) функции $\zeta(s, a)$ в виде интеграла по контуру

Считая $\sigma \geqslant 1+\delta$, рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\infty}^{(0+)} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}}\, dz,$$

где за контур интегрирования взят контур типа Ханкеля (§ 12.22), не содержащий точек $\pm 2n\pi i$ ($n=1, 2, 3, \ldots$), являющиеся полюсами подинтегральной функции. Предполагается (как в § 12.22), что $|\arg(-z)| \leqslant \pi$.

Когда $\sigma \geqslant 1+\delta$ [2]), мы имеем право деформировать контур совершенно так же, как в § 12.22; получим

$$\int\limits_{\infty}^{(0+)} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}}\, dz = \left\{e^{\pi i(s-1)} - e^{-\pi i(s-1)}\right\} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{s-1} e^{-ax}}{1-e^{-x}}\, dx.$$

Поэтому

$$\zeta(s, a) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \int\limits_{\infty}^{(0+)} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}}\, dz.$$

Этот последний интеграл есть однозначная аналитическая функция от s для *всех* значений s. Поэтому единственно возможными особыми точками $\zeta(s, a)$ будут особые точки функции $\Gamma(1-s)$, т. е. точки $1, 2, 3, \ldots$, и, за исключением этих точек, интеграл дает представление функции $\zeta(s, a)$, годное во всей плоскости. Полученный результат соответствует интегралу Ханкеля для гамма-функции. С другой стороны, мы видели, что $\zeta(s, a)$ является аналитической при $\sigma \geqslant 1+\delta$, и таким образом, единственной особой точкой функции $\zeta(s, a)$ будет точка $s=1$.

Положив в интеграле $s=1$, получим выражение

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\infty}^{(0+)} \frac{e^{-az}}{1-e^{-z}}\, dz,$$

которое равно вычету подинтегральной функции в точке $z=0$; а этот вычет равен 1.

Отсюда

$$\lim_{s\to 1} \frac{\zeta(s, a)}{\Gamma(1-s)} = -1.$$

---

[1]) Дано Риманом для обыкновенной дзета-функции.

[2]) Если $\sigma \leqslant 1$, то интеграл, взятый вдоль какой-либо прямой, идущей из начала координат, не будет сходиться.

Так как функция $\Gamma(1-s)$ имеет простой полюс в $s=1$ с вычетом -1, то заключаем, что единственной особой точкой функции $\zeta(s, a)$ будет простой полюс с вычетом $+1$ при $s=1$.

Пример 1. Показать, что при $\operatorname{Re} s > 0$

$$(1-2^{1-s})\zeta(s)=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}-\frac{1}{4^s}+\ldots=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x+1}\,dx.$$

Пример 2. Показать, что при $\operatorname{Re} s > 1$

$$(2^s-1)\zeta(s)=\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right)=\frac{2^s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}e^x}{e^{2x}-1}\,dx.$$

Пример 3. Показать, что

$$\zeta(s)=-\frac{2^{1-s}\Gamma(1-s)}{2\pi i\,(2^{1-s}-1)}\int_\infty^{(0+)}\frac{(-z)^{s-1}}{e^z+1}\,dz,$$

где контур не должен содержать точки $\pm\pi i$, $\pm 3\pi i$, $\pm 5\pi i$, ...

13.14. Значения функции $\zeta(s, a)$ для частных значений s

В частном случае, когда s — целое число (положительное или отрицательное), выражение $\frac{(-z)^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}$ будет однозначной функцией от z. Мы можем, следовательно, применить теорему Коши, так что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\infty^{(0+)}\frac{(-z)^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}\,dz$$

будет вычетом подинтегральной функции при $z=0$, иначе говоря, коэффициентом при z^{-s} в $\frac{(-1)^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}$.

Для получения этого коэффициента продифференцируем почленно по a разложение (§ 7.2, часть I)

$$-z\,\frac{e^{-az}-1}{e^{-z}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi_n(a)}{n!}z^n,$$

где $\varphi_n(a)$ обозначает n-й полином Бернулли.

(Это, очевидно, является законным согласно § 4.7 части I, когда $|z|<2\pi$, так как $\frac{z^2e^{-az}}{e^{-z}-1}$ может быть разложена в степенной ряд по z, равномерно сходящийся относительно a.)

Получим

$$\frac{z^2 e^{-az}}{e^{-z}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\varphi_n'(a)}{n!}z^n.$$

Поэтому, если z равно нулю или целому отрицательному числу ($=-m$), мы имеем

$$\zeta(-m,\ a)=-\frac{\varphi_{m+2}'(a)}{(m+1)(m+2)}.$$

В частном случае, когда $a=1$, функция $\zeta(s)$ при $s=-m$ равна коэффициенту при z^{1-s} в разложении функции $\frac{(-1)^s m!z}{e^z-1}$.

Следовательно, согласно § 7.2 части I,

$$\zeta(-2m)=0,\quad \zeta(1-2m)=\frac{(-1)^m B_m}{2m}\qquad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2}.$$

Эти равенства дают значение функции $\zeta(s)$, когда s — отрицательное целое число или нуль.

13.15. Формула Гурвица[1]) для функции $\zeta(s,\ a)$, когда $\sigma<0$

Рассмотрим интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{(-z)^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}\,dz,$$

взятый по контуру C, состоящему из окружности (большого) радиуса $(2N+1)\pi$ (N — целое число), которая начинается в точке $(2N+1)\pi$ и обходит начало координат в положительном направлении; пусть $\arg(-z)$ равен нулю при $z=-(2N+1)\pi$.

В области между C и контуром $(2N\pi+\pi,\ 0+)$, предельная форма которого есть контур § 13.13, функция $(-z)^{s-1}e^{-az}(1-e^{-z})^{-1}$ будет аналитической и однозначной, если исключить простые полюсы $\pm 2\pi i,\ \pm 4\pi i,\ \ldots,\ \pm 2N\pi i$.

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{(-z)^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_{(2N+1)\pi}^{(0+)}\frac{(-z)^{s-1}e^{-az}}{1-e^{-z}}\,dz=\sum_{n=1}^{N}(R_n+R_n'),$$

где R_n, R_n' суть вычеты подинтегральной функции соответственно в точках $2n\pi i$, $-2n\pi i$.

[1]) Hurwitz, Zs. für Math. und Phys., XXVII (1882), 95.

В точке, для которой $-z = 2n\pi e^{-\frac{1}{2}\pi i}$, вычет равен

$$(2n\pi)^{s-1} e^{-\frac{1}{2}\pi i (s-1)} e^{-2an\pi i},$$

и отсюда

$$R_n + R_n' = (2n\pi)^{s-1} \, 2 \sin\left(\frac{1}{2} s\pi + 2\pi a n\right).$$

Следовательно,

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(2N+1)\pi}^{(0+)} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}} dz =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} s\pi}{(2\pi)^{1-s}} \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(2\pi a n)}{n^{1-s}} + \frac{2 \cos \frac{1}{2} s\pi}{(2\pi)^{1-s}} \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2\pi a n)}{n^{1-s}} - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}} dz.$$

Далее, поскольку $0 < a \leqslant 1$, легко видеть, что можно найти такое число K, не зависящее от N, что $\left| e^{-az} (1 - e^{-z})^{-1} \right| < K$, когда z находится на C.

Отсюда

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{(-z)^{s-1} e^{-az}}{1-e^{-z}} dz \right| < \frac{1}{2\pi} K \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| \{(2N+1)\pi\}^s e^{si\theta} \right| d\theta <$$

$$< K \{(2N+1)\pi\}^{\sigma} e^{\pi |s|} \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty, \quad \text{если } \sigma < 0.$$

Заставляя $N \to \infty$, мы получаем при $\sigma < 0$ следующую формулу Гурвица:

$$\zeta(s, a) = \frac{2\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \left\{ \sin\left(\frac{1}{2} s\pi\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi a n)}{n^{1-s}} + \cos\left(\frac{1}{2} s\pi\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi a n)}{n^{1-s}} \right\},$$

причем оба ряда сходятся.

13.151. Соотношение Римана между $\zeta(s)$ и $\zeta(1-s)$

Если в формуле Гурвица, данной в § 13.15, положить $a = 1$ и применить результат § 12.14, то получается замечательная формула, принадлежащая Риману:

$$2^{1-s} \Gamma(s) \zeta(s) \cos\left(\frac{1}{2} s\pi\right) = \pi^s \zeta(1-s).$$

Так как обе части этого равенства являются аналитическими функциями от s, за исключением изолированных значений s, при которых они имеют полюсы, то это равенство, доказанное для $\sigma < 0$, остается справедливым (по § 5.5, часть I) для всех значений s, за исключением указанных изолированных значений.

Пример 1. Показать, что при m целом и положительном

$$\zeta(2m) = 2^{2m-1}\pi^{2m}\frac{B_m}{(2m)!}.$$

Пример 2. Показать, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}\zeta(s)$ не меняется при замене s на $1-s$.

(Riemann)

Пример 3. Исходя из соотношения Римана, доказать, что нули функции $\zeta(s)$ в $-2, -4, -6, \ldots$ будут нулями первого порядка.

13.2. Формула Эрмита[1]) для $\zeta(s, a)$

Применим теорему Плана (часть I, стр. 203, пример 7) к функции $\varphi(z) = (a+z)^{-s}$, где $\arg(a+z)$ имеет главное значение.

Определим функцию $q(x, y)$ равенством

$$q(x, y) = \frac{1}{2i}\left\{(a+x+iy)^{-s} - (a+x-iy)^{-s}\right\} =$$

$$= -\left\{(a+x)^2+y^2\right\}^{-\frac{1}{2}s}\sin\left\{s\operatorname{arctg}\frac{y}{x+a}\right\}.$$

Так как[2]) $\left|\operatorname{arctg}\frac{y}{x+a}\right|$ не превосходит наименьшей из величин $\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{|y|}{x+a}$, то мы имеем

$$|q(x, y)| \leqslant \left\{(a+x)^2+y^2\right\}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sigma}|y^{-1}|\operatorname{sh}\left\{\frac{1}{2}\pi|s|\right\},$$

$$|q(x, y)| \leqslant \left\{(a+x)^2+y^2\right\}^{-\frac{1}{2}\sigma}\left|\left\{\operatorname{sh}\frac{y|s|}{x+a}\right\}\right|.$$

Пользуясь первым неравенством при $|y| > a$ и вторым при $|y| < a$, найдем, что при $\sigma > 0$ интеграл $\int\limits_0^\infty q(x, y)(e^{2\pi y}-1)^{-1}\,dy$ сходится, когда $x \geqslant 0$, и стремится к 0, когда $x \to \infty$, интеграл же $\int\limits_0^\infty (a+x)^{-s}\,dx$ сходится при $\sigma > 1$.

---

[1]) Hermite, Annali di Matematica (3), V (1901), 57—72.

[2]) Если $\xi > 0$, то $\operatorname{arctg}\xi = \int\limits_0^\xi \frac{dt}{1+t^2} < \int\limits_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$ и $\operatorname{arctg}\xi < \int\limits_0^\xi dt.$

Следовательно, если $\sigma > 1$, предельный переход $x_2 \to \infty$ в цитированном выше примере является законным; тогда мы имеем

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{2} a^{-s} + \\ + \int_0^\infty (a+x)^{-s} dx + 2\int_0^\infty (a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s} \left\{ \sin\left(s \operatorname{arctg} \frac{y}{a}\right)\right\} \frac{dy}{e^{2\pi y}-1}.$$

Таким образом,

$$\zeta(s, a) = \frac{1}{2} a^{-s} + \frac{a^{1-s}}{s-1} + 2\int_0^\infty (a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s} \left\{ \sin\left(s \operatorname{arctg} \frac{y}{a}\right)\right\} \frac{dy}{e^{2\pi y}-1}.$$

Это и есть формула Эрмита[1]; пользуясь тем, что при $y \geqslant 0$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{a} \leqslant \frac{y}{a} \quad \left(y < \frac{1}{2} a\pi\right), \qquad \operatorname{arctg} \frac{y}{a} < \frac{1}{2}\pi \quad \left(y > \frac{1}{2} a\pi\right),$$

мы видим, что интеграл, содержащийся в этой формуле, сходится для всех значений s. Кроме того, этот интеграл определяет аналитическую функцию от s для всех значений s.

Для доказательства последнего достаточно (§ 5.31, часть I) показать, что интеграл, получаемый из него дифференцированием под знаком интеграла, сходится равномерно; иначе говоря, что

$$\int_0^\infty \left[-\frac{1}{2} \lg (a^2+y^2)(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s} \sin\left(s \operatorname{arctg} \frac{y}{a}\right)\right] \frac{dy}{e^{2\pi y}-1} + \\ + \int_0^\infty \left[(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s} \operatorname{arctg} \frac{y}{a} \cos\left(s \operatorname{arctg} \frac{y}{a}\right)\right] \frac{dy}{e^{2\pi y}-1}$$

сходится равномерно относительно s в любой области значений s. Но при $|s| \leqslant \Delta$, где Δ — любое положительное число, мы имеем

$$\left|(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s} \operatorname{arctg} \frac{y}{a} \cos\left(s \operatorname{arctg} \frac{y}{a}\right)\right| < (a^2+y^2)^{\frac{1}{2}\Delta} \frac{y}{a} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\pi\Delta\right);$$

а так как интеграл

$$\frac{\Delta}{a} \int_0^\infty (a^2+y^2)^{\frac{1}{2}\Delta} \frac{y\, dy}{e^{2\pi y}-1}$$

сходится, то второй интеграл, по § 4.431 (I), сходится равномерно.

---

[1] Соответствующая формула при $a = 1$ была дана раньше Йенсеном.

Разделяя путь интегрирования первого интеграла на две части $\left(0, \frac{1}{2}\pi a\right)$, $\left(\frac{1}{2}\pi a, \infty\right)$ и применяя неравенства

$$\left|\sin\left(s\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)\right| < \operatorname{sh}\frac{\Delta y}{a}, \quad \left|\sin\left(s\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)\right| < \operatorname{sh}\frac{1}{2}\pi\Delta$$

в соответствующих частях, мы можем также показать, что и первый интеграл сходится равномерно.

Следовательно, формула Эрмита имеет силу (§ 5.5, часть I) для всех значений s, и дифференцирование под знаком интеграла является законным; интеграл, полученный в результате дифференцирования, является непрерывной функцией от s.

13.21. Следствия из формулы Эрмита

Положив в формуле Эрмита $s=0$, получим $\zeta(0, a)=\frac{1}{2}-a$.

Заставляя $s\to 1$, из равномерной сходимости интеграла, входящего в формулу Эрмита, заключаем, что

$$\lim_{s\to 1}\left\{\zeta(s, a)-\frac{1}{s-1}\right\}=\lim_{s\to 1}\frac{a^{1-s}-1}{s-1}+\frac{1}{2a}+2\int_0^\infty\frac{y\,dy}{(a^2+y^2)(e^{2\pi y}-1)},$$

откуда на основании примера § 12.32

$$\lim_{s\to 1}\left\{\zeta(s, a)-\frac{1}{s-1}\right\}=-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}.$$

Далее, дифференцируя [1]) формулу для $\zeta(s, a)$ и переходя к пределу при $s\to 0$, получаем

$$\left\{\frac{d}{ds}\zeta(s, a)\right\}_{s=0}=\lim_{s\to 0}\left[-\frac{1}{2}a^{-s}\lg a-\frac{a^{1-s}\lg a}{s-1}-\frac{a^{1-s}}{(s-1)^2}+\right.$$
$$+2\int_0^\infty\left\{-\frac{1}{2}\lg(a^2+y^2)(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s}\sin\left(s\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+(a^2+y^2)^{-\frac{1}{2}s}\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\cos\left(s\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right)\right\}\frac{dy}{e^{2\pi y}-1}\right]=$$
$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)\lg a-a+2\int_0^\infty\frac{\operatorname{arctg}(y/a)}{e^{2\pi y}-1}\,dy.$$

---

[1]) Это законно на основании § 13.2.

Отсюда по § 12.32

$$\left\{\frac{d}{ds}\zeta(s, a)\right\}_{s=0} = \lg\Gamma(a) - \frac{1}{2}\lg 2\pi.$$

Этот результат был получен ранее Лерхом [1]) другим способом.

Следствие. $\lim\limits_{s\to 1}\left\{\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right\} = \gamma$; $\zeta'(0) = -\frac{1}{2}\lg 2\pi$.

13.3. Бесконечное произведение Эйлера для $\zeta(s)$

Пусть $\sigma \geqslant 1+\delta$, пусть, далее, $2, 3, 5, \ldots, p, \ldots$ — последовательные простые числа. Тогда, вычитая ряд для $2^{-s}\zeta(s)$ из ряда для $\zeta(s)$, получим

$$\zeta(s)(1-2^{-s}) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \ldots,$$

где отсутствуют все члены ряда $\sum n^{-s}$, в которых n кратно 2; таким же образом находим

$$\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s}) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \ldots,$$

где отсутствуют все члены, в которых n кратно 2 и 3 и т. д., вообще

$$\zeta(s)(1-2^{-s})(1-3^{-s})\ldots(1-p^{-s}) = 1 + \sum{}' n^{-s},$$

где значок $'$ обозначает, что суммирование производится только по значениям n (бóльшим p), взаимно простым с $2, 3, \ldots, p$.

Но [2])

$$\left|\sum{}' n^{-s}\right| \leqslant \sum{}' n^{-1-\delta} \leqslant \sum_{n=p+1}^{\infty} n^{-1-\delta} \to 0, \quad \text{когда} \quad p\to\infty.$$

Поэтому, если $\sigma \geqslant 1+\delta$, *то бесконечное произведение* $\zeta(s)\prod\limits_{p}(1-p^{-s})$, *где число* p *пробегает только простые числа* $2, 3, 5, \ldots$, *сходится и равно* 1.

---

[1]) Формула для $\zeta(s, a)$, из которой Лерх (Lerch) вывел этот результат, дана в мемуаре, опубликованном Пражской Академией наук. Сокращенное изложение этого мемуара содержится в «Jahrbuch über die Fortschritte der Math.» (1893—1894), 484.

[2]) Первый член $\sum{}'$ соответствует ближайшему простому числу, большему p.

Но произведение $\prod_p (1-p)^{-s}$ сходится, когда $\sigma \geqslant 1+\delta$, ибо оно состоит из части множителей абсолютно сходящегося произведения $\prod_{n=2}^{\infty}(1-n^{-s})$.

Следовательно, мы убеждаемся в том, что $\zeta(s)$ *не имеет нулей, для которых* $\sigma \geqslant 1+\delta$; ибо если бы она имела такие нули, то бесконечное произведение $\prod_p (1-p^{-s})$ в этих нулях расходилось бы.

Поэтому при $\sigma \geqslant 1+\delta$

$$\prod_p \left(1-\frac{1}{p^s}\right)=\frac{1}{\zeta(s)}.$$

Это и есть результат, полученный Эйлером.

13.31. Гипотеза Римана относительно нулей функции $\zeta(s)$

Только было что доказано, что $\zeta(s)$ не имеет нулей при $\sigma > 1$. Из формулы (§ 13.151)

$$\zeta(s)=2^{s-1}\{\Gamma(s)\}^{-1}\sec\left(\frac{1}{2}s\pi\right)\zeta(1-s)$$

теперь видно, что единственными нулями функции $\zeta(s)$ при $\sigma<0$ будут нули выражения $\{\Gamma(s)\}^{-1}\sec\left(\frac{1}{2}s\pi\right)$, т. е. точки $s=-2, -4, \ldots$

Таким образом, все нули функции $\zeta(s)$, *исключая значения* $s=-2, -4, \ldots$, *лежат в той полосе плоскости комплексной переменной* s, *которая определяется неравенствами* $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

Риман высказал предположение, никем пока не доказанное, что все нули функции $\zeta(s)$ в этой полосе лежат на прямой $\sigma=\frac{1}{2}$; Харди[1]) доказал, что бесконечное число нулей функции $\zeta(s)$ действительно лежит на прямой $\sigma=\frac{1}{2}$. Весьма вероятно, что предположение Римана правильно и доказательство его привело бы к весьма важным следствиям теории простых чисел.

13.4. Интеграл Римана для $\zeta(s)$

Легко видеть, что при $\sigma>0$

$$n^{-s}\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}=\int_0^{\infty} e^{-n^2\pi x}x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx.$$

---

[1]) Hardy, Comptes Rendus, CLVIII (1914), 1012; см. стр. 80.

Следовательно, при $\sigma > 0$

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s} = \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty \sum_{n=1}^N e^{-n^2\pi x} x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx.$$

Если положить

$$\tilde{\omega}(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x},$$

то, на основании примера 17 главы 6 части I (стр. 174),

$$1+2\tilde{\omega}(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left\{1+2\tilde{\omega}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

и мы будем иметь $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{2}}\tilde{\omega}(x) = 1$. Отсюда видно, что

$$\int_0^\infty \tilde{\omega}(x)\, x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx$$

сходится, когда $\sigma > 1$.

Следовательно, если $\sigma > 2$, *то*

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s} = \lim_{N\to\infty}\left[\int_0^\infty \tilde{\omega}(x)\, x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx - \int_0^\infty \sum_{n=N+1}^\infty e^{-n^2\pi x} x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx\right].$$

Далее, как в § 13.12, модуль последнего интеграла не превосходит

$$\int_0^\infty \left\{\sum_{n=N+1}^\infty e^{-n(N+1)\pi x}\right\} x^{\frac{1}{2}\sigma-1}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-(N+1)^2\pi x} x^{\frac{1}{2}\sigma-1}}{1-e^{-(N+1)\pi x}}\,dx < \{\pi(N+1)\}^{-1}\int_0^\infty e^{-(N^2+2N)\pi x} x^{\frac{1}{2}\sigma-2}\,dx =$$

$$= \{\pi(N+1)\}^{-1}\{(N^2+2N)\pi\}^{1-\frac{1}{2}\sigma}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\sigma-1\right)\to 0,$$

когда $N\to\infty$, так как $\sigma > 2$.

Итак, когда $\sigma > 2$,

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}=\int_0^\infty \tilde{\omega}(x)\,x^{\frac{1}{2}s-1}\,ds=$$

$$=\int_0^1\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\tilde{\omega}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx+\int_1^\infty \tilde{\omega}(x)\,x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\int_\infty^1 x^{\frac{1}{2}}\tilde{\omega}(x)\,x^{-\frac{1}{2}s+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx+\int_1^\infty \tilde{\omega}(x)\,x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx.$$

Следовательно,

$$\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}-\frac{1}{s(s-1)}=\int_1^\infty\left(x^{\frac{1}{2}(1-s)}+x^{\frac{1}{2}s}\right)x^{-1}\tilde{\omega}(x)\,dx.$$

Но интеграл в правой части, в силу § 5.32 части I, представляет аналитическую функцию от s для *всех* значений s, так как на пути интегрирования

$$\tilde{\omega}(x)<e^{-\pi x}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-m\pi x}\leqslant e^{-\pi x}\left(1-e^{-\pi}\right)^{-1}.$$

Следовательно, по § 5.5 части I, приведенное выше равенство, доказанное для случая $\sigma > 2$, сохраняет силу для всех значений s.

Если положим теперь

$$s=\frac{1}{2}+it,\quad \frac{1}{2}s(s-1)\zeta(s)\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}=\xi(t),$$

то получим

$$\xi(t)=\frac{1}{2}-\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\int_1^\infty x^{-\frac{3}{4}}\tilde{\omega}(x)\cos\left(\frac{1}{2}t\lg x\right)dx.$$

Так как интеграл

$$\int_1^\infty x^{-\frac{3}{4}}\tilde{\omega}(x)\left\{\frac{1}{2}\lg x\right\}^n\cos\left(\frac{1}{2}t\lg x+\frac{1}{2}n\pi\right)dx$$

удовлетворяет признаку, приведенному в следствии § 4.44 части I, то мы можем дифференцировать его любое число раз под знаком интеграла и полагать затем $t=0$. Отсюда, по теореме Тейлора, имеем для всех значений[1]) t

$$\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}t^{2n}.$$

Из рассмотрения последнего интеграла ясно, что a_{2n} вещественные. Полученный результат является основным в исследованиях Римана.

13.5. Неравенства, которым удовлетворяет функция $\zeta(s, a)$ при $\sigma > 0$

Исследуем теперь поведение функции $\zeta(s, a)$ для данных значений σ, когда $t \to \pm\infty$.

Когда $\sigma > 1$, легко видеть, что при любом целом N

$$\zeta(s, a)=\sum_{n=0}^{N}(a+n)^{-s}-\frac{1}{(1-s)(N+a)^{s-1}}-\sum_{n=N}^{\infty} f_n(s),$$

где

$$f_n(s)=\frac{1}{1-s}\left\{\frac{1}{(n+1+a)^{s-1}}-\frac{1}{(n+a)^{s-1}}\right\}-\frac{1}{(n+1+a)^{s}}=$$

$$=s\int_{n}^{n+1}\frac{u-n}{(u+a)^{s+1}}\,du.$$

Но при $\sigma > 0$

$$|f_n(s)| \leqslant |s|\int_{n}^{n+1}\frac{u-n}{(u+a)^{\sigma+1}}\,du < |s|\int_{n}^{n+1}\frac{du}{(n+a)^{\sigma+1}}=|s|\,(n+a)^{-\sigma-1}.$$

Поэтому $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f_n(s)$ при $\sigma > 0$ является равномерно сходящимся рядом аналитических функций, так что и сумма ряда $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f_n(s)$ будет аналитической функцией при $\sigma > 0$; следовательно, согласно § 5.5 части I, функция $\zeta(s, a)$ может быть определена при $\sigma > 0$ рядом

$$\zeta(s, a)=\sum_{n=0}^{N}(a+n)^{-s}-\frac{1}{(1-s)(N+a)^{s-1}}-\sum_{n=N}^{\infty} f_n(s).$$

---

[1]) Здесь удобно рассматривать t как комплексное переменное, определяемое равенством $s=\frac{1}{2}+it$; тогда $\xi(t)$ будет целой функцией от t.

Теперь пусть $[t]$ — целая часть $|t|$; возьмем $N=[t]$; тогда

$$|\zeta(s, a)| \leqslant \sum_{n=0}^{[t]} |(a+n)^{-s}| + |\{(1-s)^{-1}([t]+a)^{1-s}\}| + \sum_{n=[t]}^{\infty} |s|(n+a)^{-\sigma-1} <$$

$$< \sum_{n=0}^{[t]} (a+n)^{-\sigma} + |t|^{-1}([t]+a)^{1-\sigma} + |s| \sum_{n=[t]}^{\infty} (n+a)^{-\sigma-1}.$$

Применяя здесь формулу суммирования Маклорена—Коши (§ 4.43, часть I), получим

$$|\zeta(s, a)| < a^{-\sigma} + \int_0^{[t]} (a+x)^{-\sigma}\, dx + |t|^{-1}([t]+a)^{1-\sigma} + |s| \int_{[t]-1}^{\infty} (x+a)^{-\sigma-1}\, dx.$$

Отсюда при $\delta \leqslant \sigma \leqslant 1-\delta$, где $\delta > 0$, имеем

$$|\zeta(s, a)| < a^{-\sigma} + (1-\sigma)^{-1}\{(a+[t])^{1-\sigma} - a^{1-\sigma}\} + |t|^{-1}([t]+a)^{1-\sigma} +$$
$$+ |s|\,\sigma^{-1}([t]-1+a)^{-\sigma}.$$

Следовательно, $\zeta(s, a) = O(|t|^{1-\sigma})$, *где постоянная, подразумеваемая в символе O, не зависит от s. Далее, при* $1-\delta \leqslant \sigma \leqslant 1+\delta$ *имеем*

$$|\zeta(s, a)| = O(|t|^{1-\sigma}) + \int_0^{[t]} (a+x)^{-\sigma}\, dx <$$

$$< O(|t|^{1-\sigma}) + \{a^{1-\sigma} + (a+t)^{1-\sigma}\} \int_0^{[t]} (a+x)^{-1}\, dx,$$

так как

$$(a+x)^{-\sigma} \leqslant a^{1-\sigma}(a+x)^{-1} \quad \text{при} \quad \sigma \geqslant 1$$

и

$$(a+x)^{-\sigma} \leqslant (a+[t])^{1-\sigma}(a+x)^{-1} \quad \text{при} \quad \sigma \leqslant 1;$$

следовательно,

$$\zeta(s, a) = O\{|t|^{1-\sigma} \lg |t|\}.$$

При $\sigma \geqslant 1+\delta$

$$|\zeta(s, a)| \leqslant a^{-\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} (a+n)^{-1-\delta} = O(1).$$

13.51. Неравенства, которым удовлетворяет функция $\zeta(s, a)$ при $\sigma \leqslant 0$

Выведем теперь аналогичные неравенства при $\sigma \leqslant \delta$. В случае функции $\zeta(s)$ мы применим соотношение Римана

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s) \sin\left(\frac{1}{2} s\pi\right).$$

При $\sigma < 1-\delta$ мы имеем, по § 12.33,

$$\Gamma(1-s) = O\left\{e^{\left(\frac{1}{2}-s\right)\lg(1-s)-(1-s)}\right\},$$

и таким образом,

$$\zeta(s) = O\left[\exp\left\{\frac{1}{2}\pi|t| + \left(\frac{1}{2}-\sigma-it\right)\lg|1-s| + i\operatorname{arctg}\frac{t}{1-\sigma}\right\}\right]\zeta(1-s).$$

Так как

$$\operatorname{arctg}\frac{t}{1-\sigma} = \pm\frac{1}{2}\pi + O(t^{-1}),$$

смотря по тому, будет ли t положительно или отрицательно, то из результата, уже полученного для $\zeta(s, a)$, мы видим, что

$$\zeta(s) = O\left\{|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}\right\}\zeta(1-s).$$

Для обобщения этого результата на случай функции $\zeta(s, a)$ следует применить формулу Гурвица (§ 13.15); при $\sigma < 0$ имеем

$$\zeta(s, a) = -i(2\pi)^{s-1}\Gamma(1-s)\left[e^{\frac{1}{2}s\pi i}\zeta_a(1-s) - e^{-\frac{1}{2}s\pi i}\zeta_{-a}(1-s)\right],$$

где

$$\zeta_a(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n\pi i a}}{n^{1-s}}.$$

Отсюда

$$(1-e^{2\pi i a})\zeta_a(1-s) = e^{2\pi i a} + \sum_{n=2}^{N} e^{2n\pi i a}[n^{s-1}-(n-1)^{s-1}] +$$
$$+(s-1)\sum_{n=N+1}^{\infty} e^{2n\pi i a}\int_{n-1}^{n} u^{s-2}\,du.$$

Так как ряд справа есть равномерно сходящийся ряд аналитических функций, когда $\sigma \leqslant 1-\delta$, то это равенство дает продолжение функции $\zeta_a(1-s)$ в полосу $0 \leqslant \sigma \leqslant 1-\delta$, так что при $\sigma \leqslant 1-\delta$ имеем

$$|\sin\pi a\zeta_a(1-s)| \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{N}\{n^{\sigma-1}+(n-1)^{\sigma-1}\} + |s-1|\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{n-1}^{n} u^{\sigma-2}\,du.$$

Взяв $N = [t]$, получим, как в § 13.5,

$$\zeta_a(1-s) = \begin{cases} O(|t|^{\sigma}) & (\delta \leqslant \sigma \leqslant 1-\delta), \\ O(|t|^{\sigma}\lg|t|) & (-\delta \leqslant \sigma \leqslant \delta) \end{cases}$$

и, очевидно,

$$\zeta_a(1-s) = O(1) \qquad (\sigma < -\delta).$$

Следовательно, независимо от того будет ли a равно 1 или нет, имеем результат

$$\zeta(s, a) = \begin{cases} O\left(|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}\right) & (\sigma \leqslant \delta), \\ O\left(|t|^{\frac{1}{2}}\right) & (\delta \leqslant \sigma \leqslant 1-\delta), \\ O\left(|t|^{\frac{1}{2}} \lg |t|\right) & (-\delta \leqslant \sigma \leqslant \delta). \end{cases}$$

Мы можем объединить эти результаты и результаты § 13.5 в одну формулу:

$$\zeta(s, a) = O(|t|^{\tau(\sigma)} \lg |t|),$$

где[1])

$$\tau(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma \quad (\sigma \leqslant 0); \quad \tau(\sigma) = \frac{1}{2} \quad \left(0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}\right);$$

$$\tau(\sigma) = 1 - \sigma \quad \left(\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 1\right); \quad \tau(\sigma) = 0 \quad (\sigma \geqslant 1);$$

$\lg |t|$ может быть отброшен, за исключением случая, когда $-\delta \leqslant \sigma \leqslant \delta$ или когда $1-\delta \leqslant \sigma \leqslant 1+\delta$.

13.6. Асимптотическое разложение функции $\lg \Gamma(z+a)$

Из примера 3 § 12.1 следует, что

$$\left(1 + \frac{z}{a}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 + \frac{z}{a+n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right\} = \frac{e^{-\gamma z}\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)}.$$

Взяв главные значения логарифма, получим

$$\lg\left(1 + \frac{z}{a}\right) + \lg \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 + \frac{z}{a+n}\right) e^{-\frac{z}{n}}\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-az}{n(a+n)} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \frac{z^m}{(a+n)^m}\right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} z^m}{m a^m}.$$

При $|z| < a$ двойной ряд абсолютно сходится, поскольку сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a|z|}{n(a+n)} - \lg\left(1 - \frac{|z|}{a+n}\right) - \frac{|z|}{a+n}\right].$$

[1]) Можно доказать, что $\tau(\sigma)$ может быть взято равным $\frac{1}{2}(1-\sigma)$, когда $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$. См. Landau, Primzahlen, § 237.

Следовательно,

$$\lg \frac{e^{-\gamma z}\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = \frac{z}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{az}{n(a+n)} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} z^m \zeta(m, a).$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$\frac{-1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds,$$

где за контур интегрирования берется контур, подобный данному в § 12.22 и охватывающий точки $s=2, 3, 4 \ldots$, но не охватывающий точек $1, 0, -1, -2, \ldots$; вычет подинтегральной функции при $s=m$ $(m \geqslant 2)$ равен $\frac{(-1)^m}{m} z^m \zeta(m, a)$; а так как при $\sigma \to \infty$ (где $s=\sigma+it$) $\zeta(s, a) = O(1)$, то интеграл сходится при $|z|<1$. Следовательно,

$$\lg \frac{e^{-\gamma z}\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = \frac{z}{a} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{az}{n(a+n)} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds,$$

откуда

$$\lg \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = -z \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds.$$

Пусть D — полуокружность (большого) радиуса N с центром в $s=\frac{3}{2}$, лежащая справа от прямой $\sigma=\frac{3}{2}$. На этой полуокружности $\zeta(s, a) = O(1)$, $|z^s| = |z|^\sigma e^{-t \arg z}$ и, таким образом, подинтегральная функция будет[1])

$$O\left\{|z|^\sigma e^{-\pi|t| - t \arg z}\right\}.$$

Отсюда следует, что при $|z|<1$ и $-\pi+\delta \leqslant \arg z \leqslant \pi-\delta$, где δ — положительное число, подинтегральная функция будет $O(|z|^\sigma e^{-\delta|t|})$ и, значит, интеграл

$$\int\limits_D \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds \to 0$$

при $N \to \infty$. Отсюда сразу заключаем, что при $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$ и $|z|<1$

$$\lg \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = -z \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i} \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds.$$

---

[1]) Постоянные, содержащиеся в символе O, всюду не зависят от s и z.

Но входящий сюда интеграл определяет аналитическую функцию от z для всех значений $|z|$, для которых

$$|\arg z| \leqslant \pi - \delta.$$

Следовательно, по § 5.5 части I вышеприведенное равенство, доказанное для случая $|z| < 1$, сохраняет силу для всех значений $|z|$, для которых $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\limits_{-n-\frac{1}{2} \pm Ri}^{\frac{3}{2} \pm Ri} \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds,$$

где n — фиксированное целое число, и заставим R стремиться к бесконечности. По § 13.51 подинтегральная функция будет

$$O\left\{z^\sigma e^{-\delta R} R^{\tau(\sigma)}\right\}, \quad \text{где} \quad -n - \frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \frac{3}{2};$$

отсюда независимо от того, берем ли мы верхние или нижние знаки у пределов, интеграл стремится к нулю, когда $R \to \infty$. Поэтому по теореме Коши

$$\lg \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = -z \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-n-\frac{1}{2}-\infty i}^{-n-\frac{1}{2}+\infty i} \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a)\, ds + \sum_{m=-1}^{n} R_m,$$

где R_m — вычет подинтегральной функции при $s = -m$.

Далее, на новом пути интегрирования

$$\left| \frac{\pi z^s}{s \sin \pi s} \zeta(s, a) \right| < K z^{-n-\frac{1}{2}} e^{-\delta |t|} |t|^{\tau\left(-n-\frac{1}{2}\right)},$$

где K не зависит от z и t, а $\tau(\sigma)$ — функция, определенная в § 13.51.

Следовательно, так как интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta |t|} |t|^{\tau\left(-n-\frac{1}{2}\right)} dt$$

сходится, то мы имеем

$$\lg \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = -z \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \sum_{m=-1}^{n} R_m + O\left(z^{-n-\frac{1}{2}}\right),$$

когда $|z|$ велик.

Но, когда m — положительное целое число,

$$R_m = \frac{(-1)^m z^{-m}\zeta(-m, a)}{-m},$$

и таким образом, по § 13.14

$$R_m = \frac{(-1)^m z^{-m}\varphi'_{m+2}(a)}{m(m+1)(m+2)},$$

где $\varphi'_m(a)$ — производная от полинома Бернулли.

Далее, R_0 есть вычет выражения

$$\frac{1}{s}\left(1+\frac{\pi^2 s^2}{6}+\ldots\right)(1+s\lg z+\ldots)\left\{\frac{1}{2}-a+s\zeta'(0, a)+\ldots\right\}$$

при $s=0$; следовательно, в силу § 13.21

$$R_0 = \left(\frac{1}{2}-a\right)\lg z+\zeta'(0, a) = \left(\frac{1}{2}-a\right)\lg z+\lg\Gamma(a)-\frac{1}{2}\lg 2\pi.$$

Наконец, по § 13.21 R_{-1} есть вычет выражения

$$-\frac{1}{S}(1-S+S^2-\ldots)\left(1+\frac{\pi^2 S^2}{6}+\ldots\right)\times$$
$$\times z(1+S\lg z+\ldots)\left(\frac{1}{S}-\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+\ldots\right)$$

при $S=0$ [1]).

Отсюда

$$R_{-1} = -z\lg z+z\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}+z.$$

Окончательно, если $|\arg z|\leqslant\pi-\delta$ и $|z|$ велик,

$$\lg\Gamma(z+a) = \left(z+a-\frac{1}{2}\right)\lg z-z+\frac{1}{2}\lg 2\pi+$$
$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}\varphi'_{m+2}(a)}{m(m+1)(m+2)z^m}+O\left(z^{-n-\frac{1}{2}}\right).$$

В частном случае, когда $a=1$, эта формула переходит в формулу, найденную в § 12.33 для более ограниченной области значений $\arg z$.

Только что полученное асимптотическое разложение пригодно и тогда, когда a не ограничено неравенством $0<a\leqslant 1$, но исследование этого случая основывается на более изощренных методах, необходимых для получения неравенств, имеющих место для функции $\zeta(s, a)$, когда a не удовлетворяет неравенству $0<a\leqslant 1$.

---

[1]) Полагаем $s=S+1$.

Однако если в полученной формуле положить $a=1$ и затем заменить z на $z+a$, то легко видеть, что при $|\arg(z+a)| \leqslant \pi-\delta$ мы получим

$$\lg \Gamma(z+a+1)=\left(z+a+\frac{1}{2}\right) \lg (z+a)-z-a+\frac{1}{2} \lg 2\pi+o(1).$$

Вычитая по $\lg(z+a)$ из обеих частей, легко видеть, что, когда

$$|\arg(z+a)| \leqslant \pi-\delta \quad \text{и} \quad |\arg z| \leqslant \pi-\delta,$$

мы получим асимптотическую формулу

$$\lg \Gamma(z+a)=\left(z+a-\frac{1}{2}\right) \lg z-z+\frac{1}{2} \lg 2\pi+o(1),$$

причем выражение $o(1)$ стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

G. F. B. Riemann, Ges. Werke, 145—155.
E. G. H. Landau, Handbuch der Primzahlen (Leipzig, 1909).
E. L. Lindelöf, Le Calcul des Résidus, гл. IV (Paris, 1905).
E. W. Barnes, Messenger of Mathematics. XXIX (1899), 64—128.
G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Acta Mathematica, XLI (1917), 119—196.

Примеры

1. Показать, что

$$(2^s-1)\zeta(s)=\frac{2^{s-1}s}{s-1}+2\int_0^\infty\left(\frac{1}{4}+y^2\right)^{-\frac{1}{2}s} \sin(s \operatorname{arctg} 2y) \frac{dy}{e^{2\pi y}-1}.$$

(Jensen, L'Intermédiaire des Math. (1895), 346)

2. Показать, что

$$\zeta(s)=\frac{2^{s-1}}{s-1}-2^s \int_0^\infty (1+y^2)^{-\frac{1}{2}s} \sin(s \operatorname{arctg} y) \frac{dy}{e^{\pi y}+1}.$$

(Jensen)

3. Рассмотреть асимптотическое разложение функции $\lg G(z+a)$ (глава 12, пример 48) при помощи обобщенной дзета-функции.

(Barnes)

4. Показать, что при $\sigma>1$

$$\ln \zeta(s)=\sum_p \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{mp^{ms}},$$

где суммирование распространяется на все простые числа $p=2, 3, 5, \ldots$

(Dirichlet, Journal de Math., IV (1839), 407)

5. Показать, что при $\sigma > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

где $\Lambda(n) = 0$, когда n не есть степень простого числа, $\Lambda(n) = \lg p$, когда n — степень простого числа p.

6. Доказать, что

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}\, dx}{\left(1 + \frac{w^2}{4x^2}\right)^{\frac{1}{2}s}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)} \int_0^{\infty} e^{-x^2 - wx} x^{s-1}\, dx.$$

(Lerch, Kraków Rozprawy,[1]), II)

7. Пусть

$$\varphi(s, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s},$$

где $|x| < 1$ и вещественная часть s положительна; показать, что

$$\varphi(s, x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x z^{s-1}\, dz}{e^z - x}$$

и если $s < 1$, то

$$\lim_{x \to 1} (1 - x)^{1-s} \varphi(s, x) = \Gamma(1 - s).$$

(Appell, Comptes Rendus, LXXXVII)

8. Пусть x, a и s вещественны, $0 < a < 1$, $s > 1$, и пусть

$$\varphi(x, a, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n\pi i x}}{(a + n)^s};$$

показать, что

$$\varphi(x, a, s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-az} z^{s-1} dz}{1 - e^{2\pi i x - z}}$$

и

$$\varphi(x, a, 1 - s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \left\{ e^{\pi i \left(\frac{1}{2} s - 2ax\right)} \varphi(-a, x, s) + \right.$$
$$\left. + e^{\pi i \left\{-\frac{1}{2} s + 2a(1-x)\right\}} \varphi(a, 1 - x, s) \right\}.$$

(Lerch, Acta Math., XI)

[1]) См. Jahrbuch über die Fortschritte der Math. (1893—1894), 482.

9. Вычисляя вычеты в полюсах слева от прямой линии, принятой за контур, показать, что при $k > 0$ и $|\arg y| < \frac{1}{2}\pi$

$$e^{-y} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-\infty i}^{k+\infty i} \Gamma(u)\, y^{-u}\, du,$$

и вывести отсюда, что если $k > \frac{1}{2}$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-\infty i}^{k+\infty i} \Gamma(u)\,(\pi x)^{-u}\, \zeta(2u)\, du = \tilde{\omega}(x),$$

а отсюда, в свою очередь, получить формулу

$$\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\alpha t}{t^2+\frac{1}{4}}\, \xi(t)\, dt = \pi\cos\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{2}\pi e^{\frac{1}{4}i\alpha}\,\{1 + 2\tilde{\omega}(e^{i\alpha})\},$$

где α — острый угол.

(Hardy)

10. Дифференцируя $2n$ раз под знаком интеграла в последнем результате примера 9 и переходя к пределу при $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$, вывести из примера 17 на стр. 174 части I, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}\frac{1}{4}\pi t}{t^2+\frac{1}{4}}\, t^{2n}\xi(t)\, dt = \frac{(-1)^n\pi}{2^{2n}}\cos\frac{\pi}{8}.$$

Беря большие n, показать, что не существует числа t_0 такого, что $\xi(t)$ сохраняет постоянный знак при $t > t_0$, и вывести отсюда, что $\zeta(s)$ имеет бесконечное число нулей на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$.

(Hardy)

[Харди и Литлвуд (Hardy and Littlewood, Proc. London Math. Soc., XIX (1920)) показали, что число нулей на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, для которых $0 < t < T$, будет по меньшей мере $O(T)$, когда $T \to \infty$; если гипотеза Римана верна, то это число будет $\frac{1}{2\pi} T \lg T - \frac{1+\lg 2\pi}{2\pi} T + O(\lg T)$; см. Landau, Primzahlen, I, 370.]

ГЛАВА 14

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

14.1. Гипергеометрический ряд

В § 2.38 части I мы уже рассмотрели вопрос о сходимости *гипергеометрического ряда*[1])

$$1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}z+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}z^2+$$
$$+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)}z^3+\dots$$

Из § 2.38 и § 5.3 части I следует, что этот ряд определяет функцию, которая будет аналитической при $|z|<1$. Ниже будет показано (§ 14.53), что эта функция имеет точку ветвления при $z=1$ и что если сделан разрез[2]) (т. е. непереходимый барьер) от $+1$ до $+\infty$ вдоль вещественной оси, то функция будет аналитической и однозначной во всей разрезанной плоскости. Она обозначается символом $F(a, b; c; z)$.

Многие важные функции, встречающиеся в анализе, могут быть выражены при помощи гипергеометрических функций, например[3]):

$$(1+z)^n=F(-n, \beta; \beta; -z),$$
$$\lg(1+z)=zF(1, 1; 2; -z),$$
$$e^z=\lim_{\beta\to\infty}F\left(1, \beta; 1; \frac{z}{\beta}\right),$$

[1]) Это название было дано Валлисом в 1655 г. ряду, n-й член которого есть $a\{a+b\}\{a+2b\}\dots\{a+(n-1)b\}$. Эйлер применял термин «гипергеометрический» в этом же смысле; современное применение термина, по-видимому, принадлежит Куммеру (Kummer, Journ. für Math. XV (1836)).

[2]) Говорят, что плоскость переменной z разрезана вдоль кривой, когда удобно рассматривать только такие изменения z, при которых z не переходит через эту кривую, так что разрез можно рассматривать как непереходимый барьер.

[3]) Построение строгого доказательства для третьего примера может послужить читателю хорошим упражнением.

Пример. Показать, что

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z).$$

14.11. Значение[1]) функции $F(a, b; c; 1)$ при $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$

Рассматривая коэффициенты при x^n в соответствующих рядах, легко убедиться, что при $0 \leqslant x < 1$

$$\begin{aligned} c\{c-1-(2c-a-b-1)x\} F(a, b; c; x) + \\ +(c-a)(c-b)xF(a, b; c+1; x) = \\ = c(c-1)(1-x)F(a, b; c-1; x) = \\ = c(c-1)\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})x^n\right\}, \end{aligned}$$

где u_n — коэффициент при x^n в $F(a, b; c-1; x)$. Заставим теперь $x \to 1$. В силу результата § 3.71 части I выражение в правой части стремится к нулю, если $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$ сходится к нулю, т. е. если $u_n \to 0$, что и имеет место в том случае, когда $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$.

Левая же часть по § 2.38 и § 3.71 части I при тех же самых условиях стремится к

$$c(a+b-c)F(a, b; c; 1)+(c-a)(c-b)F(a, b; c+1; 1),$$

и следовательно,

$$F(a, b; c; 1) = \frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)} F(a, b; c+1; 1).$$

Повторяя эту операцию, видим, что

$$\begin{aligned} F(a, b; c; 1) &= \left\{\prod_{n=0}^{m-1} \frac{(c-a+n)(c-b+n)}{(c+n)(c-a-b+n)}\right\} F(a, b; c+m; 1) = \\ &= \left\{\lim_{m\to\infty} \prod_{n=0}^{m-1} \frac{(c-a+n)(c-b+n)}{(c+n)(c-a-b+n)}\right\} \lim_{m\to\infty} F(a, b; c+m; 1), \end{aligned}$$

если эти два предела существуют.

Но (§ 12.13) первый предел равен

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$

[1]) Этот анализ принадлежит Гауссу. Способ, более легкий для запоминания, но более трудный в смысле доказательства, дан в примере 2 § 14.6.

если c не есть отрицательное целое число; далее, если обозначим через $u_n(a, b, c)$ коэффициент при x^n в $F(a, b; c; x)$, то при $m > |c|$ имеем

$$|F(a, b; c+m; 1) - 1| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(a, b, c+m)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} u_n(|a|, |b|, m - |c|) <$$
$$< \frac{|ab|}{m - |c|} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(|a| + 1, |b| + 1, m + 1 - |c|).$$

Последний ряд сходится при $m > |c| + |a| + |b| - 1$ и представляет положительную убывающую функцию от m; поэтому, так как $\{m - |c|\}^{-1} \to 0$, мы имеем

$$\lim_{m \to \infty} F(a, b; c+m; 1) = 1$$

и окончательно

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}.$$

14.2. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $F(a, b; c; z)$

По способу § 10.3 части I легко убедиться, что гипергеометрический ряд является вблизи $z = 0$ интегралом *гипергеометрического уравнения*[1])

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\}\frac{du}{dz} - abu = 0.$$

По § 10.3 части I видно, что всякая точка есть «обыкновенная точка» этого уравнения, за исключением 0, 1, ∞, и что последние являются «правильными особыми точками».

Пример. Показать, что одним из интегралов уравнения

$$z\left(z\frac{d}{dz} + a\right)\left(z\frac{d}{dz} + b\right)u - \left(z\frac{d}{dz} - \alpha\right)\left(z\frac{d}{dz} - \beta\right)u = 0$$

является

$$z^{\alpha}F(a+\alpha; b+\alpha; \alpha-\beta+1; z).$$

---

[1]) Это уравнение было дано Гауссом.

14.3. Решения P-уравнения Римана при помощи гипергеометрических функций

В § 10.72 части I было отмечено, что дифференциальное уравнение Римана [1])

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right\}\frac{du}{dz}+$$
$$+\left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}+\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right\}\frac{u}{(z-a)(z-b)(z-c)}=0$$

при соответственной замене переменных может быть приведено к гипергеометрическому уравнению. Выполняя эту замену, мы видим, что решением уравнения Римана будет

$$\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}F\left\{\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}\right\},$$

где предполагается, что $\alpha-\alpha'$ не есть целое отрицательное число.

Для простоты мы будем предполагать во всей этой главе, что ни одна из разностей показателей $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ не будет нулем или целым числом, так как (§ 10.32, часть I) в этом исключительном случае в общее решение дифференциального уравнения могут входить логарифмические члены. Формулы для этого исключительного случая можно найти в мемуаре [2]) Линделёфа, к которому мы и отсылаем читателя.

Если теперь в полученном выражении переставить местами α и α' или γ и γ', то оно должно все же удовлетворять уравнению Римана, так как такая замена не изменяет этого уравнения.

Таким образом, мы получим в итоге четыре выражения, а именно:

$$u_1=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}F\left\{\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\},$$
$$u_2=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}F\left\{\alpha'+\beta+\gamma,\ \alpha'+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha'-\alpha;\ \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\},$$
$$u_3=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}F\left\{\alpha+\beta+\gamma',\ \alpha+\beta'+\gamma';\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\},$$
$$u_4=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}F\left\{\alpha'+\beta+\gamma',\ \alpha'+\beta'+\gamma';\ 1+\alpha'-\alpha;\ \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right\},$$

---

[1]) Постоянные подчиняются условию

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1.$$

[2]) Lindelöf, Acta Soc. Scient. Fennicae, XIX (1893). См. также стеклографированные лекции Клейна (Klein, Ueber die hypergeometrische Funktion, Leipzig, Teubner, 1906).

которые являются решениями рассматриваемого дифференциального уравнения.

Кроме того, дифференциальное уравнение не изменится, если тройки чисел (α, α', a); (β, β', b); (γ, γ', c) как-либо переставить. Поэтому, если мы произведем такие перестановки в вышеприведенных решениях, то они все же останутся решениями дифференциального уравнения.

Имеется пять таких перестановок, ибо мы можем написать $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$, $\{a, c, b\}$, $\{c, b, a\}$, $\{b, a, c\}$ вместо $\{a, b, c\}$ и сделать соответственные перестановки α, α'; β, β'; γ, γ'. Таким образом, мы получим $4 \times 5 = 20$ новых выражений, которые вместе с четырьмя предыдущими дают двадцать четыре частных решения уравнения Римана, выраженных через гипергеометрические ряды.

Двадцать новых решений можно записать следующим образом:

$$\left\{\begin{aligned}
u_5 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha} F\left\{\beta+\gamma+\alpha,\ \beta+\gamma'+\alpha';\ 1+\beta-\beta';\ \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\},\\
u_6 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha} F\left\{\beta'+\gamma+\alpha,\ \beta'+\gamma'+\alpha;\ 1+\beta'-\beta;\ \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\},\\
u_7 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'} F\left\{\beta+\gamma+\alpha',\ \beta+\gamma'+\alpha';\ 1+\beta-\beta';\ \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\},\\
u_8 &= \left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'} F\left\{\beta'+\gamma+\alpha',\ \beta'+\gamma'+\alpha';\ 1+\beta'-\beta;\ \frac{(a-c)(z-b)}{(a-b)(z-c)}\right\},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
u_9 &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta} F\left\{\gamma+\alpha+\beta,\ \gamma+\alpha'+\beta;\ 1+\gamma-\gamma';\ \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\},\\
u_{10} &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta} F\left\{\gamma'+\alpha+\beta,\ \gamma'+\alpha'+\beta;\ 1+\gamma'-\gamma;\ \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\},\\
u_{11} &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'} F\left\{\gamma+\alpha+\beta',\ \gamma+\alpha'+\beta';\ 1+\gamma-\gamma';\ \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\},\\
u_{12} &= \left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'} F\left\{\gamma'+\alpha+\beta',\ \gamma'+\alpha'+\beta';\ 1+\gamma'-\gamma;\ \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}\right\},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
u_{13} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta} F\left\{\alpha+\gamma+\beta,\ \alpha+\gamma'+\beta;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\},\\
u_{14} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta} F\left\{\alpha'+\gamma+\beta,\ \alpha'+\gamma'+\beta;\ 1+\alpha'-\alpha;\ \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\},\\
u_{15} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'} F\left\{\alpha+\gamma+\beta',\ \alpha+\gamma'+\beta';\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\},\\
u_{16} &= \left(\frac{z-a}{z-c}\right)^{\alpha'}\left(\frac{z-b}{z-c}\right)^{\beta'} F\left\{\alpha'+\gamma+\beta',\ \alpha'+\gamma'+\beta';\ 1+\alpha'-\alpha;\ \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}\right\},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
u_{17} &= \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} F\left\{\gamma+\beta+\alpha,\ \gamma+\beta'+\alpha;\ 1+\gamma-\gamma';\ \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\},\\
u_{18} &= \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha} F\left\{\gamma'+\beta+\alpha,\ \gamma'+\beta'+\alpha;\ 1+\gamma'-\gamma;\ \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\},\\
u_{19} &= \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'} F\left\{\gamma+\beta+\alpha',\ \gamma+\beta'+\alpha';\ 1+\gamma-\gamma';\ \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\},\\
u_{20} &= \left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma'}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha'} F\left\{\gamma'+\beta+\alpha',\ \gamma'+\beta'+\alpha';\ 1+\gamma'-\gamma;\ \frac{(a-b)(z-c)}{(a-c)(z-b)}\right\},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
u_{21} &= \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma} F\left\{\beta+\alpha+\gamma,\ \beta+\alpha'+\gamma;\ 1+\beta-\beta';\ \frac{(c-a)(z-b)}{(c-b)(z-a)}\right\},\\
u_{22} &= \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma} F\left\{\beta'+\alpha+\gamma,\ \beta'+\alpha'+\gamma;\ 1+\beta'-\beta;\ \frac{(c-a)(z-b)}{(c-b)(z-a)}\right\},\\
u_{23} &= \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'} F\left\{\beta+\alpha+\gamma',\ \beta+\alpha'+\gamma';\ 1+\beta-\beta';\ \frac{(c-a)(z-b)}{(c-b)(z-a)}\right\},\\
u_{24} &= \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\beta'}\left(\frac{z-c}{z-a}\right)^{\gamma'} F\left\{\beta'+\alpha+\gamma',\ \beta'+\alpha'+\gamma';\ 1+\beta'-\beta;\ \frac{(c-a)(z-b)}{(c-b)(z-a)}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Заменяя α, α', β, β', γ, γ', $\frac{(z-a)(c-b)}{(z-b)(c-a)}$ соответственно через 0, $1-C$, A, B, 0, $C-A-B$, x, мы получим 24 решения гипергеометрического уравнения, которому удовлетворяет $F(A, B; C; x)$.

Существование этих 24 решений впервые было доказано Куммером[1]).

14.4. Соотношения между частными решениями гипергеометрического уравнения

Нами было только что показано, что 24 выражения, заключающие в себе гипергеометрические ряды, являются решениями гипергеометрического уравнения; но из общей теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка известно, что если какие-либо три из них имеют общую область существования, то должно существовать линейное соотношение с постоянными коэффициентами, связывающее эти три решения.

Если мы упростим u_1, u_2, u_3, u_4, u_{17}, u_{18}, u_{21}, u_{22} способом, указанным в конце § 14.3, то получим следующие решения гипергео-

[1]) Kummer; Journ. für Math. XV (1836), 39—83, 127—172. Они были получены другим способом Форсайтом (Forsyth, Treatise on Differential Equations, гл. VI).

метрического уравнения с элементами A, B, C, x:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= F(A,\ B;\ C;\ x),\\
y_2 &= (-x)^{1-C} F(A-C+1,\ B-C+1;\ 2-C;\ x),\\
y_3 &= (1-x)^{C-A-B} F(C-B,\ C-A;\ C;\ x),\\
y_4 &= (-x)^{1-C}(1-x)^{C-A-B} F(1-B,\ 1-A;\ 2-C;\ x),\\
y_{17} &= F(A,\ B;\ A+B-C+1;\ 1-x),\\
y_{18} &= (1-x)^{C-A-B} F(C-B,\ C-A;\ C-A-B+1;\ 1-x),\\
y_{21} &= (-x)^{-B} F(A,\ A-C+1;\ A-B+1;\ x^{-1}),\\
y_{22} &= (-x)^{-A} F(B,\ B-C+1;\ B-A+1;\ x^{-1}).
\end{aligned}
$$

Если $|\arg(1-x)| < \pi$, то легко видеть из § 2.53 части I, что при $|x| < 1$ соотношения, связывающие y_1, y_2, y_3, y_4, должны быть вида $y_1 = y_3$, $y_2 = y_4$; это следует из рассмотрения вида разложений содержащихся в них рядов вблизи $x = 0$.

Подобным же образом мы можем сгруппировать функции $u_1, \ldots, u_{24}$ в шесть групп по четыре в каждой[1]), именно:

$$
\begin{array}{lll}
u_1,\ u_3,\ u_{13},\ u_{15}; & u_2,\ u_4,\ u_{14},\ u_{16}; & u_5,\ u_7,\ u_{21},\ u_{23};\\
u_6,\ u_8,\ u_{22},\ u_{24}; & u_9,\ u_{11},\ u_{17},\ u_{19}; & u_{10},\ u_{12},\ u_{18},\ u_{20},
\end{array}
$$

таким образом, что члены одной и той же группы будут отличаться друг от друга постоянными множителями в подходящей области. В частности, отметим, что u_1, u_3, u_{13}, u_{15} отличаются постоянным множителем от функции, которая (согласно §§ 5.4, 2.53 части I) может быть разложена в ряд

$$
(z-a)^{\alpha}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty} e_n (z-a)^n\right\}
$$

при $|z-a|$ достаточно малом; если $\arg(z-a)$ ограничен так, что функция $(z-a)^{\alpha}$ будет однозначной, то это решение уравнения Римана обозначается обычно через $P^{(\alpha)}$. Подобным же образом определяются $P^{(\alpha')}$, $P^{(\beta)}$, $P^{(\beta')}$, $P^{(\gamma)}$, $P^{(\gamma')}$ при достаточно малых $|z-a|$, $|z-b|$, $|z-c|$ соответственно.

Значительно труднее получить соотношения, связывающие три решения различных групп. Эти соотношения получаются при помощи

---

[1]) Частная формула $F(A,\ 1;\ C;\ x) = \dfrac{1}{1-x} F\left(C-A,\ 1;\ C;\ \dfrac{x}{x-1}\right)$, которую можно вывести из соотношения, связывающего u_1 с u_{13}, была открыта в 1730 г. Стирлингом (Stirling, Methodus Differentialis, предл. VII).

преобразований интегралов, взятых по двойным петлям, которые будут получены ниже, в § 14.61; но более простой и чрезвычайно изящный способ был недавно открыт Барнсом; мы дадим краткое изложение этого способа.

14.5. Контурные интегралы Барнса для гипергеометрической функции [1])

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds,$$

где $|\arg(-z)|<\pi$ и путь интегрирования искривлен (если это необходимо) для обеспечения того, чтобы полюсы функции

$$\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s),$$

т. е. $s=-a-n,\ -b-n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, лежали слева от пути и полюсы функции $\Gamma(-s)$, т. е. $s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, лежали справа от пути [2]).

Из § 13.6 следует, что подинтегральная функция будет

$$O\left[|s|^{a+b-c-1}\exp\{-\arg(-z)\cdot\operatorname{Im}s-\pi\,|\operatorname{Im}s|\}\right],$$

когда $s\to\infty$ на контуре; отсюда легко видеть (§ 5.32, часть I), что подинтегральная функция является аналитической функцией от z во всей области, определяемой неравенством $|\arg z|\leqslant\pi-\delta$, где δ — произвольное положительное число.

Теперь, принимая во внимание соотношение

$$\Gamma(-s)\,\Gamma(1+s)=-\pi\operatorname{cosec}s\pi,$$

рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\pi\,(-z)^s}{\Gamma(c+s)\,\Gamma(1+s)\sin s\pi}\,ds,$$

где C — полуокружность радиуса $N+\frac{1}{2}$ справа от мнимой оси с центром в начале координат и N — целое число.

---

[1]) Barnes, Proc. London Math. Soc. (2), VI (1908), 141—177. Библиография более ранних работ по сходным вопросам — Пинкерле (Pincherle), Меллина (Mellin) и Барнса (Barnes) — дана там же.

[2]) Предполагается, что a и b таковы, что контур может быть проведен, т. е. что a и b не являются целыми отрицательными числами (в каковом случае гипергеометрический ряд будет просто полиномом).

По § 13.6 мы имеем

$$\frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\pi\,(-z)^s}{\Gamma(c+s)\,\Gamma(1+s)\sin s\pi} = O\left(N^{a+b-c-1}\right)\frac{(-z)^s}{\sin s\pi},$$

когда $N\to\infty$; постоянная, заключающаяся в символе O, не зависит от $\arg s$, когда s находится на рассматриваемой полуокружности; полагая $s=\left(N+\frac{1}{2}\right)e^{i\theta}$, имеем, если $|z|<1$,

$$(-z)^s \operatorname{cosec} s\pi = O\left[\exp\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right)\cos\theta\lg|z| - \right.\right.$$
$$\left.\left.-\left(N+\frac{1}{2}\right)\sin\theta\arg(-z)-\left(N+\frac{1}{2}\right)\pi\,|\sin\theta|\right\}\right]=$$
$$=O\left[\exp\left\{\left(N+\frac{1}{2}\right)\cos\theta\lg|z|-\left(N+\frac{1}{2}\right)\delta\,|\sin\theta|\right\}\right]=$$
$$=\begin{cases} O\left[\exp\left\{2^{-\frac{1}{2}}\left(N+\frac{1}{2}\right)\lg|z|\right\}\right], & 0\leqslant|\theta|\leqslant\frac{1}{4}\pi,\\ O\left[\exp\left\{-2^{-\frac{1}{2}}\delta\left(N+\frac{1}{2}\right)\right\}\right], & \frac{1}{4}\pi\leqslant|\theta|\leqslant\frac{1}{2}\pi.\end{cases}$$

Таким образом, если $\lg|z|$ отрицателен (т. е. $|z|<1$), то подинтегральная функция стремится к нулю достаточно быстро (для всех рассматриваемых значений θ), чтобы $\int_C \to 0$ при $N\to\infty$.

Далее, выражение

$$\int_{-\infty i}^{\infty i} - \left\{\int_{-\infty i}^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)i} + \int_C + \int_{\left(N+\frac{1}{2}\right)i}^{\infty i}\right\}$$

по теореме Коши равно $-2\pi i$, умноженному на сумму вычетов подинтегральной функции в точках $s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N$. Заставим $N\to\infty$; тогда последние три интеграла будут стремиться к нулю, когда $|\arg(-z)|\leqslant\pi-\delta$ и $|z|<1$, и следовательно, при этих условиях

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma(a+s)\,\Gamma(b+s)\,\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\,n!}z^n,$$

причем общий член в сумме является вычетом подинтегральной функции при $s=n$.

Таким образом, существует аналитическая функция (именно рассматриваемый интеграл) во всей области, определяемой неравенством $|\arg(-z)| < \pi$, *которая при* $|z| < 1$ *может быть представлена рядом*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\,n!} z^n.$$

Символ $F(a, b; c; z)$ употребляется в дальнейшем для обозначения этой функции, разделенной на $\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(c)$.

14.51. Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда

Для представления функции $F(a, b; c; z)$ в виде сходящегося ряда, когда $|z| > 1$, используем интеграл, полученный в § 14.5. Если D — полуокружность радиуса ρ слева от мнимой оси и с центром в начале координат, то способом § 14.5 можно показать [1]), что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds \to 0,$$

когда $\rho \to \infty$, если $|\arg(-z)| < \pi$, $|z| > 1$ и $\rho \to \infty$ так, чтобы нижняя граница расстояния D от полюсов подинтегральной функции была *положительным* числом (не нулем).

После этого можно доказать (как в соответственном месте § 14.5), что при $|\arg(-z)| < \pi$ и $|z| > 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(1-c+a+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1-b+a+n)}\,\frac{\sin(c-a-n)\pi}{\cos n\pi\,\sin(b-a-n)\pi}(-z)^{-a-n} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)\Gamma(1-c+b+n)}{\Gamma(1+n)\Gamma(1-a+b+n)}\,\frac{\sin(c-b-n)\pi}{\cos n\pi\,\sin(a-b-n)\pi}(-z)^{-b-n},$$

причем выражения в этих суммах являются вычетами подинтегральной функции в точках $s = -a-n$ и $s = -b-n$ соответственно.

После упрощения этих рядов сразу заключаем, что аналитическое продолжение ряда, которым была первоначально определена гипер-

[1]) При рассмотрении асимптотического разложения подинтегральной функции, когда $|s|$ велик на контуре или на D, проще всего преобразовать функции $\Gamma(a+s)$, $\Gamma(b+s)$, $\Gamma(c+s)$ при помощи соотношения § 12.14.

геометрическая функция, дается равенством

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z) =$$

$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a-c)}(-z)^{-a} F(a, 1-c+a; 1-b+a; z^{-1}) +$$

$$+ \frac{\Gamma(b)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b-c)}(-z)^{-b} F(b, 1-c+b; 1-a+b; z^{-1}),$$

где $|\arg(-z)| < \pi$.

Легко видеть, что каждый из трех членов этого равенства является решением гипергеометрического уравнения (см. § 14.4).

Полученный результат должен быть видоизменен, когда $a-b$ есть целое число или нуль, так как некоторые из полюсов выражения $\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)$ будут двойными, и тогда правая часть может содержать логарифмические члены согласно § 14.3.

Следствие. Положив $b=c$, мы видим, что при $|\arg(-z)| < \pi$

$$\Gamma(a)(1-z)^{-a} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i} \Gamma(a+s)\Gamma(-s)(-z)^s\, ds,$$

где $(1-z)^{-a} \to 1$, когда $z \to 0$, и следовательно, в этом равенстве всегда нужно брать то значение $|\arg(1-z)|$, которое меньше π, ввиду наличия *разреза* от 0 до $+\infty$, вытекающего из неравенства $|\arg(-z)| < \pi$.

14.52. Лемма Барнса

Если путь интегрирования искривлен так, что полюсы выражения $\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)$ *лежат справа от него, а полюсы выражения* $\Gamma(\alpha+s)\times\Gamma(\beta+s)$ *слева* [1]), *то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i} \Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)\, ds =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}.$$

Обозначим через I выражение в левой части.

Пусть C — полуокружность радиуса ρ, расположенная справа от мнимой оси, с центром в начале координат, и пусть $\rho \to \infty$ таким образом, что нижняя граница расстояния C от полюсов выражения $\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)$ *положительна* (не нуль), тогда легко видеть, что

$$\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s) =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)}{\Gamma(1-\gamma+s)\Gamma(1-\delta+s)}\pi^2 \operatorname{cosec}(\gamma-s)\pi \operatorname{cosec}(\delta-s)\pi =$$

$$= O\left[s^{\alpha+\beta+\gamma+\delta-2}\exp\{-2\pi|\operatorname{Im} s|\}\right]$$

---

[1]) Предполагается, что α, β, γ, δ таковы, что ни один из полюсов первой совокупности не совпадает ни с одним полюсом второй совокупности.

для точек s на полуокружности C; то же самое верно, когда $|s|\to\infty$ по мнимой оси. Отсюда следует, что исходный интеграл сходится и что $\int\limits_C \to 0$ при $\rho\to\infty$, если $\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)<0$.

Таким образом, как и в § 14.5, интеграл, входящий в I, равен произведению $-2\pi i$ на сумму вычетов подинтегральной функции в полюсах выражения $\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)$. Вычисляя эти вычеты, мы получим [1]):

$$I=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\gamma+n)\Gamma(\beta+\gamma+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\gamma-\delta+n)}\frac{\pi}{\sin(\delta-\gamma)\pi}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+\delta+n)\Gamma(\beta+\delta+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(1+\delta-\gamma+n)}\frac{\pi}{\sin(\gamma-\delta)\pi}.$$

Пользуясь результатом § 12.14, имеем в силу § 14.11

$$I=\frac{\pi}{\sin(\gamma-\delta)\pi}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(1-\gamma+\delta)}F(\alpha+\delta,\beta+\delta;1-\gamma+\delta;1)-\right.$$
$$\left.-\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(1-\delta+\gamma)}F(\alpha+\gamma,\beta+\gamma;1-\delta+\gamma;1)\right\}=$$
$$=\frac{\pi\Gamma(1-\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\sin(\gamma-\delta)\pi}\left\{\frac{\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(1-\alpha-\gamma)\Gamma(1-\beta-\gamma)}-\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha-\delta)\Gamma(1-\beta-\delta)}\right\}=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi\sin(\gamma-\delta)\pi}\{\sin(\alpha+\gamma)\pi\sin(\beta+\gamma)\pi-$$
$$-\sin(\alpha+\delta)\pi\sin(\beta+\delta)\pi\}.$$

Но

$$2\sin(\alpha+\gamma)\pi\sin(\beta+\gamma)\pi-2\sin(\alpha+\delta)\pi\sin(\beta+\delta)\pi=$$
$$=\cos(\alpha-\beta)\pi-\cos(\alpha+\beta+2\gamma)\pi-\cos(\alpha-\beta)\pi+\cos(\alpha+\beta+2\delta)\pi=$$
$$=2\sin(\gamma-\delta)\pi\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi.$$

Поэтому

$$I=\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)},$$

что и является искомым результатом; он доказан пока только при условии

$$\operatorname{Re}(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)<0;$$

но по теории аналитического продолжения он верен во всей области, в которой обе части равенства являются аналитическими функциями, скажем, от α; а отсюда вытекает справедливость результата для всех значений α, β, γ, δ, для которых ни один из полюсов выражения $\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)$, как функции от s, не совпадает с каким-либо полюсом выражения

$$\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s).$$

Следствие. Написав $s+k$, $\alpha-k$, $\beta-k$, $\gamma+k$, $\delta+k$ вместо s, α, β, γ, δ, мы видим, что результат остается верным и тогда, когда пределы интегрирования суть $-k\pm\infty i$, где k — любая вещественная постоянная.

---

[1]) Оба эти ряда сходящиеся (§ 2.38, часть I).

14.53. Связь между гипергеометрическими функциями от z и от $1-z$

Мы видели, что при $\arg|(-z)|<\pi$

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-k-\infty i}^{-k+\infty i}\Gamma(a+t)\Gamma(b+t)\Gamma(s-t)\Gamma(c-a-b-t)\,dt\right\}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(-s)(-z)^s}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\,ds$$

по лемме Барнса. Можно доказать, что если взять k так, что нижняя граница расстояния между контурами s и t будет положительная (не нуль), порядок интегрирования[1]) можно изменить.

Изменяя порядок, мы видим, что если $\arg(1-z)$ приписать его главное значение, то

$$\frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-k-\infty i}^{-k+\infty i}\Gamma(a+t)\,\Gamma(b+t)\Gamma(c-a-b-t)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\Gamma(s-t)\Gamma(-s)(-z)^s\,ds\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-k-\infty i}^{-k+\infty i}\Gamma(a+t)\,\Gamma(b+t)\,\Gamma(c-a-b-t)\,\Gamma(-t)\,(1-z)^t\,dt.$$

Далее, при $|\arg(1-z)|<\pi$ и $|1-z|<1$ последний интеграл может быть вычислен с помощью методов, примененных в лемме Барнса (§ 14.52), и мы найдем, таким образом, что

$$\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a)\Gamma(b)F(a, b; c; z) =$$
$$= \Gamma(c)\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-a-b)\,F(a, b; a+b-c+1; 1-z)+$$
$$+\Gamma(c)\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)\Gamma(a+b-c)(1-z)^{c-a-b}\,F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z)$$

— результат, который показывает природу особенности функции $F(a, b; c; z)$ при $z=1$.

Этот результат изменяется, если $c-a-b$ — целое число или нуль, так как тогда

$$\Gamma(a+t)\,\Gamma(b+t)\,\Gamma(c-a-b-t)\,\Gamma(-t)$$

---

[1]) Можно применить методы, подобные методам § 4.51 части I, или доказать без особых трудностей, что удовлетворяются условия, установленные Бромуичем (Bromwich) в «Infinite Series», § 177.

имеет двойной полюс и могут появиться логарифмические члены. За этим исключением, результат имеет силу при

$$|\arg(-z)| < \pi, \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

Взяв $|z| < 1$, мы можем заставить z стремиться к вещественному значению, и мы видим, что результат остается верным для вещественных значений z, удовлетворяющих условию $0 < z < 1$.

14.6. Решение уравнения Римана при помощи интеграла по контуру

Перейдем теперь к отысканию контурного интеграла, выражающего гипергеометрическую функцию.

Заменим функцию u в уравнении Римана (§ 10.7, часть I) новой функцией I, определяемой соотношением

$$u = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma} I.$$

Дифференциальным уравнением, которому удовлетворяет функция I, будет, как легко установить, уравнение

$$\frac{d^2I}{dz^2} + \left\{\frac{1+\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1+\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1+\gamma-\gamma'}{z-c}\right\}\frac{dI}{dz} +$$
$$+ \frac{(\alpha+\beta+\gamma)\left\{(\alpha+\beta+\gamma+1)z + \sum a(\alpha+\beta'+\gamma'-1)\right\}}{(z-a)(z-b)(z-c)} I = 0,$$

которое можно написать в виде

$$Q(z)\frac{d^2I}{dz^2} - \{(\lambda-2)Q'(z) + R(z)\}\frac{dI}{dz} +$$
$$+ \left\{\frac{1}{2}(\lambda-2)(\lambda-1)Q''(z) + (\lambda-1)R'(z)\right\} I = 0,$$

где

$$\lambda = 1-\alpha-\beta-\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma',$$
$$Q(z) = (z-a)(z-b)(z-c),$$
$$R(z) = \sum(\alpha'+\beta+\gamma)(z-b)(z-c).$$

Следует заметить, что функция I не аналитическая в бесконечно удаленной точке и, следовательно, вышеприведенное дифференциальное уравнение относительно I не есть частный случай обобщенного гипергеометрического уравнения.

Покажем теперь, что этому дифференциальному уравнению удовлетворяет интеграл вида

$$I = \int\limits_C (t-a)^{\alpha'+\beta+\gamma-1}(t-b)^{\alpha+\beta'+\gamma-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(z-t)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,dt,$$

если контур интегрирования C выбран надлежащим образом.

Действительно, если мы подставим этот интеграл I в дифференциальное уравнение, то условие[1]), что уравнение удовлетворится, примет вид

$$\int_C (t-a)^{\alpha'+\beta+\gamma-1}(t-b)^{\alpha+\beta'+\gamma-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(z-t)^{-\alpha-\beta-\gamma-2}K\,dt = 0,$$

где

$$\begin{aligned}K &= (\lambda-2)\left\{Q(z)+(t-z)Q'(z)+\frac{1}{2}(t-z)^2Q''(z)\right\}+\\ &\qquad + (t-z)\{R(z)+(t-z)R'(z)\} =\\ &= (\lambda-2)\{Q(t)-(t-z)^3\}+(t-z)\left\{R(t)-(t-z)^2\sum(\alpha'+\beta+\gamma)\right\} =\\ &= -(1+\alpha+\beta+\gamma)(t-a)(t-b)(t-c)+\sum(\alpha'+\beta+\gamma)(t-b)(t-c)(t-z).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что требуемое условие приводится к равенству

$$\int_C \frac{dV}{dt}\,dt = 0,$$

где

$$V = (t-a)^{\alpha'+\beta+\gamma}(t-b)^{\alpha+\beta'+\gamma}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'}(t-z)^{-(1+\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Поэтому интеграл I является решением дифференциального уравнения, когда контур C таков, что V принимает свое начальное значение после того, как t опишет C.

Далее,

$$V = (t-a)^{\alpha'+\beta+\gamma-1}(t-b)^{\alpha+\beta'+\gamma-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(z-t)^{-\alpha-\beta-\gamma}U,$$

где

$$U = (t-a)(t-b)(t-c)(z-t)^{-1}$$

— однозначная функция от t; отсюда следует, что если C — замкнутый контур, то он должен быть таким, чтобы подинтегральная функция в интеграле I принимала свое начальное значение после того, как t опишет контур.

Из сказанного заключаем: *любой интеграл вида*

$$(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}\times \\ \times\int_C (t-a)^{\beta+\gamma+\alpha'-1}(t-b)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(z-t)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,dt$$

представляет решение гипергеометрического дифференциального уравнения, если C является либо замкнутым контуром в пло-

---

[1]) Дифференцирование под знаком интеграла допустимо (§ 4.2, часть I) в том случае, если путь C не зависит от z и не проходит через точки a, b, c, z; если C — бесконечный контур или если C проходит через точки a, b, c или z, то необходимы дополнительные условия.

скости t, таким, что подинтегральная функция принимает свое начальное значение после того, как t опишет его, либо же такой кривой, что V имеет одинаковые значения на ее концах.

Методы, с помощью которых интегралы этого типа можно преобразовать так, чтобы прийти к соотношениям §§ 14.51 и 14.53, читатель найдет в мемуарах Похгаммера (Pochhammer, Math. Ann. XXXV (1890), стр. 495—526) и Гобсона (Hobson, Phil. Trans., 187A (1896), 443—531).

Пример 1. Получить вещественный определенный интеграл, представляющий при известных условиях гипергеометрический ряд.

Гипергеометрический ряд $F(a, b; c; z)$, как уже показано, является решением дифференциального уравнения, определяемого схемой

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & z \\ 1-c & b & c-a-b & \end{matrix}\right\}.$$

Если в интеграле

$$(z-a)^{\alpha}\left(1-\frac{z}{b}\right)^{\beta}(z-c)^{\gamma}\times$$
$$\times\int_C (t-a)^{\beta+\gamma+\alpha'-1}\left(1-\frac{t}{b}\right)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(t-z)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,dt,$$

который отличается от только что полученного на постоянный множитель, перейдем к пределу при $b\to\infty$ (оставляя в стороне вопрос о допустимости этой операции), то мы придем к рассмотрению интеграла

$$\int_C t^{a-c}(t-1)^{c-b-1}(t-z)^{-a}\,dt\ ^{1)}.$$

Предельной формой для V будет

$$t^{1-c+a}(t-1)^{c-b}(t-z)^{-1-a},$$

а это выражение стремится к нулю при $t=1$ и $t=\infty$, если $\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} b>0$.

В соответствии с этим рассмотрим

$$\int_1^{\infty} t^{a-c}(t-1)^{c-b-1}(t-z)^{-a}\,dt,$$

где z не есть положительное[2]) число, большее 1.

---

[1]) Здесь не совсем удачные обозначения: точки a, b, c в общем контурном интеграле не имеют никакого отношения к параметрам a, b, c в схеме P. Авторы хотят сказать, что, специализируя общий контурный интеграл для случая *точек* $a=0$, $b=\infty$ и $c=1$, и подставляя в него затем выражения для α, α', β, β', γ, γ' через *параметры* a, b, c в схеме P, мы приходим к рассмотрению интеграла $\int_C t^{a-c}(t-1)^{c-b-1}(t-z)^{-a}\,dt$. — *Прим. ред.*

[2]) Этим обеспечивается, что точка $t=z$ не будет находиться на пути интегрирования.

В этом интеграле положим $t = u^{-1}$; тогда он переходит в интеграл

$$\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-uz)^{-a}\,du.$$

На основании сказанного можно ожидать, что этот интеграл будет решением дифференциального уравнения для гипергеометрического ряда.

В самом деле, легко видеть, что если $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b$ и $\arg u = \arg(1-u) = 0$, а ветвь функции $1-uz$ характеризуется тем, что $(1-uz)^{-a} \to 1$ при $u \to 0$, то только что найденный интеграл будет равен

$$\frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z).$$

Это можно доказать, разлагая [1]) $(1-uz)^{-a}$ в ряд по возрастающим степеням z, когда $|z| < 1$, и пользуясь § 12.41.

Пример 2. Вывести результат § 14.11 из предыдущего примера.

14.61. Нахождение интеграла, представляющего $P^{(\alpha)}$

Покажем теперь, как может быть найден интеграл, представляющий частное решение $P^{(\alpha)}$ (§ 14.4) гипергеометрического дифференциального уравнения.

Мы видели (§ 14.6), что интеграл

$$I = (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}\int_C (t-a)^{\beta+\gamma+\alpha'-1}(t-b)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}\times$$
$$\times(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(t-z)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,dt$$

удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению, если C — такой замкнутый контур, что подинтегральная функция принимает свое начальное значение после того, как t опишет C.

Особыми точками подинтегральной функции в плоскости t являются точки a, b, c, z, и после того, как t опишет двойную петлю (§ 12.43), определяемую символом $(b+, c+, b-, c-)$, подинтегральная функция принимает начальное значение.

Далее, если z лежит в круге с центром a, не содержащем ни одной из точек b, c, то мы можем выбрать путь интегрирования так, что t будет находиться вне этого круга, и тогда $|z-a| < |t-a|$ для всех точек t на этом пути.

Выберем $\arg(z-a)$, по величине меньший π, а $\arg(z-b)$ и $\arg(z-c)$ так, чтобы они приводились к $\arg(a-b)$, $\arg(a-c)$ [2]), когда $z \to a$; фиксируем $\arg(t-a)$, $\arg(t-b)$, $\arg(t-c)$ в точке N, в которой начинается и кончается путь интегрирования; далее, выберем $\arg(t-z)$ так, чтобы он приводился к $\arg(t-a)$ при $z \to a$.

---

[1]) Предоставляем читателю доказать справедливость этой операции, пользуясь § 4.7 части I.

[2]) Причем значения $\arg(a-b)$, $\arg(a-c)$ фиксированы.

Тогда имеем

$$(z-b)^{\beta}=(a-b)^{\beta}\left\{1+\beta\left(\frac{z-a}{a-b}\right)+\ldots\right\},$$

$$(z-c)^{\gamma}=(a-c)^{\gamma}\left\{1+\gamma\left(\frac{z-a}{a-c}\right)+\ldots\right\}.$$

Далее, $(t-z)^{-\alpha-\beta-\gamma}$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$(t-a)^{-\alpha-\beta-\gamma}\left\{1-(\alpha+\beta+\gamma)\frac{a-z}{t-a}+\ldots\right\},$$

поэтому мы можем интеграл разложить в ряд, который сходится абсолютно.

Перемножая абсолютно сходящиеся ряды, мы получим ряд, расположенный по целым степеням разности $z-a$, умноженный на $(z-a)^{\alpha}$. Следовательно, мы должны иметь

$$I=(a-b)^{\beta}(a-c)^{\gamma}P^{(\alpha)}\times$$
$$\times\int_{N}^{(b+,\,c+,\,b-,\,c-)}(t-a)^{\beta+\gamma+\alpha'-1}(t-b)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}\,dt$$

и таким же образом можем при помощи интегралов, взятых по двойным петлям, определить и $P^{(\alpha')}$, $P^{(\beta)}$, $P^{(\beta')}$, $P^{(\gamma)}$, $P^{(\gamma')}$.

14.7. Соотношения между смежными гипергеометрическими функциями

Пусть $P(z)$ — решение уравнения Римана с аргументом z, особыми точками a, b, c и показателями α, α', β, β', γ, γ'. Пусть, далее, $P(z)$ отличается от одной из шести функций $P^{(\alpha)}$, $P^{(\alpha')}$, $P^{(\beta)}$, $P^{(\beta')}$, $P^{(\gamma)}$, $P^{(\gamma')}$ лишь постоянным множителем.

Пусть $P_{l+1,\,m-1}(z)$ обозначает функцию, которая получается из $P(z)$ заменой двух показателей l и m соответственно через $l+1$ и $m-1$. Такие функции $P_{l+1,\,m-1}(z)$ называются *смежными* (contiguous) с $P(z)$. Имеется $6\times5=30$ смежных функций, поскольку l и m могут быть любыми двумя из шести показателей.

Риман[1]) впервые показал, что *функция $P(z)$ и две любые смежные с ней связаны между собой линейной зависимостью, в которой коэффициентами являются полиномы от z.*

Очевидно, что таких зависимостей будет $\frac{1}{2}\times30\times29=435$.

---

[1]) Riemann, Abh. der k. Ges. der Wiss. zu Cöttingen (1857). Гаусс (Gauss) получил ранее 15 соотношений между смежными гипергеометрическими функциями.

Чтобы показать, каким образом они могут быть получены, возьмем $P(z)$ в виде

$$P(z)=(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}\times$$
$$\times\int\limits_C (t-a)^{\beta+\gamma+\alpha'-1}(t-b)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(z-t)^{-\alpha-\beta-\gamma}\,dt,$$

где C — двойная петля рассмотренного в § 14.61 типа.

Так как интеграл вдоль C от дифференциала любой функции, которая принимает свое начальное значение после того, как t опишет C, будет равен нулю, то мы имеем

$$0=\int\limits_C \frac{d}{dt}\left\{(t-a)^{\alpha'+\beta+\gamma}(t-b)^{\alpha+\beta'+\gamma-1}(t-c)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(t-z)^{-\alpha-\beta-\gamma}\right\}dt.$$

Продифференцировав последовательно каждый из сомножителей, получим

$$(\alpha'+\beta+\gamma)P+(\alpha+\beta'+\gamma-1)P_{\alpha'+1,\beta'-1}+$$
$$+(\alpha+\beta+\gamma'-1)P_{\alpha'+1,\gamma'-1}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{z-b}P_{\beta+1,\gamma'-1}.$$

Соображения симметрии показывают, что правую часть этого равенства можно заменить выражением

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{z-c}P_{\beta'-1,\gamma+1}.$$

Эти формулы вместе с аналогичными, получаемыми при помощи циклических перестановок[1]) тройки (a,α,α') с тройками (b,β,β') и (c,γ,γ'), представляют собою шесть линейных соотношений, связывающих гипергеометрическую функцию P с двенадцатью смежными функциями

$$P_{\alpha+1,\beta-1},\ P_{\beta+1,\gamma'-1},\ P_{\gamma+1,\alpha'-1},\ P_{\alpha+1,\gamma'-1},\ P_{\beta+1,\alpha'-1},\ P_{\gamma+1,\beta'-1},$$
$$P_{\alpha'+1,\beta'-1},\ P_{\alpha'+1,\gamma'-1},\ P_{\beta'+1,\gamma'-1},\ P_{\beta'+1,\alpha'-1},\ P_{\gamma'+1,\alpha'-1},\ P_{\gamma'+1,\beta'-1}.$$

Затем, положив $t-a=(t-b)+(b-a)$ и обозначая через[2]) $P_{\alpha'-1}$ результат замены в P показателя α' на $\alpha'-1$, получим

$$P=P_{\alpha'-1,\beta'+1}+(b-a)P_{\alpha'-1}.$$

Таким же образом

$$P=P_{\alpha'-1,\gamma'+1}+(c-a)P_{\alpha'-1}.$$

---

[1]) Перестановка делается только в подинтегральном выражении; контур C остается без изменения.

[2]) $P_{\alpha'-1}$ не является функцией типа Римана, поскольку сумма ее показателей при a, b, c не равна единице.

Исключая из этих уравнений $P_{\alpha'-1}$, получим

$$(c-b)P+(a-c)P_{\alpha'-1,\,\beta'+1}+(b-a)P_{\alpha'-1,\,\gamma'+1}=0.$$

Эта и аналогичные формулы являются тремя новыми линейными соотношениями, связывающими P с последними шестью из двенадцати смежных функций, написанных выше.

Далее, положив $(t-z)=(t-a)-(z-a)$, мы тотчас же найдем соотношение

$$P=\frac{1}{z-b}P_{\beta+1,\,\gamma'-1}-(z-a)^{\alpha+1}(z-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}\times$$
$$\times\int\limits_C (t-a)^{\beta+\gamma+\alpha'-1}(z-a)^{\gamma+\alpha+\beta'-1}(z-b)^{\alpha+\beta+\gamma'-1}(t-z)^{-\alpha-\beta-\gamma-1}\,dt,$$

которое приводит к равенствам

$$(z-a)^{-1}\left\{P-(z-b)^{-1}P_{\beta+1,\,\gamma'-1}\right\}=(z-b)^{-1}\left\{P-(z-c)^{-1}P_{\gamma+1,\,\alpha'-1}\right\}=$$
$$=(z-c)^{-1}\left\{P-(z-a)^{-1}P_{\alpha+1,\,\beta'-1}\right\}.$$

Это — два новых линейных соотношения между P и вышеуказанными двенадцатью смежными функциями.

Мы нашли теперь в общей сложности одиннадцать линейных соотношений между P и этими двенадцатью функциями; коэффициенты в этих соотношениях будут рациональными функциями z. Отсюда каждая из этих функций может быть выражена линейно через P и одну какую-нибудь выбранную из них, а это значит, что *между P и любыми двумя из вышеприведенных функций существует линейное соотношение*. Коэффициенты в этом соотношении будут рациональными функциями от z, и после умножения на общее наименьшее кратное их знаменателей они станут полиномами от z.

Теорема, следовательно, доказана по отношению к вышеприведенным двенадцати смежным функциям. Она может быть распространена без затруднений на все тридцать смежных функций.

Следствие. Если из P вывести новые функции заменой показателей α, α', β, β', γ, γ' на $\alpha+p$, $\alpha'+q$, $\beta+r$, $\beta'+s$, $\gamma+t$, $\gamma'+u$, где p, q, r, s, t, u — целые числа, удовлетворяющие соотношению

$$p+q+r+s+t+u=0,$$

то между P и любыми двумя такими функциями существует линейная зависимость, в которой коэффициентами служат полиномы от z.

Этот результат можно доказать, соединив P с этими двумя функциями при помощи цепочки промежуточных смежных функций, выписав линейные зависимости, которые связывают P с двумя функциями, и исключив из этих соотношений промежуточные смежные функции.

Многие теоремы, которые будут установлены позже, как, например, рекуррентные формулы для функций Лежандра (§ 15.21), являются в действительности частными случаями доказанной сейчас теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

C. F. Gauss, Ges. Werke, III, 123—163, 207—229.
E. E. Kummer, Journ. für Math., XV (1836), 39—83, 127—172.
G. F. B. Riemann, Ges. Math. Werke, 67—84.
E. Papperitz, Math. Ann., XXV (1885), 212—221.
S. Pincherle, Rend. Accad. Lincei (4), IV (1888), 694—700, 792—799.
E. W. Barnes, Proc. London Math. Soc. (2), VI (1908), 141—177.
Hj. Mellin, Acta Soc. Fennicae, XX (1895), No. 12.
В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, Гостехиздат, 1956.
Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Гостехиздат, М., 1953.

Примеры

1. Показать, что

$$F(a, b+1; c, z) - F(a, b; c; z) = \frac{az}{c} F(a+1, b+1; c+1; z).$$

2. Показать, что если α — отрицательное целое число, в то время как β и γ не целые числа, то отношение

$$F(\alpha, \beta; \alpha+\beta+1-\gamma; 1-x) : F(\alpha, \beta; \gamma; x)$$

не зависит от x, и найти его значение.

3. Пусть $P(z)$ — гипергеометрическая функция; выразить ее производные $\frac{dP}{dz}$ и $\frac{d^2P}{dz^2}$ линейно через функцию P и смежные функции и отсюда найти линейное соотношение между P, $\frac{dP}{dz}$ и $\frac{d^2P}{dz^2}$, т. е. проверить, что P удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению.

4. Показать, что $F\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; 1; 4z(1-z)\right\}$ удовлетворяет гипергеометрическому уравнению, которому удовлетворяет $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z\right)$. Показать, что в левой половине лемнискаты $|z(1-z)| = \frac{1}{4}$ эти две функции равны, а в правой половине лемнискаты первая функция равна $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; 1-z\right)$.

5. Пусть $F_{a+} = F(a+1, b; c; x)$, $F_{a-} = F(a-1, b; c; x)$; определить 15 линейных соотношений с полиномиальными коэффициентами, которые связывают $F(a, b; c; x)$ с любыми двумя из шести функций

$$F_{a+}, F_{a-}, F_{b+}, F_{b-}, F_{c+}, F_{c-}.$$

(Gauss)

6. Показать, что гипергеометрическому уравнению

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2} - \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}\frac{dy}{dx} + \alpha\beta y = 0$$

удовлетворяют интегралы (которые предполагаются сходящимися)

$$\int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{\gamma-\beta-1}(1-xz)^{-\alpha}\,dz$$

и

$$\int_0^1 z^{\beta-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}\{1-(1-x)z\}^{-\alpha}\,dz.$$

7. Показать, что для значений x между 0 и 1 решением уравнения

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1)(1-2x)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

будет

$$AF\left\{\frac{1}{2}\alpha,\ \frac{1}{2}\beta;\ \frac{1}{2};\ (1-2x)^2\right\}+$$
$$+B(1-2x)F\left\{\frac{1}{2}(\alpha+1),\ \frac{1}{2}(\beta+1);\ \frac{3}{2};\ (1-2x)^2\right\},$$

где A, B — произвольные постоянные, а $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ представляет гипергеометрический ряд.

(Math. Trip., 1896)

8. Показать, что

$$\lim_{x\to 1-0}\left[F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ x)-\right.$$
$$-\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-n)\,\Gamma(\gamma-\alpha+n)\,\Gamma(\gamma-\beta+n)\,\Gamma(\gamma)}{n!\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\times$$
$$\left.\times(1-x)^{n+\gamma-\alpha-\beta}\right]=\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)},$$

где k — такое целое число, что $k\leqslant \operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma)<k+1$.

(Это определяет, каким образом гипергеометрическая функция стремится к бесконечности, когда $x\to 1-0$, в предположении, что $\alpha+\beta-\gamma$ не целое число.)

(Hardy)

9. Показать, что если $\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)<0$, то

$$S_n:\ \frac{\Gamma(\gamma)\,n^{\alpha+\beta-\gamma}}{(\alpha+\beta-\gamma)\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\to 1$$

при $n\to\infty$; здесь S_n обозначает сумму первых n членов ряда $F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ 1)$.

(M. J. M. Hill, Proc. London Math. Soc. (2), V)

10. Показать, что если y_1, y_2 — независимые решения уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0,$$

то общим решением уравнения

$$\frac{d^3z}{dx^3}+3P\frac{d^2z}{dx^2}+\left\{2P^2+\frac{dP}{dx}+4Q\right\}\frac{dz}{dx}+\left\{4PQ+2\frac{dQ}{dx}\right\}z=0$$

будет $z=Ay_1^2+By_1y_2+Cy_2^2$, где A, B, C — постоянные.

(Appel, Comptes Rendus, XCI)

11. Вывести из примера 10, что если $a+b+\frac{1}{2}=c$, то

$$\{F(a,\ b;\ c;\ x)\}^2 = \\ = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(2c-1)}{\Gamma(2a)\,\Gamma(2b)\,\Gamma(a+b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2a+n)\,\Gamma(a+b+n)\,\Gamma(2b+n)}{n!\,\Gamma(c+n)\,\Gamma(2c-1+n)}\, x^n.$$

(Clausen, Journ. für Math., III)

12. Показать, что если $|x| < \frac{1}{2}$ и $|x(1-x)| < \frac{1}{4}$, то

$$F\left\{2\alpha,\ 2\beta;\ \alpha+\beta+\frac{1}{2};\ x\right\} = F\left\{\alpha,\ \beta;\ \alpha+\beta+\frac{1}{2};\ 4x(1-x)\right\}.$$

(Kummer)

13. Вывести из примера 12, что

$$F\left\{2\alpha,\ 2\beta;\ \alpha+\beta+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right\} = \frac{\Gamma\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\beta+\frac{1}{2}\right)}.$$

14. Показать, что если $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ и $\mathrm{Re}\,\alpha < 1$, то

$$F(\alpha,\ 3\alpha-1;\ 2\alpha;\ -\omega^2) = 3^{\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{2}} \exp\left\{\frac{1}{6}\pi i(3\alpha-1)\right\} \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(3\alpha-1)\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)},$$

$$F(\alpha,\ 3\alpha-1;\ 2\alpha;\ -\omega\} = 3^{\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{2}} \exp\left\{\frac{1}{6}\pi i(1-3\alpha)\right\} \frac{\Gamma(2\alpha)\,\Gamma\left(\alpha-\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(3\alpha-1)\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

(Watson, Quarterly Journ., XLI)

15. Показать, что

$$F\left(-\frac{1}{2}n,\ -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{8}{9}\right)^n \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{4}{3}\right)}.$$

(Heymann, Zeitschrift für Math. u. Phys., XLIV)

16. Показать, что если

$$(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} F(2\alpha,\ 2\beta;\ 2\gamma;\ x) = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots,$$

то

$$F\left(\alpha,\ \beta;\ \gamma+\frac{1}{2};\ x\right) F\left(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta;\ \gamma+\frac{1}{2};\ x\right) = 1 + \frac{\gamma}{\gamma+\frac{1}{2}}Bx + \\ + \frac{\gamma(\gamma+1)}{\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)}Cx^2 + \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{\left(\gamma+\frac{1}{2}\right)\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)\left(\gamma+\frac{5}{2}\right)}Dx^3 + \ldots$$

(Cayley, Phil. Mag. (4), XVI (1858), 356—357. См. также Orr, Camb. Phil. Trans., XVII (1889), 1—15).

17. Показать, что если функция $F(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$ определяется равенством

$$F(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}\, du,$$

то между F и любыми тремя из восьми смежных функций

$$F(\alpha \pm 1), \quad F(\beta \pm 1), \quad F(\beta' \pm 1), \quad F(\gamma \pm 1)$$

существует однородное линейное соотношение, коэффициенты которого суть полиномы от x и y.

(Le Vavasseur)

18. Показать, что если $\gamma - \alpha - \beta < 0$, то при $x \to 1 - 0$

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) : \left\{ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \right\} \to 1;$$

если же $\gamma - \alpha - \beta = 0$, то соответствующая приближенная формула будет

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) : \left\{ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \ln \frac{1}{1-x} \right\} \to 1.$$

(Math. Trip., 1893)

19. Показать, что при $|x| < 1$

$$\int_c^{(x+,\, 0+,\, x-,\, 0-)} x^{1-\gamma}(\nu - x)^{\gamma-\alpha-1}\nu^{\alpha-1}(1-\nu)^{-\beta}\, d\nu =$$

$$= -4e^{\pi\gamma i} \sin \alpha\pi \sin(\gamma-\alpha)\pi \frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta; \gamma; x),$$

где c обозначает точку на отрезке, соединяющем точки 0, x; аргументы у исходных значений $\nu - x$ и ν те же самые, что и у x, и $\arg(1-\nu) \to 0$, когда $\nu \to 0$.

(Pochhammer)

20. Пусть при $|\arg(1-x)| < 2\pi$

$$K(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \left\{ \Gamma(-s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right) \right\}^2 (1-x)^s\, ds,$$

а при $|\arg x| < 2\pi$

$$K'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \left\{ \Gamma(-s)\Gamma\left(\frac{1}{2}+s\right) \right\}^2 x^s\, ds.$$

При помощи замены переменной s в интеграле или каким-либо другим образом получить следующие зависимости:

$$K(x) = K'(1-x), \qquad \text{если } |\arg(1-x)| < \pi,$$
$$K(1-x) = K'(x), \qquad \text{если } |\arg x| < \pi,$$
$$K(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}} K\left(\frac{x}{x-1}\right), \qquad \text{если } |\arg(1-x)| < \pi,$$
$$K(1-x) = x^{-\frac{1}{2}} K\left(\frac{x-1}{x}\right), \qquad \text{если } |\arg x| < \pi,$$
$$K'(x) = x^{-\frac{1}{2}} K'\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{если } |\arg x| < \pi,$$
$$K'(1-x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}} K'\left(\frac{1}{1-x}\right), \qquad \text{если } |\arg(1-x)| < \pi.$$

(Barnes)

21. Пользуясь обозначениями предыдущего примера, получить следующие формулы:

$$2K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{n!} \right\}^2 x^n,$$

$$2\pi K'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}{n!} \right\}^2 x^n \left\{ \lg x - 4\lg 2 + 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \ldots - \frac{1}{2n}\right) \right\},$$

когда $|x| < 1$, $|\arg x| < \pi$;

$$K(x) = \mp i(-x)^{-\frac{1}{2}} K\left(\frac{1}{x}\right) + (-x)^{-\frac{1}{2}} K'\left(\frac{1}{x}\right),$$

когда $|\arg(-x)| < \pi$; из знаков $\pm$ выбирается тот, который имеет $\operatorname{Im} x$.

(Barnes)

22. Гипергеометрические ряды с двумя переменными определяются равенствами

$$F_1(\alpha;\ \beta,\ \beta';\ \gamma;\ x,\ y) = \sum_{m,\,n} \frac{\alpha_{m+n}\beta_m\beta'_n}{m!\,n!\,\gamma_{m+n}} x^m y^n,$$

$$F_2(\alpha;\ \beta,\ \beta';\ \gamma,\ \gamma';\ x,\ y) = \sum_{m,\,n} \frac{\alpha_{m+n}\beta_m\beta'_n}{m!\,n!\,\gamma_m\gamma'_n} x^m y^n,$$

$$F_3(\alpha,\ \alpha';\ \beta,\ \beta';\ \gamma;\ x,\ y) = \sum_{m,\,n} \frac{\alpha_m\alpha'_n\beta_m\beta'_n}{m!\,n!\,\gamma_{m+n}} x^m y^n,$$

$$F_4(\alpha;\ \beta;\ \gamma,\ \gamma';\ x,\ y) = \sum_{m,\,n} \frac{\alpha_{m+n}\beta_{m+n}}{m!\,n!\,\gamma_m\gamma'_n} x^m y^n,$$

где $\alpha_m = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)$, а $\sum\limits_{m,\,n}$ обозначает $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}$.

Получить дифференциальные уравнения

$$x(1-x)\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}+y(1-x)\frac{\partial^2 F_1}{\partial x\,\partial y}+$$
$$+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{\partial F_1}{\partial x}-\beta y\frac{\partial F_1}{\partial y}-\alpha\beta F_1=0,$$

$$x(1-x)\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}-xy\frac{\partial^2 F_2}{\partial x\,\partial y}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{\partial F_2}{\partial x}-\beta y\frac{\partial F_2}{\partial y}-\alpha\beta F_2=0,$$

$$x(1-x)\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 F_3}{\partial x\,\partial y}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{\partial F_3}{\partial x}-\alpha\beta F_3=0,$$

$$x(1-x)\frac{\partial^2 F_4}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 F_4}{\partial x\,\partial y}-y^2\frac{\partial^2 F_4}{\partial y^2}+$$
$$+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\frac{\partial F_4}{\partial x}-(\alpha+\beta+1)y\frac{\partial F_4}{\partial y}-\alpha\beta F_4=0,$$

и четыре подобных уравнения, получаемых из предыдущих перестановкой x с y и α, β, γ с α, β', γ', когда α, β', γ' входят в соответствующий ряд.

(Appel, Comptes Rendus, XC)

23. Показать, что если a отрицательно и $a=-\nu+\alpha$, где ν — целое число, а α положительно, то

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{R_n}{x+n}+G_n(x)\right\},$$

где

$$R_n=\frac{(-1)^n(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}G(-n),$$

$$G(x)=\left(1+\frac{x}{\alpha-1}\right)\left(1+\frac{x}{\alpha-2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{\alpha-\nu}\right),$$

$$G_n(x)=\frac{G(x)-G(-n)}{x+n}.$$

(Hermite, Journ. für Math., XCII)

24. Показать, что если $a<1$, то

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n}{x+n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_n}{x-a-n},$$

где

$$R_n=\frac{(-1)^n a(a+1)\ldots(a+n-1)}{n!}.$$

25. Показать, что если $a>1$, а ν и α — соответственно целая и дробная части величины a, то

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(x)\rho_n}{x+n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(x)\rho_{\nu+n}}{x-a-n}-$$
$$-G(x)\left[\frac{\rho_0}{x-\alpha}+\frac{\rho_1}{x-\alpha-1}+\ldots+\frac{\rho_{\nu-1}}{x-\alpha-\nu+1}\right],$$

где

$$G(x)=\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha+1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha+\nu-1}\right)$$

и

$$\rho_n=\frac{(-1)^n\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}.$$

(Hermite, Journ. für Math., XCII)

26. Показать, что если

$$f_n(x, y, v)=1-C_n^2\frac{x(y+v+n-1)}{y(x+v)}+$$
$$+C_n^2\frac{x(x+1)(y+v+n-1)(y+v+n)}{y(y+1)(x+v)(x+v+1)}-\ldots,$$

где n — положительное целое число, а C_n^1, C_n^2 — биномиальные коэффициенты, то

$$f_n(x, y, v)=\frac{\Gamma(y)\Gamma(y-x+n)\Gamma(x+v)\Gamma(v+n)}{\Gamma(y-x)\Gamma(y+n)\Gamma(v)\Gamma(x+v+n)}.$$

(Saalschütz, Zeitschrift für Math., XXXV; большое количество подобных результатов дано Дауголлом, Dougall, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXV.)

27. Показать, что если

$$F(\alpha, \beta, \gamma; \delta, \varepsilon; x)=1+\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\varepsilon 1}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1)}{\delta(\delta+1)\varepsilon(\varepsilon+1)\cdot 1\cdot 2}x^2+\ldots,$$

то при $\operatorname{Re}\left(\delta+\varepsilon-\frac{3}{2}\alpha-1\right)>0$

$$F(\alpha, \alpha-\delta+1, \alpha-\varepsilon+1; \delta, \varepsilon; 1)=$$
$$=2^{-\alpha}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(\delta)\Gamma(\varepsilon)\Gamma\left(\delta+\varepsilon-\frac{3}{2}\alpha-1\right)}{\Gamma\left(\delta-\frac{1}{2}\alpha\right)\Gamma\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\alpha\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right)\Gamma(\delta+\varepsilon-\alpha-1)}.$$

(A. C. Dixon, Proc. London Math. Soc., XXXV)

28. Показать, что при $\operatorname{Re}\alpha<\frac{2}{3}$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!}\right\}^3=\cos\left(\frac{1}{2}\pi\alpha\right)\frac{\Gamma\left(1-\frac{3}{2}\alpha\right)}{\left\{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)\right\}^3}.$$

(Morley, Proc. London Math. Soc., XXXIV)

29. Если

$$\int_0^1\int_0^1 x^{i-1}(1-x)^{j-1}y^{l-1}(1-y)^{k-1}(1-xy)^{m-j-k}\,dx\,dy=B(i, j, k, l, m),$$

то при помощи интегрирования по x, а также и по y показать, что $B(i, j, k, l, m)$ есть симметрическая функция от $i+j$, $j+k$, $k+l$, $l+m$, $m+i$.

Показать, что

$$F(\alpha,\ \beta;\ \gamma;\ \delta,\ \varepsilon;\ 1) : \Gamma(\delta)\,\Gamma(\varepsilon)\,\Gamma(\delta+\varepsilon-\alpha-\beta-\gamma)$$

есть симметрическая функция от δ, ε, $\delta+\varepsilon-\alpha-\beta$, $\delta+\varepsilon-\beta-\gamma$, $\delta+\varepsilon-\gamma-\alpha$.

[A. C. Dixon, Proc. London Math. Soc. (2), II (1905), 8—16. О доказательстве частного случая методом Барнса см. Barnes, Quarterly Journ., XLI (1910), 136—140.]

30. Показать, что если

$$F_n = F(-n,\ \alpha+n;\ \gamma;\ x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{dx^n}\left\{x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}\right\},$$

то, когда n — большое положительное целое число и $0 < x < 1$,

$$F_n = \frac{\Gamma(\gamma)}{n^{\gamma-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}(\sin\varphi)^{\frac{1}{2}-\gamma}(\cos\varphi)^{\gamma-\alpha-\frac{1}{2}}\times \cos\left\{(2n+\alpha)\varphi-\frac{1}{4}\pi(2\gamma-1)\right\}+O\left(\frac{1}{n^{\gamma+\frac{1}{2}}}\right),$$

где $x=\sin^2\varphi$.

[Этот результат приводится в большом мемуаре Darboux'a «Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres», Journ. de Math. (3), IV (1878), 5—56, 377—416. Систематическое развитие теории гипергеометрических функций, у которых одна (или более) из постоянных велика, см. в Camb. Phil. Trans., XXII (1918), 277—308.]

ГЛАВА 15

ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

15.1. Определение полиномов Лежандра

Рассмотрим выражение $(1-2zh+h^2)^{-\frac{1}{2}}$; при $|2zh-h^2|<1$ оно может быть разложено в ряд по возрастающим степеням разности $2zh-h^2$. Если, сверх того, $|2zh|+|h|^2<1$, то степени $2zh-h^2$ можно развернуть по формуле бинома Ньютона и расположить члены в любом порядке (§ 2.52, часть I), так как разложение выражения $[1-\{|2zh|+|h|^2\}]^{-\frac{1}{2}}$ по степеням выражения $|2zh|+|h|^2$ сходится абсолютно. В частности, если ряд расположить по степеням h, то мы получим

$$(1-2zh+h^2)^{-\frac{1}{2}}=P_0(z)+hP_1(z)+h^2P_2(z)+h^3P_3(z)+\ldots,$$

где

$$P_0(z)=1,\ P_1(z)=z,\ P_2(z)=\frac{1}{2}(3z^2-1),\quad P_3(z)=\frac{1}{2}(5z^3-3z),$$

$$P_4(z)=\frac{1}{8}(35z^4-30z^2+3),\quad P_5(z)=\frac{1}{8}(63z^5-70z^3+15z)$$

и вообще

$$P_n(z)=\frac{(2n)!}{2^n\cdot(n!)^2}\left\{z^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}z^{n-2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}z^{n-4}-\ldots\right\}=$$
$$=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\frac{(2n-2r)!}{2^n\cdot r!\,(n-r)!\,(n-2r)!}z^{n-2r},$$

где $m=\frac{1}{2}n$ или $\frac{1}{2}(n-1)$, смотря по тому, которое из этих чисел целое.

Если a, b и δ — положительные постоянные, причем b настолько мало, что $2ab+b^2\leqslant1-\delta$, то разложение выражения $(1-2zh+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ сходится равномерно относительно z и h, когда $|z|\leqslant a$, $|h|\leqslant b$.

Выражения $P_0(z)$, $P_1(z)$, ..., являющиеся, очевидно, полиномами z, известны под названием *полиномов Лежандра* [1]. $P_n(z)$ называется *полиномом Лежандра степени n*.

Из последующего (§ 15.2) будет видно, что эти полиномы являются частными случаями более обширного класса функций, известных под названием *функций Лежандра*.

Пример 1. Давая z частные значения в выражении $(1-2zh+h^2)^{-\frac{1}{2}}$, показать, что

$$P_n(1)=1, \quad P_n(-1)=(-1)^n,$$
$$P_{2n+1}(0)=0, \quad P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}.$$

Пример 2. Исходя из разложения

$$(1-2h\cos\theta+h^2)^{-\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{1}{2}he^{i\theta}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}h^2e^{2i\theta}+\ldots\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{2}he^{-i\theta}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}h^2e^{-2i\theta}+\ldots\right),$$

показать, что

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}\left\{2\cos n\theta+\frac{1\cdot(2n)}{2(2n-1)}2\cos(n-2)\theta+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot(2n)(2n-2)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}2\cos(n-4)\theta+\ldots\right\}.$$

Вывести отсюда, что если θ — вещественный угол, то

$$|P_n(\cos\theta)|\leqslant\frac{1\cdot 3(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\left\{2+\frac{1\cdot(2n)}{2(2n-1)}\cdot 2+\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot 3\cdot(2n)(2n-2)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}\cdot 2+\ldots\right\}=P_n(1),$$

так что $|P_n(\cos\theta)|\leqslant 1$.

(Legendre)

Пример 3. Показать, что при $z=-\frac{1}{2}$

$$P_n=P_0P_{2n}-P_1P_{2n-1}+P_2P_{2n-2}-\ldots+P_{2n}P_0.$$

(Clare, 1905)

---

[1] Другие названия: *коэффициенты Лежандра* и *зональные гармоники* Zonal Harmonics). Они были введены в анализ 1784 г. Лежандром (Legendre, Mémoires par divers savants, X (1785)).

15.11. Формула Родрига[1]) для полиномов Лежандра

Очевидно, что, когда n — целое число,

$$\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n = \frac{d^n}{dz^n}\left\{\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{r!\,(n-r)!}z^{2n-2r}\right\} =$$

$$= \sum_{r=0}^{m}(-1)^r\frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,\frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!}\,z^{n-2r},$$

где $m=\frac{1}{2}n$ или $\frac{1}{2}(n-1)$, чтобы коэффициенты отрицательных степеней z были равны нулю.

Из общей формулы для $P_n(z)$ вытекает непосредственно, что

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n\cdot n!}\,\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n;$$

этот результат известен под названием формулы Родрига.

Пример. Показать, что уравнение $P_n(z)=0$ имеет n вещественных корней, лежащих между ± 1.

15.12. Интеграл Шлефли для $P_n(z)$ [2])

Из результата § 15.11 в комбинации с результатами § 5.22 части I сразу же вытекает, что

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{(t^2-1)^n}{2^n\,(t-z)^{n+1}}\,dt,$$

где C — контур, обходящий вокруг точки z один раз против часовой стрелки; этот результат называется *интегральной формулой Шлефли* для полиномов Лежандра.

15.13. Дифференциальное уравнение Лежандра

Докажем теперь, что функция $u=P_n(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} + n(n+1)\,u = 0;$$

это уравнение называется *дифференциальным уравнением Лежандра для функции степени n*. Подставив интеграл Шлефли в левую часть

---

[1]) Rodrigues, Corresp. sur l'École polytechique, III (1814—1816), 361—385.

[2]) Schläfli, Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunktionen (Bern, 1881).

уравнения, мы получим, пользуясь § 5.22 части I,

$$(1-z^2)\frac{d^2P_n(z)}{dz^2}-2z\frac{dP_n(z)}{dz}+n(n+1)P_n(z)=$$

$$=\frac{n+1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{(t^2-1)^n\,dt}{2^n(t-z)^{n+3}}\{-(n+2)(t^2-1)+2(n+1)t(t-z)\}=$$

$$=\frac{n+1}{2\pi i 2^n}\int\limits_C \frac{d}{dt}\left\{\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+2}}\right\}dt,$$

а этот интеграл равен нулю, так как при целом n функция

$$(t^2-1)^{n+1}(t-z)^{-n-2}$$

принимает свое начальное значение после обхода C. Поэтому полином Лежандра действительно удовлетворяет указанному дифференциальному уравнению.

Полученный результат может быть написан в форме

$$\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dP_n(z)}{dz}\right\}+n(n+1)P_n(z)=0.$$

Заметим, что уравнение Лежандра является частным случаем уравнения Римана и определяется схемой

$$P\begin{Bmatrix} -1 & \infty & 1 & \\ 0 & n+1 & 0 & z \\ 0 & -n & 0 & \end{Bmatrix}.$$

Пример 1. Показать, что уравнение, которому удовлетворяет $\frac{d^rP_n(z)}{dz^r}$, определяется схемой

$$P\begin{Bmatrix} -1 & \infty & 1 & \\ -r & n+r+1 & -r & z \\ 0 & -n+r & 0 & \end{Bmatrix}.$$

Пример 2. Показать, что если $z^2=\eta$, то дифференциальное уравнение Лежандра принимает вид

$$\frac{d^2y}{d\eta^2}+\left\{\frac{1}{2\eta}-\frac{1}{1-\eta}\right\}\frac{dy}{d\eta}+\frac{n(n+1)y}{4\eta(1-\eta)}=0.$$

Показать, что это уравнение гипергеометрическое.

Пример 3. Получить интеграл Шлефли для функций Лежандра как предельный случай общего гипергеометрического интеграла § 14.6.

Так как уравнение Лежандра задается схемой

$$P\begin{Bmatrix} -1 & \infty & 1 & \\ 0 & n+1 & 0 & z \\ 0 & -n & 0 & \end{Bmatrix},$$

то искомый интеграл будет

$$\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{z}{b}\right)^{n+1}\int_C (t+1)^n (t-1)^n \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{t}{b}\right)^{-n}(t-z)^{-n-1}\,dt =$$
$$= \int_C (t^2-1)^n (t-z)^{-n-1}\,dt,$$

взятый по такому контуру C, что подинтегральная функция принимает свое начальное значение при его обходе, а это и дает интеграл Шлефли.

15.14. Интегральные свойства полиномов Лежандра

Покажем теперь, что [1])

$$\int_{-1}^{1} P_m(z) P_n(z)\,dz = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ \dfrac{2}{2n+1} & (m = n). \end{cases}$$

Пусть $\{u\}_r$ обозначает $\dfrac{d^r u}{dz^r}$; тогда, если $r \leqslant n$, то $\{(z^2-1)^n\}_r$ делится на $(z^2-1)^{n-r}$; следовательно, если $r < n$, то $\{(z^2-1)^n\}_r = 0$ при $z = 1$ и при $z = -1$.

Пусть m больше или равно n. Тогда, интегрируя последовательно по частям, получим

$$\int_{-1}^{1} \{(z^2-1)^m\}_m \{(z^2-1)^n\}_n\,dz = [\{(z^2-1)^m\}_{m-1}\{(z^2-1)^n\}_n]_{-1}^{1} -$$
$$- \int_{-1}^{1} \{(z^2-1)^m\}_{m-1}\{(z^2-1)^n\}_{n+1}\,dz =$$
$$= (-1)^m \int_{-1}^{1} (z^2-1)^m \{(z^2-1)^n\}_{n+m}\,dz,$$

так как $\{(z^2-1)^m\}_{m-1}$, $\{(z^2-1)^m\}_{m-2}$, ... обращаются в нуль в обоих пределах интегрирования.

Далее, если $m > n$, то $\{(z^2-1)^n\}_{m+n} = 0$, так как производные выражения $(z^2-1)^n$ порядка выше чем $2n$ равны нулю; следовательно, когда $m > n$, из формулы Родрига вытекает, что

$$\int_{-1}^{1} P_m(z) P_n(z)\,dz = 0.$$

[1]) Эти результаты были даны Лежандром в 1784 и 1789 гг.

Если же $m=n$, то мы имеем на основании только что полученного преобразования

$$\int_{-1}^{1} \{(z^2-1)^n\}_n \{(z^2-1)^n\}_n \, dz = (-1)^n \int_{-1}^{1} (z^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dz^{2n}} (z^2-1)^n \, dz =$$

$$= (2n)! \int_{-1}^{1} (1-z^2)^n \, dz = 2(2n)! \int_{0}^{1} (1-z^2)^n \, dz =$$

$$= 2 \cdot (2n)! \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta \, d\theta = 2(2n)! \frac{2 \cdot 4 \ldots (2n)}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1)},$$

где в интеграле была сделана подстановка $z=\cos\theta$; отсюда по формуле Родрига

$$\int_{-1}^{1} \{P_n(z)\}^2 dz = \frac{2 \cdot (2n)! \, (2^n n!)^2}{(2^n \cdot n!)^2 (2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.$$

Таким образом, мы получили оба требуемых результата.

На языке главы XI части I функции $\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(z)$ называются нормальными ортогональными функциями на интервале $(-1, 1)$.

Пример 1. Показать, что при $x>0$

$$\int_{-1}^{1} (\operatorname{ch} 2x - z)^{-\frac{1}{2}} P_n(z) \, dz = 2^{\frac{1}{2}} \left(n+\frac{1}{2}\right)^{-1} e^{-(2n+1)x}.$$

(Clare, 1908)

Пример 2. Если $I = \int_{0}^{1} P_m(z) P_n(z) \, dz$, то

(I) $\qquad I = \dfrac{1}{2n+1} \qquad (m=n),$

(II) $\qquad I = 0 \quad (m-n$ — четное число),

(III) $\qquad I = \dfrac{(-1)^{\mu+\nu}}{2^{m+n-1}(n-m)(n+m+1)} \dfrac{n! \, m!}{(\nu!)^2 (\mu!)^2} \qquad (n=2\nu+1, \ m=2\mu).$

(Clare, 1902)

15.2. Функции Лежандра

До сих пор мы предполагали, что степень n функции $P_n(z)$ — положительное целое число; фактически $P_n(z)$ не была даже определена при n, не являющемся положительным целым числом. Посмотрим теперь, как можно определить $P_n(z)$ для значений n, которые не обязательно являются целыми числами.

Здесь может быть проведена аналогия с теорией гамма-функции. Выражение $z!$, определенное обычным образом (т. е. как $z(z-1)(z-2)\ldots 2\cdot 1$), имеет смысл только для положительных целых значений z; но когда введена гамма-функция, то $z!$ можно определить как $\Gamma(z+1)$, и тогда функция $z!$ будет существовать для нецелых значений z.

Ссылаясь на § 15.13, мы видим, что выражение

$$u = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-z)^{n+1}}\,dt$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} + n(n+1)u = 0$$

даже тогда, когда n не является положительным целым числом, лишь бы только контур C был таким, чтобы функция $(t^2-1)^{n+1}(t-z)^{-n-2}$ принимала свое начальное значение при обходе C.

Поэтому мы не будем более требовать, чтобы n было целым положительным числом.

Функция $(t^2-1)^{n+1}(t-z)^{-n-2}$ имеет три особые точки, а именно точки $t=1$, $t=-1$, $t=z$; очевидно, что после того, как t опишет петлю вокруг точки $t=1$ против часовой стрелки, функция примет свое исходное значение, умноженное на $e^{2\pi i(n+1)}$; если же t опишет петлю против часовой стрелки вокруг точки $t=z$, то функция примет исходное значение, умноженное на $e^{2\pi i(-n-2)}$. Поэтому если C — контур, окружающий точки $t=1$ и $t=z$, но не окружающий точку $t=-1$, то функция $(t^2-1)^{n+1}(t-z)^{-n-2}$ примет свое исходное значение после того, как t опишет контур C. Следовательно, выражение

$$u = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_A^{(1+,\ z+)} \frac{(t^2-1)^n}{2^n(t-z)^{n+1}}\,dt$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению Лагранжа для функции степени n:

$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} + n(n+1)u = 0$$

для всех значений n; многозначные функции точно определятся, если взять A на вещественной оси справа от точки $t=1$ (и справа от z, если z вещественно) и положить $\arg(t-1)=\arg(t+1)=0$ и $|\arg(t-z)|<\pi$ в точке A.

Это выражение обозначим через $P_n(z)$ и назовем функцией Лежандра степени n первого рода.

Таким образом, мы определили функцию $P_n(z)$ независимо от того, будет ли n целым или нет.

Функция $P_n(z)$, определенная указанным образом, не будет однозначной функцией z, ибо мы можем взять два контура, как указано на рисунке, и интегралы по этим контурам не будут равны; для того чтобы сделать контурный интеграл однозначным, проведем разрез в плоскости t от -1 до $-\infty$ вдоль вещественной оси; это потребует проведения такого же разреза в плоскости z, так как если бы этого разреза не было, то при непрерывном изменении z через отрицательную часть вещественной оси контур не мог бы изменяться непрерывно.

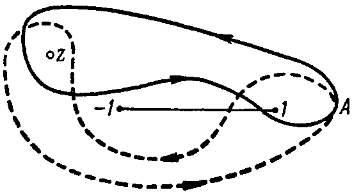

Рис. 3.

Из § 5.31 части I вытекает, что $P_n(z)$ будет аналитической функцией на всей разрезанной плоскости.

15.21. Рекуррентные формулы

Выведем теперь формулы (которые в действительности являются частными случаями соотношений, существующих, как было показано в § 14.7, между смежными P-функциями Римана), связывающие функции Лежандра различных степеней.

Если C — контур § 15.2, то мы имеем [1])

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int\limits_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\,dt,$$

$$P_n'(z) = \frac{n+1}{2^{n+1}\pi i} \int\limits_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+2}}\,dt.$$

Но

$$\frac{d}{dt}\frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+1}} = \frac{2(n+1)\,t\,(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}} - \frac{(n+1)(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+2}},$$

откуда, интегрируя, получим

$$0 = 2\int\limits_C \frac{t\,(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\,dt - \int\limits_C \frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+2}}\,dt.$$

[1]) Мы пишем $P_n'(z)$ вместо $\frac{d}{dz}P_n(z)$.

Следовательно,

$$\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int\limits_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^n}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2^{n+2}\pi i}\int\limits_C \frac{(t^2-1)^{n+1}}{(t-z)^{n+2}}\,dt - \frac{z}{2^{n+1}\pi i}\int\limits_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\,dt,$$

т. е.

$$P_{n+1}(z) - zP_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int\limits_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^n}\,dt. \tag{A}$$

Дифференцируя [1]), получим, далее,

$$P'_{n+1}(z) - zP'_n(z) - P_n(z) = nP_n(z)$$

или

$$P'_{n+1}(z) - zP'_n(z) = (n+1)P_n(z). \tag{I}$$

Это и есть первая из искомых формул.

Далее, развертывая равенство

$$\int\limits_C \frac{d}{dt}\left\{\frac{t(t^2-1)^n}{(t-z)^n}\right\}dt = 0,$$

найдем, что

$$\int\limits_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^n}\,dt + 2n\int\limits_C \frac{t^2(t^2-1)^{n-1}}{(t-z)^n}\,dt - n\int\limits_C \frac{t(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\,dt = 0.$$

Напишем $(t^2-1)+1$ вместо t^2 и $(t-z)+z$ вместо t в этом равенстве, тогда получим

$$(n+1)\int\limits_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^n}\,dt + 2n\int\limits_C \frac{(t^2-1)^{n-1}}{(t-z)^n}\,dt - nz\int\limits_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\,dt = 0.$$

Пользуясь равенством (A), получим тотчас же

$$(n+1)\{P_{n+1}(z) - zP_n(z)\} + nP_{n-1}(z) - nzP_n(z) = 0,$$

т. е.

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0 \tag{II}$$

— соотношение [2]), связывающее три функции Лежандра последовательных степеней. Это и есть вторая из искомых формул.

---

[1]) Процесс дифференцирования под знаком интеграла легко обосновать согласно § 4.2 части I.

[2]) Это соотношение, по существу, было дано Лагранжем в мемуаре по теории вероятности, Misc. Taurinensia, V (1770—1773), 167—232.

Остальные формулы мы можем вывести из (I) и (II) следующим образом:

Дифференцируя (II), имеем

$$(n+1)\left\{P'_{n+1}(z)-zP_n(z)\right\}-n\left\{zP'_n(z)-P'_{n-1}(z)\right\}-(2n+1)P_n(z)=0.$$

Пользуясь формулой (I) для исключения $P'_{n+1}(z)$ и деля затем на n [1]), получим

$$zP'_n(z)-P'_{n-1}(z)=nP_n(z). \qquad \text{(III)}$$

Складывая (I) и (III), получим

$$P'_{n+1}(z)-P'_{n-1}(z)=(2n+1)P_n(z). \qquad \text{(IV)}$$

Наконец, заменяя в (I) n на $n-1$ и исключая $P'_{n-1}(z)$ из полученного таким образом равенства и формулы (III), находим

$$(z^2-1)P'_n(z)=nzP_n(z)-nP_{n-1}(z). \qquad \text{(V)}$$

Формулы (I) — (V) называются *рекуррентными формулами*.

Приведенное доказательство остается справедливым независимо от того, будет ли n целым числом или нет, т. е. оно применимо к общим функциям Лежандра. Другое доказательство, которое, однако, применимо лишь к случаю, когда n — положительное целое число (т. е. лишь к полиномам Лежандра), заключается в следующем.

Положим

$$V=(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Тогда, сравнивая коэффициенты [2]) при одинаковых степенях h в разложениях обеих частей уравнения

$$(1-2hz+h^2)\frac{\partial V}{\partial h}=(z-h)V,$$

получим

$$nP_n(z)-(2n-1)zP_{n-1}(z)+(n-1)P_{n-2}(z)=0,$$

что представляет собою формулу (II).

Подобным же образом, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h в разложениях обеих частей уравнения

$$h\frac{\partial V}{\partial h}=(z-h)\frac{\partial V}{\partial z},$$

получим

$$z\frac{dP_n(z)}{dz}-\frac{dP_{n-1}(z)}{dz}=nP_n(z),$$

---

[1]) Если $n=0$, то мы имеем $P_0(z)=1$, $P_{-1}(z)=1$, и результат (III) верен, но тривиален.

[2]) Читателю рекомендуется проверить законность этих операций.

что представляет собою формулу (III). Остальные формулы могут быть выведены из этих формул.

Пример 1. Показать, что для всех значений n

$$\frac{d^2}{dz}\left\{z\left(P_n^2+P_{n+1}^2\right)-2P_nP_{n+1}\right\}=(2n+3)P_{n+1}^2-(2n+1)P_n^2.$$

(Hargreaves)

Пример 2. Показать, что если

$$M_n(x)=\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^n(ze^{xz}\operatorname{cosech} z)\right]_{z=0},$$

то

$$\frac{dM_n(x)}{dx}=nM_{n-1}(x) \quad \text{и} \quad \int_{-1}^{1}M_n(x)\,dx=0.$$

(Trinity, 1900)

Пример 3. Доказать, что если m и n — целые числа и $m\leqslant n$, причем оба четные или оба нечетные, то

$$\int_{-1}^{1}\frac{dP_m(z)}{dz}\,\frac{dP_n(z)}{dz}\,dz=m(m+1).$$

(Clare, 1898)

Пример 4. Доказать, что если m, n — целые числа и $m\geqslant n$, то

$$\int_{-1}^{1}\frac{d^2P_m(z)}{dz^2}\,\frac{d^2P_n(z)}{dz^2}\,dz=$$

$$=\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{48}\{3m(m+1)-n(n+1)+6\}\{1+(-1)^{n+m}\}.$$

(Math. Trip., 1897)

15.211. Разложение любого полинома по полиномам Лежандра

Пусть $f_n(z)$ — полином степени n от z.

Тогда всегда можно выбрать $a_0, a_1, \ldots, a_n$ так, что

$$f_n(z)\equiv a_0P_0(z)+a_1P_1(z)+\ldots+a_nP_n(z),$$

ибо, сравнивая коэффициенты при z^n, $z^{n-1}, \ldots$ в обеих частях, мы получим уравнения, последовательно определяющие $a_n, a_{n-1}, \ldots$ однозначно через коэффициенты полинома $f_n(z)$.

Для того чтобы определить $a_0, a_1, \ldots, a_n$ наиболее простым способом, умножим рассматриваемое тождество на $P_n(z)$ и проинтегрируем.

Тогда при $r=0, 1, 2, \ldots, n$, в силу § 15.14, имеем

$$\int\limits_{-1}^{1} f_n(z) P_r(z)\,dz = \frac{2a_r}{2r+1};$$

если же $r>n$, то интеграл в левой части равен нулю.

Пример 1. Дано $z^n = a_0P_0(z) + a_1P_1(z) + \ldots + a_nP_n(z)$; определить $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

(Legendre, Exercices de Calc. Int., II, 352)

[Приравняем коэффициенты при z^n в обеих частях; это даст

$$a_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

Пусть $I_{n,m} = \int\limits_{-1}^{1} z^n P_m(z)\,dz$, так что, по только что полученному результату,

$$I_{m,m} = \frac{2^{m+1}(m!)^2}{(2m+1)!}.$$

Далее, если $(n-m)$ — нечетное число, то $I_{n,m}$ есть интеграл от нечетной функции с пределами ± 1 и, следовательно, равен нулю; $I_{n,m}$ будет также равен нулю, когда $n-m$ — отрицательное четное число.

Для определения $I_{n,m}$, когда $n-m$ — положительное четное число, находим из уравнения Лежандра, интегрируя дважды по частям,

$$m(m+1)\int\limits_{-1}^{1} z^n P_m(z)\,dz = -\int\limits_{-1}^{1} z^n \frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)P'_m(z)\right\} dz =$$

$$= -\left[z^n(1-z^2)P'_m(z)\right]_{-1}^{1} + n\int\limits_{-1}^{1} z^{n-1}(1-z^2)P'_m(z)\,dz =$$

$$= n\left[z^{n-1}(1-z^2)P_m(z)\right]_{-1}^{1} - n\int\limits_{-1}^{1} \left\{(n-1)z^{n-2} - (n+1)z^n\right\} P_m(z)\,dz,$$

и таким образом,

$$m(m+1)I_{n,m} = n(n+1)I_{n,m} - n(n-1)I_{n-2,m}.$$

Поэтому имеем

$$I_{n,m} = \frac{n(n-1)}{(n-m)(n+m+1)} I_{n-2,m} =$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(m+1)}{(n-m)(n-2-m)\ldots 2\cdot(n+m+1)(n+m-1)\ldots(2m+3)} I_{m,m},$$

повторяя тот же процесс сведения.

Следовательно,

$$I_{n,m}=\frac{2^{m+1}n!\left(\frac{n+m}{2}\right)!}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!\,(n+m+1)!},$$

и, таким образом,

$$a_m=0, \text{ когда } n-m \text{ — нечетное или отрицательное число,}$$

и

$$a_m=\frac{(2m+1)\,2^m n!\left(\frac{n+m}{2}\right)!}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!\,(n+m+1)!},$$

когда $n-m$ — четное положительное число].

Пример 2. Разложить $\cos n\theta$ по полиномам Лежандра от $\cos\theta$, когда n — целое число.

Пример 3. Вычислить интегралы

$$\int_{-1}^{1} zP_n(z)\,P_{n+1}(z)\,dz, \qquad \int_{-1}^{1} z^2P_n(z)\,P_{n+1}(z)\,dz.$$

(St. John's, 1899)

Пример 4. Показать, что

$$\int_{-1}^{1}(1-z^2)\left\{P_n'(z)\right\}^2 dz=\frac{2n(n+1)}{2n+1}.$$

(Trinity, 1894)

Пример 5. Показать, что

$$nP_n(\cos\theta)=\sum_{r=1}^{n}\cos r\theta P_{n-r}(\cos\theta).$$

(St. John's, 1898)

Пример 6. Показать, что если

$$u_n=\int_{-1}^{1}(1-z^2)^n P_{2m}(z)\,dz,$$

где $m<n$, то

$$(n-m)(2n+2m+1)\,u_n=2n^2u_{n-1}.$$

(Trinity, 1895)

15.22. Представление Мерфи функции $P_n(z)$ в виде гипергеометрической функции[1])

Так как (§ 15.13) уравнение Лежандра является частным случаем уравнения Римана, то следует ожидать, что может быть получена формула, дающая выражение для $P_n(z)$ через гипергеометрические

---

[1]) Murphy, Electricity (1833). Результат Мерфи был получен только для полиномов Лежандра.

функции. Для получения этой формулы возьмем интеграл § 15.2 для функции Лежандра и предположим, что $|1-z|<2$. Для выбора контура C предположим, что δ — любая постоянная, удовлетворяющая неравенству $0<\delta<1$, и z таково, что $|1-z|\leqslant 2(1-\delta)$; затем возьмем C в виде окружности[1])

$$|1-t|=2-\delta.$$

Так как $\left|\frac{1-z}{1-t}\right|\leqslant\frac{2-2\delta}{2-\delta}<1$, то мы можем разложить $(t-z)^{-n-1}$ в равномерно сходящийся ряд[2])

$$(t-z)^{-n-1}=(t-1)^{-n-1}\left\{1+(n+1)\frac{z-1}{t-1}+\right.$$
$$\left.+\frac{(n+1)(n+2)}{2!}\left(\frac{z-1}{t-1}\right)^2+\ldots\right\}.$$

Подставляя это разложение в интеграл Шлефли и интегрируя почленно (§ 4.7, часть I), получим

$$P_n(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(z-1)^r}{2^{n+1}\pi i}\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{r!}\int_A^{(1+,\,z+)}\frac{(t^2-1)^n}{(t-1)^{n+1+r}}\,dt=$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(z-1)^r(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{2^n\cdot(r!)^2}\left[\frac{d^r}{dt^r}(t+1)^n\right]_{t=1}$$

согласно § 5.22.

Так как $\arg(t+1)=0$ при $t=1$, то

$$\left[\frac{d^r}{dt^r}(t+1)^n\right]_{t=1}=2^{n-r}n(n-1)\ldots(n-r+1),$$

и таким образом, при $|1-z|\leqslant 2(1-\delta)<2$ имеем

$$P_n(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)(-n)(1-n)\ldots(r-1-n)}{(r!)^2}\times$$
$$\times\left(\frac{1-z}{2}\right)^r=F\left(n+1,\ -n;\ 1;\ \frac{1-z}{2}\right).$$

Это и есть требуемое представление; оно объясняет (§ 14.53), почему в § 15.2 нельзя было избежать разреза от -1 до $-\infty$.

---

[1]) Эта окружность охватывает точки $t=1$, $t=z$.

[2]) Ряд обрывается, если n — целое отрицательное число.

Следствие. Из полученного результата ясно, что для всех значений n

$$P_n(z) = P_{-n-1}(z).$$

Примечание. Если n — целое положительное число, то полученная формула представляет полином Лежандра в виде полинома от $1 - z$ с коэффициентами простого вида.

Пример 1. Показать, что если m — целое положительное число, то

$$\left\{\frac{d^{m+1}P_{m+n}(z)}{dz^{m+1}}\right\}_{z=1} = \frac{\Gamma(2m+n+2)}{2^{m+1}(m+1)!\,\Gamma(n)}.$$

(Trinity, 1907)

Пример 2. Показать, что полином Лежандра $P_n(\cos\theta)$ равен

$$(-1)^n F\left(n+1, -n; 1; \cos^2\frac{1}{2}\theta\right)$$

и

$$\cos^n\frac{1}{2}\theta F\left(-n, -n; 1; -\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta\right).$$

(Murphy)

15.23. Интегралы Лапласа[1]) для $P_n(z)$

Покажем теперь, что для всех значений n и для определенных значений z функция Лежандра $P_n(z)$ может быть представлена в виде интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n d\varphi,$$

называемого *первым интегралом Лапласа*.

(A) *Доказательство, применимое только к полиномам Лежандра.*

Если n — положительное целое число, то согласно § 15.12 мы имеем

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(t^2-1)^n}{(t-z)^{n+1}}\,dt,$$

где C — какой-либо контур, описываемый вокруг точки z против часовой стрелки. Примем за C окружность с центром z и радиусом $|z^2-1|^{\frac{1}{2}}$, так что на C $t = z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}$, где φ можно взять возрастающим от $-\pi$ до π.

[1]) Laplace, Mécanique Celeste, книга XI, глава 2. Контуром применяемым в этом параграфе, а также другими, вводимыми ниже в этой главе, мы обязаны Дж. Ходжкинсону (J. Hodgkinson).

Произведя подстановку, получим для *всех* значений z

$$P_n(z)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\left\{z-1+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}\right\}\left\{z+1+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}\right\}}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}}\right)^n i\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n d\varphi=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n d\varphi,$$

так как подинтегральная функция есть четная функция от φ. Выбор ветви двузначной функции $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$, очевидно, безразличен.

(B) *Доказательство, применимое к функциям Лежандра при любом n.*

Сделаем ту же самую подстановку, как в (A), в интеграле Шлефли, определяющем $P_n(z)$; необходимо, однако, дополнительно добиться, чтобы $t=1$ лежала внутри контура, а $t=-1$ вне его, и необходимо также выбрать определенную ветвь выражения

$$\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n,$$

которое теперь является многозначной функцией от φ.

Условие, что $t=1$ и $t=-1$ лежат соответственно внутри и вне контура C, заключается в том, что расстояния z от этих точек соответственно меньше и больше, чем $|z^2-1|^{\frac{1}{2}}$. Оба эти условия удовлетворяются, если $|z-1|<|z+1|$, что дает $\operatorname{Re} z>0$, и таким образом (приняв за $\arg z$ его главное значение), *мы должны иметь* $\arg z|<\frac{1}{2}\pi$.

Поэтому

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n d\varphi,$$

где значение $\arg\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}$ определяется тем обстоятельством, что оно [будучи равно $\arg(t^2-1)-\arg(t-z)$] численно меньше π, когда t лежит на вещественной оси и справа от z (см. § 15.2).

Если φ возрастает от $-\pi$ до π, то $z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi$ пробегает отрезок прямой на плоскости комплексной переменной от точки $z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ до точки $z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ и обратно; а так как этот отрезок не проходит через начало координат[1]), то $\arg\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}$ на пути интегрирования может изменяться лишь на величины, меньшие π.

Предположим теперь, что ветвь функции

$$\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n,$$

которую следует взять, будет такова, что она приводится к $z^n e^{n2k\pi i}$ (где k — целое число) при $\varphi=\frac{1}{2}\pi$.

Тогда

$$P_n(z)=\frac{e^{2nk\pi i}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n d\varphi,$$

где уже берется та ветвь многозначной функции, которая равна z^n, когда $\varphi=\frac{1}{2}\pi$.

Заставим теперь $z\to 1$ по пути, который не проходит через нули функции $P_n(z)$; так как $P_n(z)$ и интеграл являются аналитическими функциями от z при $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$, то k не изменяется, когда z описывает этот путь. Таким образом, мы получим

$$e^{2nk\pi i}=1.$$

Следовательно, при $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$ и любом n

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n d\varphi,$$

где $\arg\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}$ берется равным $\arg z$ при $\varphi=\frac{1}{2}\pi$.

Полученное для $P_n(z)$ выражение, которое, очевидно, и в этом случае может быть записано в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n d\varphi,$$

известно под названием *первого интеграла Лапласа* для $P_n(z)$.

---

[1]) В противном случае z принимает чисто мнимое значение, а такие значения z исключены.

Следствие. Из следствия § 15.22 очевидно, что при $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ имеем

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\left\{z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^{n+1}},$$

результат, принадлежащий Якоби (Jacobi, Journ. für Math., XXVI (1843), 81—87) и известный под названием *второго интеграла Лапласа* для $P_n(z)$.

Пример 1. Получить первый интеграл Лапласа, рассматривая

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n \int_0^{\pi} \left\{z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n d\varphi$$

и пользуясь примером 1 § 6.21 части I.

Пример 2. Показать прямым дифференцированием, что интеграл Лапласа является решением уравнения Лежандра.

Пример 3. Показать, что если

$$s < 1, \quad |h| < 1$$

и

$$(1 - 2h\cos\theta + h^2)^{-s} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\theta,$$

то

$$b_n = \frac{2\sin s\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{h^n x^{n+s-1}}{(1-x)^s(1-xh^2)^s}\,dx.$$

(Binet)

Пример 4. Вывести второй интеграл Лапласа из первого интеграла, когда $z > 1$, при помощи подстановки

$$\left\{z - (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\theta\right\}\left\{z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\} = 1.$$

Пример 5. Разложением по степеням $\cos\varphi$ показать, что для определенной области значений z

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n d\varphi = z^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2};\ 1;\ 1-z^{-2}\right).$$

Пример 6. Показать, что уравнение Лежандра определяется схемой

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{n}{2} & \frac{1+n}{2} & 0 & \xi \\ \frac{1+n}{2} & -\frac{n}{2} & 0 & \end{matrix}\right\},$$

где

$$z = \frac{1}{2}\left(\xi^{\frac{1}{2}} + \xi^{-\frac{1}{2}}\right).$$

15.231. Интеграл Мелера — Дирихле [1]) для $P_n(z)$

Другое интегральное представление функции Лежандра может быть получено следующим путем.

Для всех значений n имеем по предыдущей теореме

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ z + \cos\varphi\,(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right\}^n d\varphi.$$

В этом интеграле заменим переменную φ новой переменной h, определяемой равенством

$$h = z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi;$$

получим

$$P_n(z) = \frac{i}{\pi} \int\limits_{z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}^{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}} h^n (1 - 2hz + h^2)^{-\frac{1}{2}}\, dh;$$

путь интегрирования — отрезок прямой, $\arg h$ определяется условием, что $h = z$ при $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ и

$$(1 - 2hz + h^2)^{-\frac{1}{2}} = -i\,(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi.$$

Пусть теперь $z = \cos\theta$; тогда

$$P_n(\cos\theta) = \frac{i}{\pi} \int\limits_{e^{-i\theta}}^{e^{i\theta}} h^n (1 - 2hz + h^2)^{-\frac{1}{2}}\, dh.$$

Далее (так как θ ограничено неравенством $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$, когда n не есть положительное целое число), путь интегрирования можно деформировать [2]) в дугу окружности $|h| = 1$, проходящую через точку $h = 1$ и соединяющую точки $h = e^{-i\theta}$ и $h = e^{i\theta}$, так как подинтегральная функция является аналитической во всей области между этой дугой и ее хордой [3]).

---

[1]) Dirichlet, Journ. für Math., XVII (1837), 35; Mehler, Math. Ann., V (1872), 141.

[2]) Если θ — комплексная величина и $\operatorname{Re}(\cos\theta) > 0$, деформирование контура представляет несколько бо́льшие трудности. Данный анализ легко видоизменить так, чтобы охватить и этот случай.

[3]) Подинтегральная функция не будет аналитической на концах дуги, однако будет вести себя, как $(h - e^{\pm i\theta})^{-\frac{1}{2}}$, вблизи них; но если область вырезать (§ 6.23) при $e^{\pm i\theta}$ и радиусы вырезов заставить стремиться к нулю, то мы увидим, что деформация законна.

Положив $h = e^{i\varphi}$, получим

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)i\varphi}}{(2\cos\varphi - 2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}\,d\varphi$$

и, далее,

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\theta} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\{2(\cos\varphi - \cos\theta)\}^{\frac{1}{2}}}\,d\varphi;$$

легко видеть, что нужно взять положительное значение квадратного корня.

Выведенная формула известна под названием *упрощенной формы Мелера интеграла Дирихле.* Результат справедлив для всех значений n.

Пример 1. Доказать, что, когда n — положительное целое число,

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_{\theta}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\,d\varphi}{\{2(\cos\theta - \cos\varphi)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

[Заменить θ на $\pi - \theta$ и φ на $\pi - \varphi$ в только что полученном результате.]

Пример 2. Доказать, что

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{h^n}{(h^2 - 2h\cos\theta + 1)^{\frac{1}{2}}}\,dh,$$

причем интеграл берется вдоль замкнутого контура, охватывающего точки $h = e^{\pm i\theta}$, а радикалу приписывается надлежащее значение.

Исходя отсюда (или другим путем), доказать, что если θ лежит между $\frac{1}{6}\pi$ и $\frac{5}{6}\pi$, то

$$P_n(\cos\theta) = \frac{4}{\pi}\,\frac{2\cdot 4\ldots 2n}{3\cdot 5\ldots(2n+1)}\left[\frac{\cos(n\theta+\varphi)}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1^2}{2(2n+3)}\,\frac{\cos(n\theta+3\varphi)}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)}\,\frac{\cos(n\theta+5\varphi)}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} + \ldots\right],$$

где φ обозначает $\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\pi$.

Показать также, что первые члены ряда дают приближенное значение $P_n(\cos\theta)$ для всех значений θ между 0 и π, не слишком близких к 0 или π. Объяснить, как можно использовать эту теорему для получения приближений к корням уравнения $P_n(\cos\theta) = 0$.

[См. Heine, Kugelfunctionen, I, 178; Darboux, Comptes Rendus, LXXXII (1876), 365, 404.]

15.3. Функции Лежандра второго рода

Мы рассматривали до сих пор только одно решение уравнения Лежандра, а именно $P_n(z)$. Приступим к нахождению второго решения.

Мы видели (§ 15.2), что уравнению Лежандра удовлетворяет интеграл

$$\int (t^2-1)^n (t-z)^{-n-1}\, dt,$$

взятый вдоль такого контура, после обхода которого подинтегральная функция возвращается к своему начальному значению. Пусть D — контур в виде восьмерки, образованной следующим образом: пусть z не есть вещественное число, заключающееся между -1 и $+1$; построим эллипс в плоскости t с фокусами в точках ± 1 и настолько малый, что точка $t=z$ находится вне его. Пусть A — конец большой оси эллипса справа от $t=1$.

Пусть контур D начинается от точки A, описывает путь $(1-, -1+)$ и возвращается в A (§ 12.43), причем он лежит целиком внутри эллипса.

Пусть $|\arg z| \leqslant \pi$ и $|\arg(z-t)| \to \arg z$, когда $t \to 0$ на контуре. Пусть $\arg(t+1) = \arg(t-1) = 0$ в точке A.

Тогда решение уравнения Лежандра, справедливое в этой плоскости (разрезанной вдоль вещественной оси от 1 до $-\infty$), будет

$$Q_n(z) = \frac{1}{4i \sin n\pi} \int\limits_D \frac{(t^2-1)^n}{2^n (z-t)^{n+1}}\, dt,$$

если n не целое число.

Если $\operatorname{Re}(n+1) > 0$, то можно деформировать путь интегрирования, как в 12.43, что дает

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}} \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^n (z-t)^{-n-1}\, dt$$

(где $\arg(1-t) = \arg(1+t) = 0$); это выражение мы примем за определение функции $Q_n(z)$, когда n — положительное целое число или нуль. Когда n — отрицательное целое число ($=-m-1$), дифференциальное уравнение Лежандра для функции степени n будет тождественно с таковым для функции степени m, и таким образом, мы примем за два основных решения $P_m(z)$, $Q_n(z)$.

$Q_n(z)$ называется функцией Лежандра степени n второго рода.

15.31. Разложение функции $Q_n(z)$ в степенной ряд

Получим теперь функцию Лежандра второго рода в виде степенного ряда относительно z^{-1}.

Когда вещественная часть $n+1$ положительна, имеем

$$Q_n(z)=\frac{1}{2^{n+1}}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n(z-t)^{-n-1}\,dt.$$

Предположим, что $|z|>1$. Тогда подинтегральная функция может быть разложена в ряд, равномерно сходящийся относительно t, так что

$$Q_n(z)=\frac{1}{2^{n+1}z^{n+1}}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\left(1-\frac{t}{z}\right)^{-n-1}dt=$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}z^{n+1}}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\left\{1+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{t}{z}\right)^r\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}{r!}\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{2^n z^{n+1}}\left[\int_0^1(1-t^2)^n\,dt+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(n+1)\ldots(n+2s)}{(2s)!\,z^{2s}}\int_0^1(1-t^2)^n t^{2s}\,dt\right],$$

где $r=2s$, потому что при нечетных значениях r интегралы равны 0. Положив $t^2=u$, получим без затруднений, пользуясь формулой § 12.41,

$$Q_n(z)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(n+1)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\frac{1}{z^{n+1}}F\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}n+1;\ n+\frac{3}{2};\ z^{-2}\right).$$

Данное выше доказательство применимо только в том случае, когда вещественная часть $(n+1)$ будет положительна (см. § 4.5, часть I); но совершенно аналогичные рассуждения можно применить и к интегралу

$$Q_n(z)=\frac{1}{4i\sin n\pi}\int_D\frac{1}{2^n}(t^2-1)^n(z-t)^{-n-1}\,dt,$$

причем коэффициенты вычисляются, если представлять интегралы

$$\int_D(t^2-1)^n t^r\,dt$$

в форме

$$e^{n\pi i}\int_0^{(1-)}(1-t^2)^n t^r\,dt+e^{n\pi i}\int_0^{(-1+)}(1-t^2)^n t^r\,dt;$$

тогда, положив $t^2 = u$ и используя § 12.43, получим тот же самый результат, что и прежде; таким образом, формула

$$Q_n(z) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{n+1}} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{z^{n+1}} F\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}n+1;\ n+\frac{3}{2};\ \frac{1}{z^2}\right)$$

остается верной для любых значений n (за исключением отрицательных целых значений) и для всех значений [1] z таких, что $|z| > 1$, $|\arg z| < \pi$.

Пример 1. Показать, что если n — положительное целое число, то

$$Q_n(z) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dz^n} \left\{ (z^2-1)^n \int_z^\infty (v^2-1)^{-n-1} dv \right\}.$$

[Легко убедиться в том, что уравнение Лежандра может быть выведено из уравнения

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} + 2(n-1)z\frac{dw}{dz} + 2nw = 0$$

путем n-кратного дифференцирования и подстановки $u = \frac{d^nw}{dz^n}$. Двумя независимыми решениями этого уравнения будут

$$(z^2-1)^n \quad \text{и} \quad (z^2-1)^n \int_z^\infty (v^2-1)^{-n-1} dv.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{d^n}{dz^n} \left\{ (z^2-1)^n \int_z^\infty (v^2-1)^{-n-1} dv \right\}$$

является решением уравнения Лежандра. Так как это выражение, будучи разложено по возрастающим степеням z^{-1}, начинается с члена z^{-n-1}, то оно должно отличаться лишь постоянным множителем от функции $Q_n(z)$ [2].

Из сравнения коэффициентов при z^{-n-1} в этом выражении и в разложении функции $Q_n(z)$, найденном выше, мы и получим требуемый результат.]

Пример 2. Показать, что, когда n — положительное целое число, функция Лежандра второго рода может быть выражена формулой

$$Q_n(z) = 2^n n! \int_z^\infty \int_v^\infty \int_v^\infty \ldots \int_v^\infty (v^2-1)^{-n-1} (dv)^{n+1}.$$

---

[1] При целом положительном n нет необходимости ограничивать значения $\arg z$.

[2] $P_n(z)$ содержит только *положительные* степени z, когда n — целое число.

Пример 3. Показать, что, когда n — положительное целое число,

$$Q_n(z) = \sum_{t=0}^{n} \frac{2^n \cdot n!}{t!\,(n-t)!} (-z)^{n-t} \int_z^\infty v^t (v^2-1)^{-n-1}\, dv.$$

[Этот результат может быть получен применением к предыдущему результату общей теоремы интегрального исчисления

$$\int_z^\infty \int_v^\infty \int_v^\infty \ldots \int_v^\infty f(v)\,(dv)^{n+1} = \sum_{t=0}^{n} \frac{(-z)^{n-t}}{t!\,(n-t)!} \int_z^\infty v^t f(v)\, dv.\Big]$$

15.32. Рекуррентные формулы для $Q_n(z)$

Функции $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ были определены при помощи интегралов одной и той же формы, а именно при помощи интеграла

$$\int (t^2-1)^n (t-z)^{-n-1}\, dt,$$

взятого вдоль различных контуров.

Отсюда вытекает, что общее доказательство рекуррентных формул для $P_n(z)$, данное в § 15.21, в одинаковой мере приложимо к функциям $Q_n(z)$; а отсюда вытекает, что для *функций Лежандра второго рода* имеют место рекуррентные формулы

$$Q'_{n+1}(z) - zQ'_n(z) = (n+1)\, Q_n(z),$$

$$(n+1)\, Q_{n+1}(z) - (2n+1)\, zQ_n(z) + nQ_{n-1}(z) = 0,$$

$$zQ'_n(z) - Q'_{n-1}(z) = nQ_n(z),$$

$$Q'_{n+1}(z) - Q'_{n-1}(z) = (2n+1)\, Q_n(z),$$

$$(z^2-1)\, Q'_n(z) = nzQ_n(z) - nQ_{n-1}(z).$$

Пример 1. Показать, что

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \lg \frac{z+1}{z-1}, \quad Q_1(z) = \frac{1}{2} z \lg \frac{z+1}{z-1} - 1,$$

и вывести, что

$$Q_2(z) = \frac{1}{2} P_2(z) \lg \frac{z+1}{z-z} - \frac{3}{2} z$$

и что отношение $\dfrac{Q_n(z)}{P_n(z)}$ разлагается в непрерывную дробь вида

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{1}{2} \lg \frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1^2}{3z} - \frac{2^2}{5z} - \frac{3^2}{7z} - \ldots - \frac{(n-1)^2}{(2n-1)\,z}.$$

Пример 2. Показать при помощи рекуррентных формул, что если n — положительное целое число [1]), то

$$\frac{1}{2} P_n(z) \lg \frac{z+1}{z-1} - Q_n(z) = f_{n-1}(z),$$

где $f_{n-1}(z)$ состоит из членов положительных (и нулевой) степеней в разложении выражения $\frac{1}{2} P_n(z) \lg \frac{z+1}{z-1}$ по убывающим степеням z.

[Этот пример показывает характер особых точек функции $Q_n(z)$ при $z = \pm 1$, когда n — целое число; эти точки и делают необходимым разрез от -1 до $+1$. О связи полученного результата с теорией непрерывных дробей см. Gauss, Werke, III, 165—206 и Frobenius, Journ. für Math., LXXIII (1871), 16; формулы примера 1 принадлежат им.]

15.33. Интеграл [2]) Лапласа для функций Лежандра второго рода

Докажем теперь, что при $\operatorname{Re}(n+1) > 0$

$$Q_n(z) = \int_0^\infty \left\{ z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \theta \right\}^{-n-1} d\theta,$$

где $\arg\left\{ z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} \theta \right\}$ при $\theta = 0$ имеет свое главное значение, если n не есть целое число.

Предположим сначала, что $z > 1$. В интеграле § 15.3, т. е. в

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n (z-t)^{-n-1} dt,$$

положим

$$t = \frac{e^\theta (z+1)^{\frac{1}{2}} - (z-1)^{\frac{1}{2}}}{e^\theta (z+1)^{\frac{1}{2}} + (z-1)^{\frac{1}{2}}},$$

---

[1]) Если $-1 < z < 1$, то из этих формул очевидно, что

$$Q_n(z+0i) - Q_n(z-0i) = -\pi i P_n(z).$$

Удобно определять $Q_n(z)$ для таких значений z, как выражение

$$\frac{1}{2} Q_n(z+0i) + \frac{1}{2} Q_n(z-0i).$$

Отметим, что эта функция удовлетворяет уравнению Лежандра для вещественных значений z.

[2]) Эта формула была дана впервые Гейне; см. Heine, Kugelfunktionen, 147.

так что область $(-1,\ 1)$ вещественных значений t соответствует области $(-\infty,\ \infty)$ вещественных значений θ. Тогда [как в § 15.23 (А)] прямой подстановкой получим, что

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\theta\right\}^{-n-1}d\theta=$$

$$=\int\limits_{0}^{\infty}\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\theta\right\}^{-n-1}d\theta,$$

так как подинтегральная функция есть четная функция от θ.

Чтобы доказать полученный результат для z, не являющихся вещественными числами, бо́льшими 1, заметим, что точки ветвления подинтегральной функции как функции z суть ± 1 и точки, где $z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\theta=0$; последние суть точки, в которых $z=\pm\operatorname{cth}\theta$.

Отсюда можно видеть, что

$$Q_n(z) \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{\infty}\{z+(z^2-1)^{1/2}\operatorname{ch}\theta\}^{-n-1}\,d\theta$$

будут аналитическими[1]) во всех точках плоскости, разрезанной вдоль прямой, соединяющей точки $z=\pm 1$. По теории аналитического продолжения равенство, доказанное для положительных значений $z-1$, сохраняется также для всех значений z в разрезанной плоскости, лишь бы только $\arg\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\theta\right\}$ было приписано надлежащее значение, а именно то, которое обращается в нуль, когда $z-1$ положительно.

Подинтегральная функция будет однозначной в разрезанной плоскости [и такой же будет и $Q_n(z)$], когда n — положительное целое число; но $\arg\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}\theta\right\}$ увеличивается на 2π, когда $\arg z$ увеличивается на 2π; поэтому, если n не будет положительным целым числом, следует сделать добавочный разрез от $z=-1$ до $z=-\infty$.

Эти разрезы налагают необходимые ограничения на значения z; в частности, разрез, примененный, когда n не целое число, обеспечивает, что

$$\arg\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right\}=2\arg\left\{(z+1)^{\frac{1}{2}}+(z-1)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

будет иметь свое главное значение.

Пример 1. Получить тот же результат для комплексных значений z, принимая за путь интегрирования некоторую дугу окружности и только

[1]) Легко показать, что интеграл имеет единственную производную в разрезанной плоскости.

затем делая подстановку

$$t=\frac{e^{\theta}(z+1)^{\frac{1}{2}}-(z-1)^{\frac{1}{2}}}{e^{\theta}(z+1)^{\frac{1}{2}}+(z-1)^{\frac{1}{2}}},$$

где θ вещественно.

Пример 2. Показать, что если $z>1$ и $\operatorname{cth}\alpha=z$, то

$$Q_n(z)=\int\limits_0^{\alpha}\left\{z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}u\right\}^n du,$$

где

$$\arg\left\{z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch}u\right\}=0.$$

(Trinity, 1893)

15.34. Формула Неймана[1]) для $Q_n(z)$, когда n — целое число

Перейдем теперь к установлению соотношения

$$Q_n(z)=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}P_n(y)\frac{dy}{z-y},$$

дающего выражение $Q_n(z)$ через функцию Лежандра первого рода, когда n — положительное целое число, а z не лежит на вещественной оси между 1 и —1.

Если $|z|>1$, то подинтегральную функцию можно разложить в равномерно сходящийся ряд

$$P_n(y)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{z^{m+1}}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}P_n(y)\frac{dy}{z-y}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}z^{-m-1}\int\limits_{-1}^{1}y^mP_n(y)\,dy.$$

Но интегралы, для которых $m-n$ — четное или отрицательное число, равняются нулю (§ 15.211), и таким образом, согласно § 15.31,

$$\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}P_n(y)\frac{dy}{z-y}=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}z^{-n-2m-1}\int\limits_{-1}^{1}y^{n+2m}P_n(y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}z^{-n-2m-1}\frac{2^{n+1}(n+2m)!\,(n+m)!}{m!\,(2n+2m+1)!}=$$

$$=\frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}z^{-n-1}F\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}n+1;\ n+\frac{3}{2};\ z^{-2}\right)=Q_n(z).$$

---

[1]) F. Neumann, Journ. für Math., XXXVII (1848), 24.

Итак, для случая, когда $|z| > 1$, теорема доказана. Так как обе части равенства

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} P_n(y) \frac{dy}{z-y}$$

представляют аналитические функции даже тогда, когда $|z|$ не больше единицы, лишь бы только z не было вещественным числом, заключенным между -1 и $+1$, то делаем вывод, что, за этим исключением, результат справедлив (§ 5.5, часть I) для всех значений z.

Кажется, что формула Неймана представляет $Q_n(z)$ как однозначную функцию от z, между тем как эта функция многозначна (§ 15.32, пример 2). Причина этого кажущегося противоречия заключается в том, что формула Неймана была установлена для плоскости z, разрезанной от -1 до $+1$, а в *разрезанной плоскости $Q_n(z)$ однозначна.*

Пример 1. Показать, что при $-1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$ $|Q_n(z)| \leqslant |\operatorname{Im} z|^{-1}$ и что для любого значения z, $|Q_n(z)|$ не должен превышать наибольшего из чисел $|z-1|^{-1}$, $|z+1|^{-1}$.

Пример 2. Показать, что при целом положительном n функция $Q_n(z)$ является коэффициентом при h^n в разложении по степеням h выражения

$$(1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arch}\left\{\frac{h-z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

[Ибо, когда $|h|$ достаточно мал,

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n Q_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{2} \int_{-1}^{1} \frac{P_n(y)\,dy}{z-y} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{(1-2hy+h^2)^{-\frac{1}{2}}\,dy}{(z-y)} =$$

$$= (1-2hz+h^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arch}\left\{\frac{h-z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Этот результат был получен Гейне (Heine, Kugelfunktionen, I, 134) и Лораном (Laurent, Journl. de Math. (3), I, 373.).]

15.4. Разложение Гейне[1]) для функции $(t-z)^{-1}$ в ряд по полиномам Лежандра

Найдем теперь разложение, которое послужит основой для разложений широкого класса функций по полиномам Лежандра.

По индукции легко вывести из рекуррентных формул

$$(2m+1)tQ_m(t) - (m+1)Q_{m+1}(t) - mQ_{m-1}(t) = 0,$$
$$(2m+1)zP_m(z) - (m+1)P_{m+1}(z) - mP_{m-1}(z) = 0.$$

[1]) Heine, Journ. für Math., XLII (1851), 72.

что

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{m=0}^{n} (2m+1) P_m(z) Q_m(t) + \\ + \frac{n+1}{t-z} \{P_{n+1}(z) Q_n(t) - P_n(z) Q_{n+1}(t)\}.$$

Пользуясь интегралами Лапласа, получим

$$P_{n+1}(z) Q_n(t) - P_n(z) Q_{n+1}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left\{z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi\right\}^n}{\left\{t + (t^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u\right\}^{n+1}} \times \\ \times \left[z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi - \left\{t + (t^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u\right\}\right]^{-1} d\varphi\, du.$$

Рассмотрим теперь

$$\left| \frac{z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi}{t + (t^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u} \right|.$$

Пусть $\operatorname{ch} a$, $\operatorname{ch} \alpha$ — большие полуоси эллипсов с фокусами ± 1, проходящих соответственно через z и t.

Пусть θ — эксцентрический угол для z; тогда

$$z = \operatorname{ch}(a + i\theta),$$

$$\left| z \pm (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi \right| = |\operatorname{ch}(a+i\theta) \pm \operatorname{sh}(a+i\theta)\cos\varphi| = \\ = \{\operatorname{ch}^2 a - \sin^2\theta + (\operatorname{ch}^2 a - \cos^2\theta)\cos^2\varphi \pm 4\operatorname{sh} a \operatorname{ch} a \cos\varphi\}^{\frac{1}{2}}.$$

Для вещественных значений φ это выражение имеет максимум при $\cos\varphi = \mp 1$, а отсюда

$$\left| z \pm (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi \right|^2 \leqslant 2\operatorname{ch}^2 a - 1 + 2\operatorname{ch} a (\operatorname{ch}^2 a - 1)^{\frac{1}{2}} = \exp(2a).$$

Подобным же образом

$$\left| t + (t^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u \right| \geqslant \exp\alpha.$$

Поэтому

$$|P_{n+1}(z) Q_n(t) - P_n(z) Q_{n+1}(t)| \leqslant \pi^{-1} \exp\{n(a-\alpha)\} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} V\, d\varphi\, du,$$

где

$$|V| = \left| \frac{z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi}{t + (t^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u} \right| + \left| \left\{t + (t^2-1)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} u\right\} \right|^{-2}.$$

Следовательно,

$$|P_{n+1}(z)Q_n(t)-P_n(z)Q_{n+1}(t)|\to 0,$$

когда $n\to\infty$, в предположении, что $a<\alpha$.

Далее, если t изменяется, а α остается постоянным, то легко видеть, что верхняя граница выражения $\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\infty V\,d\varphi\,du$ не будет зависеть от t и, таким образом,

$$P_{n+1}(z)Q_n(t)-P_n(z)Q_{n+1}(t)$$

стремится к нулю равномерно относительно t.

Отсюда следует, что *если точка z находится внутри эллипса, проходящего через точку t и имеющего точки ± 1 своими фокусами, то имеет место разложение*

$$\frac{1}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(z)Q_n(t);$$

если же t — переменная точка на эллипсе с фокусами ± 1 и z — неподвижная точка внутри его, то разложение сходится равномерно относительно t.

15.41. Разложение Неймана[1]) для произвольной функции в ряд по полиномам Лежандра

Приступим теперь к разложению данной функции в ряд по полиномам Лежандра. Это разложение представляет особый интерес, поскольку среди других разложений по полиномам оно по своей простоте идет сразу же после рядов Тейлора.

Пусть $f(z)$ — какая-нибудь функция, аналитическая внутри и на эллипсе C, фокусами которого являются точки ± 1. Мы покажем, что

$$f(z)=a_0P_0(z)+a_1P_1(z)+a_2P_2(z)+\ldots,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots$ не зависят от z, причем это разложение годно для всех точек z внутри эллипса C.

Пусть t — какая-нибудь точка на контуре эллипса.

---

[1]) K. Neumann, Ueber die Entwickelung einer Funktion nach den Kugelfunktionen (Halle, 1862). См. также Thomé, Journ. für Math., LXVI (1866), 337—343. Нейман дает также разложение по функциям Лежандра обоих родов, справедливое в кольце, ограниченном двумя эллипсами.

Тогда, так как $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(z)Q_n(t)$ сходится равномерно относительно t,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_C (2n+1)P_n(z)Q_n(t)f(t)\,dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n(z),$$

где

$$a_n=\frac{2n+1}{2\pi i}\int_C f(t)Q_n(t)\,dt.$$

Это и есть требуемое разложение; так как можно доказать[1]), что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(z)Q_n(t)$ сходится равномерно относительно z в любой области C', лежащей полностью внутри C, то и найденное разложение сходится равномерно во всей области C'.

Другое выражение для a_n может быть получено интегрированием, как в § 15.211, так что

$$a_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx.$$

Весьма часто употребляемой формой последнего выражения является

$$a_n=\frac{n+\frac{1}{2}}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x)(1-x^2)^n\,dx,$$

которая получается, если заменить $P_n(x)$ его выражением по формуле Родрига и проинтегрировать по частям.

Теорема, относящаяся к разложению Неймана так же, как теорема Фурье относится к разложению § 9.11 части I, заключается в следующем:

Пусть $f(t)$ *определена, когда* $-1\leqslant t\leqslant 1$, *и пусть интеграл от выражения* $(1-t^2)^{-\frac{1}{4}}f(t)$ *существует и абсолютно сходится; пусть, далее,*

$$a_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} f(t)P_n(t)\,dt.$$

---

[1]) Доказательство подобно доказательству § 15.4 о равномерной сходимости относительно t.

Тогда ряд $\sum a_n P_n(x)$ *сходится и имеет суммой* $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ *в любой точке x промежутка* $-1<x<1$, *если удовлетворяется одно из условий типа, установленного в конце* § 9.43 *части* I.

Доказательство читатель найдет в мемуарах Гобсона[1]) и Буркгардта[2]).

Пример 1. Показать, что если радиус сходимости ряда $\sum c_n z^n$ есть $\rho\,(\geqslant 1)$, то ряд $\sum c_n P_n(z)$ сходится внутри эллипса, полуоси которого суть $\frac{1}{2}(\rho+\rho^{-1})$, $\frac{1}{2}(\rho-\rho^{-1})$.

Пример 2. Доказать, что если

$$z=\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{\frac{1}{2}},\quad k^2=\frac{(x-1)(y+1)}{(x+1)(y-1)},\quad \text{где}\quad y>x>1,$$

то

$$\int\limits_z^1 \frac{dz}{\{(1-z^2)(1-k^2z^2)\}^{\frac{1}{2}}}=\{(x+1)(y-1)\}^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,Q_n(y).$$

[Подставить интегралы Лапласа в правую часть и проинтегрировать по φ.]

Пример 3. Показать, что

$$\frac{1}{2(y-x)}\ln\frac{(x+1)(y-1)}{(x-1)(y+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,Q_n(x)\,Q_n(y).$$

(Frobenius, Journ. für Math., LXXIII (1871), 1).

15.5. Присоединенные лежандровы функции $P_n^m(z)$ и $Q_n^m(z)$ Феррерса

Введем теперь более широкий класс функций Лежандра. Если m — положительное целое число, $-1<z<1$ и n — любое[3]), то функции

$$P_n^m(z)=(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^mP_n(z)}{dz^m},\qquad Q_n^m(z)=(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^mQ_n(z)}{dz^m}$$

называются *присоединенными лежандровыми функциями* Феррерса степени n и порядка m соответственно первого и второго рода.

Можно показать, что эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению, аналогичному уравнению Лежандра.

---

[1]) Hobson, Proc. London Math. Soc. (2), VI (1908), 388—395; (2), VII (1909), 24—39.

[2]) Burkhardt, Münchener Sitzungsberichte, XXXIX (1909), No. 10.

[3]) См. стр. 131, примечание. Феррерс (Ferrers) обозначает $P_n^m(z)$ через $T_n^m(z)$.

Действительно, продифференцируем уравнение Лежандра

$$(1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2}-2z\frac{dy}{dz}+n(n+1)y=0$$

m раз и положим $\dfrac{d^my}{dz^m}=v$. Мы получим уравнение

$$(1-z^2)\frac{d^2v}{dz^2}-2z(m+1)\frac{dv}{dz}+(n-m)(n+m+1)v=0.$$

Положив, далее, $w=(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}v$, получим уравнение

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz}+\left\{n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right\}w=0.$$

Это и есть дифференциальное уравнение для функций

$$P_n^m(z) \quad \text{и} \quad Q_n^m(z).$$

Из данных выше определений может быть получено несколько выражений для присоединенных функций.

Так, из формулы Шлефли имеем

$$P_n^m(z)=\frac{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}{2^{n+1}\pi i}(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}\int_A^{(1+,\,z+)}(t^2-1)^n(t-z)^{-n-m-1}\,dt,$$

где контур не окружает точку $t=-1$.

Далее, когда n — положительное целое число, мы имеем по формуле Родрига

$$P_n^m(z)=\frac{(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}}{2^n n!}\,\frac{d^{n+m}(z^2-1)^n}{dz^{n+m}}.$$

Пример. Показать, что присоединенное уравнение Лежандра определяется схемой

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{2}m & n+1 & \frac{1}{2}m & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z \\ -\frac{1}{2}m & -n & -\frac{1}{2}m & \end{matrix}\right\}.$$

(Olbricht)

15.51. Интегральные свойства присоединенных функций Лежандра

Теорема § 15.14 обобщается следующим образом.

Если n, r, m — положительные целые числа $n>m$, $r>m$, то

$$\int_{-1}^{1}P_n^m(z)P_r^m(z)\,dz=\begin{cases}0 & (r\neq n),\\ \dfrac{2}{2n+1}\,\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & (r=n).\end{cases}$$

Чтобы получить первый результат, умножим дифференциальные уравнения для $P_n^m(z)$, $P_r^m(z)$ на $P_r^m(z)$, $P_n^m(z)$ соответственно и вычтем; это даст

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\left\{P_r^m(z)\frac{dP_n^m(z)}{dz}-P_n^m(z)\frac{dP_r^m(z)}{dr}\right\}\right]+ \\ +(n-r)(n+r+1)P_r^m(z)P_n^m(z)=0.$$

Интегрируя в пределах -1, $+1$, получаем требуемый результат, когда $n \neq r$, так как выражение в квадратных скобках равняется нулю при каждом пределе.

Чтобы получить второй результат, отметим, что

$$P_n^{m+1}(z)=(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dP_n^m(z)}{dz}+mz(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}P_n^m(z);$$

возводя в квадрат и интегрируя, получим

$$\int_{-1}^{1}\{P_n^{m+1}(z)\}^2\,dz=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[(1-z^2)\left\{\frac{dP_n^m(z)}{dz}\right\}^2+2mzP_n^m(z)\frac{dP_n^m(z)}{dz}+\frac{m^2z^2}{1-z^2}\{P_n^m(z)\}^2\right]dz=$$

$$=-\int_{-1}^{1}P_n^m(z)\frac{d}{dz}\left\{(1-z^2)\frac{dP_n^m(z)}{dz}\right\}dz-m\int_{-1}^{1}\{P_n^m(z)\}^2\,dz+ \\ +\int_{-1}^{1}\frac{m^2z^2}{1-z^2}\{P_n^m(z)\}^2\,dz,$$

причем последняя часть этого равенства получается из предыдущей интегрированием первых двух членов по частям.

Если теперь воспользоваться дифференциальным уравнением для $P_n^m(z)$ для упрощения первого интеграла в последней части равенства, то мы получим

$$\int_{-1}^{1}\{P_n^{m+1}(z)\}^2\,dz=(n-m)(n+m+1)\int_{-1}^{1}\{P_n^m(z)\}^2\,dz.$$

Многократно применяя это соотношение, получим

$$\int_{-1}^{1} \{P_n^m(z)\}^2\,dz = (n-m+1)(n-m+2)\ldots n \times$$

$$\times (n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)\int_{-1}^{1}\{P_n(z)\}^2\,dz,$$

и таким образом,

$$\int_{-1}^{1} \{P_n^m(z)\}^2\,dz = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

15.6. Определение Гобсона присоединенных функций Лежандра

До сих пор мы считали функцию $(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}$, которая встречается в определении Феррерса присоединенных функций, чисто вещественной, и, поскольку в более элементарных физических приложениях функций Лежандра обычно бывает $-1<z<1$, это не создает никаких осложнений. Но если мы хотим рассматривать присоединенные функции как функции комплексной переменной, то нежелательно вводить добавочный разрез в плоскости z, давая $\arg(1-z)$ его главное значение.

Соответственно этому в дальнейшем, когда z не будет вещественным числом из промежутка $-1<z<1$, мы, следуя Гобсону, определим присоединенные функции равенствами

$$P_n^m(z) = (z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^mP_n(z)}{dz^m}, \quad Q_n^m(z) = (z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^mQ_n(z)}{dz^m},$$

где m — целое положительное число, n — любое, а $\arg z$, $\arg(z+1)$, $\arg(z-1)$ имеют свои главные значения.

Для произвольного m Гобсон определил функцию $P_n^m(z)$ как

$$\frac{1}{\Gamma(1-m)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{1}{2}m} F\left(-n,\ n+1;\ 1-m;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right),$$

а Барнс дал определение для $Q_n^m(z)$, из которого может быть получена формула

$$Q_n^m(z) = \frac{\sin(n+m)\pi}{\sin n\pi}\,\frac{\Gamma(n+m+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{n+1}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\,\frac{(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}}{z^{n+m+1}}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}m+1,\ \frac{1}{2}n+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2};\ n+\frac{3}{2};\ z^{-2}\right).$$

Во всей этой книге мы будем считать m положительным целым числом.

15.61. Выражение функции $P_n^m(z)$ через интеграл типа Лапласа

Если произвести необходимое изменение в интеграле Шлефли из § 15.5 в соответствии с определением § 15.6, то получим

$$P_n^m(z)=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{2^n\pi i}(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits_A^{(1+,\,z+)}(t^2-1)^n(t-z)^{-n-m-1}\,dt.$$

Положим здесь $t=z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}$, как в § 15.23; тогда

$$P_n^m(z)=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{2\pi}(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\int\limits_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\frac{\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n}{\left\{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}e^{i\varphi}\right\}^m}\,d\varphi,$$

где α — значение φ, когда t находится в A, так что

$$\left|\arg(z^2-1)^{\frac{1}{2}}+\alpha\right|<\pi.$$

Теперь, как в § 15.23, подинтегральная функция является однозначной периодической функцией вещественной переменной φ с периодом 2π и, таким образом,

$$P_n^m(z)=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n e^{-mi\varphi}\,d\varphi.$$

Так как $\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n$ — четная функция φ, то, деля промежуток интегрирования на части $(-\pi,\ 0)$ и $(0,\ \pi)$, получим

$$P_n^m(z)=\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^n\cos m\varphi\,d\varphi.$$

Условия, при которых эта формула, принадлежащая Гейне, справедлива, в точности совпадают с условиями для формулы § 15.23.

Пример. Показать, что при $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$

$$P_n^m(z)=(-1)^m\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos m\varphi\,d\varphi}{\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^{n+1}},$$

где многозначные функции определяются, как в § 15.23.

15.7. Теорема сложения для полиномов Лежандра [1]

Пусть $z = xx' - (x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\omega$, где x, x', ω — любые комплексные числа. Тогда мы покажем, что

$$P_n(z) = P_n(x)P_n(x') + 2\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x)P_n^m(x')\cos m\omega.$$

Пусть сначала $\operatorname{Re} x' > 0$, так что $\left|\dfrac{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\omega-\varphi)}{x'+(x'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi}\right|$ — ограниченная функция от φ в промежутке $0 < \varphi < 2\pi$. Если M — ее верхняя грань и если $|h| < M^{-1}$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n \frac{\left\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\omega-\varphi)\right\}^n}{\left\{x'+(x'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^{n+1}}$$

сходится равномерно относительно φ и, таким образом (§ 4.7, часть I),

$$\sum_{n=0}^{\infty} h^n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\omega-\varphi)\right\}^n}{\left\{x'+(x'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^{n+1}}\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n\left\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\omega-\varphi)\right\}^n}{\left\{x'+(x'^2-1)\cos\varphi\right\}^{n+1}}\,d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{x'+(x'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi - h\left\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\omega-\varphi)\right\}}.$$

Теперь небольшим видоизменением примера 1 § 6.21 части I получим, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi} = \frac{2\pi}{(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}},$$

где берется то значение корня, при котором

$$\left|A-(A^2-B^2-C^2)^{\frac{1}{2}}\right| < \left|(B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}\right|.$$

---

[1] Legendre, Calc. Int., II, 262—269. Другое доказательство теоремы, основанное на физических соображениях, будет дано ниже (§ 18.4).

Поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{x' + (x'^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi - h\left\{x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega-\varphi)\right\}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\left[(x'-hx)^2 - \left\{(x'^2-1)^{\frac{1}{2}} - h(x^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\omega\right\}^2 - \left\{h(x^2-1)^{\frac{1}{2}} \sin\omega\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{2\pi}{(1-2hz+h^2)^{\frac{1}{2}}},$$

а это выражение, согласно § 15.23, должно стремиться к $2\pi P_0(x')$ при $h \to 0$. Разлагая по степеням h и сравнивая коэффициенты, получим, далее,

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left\{x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega-\varphi)\right\}^n}{\left\{x' + (x'^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi\right\}^{n+1}} d\varphi.$$

Далее, $P_n(z)$ является полиномом степени n относительно $\cos\omega$ и, следовательно, может быть представлен в форме $\frac{1}{2} A_0 + \sum_{m=1}^{n} A_m \cos m\omega$, где коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_n$ не зависят от ω; для их определения применим правило Фурье (§ 9.12, часть I), получим

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n(z) \cos m\omega \, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left\{x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega-\varphi)\right\}^n \cos m\omega}{\left\{x' + (x'^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi\right\}^{n+1}} d\varphi \right] d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left\{x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega-\varphi)\right\}^n \cos m\omega}{\left\{(x' + (x'^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi\right\}^{n+1}} d\omega \right] d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left\{x + (x^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\psi\right\}^n \cos m(\varphi+\psi)}{\left\{x' + (x'^2-1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi\right\}^{n+1}} d\psi \right] d\varphi,$$

где, изменив порядок интегрирования, мы положили $\omega = \varphi + \psi$ и заменили затем пределы интегрирования $\pm\pi - \varphi$ на $\pm\pi$. Но

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\psi \right\}^n \sin m\psi \, d\psi = 0,$$

так как под интегралом стоит нечетная функция от ψ; имея это в виду и пользуясь формулой § 15.61, находим

$$A_m = \frac{n!}{\pi(n+m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos m\varphi P_n^m(x)}{\left\{ x' + (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\varphi \right\}^{n+1}} d\varphi =$$
$$= 2(-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) P_n^m(x').$$

Итак, при $|\arg x'| < \frac{1}{2}\pi$

$$P_n(z) = P_n(x) P_n(x') + 2 \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) P_n^m(x') \cos m\omega.$$

Но это не более как алгебраическое тождество относительно x, x' и $\cos\omega$ (так как n — положительное целое число); оно верно, следовательно, независимо от знака $\operatorname{Re} x'$.

Сформулированный результат, таким образом, доказан.

Соответствующей теоремой при определении Феррерса будет

$$P_n \left\{ xx' + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} (1 - x'^2)^{\frac{1}{2}} \cos\omega \right\} =$$
$$= P_n(x) P_n(x') + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(x) P_n^m(x') \cos m\omega.$$

15.71. Теорема сложения для функций Лежандра

Пусть x, x' — две постоянные, вещественные или комплексные, аргументы которых численно меньше $\frac{1}{2}\pi$; далее, пусть за $(x \pm 1)^{\frac{1}{2}}$, $(x' \pm 1)^{\frac{1}{2}}$ взяты их главные значения; пусть, наконец, ω вещественно и

$$z = xx' - (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} (x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos\omega.$$

Покажем, что если $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ *для всех значений вещественной переменной* ω *и* n *не есть положительное целое число, то*

$$P_n(z) = P_n(x) P_n(x') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n+m+1)} P_n^m(x) P_n^m(x') \cos m\omega.$$

Пусть $\operatorname{ch}\alpha$, $\operatorname{ch}\alpha'$ — большие полуоси эллипсов с фокусами ± 1, проходящих соответственно через x, x'. Пусть β, β' — эксцентрические углы для x, x' на этих эллипсах, так что

$$-\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}\pi, \quad -\frac{1}{2}\pi < \beta' < \frac{1}{2}\pi.$$

Положим $\alpha + i\beta = \xi$, $\alpha' + i\beta' = \xi'$, так что $x = \operatorname{ch}\xi$, $x' = \operatorname{ch}\xi'$.

Когда ω пробегает все вещественные значения, $\operatorname{Re} z$ колеблется между

$$\operatorname{Re}(xx') \pm \operatorname{Re}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(x'^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{ch}(\alpha \pm \alpha')\cos(\beta \pm \beta')$$

и, следовательно, *необходимо, чтобы* $\beta \pm \beta'$ *были острыми углами, положительными или отрицательными.*

Возьмем теперь интеграл Шлефли

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_A^{(1+,\, z+)} \frac{(t^2 - 1)^n}{(t - z)^{n+1}}\, dt$$

и положим

$$t = \frac{e^{i\varphi}\left\{e^{-i\omega}\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi' - \operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi'\right\} + \operatorname{ch}\xi\operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi' - e^{i\omega}\operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi'}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi' + e^{i\varphi}\operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi'}.$$

Можно показать, что путь, описываемый переменной t, когда φ возрастает от $-\pi$ до π, есть окружность; читатель легко проверит, что

$$t - 1 = \frac{2\left\{e^{i(\varphi-\omega)}\operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi + \operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi\right\}\left\{\operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi\operatorname{ch}\xi' - e^{i\omega}\operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi\operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi'\right\}}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi' + e^{i\varphi}\operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi'},$$

$$t + 1 = \frac{2\left\{e^{i(\varphi-\omega)}\operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi + \operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi\right\}\left\{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi\operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi' - e^{i\omega}\operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi\operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi'\right\}}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi' + e^{i\varphi}\operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi'},$$

$$t - z = \frac{\left\{e^{i\varphi}\operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi' + \operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi'\right\}\left\{e^{i\omega}\operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}^2\frac{1}{2}\xi' + e^{-i\omega}\operatorname{sh}\xi\operatorname{ch}^2\frac{1}{2}\xi' - \operatorname{ch}\xi\operatorname{sh}\xi'\right\}}{\operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi' + e^{i\varphi}\operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi'}.$$

Так как $\left|\operatorname{ch}\frac{1}{2}\xi'\right| > \left|\operatorname{sh}\frac{1}{2}\xi'\right|$, то аргумент знаменателей не изменяется, когда φ возрастает на 2π[1]); по сходным причинам аргументы первого и третьего из числителей возрастают на 2π, а аргумент второго не изменяется; поэтому точки $t = 1$, $t = z$ лежат внутри окружности, а точка $t = -1$ вне ее, и окружность может служить контуром интегрирования по φ.

[1]) Это вытекает из того, что $\cos\beta' > 0$.

Подставляя выражения $t-1$, $t+1$, $t-z$ в интеграл Шлефли, тотчас найдем, что

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left\{x+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos(\omega-\varphi)\right\}^n}{\left\{x'+(x'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^{n+1}}\,d\varphi,$$

остальная часть выкладки протекает, как в § 15.7, за исключением того, что теперь надо пользоваться общим случаем теоремы Фурье.

Пример. Показать, что если n — положительное целое число, то

$$Q_n\left\{xx'+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x'^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\omega\right\}=$$

$$=Q_n(x)P_n(x')+2\sum_{m=1}^{\infty}Q_n^m(x)P_n^{-m}(x')\cos m\omega,$$

когда ω вещественно, $\operatorname{Re}x'\geqslant 0$ и $|(x'-1)(x+1)|<|(x-1)(x'+1)|$[1].

(Heine, Kugelfunktionen, K. Neumann, Leipziger Abh. (1886))

15.8. Функция $C_n^\nu(z)$[2]

Функцией, близко стоящей к присоединенной функции Лежандра $P_n^m(z)$, является функция $C_n^\nu(z)$, которая для целых значений n определяется как коэффициент при h^n в разложении $(1-2hz+h^2)^{-\nu}$ по возрастающим степеням h.

Легко видеть, что $C_n^\nu(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{(2\nu+1)z}{z^2-1}\frac{dy}{dz}-\frac{n(n+2\nu)}{z^2-1}y=0.$$

Можно показать, что функцию, удовлетворяющую этому уравнению, при произвольных значениях n и ν можно задать в виде контурного интеграла

$$(1-z^2)^{\frac{1}{2}-\nu}\int_C\frac{(1-t^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}}{(t-z)^{n+1}}\,dt,$$

где C — контур из § 15.2; такой интеграл соответствует интегралу Шлефли.

[1]) Авторы отступают здесь от своего соглашения рассматривать только целые положительные m у присоединенных функций $P_n^m(z)$. По поводу этой теоремы сложения см. книгу Э. У. Гобсона «Теория сферических и эллипсоидальных функций», гл. VIII (ИЛ, 1952). — *Прим. ред.*

[2]) Эту функцию изучал Гегенбауэр (Gegenbauer, Wiener Sitzungsberichte, LXX (1874), 434—443; LXXV (1877), 891—896; XCVII (1888), 259—316; CII (1893), 942).

Легко доказать следующие результаты:

(I) Если n — целое число, то

$$C_n^\nu(z) =$$
$$= \frac{(-2)^n \nu(\nu+1)\ldots(\nu+n-1)}{n!\,(2n+2\nu-1)(2n+2\nu-2)\ldots(n+2\nu)}(1-z^2)^{\frac{1}{2}-\nu}\frac{d^n}{dz^n}\left\{(1-z^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}\right\};$$

так как $P_n(z) = C_n^{\frac{1}{2}}(z)$, то формула Родрига является частным случаем этой формулы.

(II) Если r — целое число, то

$$C_{n-r}^{r+\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{(2r-1)(2r-3)\ldots 3\cdot 1}\frac{d^r}{dz^r}P_n(z),$$

откуда

$$C_{n-r}^{r+\frac{1}{2}}(z) = \frac{(z^2-1)^{-\frac{1}{2}r}}{(2r-1)(2r-3)\ldots 3\cdot 1}P_n^r(z).$$

Последнее равенство дает связь между функциями $C_n^\nu(z)$ и $P_n^r(z)$.

(III) Рекуррентным формулам для $P_n(z)$ соответствуют следующие:

$$zC_{n-1}^{\nu+1}(z) - C_{n-2}^{\nu+1}(z) - \frac{n}{2\nu}C_n^\nu(z) = 0,$$

$$C_n^{\nu+1}(z) - zC_{n-1}^{\nu+1}(z) = \frac{n+2\nu}{2\nu}C_n^\nu(z), \quad \frac{dC_n^\nu(z)}{dz} = 2\nu C_{n-1}^{\nu+1}(z),$$

$$nC_n^\nu(z) = (n-1+2\nu)\,zC_{n-1}^\nu(z) - 2\nu(1-z^2)\,C_{n-2}^{\nu-1}(z).$$

ЛИТЕРАТУРА

A. M. Legendre, Calcul Intégral, II (Paris, 1817).
H. E. Heine[1]), Handbuch der Kugelfunktionen (Berlin, 1878).
N. M. Ferrers, Spherical Harmonics (1887).
I. Todhunter, Functions of Laplace, Lamé and Bessel (1875).
L. Schläfli, Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunktionen (Bern, 1881).
E. W. Hobson, Phil. Trans. of the Royal Society, 187A (1896), 443—531.
E. W. Barnes, Quarterly Journ., XXXIX (1908), 97—204.
R. Olbricht, Studien über die Kugel- und Cylinder-Funktionen (Halle, 1887) [Nova Acta Acad. Leop., LII (1888), 1—48].
N. Nielsen, Théorie des fonctions metasphériques (Paris, 1911).
В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2 (Гостехиздат, 1956).
Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций (ИЛ, 1952).
Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения (Гостехиздат, 1953).

---

[1]) Прежде чем изучать функции Лежандра по этому сочинению, следует познакомиться с мемуаром Гобсона, так как некоторые положения работы Гейне неправильны.

Примеры[1])

1. Доказать, что если n — положительное целое число, то

$$P_n(z) = \sum_0^n \frac{(n+p)!\,(-1)^p}{(n-p)!\,p!\,p!\,2^{p+1}} \left\{(1-z)^p + (-1)^n (1+z)^p\right\}.$$

(Math. Trip., 1898)

2. Доказать, что

$$\int_{-1}^{1} z(1-z^2)\frac{dP_n}{dz}\frac{dP_m}{dz}\,dz$$

равен нулю, кроме случаев $m-n=\pm 1$, и определить его значение в этих случаях.

(Math. Trip., 1896)

3. Показать (по индукции или каким-либо другим образом), что если n — положительное целое число, то

$$(2n+1)\int_z^1 P_n^2(z)\,dz = 1 - zP_n^2 - 2z\left(P_1^2+P_2^2+\ldots+P_{n-1}^2\right) + \\ + 2\left(P_1P_2+P_2P_3+\ldots+P_{n-1}P_n\right).$$

(Math. Trip., 1899)

4. Показать, что

$$zP_n'(z) = nP_n(z) + (2n-3)P_{n-2}(z) + (2n-7)P_{n-4}(z) + \ldots$$

(Clare, 1906)

5. Показать, что

$$z^2P_n''(z) = n(n-1)P_n(z) + \sum_{r=1}^{p}(2n-4r+1)\left\{r(2n-2r+1)-2\right\}P_{n-2r}(z),$$

где $p=\frac{1}{2}n$ или $\frac{1}{2}(n-1)$.

(Math. Trip., 1904)

6. Показать, что полином Лежандра удовлетворяет соотношению

$$(z^2-1)^2\frac{d^2P_n}{dz^2} = n(n-1)(n+1)(n+2)\int_1^z dz\int_1^z P_n(z)\,dz.$$

(Trin. Coll. Dublin)

7. Показать, что

$$\int_0^1 z^2P_{n+1}(z)P_{n-1}(z)\,dz = \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.$$

(Peterhouse, 1905)

---

[1]) Функции, приводимые в примерах 1—30, являются *полиномами* Лежандра.

8. Показать, что значения интеграла

$$\int_{-1}^{1} (1-z^2)^2 P_m'''(z) P_n'(z)\, dz$$

следующие:

(I) $8n(n+1)$, когда $m-n$ положительное и четное,

(II) $\dfrac{-2n(n^2-1)(n-2)}{2n+1}$; когда $m=n$,

(III) 0 для всех других значений m и n.

(Peterhouse, 1907)

9. Показать, что

$$\sin^n \theta P_n(\sin\theta) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \cos^r \theta P_r(\cos\theta).$$

(Math. Trip., 1907)

10. Вычисляя интеграл $\int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\, d\theta$ (пример 2 § 15.1), а затем интегрируя по частям, показать, что интеграл $\int_{-1}^{1} P_n(\mu) \arcsin\mu\, d\mu$ равен нулю при n четном и равен

$$\pi \left\{ \frac{1\cdot 3\ldots(n-2)}{2\cdot 4\ldots(n+1)} \right\}^2$$

при n — нечетном.

(Clare, 1903)

11. Пусть m и n — положительные целые числа и $m \leqslant n$; показать по индукции, что

$$P_m(z) P_n(z) = \sum_{r=0}^{m} \frac{A_{m-r} A_r A_{n-r}}{A_{n+m-r}} \left(\frac{2n+2m-4r+1}{2n+2m-2r+1} \right) P_{n+m-2r}(z),$$

где

$$A_m = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m-1)}{m!}.$$

(Adams, Proc. Royal. Soc., XXVII)

12. Разложением по возрастающим степеням переменной u показать, что

$$P_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (u^2+z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

где u^2 заменяется на $1-z^2$ после дифференцирования.

13. Показать, что $P_n(z)$ может быть представлен с точностью до постоянного множителя как определитель, в котором элементы, параллельные побочной диагонали (т. е. элементы, для которых сумма индекса строки и

индекса столбца постоянна), равны; определитель имеет n строк, и его элементы суть

$$z, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}z, \quad -\frac{1}{5}, \frac{1}{5}z, \ldots, \frac{1}{2n-1}z.$$

(Heun, Gött. Nach., 1881)

14. Показать, что если путь интегрирования проходит над $t=1$, то

$$P_n(z) = \frac{2}{\pi i}\int_0^{\infty} \frac{\left\{z(1-t^2) - 2t(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^n}{(1-t^2)^{n+1}}\,dt.$$

(Silva)

15. С помощью подстановки $\operatorname{ctg}\theta' = \operatorname{ctg}\theta - h\operatorname{cosec}\theta$ и разложения $\sin\theta'$ в ряд по степеням h по теореме Тейлора доказать, что

$$P_n(\cos\theta) = \frac{(-1)^n}{n!}\operatorname{cosec}^{n+1}\theta\,\frac{d^n(\sin\theta)}{d(\operatorname{ctg}\theta)^n}.$$

(Math. Trip., 1893)

16. Из рассмотрения ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h^n P_n(z)$ показать, что

$$P_n(z) = \frac{1}{n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-z^2)t^2}\left(-\frac{d}{dz}\right)^n e^{-z^2t^2}\,dt.$$

(Glaisher, Proc. London Math. Soc., VI)

17. Дано уравнение поверхности вращения, близкой к сферической:

$$r = 1 + \alpha\{P_1(\cos\theta) + P_3(\cos\theta) + \ldots + P_{2n-1}(\cos\theta)\},$$

где α мало; показать, что если пренебречь α^2, то радиус кривизны меридиана будет равен

$$1 + \alpha\sum_{m=0}^{n-1}\{n(4m+3) - (m+1)(8m+3)\}P_{2m+1}(\cos\theta).$$

(Math. Trip., 1894)

18. Дано уравнение поверхности вращения, близкой к сферической:

$$r = a\{1 + \varepsilon P_n(\cos\theta)\},$$

где ε мало.

Показать, что если пренебречь ε^3, то ее площадь равна

$$4\pi a^2\left\{1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{n^2+n+2}{2n+1}\right\}.$$

(Trinity, 1894)

19. Показать, что если k — целое число и

$$(1 - 2hz + h^2)^{-\frac{1}{2}k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z),$$

то

$$a_n = \frac{h^n}{(1-h^2)^{k-2}} \frac{2^{\frac{1}{2}(k-3)}(2n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(k-2)}\left(h^2\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\frac{1}{2}(k-3)} x^{-n+\frac{1}{2}k-2}\, y^{n+\frac{1}{2}k-2},$$

где x и y должны быть заменены единицей после дифференцирования.

(Routh, Proc. London Math. Soc., XXVI)

20. Показать, что

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{z-x}\{P_n(x)P_{n-1}(z)-P_{n-1}(x)P_n(z)\}\,dx = -\frac{2}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{d}{dz}\left[P_n(z)\left(\frac{1}{n}P_{n-1}(z)+\frac{1}{n+1}P_{n+1}(z)\right)\right] = -1.$$

(Catalan)

21. Пусть $x^2+y^2+z^2=r^2$, $z=\mu r$, причем все числа вещественны, так что $-1<\mu<1$.

Показать, что

$$P_n(\mu) = \frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right),$$

где при дифференцировании r рассматривается как функция независимых переменных x, y, z.

22. В обозначениях предыдущего примера (ср. стр. 133, сноска [1])) показать, что

$$Q_n(\mu) = \frac{(-1)^n r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left\{\frac{1}{2r}\lg\left(\frac{r-z}{r+z}\right)\right\},$$

$$(n+1)P_n(\mu)+\mu P_n'(\mu) = \frac{(-1)^n r^{n+3}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r^3}\right).$$

23. Показать, что если $|h|$ и $|z|$ достаточно малы, то

$$\frac{1-h^2}{(1-2hz+h^2)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)h^n P_n(z).$$

24. Доказать, что

$$P_{n+1}(z)Q_{n-1}(z)-P_{n-1}(z)Q_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{n(n+1)}z.$$

(Math. Trip., 1894)

25. Показать, что если произвольная функция $f(x)$ может быть разложена в ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

сходящийся равномерно в области, содержащей точку $x=1$, то разложение интеграла от этой функции будет

$$\int_1^x f(x)\,dx = -a_0 - \frac{1}{3}a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n-1}}{2n-1} - \frac{a_{n+1}}{2n+3}\right)P_n(x).$$

(Bauer)

26. Определить коэффициенты в разложении Неймана функции e^{az} в ряд по полиномам Лежандра.

(Bauer, Journ. für Math., LVI)

27. Вывести из примера 25, что

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2}\sum_{0}^{\infty}\left\{\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right\}^2\{P_{2n+1}(z) - P_{2n-1}(z)\}.$$

(Catalan)

28. Показать, что

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}\lg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)P_n(z) - \left\{P_{n-1}(z)P_0(z) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}P_{n-2}(z)P_1(z) + \frac{1}{3}P_{n-3}(z)P_2(z) + \ldots + \frac{1}{n}P_0(z)P_{n-1}(z)\right\}.$$

(Schläfli; Hermite; Teixera, J. de Sci. Math., VI (1884), 81—84)

29. Показать, что

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}\left\{(z^2-1)^n \lg\frac{z+1}{z-1}\right\} - \frac{1}{2}P_n(z)\lg\frac{z+1}{z-1}.$$

Доказать также, что

$$Q_n(z) = \frac{1}{2}P_n(z)\lg\frac{z+1}{z-1} - f_{n-1}(z),$$

где [1])

$$f_{n-1}(z) = \frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(z) + \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(z) + \frac{2n-9}{5(n-2)}P_{n-5}(z) + \ldots =$$
$$= k_n + (k_n - 1)\frac{n(n+1)}{1^2}\left(\frac{z-1}{2}\right) +$$
$$+ \left(k_n - 1 - \frac{1}{2}\right)\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{1^2\cdot 2^2}\left(\frac{z-1}{2}\right)^2 +$$
$$+ \left(k_n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{n(n-1)(n-2)(n+1)(n+2)(n+3)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}\left(\frac{z-1}{2}\right)^3 + \ldots,$$

где $k_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

(Math. Trip., 1898)

---

[1]) Первое из этих выражений для $f_{n-1}(z)$ было дано Кристоффелем (Christoffel, Journ. für Math., LV (1858), 68); он также дал (там же, стр. 72) обобщение примера 28. Второе выражение было дано Стилтьесом (Stieltjes, Corresp. d'Hermite et de Stieltjes, II, 59).

30. Показать, что общее решение дифференциального уравнения Лежандра есть

$$y = AP_n(z) + BP_n(z) \int\limits_z^\infty \frac{dt}{(t^2-1)\{P_n(t)\}^2},$$

причем путь интегрирования — луч, который при продолжении проходит через точку $t = 0$.

31. Показать, что

$$\left\{z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right\}^a = \sum_{m=0}^\infty B_m Q_{2m-a-1}(z),$$

где

$$B_m = -\frac{a\left(a-2m+\frac{1}{2}\right)}{2\pi} \frac{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m-a-\frac{1}{2}\right)}{m!\,\Gamma(m-a+1)}.$$

(Schläfli)

32. Показать, что при $\operatorname{Re}(n+1) > 0$

$$Q_n(z) = \int\limits_{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}^\infty \frac{h^{-n-1}}{(1-2hz+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,dh$$

и

$$Q_n(z) = \int\limits_0^{z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}} \frac{h^n}{(1-2hz+h^2)^{\frac{1}{2}}}\,dh.$$

33. Показать, что

$$Q_n^m(z) = e^{m\pi i}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)} \int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch} mu}{\left\{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\operatorname{ch} u\right\}^{n+1}}\,du,$$

где вещественная часть $n+1$ больше m. (Hobson)

34. Получить разложение функции $P_n(z)$ при $|\arg z| < \pi$ в ряд по степеням $\frac{1}{z}$, когда n не целое число, а именно:

$$P_n(z) = \frac{\operatorname{tg} n\pi}{\pi}\{Q_n(z) - Q_{-n-1}(z)\} =$$

$$= \frac{2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} z^n F\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{n}{2}; \frac{1}{2}-n; \frac{1}{z^2}\right) +$$

$$+ \frac{2^{-n-1}\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-n)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} z^{-n-1} F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n+1}{2}; n+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right).$$

[Легче всего это получается методом § 14.51.]

35. Показать, что дифференциальное уравнение для присоединенной функции Лежандра $P_n^m(z)$ определяется схемами [1])

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{1}{2}n & m & -\frac{1}{2}n & \dfrac{z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z-(z^2-1)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & -m & \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & \end{matrix}\right\},$$

$$P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ -\frac{1}{2}n & \frac{1}{2}m & 0 & \dfrac{1}{1-z^2} \\ \frac{1}{2}n+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}m & \frac{1}{2} & \end{matrix}\right\}.$$

(Olbricht)

36. Показать, что дифференциальное уравнение для $C_n^\nu(z)$ определяется схемой

$$P\left\{\begin{matrix} -1 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{2}-\nu & n+2\nu & \frac{1}{2}-\nu & z \\ 0 & -n & 0 & \end{matrix}\right\}.$$

37. Доказать, что если

$$y_s = \frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2s-1)}{n(n^2-1)(n^2-4)\ldots\{n^2-(s-1)^2\}(n+s)}(z^2-1)^s\frac{d^sP_n}{dz^s},$$

то

$$y_2 = P_{n+2} - \frac{2(2n+1)}{2n-1}P_n + \frac{2n+3}{2n-1}P_{n-2},$$

$$y_3 = P_{n+3} - \frac{3(2n+3)}{2n-1}P_{n+1} + \frac{3(2n+5)}{2n-3}P_{n-1} - \frac{(2n+3)(2n+5)}{(2n-1)(2n-3)}P_{n-3},$$

и найти общую формулу.

(Math. Trip., 1896)

---

[1]) См. также § 15.5, пример.

38. Показать, что

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \left[\frac{\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}m\pi\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac{1}{2}}} + \right.$$

$$+ \frac{1^2-4m^2}{2(2n+3)} \frac{\cos\left\{\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta - \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}m\pi\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$\left. + \frac{(1^2-4m^2)(3^2-4m^2)}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)} \frac{\cos\left\{\left(n+\frac{5}{2}\right)\theta - \frac{5}{4}\pi + \frac{1}{2}m\pi\right\}}{(2\sin\theta)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right],$$

и найти области значений m, n и θ, для которых это разложение имеет место

(Math. Trip., 1901)

39. Показать, что значения n, для которых функция $P_n^{-m}(\cos\theta)$ равна нулю, уменьшаются при возрастании θ от 0 до π, если m положительно, а также, что число вещественных нулей функции $P_n^{-m}(\cos\theta)$ для значений θ между $-\pi$ и π равно наибольшему целому числу, меньшему $n-m+1$.

(Macdonald, Proc. London Math. Soc., XXXI, XXXIV)

40. Получить формулу

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [1-2h\{\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\theta'-\theta)\} + h^2]^{-\frac{1}{2}}\, d\theta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(\cos\omega) P_n(\cos\varphi).$$

(Legendre)

41. При $f(x) = x^2$ $(x \geqslant 0)$ и $f(x) = -x^2$ $(x < 0)$ показать, что если $f(x)$ можно разложить в промежутке $(-1, 1)$ в равномерно сходящийся ряд полиномов Лежандра, то разложение будет

$$f(x) = \frac{3}{4}P_1(x) - \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1\cdot 3\dots(2r-3)}{4\cdot 6\cdot 8\dots 2r} \frac{4r+3}{2r+4} P_{2r+1}(x).$$

(Trinity, 1893)

42. Показать, что если

$$\frac{1}{(1-2hz+h^2)^{\nu}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n C_n^{\nu}(z),$$

то

$$C_n^\nu\left\{xx_1-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}(x_1^2-1)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}=$$

$$=\frac{\Gamma(2\nu-1)}{\{\Gamma(\nu)\}^2}\sum_{\lambda=0}^{n}(-1)^\lambda\frac{4^\lambda\Gamma(n-\lambda+1)\{\Gamma(\nu+\lambda)\}^2(2\nu+2\lambda-1)}{\Gamma(n+2\nu+\lambda)}\times$$

$$\times(x^2-1)^{\frac{1}{2}\lambda}(x_1^2-1)^{\frac{1}{2}\lambda}C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x)\,C_{n-\lambda}^{\nu+\lambda}(x_1)\,C_\lambda^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\varphi).$$

(Gegenbauer, Wiener Sitzungsberichte, CII (1893), 942)

43. Показать, что если

$$\sigma_n(z)=\int_0^{e_1}(t^3-3tz+1)^{-\frac{1}{2}}t^n\,dt,$$

где e_1 — наименьший корень уравнения $t^3-3tz+1=0$, то

$$(2n+1)\sigma_{n+1}-3(2n-1)z\sigma_{n-1}+2(n-1)\sigma_{n-2}=0$$

и

$$4(4z^3-1)\sigma_n'''+144z^2\sigma_n''-z(12n^2-24n-291)\sigma_n'-$$
$$-(n-3)(2n-7)(2n+5)\sigma_n=0,$$

где

$$\sigma_n'''=\frac{d^3\sigma_n(z)}{dz^3}\quad\text{и т. д.}$$

(Pincherle, Rendiconti Lincei (4), VII (1891), 74)

44. Показать, что если

$$(h^3-3hz+1)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(z)\,h^n,$$

то

$$2(n+1)R_{n+1}-3(2n+1)zR_n+(2n-1)R_{n-2}=0,$$
$$nR_n+R_{n-2}'-zR_n'=0$$

и

$$4(4z^3-1)R_n'''+96z^2R_n''-z(12n^2+24n-91)R_n-n(2n+3)(2n+9)R_n=0.$$

где

$$R_n'''=\frac{d^3R_n}{dz^3}\quad\text{и т. д.}$$

(Pincherle, Mem. Ist. Bologna (5), I (1889), 337)

45. Пусть

$$A_n(x)=\frac{1}{2^n n!(x-1)}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n(x-1)\},$$

получить рекуррентную формулу

$$(n+1)(2n-1)A_n(x)-\{(4n^2-1)x+1\}A_{n-1}(x)+$$
$$+(n-1)(2n+1)A_{n-2}(x)=0\cdot$$

(Schendel, Journ. für Math., LXXX)

46. Показать, что если n не отрицательное число, а m — положительное целое, то уравнение

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+(2n+2)x\frac{dy}{dx}=m(m+2n+1)y$$

имеет два решения:

$$K_m(x)=(x^2-1)^{-n}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^{m+n},$$

$$L_m(x)=(x^2-1)^{-n}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(t^2-1)^n}{x-t}K_m(t)\,dt,$$

когда x не есть вещественное число, удовлетворяющее неравенству $-1\leqslant x\leqslant 1$.

47. Доказать, что

$$\left\{1-hx-(1-2hx+h^2)^{\frac{1}{2}}\right\}^m=$$

$$=m(x^2-1)^m\sum_{n=m}^{\infty}\frac{h^{n+m}}{(n+m)!}\,\frac{1}{n}\,\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n.$$

(Clare, 1901)

48. Пусть

$$F_{a,n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+a)^n}{m!}x^m,$$

показать, что

$$F_{a,n}(x)=\left\{\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{at+xe^t}\right)\right\}_{t=0}=e^xP_n(x,a),$$

где $P_n(x,a)$ — полином степени n относительно x, и вывести отсюда, что

$$P_{n+1}(x,a)=(x+a)P_n(x,a)+x\frac{d}{dx}P_n(x,a).$$

(Trinity, 1905)

49. Пусть $F_n(x)$ есть коэффициент при z^n в разложении выражения

$$\frac{2hz}{e^{hz}-e^{-hz}}e^{xz}$$

по возрастающим степеням z, так что

$$F_0(x)=1,\quad F_1(x)=x,\quad F_2(x)=\frac{3x^2-h^2}{6}\quad \text{и т. д.}$$

Показать, что

(1) $F_n(x)$ — однородный полином степени n относительно x и h;

(2) $\dfrac{dF_n(x)}{dx}=F_{n-1}(x)\qquad (n\geqslant 1);$

(3) $\displaystyle\int\limits_{-h}^{h}F_n(x)\,dx=0\qquad (n\geqslant 1);$

(4) если $y = a_0 F_0(x) + a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + \ldots$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots$, — вещественные постоянные, то среднее значение $\frac{d^r y}{dx^r}$ в промежутке от $x = -h$ до $x = +h$ будет a_r.

(Léauté)

50. Пусть $F_n(x)$ определяется, как в предыдущем примере; показать, что при $-h < x < h$

$$F_{2m}(x) = (-1)^m 2 \frac{h^{2m}}{\pi^{2m}} \left(\cos \frac{\pi x}{h} - \frac{1}{2^{2m}} \cos \frac{2\pi x}{h} + \frac{1}{3^{2m}} \cos \frac{3\pi x}{h} + \ldots \right),$$

$$F_{2m+1}(x) = (-1)^m 2 \frac{h^{2m+1}}{\pi^{2m+1}} \left(\sin \frac{\pi x}{h} - \frac{1}{2^{2m+1}} \sin \frac{2\pi x}{h} + \frac{1}{3^{2m+1}} \sin \frac{3\pi x}{h} + \ldots \right).$$

(Appell)

ГЛАВА 16

ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

16.1. Слияние двух особых точек уравнения Римана

Мы видели (§ 10.8, часть I), что линейное дифференциальное уравнение с двумя правильными особыми точками можно проинтегрировать в элементарных функциях, тогда как решение линейного дифференциального уравнения с тремя правильными особыми точками было, по существу, предметом главы 14.

Мы рассмотрим теперь, как следующий по сложности тип, дифференциальное уравнение, получаемое из уравнения Римана слиянием двух особых точек. Это слияние дает уравнение с одной неправильной особой точкой, получаемой от слияния особых точек уравнения Римана, и с одной правильной особой точкой, соответствующей третьей особой точке уравнения Римана.

Это вырожденное уравнение мы получим, заставляя $c \to \infty$ в уравнении, определяемом схемой

$$P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & c & \\ \frac{1}{2}+m & -c & c-k & z \\ \frac{1}{2}-m & 0 & k & \end{Bmatrix}.$$

Легко находим, что искомое уравнение имеет вид

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{du}{dz}+\left(\frac{k}{z}+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{z^2}\right)u=0. \tag{A}$$

Видоизменим это уравнение, положив $u=e^{-\frac{1}{2}z}W_{k,m}(z)$; получим уравнение[1]) для $W_{k,m}(z)$:

$$\frac{d^2W}{dz^2}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{k}{z}+\frac{\frac{1}{4}-m^2}{z^2}\right\}W=0. \tag{B}$$

---

[1]) Это уравнение было дано Уиттекером (Whittaker, Bulletin American Math. Soc., X (1904), 125—134).

Читателю предлагается проверить, что особые точки этого уравнения лежат в 0 и ∞, причем первая правильная, вторая неправильная; если $2m$ *не есть целое число*, то два интеграла уравнения (B), правильные вблизи 0 и годные для всех конечных значений z, представляются рядами

$$M_{k,m}(z)=z^{\frac{1}{2}+m}e^{-\frac{1}{2}z}\left\{1+\frac{\frac{1}{2}+m-k}{1!\,(2m+1)}z+\frac{\left(\frac{1}{2}+m-k\right)\left(\frac{3}{2}+m-k\right)}{2!\,(2m+1)(2m+2)}z^2+\ldots\right\},$$

$$M_{k,-m}(z)=z^{\frac{1}{2}-m}e^{-\frac{1}{2}z}\left\{1+\frac{\frac{1}{2}-m-k}{1!\,(1-2m)}z+\frac{\left(\frac{1}{2}-m-k\right)\left(\frac{3}{2}-m-k\right)}{2!\,(1-2m)(2-2m)}z^2+\ldots\right\}.$$

Эти ряды, очевидно, образуют фундаментальную систему решений.

[Примечание. Тип рядов, стоящих в фигурных скобках, был рассмотрен Куммером[1]), а позднее Якобсталем[2]) и Барнсом[3]); ряды, в которых $k=0$, были исследованы Лагранжем в 1762—1765 гг. (Oeuvres, I, 480). В обозначении Куммера, видоизмененном Барнсом, они напишутся в виде ${}_1F_1\left\{\frac{1}{2}\pm m-k;\ \pm 2m+1;\ z\right\}$; рассмотрение решений уравнения (B) вместо решений уравнения $z\frac{d^2y}{dz^2}-(z-\rho)\frac{dy}{dz}-\alpha y=0$, одним из которых является ${}_1F_1(\alpha;\ \rho;\ z)$, имеет своим основанием бо́льшую симметрию формул, а также простоту выражений различных функций прикладной математики (см. § 16.2) именно через решения уравнения (B).]

16.11. Формулы Куммера

(I) Покажем теперь, что если $2m$ не есть отрицательное целое число, то

$$z^{-\frac{1}{2}-m}M_{k,m}(z)=(-z)^{-\frac{1}{2}-m}M_{-k,m}(-z)$$

или

$$e^{-z}\left\{1+\frac{\frac{1}{2}+m-k}{1!\,(2m+1)}z+\frac{\left(\frac{1}{2}+m-k\right)\left(\frac{3}{2}+m-k\right)}{2!\,(2m+1)(2m+2)}z^2+\ldots\right\}=$$

$$=1-\frac{\frac{1}{2}+m+k}{1!\,(2m+1)}z+\frac{\left(\frac{1}{2}+m+k\right)\left(\frac{3}{2}+m+k\right)}{2!\,(2m+1)(2m+2)}z^2-\ldots$$

---

[1]) Kummer, Journ. für. Math., XV (1836), 139.

[2]) Jacobstahl, Math. Ann., LVI (1903), 129—154.

[3]) Barnes, Trans. Camb. Phil. Soc., XX (1908), 253—279.

Ибо при замене e^{-z} его разложением по степеням z коэффициент при z^n в произведении абсолютно сходящихся рядов слева будет

$$\frac{(-1)^n}{n!} F\left(\frac{1}{2}+m-k,\ -n;\ 2m+1;\ 1\right)=$$
$$=\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\Gamma(2m+1)\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+k+n\right)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+k\right)\Gamma(2m+1+n)}$$

в силу § 14.11, а это и есть коэффициент при z^n справа[1]).

Полученный результат называется *первой формулой Куммера.*

(II) Равенство

$$M_{0,m}(z)=z^{\frac{1}{2}+m}\left\{1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{z^{2p}}{2^{4p}p!\,(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}\right\},$$

справедливое при $2m$, не равном отрицательному целому числу, называется *второй формулой Куммера.*

Для ее доказательства отметим, что коэффициент при $z^{n+m+\frac{1}{2}}$ в разложении произведения

$$z^{m+\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}z}{}_1F_1\left(m+\frac{1}{2};\ 2m+1;\ z\right),$$

в котором второй и третий множители разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды, будет (§ 3.73, часть I)

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)\left(\frac{3}{2}+m\right)\ldots\left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{n!\,(2m+1)(2m+2)\ldots(2m+n)}F\left(-n,\ -2m-n;\ -n+\frac{1}{2}-m;\ \frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)\left(\frac{3}{2}+m\right)\ldots\left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{n!\,(2m+1)(2m+2)\ldots(2m+n)}F\left(-\frac{1}{2}n,-m-\frac{1}{2}n;-n+\frac{1}{2}-m;\ 1\right)$$

в силу соотношения Куммера[2])

$$F\left(2\alpha,\ 2\beta;\ \alpha+\beta+\frac{1}{2};\ x\right)=F\left\{\alpha,\ \beta;\ \alpha+\beta+\frac{1}{2};\ 4x(1-x)\right\},$$

---

[1]) Результат остается верным и когда $m+\frac{1}{2}+k$ — отрицательное целое число, что доказывается небольшим видоизменением рассуждений § 14.11

[2]) См. главу 14, примеры 12 и 13, стр. 103.

справедливого при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; таким образом, коэффициент при $z^{n+m+\frac{1}{2}}$ (согласно § 14.11) равен

$$\frac{\left(\frac{1}{2}+m\right)\left(\frac{3}{2}+m\right)\ldots\left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{n!\,(2m+1)(2m+2)\ldots(2m+n)}\,\frac{\Gamma\left(+n-\frac{1}{2}-m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n\right)}=$$

$$=\frac{(-1)^n\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n!\,(2m+1)(2m+2)\ldots(2m+n)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n\right)};$$

при n нечетном он равен нулю; при n четном $(=2p)$ он равен

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-p\right)}{(2p)!\,2^{2p}\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(m+p-\frac{1}{2}\right)(m+1)(m+2)\ldots(m+p)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-p\right)}=$$

$$=\frac{1\cdot 3\ldots(2p-1)}{(2p)!\,2^{3p}\,(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}=\frac{1}{2^{4p}p!\,(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}.$$

16.12. Определение[1]) функции $W_{k,m}(z)$

Решения $M_{k,\pm m}(z)$ уравнения (В) § 16.1 не являются, однако, наиболее удобными в качестве основных ввиду того, что одно из них теряет смысл, когда $2m$ — целое число.

Интеграл, получаемый при слиянии особых точек из интеграла § 14.6, после умножения на постоянный множитель и на $e^{\frac{1}{2}z}$ будет[2])

$$W_{k,m}(z)=$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)e^{-\frac{1}{2}z}z^k\int\limits_{\infty}^{(0+)}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}e^{-t}dt.$$

Предполагается, что $\arg z$ имеет свое главное значение и что контур взят так, что точка $t=-z$ лежит вне его.

Подинтегральную функцию мы делаем однозначной, беря $|\arg(-t)|\leqslant\pi$ и выбирая значение $\arg\left(1+\frac{t}{z}\right)$, которое стремится к нулю при $t\to 0$ по пути, лежащему внутри контура.

---

[1]) Функция $W_{k,m}(z)$ была определена при помощи интеграла этого типа Уиттекером (W h i t t a k e r, loc. cit., 125).

[2]) Выбран надлежащий контур и переменная t § 14.6 заменена на $-t$

При этих условиях из § 5.32 части I следует, что интеграл будет аналитической функцией от z. Чтобы показать, что он удовлетворяет уравнению (B), положим

$$v=\int_{\infty}^{(0+)}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}e^{-t}\,dt$$

и получим без затруднений[1])

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\left(\frac{2k}{z}-1\right)\frac{dv}{dz}+\frac{\frac{1}{4}-m^2+k(k-1)}{z^2}v=$$
$$=-\frac{\left(k-\frac{1}{2}+m\right)}{z^2}\int_{\infty}^{(0+)}\frac{d}{dt}\left\{t^{-k+\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{3}{2}+m}e^{-t}\right\}dt=0,$$

так как выражение в фигурных скобках стремится к нулю при $t\to+\infty$, а это и есть условие того, что $e^{-\frac{1}{2}z}z^kv$ удовлетворяет уравнению (B).

Согласно этому функция $W_{k,m}(z)$, определяемая интегралом

$$-\frac{1}{2\pi i}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)e^{-\frac{1}{2}z}z^k\int_{\infty}^{(0+)}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}e^{-t}\,dt,$$

будет решением дифференциального уравнения (B).

Формула для $W_{k,m}(z)$ теряет смысл при $k-\frac{1}{2}-m$, равном отрицательному целому числу. Чтобы преодолеть это затруднение, отметим, что, *когда*

$$\operatorname{Re}\left(k-\frac{1}{2}-m\right)\leqslant 0$$

и $k-\frac{1}{2}-m$ *не есть целое число*, мы можем преобразовать контурный интеграл в интеграл с бесконечным пределом по способу § 12.22; таким путем при

$$\operatorname{Re}\left(k-\frac{1}{2}-m\right)\leqslant 0$$

найдем

$$W_{k,m}(z)=\frac{e^{-\frac{1}{2}z}z^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-k+m\right)}\int_0^{\infty}t^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}e^{-t}\,dt.$$

---

[1]) Дифференцирование под знаком интеграла законно в силу § 4.44 части I.

Этой формулы достаточно для определения $W_{k,m}(z)$ в критических случаях, когда $m+\frac{1}{2}-k$ — положительное целое число, и таким образом, $W_{k,m}(z)$ определена для всех значений k и m и для всех значений z, кроме вещественных отрицательных[1]).

Пример. Выразить решение уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(a+\frac{b}{z}+\frac{c}{z^2}\right)u=0$$

через функции типа $W_{k,m}(z)$; a, b, c — любые постоянные.

16.2. Выражение различных функций через функции типа $W_{k,m}(z)$

Доказано[2]), что многие функции, применяемые в прикладной математике, могут быть выражены через функции $W_{k,m}(z)$; приведем несколько примеров.

(I) *Функция ошибок*[3]), встречающаяся в теории вероятностей и погрешностей наблюдений, а также в теории преломления и теплопроводности, определяется равенством

$$\operatorname{Erfc}(x)=\int_x^\infty e^{-t^2}dt,$$

где x вещественно.

Положив $t=x^2(w^2-1)$ и затем $w=\frac{s}{x}$ в интеграле для $W_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(x^2)$, получим

$$W_{-\frac{1}{4},\frac{1}{4}}(x^2)=x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_0^\infty\left(1+\frac{t}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,dt=$$

$$=2x^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_1^\infty e^{x^2(1-w^2)}\,dw=2x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}x^2}\int_x^\infty e^{-s^2}ds,$$

---

[1]) Когда z вещественно и отрицательно, $W_{k,m}(z)$ можно определить как $W_{k,m}(z+0i)$ или $W_{k,m}(z-0i)$, смотря по тому, что удобнее.

[2]) Whittaker, Bulletin American Math. Soc., X; это сочинение содержит более полный обзор, чем приведенный здесь.

[3]) Это название прилагается также к функции

$$\operatorname{Erf}(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\operatorname{Erfc}(x).$$

и таким образом, функция ошибок выражается формулой

$$\operatorname{Erfc}(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x^2}W_{-\frac{1}{4},\,\frac{1}{4}}(x^2).$$

Другие интегралы, встречающиеся в связи с теорией теплопроводности, например $\int\limits_a^b e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}dt$, могут быть выражены через функции ошибок, а следовательно, и через функции $W_{k,m}$.

Пример. Показать, что формула для функции ошибок остается справедливой и для комплексных значений x.

(II) *Неполная гамма-функция*, изученная Лежандром и другими[1]), определяется равенством

$$\gamma(n,\,x)=\int\limits_0^x t^{n-1}e^{-t}\,dt.$$

Положив $t=s-x$ в интеграле для $W_{\frac{1}{2}(n-1),\,\frac{1}{2}n}(x)$, убедимся в том, что

$$\gamma(n,\,x)=\Gamma(n)-x^{\frac{1}{2}(n-1)}e^{-\frac{1}{2}x}W_{\frac{1}{2}(n-1),\,\frac{1}{2}n}(x).$$

(III) *Интегральный логарифм*, рассмотренный Эйлером и другими[2]), определяется при $|\arg\{-\lg z\}|<\pi$ равенством

$$\operatorname{li}(z)=\int\limits_0^z\frac{dt}{\lg t}.$$

Положив $s-\lg z=u$ и затем $u=-\lg t$ в интеграле для

$$W_{-\frac{1}{2},\,0}(-\lg z),$$

[1]) Legendre, Exercices, I, 339; Hočevar, Zs. für Math. und Phys., XXI (1876), 449; Schlömilch, Zs. für Math. und Phys., XVI (1871), 261; Prym, Journ. für Math., LXXXII (1877), 165.

[2]) Euler, Inst. Calc. Int., I; Soldner, Monatliche Correspondenz, von Zach (1811), 182; Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel (1880), 114—120; Bessel, Königsberger Archiv, I (1812), 369—405; Laguerre, Bulletin de la Soc. Math. de France, VII (1879), 72; Stieltjes, Ann. de l'Ecole norm. sup. (3), III (1886). Интегральный логарифм имеет большое значение в высших отделах теории простых чисел. См. Landau, Primzahlen, 11.

можно убедиться в том, что

$$\mathrm{li}(z) = -(-\lg z)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} W_{-\frac{1}{2}, 0}(-\lg z).$$

Ниже будет показано, что параболические цилиндрические функции Вебера (§ 16.5) и круговые цилиндрические функции Бесселя (глава 17) являются частными случаями функций $W_{k,m}$. Другие функции подобного характера даны в упражнениях в конце этой главы.

[Примечание. Для функции ошибок составлены таблицы Энке (Encke, Berliner ast. Jahrbuch (1834), 248—304) и Бэрджессом (Burgess, Trans. Roy. Soc. Edin., XXXIX (1900), 257). Для интегрального логарифма таблицы составлены Бесселем и Солднером (Soldner). Следует также отметить: Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми (Физматгиз, 1959) и Glaisher, Factor Tables (London, 1883).]

16.3. Асимптотическое разложение функции $W_{k,m}(z)$ при большом $|z|$

Асимптотическое разложение для $W_{k,m}(z)$, годное при $|\arg z| < \pi$, можно получить из контурного интеграла, которым была определена эта функция. Для этой цели мы применим результат, данный в примере 6 главы 5 части I, а именно

$$\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1}\frac{t}{z} + \ldots + \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!}\frac{t^n}{z^n} + R_n(t, z),$$

где

$$R_n(t, z) = \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n)}{n!}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\lambda}\int_0^{\frac{t}{z}} u^n(1+u)^{-\lambda-1}\,du.$$

Подставляя это выражение в формулу § 16.12 и интегрируя почленно, получим с помощью результата § 12.22

$$W_{k,m}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^k \left\{1 + \frac{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}{1!\,z} + \right.$$

$$+ \frac{\left\{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{m^2-\left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right\}}{2!\,z^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\left\{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{m^2-\left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right\}\ldots\left\{m^2-\left(k-n+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}{n!\,z^n} +$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}+m\right)}\int_0^{\infty} t^{-k-\frac{1}{2}+m} R_n(t, z)\, e^{-t}\,dt\right\}$$

при условии, что n берется настолько большим, что

$$\mathrm{Re}\left(n-k-\frac{1}{2}+m\right)>0.$$

Теперь, если $|\arg z|\leqslant\pi-\alpha$ и $|z|>1$, то

$$\left.\begin{aligned} 1\leqslant\left|1+\frac{t}{z}\right|&\leqslant 1+t, & \mathrm{Re}\,z\geqslant 0,\\ \left|1+\frac{t}{z}\right|&\geqslant\sin\alpha, & \mathrm{Re}\,z\leqslant 0\end{aligned}\right\}$$

и, следовательно[1]),

$$|R_n(t,z)|\leqslant\left|\frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n)}{n!}\right|(1+t)^{|\lambda|}(\mathrm{cosec}\,\alpha)^{|\lambda|}\int\limits_0^{\left|\frac{t}{z}\right|}u^n(1+u)^{|\lambda|}\,du.$$

Отсюда

$$|R_n(t,z)|<$$
$$<\left|\frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n)}{n!}\right|(1+t)^{|\lambda|}(\mathrm{cosec}\,\alpha)^{|\lambda|}\left|\frac{t}{z}\right|^{n+1}(1+t)^{|\lambda|}(n+1)^{-1},$$

так как

$$1+u<1+t.$$

Поэтому, когда $|z|>1$,

$$\left|\frac{1}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}+m\right)}\int\limits_0^\infty t^{-k-\frac{1}{2}+m}R_n(t,z)\,e^{-t}\,dt\right|=$$
$$=O\left\{\int\limits_0^\infty t^{-k+\frac{1}{2}+m+n}(1+t)^{2|\lambda|}|z|^{-n-1}e^{-t}\,dt\right\}=O(z^{-n-1}),$$

так как интеграл сходится. Постоянная, включенная в символ O, не зависит от $\arg z$, но зависит от α и стремится к бесконечности при $\alpha\to 0$.

Иначе говоря, асимптотическое разложение функции $W_{k,m}(z)$ дается формулой

$$W_{k,m}(z)\sim e^{-\frac{1}{2}z}z^k\times$$
$$\times\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{m^2-\left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right\}\dots\left\{m^2-\left(k-n+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}{n!\,z^n}\right\}$$

для больших значений $|z|$, когда $|\arg z|\leqslant\pi-\alpha<\pi$.

---

[1]) Предполагается, что λ вещественно; неравенство слегка видоизменяется для комплексных значений λ.

16.31. Второе решение дифференциального уравнения для функции $W_{k,m}(z)$

Дифференциальное уравнение (B) § 16.1, которому удовлетворяет функция $W_{k,m}(z)$, остается без изменения, если одновременно изменить знаки z и k. Поэтому, если $|\arg(-z)| < \pi$, то $W_{-k,m}(-z)$ будет решением того же уравнения.

Так как при $|\arg z| < \pi$

$$W_{k,m}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^k \{1 + O(z^{-1})\},$$

между тем как при $|\arg(-z)| < \pi$

$$W_{-k,m}(-z) = e^{\frac{1}{2}z} (-z)^{-k} \{1 + O(z^{-1})\},$$

то отношение $\dfrac{W_{k,m}(z)}{W_{-k,m}(-z)}$ не может быть постоянным, и таким образом, $W_{k,m}(z)$ и $W_{-k,m}(-z)$ образуют фундаментальную систему решений упомянутого дифференциального уравнения.

16.4. Контурные интегралы типа Меллина — Барнса (Mellin — Barnes) для $W_{k,m}(z)$

Рассмотрим теперь выражение

$$I = \frac{e^{-\frac{1}{2}z} z^k}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right)} z^s\,ds, \tag{C}$$

где $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$ и ни одно из чисел $k \pm m + \frac{1}{2}$ не равно целому положительному числу или нулю[1]); контур надлежащим образом изогнут, для того чтобы полюсы функции $\Gamma(s)$ и полюсы функции $\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right)$ находились по разные стороны от него.

Легко убедиться, пользуясь § 13.6, что когда $s \to \infty$ по контуру,

$$\Gamma(s)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right) = \\ = O\left(e^{-\frac{3}{2}\pi|s|}\,|s|^{-2k-\frac{1}{2}}\right),$$

[1]) В этих случаях ряд § 16.3 обрывается и $W_{k,m}(z)$ является комбинацией элементарных функций.

и таким образом, интеграл представляет функцию от z, аналитическую во всех точках[1]) области $|\arg z| \leqslant \frac{3}{2}\pi - \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Возьмем теперь N так, чтобы полюсы функции

$$\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right)$$

были справа от прямой $\mathrm{Re}\, s = -N - \frac{1}{2}$, и рассмотрим интеграл, взятый по периметру прямоугольника, вершины которого $\pm\xi i$, $-N-\frac{1}{2}\pm\xi i$, где ξ положительно[2]) и велико.

Читатель убедится, что при $|\arg z| \leqslant \frac{3}{2}\pi - \alpha$ интегралы

$$\int\limits_{-\xi i}^{-N-\frac{1}{2}-\xi i}, \quad \int\limits_{\xi i}^{-N-\frac{1}{2}+\xi i}$$

стремятся к нулю при $\xi \to \infty$; и таким образом, по теореме Коши

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}z} z^k}{2\pi i} \int\limits_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right)} z^s\, ds =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}z} z^k \left\{ \sum_{n=0}^{N} R_n + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-N-\frac{1}{2}-\infty i}^{-N-\frac{1}{2}+\infty i} \frac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right)} z^s\, ds \right\},$$

где R_n — вычет подинтегральной функции при $s = -n$.

Положим $s = -N - \frac{1}{2} + it$; тогда модуль последней подинтегральной функции будет

$$|z|^{-N-\frac{1}{2}}\, O\left\{e^{-\alpha|t|}\, |t|^{N-2k}\right\},$$

где постоянная, включенная в символ O, не зависит от z.

Так как

$$\int^{\pm\infty} e^{-\alpha|t|}\, |t|^{N-2k}\, dt$$

---

[1]) Интеграл делаем однозначным при $\mathrm{Re}\, z < 0$ надлежащим выбором $\arg z$.

[2]) Линия, соединяющая $\pm\xi i$, может иметь изгибы, чтобы обойти полюсы подинтегральной функции, как объяснено выше.

сходится, то находим, что

$$I = e^{-\frac{1}{2}z} z^k \left\{ \sum_{n=0}^{N} R_n + O\left(|z|^{-N-\frac{1}{2}}\right) \right\}.$$

Но вычисляя вычет, получим

$$R_n = \frac{\Gamma\left(n-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-k+m+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right)}(-1)^n z^{-n} =$$

$$= \frac{\left\{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\left\{m^2-\left(k-\frac{3}{2}\right)^2\right\}\ldots\left\{m^2-\left(k-n+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}{n!\,z^n},$$

и таким образом, I *имеет то же самое асимптотическое разложение, что и* $W_{k,m}(z)$.

Далее, I удовлетворяет дифференциальному уравнению для $W_{k,m}(z)$, ибо, подставив

$$\int_{-\infty i}^{\infty i} \Gamma(s)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right)z^s\,ds$$

вместо v в выражение (данное в § 16.12)

$$z^2\frac{d^2v}{dz^2}+2kz\frac{dv}{dz}+\left(k-m-\frac{1}{2}\right)\left(k+m-\frac{1}{2}\right)v-z^2\frac{dv}{dz},$$

получим

$$\int_{-\infty i}^{\infty i} \Gamma(s)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{3}{2}\right)z^s\,ds -$$

$$-\int_{-\infty i}^{\infty i} \Gamma(s+1)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right)z^{s+1}\,ds =$$

$$= \left(\int_{-\infty i}^{\infty i} - \int_{1-\infty i}^{1+\infty i}\right)\Gamma(s)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{3}{2}\right)z^s\,ds.$$

Так как у последней подинтегральной функции полюсов между контурами не имеется и так как она стремится к нулю, когда $|s|\to\infty$, причем s остается между контурами, то рассматриваемое выражение равно нулю по теореме Коши; таким образом, I удовлетворяет дифференциальному уравнению для $W_{k,m}(z)$.

Поэтому

$$I = AW_{k,m}(z) + BW_{-k,m}(-z),$$

где A и B — постоянные; заставляя $|z| \to \infty$ так, что $\operatorname{Re} z > 0$, мы видим по асимптотическим разложениям, полученным для I и $W_{\pm k, m}(\pm z)$, что

$$A = 1, \quad B = 0.$$

По теории аналитического продолжения равенство $I = W_{k, m}(z)$ сохраняет силу для всех значений z таких, что $|\arg z| < \pi$, а для значений[1]) $\arg z$ таких, что $\pi \leqslant |\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, $W_{k, m}(z)$ может быть *определена* как выражение I.

Пример 1. Показать, что

$$W_{k, m}(z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}z}}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(s-k)\Gamma\left(-s-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right)} z^s\, ds,$$

где интеграл взят по надлежащему пути.

Пример 2. Получить интеграл Барнса для $W_{k, m}(z)$, заменяя $\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m}$ через

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{\infty i} \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)} z^s t^{-s}\, ds$$

в интеграле § 16.12 и изменяя порядок интегрирования.

16.41. Соотношения между $W_{k, m}(z)$ и $M_{k, \pm m}(z)$

Если выражение

$$F(s) \equiv \Gamma(s)\Gamma\left(-s-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-k+m+\frac{1}{2}\right),$$

встречающееся в интеграле Барнса для $W_{k, m}(z)$, перепишем в форме

$$\frac{\pi^2\Gamma(s)}{\Gamma\left(s+k+m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s+k-m+\frac{1}{2}\right)\cos(s+k+m)\pi\cos(s+k-m)\pi},$$

---

[1]) Можно было бы показать, что надлежащим изменением пути интегрирования можно заставить интеграл § 16.3 определять аналитическую функцию при $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$. Но это излишне, так как интеграл Барнса дает более простое определение функции.

то увидим, пользуясь § 13.6, что, когда $\operatorname{Re} s \geqslant 0$, мы имеем при $|s| \to \infty$

$$F(s) = O\left[\exp\left\{\left(-s-\frac{1}{2}-2k\right)\lg s + s\right\}\right] \times$$
$$\times \sec(s+k+m)\pi \sec(s+k-m)\pi.$$

Поэтому, если $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, то интеграл $\int F(s) z^s ds$, взятый вдоль полуокружности, лежащей справа от мнимой оси, стремится к нулю, когда радиус полуокружности стремится к бесконечности таким образом, что нижняя граница расстояния полуокружности от полюсов подинтегральной функции положительна (не нуль).

Поэтому

$$W_{k,m}(z) = -\frac{e^{-\frac{1}{2}z} z^k \left(\sum R'\right)}{\Gamma\left(-k-m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-k+m+\frac{1}{2}\right)},$$

где $\sum R'$ — сумма вычетов функции $F(s)$ в ее полюсах справа от контура (ср. § 14.5), примененного в интеграле (C) § 16.4.

Вычисляя эти вычеты, найдем без затруднения, что если

$$|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$$

и $2m$ не целое число[1]), то

$$W_{k,m}(z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)} M_{k,m}(z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)} M_{k,-m}(z).$$

Пример 1. Показать, что при $|\arg(-z)| < \frac{3}{2}\pi$ и $2m$ не целом имеем

$$W_{-k,m}(-z) = \frac{\Gamma(-2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m+k\right)} M_{-k,m}(-z) + \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+k\right)} M_{-k,-m}(-z).$$

(Barnes[2]))

Пример 2. Показать, что при

$$-\frac{1}{2}\pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi \quad \text{и} \quad -\frac{3}{2}\pi < \arg(-z) < \frac{1}{2}\pi$$

---

[1]) Когда $2m$ — целое число, некоторые из полюсов будут вообще двойными полюсами и их вычеты будут содержать логарифмы от z. Результат не доказан для случая, когда $k - \frac{1}{2} \pm m$ — положительное целое число или нуль; но он может быть получен для таких значений k и m путем сравнения обрывающегося ряда для $W_{k,m}(z)$ с рядом для $M_{k,\pm m}(z)$.

[2]) Результаты Барнса даны в обозначениях § 16.1.

имеем

$$M_{k,m}(z)=\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}e^{k\pi i}W_{-k,m}(-z)+$$

$$+\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+k\right)}e^{\left(\frac{1}{2}+m+k\right)\pi i}W_{k,m}(z).$$

Пример 3. Получить первую формулу Куммера (§ 16.11) из формулы

$$z^n e^{-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\Gamma(n-s)\,z^s\,ds.$$

(Barnes)

16.5. Функции параболического цилиндра. Уравнение Вебера

Рассмотрим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $w=z^{-\frac{1}{2}}W_{k,\,-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right)$; оно будет

$$\frac{d}{z\,dz}\left\{\frac{d\left(wz^{\frac{1}{2}}\right)}{z\,dz}\right\}+\left\{-\frac{1}{4}+\frac{2k}{z^2}+\frac{3}{4z^4}\right\}wz^{\frac{1}{2}}=0$$

и приводится к виду

$$\frac{d^2w}{dz^2}+\left\{2k-\frac{1}{4}z^2\right\}w=0.$$

Поэтому функция

$$D_n(z)=2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}}z^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},\,-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2D_n(z)}{dz^2}+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^2\right)D_n(z)=0.$$

Функция $D_n(z)$ есть одна из функций, встречающихся в теории потенциала в связи с параболическим цилиндром[1]); дифференциальное уравнение, которому она удовлетворяет, будем называть *уравнением Вебера*.

---

[1]) Weber, Math. Ann., I (1869), 1—36; Whittaker, Proc. London Math. Soc., XXXV (1903), 417—427.

Из § 16.41 следует, что

$$D_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n\right)} M_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},\, -\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right) + \\ + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}} z^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}n\right)} M_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},\, \frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right),$$

когда $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$.

Но

$$z^{-\frac{1}{2}} M_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},\, -\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right) = 2^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{4}z^2} {}_1F_1\left\{-\frac{1}{2}n;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}z^2\right\},$$

$$z^{-\frac{1}{2}} M_{\frac{1}{2}n+\frac{1}{4},\, \frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right) = 2^{-\frac{3}{4}} z e^{-\frac{1}{4}z^2} {}_1F_1\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n;\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{2}z^2\right\},$$

а эти функции являются *однозначными* аналитическими функциями от z во всей плоскости. Следовательно и $D_n(z)$ будет однозначной функцией от z во всей плоскости; в силу результатов § 16.4 ее асимптотическое разложение при $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$ имеет вид

$$e^{-\frac{1}{4}z^2} z^n \left\{1 - \frac{n(n-1)}{2z^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4z^4} - \ldots\right\}.$$

16.51. Второе решение уравнения Вебера

Так как уравнение Вебера остается без изменения, если мы одновременно заменим n и z соответственно через $-n-1$ и $\pm iz$, то получается, что $D_{-n-1}(iz)$ и $D_{-n-1}(-iz)$, а также и $D_n(-z)$ будут решениями уравнения Вебера. Из асимптотических разложений функций $D_n(z)$ и $D_{-n-1}\left(ze^{\frac{1}{2}\pi i}\right)$, годных в области $-\frac{3}{4}\pi < \arg z \leq < \frac{1}{4}\pi$, очевидно, что отношение этих двух решений не будет постоянным.

16.511. Соотношение между функциями $D_n(z)$, $D_{-n-1}(\pm iz)$

Из теории линейных дифференциальных уравнений следует, что должно существовать соотношение вида

$$D_n(z) = aD_{-n-1}(iz) + bD_{-n-1}(-iz),$$

если отношение функций в правой части не равно постоянной.

Чтобы получить это соотношение, заметим, что если эти функции разложить по возрастающим степеням z, то разложения будут

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n\right)} + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}n\right)} z + \ldots$$

и

$$a\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)} + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{1}{2}n-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n\right)} iz + \ldots\right\} +$$

$$+ b\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}n\right)} - \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)2^{-\frac{1}{2}n-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n\right)} iz + \ldots\right\}.$$

Сравнением первых двух членов получим

$$a = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(n+1)\, e^{\frac{1}{2}n\pi i}, \quad b = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(n+1)\, e^{-\frac{1}{2}n\pi i},$$

и таким образом,

$$D_n(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{\frac{1}{2}n\pi i}D_{-n-1}(iz) + e^{-\frac{1}{2}n\pi i}D_{-n-1}(-iz)\right].$$

16.52. Общее асимптотическое разложение для функции $D_n(z)$

До сих пор асимптотическое разложение для функции $D_n(z)$ для больших значений z было дано только в секторе $|\arg z| < \frac{3}{4}\pi$ (§ 16.5). Чтобы получить его форму для значений $\arg z$, не содержащихся в этой области, мы заменим z на $-iz$ и n на $-n-1$ в формуле предыдущего параграфа и получим

$$D_n(z) = e^{n\pi i}D_n(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)} e^{\frac{1}{2}(n+1)\pi i} D_{-n-1}(-iz).$$

Далее, если $\frac{5}{4}\pi > \arg z > \frac{1}{4}\pi$, то мы можем приписать $-z$ и $-iz$ аргументы между $\pm\frac{3}{4}\pi$, и тогда $\arg(-z) = \arg z - \pi$, $\arg(-iz) = \arg z - \frac{1}{2}\pi$; применяя после этого асимптотическое разложение § 16.5 к $D_n(-z)$ и $D_{-n-1}(-iz)$, видим, что если $\frac{5}{4}\pi > \arg z > \frac{1}{4}\pi$, то

$$D_n(z) \sim e^{-\frac{1}{4}z^2} z^n \left\{1 - \frac{n(n-1)}{2z^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4z^4} - \ldots\right\} - \\ - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)} e^{n\pi i} e^{\frac{1}{4}z^2} z^{-n-1} \left\{1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2z^2} + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{2 \cdot 4z^4} + \ldots\right\}.$$

Эта формула не противоречит формуле § 16.5, так как в общей для них области, т. е. в области $\frac{1}{4}\pi < \arg z < \frac{3}{4}\pi$, $e^{\frac{1}{2}z^2} z^{-2n-1} = o(z^{-m})$ для всех положительных значений m.

Для того чтобы получить формулу, пригодную в области $-\frac{1}{4}\pi > \arg z > -\frac{5}{4}\pi$, мы воспользуемся формулой

$$D_n(z) = e^{-n\pi i} D_n(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-n)} e^{-\frac{1}{2}(n+1)\pi i} D_{-n-1}(iz)$$

и получим асимптотическое разложение, которое отличается от предыдущего только заменой $e^{n\pi i}$ на $e^{-n\pi i}$.

Так как $D_n(z)$ — однозначная функция и так как то или другое из полученных разложений пригодно для всех значений $\arg z$ в области $-\pi \leqslant \arg z \leqslant \pi$, то мы получили полное асимптотическое разложение функции $D_n(z)$.

16.6. Контурный интеграл для функции $D_n(z)$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\infty}^{(0+)} e^{-zt-\frac{1}{2}t^2} (-t)^{-n-1}\,dt$, где $|\arg(-t)| \leqslant \pi$; он представляет однозначную аналитическую функцию от z во всей плоскости (§ 5.32, часть I), и, кроме того,

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2} - z\frac{d}{dz} + n\right\} \int\limits_{\infty}^{(0+)} e^{-zt-\frac{1}{2}t^2} (-t)^{-n-1}\,dt = \\ = \int\limits_{\infty}^{(0+)} \frac{d}{dt}\left\{e^{-zt-\frac{1}{2}t^2} (-t)^{-n}\right\} dt = 0;$$

допустимость дифференцирования под знаком интеграла легко проверить. Интеграл удовлетворяет, следовательно, дифференциальному уравнению, которому удовлетворяет функция $e^{\frac{1}{4}z^2} D_n(z)$; поэтому

$$e^{-\frac{1}{4}z^2} \int_{\infty}^{(0+)} e^{-zt-\frac{1}{2}t^2} (-t)^{-n-1}\, dt = aD_n(z) + bD_{-n-1}(iz),$$

где a и b — постоянные.

Далее, если выражение справа обозначим $E_n(z)$, то получим

$$E_n(0) = \int_{\infty}^{(0+)} e^{-\frac{1}{2}t^2} (-t)^{-n-1}\, dt, \quad E_n'(0) = \int_{\infty}^{(0+)} e^{-\frac{1}{2}t^2} (-t)^{-n}\, dt.$$

Для вычисления этих интегралов, являющихся аналитическими функциями от n, предположим сначала, что $\operatorname{Re} n < 0$; тогда, деформируя пути интегрирования, получим

$$E_n(0) = -2i \sin(n+1)\pi \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} t^{-n-1}\, dt =$$
$$= 2^{-\frac{1}{2}n} i \sin n\pi \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\frac{1}{2}n-1}\, du = 2^{-\frac{1}{2}n} i \sin(n\pi)\, \Gamma\left(-\frac{1}{2}n\right).$$

Подобным же образом

$$E_n'(0) = -2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}n} i \sin(n\pi)\, \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n\right).$$

Но обе части этих равенств являются аналитическими функциями от n; поэтому равенства будут справедливы для всех значений n; отсюда получаем

$$b = 0, \quad a = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{1}{2}n}} 2^{-\frac{1}{2}n} i \sin(n\pi)\, \Gamma\left(-\frac{1}{2}n\right) = 2i\Gamma(-n) \sin n\pi;$$

следовательно,

$$D_n(z) = -\frac{\Gamma(n+1)}{2\pi i} e^{-\frac{1}{4}z^2} \int_{\infty}^{(0+)} e^{-zt-\frac{1}{2}t^2} (-t)^{-n-1}\, dt.$$

16.61. Рекуррентные формулы для функции $D_n(z)$

Из равенства

$$0=\int_{\infty}^{(0+)} \frac{d}{dt}\left\{e^{-zt-\frac{1}{2}t^2}(-t)^{-n-1}\right\}dt=$$

$$=\int_{\infty}^{(0+)} \left\{-z(-t)^{-n-1}+(-t)^{-n}+(n+1)(-t)^{-n-2}\right\}e^{-zt-\frac{1}{2}t^2}\,dt,$$

пользуясь § 16.6, видим, что

$$D_{n+1}(z)-zD_n(z)+nD_{n-1}(z)=0.$$

Далее, дифференцированием интеграла § 16.6 получаем

$$D_n'(z)+\frac{1}{2}zD_n(z)-nD_{n-1}(z)=0.$$

Пример. Получить эти формулы из степенных рядов по возрастающим степеням z § 16.5.

16.7. Свойства функции $D_n(z)$, когда n — целое число

Если n — целое число, то мы можем написать интеграл § 16.6 в форме

$$D_n(z)=-\frac{n!\,e^{-\frac{1}{4}z^2}}{2\pi i}\int^{(0+)}\frac{e^{-zt-\frac{1}{2}t^2}}{(-t)^{n+1}}\,dt.$$

Если теперь положим $t=v-z$, то получим

$$D_n(z)=(-1)^n\frac{n!\,e^{\frac{1}{4}z^2}}{2\pi i}\int^{(z+)}\frac{e^{-\frac{1}{2}v^2}}{(v-z)^{n+1}}\,dv=(-1)^n e^{\frac{1}{4}z^2}\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-\frac{1}{2}z^2}\right)$$

— результат, принадлежащий Эрмиту [1]).

Далее, если m и n — неравные целые числа, то мы видим из дифференциальных уравнений, что

$$D_n(z)D_m''(z)-D_m(z)D_n''(z)+(m-n)D_m(z)D_n(z)=0,$$

откуда

$$(m-n)\int_{-\infty}^{\infty}D_m(z)D_n(z)\,dz=\left[D_n(z)D_m'(z)-D_m(z)D_n'(z)\right]_{-\infty}^{\infty}=0$$

[1]) Hermite, Comptes Rendus, LVIII (1864), 266—273.

в силу разложения § 16.5 по нисходящим степеням z (которое обрывается и годно для всех значений $\arg z$, когда n — положительное целое число).

Поэтому если m и n — неравные положительные целые числа, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_m(z) D_n(z)\, dz = 0.$$

С другой стороны, когда $m = n$, имеем

$$(n+1)\int_{-\infty}^{\infty} \{D_n(z)\}^2\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} D_n(z)\left\{D'_{n+1}(z) + \frac{1}{2} z D_{n+1}(z)\right\} dz =$$

$$= [D_n(z) D_{n+1}(z)]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2} z D_n(z) D_{n+1}(z) - D_{n+1}(z) D'_n(z)\right\} dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{D_{n+1}(z)\}^2\, dz,$$

если воспользуемся рекуррентной формулой, проинтегрируем по частям и снова воспользуемся рекуррентной формулой.

По индукции заключаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{D_n(z)\}^2\, dz = n! \int_{-\infty}^{\infty} \{D_0(z)\}^2\, dz = n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} z^2}\, dz = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\, n!$$

по следствию 1 § 12.14 и § 12.2.

Отсюда непосредственно следует, что если для функции $f(z)$ существует разложение вида

$$f(z) = a_0 D_0(z) + a_1 D_1(z) + \ldots + a_n D_n(z) + \ldots,$$

и если почленное интегрирование между пределами $-\infty$ и ∞ законно, то

$$a_n = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\, n!} \int_{-\infty}^{\infty} D_n(t) f(t)\, dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

W. Jacobstahl, Math. Ann., LVI (1903), 129—154.
E. W. Barnes, Trans. Camb. Phil. Soc., XX (1908), 253—279.
E. T. Whittaker, Bulletin American Math. Soc., X (1904), 125—134.
H. Weber, Math. Ann., I (1869), 1—36.
А. Адамов, Вестник Петр. полит. ин-та, V (1906); 127—143.

E. T. Whittaker, Proc. London Math. Soc., XXXV (1903), 417—427.
G. N. Watson, Proc. London Math. Soc. (2), VIII (1910), 393—421; XVII (1919), 116—148.
H. E. J. Curzon, Proc. London Math. Soc. (2), XII (1913), 236—259.
A. Milne, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXII (1914), 2—14; XXXIII (1915), 48—64.
N. Nielsen, Meddelelser K. Danske Videnskabernes Selskab, I (1918), no. 6.
Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения, Гостехиздат, 1953.

Примеры

1. Показать, что если интеграл сходится, то

$$M_{k,m}(z)=$$
$$=\frac{\Gamma(2m+1)\,z^{m+\frac{1}{2}}2^{-2m}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m+k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)}\int_{-1}^{1}(1+u)^{-\frac{1}{2}+m-k}(1-u)^{-\frac{1}{2}+m+k}e^{\frac{1}{2}zu}\,du.$$

2. Показать, что

$$M_{k,m}(z)=z^{\frac{1}{2}+m}e^{-\frac{1}{2}z}\lim_{\rho\to\infty}F\left(\frac{1}{2}+m-k,\ \frac{1}{2}+m-k+\rho;\ 2m+1;\ \frac{z}{\rho}\right).$$

3. Получить рекуррентные формулы

$$W_{k,m}(z)=z^{\frac{1}{2}}W_{k-\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}(z)+\left(\frac{1}{2}-k+m\right)W_{k-1,m}(z),$$

$$W_{k,m}(z)=z^{\frac{1}{2}}W_{k-\frac{1}{2},\,m+\frac{1}{2}}(z)+\left(\frac{1}{2}-k-m\right)W_{k-1,m}(z),$$

$$zW'_{k,m}(z)=\left(k-\frac{1}{2}z\right)W_{k,m}(z)-\left\{m^2-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\right\}W_{k-1,m}(z).$$

4. Доказать, что $W_{k,m}(z)$ есть интеграл от элементарной функции, когда одно из чисел $k-\frac{1}{2}\pm m$ есть отрицательное целое число.

5. Показать, что надлежащей заменой переменных уравнение

$$(a_2+b_2x)\frac{d^2y}{dx^2}+(a_1+b_1x)\frac{dy}{dx}+(a_0+b_0x)\,y=0$$

может быть приведено к виду

$$\xi\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+(c-\xi)\frac{d\eta}{d\xi}-a\eta=0;$$

вывести это уравнение из уравнения для $F(a,\ b;\ c;\ x)$, положив $x=\frac{\xi}{b}$ и заставляя $b\to\infty$.

6. Показать, что интегральный косинус Шлёмильха и Бессо (Besso, Giornale di Matematiche, VI), определяемый равенством

$$\mathrm{Ci}(z) = \int_z^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt,$$

равен

$$\frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} iz + \frac{1}{4}\pi i} W_{-\frac{1}{2},\, 0}(-iz) + \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} iz - \frac{1}{4}\pi i} W_{-\frac{1}{2},\, 0}(iz).$$

Показать также, что функция Шлёмильха, определяемая (Zeitschrift für Math. und Phys., IV (1859), 390) равенствами

$$S(\nu, z) = \int_0^{\infty} (1+t)^{-\nu} e^{-zt}\, dt = z^{\nu-1} e^{z} \int_z^{\infty} \frac{e^{-u}}{u^{\nu}}\, du,$$

равна

$$z^{\frac{1}{2}\nu - 1} e^{\frac{1}{2} z} W_{-\frac{1}{2}\nu,\, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu}(z).$$

7. Выразить функции

$$\mathrm{Si}(z) \equiv \int_0^{z} \frac{\sin t}{t}\, dt, \quad \mathrm{Ei}(z) \equiv \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

через функции $W_{k,\, m}$.

8. Показать, что полином Сонина, определяемый (Math. Ann., XVI, 41) равенством

$$T_m^n(z) = \frac{z^n}{n!\,(m+n)!\,0!} - \frac{z^{n-1}}{(n-1)!\,(m+n-1)!\,1!} + \\ + \frac{z^{n-2}}{(n-2)!\,(m+n-2)!\,2!} - \ldots,$$

равен

$$\frac{1}{n!\,(m+n)!} z^{-\frac{1}{2}(m+1)} e^{\frac{1}{2} z} W_{n+\frac{1}{2} m + \frac{1}{2},\, \frac{1}{2} m}(z).$$

9. Показать, что функция $\varphi_m(z)$, определенная Лагранжем в 1762—1765 гг. (Oeuvres, I, 520) и Абелем (Oeuvres (1881), 284) как коэффициент при h^m в разложении функции $(1-h)^{-1} e^{-hz/(1-h)}$, равна

$$(-1)^m \frac{z^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2} z}}{m!} W_{m+\frac{1}{2},\, 0}(z).$$

10[1]). Показать, что функция Пирсона—Кэннингхэма (Pearson, Cunningham, Proc. Royal Soc., LXXXI, 310) $\omega_{n,m}(z)$, определяемая как

$$\frac{e^{-z}(-z)^{n-\frac{1}{2}m}}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}m+1\right)}\left\{1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}m\right)\left(n-\frac{1}{2}m\right)}{z}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(n+\frac{1}{2}m\right)\left(n+\frac{1}{2}m-1\right)\left(n-\frac{1}{2}m\right)\left(n-\frac{1}{2}m-1\right)}{2!\,z^2}-\ldots\right\},$$

равна

$$\frac{(-1)^{n-\frac{1}{2}m}}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}m+1\right)}z^{-\frac{1}{2}(m+1)}e^{-\frac{1}{2}z}W_{n+\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}m}(z).$$

11. Показать, что если $|\arg z|<\frac{1}{4}\pi$ и $|\arg(1+t)|\leqslant\pi$, то

$$D_n(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)}{2^{-\frac{1}{2}(n-1)}\pi i}\int_{-\infty}^{(-1+)}e^{\frac{1}{4}z^2t}(1+t)^{-\frac{1}{2}n-1}(1-t)^{\frac{1}{2}(n-1)}\,dt.$$

(Whittaker)

12. Показать, что если n не есть положительное целое число и $|\arg z|<\frac{3}{4}\pi$, то

$$D_n(z)=\frac{1}{2\pi i}e^{-\frac{1}{4}z^2}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}n\right)\Gamma(-t)}{\Gamma(-n)}(\sqrt{2})^{t-n-2}z^t\,dt,$$

и что этот результат имеет силу для всех значений $\arg z$, если интеграл будет вида $\int_{\infty}^{(0-)}$, причем контур окружает полюсы функции $\Gamma(-t)$, но не окружает полюсов функции $\Gamma\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}n\right)$.

13. Показать, что если $|\arg\alpha|<\frac{1}{2}\pi$, то

$$\int_{\infty}^{(0+)}e^{\left(\frac{1}{4}-\alpha\right)z^2}z^mD_n(z)\,dz=\frac{\pi^{\frac{3}{2}}2^{\frac{1}{2}n-m}e^{\pi i\left(m-\frac{1}{2}\right)}}{\Gamma(-m)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n+1\right)\alpha^{\frac{1}{2}(m+1)}}\times$$
$$\times F\left(-\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2}m+\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n+1;\ 1-\frac{1}{2}\alpha^{-1}\right).$$

[1]) Результаты примеров 8, 9, 10 были сообщены нам Бэйтменом (Bateman).

14. Показать, исходя из примера 13, что если интеграл сходится, то

$$\int_0^\infty e^{-\frac{3}{4}z^2} z^m D_{m+1}(z)\, dz = (\sqrt{2})^{-1-m}\, \Gamma(m+1) \sin\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}m\right)\pi.$$

(Watson)

15. Показать, что если n — положительное целое число и

$$E_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4}z^2} (z-x)^{-1} D_n(z)\, dz,$$

то

$$E_n(x) = \pm\, i e^{\mp n\pi i} \sqrt{2\pi}\, \Gamma(n+1)\, e^{-\frac{1}{4}x^2} D_{-n-1}(\mp ix);$$

верхний или нижний знаки берутся соответственно тому, будет ли мнимая часть x положительна или отрицательна.

(Watson)

16. Показать, что если n — положительное целое число, то

$$D_n(x) = (-1)^\mu\, 2^{n+2} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}x^2} \int_0^\infty u^n e^{-2u^2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (2xu)\, du,$$

где μ равно тому из чисел $\frac{1}{2}n$ или $\frac{1}{2}(n-1)$, которое целое, а косинус или синус берутся, смотря по тому, будет ли n четное или нечетное.

(Адамов)

17. Показать, что если n целое положительное, то

$$D_n(x) = (-1)^\mu \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{-\frac{1}{2}} (\sqrt{n})^{n+1} e^{\frac{1}{4}x^2} e^{-\frac{1}{2}n} (J_1 + J_2 - J_3),$$

где

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n(v-1)^2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (xv\sqrt{n})\, dv,$$

$$J_2 = \int_0^\infty \sigma(v) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (xv\sqrt{n})\, dv,$$

$$J_3 = \int_{-\infty}^{0} e^{-n(v-1)^2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (xv\sqrt{n})\, dv$$

и

$$\sigma(v) = e^{\frac{1}{2}n(1-v^2)} v^n - e^{-n(v-1)^2}.$$

(Адамов)

18. При обозначениях, введенных в предыдущих примерах, показать, что при x вещественном

$$J_1 = \pi^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (x\sqrt{n}),$$

в то время как J_3 удовлетворяет неравенствам

$$|J_3| < \frac{2e^{-n}}{|x|\sqrt{n}}, \quad |J_3| < \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

Показать также, что когда v возрастает от 0 до 1, $\sigma(v)$ уменьшается от 0 до минимума при $v = 1 - h_1$, а затем возрастает до 0 при $v = 1$; а когда v возрастает от 1 до ∞, $\sigma(v)$ возрастает до максимума при $1 + h_2$, а затем уменьшается и стремится к нулю; при этом

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2n}} < h_1 < \sqrt{\frac{3}{2n}}, \quad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2n}} < h_2 < \sqrt{\frac{3}{2n}}$$

и

$$|\sigma(1 - h_1)| < An^{-\frac{1}{2}}, \quad \sigma(1 + h_2) < An^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{где} \quad A = 0{,}0742\ldots$$

(Адамов)

19. Применяя надлежащим образом вторую теорему о среднем значении, показать, что

$$D_n(x) = \sqrt{2}\,(\sqrt{n})^n e^{-\frac{1}{2}n} \left[\cos\left(xn^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}n\pi\right) + \frac{\omega_n(x)}{\sqrt{n}}\right],$$

где $\omega_n(x)$ удовлетворяет двум неравенствам:

$$|\omega_n(x)| < \frac{3{,}35\ldots}{|x|\sqrt{\pi}} e^{\frac{1}{4}x^2}, \quad |\omega_n(0)| < \frac{1}{6} n^{-\frac{1}{2}},$$

когда x вещественно и n — целое число, большее 2.

(Адамов)

20. Показать, что если n — произвольное положительное число и если m — положительное *целое* число (или нуль), то уравнение относительно z

$$D_n(z) = 0$$

имеет m положительных корней, если $2m - 1 < n < 2m + 1$.

(Milne)

ГЛАВА 17

ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

17.1. Коэффициенты Бесселя

В этой главе мы рассмотрим класс функций, известных под названием *функций Бесселя* или *цилиндрических функций*, которые имеют много аналогий с функциями Лежандра главы 15. Точно так же, как функции Лежандра являются частными случаями гипергеометрической функции с тремя правильными особыми точками, так и функции Бесселя являются частными случаями вырожденной гипергеометрической функции с одной правильной и одной неправильной особыми точками.

Мы введем [1]) сначала, как в случае функций Лежандра, некоторую совокупность функций Бесселя как коэффициенты некоторого разложения.

Функция

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$

для всех значений z и t (за исключением $t=0$) может быть разложена по теореме Лорана в ряд положительных и отрицательных степеней t. Если коэффициент при t^n, где n — какое-нибудь целое число, положительное или отрицательное, обозначить через $J_n(z)$, то найдем, в силу § 5.6 части I, что

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int^{(0+)} u^{-n-1}e^{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)}\,du.$$

Чтобы представить $J_n(z)$ как степенной ряд от z, положим $u=\frac{2t}{z}$; тогда

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2}z\right)^n\int^{(0+)} t^{-n-1}\exp\left\{t-\frac{z^2}{4t}\right\}dt;$$

[1]) Этот порядок изложения принадлежит Шлёмильху (Schlömilch, Zs. für Math. und Phys., II (1857), 137—165).

так как контур может быть любым, лишь бы он обходил начало один раз против часовой стрелки, то мы можем принять за таковой окружность $|t|=1$; поскольку подинтегральная функция может быть разложена в ряд по степеням z, равномерно сходящийся на этом контуре, то, по § 4.7 части I, находим

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2r}\int^{(0+)} t^{-n-r-1}e^t\,dt.$$

Далее, вычет подинтегральной функции при $t=0$, по § 6.1 части I, равен $\{(n+r)!\}^{-1}$, когда $n+r$ — положительное целое число или нуль; когда же $n+r$ — отрицательное целое число, вычет равен нулю.

Поэтому, если n — положительное целое число или нуль, то

$$J_n(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!}=$$

$$=\frac{z^n}{2^n n!}\left\{1-\frac{z^2}{2^2\cdot 1\,(n+1)}+\frac{z^4}{2^4\cdot 1\cdot 2\,(n+1)\,(n+2)}-\dots\right\};$$

если же n — отрицательное целое число, равное $-m$, то

$$J_n(z)=\sum_{r=m}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}z\right)^{2r-m}}{r!\,(r-m)!}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+s}\left(\frac{1}{2}z\right)^{m+2s}}{(m+s)!\,s!};$$

таким образом,

$$J_n(z)=(-1)^m J_m(z).$$

Функция $J_n(z)$, которая теперь определена для всех целых значений n, положительных или отрицательных, называется *коэффициентом Бесселя порядка* n; ряд, определяющий ее, сходится для всех значений z.

Мы увидим ниже (§ 17.2), что эти коэффициенты Бесселя являются частным случаем более широкого класса функций, известных под названием *функций Бесселя*.

Ряд, которым определяется $J_n(z)$, встречается в мемуаре Эйлера о колебаниях растянутой круговой мембраны, Novi Comm. Acad. Petrop., X (1764) (опубликовано в 1766 г.), 243—260, — исследование, которым займемся ниже, в § 18.51; этот ряд встречается также в мемуаре Лагранжа по эллиптическому движению, Hist. de l'Academie R. des Sci. de Berlin XXV (1769) (опубликовано в 1771 г.), 223.

Наиболее раннее систематическое изучение этих функций было произведено в 1824 г. Бесселем в его «Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht» (Berliner Abh., 1824);

частные случаи коэффициентов Бесселя, однако, появились в исследованиях, опубликованных ранее 1769 г.; наиболее раннее из них содержится в письме Якова Бернулли к Лейбницу [1]), датированном 3 октября 1703 г., в котором встречается ряд, называемый теперь функцией Бесселя порядка $\frac{1}{3}$; коэффициент Бесселя нулевого порядка встречается в 1732 г. в мемуаре Даниила Бернулли о колебаниях тяжелых цепей, Comm. Acad. Sci. Imp. Petrop., VI (1732—1733) (опубликовано в 1738 г.), 108—122.

При чтении некоторых из более ранних сочинений по рассматриваемому вопросу следует помнить, что обозначение теперь изменилось: то, что раньше обозначалось через $J_n(z)$, теперь обозначается через $J_n(2z)$.

Пример 1. Доказать, что если

$$\frac{2b(1+\theta^2)}{(1-2a\theta-\theta^2)^2+4b^2\theta^2}=A_1+A_2\theta+A_3\theta^2+\ldots,$$

то

$$e^{az}\sin bz=A_1J_1(z)+A_2J_2(z)+A_3J_3(z)+\ldots$$

(Math. Trip., 1896)

[Действительно, если контур D — окружность в плоскости u с центром $u=0$ и радиусом настолько большим, что она охватывает все нули знаменателя, то разложение

$$e^{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)}\frac{2b\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^4}\right)}{\left(1-\frac{2a}{u}-\frac{1}{u^2}\right)^2+\frac{4b^2}{u^2}}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)}A_nu^{-n-1}$$

будет равномерно сходиться на окружности D; интегрируя его по D (§ 4.7, часть I) и заменяя интегралы коэффициентами Бесселя, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_D e^{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)}\frac{2b\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u^4}\right)}{\left(1-\frac{2a}{u}-\frac{1}{u^2}\right)^2+\frac{4b^2}{u^2}}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_D e^{\frac{1}{2}z\left(u-\frac{1}{u}\right)}\left(\frac{A_1}{u^2}+\frac{A_2}{u^3}+\frac{A_3}{u^4}+\ldots\right)du=$$

$$=A_1J_1(z)+A_2J_2(z)+A_3J_3(z)+\ldots$$

В интеграле слева положим $\frac{1}{2}(u-u^{-1})-a=t$, так что когда u описывает окружность радиуса e^{β}, точка t описывает эллипс с полуосями $\operatorname{ch}\beta$ и $\operatorname{sh}\beta$ и с фокусами в $-a\pm i$; получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{z(t+a)}b\,dt}{t^2+b^2},$$

[1]) Опубликовано в «Leibnizens Ges. Werke», издание 3, III (Halle, 1855), 75.

причем контуром интегрирования будет только что определенный эллипс, который охватывает нули выражения t^2+b^2. Вычисляя интеграл согласно § 6.1 части I, получим требуемый результат.]

Пример 2. Показать, что если n — целое число, то

$$J_n(y+z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(y)\,J_{n-m}(z).$$

(K. Neumann, Schläfli)

[Рассмотреть разложения обеих частей равенства

$$\exp\left\{\frac{1}{2}(y+z)\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}=\exp\left\{\frac{1}{2}y\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}\exp\left\{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}.]$$

Пример 3. Показать, что

$$e^{iz\cos\varphi}=J_0(z)+2i\cos\varphi J_1(z)+2i^2\cos 2\varphi J_2(z)+\ldots$$

Пример 4. Показать, что при $r^2=x^2+y^2$

$$J_0(r)=J_0(x)\,J_0(y)-2J_2(x)\,J_2(y)+2J_4(x)\,J_4(y)-\ldots$$

(K. Neumann, Lommel)

17.11. Дифференциальное уравнение Бесселя

Мы видели при n целом, что функция (коэффициент) Бесселя порядка n может быть задана формулой

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2}z\right)^n\int^{(0+)} t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt.$$

Исходя из этой формулы, покажем теперь, что $J_n(z)$ является решением линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)y=0,$$

которое называется *уравнением Бесселя* для функций n-го порядка.

В самом деле, дифференцируя, найдем (§ 4.2, часть I), что

$$\frac{d^2J_n(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dJ_n(z)}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)J_n(z)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2}z\right)^n\int^{(0+)} t^{-n-1}\left\{1-\frac{n+1}{t}+\frac{z^2}{4t^2}\right\}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2}z\right)^n\int^{(0+)}\frac{d}{dt}\left\{t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)\right\}dt=0,$$

так как $t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)$ — однозначная функция.

Таким образом, мы доказали, что

$$\frac{d^2J_n(z)}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dJ_n(z)}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)J_n(z)=0.$$

Отметим, что $z=0$ — правильная точка, а $z=\infty$ — неправильная; все остальные точки являются обыкновенными точками уравнения.

Пример 1. Дифференцированием разложения

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^nJ_n(z)$$

по z и по t показать, что коэффициенты Бесселя удовлетворяют уравнению Бесселя.

(St. John's, 1899)

Пример 2. Функция $P_n^m\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right)$ удовлетворяет уравнению, определяемому схемой

$$P\begin{Bmatrix} 4n^2 & \infty & 0 & \\ \frac{1}{2}m & n+1 & \frac{1}{2}m & z^2 \\ -\frac{1}{2}m & -n & -\frac{1}{2}m & \end{Bmatrix};$$

показать, что $J_m(z)$ удовлетворяет предельной форме этого уравнения при слиянии особых точек, получаемой при $n\to\infty$.

17.2. Решение уравнения Бесселя при любом комплексном n

Приступим теперь, по образцу § 15.2, к расширению определения $J_n(z)$ на тот случай, когда n — какое угодно число, вещественное или комплексное. По методу, подобному методу § 17.11, убедимся, что для всех значений n уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{n^2}{z^2}\right)y=0$$

удовлетворяет интеграл вида

$$y=z^n\int_C t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt$$

при условии, что функция

$$t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)$$

принимает свое начальное значение после обхода контура C и что дифференцирования под знаком интеграла допустимы.

Соответственно этому мы определим $J_n(z)$ равенством

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^{n+1}\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-1} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt,$$

где правая часть вполне определяется, если возьмем за $\arg z$ его главное значение и примем на контуре $|\arg t| \leqslant \pi$.

Чтобы разложить этот интеграл в степенной ряд, отметим, что он будет аналитической функцией от z и что мы можем получить коэффициенты в ряде Тейлора, расположенном по степеням z, дифференцированием под знаком интеграла (§§ 5.32 и 4.44 части I). Отсюда выводим, что

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^{n+1}\pi i} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{2r}}{2^{2r} r!} \int_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{-n-r-1} dt = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{n+2r}}{2^{n+2r} r! \, \Gamma(n+r+1)}$$

согласно формуле § 12.22. Это и есть требуемое разложение.

Соответственно этому для любых значений n мы определяем функцию Бесселя $J_n(z)$ равенствами

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{2} z\right)^n \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-1} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{n+2r}}{2^{n+2r} r! \, \Gamma(n+r+1)}.$$

Эта функция сводится к коэффициенту Бесселя, когда n — целое число; ее называют *функцией Бесселя первого рода*.

Так как уравнение Бесселя остается без изменения, если заменить n на $-n$, то за основные решения можно принять $J_n(z)$, $J_{-n}(z)$, за исключением случая, когда n — целое число; в этом последнем случае эти решения не будут независимыми. За этим исключением, *общее решение уравнения Бесселя имеет вид*

$$\alpha J_n(z) + \beta J_{-n}(z),$$

где α и β — произвольные постоянные.

Второе решение уравнения Бесселя, когда n — целое число, будет дано позже (§ 17.6).

17.21. Рекуррентные формулы для функций Бесселя

Так как функция Бесселя удовлетворяет предельной форме гипергеометрического уравнения при слиянии особых точек, то следует ожидать, что существуют рекуррентные формулы, соответствующие соотношениям между смежными гипергеометрическими функциями, указанным в § 14.7.

Чтобы установить эти соотношения для любых значений n, вещественных или комплексных, обратимся к результату § 17.2. Написав равенство

$$0=\int_{-\infty}^{(0+)} \frac{d}{dt}\left\{t^{-n}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)\right\}dt$$

в развернутом виде, получим

$$0=\int_{-\infty}^{(0+)}\left(t^{-n}+\frac{1}{4}z^2t^{-n-2}-nt^{-n-1}\right)\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt=$$
$$=2\pi i\left\{(2z^{-1})^{n-1}J_{n-1}(z)+\frac{1}{4}z^2(2z^{-1})^{n+1}J_{n+1}(z)-n(2z^{-1})^nJ_n(z)\right\},$$

и таким образом,

$$J_{n-1}(z)+J_{n+1}(z)=\frac{2n}{z}J_n(z). \tag{A}$$

Затем, пользуясь § 4.44 части I, имеем

$$\frac{d}{dz}\{z^{-n}J_n(z)\}=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\frac{d}{dz}\int_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-1}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt=$$
$$=-\frac{z}{2^{n+2}\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-2}\exp\left(t-\frac{z^2}{4t}\right)dt=-z^{-n}J_{n+1}(z),$$

и следовательно, обозначая штрихом дифференцирование по z, имеем

$$J_n'(z)=\frac{n}{z}J_n(z)-J_{n+1}(z). \tag{B}$$

Из (A) и (B) легко вывести другие рекуррентные формулы:

$$J_n'(z)=\frac{1}{2}\{J_{n-1}(z)-J_{n+1}(z)\} \tag{C}$$

и

$$J_n'(z)=J_{n-1}(z)-\frac{n}{z}J_n(z). \tag{D}$$

Пример 1. Получить эти формулы из степенного ряда для $J_n(z)$.
Пример 2. Показать, что

$$\frac{d}{dz}\{z^nJ_n(z)\}=z^nJ_{n-1}(z).$$

Пример 3. Показать, что

$$J_0'(z)=-J_1(z).$$

Пример 4. Показать, что

$$16J_n^{(IV)}(z) = J_{n-4}(z) - 4J_{n-2}(z) + 6J_n(z) - 4J_{n+2}(z) + J_{n+4}(z).$$

Пример 5. Показать, что

$$J_2(z) - J_0(z) = 2J_0''(z).$$

Пример 6. Показать, что

$$J_2(z) = J_0''(z) - z^{-1}J_0'(z).$$

17.211. Соотношение между двумя функциями Бесселя, порядки которых отличаются на целое число

Из последнего параграфа можно вывести равенство, связывающее любые две функции Бесселя, порядки которых отличаются на целое число, а именно:

$$z^{-n-r}J_{n+r}(z) = (-1)^r \frac{d^r}{(z\,dz)^r}\{z^{-n}J_n(z)\},$$

где n — любое, а r — положительное целое число. Эта формула выводится непосредственно по индукции из формулы (B), если написать последнюю в виде

$$z^{-n-1}J_{n+1}(z) = -\frac{d}{z\,dz}\{z^{-n}J_n(z)\}.$$

17.212. Связь между функциями $J_n(z)$ и $W_{k,m}$

Читатель легко убедится в том, что если мы в уравнении Бесселя положим $y = z^{-\frac{1}{2}}v$ и затем $z = \frac{x}{2i}$, то получим уравнение

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}\right)v = 0,$$

которому удовлетворяет функция $W_{0,n}(x)$; отсюда следует, что

$$J_n(z) = Az^{-\frac{1}{2}}M_{0,n}(2iz) + Bz^{-\frac{1}{2}}M_{0,-n}(2iz).$$

Сравнивая коэффициенты при $z^{\pm n}$ в обеих частях, найдем, что

$$J_n(z) = \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{2^{2n+\frac{1}{2}}\,i^{n+\frac{1}{2}}\,\Gamma(n+1)}M_{0,n}(2iz),$$

за исключением критических случаев, когда $2n$ — отрицательное целое число; если n равно половине отрицательного нечетного числа, то результат получается из второй формулы Куммера (§ 16.11).

17.22. Нули функций Бесселя, порядок которых n вещественный

Соотношения § 17.21 дают возможность вывести интересную теорему, а именно: *между любыми двумя последовательными вещественными нулями функции $z^{-n}J_n(z)$ лежит один и только один нуль*[1]) *функции* $z^{-n}J_{n+1}(z)$, так как из соотношения (B), написанного в виде

$$z^{-n}J_{n+1}(z) = -\frac{d}{dz}\{z^{-n}J_n(z)\},$$

вытекает по теореме Ролля[2]), что между каждой парой последовательных нулей функции $z^{-n}J_n(z)$ имеется по крайней мере один нуль функции $z^{-n}J_{n+1}(z)$.

Подобным же образом из соотношения (D), написанного в виде

$$z^{n+1}J_n(z) = \frac{d}{dz}\{z^{n+1}J_{n+1}(z)\},$$

вытекает, что между каждой парой последовательных нулей функции $z^{n+1}J_{n+1}(z)$ имеется по крайней мере один нуль функции $z^{n+1}J_n(z)$.

Далее, функции $z^{-n}J_n(z)$ и $\frac{d}{dz}\{z^{-n}J_n(z)\}$ не имеют общих нулей, ибо первая функция удовлетворяет уравнению

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + (2n+1)\frac{dy}{dz} + zy = 0,$$

и легко убедиться по индукции дифференцированием этого уравнения, что если y и $\frac{dy}{dz}$ равняются нулю для какого-нибудь значения z, то и все производные от y равняются нулю, и y будет нулем согласно § 5.4 части I.

Доказываемая теорема теперь очевидна, кроме случая наименьших по абсолютной величине нулей $\pm\xi$ функции $z^{-n}J_n(z)$, так как $z^{-n}J_n(z)$ и $z^{n+1}J_n(z)$ имеют одни и те же нули, за исключением $z=0$. Однако $z=0$ есть нуль функции $z^{-n}J_{n+1}(z)$, и если бы имелся какой-нибудь другой положительный нуль ξ_1 функции $z^{-n}J_{n+1}(z)$, меньший, чем ξ, то функция $z^{n+1}J_n(z)$ имела бы нуль между 0 и ξ, что противоречит предположению, что между 0 и ξ нет нулей функции $z^{n+1}J_n(z)$.

Теорема поэтому доказана.

[См. также § 17.3, примеры 3 и 4 и пример 19 в конце главы.]

---

[1]) Доказательства этой теоремы даны Бохером (Bôcher, Bull. American Math. Soc., IV (1897), 206), Гегенбауэром (Gegenbauer, Monatshefte für Math., VIII (1897), 383) и Портером (Porter, Bull. American Math. Soc., IV (1898), 274).

[2]) Эта теорема доказана для полиномов в «Theory of Equations» (I, 157) Бернсайда и Пэнтона (Burnside and Panton). Ее можно получить для любых функций с непрерывными производными, пользуясь первой теоремой о среднем значении (§ 4.14, часть I).

17.23. Интеграл Бесселя для коэффициентов Бесселя

Выведем теперь интеграл, данный впервые Бесселем для частного случая функций Бесселя, когда n — положительное целое число; в некоторых отношениях этот результат имеет сходство с интегралами Лапласа, данными в §§ 15.23 и 15.33 для функций Лежандра.

В интеграле § 17.1, т. е. в

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int^{(0+)} u^{-n-1} e^{\frac{1}{2} z \left(u - \frac{1}{u}\right)} du,$$

возьмем в качестве контура окружность $|u| = 1$ и положим $u = e^{i\theta}$, так что

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ni\theta + iz \sin\theta} d\theta.$$

Разделим интервал интегрирования пополам и в первой части заменим θ на $-\theta$; получим

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{ni\theta - iz \sin\theta} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ni\theta + iz \sin\theta} d\theta,$$

и таким образом,

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - z \sin\theta)\, d\theta;$$

это и есть искомая формула.

Пример 1. Показать, что если z вещественно, а n — целое число, то

$$|J_n(z)| \leqslant 1.$$

Пример 2. Показать, что для всех значений n (вещественных или комплексных) интеграл

$$y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - z \sin\theta)\, d\theta$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) y = \frac{\sin n\pi}{\pi} \left(\frac{1}{z} - \frac{n}{z^2}\right),$$

которое приводится к уравнению Бесселя, когда n — целое число.

[Легко показать дифференцированием под знаком интеграла, что выражение в левой части равно

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d}{d\theta} \left\{ \left(\frac{n}{z^2} + \frac{\cos\theta}{z}\right) \sin(n\theta - z \sin\theta) \right\} d\theta.]$$

17.231. Видоизменение интеграла Бесселя, когда n не целое число

Покажем теперь, что[1]) для любых значений n

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta - \frac{\sin n\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-n\theta - z\,\mathrm{sh}\,\theta}\,d\theta, \qquad \text{(A)}$$

когда $\mathrm{Re}\,z > 0$. Эта формула, очевидно, приводится к формуле § 17.23, когда n — целое число. Если в интеграле § 17.2, т. е. в

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^{n+1}\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} t^{-n-1}\exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right)dt,$$

предполагая, что z положительное, положим $t = \frac{1}{2}uz$, то получим

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} u^{-n-1}\exp\left\{\frac{1}{2}z\left(u - \frac{1}{u}\right)\right\}du.$$

Но если контур представляет собою фигуру, состоящую из вещественной оси от —1 до $-\infty$, взятой дважды, и окружности $|u|=1$,

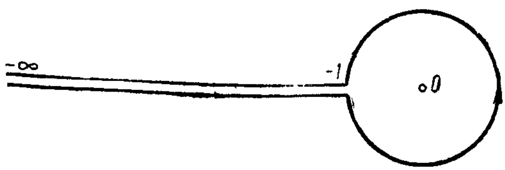

Рис. 4.

то этот интеграл представляет аналитическую функцию от z, когда $\mathrm{Re}(zu)$ становится отрицательной при $|u| \to \infty$ на выбранном контуре, т. е. когда $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$; таким образом, по теории аналитического продолжения формула (которая доказана прямым преобразованием для *положительных* значений z) имеет место уже при условии $\mathrm{Re}\,z > 0$. Отсюда

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{-1} + \int_C + \int_{-1}^{-\infty}\right\}u^{-n-1}\exp\left\{\frac{1}{2}z\left(u - \frac{1}{u}\right)\right\}du,$$

где C обозначает окружность $|u| = 1$, $\arg u = -\pi$ на первом участке пути интегрирования и $\arg u = +\pi$ на третьем участке.

---

[1]) Этот результат принадлежит Шлефли (Schläfli, Math. Ann., III (1871), 148).

Положив $u = te^{\mp\pi i}$ в первом и третьем интегралах соответственно (так что в каждом случае $\arg t = 0$) и $u = e^{i\theta}$ во втором, получим

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ni\theta + iz\sin\theta}\,d\theta +$$

$$+\left\{\frac{e^{(n+1)\pi i}}{2\pi i} - \frac{e^{-(n+1)\pi i}}{2\pi i}\right\}\int_1^{\infty} t^{-n-1}e^{\frac{1}{2}z\left(-t+\frac{1}{t}\right)}\,dt.$$

Преобразуя первый из этих интегралов, как в § 17.23, и полагая $t = e^{\theta}$ во втором, получим окончательно

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta - z\sin\theta)\,d\theta + \frac{\sin(n+1)\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-n\theta - z\,\mathrm{sh}\,\theta}\,d\theta,$$

что и представляет собою искомый результат, когда $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$.

Если $|\arg z|$ лежит между $\frac{1}{2}\pi$ и π, то в силу соотношения

$$J_n(z) = e^{\pm n\pi i}J_n(-z)$$

имеем

$$J_n(z) = \frac{e^{\pm n\pi i}}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\cos(n\theta + z\sin\theta)\,d\theta - \sin n\pi\int_0^{\infty} e^{-n\theta + z\,\mathrm{sh}\,\theta}\,d\theta\right\}, \quad \text{(B)}$$

где верхний или нижний знак берется в зависимости от того, будет ли $\arg z > \frac{1}{2}\pi$ или $< -\frac{1}{2}\pi$.

Если n — целое число, то (A) сразу приводится к интегралу Бесселя, (B) также приводится к этому интегралу, если воспользоваться равенством. $J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z)$, имеющим место для целых значений n.

Равенство (A), как уже указано, принадлежит Шлефли (Schläfli, Math. Ann., III (1871), 148), а равенство (B) было дано Сониным (Math. Ann., XV (1880), 14). Эти тригонометрические интегралы для функций Бесселя можно рассматривать как аналоги интегралов Лапласа для функций Лежандра, ибо (§ 17.11, пример 2) $J_m(z)$ удовлетворяет предельной форме (получаемой, когда $n \to \infty$) уравнения для $P_n^m\left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right)$.

Но интеграл Лапласа для этой функции отличается лишь постоянным множителем от выражения

$$\int_0^{\pi}\left[1 - \frac{z^2}{2n^2} + \left\{\left(1 - \frac{z^2}{2n^2}\right)^2 - 1\right\}^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right]^n\cos m\varphi\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi}\left\{1 + \frac{iz}{n}\cos\varphi + O(n^{-2})\right\}^n\cos m\varphi\,d\varphi.$$

Предел подинтегральной функции при $n \to \infty$ равен $e^{iz\cos\varphi}\cos m\varphi$, что и показывает сходство интеграла Лапласа для функции $P_n^m(z)$ с интегралами Бесселя — Шлефли для функции $J_m(z)$.

Пример 1. Вывести из формулы $J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\cos\varphi}\,d\varphi$, изменяя порядок интегрирования, что при n положительном целом и $\cos\theta > 0$

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int\limits_0^\infty e^{-x\cos\theta} J_0(x\sin\theta)\,x^n\,dx.$$

(Callandreau, Bull. des Sci. Math. (2), XV 1891, 121).

Пример 2. Показать, что при определении Феррерса функции $P_n^m(\cos\theta)$

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{1}{\Gamma(n-m+1)}\int\limits_0^\infty e^{-x\cos\theta} J_m(x\sin\theta)\,x^n\,dx,$$

когда n и m — положительные целые числа и $\cos\theta > 0$.

(Hobson, Proc. London Math. Soc., XXV (1894), 49)

17.24. Функции Бесселя, порядок которых равен половине нечетного целого числа

Мы видели (§ 17.2), что если порядок n функции Бесселя $J_n(z)$ равен половине нечетного целого числа, то разность корней определяющего уравнения при $z=0$ равна $2n$ и, следовательно, будет целым числом [1]). Мы покажем теперь, что в таких случаях $J_n(z)$ выражается через элементарные функции; в самом деле,

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \frac{2^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\left\{1 - \frac{z^2}{2\cdot 3} + \frac{z^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots\right\} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\sin z,$$

и следовательно, (§ 17.211), если k — положительное целое число,

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z) = \frac{(-1)^k (2z)^{k+\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}}\,\frac{d^k}{d(z^2)^k}\left(\frac{\sin z}{z}\right).$$

---

[1]) В § 17.2 определяющее уравнение (см. § 10.3 части I) не упоминается. Авторы приводят там общий вид решения уравнения Бесселя $\alpha J_n(z) + \beta J_{-n}(z)$ при нецелых n. Начальные степени z в решениях $J_n(z)$ и $J_{-n}(z)$ суть z^n и z^{-n}, а их показатели n и $-n$ как раз и служат корнями определяющего уравнения в точке $z=0$. Неясно, однако, какова связь этого факта с выражением функций Бесселя с полуцелым индексом через элементарные. — *Прим. ред.*

По выполнении дифференцирования в правой части получим формулу вида

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z) = P_k \sin z + Q_k \cos z,$$

где P_k, Q_k — полиномы относительно $z^{-\frac{1}{2}}$.

Пример 1. Показать, что

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z.$$

Пример 2. Доказать по индукции, что если k — целое число и $n = k + \frac{1}{2}$, то

$$J_n(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \times \right.$$

$$\times \left\{1 + \sum_{r=1} \frac{(-1)^r (4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2) \ldots \{4n^2 - (4r-1)^2\}}{(2r)!\, 2^{6r} z^{2r}}\right\} +$$

$$\left. + \sin\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{r=1} \frac{(-1)^r (4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2) \ldots \{4n^2 - (4r-3)^2\}}{(2r-1)!\, 2^{6r-3} z^{2r-1}}\right],$$

причем суммирования продолжаются до тех пор, пока ряды сами не оборвутся.

Пример 3. Показать, что $z^{k+\frac{1}{2}} \dfrac{d^k}{d(z^2)^k}\left(\dfrac{\cos z}{z}\right)$ есть решение уравнения Бесселя для $J_{k+\frac{1}{2}}(z)$.

Пример 4. Показать, что решение уравнения

$$z^{m+\frac{1}{2}} \frac{d^{2m+1}y}{dz^{2m+1}} + y = 0$$

есть

$$y = z^{\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}} \sum_{p=0}^{2m} c_p \left\{J_{-m-\frac{1}{2}}\left(2a_p z^{\frac{1}{2}}\right) + iJ_{m+\frac{1}{2}}\left(2a_p z^{\frac{1}{2}}\right)\right\},$$

где $c_0, c_1, \ldots, c_{2m}$ — произвольные постоянные, $a_0, a_1, \ldots, a_{2m}$ — корни уравнения $a^{2m+1} = i$.

(Lommel)

17.3. Контурный интеграл Ханкеля[1]) для функции $J_n(z)$

Рассмотрим интеграл

$$y = z^n \int_A^{(1+,\,-1-)} (t^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \cos(zt)\,dt,$$

где A — точка справа от точки $t=1$ и

$$\arg(t-1) = \arg(t+1) = 0$$

в точке A; контур удобно взять в виде восьмерки.

Покажем теперь, что этот интеграл отличается от функции $J_n(z)$ лишь постоянным множителем. Легко видеть, что подинтегральная функция принимает свое начальное значение после обхода точкой t пути интегрирования, ибо $(t-1)^{n-\frac{1}{2}}$ умножается на множитель $e^{(2n-1)\pi i}$ после обхода петли $(1+)$, а $(t+1)^{n-\frac{1}{2}}$ умножается на множитель $e^{-(2n-1)\pi i}$ после обхода петли $(-1-)$. Так как ряд

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (zt)^{2r}}{(2r)!} (t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}$$

сходится равномерно на контуре, то имеем (§ 4.7, часть I)

$$y = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r z^{n+2r}}{(2r)!} \int_A^{(1+,\,-1-)} t^{2r} (t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Для вычисления полученных интегралов заметим, во-первых, что они являются аналитическими функциями n для всех значений n, а во-вторых, что при $\operatorname{Re}\left(n+\frac{1}{2}\right) > 0$ мы можем деформировать контур в окружности $|t-1| = \delta$, $|t+1| = \delta$ и часть вещественной оси, соединяющей точки $t = \pm(1-\delta)$, взятую дважды; затем мы можем заставить $\delta \to 0$; интегралы вдоль окружностей стремятся к нулю, и следовательно, приписав функциям $t-1$ и $t+1$ на новом пути интегрирования аргументы, удовлетворяющие написанному выше

---

[1]) Hankel, Math. Ann., I (1869), 467—501.

условию, получим, считая $\arg(1-t^2)=0$ и полагая $t^2=u$,

$$\int_A^{(1+,\,-1-)} t^{2r}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi i}\int_1^{-1} t^{2r}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt+e^{-\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi i}\int_{-1}^{1} t^{2r}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=-4i\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\int_0^1 t^{2r}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=-2i\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\int_0^1 u^{r-\frac{1}{2}}(1-u)^{n-\frac{1}{2}}\,du=$$

$$=2i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\,\frac{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+r+1)}.$$

Так как исходное и окончательное выражения являются аналитическими функциями от n для всех значений n, то, по § 5.5 части I, это равенство, доказанное для случая

$$\operatorname{Re}\left(n+\frac{1}{2}\right)>0,$$

имеет место для всех значений n.

Соответственно этому получаем

$$y=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r z^{n+2r}2i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\,\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(2r)!\,\Gamma(n+r+1)}=$$

$$=2^{n+1}i\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)J_n(z).$$

Отсюда, если $\left\{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\right\}^{-1}\neq 0$, *имеем*

$$J_n(z)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{2\pi i\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_A^{(1+,\,-1-)}(t^2-1)^{n-\frac{1}{2}}\cos(zt)\,dt.$$

Следствие. При $\operatorname{Re}\left(n+\frac{1}{2}\right)>0$, деформируя пути интегрирования, можно получить формулы

$$J_n(z)=\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos(zt)\,dt=$$

$$=\frac{2\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n}\varphi\cos(z\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Пример 1. Показать, что при $\operatorname{Re}\left(n+\frac{1}{2}\right)>0$

$$J_n(z)=\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\pi}e^{\pm iz\cos\varphi}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi.$$

Пример 2. Получить при $\operatorname{Re} n>0$ разложением в ряд по степеням z и почленным интегрированием (§ 4.7, часть I) формулу

$$J_n(z)=\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\pi}\cos(z\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi\,d\varphi.$$

Пример 3. Показать, что когда $-\frac{1}{2}<n<\frac{1}{2}$, функция $J_n(z)$ имеет бесконечное число вещественных нулей.

[Пусть $z=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$, где m — нуль или положительное целое число; тогда по приведенному выше следствию

$$J_n\left(m\pi+\frac{1}{2}\pi\right)=\frac{z^n}{2^{n-1}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left\{\frac{1}{2}u_0-u_1+u_2-\ldots+(-1)^m u_m\right\},$$

где

$$u_r=\left|\int_{\frac{2r-1}{2m+1}}^{\frac{2r+1}{2m+1}}(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}\cos\left\{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi t\right\}dt\right|=$$

$$=\int_{0}^{1/\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left\{1-\left(t+\frac{2r-1}{2m+1}\right)^2\right\}^{n-\frac{1}{2}}\sin\left\{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi t\right\}dt;$$

поэтому, так как $n-\frac{1}{2}<0$, то $u_m > u_{m-1} > u_{m-2} > \ldots$, а потому $J_n\left(m\pi+\frac{1}{2}\pi\right)$ имеет знак $(-1)^m$. Этот метод доказательства для $n=0$ принадлежит Бесселю.]

Пример 4. Показать, что при n вещественном $J_n(z)$ имеет бесконечное число вещественных нулей, и найти верхний предел для численно наименьшего из них. (Использовать пример 3 (в комбинации с § 17.22)).

17.4. Связь между коэффициентами Бесселя и функциями Лежандра

Установим теперь факт, принадлежащий Гейне [1]) и дающий точное объяснение результату примера 2 § 17.11, согласно которому коэффициенты Бесселя могут рассматриваться как предельные формы гипергеометрических функций.

Если $|\arg(1\pm z)|<\pi$, n — любое и m — положительное целое число, то дифференцированием формулы § 15.22 находим, что при определении Ферерса функции $P_n^m(z)$

$$P_n^m(z)=\frac{\Gamma(n+m+1)}{2^m\cdot m!\,\Gamma(n-m+1)}(1-z)^{\frac{1}{2}m}(1+z)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(-n+m,\ n+1+m;\ m+1;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z\right);$$

следовательно, если $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$, $\left|\arg\left(1-\frac{z^2}{4n^2}\right)\right|<\pi$, то имеем

$$P_n^m\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right)=\frac{\Gamma(n+m+1)\,z^m n^{-m}}{2^m m!\,\Gamma(n-m+1)}\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\times F\left(-n+m,\ n+1+m;\ m+1;\ \frac{1}{4}z^2n^{-2}\right).$$

Теперь заставляем $n\to+\infty$ (n — положительное, но не обязательно целое число), так что если $\delta=n^{-1}$, то $\delta\to 0$ непрерывно, принимая положительные значения.

Тогда $\dfrac{\Gamma(n+m+1)\,n^{-m}}{\Gamma(n-m+1)\,n^m}\to 1$ (§ 13.6) и $\left(1-\dfrac{z^2}{4n^2}\right)^{\frac{1}{2}m}\to 1.$

Далее, $(r+1)$-й член гипергеометрического ряда равен

$$\frac{(-1)^r(1-m\delta)(1+\delta+m\delta+r\delta)\{1-(m+1)^2\delta^2\}\{1-(m+2)^2\delta^2\}\ldots\{1-(m+r)^2\delta^2\}}{(m+1)(m+2)\ldots(m+r)\,r!}\left(\frac{1}{2}z\right)^{2r};$$

это есть непрерывная функция от δ, и легко видеть, что ряд, у которого эта функция служит $(r+1)$-м членом, сходится равномерно в некотором

---

[1]) Внешнее отличие результата, данного в Kugelfunktionen Гейне (Heine), происходит от различия между присоединенными функциями Гейне и Ферерса.

промежутке значений δ, содержащем точку $\delta=0$; таким образом, в силу § 3.32 части I имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-m}P_n^m\left(1-\frac{z^2}{2n^2}\right)\right]=\frac{z^m}{2^m m!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}z\right)^r}{(m+1)(m+2)\ldots(m+r)\,r!}=J_m(z),$$

что и представляет собой требуемое соотношение.

Пример 1. Показать, что [1])

$$\lim_{n\to\infty}\left[n^{-m}P_n^m\left(\cos\frac{z}{n}\right)\right]=J_m(z).$$

Пример 2. Показать, что уравнение Бесселя есть предельная форма уравнений, определяемых схемами

$$P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & c & \\ n & ic & \frac{1}{2}+ic & z \\ -n & -ic & \frac{1}{2}-ic & \end{Bmatrix},$$

$$e^{iz}P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & c & \\ n & \frac{1}{2} & 0 & z \\ -n & \frac{3}{2}-2ic & 2ic-1 & \end{Bmatrix},$$

$$P\begin{Bmatrix} 0 & \infty & c^2 & \\ \frac{1}{2}n & \frac{1}{2}(c-n) & 0 & z^2 \\ -\frac{1}{2}n & -\frac{1}{2}(c+n) & n+1 & \end{Bmatrix}$$

при слиянии особых точек, возникающем, когда $c\to\infty$.

17.5. Асимптотический ряд для функции $J_n(z)$, когда $|z|$ велик

Мы видели (§ 17.212), что

$$J_n(z)=\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{2^{2n+\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}\,\Gamma(n+1)}M_{0,n}(2iz),$$

где предполагается

$$|\arg z|<\pi,\quad -\frac{1}{2}\pi<\arg(2iz)<\frac{3}{2}\pi.$$

[1]) Частный случай, когда $m=0$, дан Мелером (Mehler, Journ. für Math., LXVIII (1868), 140); см. также Math. Ann., V (1872), 141—144.

Но для этой области значений z, согласно примеру 2 § 16.41,

$$M_{0,n}(2iz)=\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}W_{0,n}(2iz)+\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}W_{0,n}(-2iz),$$

если $-\frac{3}{2}\pi<\arg(-2iz)<\frac{1}{2}\pi$; таким образом, при $|\arg z|<\pi$

$$J_n(z)=\frac{1}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}}\left\{e^{\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}W_{0,n}(2iz)+e^{-\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}W_{0,n}(-2iz)\right\}.$$

Для рассматриваемых значений z асимптотическое разложение функции $W_{0,n}(\pm 2iz)$ имеет вид

$$e^{\mp iz}\left\{1\pm\frac{(4n^2-1^2)}{8iz}+\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!\,(8iz)^2}\pm\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(\pm 1)^r\{4n^2-1^2\}\{4n^2-3^2\}\ldots\{4n^2-(2r-1)^2\}}{r!\,(8iz)^r}+O(z^{-r})\right\}.$$

Отсюда, складывая ряды, найдем асимптотическое разложение функции $J_n(z)$ при $|z|$ большом и $|\arg z|<\pi$:

$$J_n(z)\approx\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\times\right.$$
$$\times\left\{1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\{4n^2-1^2\}\{4n^2-3^2\}\ldots\{4n^2-(4r-1)^2\}}{(2r)!\,2^{6r}z^{2r}}\right\}+$$
$$\left.+\sin\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\{4n^2-1^2\}\{4n^2-3^2\}\ldots\{4n^2-(4r-3)^2\}}{(2r-1)!\,2^{6r-3}z^{2r-1}}\right]=$$
$$=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)U_n(z)-\sin\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)V_n(z)\right],$$

где $U_n(z)$, $-V_n(z)$ написаны вместо рядов.

Отметим, что если n равно половине нечетного числа, то эти ряды обрываются и дают результат примера 2 § 17.24.

Даже когда z не очень велико, значение функции $J_n(z)$ может быть вычислено по этой формуле с большой точностью. Например, для всех положительных значений z, бо́льших 8, первые три члена асимптотического разложения дают значение функций $J_0(z)$ и $J_1(z)$ с шестью точными десятичными знаками.

Это асимптотическое разложение было дано Пуассоном [1]) (при $n=0$) и Якоби [2]) (при всех целых значениях n) для вещественных значений z.

[1]) Poisson, Journ. de l'École polytechnique, (I), тетр. 19 (1823), 350.
[2]) Jacobi, Astr. Nachr., XVIII, 94.

Комплексные значения z были рассмотрены Ханкелем [1]) и несколькими последующими авторами. Данный здесь способ получения разложения принадлежит Барнсу [2]).

Асимптотические разложения функции $J_n(z)$ для большого порядка n даны Дебаем (Debye, Math. Ann., LXVII (1909), 535—558; Münchener Sitzungsberichte, XL (1910), no. 5) и Николсоном (Nicholson, Phil. Mag. 1907)).

Приближенная формула для $J_n(nx)$, когда n велико и $0<x<1$, а именно:

$$\frac{x^n \exp\left\{n\sqrt{1-x^2}\right\}}{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{\frac{1}{4}}\left\{1+\sqrt{1-x^2}\right\}^n},$$

была получена Карлини (Carlini) в 1817 г. в мемуаре, напечатанном в Jacobi's Ges. Werke, VII, 189—245. Эта формула была также исследована Лапласом в 1827 г. в его «Небесной механике» [Mécanique Céleste, V, Добавление (Oeuvres, V (1882))] в предположении, что x — чисто мнимое.

Более подробные сведения об исследованиях функций Бесселя большого порядка даны в Proc. London Math. Soc. (2), XVI (1917), 150—174.

Пример 1. Надлежащим видоизменением контурного интеграла Ханкеля (§ 17.3) показать, что при $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$ и $\operatorname{Re}\left(n+\frac{1}{2}\right)>0$

$$J_n(z)=\frac{1}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)(2\pi z)^{\frac{1}{2}}}\left[e^{i\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)}\int_0^\infty e^{-u}u^{n-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{n-\frac{1}{2}}du+\right.$$
$$\left.+e^{-i\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)}\int_0^\infty e^{-u}u^{n-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{iu}{2z}\right)^{n-\frac{1}{2}}du\right],$$

и вывести асимптотическое разложение функции $J_n(z)$, когда $|z|$ велик и $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$. [Принять за контур прямоугольник, вершины которого ± 1, $\pm 1+iN$ с вырезами при ± 1, и заставить $N\to\infty$; за подинтегральную функцию принять $(1-t^2)^{n-\frac{1}{2}}e^{izt}$.]

Пример 2. Показать, что при $|\arg z|<\frac{1}{2}\pi$ и $\operatorname{Re}\left(n+\frac{1}{2}\right)>0$

$$J_n(z)=\frac{2^{n+1}z^n}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-2z\operatorname{ctg}\varphi}\cos^{n-\frac{1}{2}}\varphi\operatorname{cosec}^{2n+1}\varphi\sin\left\{z-\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi\right\}d\varphi.$$

[Положить $u=2z\operatorname{ctg}\varphi$ в предыдущем примере.]

---

[1]) Hankel, Math. Ann., I (1869), 467—501.

[2]) Barnes, Trans. Camb. Phil. Soc., XX (1908), 274.

Пример 3. Показать, что при $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$ и $\operatorname{Re}\left(n+\frac{1}{2}\right) > 0$ выражение

$$Ae^{iz}z^n \int_0^\infty v^{n-\frac{1}{2}} (1+iv)^{n-\frac{1}{2}} e^{-2vz}\,dv + Be^{-iz}z^n \int_0^\infty v^{n-\frac{1}{2}} (1-iv)^{n-\frac{1}{2}} e^{-2vz}\,dv$$

будет решением уравнения Бесселя.

Далее, определить A и B так, чтобы оно давало функцию $J_n(z)$.

(Schafheitlin, Journ. für Math., CXIV)

17.6. Второе решение уравнения Бесселя, когда порядок — целое число

Мы видели в § 17.2, что если порядок n в дифференциальном уравнении Бесселя не есть целое число, то общее решение уравнения имеет вид

$$\alpha J_n(z) + \beta J_{-n}(z),$$

где α и β — произвольные постоянные.

Однако когда n — целое число, мы видели, что

$$J_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z),$$

и следовательно, два решения $J_n(z)$ и $J_{-n}(z)$ не являются на самом деле различными, значит, в этом случае, для того чтобы иметь общее решение, нужно найти другое частное решение дифференциального уравнения, отличное от $J_n(z)$.

Рассмотрим функцию

$$Y_n(z) = 2\pi e^{n\pi i} \frac{J_n(z)\cos n\pi - J_{-n}(z)}{\sin 2n\pi},$$

которая является решением уравнения Бесселя, когда $2n$ не целое число. Введение этой функции $Y_n(z)$ принадлежит Ханкелю[1]).

При целом n функция $Y_n(z)$ определяется предельной формой этого равенства, а именно:

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi e^{(n+\varepsilon)\pi i} \frac{J_{n+\varepsilon}(z)\cos(n\pi+\varepsilon\pi) - J_{-n-\varepsilon}(z)}{\sin 2(n+\varepsilon)\pi} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{2\pi e^{n\pi i}}{\sin 2\varepsilon\pi} \{J_{n+\varepsilon}(z)(-1)^n - J_{-n-\varepsilon}(z)\} = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} \{J_{n+\varepsilon}(z) - (-1)^n J_{-n-\varepsilon}(z)\}. \end{aligned}$$

[1]) Hankel, Math. Ann., I (1869), 472.

Чтобы выразить $\mathrm{Y}_n(z)$ через функции $W_{k,m}$, обратимся к результату § 17.5, который дает

$$\mathrm{Y}_n(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{-1}}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}}\left[\left\{e^{\frac{1}{2}\left(n+\varepsilon+\frac{1}{2}\right)\pi i}W_{0,\,n+\varepsilon}(2iz)+\right.\right.$$
$$\left.+e^{-\frac{1}{2}\left(n+\varepsilon+\frac{1}{2}\right)\pi i}W_{0,\,n+\varepsilon}(-2iz)\right\}-(-1)^n\left\{e^{\frac{1}{2}\left(-n-\varepsilon+\frac{1}{2}\right)\pi i}W_{0,\,n+\varepsilon}(2iz)+\right.$$
$$\left.\left.+e^{-\frac{1}{2}\left(-n-\varepsilon+\frac{1}{2}\right)\pi i}W_{0,\,n+\varepsilon}(-2iz)\right\}\right],$$

если вспомним, что $W_{k,m}=W_{k,-m}$.

Отсюда, так как[1] $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}W_{0,\,n+\varepsilon}(2iz)=W_{0,\,n}(2iz)$, находим

$$\mathrm{Y}_n(z)=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{e^{\left(\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\right)\pi i}W_{0,\,n}(2iz)+e^{-\left(\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\right)\pi i}W_{0,\,n}(-2iz)\right\}.$$

Эта функция (при n целом) будет, очевидно, решением уравнения Бесселя; она называется *функцией Бесселя второго рода.*

Вебером (Weber, Math. Ann., VI (1873), 148) и Шлефли (Schläfli, Ann. di Math. (2), VI (1875), 17) была введена другая функция (также называемая функцией Бесселя второго рода); она определяется равенством

$$Y_n(z)=\frac{J_n(z)\cos n\pi-J_{-n}(z)}{\sin n\pi}=\frac{\mathrm{Y}_n(z)\cos n\pi}{\pi e^{n\pi i}}$$

или пределами этих выражений, когда n — целое число.

Эта функция, существующая для *всех* значений n, принимается за каноническую функцию второго рода Нильсеном (Nilsen, Handbuch der Cylinderfunktionen (Leipzig, 1904)), и формулы, содержащие ее, обычно (но не всегда) проще, чем соответственные формулы, содержащие функцию Ханкеля.

Асимптотическое разложение для функции $Y_n(z)$, соответствующее разложению § 17.5 для функции $J_n(z)$, при $|\arg z|<\pi$ и n целом имеет вид

$$Y_n(z)\approx\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sin\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)U_n(z)+\right.$$
$$\left.+\cos\left(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi\right)V_n(z)\right],$$

где $U_n(z)$ и $V_n(z)$ — асимптотические разложения, определенные в § 17.5; их главные члены равны соответственно 1 и $\frac{4n^2-1}{8z}$.

[1] Это легче всего видеть из равномерной сходимости относительно ε контурного интеграла Барнса (§ 16.4) для функции $W_{0,\,n+\varepsilon}(2iz)$.

Пример 1. Доказать, что

$$Y_n(z)=\frac{dJ_n(z)}{dn}-(-1)^n\frac{dJ_{-n}(z)}{dn},$$

где n после дифференцирования приравнивается целому числу.

(Hanke)

Пример 2. Показать, что если функция $Y_n(z)$ определяется равенством примера 1, то она является решением уравнения Бесселя, когда n — целое число.

17.61. Ряд для функции $Y_n(z)$ при малых z

Ряд § 17.6 пригоден для вычисления $Y_n(z)$, когда $|z|$ велик. Чтобы получить удобный ряд для малых значений $|z|$, отметим, что так как степенные ряды $J_{\pm(n+\varepsilon)}(z)$ являются равномерно сходящимися рядами аналитических функций [1]) от ε, то, разложив каждый член по степеням ε, можем и полученный двойной ряд расположить по степеням ε (§§ 5.3, 5.4, часть I).

Соответственно этому, чтобы получить $Y_n(z)$, следует просуммировать коэффициенты при первых степенях ε в членах рядов

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2r+\varepsilon}}{r!\,\Gamma(n+\varepsilon+r+1)}-(-1)^n\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n+2r-\varepsilon}}{r!\,\Gamma(-n-\varepsilon+r+1)}.$$

Далее, если s — положительное целое число или нуль, а t — отрицательное целое число, то будут иметь место следующие разложения по степеням ε:

$$\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+\varepsilon+2r}=\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2r}\left\{1+\varepsilon\lg\left(\frac{1}{2}z\right)+\ldots\right\},$$

$$\frac{1}{\Gamma(s+\varepsilon+1)}=\frac{1}{\Gamma(s+1)}\left\{1-\varepsilon\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)}+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(s+1)}\left\{1-\varepsilon\left(-\gamma+\sum_{m=1}^{s}m^{-1}\right)+\ldots\right\},$$

$$\frac{1}{\Gamma(t+\varepsilon+1)}=-\frac{\sin(t+\varepsilon)\pi}{\pi}\Gamma(-t-\varepsilon)=(-1)^{t+1}\varepsilon\Gamma(-t)+\ldots,$$

где γ — постоянная Эйлера (§ 12.1).

---

[1]) Доказательство этого предоставляется читателю.

Соответственно этому, собирая коэффициенты при ε, находим, что

$$\mathrm{Y}_n(z)=\lg\left(\frac{1}{2}z\right)\left[\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2r}}{r!\,\Gamma(n+r+1)}+(-1)^n\sum_{r=n}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n+2r}}{r!\,\Gamma(-n+r+1)}\right]+$$

$$+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2r}}{r!\,\Gamma(n+r+1)}\left(\gamma-\sum_{m=1}^{n+r}m^{-1}\right)+$$

$$+(-1)^n\sum_{r=n}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}r\right)^{-n+2r}}{r!\,\Gamma(-n+r+1)}\left(\gamma-\sum_{m=1}^{r-n}m^{-1}\right)+$$

$$+(-1)^n\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n+2r}}{r!}(-1)^{r-n+1}\Gamma(n-r)$$

и, таким образом,

$$\mathrm{Y}_n(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!}\left\{2\lg\left(\frac{1}{2}z\right)+2\gamma-\sum_{m=1}^{n+r}m^{-1}-\sum_{m=1}^{r}m^{-1}\right\}-$$

$$-\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n+2r}(n-r-1)!}{r!}.$$

Если n — целое число, то за основные решения[1]) уравнений Бесселя, регулярные вблизи $z=0$, можно принять $J_n(z)$ и $Y_n(z)$ или $\mathrm{Y}_n(z)$.

Карл Нейман[2]) принял за второе решение функцию $Y^{(n)}(z)$, определяемую равенством

$$Y^{(n)}(z)=\frac{1}{2}\mathrm{Y}_n(z)+J_n(z)(\lg 2-\gamma);$$

но $Y_n(z)$ и $\mathrm{Y}_n(z)$ более полезны для приложений в физике.

Пример 1. Показать, что $Y_n(z)$ удовлетворяют рекуррентным формулам

$$nY_n(z)=\frac{1}{2}z\{Y_{n+1}(z)+Y_{n-1}(z)\},$$

$$Y_n'(z)=\frac{1}{2}\{Y_{n-1}(z)-Y_{n+1}(z)\}.$$

---

[1]) Эйлер дал второе решение (содержащее логарифм) уравнения в частных случаях $n=0$, $n=1$, Inst. Calc. Int., II (Petersburg, 1769), 187, 233.

[2]) K. Neumann, Theorie der Bessel'schen Funktionen (Leipzig, 1867), 41.

Показать также, что функции Ханкеля $\mathrm{Y}_n(z)$ и функции Неймана $Y^{(n)}(z)$ удовлетворяют тем же самым рекуррентным формулам.

[Эти формулы совпадают с рекуррентными формулами для функций $J_n(z)$.]

Пример 2. Показать, что при $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$

$$\pi Y_n(z) = \int_0^{\pi} \sin(z\sin\theta - n\theta)\,d\theta - \int_0^{\infty} e^{-z\,\mathrm{sh}\,\theta}\left\{e^{n\theta} + (-1)^n e^{-n\theta}\right\} d\theta.$$

(Schläfli, Math. Ann., III)

Пример 3. Показать, что

$$Y^{(0)}(z) = J_0(z)\lg z + 2\left\{J_2(z) - \frac{1}{2}J_4(z) + \frac{1}{3}J_6(z) - \ldots\right\}.$$

17.7. Функции Бесселя с чисто мнимым аргументом

Функция[1])

$$I_n(z) = i^{-n}J_n(iz) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!}$$

часто встречается в различных отраслях прикладной математики; в этих приложениях z обычно положительное.

Нетрудно получить следующие формулы:

(I) $$I_{n-1}(z) - I_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} I_n(z).$$

(II) $$\frac{d}{dz}\{z^n I_n(z)\} = z^n I_{n-1}(z).$$

(III) $$\frac{d}{dz}\{z^{-n} I_n(z)\} = z^{-n} I_{n+1}(z).$$

(IV) $$\frac{d^2 I_n(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dI_n(z)}{dz} - \left(1 + \frac{n^2}{z^2}\right) I_n(z) = 0.$$

(V) Если $\mathrm{Re}\left(n + \frac{1}{2}\right) > 0$, то

$$I_n(z) = \frac{z^n}{2^n\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \mathrm{ch}(z\cos\varphi)\sin^{2n}\varphi\,d\varphi.$$

---

[1]) Это обозначение было введено Бассетом (Basset, Hydrodynamics, II (1888), 17); в 1886 г. он определил $I_n(z)$ как $i^n J_n(iz)$; см. Proc. Camb. Phil. Soc., VI (1889), 11.

(VI) Если $-\frac{3}{2}\pi < \arg z < \frac{1}{2}\pi$, то асимптотическое разложение функции $I_n(z)$ имеет вид

$$I_n(z) \approx \frac{e^z}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}}\left[1+\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r\frac{\{4n^2-1^2\}\{4n^2-3^2\}\ldots\{4n^2-(2r-1)^2\}}{r!\,2^{3r}z^r}\right]+$$
$$+\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}e^{-z}}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}}\left[1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\{4n^2-1^2\}\{4n^2-3^2\}\ldots\{4n^2-(2r-1)^2\}}{r!\,2^{3r}z^r}\right],$$

причем вторым рядом можно пренебречь при $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$. Легко видеть, что эта формула сохраняет силу в более широкой области $-\frac{3}{2}\pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi$, если заменить $e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}$ на $e^{\pm\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i}$, причем верхний или нижний знак берется в зависимости от того, будет ли $\arg z$ положительным или отрицательным.

17.71. Модифицированные функции Бесселя второго рода

Если n — положительное целое число или нуль, то $I_{-n}(z)=I_n(z)$; чтобы получить второе решение модифицированного уравнения Бесселя ((IV), § 17.7), определим [1]) функцию $K_n(z)$ для всех значений n равенством

$$K_n(z)=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}}\cos n\pi W_{0,n}(2z),$$

так что

$$K_n(z)=\frac{1}{2}\pi\{I_{-n}(z)-I_n(z)\}\operatorname{ctg} n\pi.$$

[1]) Обозначение $K_n(z)$ введено Бассетом в 1886 г., (Basset) Proc. Camb. Phil. Soc., VI (1889), 11, для функции, отличающейся от функции, определяемой сейчас, отсутствием множителя $\cos\pi n$; обозначение Бассета с тех пор применялось различными авторами, особенно Макдональдом (Macdonald). Цель включения множителя заключается в том, чтобы функции $I_n(z)$ и $K_n(z)$ удовлетворяли одним и тем же рекуррентным формулам. Позже Бассет (Basset, Hydrodynamics, II (1888), 19) стал обозначать через $K_n(z)$ несколько иную функцию, но этому обозначению не последовали другие авторы. Определение функции $K_n(z)$ для *целых* значений n, данное здесь, принадлежит Грэю и Мэтьюзу (Gray, Mathews, Bessel Fuctions, 68) и теперь общепринято (см. пример 40, стр. 229—230), но соответственное определение для нецелых значений имеет серьезный недостаток, заключающийся в том, что функция тождественно равняется нулю, когда $2n$ — нечетное целое число. Эта функция рассматривалась Риманом (Riemann, Ann. der Phys., XCV (1855), 130—139) и Ханкелем (Hankel, Math. Ann., I (1869), 498).

Независимо от того, будет ли n целым числом или нет, эта функция является решением модифицированного дифференциального уравнения Бесселя (IV); при $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$ она имеет для больших значений $|z|$ асимптотическое разложение

$$K_n(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \cos(n\pi) \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\{4n^2-1^2\}\{4n^2-3^2\}\ldots\{4n^2-(2r-1)^2\}}{r!\,2^{3r} z^r}\right].$$

Когда n — целое число, функция $K_n(z)$ определяется равенством

$$K_n(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2}\pi \{I_{-n-\varepsilon}(z) - I_{n+\varepsilon}(z)\} \operatorname{ctg} \pi\varepsilon,$$

которое дает (ср. § 17.61) ряд, удобный при малых значениях z:

$$K_n(z) = -\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2r}}{r!\,(n+r)!} \left\{\lg \frac{1}{2}z + \gamma - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n+r} m^{-1} - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{r} m^{-1}\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}z\right)^{-n+2r} \frac{(-1)^{n-r}(n-r-1)!}{r!}.$$

Пример. Показать, что $K_n(z)$ удовлетворяет тем же самым рекуррентным формулам, что и $I_n(z)$.

17.8. Разложение Неймана аналитической функции в ряд по коэффициентам Бесселя [1])

Рассмотрим теперь разложение произвольной функции $f(z)$, аналитической в области, содержащей начало координат, в ряд по коэффициентам Бесселя:

$$f(z) = \alpha_0 J_0(z) + \alpha_1 J_1(z) + \alpha_2 J_2(z) + \ldots,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ не зависят от z.

Допуская возможность разложений этого типа, рассмотрим сначала разложение выражения $\frac{1}{t-z}$; пусть оно будет

$$\frac{1}{t-z} = O_0(t) J_0(z) + 2O_1(t) J_1(z) + 2O_2(t) J_2(z) + \ldots,$$

где функции $O_n(t)$ от z не зависят.

Определим условия, которым должны удовлетворять функции $O_n(t)$, для того чтобы ряд справа был равномерно сходящимся рядом аналитических функций; этими условиями функции $O_n(t)$ будут вполне определены, и тогда

[1]) K. Neumann, Journ. für Math., LXVII (1867), 310; см. также Kapteyn, Ann. de l'École norm. sup. (3), X (1893), 106.

можно будет показать, что если $O_n(t)$ определены именно так, то ряд справа действительно сходится к сумме $\frac{1}{t-z}$ при $|z| < |t|$.

Так как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{t-z} = 0,$$

то мы имеем

$$O_0'(t)\, J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} O_n'(t)\, J_n(z) + O_0(t)\, J_0'(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} O_n(t)\, J_n'(z) \equiv 0,$$

так что, заменяя $2J_n'(z)$ на $J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)$, найдем

$$\{O_0'(t) + O_1(t)\}\, J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \{2O_n'(t) + O_{n+1}(t) - O_{n-1}(t)\}\, J_n(z) \equiv 0.$$

Соответственно этому последовательные функции $O_1(t)$, $O_2(t)$, $O_3(t)$, ... *определяются рекуррентными формулами*

$$O_1(t) = -O_0'(t), \quad O_{n+1}(t) = O_{n-1}(t) - 2O_n'(t),$$

а положив $z = 0$ в первоначальном разложении, мы увидим, что $O_0(t)$ *определяется равенством*

$$O_0(t) = \frac{1}{t}.$$

Эти формулы показывают, что $O_n(t)$ будет полиномом степени n относительно $\frac{1}{t}$.

Докажем теперь по индукции, что $O_n(t)$, определенная указанным образом, будет равна

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-tu}[\{u + \sqrt{u^2+1}\}^n + \{u - \sqrt{u^2+1}\}^n]\, du$$

при $\operatorname{Re} t > 0$. В самом деле, это выражение, очевидно, равно $O_0(t)$ или $O_1(t)$, когда n равно 0 или 1 соответственно; далее,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-tu}\{u \pm \sqrt{u^2+1}\}^{n-1}\, du - \frac{d}{dt}\int_0^{\infty} e^{-tu}\{u \pm \sqrt{u^2+1}\}^n\, du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-tu}\{u \pm \sqrt{u^2+1}\}^{n-1}\{1 + 2u^2 \pm 2u\sqrt{u^2+1}\}\, du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-tu}\{u \pm \sqrt{u^2+1}\}^{n+1}\, du,$$

откуда индукция становится очевидной.

Положив $u = \operatorname{sh}\theta$, мы видим, что соответственно тому, будет ли n четным или нечетным [1]),

$$\frac{1}{2}\left[\{u+\sqrt{u^2+1}\}^n+\{u-\sqrt{u^2+1}\}^n\right]=\genfrac{}{}{0pt}{}{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}} n\theta =$$

$$= 2^{n-1}\left\{\operatorname{sh}^n\theta+\frac{n(n-1)}{2(2n-2)}\operatorname{sh}^{n-2}\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-2)(2n-4)}\operatorname{sh}^{n-4}\theta+\ldots\right\},$$

а отсюда при $\operatorname{Re} t > 0$ имеем после интегрирования

$$O_n(t)=\frac{2^{n-1}n!}{t^{n+1}}\left\{1+\frac{t^2}{2(2n-2)}+\frac{t^4}{2\cdot 4(2n-2)(2n-4)}+\ldots\right\};$$

ряд заканчивается членом с t^n или t^{n-1}; теперь, будет ли $\operatorname{Re} t$ положительна или нет, $O_n(t)$ определена как полином относительно $\frac{1}{t}$, и таким образом, разложение, полученное для $O_n(t)$, равняется значению $O_n(t)$ для *всех* значений t.

Пример. Показать, что для всех значений t

$$O_n(t)=\frac{1}{2t^{n+1}}\int\limits_0^\infty e^{-x}\left[\{x+\sqrt{x^2+t^2}\}^n+\{x-\sqrt{x^2+t^2}\}^n\right]dx,$$

и убедиться в том, что выражение справа удовлетворяет рекуррентным формулам для $O_n(t)$.

§ 17.81. Доказательство разложения Неймана

Метод § 17.8 позволяет лишь определить коэффициенты в разложении Неймана функции $\frac{1}{t-z}$ в предположении, что разложение это существует и что произведенные операции законны.

Для доказательства справедливости этого разложения отметим, что

$$J_n(z)=\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{n!}\{1+\theta_n\},\quad O_n(t)=\frac{2^{n-1}n!}{t^{n+1}}\{1+\varphi_n\},$$

где $\theta_n \to 0$, $\varphi_n \to 0$, когда $n \to \infty$, при фиксированных z и t. Поэтому ряд

$$O_0(t)J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}O_n(t)J_n(z)\equiv F(z,\, t)$$

сравним с геометрической прогрессией, общий член которой равен $\frac{z^n}{t^{n+1}}$, а эта прогрессия абсолютно сходится при $|z|<|t|$. Таким

[1]) Hobson, Plane Trigonometry (1918), §§ 79, 264.

образом, разложение для $F(z, t)$ абсолютно сходится (§ 2.34, часть I) при тех же условиях.

Точно так же, если $|z| \leqslant r$, $|t| \geqslant R$, где $r < R$, то рассматриваемый ряд сравним с геометрической прогрессией, общий член которой равен $\frac{r^n}{R^{n+1}}$, и таким образом, разложение для $F(z, t)$ будет равномерно сходящимся во всей области $|z| \leqslant r$ и $|t| \geqslant R$ по § 3.34 части I. Отсюда, согласно § 5.3 части I, следует, что почленные дифференцирования допустимы, и мы получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right) F(z, t)=$$

$$=O_0'(t) J_0(z)+2 \sum_{n=1}^{\infty} O_n'(t) J_n(z)+O_0(t) J_0'(z)+2 \sum_{n=1}^{\infty} O_n(t) J_n'(z)=$$

$$=\left\{O_0'(t)+O_1(t)\right\} J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2 O_n'(t)+O_{n+1}(t)-O_{n-1}(t)\right\} J_n(z)=0$$

на основании рекуррентных формул.

Из

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right) F(z, t)=0$$

вытекает, что $F(z, t)$ может быть выражена как функция $t-z$, а из

$$F(0, t)=O_0(t)=\frac{1}{t}$$

следует, что

$$F(z, t)=\frac{1}{t-z}.$$

Итак, доказано, что

$$\frac{1}{t-z}=O_0(t) J_0(z)+2 \sum_{n=1}^{\infty} O_n(t) J_n(z)$$

при условии $|z|<|t|$.

Следовательно, если $f(z)$ — аналитическая функция при $|z| \leqslant r$, то имеем при $|z|<r$ (§ 4.7, часть I)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(t)}{t-z} dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i} \int f(t)\left\{O_0(t) J_0(z)+2 \sum_{n=1}^{\infty} O_n(t) J_n(z)\right\} dt=$$

$$=J_0(z) f(0)+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n(z)}{\pi i} \int O_n(t) f(t) dt,$$

где путем интегрирования служит окружность $|t| = r$; этим и устанавливается справедливость разложения Неймана, когда $|z| < r$, а $f(z)$ — аналитическая функция при $|z| \leqslant r$.

Пример 1. Показать, что

$$\cos z = J_0(z) - 2J_2(z) + 2J_4(z) - \ldots,$$
$$\sin z = 2J_1(z) - 2J_3(z) + 2J_5(z) - \ldots,$$

(K. Neumann)

Пример 2. Показать, что

$$\left(\frac{1}{2}z\right)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+2r)\cdot(n+r-1)!}{r!} J_{n+2r}(z).$$

(K. Neumann)

Пример 3. Показать, что при $|z| < |t|$

$$O_0(t)J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} O_n(t)J_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\int_0^{\infty} t^{-n-1}e^{-x}\{x+\sqrt{x^2+t^2}\}^n\,dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\{x+\sqrt{x^2+t^2}\}^n\,dx = \frac{1}{t}\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{zx}{t} - x\right)dx = \frac{1}{t-z}.$$

(Kapteyn)

17.82. Разложение Шлёмильха произвольной функции по функциям Бесселя нулевого порядка

Шлёмильх[1]) дал разложение совершенно другого характера, чем разложение Неймана. Его результат может быть выражен следующим образом.

Любая функция $f(x)$, имеющая непрерывную производную с ограниченной вариацией при всех значениях x в замкнутом промежутке $(0, \pi)$ *может быть разложена в ряд*

$$f(x) = a_0 + a_1J_0(x) + a_2J_0(2x) + \ldots,$$

сходящийся в этом промежутке, причем

$$a_0 = f(0) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f'(u\sin\theta)\,d\theta\,du,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u\cos nu \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f'(u\sin\theta)\,d\theta\,du \qquad (n > 0).$$

---

[1]) Schlömilch, Zs. für Math. und Phys., II (1857), 137—165. См. Chapmann, Quarterly Journ., XLIII (1912), 34—37.

Доказательство Шлёмильха, по существу, заключается в следующем. Пусть $F(x)$ — непрерывное решение интегрального уравнения

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} F(x\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Тогда (§ 11.81, часть I)

$$F(x)=f(0)+x\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f'(x\sin\theta)\,d\theta.$$

Для того чтобы получить разложение Шлёмильха, нужно только применить теорему Фурье к функции $F(x\sin\varphi)$. Таким образом, получим

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(u)\,du+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\cos nu\cos(nx\sin\varphi)\,F(u)\,du\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F(u)\,du+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\cos nuF(u)\,J_0(nx)\,du,$$

так как перестановка суммирования и интегрирования допустима согласно §§ 4.7 и 9.44 части I. В этом равенстве заменим $F(u)$ ее выражением через $f(u)$. Тогда найдем

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{f(0)+u\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f'(u\sin\theta)\,d\theta\right\}du+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}J_0(nx)\int_0^{\pi}\cos nu\left\{f(0)+u\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f'(u\sin\theta)\,d\theta\right\}du,$$

а это и дает разложение Шлёмильха.

Пример. Показать, что при $0\leqslant x\leqslant\pi$ сумма ряда

$$\frac{\pi^2}{4}-2\left\{J_0(x)+\frac{1}{9}J_0(3x)+\frac{1}{25}J_0(5x)+\ldots\right\}$$

равна x, но что при $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ эта сумма равна

$$x+2\pi\arccos(\pi x^{-1})-2\sqrt{x^2-\pi^2},$$

где $\arccos(\pi x^{-1})$ берется между 0 и $\frac{\pi}{3}$.

Найти сумму того же ряда, когда x лежит между 2π и 3π.

(Math. Trip., 1895)

17.9. Составление таблиц функций Бесселя

Ганзен (Hansen) применял для вычисления таблиц функций $J_n(x)$, которые приведены Ломмелем (Lommel) в «Studien über die Bessel'schen Funktionen», асимптотическое разложение (§ 17.5).

Мейсель (Meissel) составил таблицы $J_0(x)$ и $J_1(x)$ с 12 десятичными знаками от $x=0$ до $x=15{,}5$ (Abh. der Akad. zu Berlin (1888)). British Assoc. Report (1909), 33, содержит таблицы, по которым $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ могут быть вычисляемы при $x>10$.

Таблицы функций $J_{\frac{1}{3}}(x)$, $J_{\frac{2}{3}}(x)$, $J_{-\frac{1}{3}}(x)$, $J_{-\frac{2}{3}}(x)$ даны Дынником (Dinnik, Archiv der Math. und Phys., XVIII (1911), 337).

Таблицы для второго решения уравнения Бесселя даны следующими авторами: Смитом (B. A. Smith), Messenger, XXVI (1897), 98; Phil. Mag. (5), XLV (1898), 106; Олдисом (Aldis), Proc. Royal Soc., LXVI (1900), 32; Эйри (Airey), Phil. Mag. (6), XXII (1911), 658.

Для функций $I_n(x)$ составлены таблицы в British Assoc. Reports: (1889), 28; (1893), 223; (1896), 98; (1907), 94, а также Олдисом (Aldis), Proc. Royal Soc., LXIV (1899); Ишервудом (Isherwood), Proc. Manchester Lit. and Phil. Soc., XLVIII (1904) и Андингом (Anding) Sechsstellige Tafeln des Bessel'schen Funktionen imaginären Argumentes (Leipzig, 1911).

Таблицы функции $J_n(x\sqrt{i})$, применяемой в теории переменных токов в проводниках, даны в British Assoc. Reports, 1889, 1893, 1896 и 1912; Кельвином (Kelvin), Math. and Phys. Papers, III, 493; Олдисом (Aldis), Proc. Royal Soc., LXVI (1900), 32 и Сэвиджем (Savidge), Phil. Mag. (6), XIX (1910), 49.

Формулы для вычисления нулей функции $J_0(z)$ были даны Стоксом (Stokes), Camb. Phil. Trans., IX, а 40 первых нулей были табулированы Уилсоном и Пирсом (Willson, Peirce), Bull. American Math. Soc., III (1897), 153. Корни одного уравнения, содержащего функции Бесселя, были вычислены Калэне (Kalähne), Zeitschrift für Math. und Phys., LIV (1907), 55.

Несколько других таблиц, связанных с функциями Бесселя, даны в British Assoc. Reports, 1910—1914, а также у Янке и Эмде (Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959).

ЛИТЕРАТУРА

R. Lipschitz, Journ. für Math., LVI (1859), 189—196.
H. Hankel, Math. Ann., I (1869), 467—501.
K. Neumann, Theorie der Bessel'schen Funktionen (Leipzig, 1867).
E. Lommel, Studien über die Bessel'schen Funktionen (Leipzig, 1868). Math. Ann., III, IV.
H. E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen (Berlin, 1878).
R. Olbricht, Studien über die Kugel-und Cylinder-funktionen (Halle, 1887).
A. Sommerfeld, Math. Ann., XLVII (1896), 317—374.
N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen (Leipzig, 1904).
A. Gray and G. B. Mathews, A Treatise on Bessel Functions (London, 1895).
Русский перевод со второго издания: Э. Грей и Г. Б. Мэтьюз, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, ИЛ, 1953.
J. W. Nicholson, Quarterly Journ., XLII (1911), 216—224.
G. N. Watson, Theory of Bessel Functions (Cambridge, 1922).
Русский перевод со второго издания: Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.
Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции (ОНТИ, 1935).
Н. Н. Лебедев, Специальные функции и их приложения (Гостехиздат, 1953).
В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2 (Гостехиздат, 1956).

Примеры

1. Показать, что

$$\cos(z\sin\theta) = J_0(z) + 2J_2(z)\cos 2\theta + 2J_4(z)\cos 4\theta + \ldots,$$
$$\sin(z\sin\theta) = 2J_1(z)\sin\theta + 2J_3(z)\sin 3\theta + 2J_5(z)\sin 5\theta + \ldots$$

(K. Neumann)

2. Разлагая обе части равенств примера 1 по степеням $\sin\theta$, выразить z^n в виде ряда по коэффициентам Бесселя.

3. Перемножая разложения для

$$\exp\left\{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\} \quad\text{и}\quad \exp\left\{-\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\}$$

и собирая члены, не зависящие от t, показать, что

$$\{J_0(z)\}^2 + 2\{J_1(z)\}^2 + 2\{J_2(z)\}^2 + 2\{J_3(z)\}^2 + \ldots = 1.$$

Вывести отсюда, что для функции Бесселя целого порядка

$$|J_0(z)| \leqslant 1, \quad |J_n(z)| \leqslant 2^{-\frac{1}{2}} \qquad (n \geqslant 1),$$

когда z вещественно.

4. Показать, что если $J_m^k(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi 2^k\cos^k u\cos(mu - z\sin u)\,du$ (эта функция приводится к функции Бесселя целого порядка, когда k — нуль, а m — целое число), то

$$J_m^k(z) = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(\frac{1}{2}z\right)^p N_{-m,\,k,\,p},$$

где $N_{-m,\,k,\,p}$ — «число Коши», определяемое равенством

$$N_{-m,\,k,\,p} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-miu}(e^{iu}+e^{-iu})^k(e^{iu}-e^{-iu})^p\,du.$$

Показать, далее, что

$$J_m^k(z) = J_{m-1}^{k-1}(z) + J_{m+1}^{k-1}(z),$$
$$zJ_m^{k+2}(z) = 2mJ_m^{k+1}(z) - 2(k+1)\left\{J_{m-1}^k(z) - J_{m+1}^k(z)\right\}.$$

(Bourget, Journ. de Math. (2), VI)

5. Показать, что если v и M связаны уравнениями

$$M = E - e\sin E, \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E},$$

где

$$|e| < 1,$$

то

$$v = M + 2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e\right)^k J_m^k(me)\frac{1}{m}\sin mM,$$

где $J_m^k(z)$ определяется, как в примере 4.

(Bourget)

6. Доказать, что если m и n — целые числа, то

$$P_n^m(\cos\theta) = \frac{c_n^m}{r^n} J_m\left\{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z}\right\} z^n,$$

где $z = r\cos\theta$, $x^2 + y^2 = r^2\sin^2\theta$, а c_n^m не зависит от z.

(Math. Trip., 1893)

7. Показать, что решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{dy}{dz} + \left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(\frac{\psi''}{\psi'}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\psi^2 - \frac{4\nu^2-1}{4}\right)\left(\frac{\psi'}{\psi}\right)^2\right\} y = 0,$$

где φ и ψ — произвольные функции z, будет

$$y = \left(\frac{\varphi\psi}{\psi'}\right)^{\frac{1}{2}} \{AJ_\nu(\psi) + BJ_{-\nu}(\psi)\}.$$

8. Показать, что

$$J_1(x) + J_3(x) + J_5(x) + \ldots = \frac{1}{2}\left[J_0(x) + \int_0^x \{J_0(t) + J_1(t)\}\, dt - 1\right].$$

(Trinity, 1908)

9. Показать что

$$J_\mu(z) J_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\mu+\nu+2n+1)\left(\frac{1}{2}z\right)^{\mu+\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\mu+n+1)\,\Gamma(\nu+n+1)\,\Gamma(\mu+\nu+n+1)}$$

для всех значений μ и ν.

(Schläfli, Math. Ann., III (1871), 142 и Шёнгольцер (Schönholzer), Бернская диссертация, 1877).

10. Показать, что если n — положительное целое число и $m + 2n + 1$ положительно, то

$$(m-1)\int_0^x x^m J_{n+1}(x) J_{n-1}(x)\, dx = x^{m+1}\left\{J_{n+1}(x) J_{n-1}(x) - J_n^2(x)\right\} +$$
$$+ (m+1)\int_0^x x^m J_n^2(x)\, dx.$$

(Math. Trip., 1899)

11. Показать, что

$$J_3(z) + 3\frac{dJ_0(z)}{dz} + 4\frac{d^3J_0(z)}{dz^3} = 0.$$

12. Показать, что

$$\frac{J_{n+1}(z)}{J_n(z)} = \frac{\frac{1}{2}z}{n+1\,-}\;\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^2}{n+2\,-}\;\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^2}{n+3\,-}\;\cdots$$

— разложение в непрерывную дробь.

13. Показать, что

$$J_{-n}(z)\,J_{n-1}(z) + J_{-n+1}(z)\,J_n(z) = \frac{2\sin n\pi}{\pi z}.$$

(Lommel)

14. Пусть $Q_n(z)$ обозначает $\dfrac{J_{n+1}(z)}{zJ_n(z)}$; показать, что

$$\frac{dQ_n(z)}{dz} = \frac{1}{z} - \frac{2(n+1)}{z}\,Q_n(z) + z\,\{Q_n(z)\}^2.$$

15. Показать, что при $R^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\theta$ и $r_1 > r > 0$

$$J_0(R) = J_0(r)\,J_0(r_1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(r)\,J_n(r_1)\cos n\theta,$$

$$Y_0(R) = J_0(r)\,Y_0(r_1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n(r)\,Y_n(r_1)\cos n\theta.$$

(K. Neumann)

16. Показать, что при $\operatorname{Re}\left(n+\frac{1}{2}\right) > 0$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_{2n}(2z\cos\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\pi\,\{J_n(z)\}^2.$$

(K. Neumann)

17. Показать, как выразить $z^{2n}J_{2n}(z)$ в форме $AJ_2(z) + BJ_0(z)$, где A и B — полиномы от z, и доказать, что

$$J_4\left(6^{\frac{1}{2}}\right) + 3J_0\left(6^{\frac{1}{2}}\right) = 0, \quad 3J_6\left(30^{\frac{1}{2}}\right) + 5J_2\left(30^{\frac{1}{2}}\right) = 0.$$

(Math. Trip., 1896)

18. Показать, что при $\alpha \neq \beta$ и $n > -1$

$$(\alpha^2 - \beta^2)\int_0^x xJ_n(\alpha x)\,J_n(\beta x)\,dx = x\left\{J_n(\alpha x)\frac{d}{dx}J_n(\beta x) - J_n(\beta x)\frac{d}{dx}J_n(\alpha x)\right\},$$

$$2\alpha^2\int_0^x x\,\{J_n(\alpha x)\}^2\,dx = (\alpha^2x^2 - n^2)\,\{J_n(\alpha x)\}^2 + \left\{x\frac{d}{dx}J_n(\alpha x)\right\}^2.$$

19. Доказать, что если $n > -1$ и $J_n(\alpha) = J_n(\beta) = 0$ при $\alpha \neq \beta$, то

$$\int_0^1 xJ_n(\alpha x)\,J_n(\beta x)\,dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 x\,\{J_n(\alpha x)\}^2\,dx = \frac{1}{2}\,\{J_{n+1}(\alpha)\}^2.$$

Отсюда вывести, что при $n > -1$ все корни уравнения $J_n(x) = 0$, отличные от нуля, вещественны и различны.

[Допустив, что α комплексное, принять за β сопряженное комплексное число].

(Lommel, Studien über die Bessel'schen Funktionen, 69)

20. Пусть функция $x^{\frac{1}{2}} f(x)$ абсолютно интегрируема в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$; пусть H — вещественная постоянная, и пусть $n \geqslant 0$. Показать, что если $k_1, k_2, \ldots$ — положительные корни уравнения

$$k^{-n}\left\{kJ'_n(k) + HJ_n(k)\right\} = 0,$$

то в любой точке x промежутка $0 < x < 1$, в которой $f(x)$ удовлетворяет одному из условий § 9.43 части I, $f(x)$ может быть разложена в ряд:

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} A_r J_n(k_r x),$$

где

$$A_r = \left[\int_0^1 x\,\{J_n(k_r x)\}^2\,dx\right]^{-1} \int_0^1 x f(x)\,J_n(k_r x)\,dx.$$

В частном случае, когда $H = -n$, следует считать k_1 равным нулю; уравнение, определяющее $k_1, k_2, \ldots$, будет $J_{n+1}(k) = 0$, а первый член разложения будет $A_0 x^n$, где

$$A_0 = (2n+2)\int_0^1 x^{n+1} f(x)\,dx.$$

Рассмотреть, в частности, случай, когда H бесконечно, так что $J_n(k) = 0$, и показать, что тогда

$$A_r = 2\,\{J_{n+1}(k_r)\}^{-2}\int_0^1 x f(x)\,J_n(k_r x)\,dx.$$

[Этот результат принадлежит Гобсону (Hobson), Proc. London Math. Soc. (2), VII (1909), 349; см. также W. H. Young, Proc. London Math. Soc. (2), XVIII (1920), 163—200. Формальное разложение при H бесконечном (когда $n = 0$) было дано Фурье и (для любых значений n) Ломмелем; доказательства были даны Ханкелем и Шлефли. Формула при $H = -n$ была дана Дини (Dini, Serie di Fourier (Pisa, 1880)) с ошибкой: член $A_0 x^n$ отпечатан как A_0, и эта ошибка не была исправлена Нильсеном. См. Bridgeman, Phil. Mag., (6), XVI (1908), 947 и Chree, Phil. Mag., (6), XVII (1909), 330. Рассматриваемое разложение обычно называется *разложением Фурье — Бесселя*].

21. Доказать, что если разложение

$$a^2 - x^2 = A_1 J_0(\lambda_1 x) + A_2 J_0(\lambda_2 x) + \ldots$$

имеет место, как равномерно сходящийся ряд при $-a \leqslant x \leqslant a$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_0(\lambda a) = 0$, то

$$A_n = 8\left\{a\lambda_n^3 J_1(\lambda_n a)\right\}^{-1}.$$

(Clare, 1900)

22. Если $k_1, k_2, \ldots$ — положительные корни уравнения $J_n(ka) = 0$ и если

$$x^{n+2} = \sum_{r=1}^{\infty} A_r J_n(k_r x),$$

причем этот ряд равномерно сходится при $0 \leqslant x \leqslant a$, то

$$A_r = \frac{2a^{n-1}}{k_r^2}\left(4n+4-a^2k_r^2\right)\Big/\frac{dJ_n(k_r a)}{da}.$$

(Math. Trip., 1906)

23. Показать, что

$$J_n(x) = \frac{x^{n-m}}{2^{n-m-1}\,\Gamma(n-m)} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} J_m(x\sin\theta)\cos^{2n-2m-1}\theta\,\sin^{m+1}\theta\,d\theta,$$

когда $n > m > -1$.

(Сонин, Math. Ann., XVI)

24. Показать, что при $\sigma > 0$

$$\int\limits_0^{\infty} \cos(t^3 - \sigma t)\,dt = \frac{\pi\sigma^{\frac{1}{2}}}{3\sqrt{3}}\left\{J_{\frac{1}{3}}\left(2\sigma^{\frac{3}{2}}/3^{\frac{3}{2}}\right) + J_{-\frac{1}{3}}\left(2\sigma^{\frac{3}{2}}/3^{\frac{3}{2}}\right)\right\}.$$

(Nicholson, Phil. Mag. (6), XVIII (1909), 6)

25. При целом положительном m и $u > 0$ вывести из интеграла Бесселя формулу

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x\,\mathrm{sh}\,u} J_m(x)\,dx = e^{-mu}\,\mathrm{sech}\,u.$$

(Math. Trip., 1904)

26. Доказать, что при $x > 0$

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \sin(x\,\mathrm{ch}\,t)\,dt, \quad Y_0(x) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \cos(x\,\mathrm{ch}\,t)\,dt.$$

[Считать, что контур § 17.1 состоит из отрезка мнимой оси с вырезом в начале координат и из полуокружности слева от мнимой оси с центром в начале.]

(Сонин, Math. Ann., XVI)

27. Показать, что

$$\int\limits_0^{\infty} x^{-1} J_0(xt)\sin x\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi, & 0 < t < 1, \\ \operatorname{arc\,cosec} t, & t > 1, \end{cases}$$

и

$$\int\limits_0^{\infty} x^{-1} J_1(xt)\sin x\,dx = \begin{cases} t^{-1}\left\{1 - (1-t^2)^{\frac{1}{2}}\right\}; & 0 < t < 1, \\ t^{-1}, & t > 1. \end{cases}$$

(Weber, Journ. für Math., LXXV)

28. Показать, что интеграл

$$u = \int_0^\pi e^{nr\cos\theta} \{A + B \lg(r \sin^2\theta)\}\, d\theta$$

является решением уравнения

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - n^2u = 0.$$

(Poisson, Journ. de l'École polytechnique, XII (1823), 476; см. также Stokes, Camb. Phyl. Trans., IX (1856), 38)

29. Доказать, что не существует соотношения вида

$$\sum_{s=0}^{k} N_s J_{n+s}(x) = 0$$

для рациональных значений N_s, n и x, за исключением таких, которые удовлетворяются, когда функции Бесселя заменяются произвольными решениями рекуррентного соотношения § 17.21 (A).

(Math. Trip., 1901)

[Выразить левую часть через функции $J_n(x)$ и $J_{n+1}(x)$ и показать при помощи примера 12, что $\frac{J_{n+1}(x)}{J_n(x)}$ будет иррациональным, когда n и x рациональны.]

30. Доказать, что при $\operatorname{Re} n > -\frac{1}{2}$

$$J_n(z) = \frac{z^n}{2^{n-1}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(1 + \frac{d^2}{dz^2}\right)^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin z}{z}\right),$$

$$-Y_n(z) = \frac{z^n}{2^{n-1}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(1 + \frac{d^2}{dz^2}\right)^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{\cos z}{z}\right).$$

[Здесь $\left(1 + \frac{d^2}{dz^2}\right)^{n-\frac{1}{2}}$ обозначает оператор

$$1 + \frac{n-\frac{1}{2}}{1!}\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)}{2!}\frac{d^4}{dz^4} + \ldots$$

Для доказательства принять во внимание, что

$$\frac{e^{iz}}{z} = \int_{\infty i}^{1} ie^{izt}\, dt.]$$

(Hargreave, Phil. Trans. (1848); Macdonald, Proc. London Math. Soc., XXIX)

31. Показать, что при $\operatorname{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right)>0$ имеет место равенство

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} J_m(z\sin\theta)\sin^{m+1}\theta\,d\theta = z^{-\frac{1}{2}} J_{m+\frac{1}{2}}(z).$$

(Hobson)

32. Показать, что при $2n+1>m>-1$

$$\int\limits_0^1 x^{-n+m} J_n(ax)\,dx = 2^{-n+m} a^{n-m-1}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\right)}.$$

(Weber, Journ. für Math., LXIX; Math. Trip., 1898)

33. Показать, что

$$\frac{z}{\pi}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{2p+1}{2}\left\{J_{p+\frac{1}{2}}(z)\right\}^2.$$

(Lommel)

34. В уравнении

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1+\frac{n^2}{z^2}\right)y=0$$

n вещественно; показать, что одним из решений этого уравнения будет функция

$$\cos(n\lg z)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}\cos(u_m-n\lg z)}{2^{2m}m!\,(1+n^2)^{\frac{1}{2}}(4+n^2)^{\frac{1}{2}}\ldots(m^2+n^2)^{\frac{1}{2}}},$$

где u_m обозначает сумму $\sum\limits_{r=1}^{m}\operatorname{arctg}\left(\frac{n}{r}\right)$.

(Math. Trip., 1894)

35. Показать, что при n большом и положительном

$$J_n(n)=2^{-\frac{2}{3}}3^{-\frac{1}{6}}\pi^{-1}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)n^{-\frac{1}{3}}+o(n^{-1}).$$

(Cauchy, Comptes Rendus, XXXVIII (1854), 993; Nicholson, Phil. Mag. (6), XVI (1908), 276)

36. Показать, что

$$K_0(x)=\int\limits_0^{\infty}\frac{tJ_0(tx)}{1+t^2}\,dt.$$

(Mehler, Journ. für Math., LXVIII)

37. Показать, что

$$e^{\lambda\cos\theta} = 2^{n-1}\Gamma(n)\sum_{k=0}^{\infty}(n+k)\,C_k^n(\cos\theta)\,\lambda^{-n}I_{n+k}(\lambda).$$

(Math. Trip., 1900)

38. Показать, что если

$$W = \int_0^{\infty} J_m(ax)\,J_m(bx)\,J_m(cx)\,x^{1-m}\,dx,$$

где a, b, c — положительные, а m — положительное целое число или нуль, то

$W = 0$ при $(a-b)^2 > c^2$,

$$W = \frac{a^{-m}b^{-m}c^{-m}}{2^{3m-1}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left\{2\sum b^2c^2 - \sum a^4\right\}^{m-\frac{1}{2}} \text{ при } (a+b)^2 > c^2 > (a-b)^2$$

$W = 0$ при $(a+b)^2 > c^2$.

(Сонин, Math. Ann., XVI)

39. Показать, что если $n > -1$, $m > -\frac{1}{2}$ и

$$W = \int_0^{\infty} J_n(ax)\,J_n(bx)\,J_m(cx)\,x^{1-m}\,dx,$$

где a, b, c положительны, то

$W = 0$ при $(a-b)^2 > c^2$,

$$W = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}a^{m-1}b^{m-1}c^{-m}(1-\mu^2)^{\frac{1}{4}(2m-1)}P_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-m}(\mu)$$

при $(a+b)^2 > c^2 > (a-b)^2$,

$$W = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{-\frac{1}{2}}a^{m-1}b^{m-1}c^{-m}\frac{\sin(m-n)\pi}{\pi}e^{\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi i}\left(\mu_1^2-1\right)^{\frac{1}{4}(2m-1)}Q_{n-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-m}(\mu_1)$$

при $c^2 > (a+b)^2$,

где

$$\mu = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \quad \mu_1 = -\mu.$$

(Macdonald, Proc. London Math. Soc. (2), VII)

40. Показать, что при $\mathrm{Re}\left(m+\frac{1}{2}\right) > 0$

$$I_m(z) = \frac{z^m}{2^m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\operatorname{ch}(z\cos\varphi)\sin^{2m}\varphi\,d\varphi$$

и при $|\arg z| < \frac{1}{2}\pi$

$$K_m(z) = \frac{z^m \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cos m\pi}{2^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} \varphi} \operatorname{sh}^{2m} \varphi \, d\varphi.$$

Доказать также, что

$$K_m(z) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^m z^m \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) \cos m\pi \int_0^\infty (u^2+z^2)^{-m-\frac{1}{2}} \cos u \, du.$$

(Math. Trip., 1898; Basset, Proc. Camb. Phil. Soc., VI)

[Первый интеграл может быть получен разложением по степеням z и почленным интегрированием полученного ряда. Чтобы получить второй интеграл, рассмотрим выражение

$$z^m \int_\infty^{(1+,\,-1+)} e^{-zt} (t^2-1)^{m-\frac{1}{2}} dt,$$

где в исходном положении $\arg(t-1) = \arg(t+1) = 0$; возьмем $|t| > 1$ на контуре, разложим $(t^2-1)^{m-\frac{1}{2}}$ в ряд по убывающим степеням t и проинтегрируем почленно. В результате получим

$$2ie^{2m\pi i} \sin(2m\pi)\, \Gamma(2m)\, 2^{-m} \Gamma(1-m)\, I_{-m}(z).$$

При стягивании же контура интеграл принимает вид

$$2ie^{2m\pi i} z^m \sin 2m\pi \int_1^\infty e^{-zt} (t^2-1)^{m-\frac{1}{2}} dt + 2ie^{2m\pi i} z^m \cos m\pi \int_{-1}^1 e^{-zt} (1-t^2)^{m-\frac{1}{2}} dt;$$

поэтому

$$I_{-m}(z) - I_m(z) = \frac{2^{1-m} \sin(m\pi)\, z^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \int_1^\infty e^{-zt} (t^2-1)^{m-\frac{1}{2}} dt.\Big]$$

41. Показать, что $O_n(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 O_n(z)}{dz^2} + \frac{3}{z} \frac{dO_n(z)}{dz} + \left\{1 - \frac{n^2-1}{z^2}\right\} O_n(z) = g_n,$$

где $g_n = z^{-1}$ (когда n четное), $g_n = nz^{-2}$ (когда n нечетное).

(K. Neumann)

42. Считая $f(z)$ аналитической функцией в кольце, ограниченном окружностями c, C с центрами в начале, получить разложение

$$f(z) = \frac{1}{2} \alpha_0 J_0(z) + \alpha_1 J_1(z) + \alpha_2 J_2(z) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2} \beta_0 O_0(z) + \beta_1 O_1(z) + \beta_2 O_2(z) + \ldots,$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi i} \int\limits_C f(t)\, O_n(t)\, dt, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi i} \int\limits_c f(t)\, J_n(t)\, dt.$$

(K. Neumann)

43. Показать, что при положительных x и y

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\beta x}}{\beta} J_0(ky)\, k\, dk = \frac{e^{-ir}}{r},$$

где $r = +\sqrt{x^2+y^2}$ и $\beta = +\sqrt{k^2-1}$ или $i\sqrt{1-k^2}$, смотря по тому, будет ли $k > 1$ или $k < 1$.

(Math. Trip., 1905)

44. Показать, что при известных ограничениях, налагаемых на число n и на вид функции $f(x)$, справедлива формула

$$f(x) = \int\limits_0^\infty J_n(tx)\, t \left\{ \int\limits_0^\infty f(x')\, J_n(tx')\, x'\, dx' \right\} dt.$$

[Доказательство этой важной теоремы и исторические сведения о ней можно найти у Нильсена (Nielsen, Cylinderfunktionen, 360—363). Эта формула принадлежит Ханкелю, но (по аналогии с результатом § 9.7 части I) ее часто называют *интегралом Фурье — Бесселя*.]

45. Показать, что если C — какой-нибудь замкнутый контур и m, n — целые числа, то всегда имеют место равенства

$$\int\limits_C J_m(z)\, J_n(z)\, dt = \int\limits_C O_m(z)\, O_n(z)\, dz = \int\limits_C J_m(z)\, O_n(z)\, dz = 0,$$

кроме случая, когда начало координат лежит внутри контура C и $m = n$; в этом последнем случае первые два интеграла все еще остаются равными нулю, третий же будет равен πi (или $2\pi i$, если $m = 0$), если C обходит начало координат один раз в направлении против часовой стрелки.

(K. Neumann)

46. Показать, что если принять обозначение

$$\frac{(-1)^p}{p!\, q!} = \alpha_{p,q}$$

и если n — положительное целое число, то

$$z^{-2n} = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{n-m,\, n+m-1} O_{2m-1}(z),$$

а

$$z^{1-2n} = \alpha_{n-1,\, n-1} O_0(z) + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \alpha_{n-m-1,\, n+m-1} O_{2m}(z).$$

(K. Neumann)

47. Обозначив

$$\Omega_n(y) = \sum_{m=0}^{n} \frac{2^{2m}(m!)^2}{2m!} \frac{n^2\{n^2-1^2\}\{n^2-2^2\}\ldots\{n^2-(m-1)^2\}}{y^{2m+2}},$$

доказать справедливость равенства

$$(y^2-x^2)^{-1} = \Omega_0(y)\{J_0(x)\}^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_n(y)\{J_n(x)\}^2$$

когда ряд в правой части сходится.

(K. Neumann, Math. Ann., III)

48. Показать, что при $c>0$, $\operatorname{Re} n > -1$ и $\operatorname{Re}(a\pm b)^2>0$

$$J_n(a)J_n(b) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} t^{-1}\exp\left\{\frac{t^2-a^2-b^2}{2t}\right\} I_n\left(\frac{ab}{t}\right)dt.$$

(Macdonald, Proc. London Math. Soc., XXXII)

49. Исходя из примера 48 или каким-либо другим образом доказать, что

$$(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{-\frac{1}{2}n} J_n\left\{(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^{\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$= 2^n\Gamma(n)\sum_{m=0}^{\infty}(m+n)a^{-n}b^{-n}J_{m+n}(a)J_{m+n}(b)C_m^n(\cos\theta).$$

(Gegenbauer, Wiener Sitzungsberichte, LXIX, LXXIV)

50. Показать, что функция

$$y = \int_C J_m(t)J_n(tz^{\frac{1}{2}})\, t^{k-1}\,dt$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{1}{z}+\frac{k}{z-1}\right)\frac{dy}{dz} + \left(k^2-m^2+\frac{n^2}{z}\right)\frac{y}{4z(z-1)} = 0$$

при условии, что выражение

$$kt^kJ_m(t)J_n\left(tz^{\frac{1}{2}}\right) - t^{k+1}J_m'(t)J_n(tz^{\frac{1}{2}}) + z^{\frac{1}{2}}t^{k+1}J_m(t)J_n\left(tz^{\frac{1}{2}}\right)$$

принимает первоначальное значение после обхода контура.

Вывести отсюда, что при $0<z<1$

$$\int_0^{\infty} J_{\alpha-\beta}(t)J_{\gamma-1}(tz^{\frac{1}{2}})\, t^{\alpha+\beta-\gamma}\,dt = \frac{\Gamma(\alpha)\,z^{\frac{1}{2}(\gamma-1)}}{2^{\gamma-\alpha-\beta}\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma)} F(\alpha,\beta;\gamma;z).$$

(Schafheitlin, Math. Ann., XXX; Math. Trip., 1903)

ГЛАВА 18

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

18.1. Дифференциальные уравнения математической физики

Функции, рассмотренные в предыдущих главах, имеют большое значение в приложениях математики к вопросам физики. Подобные приложения не входят в задачи настоящей книги, но большинство из них существенно основано на том, что при помощи этих функций можно составить решения определенных дифференциальных уравнений с частными производными. Наиболее важными из таких дифференциальных уравнений являются следующие.

(I) *Уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

которое впервые встречается в мемуаре [1]) о кольцах Сатурна.

Если (x, y, z) — прямоугольные координаты какой-либо точки в пространстве, то этому уравнению удовлетворяют следующие функции, встречающиеся в различных областях математической физики:

(I) потенциал тяготения в областях, не занятых притягивающей материей;

(II) электростатический потенциал в однородном диэлектрике, рассматриваемый в электростатике;

(III) магнитный потенциал в свободном эфире, встречающийся в магнетостатике;

(IV) электрический потенциал в теории установившихся электрических токов в трехмерных проводниках;

(V) температура в теории теплового равновесия тел;

(VI) потенциал скоростей безвихревого движения однородной жидкости, рассматриваемый в гидродинамике.

Несмотря на физическое различие этих теорий, математическое исследование всех их почти одинаково: так, например, задача теплового равновесия тела, когда точки его поверхности поддерживаются при заданных температурах, математически тождественна проблеме определения электрического напряжения в области, когда точки границы этой области поддерживаются при заданных потенциалах.

---

[1]) Mém. de l'Acad. des Sciences, 1787 (опубликовано в 1789 г.), 252.

(II) *Волновое уравнение*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

Это уравнение встречается главным образом в исследованиях волнообразного возмущения, распространяющегося со скоростью c, не зависящей от длины волны. Например, в теории электрических волн и в электромагнитной теории света рассматриваемому уравнению удовлетворяет каждая компонента электрического или магнитного вектора; в теории упругих колебаний этому уравнению удовлетворяет каждая компонента смещения; наконец, в акустике волновому уравнению удовлетворяет потенциал скоростей в идеальном газе.

(III) *Уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Этому уравиению удовлетворяет температура в точке однородного изотропного тела; постоянная k пропорциональна его теплопроводности и обратно пропорциональна теплоемкости и плотности.

(IV) *Частным случаем предыдущего уравнения* (II), *когда отсутствует переменная* z, *является уравнение*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

Этому уравнению удовлетворяет смещение в теории поперечных колебаний мембраны; оно встречается и в теории волнового движения в двумерном пространстве.

(V) *Телеграфное уравнение*

$$LK\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+KR\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Этому уравнению удовлетворяет потенциал в телеграфном кабеле, когда принимается во внимание индуктивность L, емкость K и сопротивление R на единицу длины.

Было бы невозможно в пределах этой главы претендовать на исчерпывающий обзор теории этих и других дифференциальных уравнений математической физики; но, рассматривая избранные типичные случаи, мы разъясним некоторые из наиболее употребительных методов решения этих уравнений, уделяя особое внимание применению трансцендентных функций.

18.2. Граничные условия

Весьма часто возникает задача нахождения для одного из уравнений § 18.1 такого решения, которое подчиняется определенным граничным условиям. Так, мы можем пожелать найти температуру в какой-нибудь точке внутри однородного изотропного проводящего тепло тела, находящегося в тепловом равновесии, когда точки поверхности тела поддерживаются при заданных температурах. Эта задача сводится к нахождению решения уравнения Лапласа в точках внутри заданной поверхности, когда заданы значения решения в точках на поверхности.

Более сложная задача подобного характера встречается при рассмотрении малых колебаний жидкости в сосуде, подверженной атмосферному давлению. Действительно, в этой проблеме нам заданы потенциал скоростей в точках свободной поверхности и нормальная производная потенциала скоростей в точках соприкосновения жидкости с сосудом.

Характер граничных условий, необходимых для единственности решения, весьма сильно изменяется в зависимости от формы рассматриваемого дифференциального уравнения, даже в случае уравнений, которые на первый взгляд весьма похожи друг на друга. Так, решение уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

(которое встречается в задаче теплового равновесия для цилиндра) определяется однозначно в точках внутри замкнутой кривой в плоскости xy по значению функции V в точках кривой. Но в случае уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0$$

(которое отличается от прежнего собственно только изменением знака), встречающегося в вопросе о поперечных колебаниях натянутой струны, где V обозначает смещение в момент t точки, находящейся на расстоянии x от начала струны, физически ясно, что решение однозначно определено только в том случае, когда для всех значений x из промежутка $0 \leqslant x \leqslant l$ (l означает длину струны) при $t=0$ заданы и V, и $\frac{\partial V}{\partial t}$.

Физическая интуиция обычно подсказывает характер граничных условий, необходимых для единственности решения дифференциального уравнения. Теоремы же существования, которые необходимы с точки зрения чистой математики, обычно очень утомительны и трудны [1]).

[1]) См., например, Forsyth, Theory of Functions (1918), §§ 216—220, где рассматривается задача, кажущаяся довольно простой.

18.3. Общее решение уравнения Лапласа[1])

Общее решение уравнения Лапласа можно построить в виде определенного интеграла. Это решение может быть применено для решения различных задач, в которые входят граничные условия.

Пусть $V(x, y, z)$ есть решение уравнения Лапласа, допускающее разложение в степенной ряд с тремя переменными, годное в точках (x, y, z), достаточно близких к данной точке (x_0, y_0, z_0).

Положим

$$x = x_0 + X, \quad y = y_0 + Y, \quad z = z_0 + Z,$$

и пусть это разложение имеет вид

$$V = a_0 + a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + a_2 X^2 + b_2 Y^2 + c_2 Z^2 + \\ + 2d_2 YZ + 2e_2 ZX + 2f_2 XY + \ldots,$$

причем предположим, что ряд абсолютно сходится, когда

$$|X|^2 + |Y|^2 + |Z|^2 \leqslant a,$$

где a — некоторая положительная постоянная[2]). Если это разложение имеет место, то говорят, что функция V — аналитическая в точке (x_0, y_0, z_0). Методами §§ 3.7, 4.7 части I можно доказать, что этот ряд будет равномерно сходящимся во всей указанной области и может быть почленно дифференцируем по X, Y, Z любое число раз в точках внутри области.

Если подставить это разложение в уравнение Лапласа, которое можно написать в виде

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0,$$

и приравнять нулю (§ 3.73, часть I) коэффициенты членов различных степеней относительно X, Y и Z, то мы получим бесконечное число линейных соотношений между коэффициентами, как, например,

$$a_2 + b_2 + c_2 = 0.$$

Таких соотношений между $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ коэффициентами при членах степени n в разложении функции V будет $\frac{1}{2} n(n-1)$[3]), так

---

[1]) Whittaker, Math. Ann., LVII (1902), 333.

[2]) Функции, встречающиеся в приложениях, удовлетворяют этому условию.

[3]) Если $a_{r,s,t}$ (где $r+s+t=n$) есть коэффициент при $X^r Y^s Z^t$ в разложении V и если члены степени $n-2$ в $\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}$ расположены в группы по степеням X и в каждой группе по степеням Y, то коэффициент $a_{r,s,t}$ не встретится ни в одном члене, следующем за $X^{r-2} Y^s Z^t$ (или за $X^{r-1} Y^{s-1} Z^t$, если $r = 1$, или за $X^r Y^{s-2} Z^t$, если $r = 0$). Отсюда следует, что все соотношения линейно независимы.

что имеется только $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)-\frac{1}{2}n(n-1)=2n+1$ независимых коэффициентов при членах степени n в разложении V. Следовательно, члены степени n в разложении V должны быть линейной комбинацией $2n+1$ линейно независимых частных решений уравнения Лапласа, причем каждое из этих решений будет степени n относительно X, Y и Z.

Чтобы найти совокупность таких решений, рассмотрим выражение $(Z+iX\cos u+iY\sin u)^n$. Это выражение есть решение уравнения Лапласа, допускающее разложение в ряд по синусам и косинусам аргументов, кратных u, имеющее вид

$$\sum_{m=0}^{n} g_m(X, Y, Z)\cos mu+\sum_{m=1}^{n} h_m(X, Y, Z)\sin mu,$$

причем функции $g_m(X, Y, Z)$ и $h_m(X, Y, Z)$ не зависят от u.

Наивысшая степень Z в функциях $g_m(X, Y, Z)$ и $h_m(X, Y, Z)$ есть Z^{n-m}, причем первая функция четная относительно Y, а вторая нечетная. Отсюда следует, что эти функции линейно независимы, а потому они образуют совокупность $2n+1$ функций искомого типа.

Но по формулам для коэффициентов Фурье[1]) (§ 9.12, часть I) имеем

$$\pi g_m(X, Y, Z)=\int_{-\pi}^{\pi}(Z+iX\cos u+iY\sin u)^n\cos mu\,du,$$

$$\pi h_m(X, Y, Z)=\int_{-\pi}^{\pi}(Z+iX\cos u+iY\sin u)^n\sin mu\,du.$$

Поэтому любая линейная комбинация этих $2n+1$ решений может быть написана в виде

$$\int_{-\pi}^{\pi}(Z+iX\cos u+iY\sin u)^n f_n(u)\,du,$$

где $f_n(u)$ — полином от e^{iu}.

Легко теперь убедиться в том, что если суммы членов степени n в выражении, принятом для V, написать в этом виде, то ряд, составленный из подинтегральных функций, будет равномерно сходящимся, если $|X|^2+|Y|^2+|Z|^2$ достаточно мало. Поэтому (§ 4.7, часть I) мы можем написать

$$V=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(Z+iX\cos u+iY\sin u)^n f_n(u)\,du.$$

[1]) В коэффициенте при $g_0(X, Y, Z)$ следует писать 2π вместо π.

Но выражение этого вида может быть написано так:

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} F(Z + iX\cos u + iY\sin u,\ u)\,du,$$

где F — такая функция, что допустимо дифференцирование по X, Y и Z под знаком интеграла. Наоборот, если F — какая-нибудь функция такого типа, то V будет решением уравнения Лапласа.

Полученный результат может быть написан в виде

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} f(z + ix\cos u + iy\sin u,\ u)\,du,$$

если отнести члены $-z_0 - ix_0\cos u - iy_0\sin u$ во вторую переменную; если дифференцирование под знаком интеграла допустимо, то это выражение дает общее решение уравнения Лапласа в том смысле, что всякое решение уравнения Лапласа, аналитическое внутри некоторой сферы, может быть выражено интегралом указанного вида.

Этот результат представляет собой трехмерный аналог теоремы, утверждающей, что выражение

$$V = f(x + iy) + g(x - iy)$$

есть общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

[Примечание. Следует иметь в виду различие, существующее между общим решением обыкновенного дифференциального уравнения и общими интегралами дифференциального уравнения с частными производными порядка выше первого [1]).

Два общих решения обыкновенного дифференциального уравнения, кажущихся различными, всегда могут быть преобразованы непосредственно одно в другое при помощи надлежащих соотношений между постоянными; так, в случае уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ мы можем получить решение $C\sin(x + \varepsilon)$ из решения $A\cos x + B\sin x$, определяя C и ε из уравнений $C\sin\varepsilon = A$, $C\cos\varepsilon = B$. С другой стороны, всякое решение уравнения Лапласа может быть выражено в любой из форм

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x\cos t + y\sin t + iz,\ t)\,dt, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} g(y\cos u + z\sin u + ix,\ u)\,du;$$

но если даже известно, что это одно и то же решение, то все же, по-видимому, не имеется никакой общей аналитической зависимости, связывающей

[1]) Относительно общих интегралов таких уравнений см. Forsyth, Theory of Differential Equations, VI (1906), Chap. XII.

функции f и g, которая непосредственно преобразовывала бы один вид решения в другой.]

Пример 1. Показать, что потенциал материальной точки единичной массы с координатами (a, b, c) во всех точках, для которых $z > c$, равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{du}{(z-c)+i(x-a)\cos u+i(y-b)\sin u}.$$

Пример 2. Показать, что общее решение уравнения Лапласа степени однородности нуль относительно x, y, z имеет вид

$$\int_{-\pi}^{\pi}\lg(x\cos t+y\sin t+iz)\,g(t)\,dt,$$

где

$$\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\,dt=0.$$

Выразить в этой форме решения $\frac{x}{z+r}$ и $\lg\frac{r+z}{r-z}$, где

$$r^2=x^2+y^2+z^2.$$

Пример 3. Показать, что в случае уравнения

$$p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}=x+y$$

$\left(\text{где } p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ интегралами вспомогательных уравнений Шарпи (Charpit) (см. Forsyth, Differential Equations, Chap. IX) будут, в частности,

$$\text{(I)}\qquad p^{\frac{1}{2}}-x=y-q^{\frac{1}{2}}=a,$$

$$\text{(II)}\qquad p=q+a^2.$$

Показать, что соответствующие общие интегралы получаются из систем

$$\text{(I)}\qquad \left.\begin{aligned} z&=\frac{1}{3}(x+a)^3+\frac{1}{3}(y-a)^3+F(a),\\ 0&=(x+a)^2-(y-a)^2+F'(a);\end{aligned}\right\}$$

$$\text{(II)}\qquad \left.\begin{aligned} 4z&=\frac{1}{3}(x+y)^3+2a^2(x-y)-a^4(x+y)^{-1}+G(a),\\ 0&=4a(x-y)-4a^3(x+y)^{-1}+G'(a),\end{aligned}\right\}$$

и получить отсюда дифференциальное уравнение, определяющее функцию $G(a)$ по функции $F(a)$, когда эти общие интегралы совпадают.

18.31. Решение уравнения Лапласа с помощью функций Лежандра

Если для функции V при

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

существует разложение в форме, указанной в § 18.3, то, как мы видели, функцию V можно представить в виде ряда по выражениям типа

$$\int_{-\pi}^{\pi} (z + ix\cos u + iy\sin u)^n \cos mu\, du,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (z + ix\cos u + iy\sin u)^n \sin mu\, du,$$

где m и n — целые числа, причем $0 \leqslant m \leqslant n$.

Рассмотрим эти выражения подробнее.

Если введем сферические координаты, определяемые уравнениями

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

то получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} (z + ix\cos u + iy\sin u)^n \cos mu\, du =$$

$$= r^n \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos\theta + i\sin\theta\cos(u - \varphi)\}^n \cos mu\, du =$$

$$= r^n \int_{-\pi-\varphi}^{\pi-\varphi} \{\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi\}^n \cos m(\varphi + \psi)\, d\psi =$$

$$= r^n \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi\}^n \cos m(\varphi + \psi)\, d\psi =$$

$$= r^n \cos m\varphi \int_{-\pi}^{\pi} \{\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi\}^n \cos m\psi\, d\psi,$$

ибо подынтегральная функция есть периодическая функция от ψ, а выражение

$$(\cos\theta + i\sin\theta\cos\psi)^n \sin m\psi$$

есть нечетная функция от ψ. Поэтому (§ 15.61) при определении Ферперса присоединенной функции Лежандра имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos u+iy\sin u)^n\cos mu\,du=\frac{2\pi i^m n!}{(n+m)!}r^nP_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi.$$

Подобным же образом

$$\int_{-\pi}^{\pi}(z+ix\cos u+iy\sin u)^n\sin mu\,du=\frac{2\pi i^m n!}{(n+m)!}r^nP_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi.$$

Следовательно, функции

$$r^nP_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$

и

$$r^nP_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$$

суть полиномы относительно x, y, z и являются частными решениями уравнения Лапласа.

Далее, по § 18.3 всякое решение уравнения Лапласа, аналитическое вблизи начала координат, может быть представлено в виде

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\left\{A_nP_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}\left(A_n^{(m)}\cos m\varphi+B_n^{(m)}\sin m\varphi\right)P_n^m(\cos\theta)\right\}.$$

Выражение вида

$$A_nP_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}\left(A_n^{(m)}\cos m\varphi+B_n^{(m)}\sin m\varphi\right)P_n^m(\cos\theta),$$

где n — положительное целое число, называется *поверхностной гармонической* функцией (или *сферической функцией*) n-й степени; поверхностная же гармоническая функция n-й степени, умноженная на r^n, называется *телесной гармонической функцией* (или *шаровой функцией*) n-й степени.

Кривые на сфере радиуса единица (с центром в начале координат), на которых $P_n(\cos\theta)$ равняется нулю, суть параллели, разбивающие поверхность сферы на зоны, и поэтому $P_n(\cos\theta)$ называется (см. § 15.1) *зональной гармоникой*. Совокупность же кривых, на которых $\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} m\varphi P_n^m(\cos\theta)$ равняется нулю, составлена $n-m$ параллелями и $2m$ меридианами, разбивающими поверхность сферы на прямоугольные криволинейные четырехугольники, и поэтому эти функции называются *тессеральными* (т. е. клеточными) *гармоническими* функциями.

Телесная гармоническая функция n-й степени есть, очевидно, однородный полином n-й степени относительно x, y, z, удовлетворяющий уравнению

Лапласа. Очевидно, что при изменении прямоугольных координат [1]) при вращении осей около начала шаровая функция (или сферическая функция) n-й степени преобразуется в шаровую функцию (или сферическую функцию) n-й степени в новых координатах.

Шаровые функции были исследованы в прямоугольных координатах Томсоном (W. Thomson) в 1862 г., см. Phil. Trans. (1863), 573—582, и Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy, I (1876), 171—218. Они были исследованы тем же способом и в то же самое время, но независимо от Томсона также Клебшем (Clebsch), Journ. für Math., LXI (1863), 195—262.

Пример. Показать, что если координаты r, θ, φ определяются уравнениями

$$x = r\cos\theta,\quad y = (r^2-1)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\cos\varphi,\quad z = (r^2-1)^{\frac{1}{2}}\sin\theta\sin\varphi,$$

то функция $P_n^m(r)\,P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ удовлетворяет уравнению Лапласа.

18.4. Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее определенным граничным условиям на поверхности сферы

Мы видели (§ 18.31), что решение уравнения Лапласа, аналитическое вблизи начала координат, может быть представлено в виде

$$V(r,\ \theta,\ \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left\{ A_n P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} \left(A_n^{(m)}\cos m\varphi + B_n^{(m)}\sin m\varphi\right) P_n^m(\cos\theta) \right\}.$$

Из § 3.7 части I с очевидностью следует, что если этот ряд сходится для данного значения r, скажем a, при всех значениях θ и φ таких, что $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, то он будет сходящимся абсолютно и равномерно при $r < a$.

Чтобы определить постоянные, мы должны знать граничные условия, которым должна удовлетворять функция V.

Часто встречающееся граничное условие заключается в том, что V является заданной ограниченной интегрируемой функцией от θ и φ, скажем $f(\theta,\ \varphi)$, на поверхности данной сферы, о которой предположим, что ее радиус равен a, и является аналитической функцией в точках внутри этой сферы.

Коэффициенты A_n, $A_n^{(m)}$, $B_n^{(m)}$ следует тогда определять из уравнения

$$f(\theta,\ \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \left\{ A_n P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} \left(A_n^{(m)}\cos m\varphi + B_n^{(m)}\sin m\varphi\right) P_n^m(\cos\theta) \right\}.$$

---

[1]) Оператор Лапласа $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ инвариантен относительно изменения прямоугольных осей.

Предполагая, что этот ряд равномерно сходится[1]) во всей области

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

умножим обе части уравнения на

$$P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$$

и проинтегрируем почленно (§ 4.7, часть I); воспользовавшись результатами §§ 15.14, 15.51 об интегральных свойствах функций Лежандра, найдем, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta', \varphi') P_n^m(\cos\theta') \cos m\varphi' \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' = \pi a^n \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} A_n^{(m)},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta', \varphi') P_n^m(\cos\theta') \sin m\varphi' \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' = \pi a^n \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} B_n^{(m)},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta', \varphi') P_n(\cos\theta') \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' = 2\pi a^n \frac{2}{2n+1} A_n.$$

Поэтому, когда $r < a$,

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta', \varphi') \Big\{ P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta') +$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta') \cos m(\varphi - \varphi') \Big\} \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'.$$

Ряд, который здесь интегрируется почленно, сходится равномерно, когда $r < a$, ибо подинтегральное выражение есть ограниченная функция от θ, θ', φ, φ'. Следовательно (§ 4.7),

$$4\pi V(r, \theta, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta', \varphi') \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{r}{a}\right)^n \Big\{ P_n(\cos\theta) P_n(\cos\theta') +$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta) P_n^m(\cos\theta') \cos m(\varphi - \varphi') \Big\} \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi'.$$

Теперь предположим, что мы принимаем луч (θ, φ) за новую полярную ось и пусть (θ_1', φ_1') — новые координаты луча, старые координаты которого были (θ', φ').

[1]) Это обычно и бывает в физических проблемах.

Следовательно, мы должны заменить $P_n(\cos\theta)$ единицей, а $P_n^m(\cos\theta)$ нулем; и таким образом, получим

$$4\pi V(r, \theta, \varphi) =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta', \varphi') \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta_1')\sin\theta_1'\,d\theta_1'\,d\varphi_1' =$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta', \varphi') \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos\theta_1')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'.$$

Если к этой формуле применим результат примера 23 главы 15 (стр. 154), то получим

$$4\pi V(r, \theta, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta', \varphi')\frac{a(a^2-r^2)\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'}{\left(r^2-2ar\cos\theta_1'+a^2\right)^{\frac{3}{2}}};$$

таким образом,

$$4\pi V(r, \theta, \varphi) =$$
$$= a(a^2-r^2)\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(\theta', \varphi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'}{\left[r^2-2ar\{\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')\}+a^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

В этой компактной формуле функции Лежандра не фигурируют явно.

Последняя формула может быть получена и с помощью *функции Грина*. Со свойствами этой функции читатель может ознакомиться у Томсона и Тейта (Thomson and Tait, Natural Philosophy, §§ 499—519).

[Примечание. Из интегрального представления функции $V(r, \theta, \varphi)$ через функции Лежандра от $\cos\theta_1'$ и от $\cos\theta$, $\cos\theta'$ соответственно мы можем получить новое доказательство теоремы сложения для полинома Лежандра. Действительно, пусть

$$\chi_n(\theta', \varphi') = P_n(\cos\theta_1') -$$
$$-\left\{P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\cos m(\varphi-\varphi')\right\}.$$

Тогда из сравнения двух формул для $V(r, \theta, \varphi)$ получим

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\theta', \varphi')\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{r}{a}\right)^n \chi_n(\theta', \varphi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'.$$

Если мы примем за $f(\theta', \varphi')$ сферическую функцию n-й степени, то член, содержащий r^n, будет единственным, который встречается в интегрируемом ряде. В частности, если мы возьмем $f(\theta', \varphi') = \chi_n(\theta', \varphi')$, то получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \{\chi_n(\theta', \varphi')\}^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' = 0.$$

Так как подинтегральная функция непрерывна и неотрицательна, то она должна равняться нулю. Следовательно, $\chi_n(\theta', \varphi') \equiv 0$. Иначе говоря, мы доказали формулу

$$P_n(\cos\theta_1') = P_n(\cos\theta)\, P_n(\cos\theta') + \\ + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta)\, P_n^m(\cos\theta') \cos m(\varphi - \varphi'),$$

причем из геометрических соображений очевидно, что

$$\cos\theta_1' = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi').$$

Таким образом, для теоремы, доказанной в § 15.7 [1]) чисто аналитическим путем, мы получили доказательство, основанное на физических соображениях].

Пример 1. Найти решение уравнения Лапласа, аналитическое внутри сферы $r = 1$ и имеющее значение $\sin 3\theta\cos\varphi$ на поверхности сферы.

$$\left[\frac{8}{15} r^3 P_3^1(\cos\theta)\cos\varphi - \frac{1}{5} r P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi\right].$$

Пример 2. Пусть $f_n(r, \theta, \varphi)$ есть однородный полином n-й степени относительно x, y, z. Показать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} f_n(a, \theta, \varphi)\, P_n\{\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')\}\, a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \\ = \frac{4\pi a^2}{2n+1} f_n(a, \theta', \varphi').$$

[Принять направление (θ', φ') за новую полярную ось].

§ 18.5. Решение уравнения Лапласа в бесселевых функциях целого порядка

Частным случаем результата, полученного в § 18.3, является то, что функция

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{k(z + ix\cos u + iy\sin u)} \cos mu\, du,$$

---

[1]) Отсутствие множителя $(-1)^m$, встречающегося в § 15.7, объясняется тем обстоятельством, что применяемые теперь функции являются присоединенными функциями Феррерса.

где k — произвольная постоянная и m — некоторое целое число, есть решение уравнения Лапласа. Введя цилиндрические координаты (ρ, φ, z), определяемые уравнениями

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

получим вышеприведенное решение в таком виде:

$$e^{kz} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\rho \cos(u-\varphi)} \cos mu \, du = e^{kz} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\rho \cos v} \cos m(v+\varphi) \, dv =$$

$$= 2e^{kz} \int_{0}^{\pi} e^{ik\rho \cos v} \cos(mv) \cos(m\varphi) \, dv =$$

$$= 2e^{kz} \cos(m\varphi) \int_{0}^{\pi} e^{ik\rho \cos v} \cos(mv) \, dv.$$

Таким образом, пользуясь примером 3 § 17.1, *мы видим, что* $2\pi i^m e^{kz} \cos(m\varphi) J_m(k\rho)$ *является решением уравнения Лапласа, аналитическим вблизи начала координат.*

Подобным же образом из выражения

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{k(z + ix\cos u + iy\sin u)} \sin mu \, du,$$

где m — целое число, *мы получаем, что* $2\pi i^m e^{kz} \sin(m\varphi) J_m(k\rho)$ *есть решение уравнения Лапласа.*

§ 18.51. Периоды колебания однородной мембраны[1])

Уравнение, которому удовлетворяет смещение V точки (x, y) в момент t для однородной плоской мембраны, колеблющейся гармонически, имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

где c — постоянная, зависящая от натяжения и плотности мембраны. Это уравнение может быть приведено к уравнению Лапласа заменой переменной по формуле $z = cti$.

Согласно § 18.5 заключаем, что выражения вида

$$J_m(k\rho) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} ckt$$

удовлетворяют уравнению движения мембраны.

---

[1]) Euler, Novi Comm. Acad. Petrop., X (1764) [опубликовано в 1766 г.], 243—260; Poisson, Mém. de l'Académie, VIII (1829), 357—570; Bourget, Ann. de l'École norm. sup., III (1866), 55—95. Колебания мембраны подробно исследованы также в гл. IX «Теории звука» Релея (Rayleigh).

В качестве частного случая возьмем барабан, т. е. мембрану с закрепленным круговым контуром радиуса R.

Тогда один из возможных типов колебания будет определяться функцией

$$V = J_m(k\rho)\cos m\varphi \cos ckt$$

при условии, что $V = 0$ при $\rho = R$, так что нам следует выбрать k среди корней уравнения

$$J_m(kR) = 0.$$

Это уравнение имеет бесконечное число вещественных корней k (§ 17.3, пример 3), скажем k_1, k_2, k_3, ... Возможный тип колебания дается поэтому функцией

$$V = J_m(k_r\rho)\cos m\varphi \cos ck_r t \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots).$$

Она выражает периодическое движение с периодом $\frac{2\pi}{ck_r}$. Таким образом, вычисление периодов существенно зависит от определения нулей функций Бесселя целого порядка (см. § 17.9).

Пример. Уравнение движения воздуха в круговом цилиндре, колеблющегося перпендикулярно оси цилиндра OZ, имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

где V обозначает потенциал скоростей. Если цилиндр имеет радиус R, то граничное условие таково: $\frac{\partial V}{\partial \rho} = 0$, когда $\rho = R$. Показать, что определение периодов свободных колебаний зависит от нахождения нулей функции $J'_m(\zeta) = 0$.

18.6. Общее решение волнового уравнения

Способом § 18.3 можно показать[1]), что *общее решение волнового уравнения*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

есть

$$V = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + ct,\ u,\ v)\, du\, dv,$$

где f — функция (трех переменных) типа, рассмотренного в § 18.3.

Рассматривая интеграл как предел суммы, мы видим, что физическая интерпретация этого равенства заключается в том, что потенциал скоростей V слагается из множества плоских волн, причем элементарное возмущение дается выражением

$$f(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + ct,\ u,\ v)\, \delta u\, \delta v.$$

---

[1]) См. сочинение, цитированное раньше: Math. Ann. LVII (1902), 342—345, или Messenger of Mathematics, XXXVI (1907), 98—106.

Это элементарное возмущение распространяется в направлении ($\sin u \cos v$, $\sin u \sin v$, $\cos u$) со скоростью c. *Поэтому решение представляет собой совокупность плоских волн, распространяющихся по всем направлениям со скоростью* c.

18.61. Решение волнового уравнения в функциях Бесселя

Найдем теперь один класс частных решений волнового уравнения, полезных для решения определенных частных задач.

В физических исследованиях желательно, чтобы время входило через посредство множителя $\sin ckt$ или $\cos ckt$, где k — постоянная. Это наводит на мысль искать решения в виде

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} e^{ik(x \sin u \cos v + y \sin u \sin v + z \cos u + ct)} f(u, v)\, du\, dv.$$

Физически это означает, что мы рассматриваем движения, в которых все элементарные волны имеют один и тот же период.

Пусть (r, θ, φ) — сферические координаты точки (x, y, z), и пусть (ω, ψ) — полярные координаты направления (u, v), отнесенные к новым осям, таким, что полярная ось идет по направлению (θ, φ), а плоскость $\psi = 0$ проходит через OZ, тогда

$$\cos \omega = \cos \theta \cos u + \sin \theta \sin u \cos (\varphi - v),$$
$$\sin u \sin (\varphi - v) = \sin \omega \sin \psi\ ^{1)}.$$

Возьмем произвольную функцию $f(u, v)$ в виде $S_n(u, v) \sin u$, где S_n обозначает сферическую гармонику n-й степени от u, v. Мы можем написать

$$S_n(u, v) = \bar{S}_n(\theta, \varphi;\ \omega, \psi),$$

где (§ 18.31) $\bar{S}_n$ есть сферическая гармоника n-й степени от ω, ψ. Таким образом, получаем

$$V = e^{ikct} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} e^{ikr \cos \omega} \bar{S}_n(\theta, \varphi;\ \omega, \psi) \sin \omega\, d\omega\, d\psi.$$

Теперь можем написать (§ 18.31)

$$\bar{S}_n(\theta, \varphi;\ \omega, \psi) = A_n(\theta, \varphi) P_n(\cos \omega) + \\ + \sum_{m=1}^{n} \left\{A_n^{(m)}(\theta, \varphi) \cos m\psi + B_n^{(m)}(\theta, \varphi) \sin m\psi\right\} P_n^m(\cos \omega),$$

где $A_n(\theta, \varphi)$, $A_n^{(m)}(\theta, \varphi)$ и $B_n^{(m)}(\theta, \varphi)$ не зависят от ψ и ω.

---

[1]) Теоремы косинусов и синусов в сферическом треугольнике.— *Прим. ред.*

Выполняя интегрирование по ψ, получим

$$V = 2\pi e^{ikct} A_n(\theta, \varphi) \int_0^\pi e^{ikr\cos\omega} P_n(\cos\omega) \sin\omega \, d\omega =$$

$$= 2\pi e^{ikct} A_n(\theta, \varphi) \int_{-1}^{1} e^{ikr\mu} P_n(\mu) \, d\mu =$$

$$= 2\pi e^{ikct} A_n(\theta, \varphi) \int_{-1}^{1} e^{ikr\mu} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n \, d\mu$$

по формуле Родрига (15.11).

Интегрируя по частям n раз и пользуясь интегралом Ханкеля (следствие § 17.3), получим равенство

$$V = \frac{2\pi}{2^n n!} e^{ikct} A_n(\theta, \varphi) (ikr)^n \int_{-1}^{1} e^{ikr\mu} (1 - \mu^2)^n \, d\mu =$$

$$= (2\pi)^{\frac{3}{2}} i^n e^{ikct} (kr)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) A_n(\theta, \varphi).$$

Таким образом, функция V равна умноженной на постоянную

$$e^{ikct} r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) A_n(\theta, \varphi).$$

Волновое уравнение не меняется от умножения x, y, z и t на один и тот же постоянный множитель, т. е. оно остается неизменным, если мы умножим r и t на один и тот же постоянный множитель, оставляя θ и φ без изменения. Таким образом, $A_n(\theta, \varphi)$ можно считать не зависящей от произвольной постоянной k, на которую умножаются r и t. Следовательно,

$$\lim_{k \to 0} e^{ikct} r^{-\frac{1}{2}} k^{-n-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) A_n(\theta, \varphi)$$

является решением волнового уравнения. Поэтому $r^n A_n(\theta, \varphi)$ является решением (не зависящим от t) волнового уравнения и, следовательно, решением уравнения Лапласа. Согласно этому результату можно взять в качестве $A_n(\theta, \varphi)$ любую сферическую гармонику n-й степени; итак, *мы приходим к заключению, что функция*

$$r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} ckt$$

является частным решением волнового уравнения.

18.611. Приложение результатов § 18.61 к одной физической задаче

Только что полученное решение волнового уравнения может быть следующим образом использовано для определения периодов свободных колебаний воздуха, заключенного в твердую сферическую оболочку.

В этом случае потенциал скоростей V удовлетворяет волновому уравнению и граничные условия заключаются в том, что $\frac{\partial V}{\partial r}=0$, когда $r=a$, где a — радиус сферы. Следовательно, функция

$$V=r^{-\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\,P_n^m(\cos\theta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi\frac{\cos}{\sin}ckt$$

дает возможное движение, если k выбрано так, что

$$\frac{d}{dr}\left\{r^{-\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(kr)\right\}_{r=a}=0.$$

Последнее уравнение определяет k. Используя результаты § 17.24, мы видим, что оно может быть написано в виде $\operatorname{tg} ka=f_n(ka)$, где $f_n(ka)$ — рациональная функция от ka.

В частности, радиальные колебания, для которых V не зависит от θ и φ, получатся, если взять $n=0$. Уравнение для определения k в этом случае будет $\operatorname{tg} ka=ka$, так что частоты основных радиальных колебаний определяются корнями этого уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

J. Fourier, La Théorie analytique de la Chaleur.
W. Thomson and P. G. Tait, Natural Philosophy. (1879).
Дж. В Стретт (лорд Релей), Теория звука, т. I, II (Гостехиздат, М., 1955).
F. Pockels, Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u+k^2u=0$ (Leipzig, 1891).
H. Burkhardt, Entwickelungen nach oscillirenden Funktionen (Leipzig, 1908).
H. Bateman, Electrical and Optical Wave-Motion (1915).
E. T. Whittaker, History of the Theories of Aether and Electricity, Dublin, 1910).
A. E. H. Love, Proc. London Math. Soc., XXX (1899), 308—321.
H. Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), I (1904), 451—458.
L. N. G. Filon, Philosophical Magazine (6), VI (1903), 193—213.
H. Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), VII (1909); 70—89.
В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II (Гостехиздат, 1956).
Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I (Гостехиздат, 1951).

Примеры

1. Пусть V — решение уравнения Лапласа, симметричное относительно OZ и равное $f(z)$ на OZ; показать, что если $f(\zeta)$ есть функция, аналитическая в некоторой области (содержащей начало координат) значе-

ний комплексной переменной ζ, то

$$V=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f\left\{z+i\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}d\varphi$$

в любой точке некоторой области трехмерного пространства.

Вывести отсюда, что потенциал однородного кругового кольца радиуса c и массы M, лежащего в плоскости XOY и с центром в начале, будет

$$\frac{M}{\pi}\int_0^\pi\left[c^2+\left\{z+i\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^2\right]^{-\frac{1}{2}}d\varphi.$$

2. Пусть V — решение уравнения Лапласа, имеющее вид $e^{mi\varphi}F(\rho, z)$, где (ρ, φ, z) — цилиндрические координаты, и пусть это решение ведет себя, как $\rho^m e^{mi\varphi}f(z)$ вблизи оси z, где $f(\zeta)$ имеет характер, описанный в примере 1. Показать, что

$$V=\frac{m!\,\rho^m e^{mi\varphi}}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi f(z+i\rho\cos t)\sin^{2m}t\,dt.$$

(Dougall)

3. Зависимость u от x, y, z определяется уравнением

$$Ax+By+Cz=1,$$

где A, B, C — такие функции от u, что

$$A^2+B^2+C^2=0.$$

Показать, что (при некоторых условиях общего характера) любая функция от u будет решением уравнения Лапласа.

(Forsyth, Messenger, XXVII (1898), 99—118)

4. A, B — две точки вне сферы, центр которой C. Слой притягивающей материи на поверхности сферы таков, что его поверхностная плотность σ_P во всякой точке P пропорциональна величине

$$(AP\cdot BP)^{-1}.$$

Показать, что общее количество материи на сфере не меняется с перемещением точек A и B при условии, что произведение $CA\cdot CB$ и угол ACB остаются без изменения; доказать также эквивалентность этого результата теореме, что поверхностный интеграл от произведения двух гармоник различных степеней, взятый по сфере, равен нулю.

(Sylvester, Phil. Mag. (5), II (1876), 291—307)

5. Пусть функция $V(x, y, z)$ аналитически определяется как потенциал поля, образованного массами $\lambda+i\mu$, $\lambda-i\mu$, помещенными соответственно в точках $(a+ia', b+ib', c+ic')$ и $(a-ia', b-ib', c-ic')$. Показать, что функция $V(x, y, z)$ принимает бесконечные значения во всех точках некоторого вещественного круга и если точка (x, y, z) описывает петлю,

зацепленную один раз за этот круг, то начальное и конечное значения потенциала $V(x, y, z)$ численно равны, но противоположны по знаку.

(Appell, Math. Ann., XXX (1887), 155—156)

6. Найти решение уравнения Лапласа, аналитическое в области, для которой $a < r < A$, если дано, что на сферах $r = a$ и $r = A$ решение приводится соответственно к

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\theta), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta).$$

7. Пусть O' имеет координаты $(0, 0, c)$, и пусть

$$\angle POZ = \theta, \qquad \angle PO'Z = \theta', \qquad PO = r, \qquad PO' = r'.$$

Показать, что

$$\frac{P_n(\cos\theta')}{r'^{n+1}} = \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} + (n+1)\frac{cP_{n+1}(\cos\theta)}{r^{n+2}} + \\ + \frac{(n+1)(n+2)c^2}{2!}\frac{P_{n+2}(\cos\theta)}{r^{n+3}} + \ldots,$$

или

$$\frac{P_n(\cos\theta')}{r'^{n+1}} = (-1)^n\left\{\frac{1}{c^{n+1}} + (n+1)\frac{rP_1(\cos\theta)}{c^{n+2}} + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)r^2}{2!}\frac{P_2(\cos\theta)}{c^{n+3}} + \ldots\right\},$$

соответственно тому, будет ли $r > c$ или $r < c$.

Получить подобное же разложение для $r'^n P'_n(\cos\theta)$.

(Trinity, 1893)

8. Показать, что потенциал однородного сплющенного сфероида, полуоси которого a, b и плотность которого ρ, во внешней точке (r, θ, φ) равен

$$4\pi\rho a^2 b\left[\frac{1}{3r} - \frac{m^2}{3\cdot 5}\frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} + \frac{m^4}{5\cdot 7}\frac{P_4(\cos\theta)}{r^5} - \ldots\right],$$

где $m^2 = a^2 - b^2$, если $r > m$. Получить потенциал в точках, для которых $r < m$.

(St. John's, 1899)

9. Показать, что

$$e^{ir\cos\theta} = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) r^{-\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta) J_{n+\frac{1}{2}}(r).$$

(Bauer, Journ. für Math., LVI)

10[1]). Показать, что если $x \pm iy = h\,\mathrm{ch}\,(\xi \pm i\eta)$, то волновое уравнение в двумерном пространстве в координатах ξ и η имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = \frac{h^2}{c^2}\,(\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\eta)\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

(Lamé)

11. Пусть

$$x = (c + r\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = (c + r\cos\theta)\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta.$$

Показать, что поверхности, для которых r, θ, φ соответственно постоянны, образуют ортогональную систему. Далее, показать, что уравнение Лапласа в координатах r, θ, φ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{r(c + r\cos\theta)\frac{\partial V}{\partial r}\right\} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{(c + r\cos\theta)\frac{\partial V}{\partial\theta}\right\} + \frac{r}{c + r\cos\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0.$$

(W. D. Niven, Messenger, X)

12. Пусть точка P имеет прямоугольные координаты (x, y, z) и сферические координаты (r, θ, φ). Пусть плоскость POZ пересекается с окружностью $x^2 + y^2 = k^2$, $z = 0$ в точках α, γ, и пусть

$$\angle \alpha P\gamma = \omega, \quad \lg\left(\frac{P\alpha}{P\gamma}\right) = \sigma.$$

Показать, что уравнение Лапласа в координатах σ, ω, φ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left\{\frac{\mathrm{sh}\,\sigma}{\mathrm{ch}\,\sigma - \cos\omega}\frac{\partial V}{\partial\sigma}\right\} + \frac{\partial}{\partial\omega}\left\{\frac{\mathrm{sh}\,\sigma}{\mathrm{ch}\,\sigma - \cos\omega}\frac{\partial V}{\partial\omega}\right\} + \frac{1}{\mathrm{sh}\,\sigma\,(\mathrm{ch}\,\sigma - \cos\omega)}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0$$

и что одним из его решений является функция

$$V = (\mathrm{ch}\,\sigma - \cos\omega)^{\frac{1}{2}}\cos n\omega\cos m\varphi P^m_{n-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\,\sigma).$$

(Hicks, Phil. Trans., CLXXII, 617 и след.)

[1]) Примеры 10, 11, 12 и 14 легче всего решаются при помощи теоремы Ламе (Lamé, Journ. de l'École polyt., XIV, cahier 23 (1834), 191—288), заключающейся в том, что если (λ, μ, ν) — ортогональные координаты, для которых линейный элемент дается формулой $(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 = (H_1\,\delta\lambda)^2 + (H_2\,\delta\mu)^2 + (H_3\,\delta\nu)^2$, то уравнение Лапласа в этих координатах имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial\mu}\right) + \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial V}{\partial\nu}\right) = 0.$$

Простой способ [принадлежащий Томсону (W. Thomson, Camb. Math. Journ., IV (1845), 33—42)] доказательства этой теоремы, основанной на аргументации физического характера, воспроизводится у Лэмба (Лэмб, Гидродинамика, Гостехиздат, 1947, § 111). Аналитические доказательства, основанные на доказательстве Ламе, даны Бертраном (Bertrand, Traité de Calcul Différentielle (1864), 181—187) и Гурса (Гурса, Курс математического анализа, т. I, Физматгиз, 1936). Наиболее краткое доказательство принадлежит Невилю (Neville, Quarterly Journ., XLIX (1923), 338—352). Другое доказательство дано Гейне (Heine, Theorie der Kugelfunktionen, I (1878), 303—306).

13. Показать, что

$$(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\varphi+c^2)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}m\pi i}}{\pi}\int_0^{\infty}dk\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ck}J_m(k\rho)\,e^{ikR\cos u}\cos mu\,du,$$

и вывести отсюда выражение потенциала частицы через функции Бесселя.

14. Показать, что если a, b, c — постоянные и λ, μ, ν — эллиптические координаты, определяемые как корни уравнения относительно ε:

$$\frac{x^2}{a^2+\varepsilon}+\frac{y^2}{b^2+\varepsilon}+\frac{z^2}{c^2+\varepsilon}=1,$$

то уравнение Лапласа может быть записано в виде

$$\Delta_\lambda(\mu-\nu)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\Delta_\lambda\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right\}+\Delta_\mu(\nu-\lambda)\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\Delta_\mu\frac{\partial V}{\partial\mu}\right\}+\Delta_\nu(\lambda-\mu)\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\Delta_\nu\frac{\partial V}{\partial\nu}\right\}=0,$$

где $\Delta_\lambda=\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$.

(Lamé)

15. Показать, что

$$V=\int_{-\pi}^{\pi}F(x\cos\theta+y\sin\theta+iz,\ \ y+iz\sin\theta+ct\cos\theta,\ \theta)\,d\theta$$

есть общее решение волнового уравнения.

(Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), I (1904), 457)

16. Доказать, что если $U=f(x, y, z, t)$ есть решение уравнения

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2},$$

то другим решением этого уравнения будет функция

$$U=t^{-\frac{3}{2}}f\left(\frac{x}{t},\ \frac{y}{t},\ \frac{z}{t},\ -\frac{1}{t}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}\right).$$

17. Показать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(z+i\rho\cos\theta,\ \ ct+\rho\sin\theta)\,d\theta+$$

$$+\int_0^b\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ar\,sh}\left(\frac{a+z+ct\cos\theta}{\rho\sin\theta}\right)F(a,\ \theta)\,d\theta\,da,$$

где ρ, φ, z — цилиндрические координаты и a, b — произвольные постоянные, есть общее решение волнового уравнения, когда движение не зависит от φ.

(Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), I (1904), 458)

18. Пусть $V = f(x, y, z)$ есть решение уравнения Лапласа. Показать, что

$$V = \frac{1}{(x-iy)^{\frac{1}{2}}} f\left(\frac{r^2-a^2}{2(x-iy)}, \frac{r^2+a^2}{2i(x-iy)}, \frac{az}{x-iy}\right)$$

будет другим решением.

(Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), VII (1909), 77)

19. Пусть $U = f(x, y, z, t)$ есть решение волнового уравнения. Показать, что

$$U = \frac{1}{z-ct} f\left(\frac{x}{z-ct}, \frac{y}{z-ct}, \frac{r^2-1}{2(z-ct)}, \frac{r^2+1}{2c(z-ct)}\right)$$

есть другое решение.

(Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), VII (1909), 77)

20. Пусть

$$l = x - iy, \quad m = z + iw, \quad n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$$
$$\lambda = x + iy, \quad \mu = z - iw, \quad \nu = -1,$$

так что

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Показать, что любое решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial w^2} = 0,$$

являющееся однородной функцией нулевой степени, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial l\,\partial \lambda} + \frac{\partial^2 U}{\partial m\,\partial \mu} + \frac{\partial^2 U}{\partial n\,\partial \nu} = 0,$$

и получить решение этого уравнения в виде

$$l^{-\alpha}\lambda^{-\alpha'} m^{-\beta}\mu^{-\beta'} n^{-\gamma}\nu^{-\gamma'} P \begin{Bmatrix} a, & b, & c, & \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \zeta \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{Bmatrix},$$

где

$$l\lambda = (b-c)(\zeta-a), \quad m\mu = (c-a)(\zeta-b), \quad n\nu = (a-b)(\zeta-c).$$

(Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), VII (1909), 78—82)

21 [1]. Пусть (r, θ, φ) — сфероидальные координаты, определяемые уравнениями

$$x = c(r^2+1)^{\frac{1}{2}} \sin\theta\cos\varphi, \quad y = c(r^2+1)^{\frac{1}{2}} \sin\theta\sin\varphi, \quad z = cr\cos\theta,$$

---

[1]) Функции, введенные в примерах 21 и 22, известны под названием *внутренних и внешних сфероидальных гармонических функций* соответственно.

где x, y, z — прямоугольные координаты, а c — постоянная. Показать, что когда n и m — целые числа, имеют место равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_n\left(\frac{x\cos t + y\sin t + iz}{c}\right) \frac{\cos}{\sin} mt\, dt =$$

$$= 2\pi \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(ir) P_n^m(\cos\theta) \frac{\cos}{\sin} m\varphi.$$

(Blades, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIII)

22. В обозначениях примера 21 показать, что при $z \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q_n\left(\frac{x\cos t + y\sin t + iz}{c}\right) \frac{\cos}{\sin} mt\, dt = 2\pi \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Q_n^m(ir) P_n^m(\cos\theta) \frac{\cos}{\sin} m\varphi.$$

(Jeffery, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIII)

23. Доказать, что наиболее общее решение уравнения Лапласа, являющееся однородной функцией нулевой степени от x, y, z, может быть представлено в виде

$$V = f\left(\frac{x+iy}{r+z}\right) + F\left(\frac{x-iy}{r+z}\right),$$

где f и F — произвольные функции.

(Donkin, Phil. Trans. (1857); Hobson, Proc. London Math. Soc. (1), XXII, 422)

ГЛАВА 19

ФУНКЦИИ МАТЬЕ

19.1. Дифференциальное уравнение Матье

В предыдущих пяти главах мы занимались изучением функций, относящихся к типу, который может быть назван гипергеометрическим; многие простые свойства этих функций в настоящее время хорошо известны.

В настоящей главе мы вступаем в область Анализа, которая лежит за этими пределами и исследована пока весьма неглубоко.

Функции, встречающиеся в математической физике и следующие в порядке сложности за функциями гипергеометрического типа, — это *функции Матье*; эти функции встречаются в задачах, связанных с *эллиптическим цилиндром*, например, при решении двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

К этому дифференциальному уравнению с частными производными приходят в теории распространения электромагнитных волн: если электрический вектор параллелен оси OZ и по величине равен E, а $(H_x, H_y, 0)$ — компоненты магнитного вектора, то основные уравнения Максвелла будут

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y},\quad \frac{\partial H_x}{\partial t}=-\frac{\partial E}{\partial y},\quad \frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{\partial E}{\partial x},$$

где c — скорость света, а эти уравнения приводят непосредственно к уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}.$$

В случае дифракции волн, распространяющихся параллельно оси OX и падающих на эллиптический цилиндр, для которого оси OX и OY являются осями главного сечения, граничные условия заключаются в том, что E равно нулю на поверхности цилиндра.

То же самое уравнение с частными производными встречается в связи с колебаниями однородной плоской мембраны, причем зависимой переменной будет здесь перемещение, перпендикулярное к мембране; если мембрана имеет форму эллипса с закрепленным контуром, то граничное условие будет совпадать с граничным условием в электромагнитной задаче (см. выше).

Это дифференциальное уравнение было рассмотрено Матье[1]) в 1868 г. в связи с задачей о колебаниях эллиптической мембраны следующим образом.

Предположим, что мембрана, находящаяся в плоскости XOY в положении равновесия, колеблется с частотой p. Тогда, если положить $V = u(x, y)\cos(pt + \varepsilon)$, то уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{p^2}{c^2} u = 0.$$

Пусть $(\pm h, 0, 0)$ — фокусы эллиптической мембраны; введем новые вещественные переменные[2]) ξ, η, определяемые комплексным уравнением

$$x + iy = h \operatorname{ch}(\xi + i\eta),$$

так что

$$x = h \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = h \operatorname{sh} \xi \sin \eta.$$

Кривые, на которых ξ или η постоянно, будут, очевидно, эллипсами и гиперболами, конфокальными с границей; если взять $\xi \geqslant 0$ и $-\pi < \eta \leqslant \pi$, то каждой точке $(x, y, 0)$ в плоскости XOY соответствует одна и только одна[3]) пара значений (ξ, η).

Дифференциальное уравнение для u в новых координатах принимает вид[4])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{h^2 p^2}{c^2} (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) u = 0.$$

Если искать решение этого уравнения в виде

$$u = F(\xi) G(\eta),$$

где множители будут соответственно функциями только ξ и только η, то получим

$$\left\{ \frac{1}{F(\xi)} \frac{d^2 F(\xi)}{d\xi^2} + \frac{h^2 p^2}{c^2} \operatorname{ch}^2 \xi \right\} = -\left\{ \frac{1}{G(\eta)} \frac{d^2 G(\eta)}{d\eta^2} - \frac{h^2 p^2}{c^2} \cos^2 \eta \right\}.$$

Так как левая часть содержит только ξ, а правая, наоборот, только η, то $F(\xi)$ и $G(\eta)$ должны быть такими функциями, чтобы

---

[1]) Mathieu, Journ. de Math. (2), XIII (1868), 137.

[2]) Введение этих переменных принадлежит Ламе, который назвал ξ *термометрическим параметром*. Теперь они известны более как *конфокальные координаты*. См. Lamé, Sur les fonctions inverses des transcendantes, 1-ère Leçon.

[3]) Это очень легко увидеть из рассмотрения эллипсов, получаемых при различных положительных значениях ξ. Если проведем такой эллипс через определенную точку (ξ, η) плоскости, то η будет эксцентрическим углом этой точки на этом эллипсе.

[4]) Доказательство этого результата, принадлежащего Ламе, дано во многих учебниках; см. примечание на стр. 253.

обе части уравнения были равны постоянной, скажем A, поскольку ξ и η независимые переменные.

Таким образом, мы приходим к уравнениям

$$\frac{d^2F(\xi)}{d\xi^2}+\left(\frac{h^2p^2}{c^2}\operatorname{ch}^2\xi-A\right)F(\xi)=0,$$

$$\frac{d^2G(\eta)}{d\eta^2}-\left(\frac{h^2p^2}{c^2}\cos^2\eta-A\right)G(\eta)=0.$$

Несущественной заменой независимой переменной в первом из этих уравнений придем к тому, что *оба эти уравнения станут линейными дифференциальными уравнениями второго порядка вида*

$$\frac{d^2u}{dz^2}+(a+16q\cos 2z)\,u=0,$$

где a и q — постоянные[1]). Очевидно, что всякая точка (исключая бесконечность) является правильной точкой этого уравнения.

Это уравнение известно под названием *уравнения Матье*, и при известных обстоятельствах (§ 19.2) частные его решения называются *функциями Матье*.

19.11. Форма решения уравнения Матье

В физических задачах, которые привели к уравнению Матье, постоянная a не задана *a priori*, и мы должны рассмотреть вопрос о ее определении. Из физических соображений в задаче о колебаниях мембраны очевидно, что $u(x, y)$ будет *однозначной функцией* точки и, следовательно, остается без изменения при увеличении η на 2π; условия же[2]) $G(\eta+2\pi)=G(\eta)$ достаточно для определения совокупности значений a при известном q. Позже мы увидим (§§ 19.4, 19.41), что, когда a не принимает ни одного из этих значений, равенство

$$G(\eta+2\pi)=G(\eta)$$

не имеет места.

Когда a определено указанным образом, то q (а вместе с тем и p) определяется условием, что $F(\xi)=0$ на границе; таким образом, определяются периоды свободных колебаний мембраны.

---

[1]) Их значения будут $a=A-h^2p^2/2c^2$, $q=h^2p^2/(32c^2)$. Множитель 16 вводится для того, чтобы избегнуть степеней 2 в решениях.

[2]) Элементарным аналогом этого результата является то, что решение уравнения $\dfrac{d^2u}{dz^2}+au=0$ имеет период 2π тогда и только тогда, когда a есть квадрат целого числа.

Другие задачи математической физики, приводящие к функциям Матье, следующие: (I) приливные волны в цилиндрическом сосуде с эллиптической границей, (II) определенные формы установившегося вихревого движения в эллиптическом цилиндре, (III) ослабление магнитной силы в металлическом цилиндре [1]). Уравнение Матье встречается также в одной задаче динамики твердого тела, имеющей общий интерес [2]).

19.12. Уравнение Хилла

Дифференциальное уравнение, подобное уравнению Матье, но более общего характера, возникает при определении движения лунного перигея по способу Хилла [3]) и при определении движения лунного узла по Адамсу [4]).

Это уравнение, называемое *уравнением Хилла*, имеет вид

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\theta_0+2\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\cos 2nz\right)u=0.$$

Теория уравнения Хилла весьма похожа на теорию уравнения Матье (несмотря на наличие бесконечного ряда), так что оба уравнения будут, в известной мере, рассматриваться одновременно.

В приложениях к астрономии θ_0, θ_1, ... — *известные* постоянные, так что задача выбора их с таким расчетом, чтобы решение могло быть периодическим, не возникает. И в самом деле, решение уравнения Хилла в теории Луны не периодическое.

19.2. Периодические решения уравнения Матье

Мы видели, что в физических задачах (в отличие от астрономических) постоянную a в уравнении Матье надо выбрать в виде такой функции от q, чтобы уравнение имело периодическое решение.

Пусть $G(z)$ — это решение; тогда $G(z)$ будет не только периодической, но, сверх того, целой функцией от z. При этом возможны три случая: (I) $G(z)$ может быть *четной* функцией от z, (II) $G(z)$ может быть *нечетной* функцией от z, (III) $G(z)$ может не быть ни четной, ни нечетной.

В случае (III)

$$\frac{1}{2}\{G(z)+G(-z)\}$$

будет *четным* периодическим решением, а

$$\frac{1}{2}\{G(z)-G(-z)\}$$

---

[1]) R. C. Maclaurin. Trans. Camb. Phil. Soc., XVII, 41.

[2]) A. W. Young, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXII, 81.

[3]) G. W. Hill, Acta. Math., VIII (1886). Мемуар Хилла первоначально был опубликован в 1877 г. в Кэмбридже, США.

[4]) Adams, Monthly Notices R. A. S., XXXVIII, 43.

— *нечетным* периодическим решением уравнения Матье; эти два решения образуют фундаментальную систему. Поэтому достаточно сосредоточить наше внимание лишь на тех периодических решениях уравнения Матье, которые будут или четными, или нечетными. Эти решения, *и только они*, будут называться *функциями Матье*.

Заметим, что так как корни определяющего уравнения при $z=0$ равны 0 и 1, то два нечетных (или два четных) решения уравнения Матье не могут образовывать фундаментальной системы. Могло бы показаться, однако, что ничто не препятствует уравнению Матье иметь, при специальных значениях a и q, *два* периодических решения — одно *четное* и одно *нечетное*; для сравнительно малых значений $|q|$ можно показать (§ 19.3, пример 2, (II) и (III)), что уравнение Матье имеет два периодических решения только в тривиальном случае, когда $q=0$; заключение же, что для больших значений $|q|$ никогда не существует двух периодических решений, является частным случаем теоремы, данной Хиллом (Proc. London Math. Soc. (2), XXIII (1924), 224; см. также Ince, Proc. Camb. Phil. Soc., XXI (1922), 117).

19.21. Интегральное уравнение, которому удовлетворяют четные функции Матье[1])

Покажем теперь, что если $G(\eta)$ — какая-нибудь четная функция Матье, то $G(\eta)$ *удовлетворяет однородному интегральному уравнению*

$$G(\eta)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos\eta\cos\theta}\,G(\theta)\,d\theta,$$

где $k=\sqrt{32q}$. Этот результат подсказывается решением уравнения Лапласа, данным в § 18.3.

Ибо если $x+iy=h\operatorname{ch}(\xi+i\eta)$ и если $F(\xi)$ и $G(\eta)$ суть решения дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2F(\xi)}{d\xi^2}-(A+m^2h^2\operatorname{ch}^2\xi)\,F(\xi)=0,$$

$$\frac{d^2G(\eta)}{d\eta^2}+(A+m^2h^2\cos^2\eta)\,G(\eta)=0,$$

то по § 19.1 $F(\xi)\,G(\eta)\,e^{miz}$ будет частным решением уравнения Лапласа. Если это решение содержится в общем решении

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(h\operatorname{ch}\xi\cos\eta\cos\theta+h\operatorname{sh}\xi\sin\eta\sin\theta+iz,\ \theta)\,d\theta,$$

---

[1]) Это интегральное уравнение и разложения § 19.3 были опубликованы Уиттекером (Whittaker, Proc. Int. Congress of Math., 1912). Интегральное уравнение было известно ему еще в 1904 г.; см. Trans. Camb. Phil. Soc., XXI (1912), 193.

данном в § 18.3, то естественно ожидать, что[1])

$$f(v,\ \theta) \equiv F(0)\, e^{mv}\, \varphi(\theta),$$

где $\varphi(\theta)$ — функция от θ, подлежащая определению. Таким образом,

$$F(\xi)\, G(\eta)\, e^{miz} = \int_{-\pi}^{\pi} F(0)\, \varphi(\theta) \exp\{mh \operatorname{ch}\xi \cos\eta \cos\theta + mh \operatorname{sh}\xi \sin\eta \sin\theta + miz\}\, d\theta.$$

Так как ξ и η — независимые переменные, то мы можем положить $\xi = 0$; таким образом, мы приходим к рассмотрению возможности того, что уравнение Матье имеет решение вида

$$G(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{mh \cos\eta \cos\theta} \varphi(\theta)\, d\theta.$$

19.22. Доказательство того, что четные функции Матье удовлетворяют интегральному уравнению

Легко убедиться (§ 5.31, часть I) в том, что если $\varphi(\theta)$ — аналитическая функция в промежутке $(-\pi,\ \pi)$ и если $G(\eta)$ *определяется* равенством

$$G(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{mh \cos\eta \cos\theta} \varphi(\theta)\, d\theta,$$

то $G(\eta)$ будет четной периодической целой функцией от η, и что

$$\frac{d^2 G(\eta)}{d\eta^2} + (A + m^2h^2 \cos^2\eta)\, G(\eta) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \{m^2h^2(\sin^2\eta \cos^2\theta + \cos^2\eta) - mh \cos\eta \cos\theta + A\}\, e^{mh\cos\eta\cos\theta} \varphi(\theta)\, d\theta =$$

$$= -\left[\{mh \sin\theta \cos\eta\, \varphi(\theta) + \varphi'(\theta)\}\, e^{mh\cos\eta\cos\theta}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \{\varphi''(\theta) + (A + m^2h^2\cos^2\theta)\, \varphi(\theta)\}\, e^{mh\cos\eta\cos\theta}\, d\theta,$$

если проинтегрируем по частям.

Но если $\varphi(\theta)$ — *такая периодическая функция* (*с периодом* 2π), *что*

$$\varphi''(\theta) + (A + m^2h^2\cos^2\theta)\, \varphi(\theta) = 0,$$

---

[1]) Постоянная $F(0)$ введена для упрощения алгебраических действий.

то как интеграл, так и проинтегрированный член равны нулю; другими словами, $G(\eta)$, определяемая интегралом, будет периодическим решением уравнения Матье.

Следовательно, $G(\eta)$ есть четное периодическое решение Матье, если $\varphi(\theta)$ — периодическое решение уравнения Матье с теми же самыми постоянными; поэтому функция $\varphi(\theta)$ отличается лишь постоянным множителем от $G(\theta)$; пусть $\varphi(\theta)$ равна $\lambda G(\theta)$.

[В случае, когда уравнение Матье имеет два периодических решения, если только такой случай существует, мы имеем $\varphi(\theta) = \lambda G(\theta) + G_1(\theta)$, где $G_1(\theta)$ — нечетная периодическая функция; но

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{mh\cos\eta\cos\theta} G_1(\theta)\,d\theta$$

обращается в нуль, и дальнейшие рассуждения не меняются.]

Если взять a и q в качестве параметров уравнения Матье вместо A и mh, то очевидно, что $mh = \sqrt{32q} = k$.

Таким образом, мы показали, что если $G(\eta)$ — четное периодическое решение уравнения Матье, то

$$G(\eta) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos\eta\cos\theta} G(\theta)\,d\theta$$

— результат, высказанный в § 19.21.

Из § 11.23 части I известно, что это интегральное уравнение имеет решение только тогда, когда λ — одно из характеристических значений. В § 19.3 будет показано, что для таких значений λ интегральное уравнение дает простой способ для построения четных функций Матье.

Пример 1. Показать, что нечетные функции Матье удовлетворяют интегральному уравнению

$$G(\eta) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\sin\eta\sin\theta)\, G(\theta)\,d\theta\ ^{1)}.$$

Пример 2. Показать, что как четная, так и нечетная функции Матье удовлетворяют интегральному уравнению

$$G(\eta) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\sin\eta\sin\theta} G(\theta)\,d\theta.$$

---

[1]) Утверждения примеров 1 и 2 ошибочны. Уравнению примера 1 не удовлетворяют функции se_{2n}, а уравнению примера 2 не удовлетворяют

Пример 3. Показать, что, когда эксцентриситет основного эллипса стремится к нулю, интегральное уравнение для четных функций Матье в пределе принимает вид

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\cos\theta} \cos n\theta \, d\theta.$$

19.3. Построение функций Матье

Теперь мы воспользуемся интегральным уравнением § 19.21 для построения функций Матье; за каноническую форму уравнения Матье примем

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (a + 16q\cos 2z)\,u = 0.$$

В частном случае, когда q равно нулю, периодические решения получаются при $a = n^2$, где n — любое целое число; этими решениями тогда будут

$$\begin{array}{lll} 1, & \cos z, & \cos 2z, \; \ldots, \\ & \sin z, & \sin 2z, \; \ldots \end{array}$$

Функции Матье, приводящиеся к этим функциям, когда $q \to 0$, обозначим через[1])

$$\begin{array}{llll} ce_0(z, q), & ce_1(z, q), & ce_2(z, q), & \ldots, \\ & se_1(z, q), & se_2(z, q), & \ldots \end{array}$$

функции se_{2n} и ce_{2n+1}. В этом легко убедиться, заметив, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\sin\eta\sin\theta} ce_{2n+1}(\theta)\,d\theta = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\sin\eta\sin\theta} se_{2n}(\theta)\,d\theta = 0.$$

Для функции $ce_{2n+1}(\eta)$ мы имеем доказанное выше интегральное уравнение

$$ce_{2n+1}(\eta) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos\eta\cos\theta} ce_{2n+1}(\theta)\,d\theta.$$

Для функции $se_{2n}(\eta)$ имеет место следующее уравнение:

$$se_{2n}(\eta) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos\eta\cos\theta \operatorname{sh}(k\sin\eta\sin\theta)\, se_{2n}(\theta)\,d\theta$$

[см Boole, On Certain Classes of Mathieu Functions, Proc. London Math, Soc. XX (1921) и В. Купрадзе, О функциях Mathieu — Hankel'я. Труды Матем. ин-та АН СССР, V (1933), № 6]. — *Прим. ред.*

[1]) Обозначения Уиттекера — косинус и синус эллиптического цилиндра. — *Прим. ред.*

Чтобы вполне определить эти функции, возьмем коэффициенты при $\cos nz$ и $\sin nz$ в рядах Фурье для $ce_n(z, q)$ и $se_n(z, q)$ равными единице.

Функции $ce_n(z, q)$, $se_n(z, q)$ будем называть *функциями Матье порядка n*.

Приступим теперь к нахождению $ce_0(z, q)$.

Так как $ce_0(z, 0) = 1$, то видим, что $\lambda \to (2\pi)^{-1}$, когда $q \to 0$. Соответственно этому предположим, что для любого значения q характеристическое значение величины λ, соответствующее функции $ce_0(z, q)$, может быть разложено в ряд

$$(2\pi\lambda)^{-1} = 1 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \ldots$$

и что

$$ce_0(z, q) = 1 + q\beta_1(z) + q^2\beta_2(z) + \ldots,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — числовые постоянные, а $\beta_1(z), \beta_2(z), \ldots$ — периодические функции от z, не зависящие от q и не содержащие свободных членов.

Подставляя в интегральное уравнение, найдем, что

$$\begin{aligned}(1 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \ldots)\{1 + q\beta_1(z) + q^2\beta_2(z) + \ldots\} = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{1 + \sqrt{32q}\cos z\cos\theta + 16q\cos^2 z\cos^2\theta + \ldots\} \times \\ \times \{1 + q\beta_1(\theta) + q^2\beta_2(\theta) + \ldots)\,d\theta.\end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях q в этом равенстве и используя то обстоятельство, что $\beta_1(z), \beta_2(z), \ldots$ не содержат свободных членов, найдем последовательно

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 4, & \beta_1(z) &= 4\cos 2z,\\ \alpha_2 &= 14, & \beta_2(z) &= 2\cos 4z,\\ &\ldots & &\ldots\end{aligned}$$

и получим таким путем следующее разложение:

$$\begin{aligned}ce_0(z, q) = 1 + \left(4q - 28q^3 + \frac{2^7\cdot 29}{9}q^5 - \ldots\right)\cos 2z + \\ + \left(2q^2 - \frac{160}{9}q^4 + \ldots\right)\cos 4z + \left(\frac{4}{9}q^3 - \frac{13}{3}q^5 + \ldots\right)\cos 6z + \\ + \left(\frac{1}{18}q^4 - \ldots\right)\cos 8z + \left(\frac{1}{225}q^5 - \ldots\right)\cos 10z + \ldots;\end{aligned}$$

невыписанные члены будут порядка $O(q^6)$, когда $q \to 0$.

Значение a будет $-32q^2 + 224q^4 - \frac{2^{10}\cdot 29}{9}q^6 + O(q^8)$; отметим, что коэффициент при $\cos 2z$ в ряде для $ce_0(z, q)$ равен $-\frac{a}{8q}$.

Функции Матье высшего порядка могут быть получены подобным же образом из того же интегрального уравнения и из интегрального уравнения примера 1 § 19.22. Исследование сходимости полученного ряда отложим до § 19.61.

Пример 1. Получить следующие разложения[1]):

(I) $ce_0(z, q) =$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{2^{r+1} q^r}{r! \, r!} - \frac{2^{r+3} r (3r+4) q^{r+2}}{(r+1)! \, (r+1)!} + O(q^{r+4}) \right\} \cos 2rz,$$

(II) $ce_1(z, q) =$

$$= \cos z + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{2^r q^r}{(r+1)! \, r!} - \frac{2^{r+1} r q^{r+1}}{(r+1)! \, (r+1)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^r q^{r+2}}{(r-1)! \, (r+2)!} + O(q^{r+3}) \right\} \cos (2r+1) z,$$

(III) $se_1(z, q) =$

$$= \sin z + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{2^r q^r}{(r+1)! \, r!} + \frac{2^{r+1} r q^{r+1}}{(r+1)! \, (r+1)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^r q^{r+2}}{(r-1)! \, (r+2)!} + O(q^{r+3}) \right\} \sin (2r+1) z,$$

(IV) $ce_2(z, q) = \left\{ -2q + \frac{40}{3} q^3 + O(q^5) \right\} \cos 2z +$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{2^{r+1} q^r}{r! \, (r+2)!} + \frac{2^{r+1} r (47r^2 + 222r + 247) q^{r+2}}{3^2 (r+2)! \, (r+3)!} + O(q^{r+4}) \right\} \cos (2r+2) z,$$

где в каждом случае постоянная, включенная в символ O, зависит от r, но не от z.

(Whittaker)

Пример 2. Показать, что значения a, соответствующие функциям (I) $ce_0(z, q)$, (II) $ce_1(z, q)$, (III) $se_1(z, q)$, (IV) $ce_2(z, q)$, будут соответственно:

(I) $-32q^2 + 224q^4 - \frac{2^{10} \cdot 29}{9} q^6 + O(q^8),$

(II) $1 - 8q - 8q^2 + 8q^3 - \frac{8}{3} q^4 + O(q^5),$

(III) $1 + 8q - 8q^2 - 8q^3 - \frac{8}{3} q^4 + O(q^5),$

(IV) $4 + \frac{80}{3} q^2 - \frac{6104}{27} q^4 + O(q^6).$

(Mathieu)

Пример 3. Показать, что если n — целое число, то

$$ce_{2n+1}(z, q) = (-1)^n se_{2n+1}\left(z + \frac{1}{2}\pi, -q\right).$$

---

[1]) Главные члены этих рядов, данные в примере 4 в конце главы (стр. 287), были получены Матье.

19.31. Интегральные формулы для функций Матье

Так как функции Матье удовлетворяют однородному интегральному уравнению с симметричным ядром (§ 19.22, пример 3), то заключаем (§ 11.61, часть I), что

$$\int_{-\pi}^{\pi} ce_m(z, q)\, ce_n(z, q)\, dz = 0 \qquad (m \neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} se_m(z, q)\, se_n(z, q)\, dz = 0 \qquad (m \neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} ce_m(z, q)\, se_n(z, q)\, dz = 0.$$

Пример 1. Получить разложения вида:

$$\text{(I)} \qquad e^{k \cos z \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n ce_n(z, q)\, ce_n(0, q),$$

$$\text{(II)} \qquad \cos(k \sin z \sin \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n ce_n(z, q)\, ce_n(\theta, q),$$

$$\text{(III)} \qquad \sin(k \sin z \sin \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n se_n(z, q)\, se_n(\theta, q),$$

где

$$k = \sqrt{32q}.$$

Пример 2. Получить разложение

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, e^{ni\varphi}$$

как предельный случай разложений (II) и (III) примера 1.

19.4. Характер решения общего уравнения Матье; теория Флоке

Рассмотрим теперь характер решения уравнения Матье, когда на параметр a не наложено ограничений, необходимых для того, чтобы уравнение имело периодические решения; этот случай — важный в астрономических задачах, в отличие от других физических приложений.

Метод этот применим к любому линейному уравнению с *периодическими* коэффициентами, являющимися однозначными функциями независимой переменной; характер общих решений некоторых частных уравнений этого типа давно был подмечен астрономами, исходившими из обстоятельств, при которых возникают эти уравнения. Их заключения подтвердились следующим аналитическим исследованием, опубликованным Флоке в 1883 г.[1]).

Пусть $g(z)$, $h(z)$ — фундаментальная система решений уравнения Матье (или, в более общем случае, любого линейного уравнения, у которого коэффициенты имеют период 2π); тогда, если $F(z)$ — любой другой интеграл такого уравнения, то будем иметь

$$F(z) = Ag(z) + Bh(z),$$

где A и B — определенные постоянные.

Так как $g(z+2\pi)$, $h(z+2\pi)$, очевидно, решения уравнения[2]), то они могут быть представлены линейными комбинациями от $g(z)$ и $h(z)$ в виде

$$g(z+2\pi) = \alpha_1 g(z) + \alpha_2 h(z), \quad h(z+2\pi) = \beta_1 g(z) + \beta_2 h(z),$$

где α_1, α_2, β_1, β_2 — определенные постоянные; а тогда

$$F(z+2\pi) = (A\alpha_1 + B\beta_1)\, g(z) + (A\alpha_2 + B\beta_2)\, h(z).$$

Если A и B взяты так, что они удовлетворяют уравнениям

$$A\alpha_1 + B\beta_1 = kA, \quad A\alpha_2 + B\beta_2 = kB,$$

то будем иметь

$$F(z+2\pi) = kF(z),$$

где k — постоянная[3]).

Эти уравнения имеют ненулевые решения тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - k & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - k \end{vmatrix} = 0.$$

[1]) Floquet, Ann. de l'École norm. sup. (2), XII (1883), 47. Анализ Флоке является естественным продолжением теории Пикара о дифференциальных уравнениях с двоякопериодическими коэффициентами (§ 20.1) и теории фундаментального уравнения, принадлежащей Фуксу и Гамбургеру.

[2]) Эти решения могут и не совпадать соответственно с $g(z)$, $h(z)$, так как решение уравнения с периодическими коэффициентами не обязано быть периодическим. Возьмем, например, простой случай: $u = e^z \sin z$ является решением уравнения

$$\frac{du}{dz} - (1 + \operatorname{ctg} z)\, u = 0.$$

[3]) Буква k применена в этом частном смысле только в этом параграфе. Ее не следует смешивать с постоянной k § 19.21, которая соответствует параметру q уравнения Матье.

Если k — какой-либо корень этого уравнения, то может быть построена функция $F(z)$, являющаяся решением данного дифференциального уравнения и такая, что

$$F(z+2\pi)=kF(z).$$

Определяя μ уравнением $k=e^{2\pi\mu}$ и написав $\varphi(z)$ вместо $e^{-\mu z}F(z)$, мы видим, что

$$\varphi(z+2\pi)=e^{-\mu(z+2\pi)}F(z+2\pi)=\varphi(z).$$

Таким образом, дифференциальное уравнение имеет частное решение вида $e^{\mu z}\varphi(z)$, *где* $\varphi(z)$ — *периодическая функция с периодом* 2π.

Мы видели, что в физических задачах параметры, входящие в дифференциальное уравнение, должны быть выбраны так, чтобы $k=1$ было корнем квадратного уравнения, и тогда некоторое решение будет периодическим. Однако в астрономических проблемах, в которых параметры являются данными, вообще говоря, $k\neq 1$ и периодического решения не существует.

В частном случае общего уравнения Матье или уравнения Хилла фундаментальной системой решений[1]) будет система $e^{\mu z}\varphi(z)$, $e^{-\mu z}\varphi(-z)$, так как уравнение не изменяется при замене $-z$ на z; полное же решение общего уравнения Матье имеет вид

$$u=c_1e^{\mu z}\varphi(z)+c_2e^{-\mu z}\varphi(-z),$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а μ — определенная функция от a и q.

Пример. Показать, что корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha_1-k & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2-k \end{vmatrix}=0$$

не зависят от выбора системы решений $g(z)$ и $h(z)$.

19.41. Метод решения Хилла

После того как общий функциональный характер решения уравнений с периодическими коэффициентами найден по теории Флоке, можно было бы ожидать, что и нахождение самих решений уравнений Матье и Хилла будет сравнительно просто; однако на самом деле это не так. Например, в случае общего уравнения Матье нужно получить решение вида

$$y=e^{\mu z}\varphi(z),$$

[1]) Отношение этих решений не будет даже периодичным, тем более оно не будет постоянным.

где $\varphi(z)$ — периодическая функция, а μ — функция параметров a и q. Трудность задачи заключается в определении μ; когда же это сделано, то определение самой функции $\varphi(z)$ представляет сравнительно меньшую трудность.

Первый успешный метод подхода к этой задаче был опубликован Хиллом в мемуаре, указанном в § 19.12; так как этот метод для уравнения Хилла не представляет большей трудности, чем для частного случая общего уравнения Матье, то рассмотрим прямо уравнение Хилла, т. е.

$$\frac{d^2u}{dz^2}+J(z)\,u=0,$$

где $J(z)$ — четная функция от z с периодом π.

Большой интерес представляют два следующих случая; рассуждения в каждом из них будут одинаковы.

(I) Астрономический случай, когда z вещественно и для вещественных значений z функция $J(z)$ может быть разложена в ряд

$$J(z)=\theta_0+2\theta_1\cos 2z+2\theta_2\cos 4z+\ldots,$$

где коэффициенты θ_n — заданные постоянные и ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\theta_n$ абсолютно сходится.

(II) Случай, когда z — комплексная переменная, а $J(z)$ — аналитическая функция в полосе плоскости (содержащей вещественную ось), ограниченной прямыми, параллельными вещественной оси. Разложение функции $J(z)$ в ряд Фурье $\theta_0+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\theta_n\cos 2nz$ тогда имеет место (§ 9.11, часть I) внутри полосы, и, как и выше, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\theta_n$ абсолютно сходится.

Положив $\theta_{-n}=\theta_n$, ищем решение уравнения Хилла в виде

$$u=e^{\mu z}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n e^{2niz}.$$

[В случае (II) оно будет решением, аналитическим в указанной полосе (§§ 10.2, часть I, 19.4); в случае (I) нужно будет доказать в заключение (см. примечание в конце § 19.42), что коэффициенты b_n таковы, что ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}n^2b_n$ абсолютно сходится, чтобы оправдать операции, которые мы сейчас будем производить.]

После подстановки в уравнение найдем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\mu+2ni)^2\,b_n e^{(\mu+2ni)z}+\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\theta_n e^{2niz}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n e^{(\mu+2ni)z}\right)=0.$$

Перемножая абсолютно сходящиеся ряды и приравнивая нулю коэффициенты при степенях e^{2iz} (§§ 9.6—9.632, часть I), получим систему уравнений

$$(\mu+2ni)^2 b_n+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\theta_m b_{n-m}=0 \qquad (n=\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если исключить коэффициенты b_n с помощью определителей (после деления n-го уравнения на θ_0-4n^2 для обеспечения сходимости), то получим[1]) уравнение Хилла:

$$\left|\begin{array}{ccccccc}
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \dfrac{(i\mu+4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_1}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_2}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_3}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_4}{4^2-\theta_0} & \ldots \\
\ldots & \dfrac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \dfrac{(i\mu+2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_2}{2^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_3}{2^2-\theta_0} & \ldots \\
\ldots & \dfrac{-\theta_2}{0^2-\theta} & \dfrac{-\theta_1}{0^2-\theta_0} & \dfrac{(i\mu)^2-\theta_0}{0^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_1}{0^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_2}{0^2-\theta_0} & \ldots \\
\ldots & \dfrac{-\theta_3}{2^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_2}{2^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \dfrac{(i\mu-2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \ldots \\
\ldots & \dfrac{-\theta_4}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_3}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_2}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_1}{4^2-\theta_0} & \dfrac{(i\mu-4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right| = 0.$$

Обозначим через $\Delta(i\mu)$ стоящий слева определитель, который будем называть определителем Хилла; тогда уравнение, определяющее μ, будет

$$\Delta(i\mu)=0.$$

19.42. Вычисление определителя Хилла

Мы найдем теперь чрезвычайно простое выражение для определителя Хилла, а именно:

$$\Delta(i\mu)\equiv\Delta(0)-\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right)\operatorname{cosec}^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right).$$

Принимая обозначение § 2.8 части I, можем написать

$$\Delta(i\mu)\equiv[A_{m,n}],$$

где

$$A_{m,m}=\frac{(i\mu-2m)^2-\theta_0}{4m^2-\theta_0},\qquad A_{m,n}=\frac{-\theta_{m-n}}{4m^2-\theta_0}\qquad (m\neq n).$$

---

[1]) Так как не все коэффициенты b_n равны нулю, то мы можем получить этот бесконечный определитель как результат исключения неизвестных (элиминант) из системы линейных уравнений, умножая уравнения системы на надлежаще выбранные алгебраические дополнения определителя и складывая их.

Определитель $[A_{m,n}]$ будет только *условно* сходящимся, так как произведение элементов главной диагонали не является абсолютно сходящимся (§§ 2.81, 2.7, часть I).

Можно, однако, получить *абсолютно* сходящийся определитель, $\Delta_1(i\mu)$ делением n-го линейного уравнения § 19.41 на $\theta_0-(i\mu-2n)^2$ вместо деления на θ_0-4n^2. Напишем этот определитель $\Delta_1(i\mu)$ в виде $[B_{m,n}]$, где

$$B_{m,m}=1, \quad B_{m,n}=\frac{-\theta_{m-n}}{(2m-i\mu)^2-\theta_0} \qquad (m\neq n).$$

Абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\theta_n$ обеспечивает сходимость определителя $[B_{m,n}]$, за исключением случая, когда μ имеет такое значение, что знаменатель одного из выражений $B_{m,n}$ равен нулю.

Из определения бесконечного определителя (§ 2.8, часть I) следует, что

$$\Delta(i\mu)=\Delta_1(i\mu)\lim_{p\to\infty}\prod_{n=-p}^{p}\left\{\frac{\theta_0-(i\mu-2n)^2}{\theta_0-4n^2}\right\},$$

и таким образом,

$$\Delta(i\mu)=-\Delta_1(i\mu)\frac{\sin\frac{1}{2}\pi(i\mu-\sqrt{\theta_0})\sin\frac{1}{2}\pi(i\mu+\sqrt{\theta_0})}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)}.$$

Если выписать теперь определитель $\Delta_1(i\mu)$ в развернутом виде, то легко видеть, что: (I) $\Delta_1(i\mu)$ — четная периодическая функция от μ с периодом $2i$, (II) $\Delta_1(i\mu)$ — аналитическая функция (§§ 2.81, 3.34, 5.3, часть I) от μ (если не считать очевидных простых полюсов), которая стремится к единице, когда вещественная часть μ стремится к $\pm\infty$.

Если взять теперь постоянную K так, чтобы функция $D(\mu)$, определяемая равенством

$$D(\mu)\equiv\Delta_1(i\mu)-K\left\{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi\left(i\mu+\sqrt{\theta_0}\right)-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi\left(i\mu-\sqrt{\theta_0}\right)\right\},$$

не имела полюса в точке $\mu=i\sqrt{\theta_0}$, то вследствие того, что $D(\mu)$ — четная периодическая функция от μ, $D(\mu)$ не будет иметь полюсов ни в одной из точек

$$2ni\pm i\sqrt{\theta_0},$$

где n — любое целое число.

Поэтому функция $D(\mu)$ — периодическая функция от μ (с периодом $2i$), не имеющая полюсов и, очевидно, ограниченная, когда $R(\mu)\to\pm\infty$. Условия теоремы Лиувилля (§ 5.63, часть I) удовлетворяются, и следовательно, $D(\mu)$ равна постоянной; заставляя $\mu \to +\infty$, видим, что эта постоянная равна единице.

Поэтому

$$\Delta_1(i\mu) = 1 + K\left\{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi\left(i\mu + \sqrt{\theta_0}\right) - \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi\left(i\mu - \sqrt{\theta_0}\right)\right\},$$

и следовательно,

$$\Delta(i\mu) = -\frac{\sin\frac{1}{2}\pi\left(i\mu - \sqrt{\theta_0}\right)\sin\frac{1}{2}\pi\left(i\mu + \sqrt{\theta_0}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)} + 2K\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right).$$

Для определения K положим $\mu = 0$; тогда

$$\Delta(0) = 1 + 2K\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right).$$

Отсюда после вычитания найдем

$$\Delta(i\mu) = \Delta(0) - \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)},$$

что и является требуемым результатом.

Корни определителя Хилла являются поэтому корнями уравнения

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right) = \Delta(0)\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right).$$

Когда μ таким образом определено, то коэффициенты b_n могут быть выражены через b_0 и миноры определителя $\Delta(i\mu)$, и решение дифференциального уравнения Хилла на этом заканчивается.

[В случае (I) § 19.41 сходимость ряда $\sum n^2 |b_n|$ вытекает из теоремы § 2.82 части I об изменении элементов в сходящихся бесконечных определителях, ибо $\sum n^2 |b_n|$ равна $|b_0| \sum_{m=-\infty}^{\infty} |C_{m,0}| : |C_{0,0}|$, где $C_{m,n}$ — минор элемента $B_{m,n}$ в определителе $\Delta_1(i\mu)$, а $\sum |C_{m,0}|$ есть определитель, получаемый заменой элементов строки, проходящей через начало, числами, модули которых ограничены.]

Хиллом было показано, что для его астрономической задачи можно получить весьма хорошее приближение для значения μ, беря только три центральных строки и столбца его определителя.

19.5. Теория Линдемана — Стилтьеса, относящаяся к общему уравнению Матье

До сих пор уравнение Матье рассматривалось как линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами. Несколько чрезвычайно интересных свойств уравнения Матье было получено Линдеманом [1]) подстановкой $\zeta=\cos^2 z$, которая преобразует первоначальное уравнение в уравнение с рациональными коэффициентами, а именно:

$$4\zeta(1-\zeta)\frac{d^2u}{d\zeta^2}+2(1-2\zeta)\frac{du}{d\zeta}+(a-16q+32q\zeta)u=0.$$

Хотя это уравнение и походит несколько на гипергеометрическое уравнение, однако оно более высокого типа, чем уравнения, рассмотренные в главах 14 и 16, так как оно имеет две правильные особые точки в 0 и 1 и неправильную особую точку на ∞, между тем как все три особые точки гипергеометрического уравнения правильные, а уравнение для $W_{k,m}(z)$ имеет одну неправильную особую точку и только одну правильную особую точку.

Дадим краткое изложение анализа Линдемана с некоторыми видоизменениями, принадлежащими Стилтьесу [2]).

19.51. Форма Линдемана теоремы Флоке

Так как уравнение Матье (в форме Линдемана) имеет особые точки при $\zeta=0$ и $\zeta=1$, причем показатели в каждой равны 0, $\frac{1}{2}$, то существуют решения вида

$$y_{00}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n,\qquad y_{01}=\zeta^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b_n\zeta^n,$$

$$y_{10}=\sum_{n=0}^{\infty}a'_n(1-\zeta)^n,\quad y_{11}=(1-\zeta)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}b'_n(1-\zeta)^n;$$

первые два ряда сходятся, когда $|\zeta|<1$, последние—когда $|1-\zeta|<1$.

Если плоскость ζ разрезана вдоль вещественной оси от 1 до $+\infty$ и от 0 до $-\infty$, то четыре функции, определяемые этими рядами, будут однозначными в разрезанной плоскости; соотношения вида

$$y_{10}=\alpha y_{00}+\beta y_{01},\quad y_{11}=\gamma y_{00}+\delta y_{01}$$

будут существовать во всех точках разрезанной плоскости.

---

[1]) Lindemann, Math. Ann., XXII (1883), 117.

[2]) Stieltjes, Astr. Nach., CIX (1884), столбцы 145—152, 261—266. Анализ весьма похож на примененный Эрмитом (Hermite) в его лекциях в École Polytechnique в 1872—1873 г. [Oeuvres, III (Paris, 1912), 118—122)] в связи с уравнением Ламе; см. § 23.7.

Теперь предположим, что ζ описывает петлю вокруг начала координат, так что эта петля пересекает разрез от $-\infty$ до 0; аналитическим продолжением y_{10} будет $\alpha y_{00}-\beta y_{01}$ (так как y_{00} не изменится при обходе этой петли, а y_{01} изменит знак), а продолжением y_{11} будет $\gamma y_{00}-\delta y_{01}$; *таким образом, обход петли не окажет влияния на* $Ay_{10}^2+By_{11}^2$, *если*

$$A(\alpha y_{00}+\beta y_{01})^2+B(\gamma y_{00}+\delta y_{01})^2 \equiv A(\alpha y_{00}-\beta y_{01})^2+B(\gamma y_{00}-\delta y_{01})^2,$$

т. е. если

$$A\alpha\beta+B\gamma\delta=0.$$

Кроме того, $Ay_{10}^2+By_{11}^2$, очевидно, не имеет точки ветвления также в $\zeta=1$, и таким образом, при $A\alpha\beta+B\gamma\delta=0$ эта функция не имеет точек ветвления ни в 0, ни в 1; так как она не имеет других возможных особых точек в конечной части плоскости, то *она должна быть целой функцией от* ζ. Два выражения

$$A^{\frac{1}{2}}y_{10}+iB^{\frac{1}{2}}y_{11}, \quad A^{\frac{1}{2}}y_{10}-iB^{\frac{1}{2}}y_{11}$$

являются, следовательно, двумя решениями уравнения Матье, произведение которых — целая функция от ζ.

[Это равносильно тому (§ 19.4), что произведение выражений $e^{\mu z}\varphi(z)$ и $e^{-\mu z}\varphi(-z)$ является *периодической целой* функцией от z.]

19.52. Определение целой функции, связанной с общим уравнением Матье

Только что введенная целая функция $F(z)\equiv Ay_{10}^2+By_{11}^2$ может быть легко определена; ибо, если y_{10} и y_{11} — какие-либо решения уравнения

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2}+P(\zeta)\frac{du}{d\zeta}+Q(\zeta)u=0,$$

то их квадраты (а следовательно, и любая линейная комбинация их квадратов) удовлетворяют уравнению[1])

$$\frac{d^3y}{d\zeta^3}+3P(\zeta)\frac{d^2y}{d\zeta^2}+[P'(\zeta)+4Q(\zeta)+2\{P(\zeta)\}^2]\frac{dy}{d\zeta}+$$
$$+2[Q'(\zeta)+2P(\zeta)Q(\zeta)]y=0;$$

[1]) Appel, Comptes Rendus, XCI, (1880), 211—214; ср. пример 10 в конце главы 14 (стр. 102).

в рассматриваемом случае это уравнение приводится к

$$\zeta(1-\zeta)\frac{d^3F(\zeta)}{d\zeta^3}+\frac{3}{2}(1-2\zeta)\frac{d^2F(\zeta)}{d\zeta^2}+$$
$$+(a-1-16q+32q\zeta)\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}+16qF(\zeta)=0.$$

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n$ — ряд Маклорена для $F(\zeta)$; после подстановки легко получим рекуррентную формулу для коэффициентов c_n, а именно:

$$v_{n+1}c_{n+2}=u_nc_{n+1}+c_n,$$

где

$$u_n=\frac{(n+1)\{(n+1)^2-a+16q\}}{16q(2n+1)},\quad v_n=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{32q(2n-1)}.$$

На первый взгляд рекуррентная формула как будто указывает, что c_0 и c_1 могут быть взяты произвольно, а оставшиеся коэффициенты $c_2, c_3, \ldots$ вычислены в зависимости от них; но уравнение третьего порядка имеет особую точку при $\zeta=1$ и полученный таким образом ряд будет иметь только единичный радиус сходимости. Необходимо взять такое значение отношения $\frac{c_1}{c_0}$, чтобы ряд сходился для всех значений ζ.

Рекуррентная формула, написанная в виде

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=u_n+\frac{v_{n+1}}{\dfrac{c_{n+1}}{c_{n+2}}},$$

приводит к исследованию бесконечной непрерывной дроби

$$u_n+\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}+}\,\frac{v_{n+2}}{u_{n+2}+}\ldots=\lim_{m\to\infty}\left\{u_n+\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}+\ldots+\frac{v_{n+m}}{u_{n+m}}\right\}.$$

Непрерывная дробь в правой части может быть написана[1]) в виде

$$\frac{u_nK(n,n+m)}{K(n+1,n+m)},$$

где

$$K(n,n+m)=\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{v_{n+1}}{u_n} & 0 & \ldots \\ -u_{n+1}^{-1} & 1 & \dfrac{v_{n+2}}{u_{n+1}} & \ldots \\ 0 & -u_{n+2}^{-1} & 1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & \ldots & -u_{n+m}^{-1}, & 1 \end{vmatrix}.$$

[1]) Sylvester, Phil. Mag. (4), V (1853), 446 [Math. Papers, I, 609].

Предел этого определителя при $m \to \infty$ есть сходящийся определитель типа Коха (согласно примеру § 2.82 части I); а так как

$$\sum_{r=n}^{\infty} \left| \frac{v_{r+1}}{u_r u_{r+1}} \right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то легко видеть, что $K(n, \infty) \to 1$ при $n \to \infty$.

Поэтому, если

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{u_n K(n, \infty)}{K(n+1, \infty)},$$

то c_n удовлетворяет рекуррентной формуле, и так как $\frac{c_{n+1}}{c_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то получающийся ряд для $F(\zeta)$ будет целой функцией. Из рекуррентной формулы очевидно, что все коэффициенты c_n будут конечными, так как они конечны, когда n достаточно велико. Построение целой функции $F(\zeta)$ поэтому выполнено.

19.53. Решение уравнения Матье с помощью функции $F(\zeta)$

Если w_1 и w_2 — два частных решения уравнения

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2} + P(\zeta)\frac{du}{d\zeta} + Q(\zeta)u = 0,$$

то[1])

$$w_2 w_1' - w_1 w_2' = C \exp\left\{ -\int_0^{\zeta} P(\zeta)\, d\zeta \right\},$$

где C — определенная постоянная. Принимая за w_1 и w_2 те два решения общего уравнения Матье, произведение которых равно $F(\zeta)$, имеем

$$\frac{w_1'}{w_1} - \frac{w_2'}{w_2} = \frac{C}{\zeta^{\frac{1}{2}}(1-\zeta)^{\frac{1}{2}} F(\zeta)}, \quad \frac{w_1'}{w_1} + \frac{w_2'}{w_2} = \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)},$$

причем второе уравнение вытекает непосредственно из равенства

$$w_1 w_2 = F(\zeta).$$

---

[1]) Abel, Journ. für Math., II (1927), 22. Штрихи обозначают дифференцирование относительно ζ.

Решая эти уравнения относительно $\frac{w_1'}{w_1}$ и $\frac{w_2'}{w_2}$ и затем интегрируя, получим

$$w_1 = \gamma_1 \{F(\zeta)\}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2} C \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\zeta^{\frac{1}{2}} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}} F(\zeta)}\right\},$$

$$w_2 = \gamma_2 \{F(\zeta)\}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} C \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{\zeta^{\frac{1}{2}} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}} F(\zeta)}\right\},$$

где γ_1, γ_2 — постоянные интегрирования; очевидно, ничего не теряется в общности, если взять $c_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

Из первой формулы находим для малых значений $|\zeta|$

$$w_1 = 1 + C\zeta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(c_1 + C^2)\zeta + O\left(\zeta^{\frac{3}{2}}\right);$$

с другой стороны, в обозначениях § 19.51 мы имеем

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{1}{2} a + 8q.$$

Отсюда

$$C^2 = 16q - a - c_1.$$

Этим равенством определяется C в зависимости от a, q и c_1, причем значение c_1 равно

$$K(1, \infty)/\{u_0 K(0, \infty)\}.$$

Пример 1. Показать, что для числа μ в решениях уравнения Матье $e^{\pm \mu z}\varphi(\pm z)$, где $\varphi(z)$ — периодическая функция, имеем соотношение

$$\pi\mu = \pm C \int_0^\pi \frac{dz}{F(\cos^2 z)}.$$

Пример 2. Показать, что все нули функции $F(\zeta)$ простые, если только $C \neq 0$.

(Stieltjes)

[Если бы $F(\zeta)$ имела кратный нуль, то w_1 и w_2 имели бы тогда существенно особую точку.]

19.6. Второй метод построения функции Матье

До сих пор принималось, что все ряды § 19.3, дающие выражения для $ce_N(z, q)$ и $se_N(z, q)$, сходятся.

Теперь будет доказано, что $ce_N(z, q)$ и $se_N(z, q)$ — целые функции от z и что коэффициенты их разложений в ряды

Фурье являются степенными рядами относительно q, которые сходятся абсолютно, когда $|q|$ достаточно мал[1]).

Чтобы получить этот результат для функций $ce_N(z, q)$, покажем, как определяется частный интеграл уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (a + 16q\cos 2z)\,u = \psi(a, q)\cos Nz$$

в виде ряда Фурье, сходящегося во всей плоскости z; $\psi(a, q)$ — функция параметров a и q. Уравнение $\psi(a, q) = 0$ определяет тогда соотношение между a и q, которое приводит к функции Матье. Читатель, знакомый с методом Фробениуса[2]) для разыскания решений линейных дифференциальных уравнений в виде степенных рядов, заметит сходство нижеследующего анализа с его методом.

Положим $a = N^2 + 8p$, где N—нуль или положительное или отрицательное целое число. Уравнение Матье примет вид

$$\frac{d^2u}{dz^2} + N^2u = -8(p + 2q\cos 2z)\,u.$$

Если пренебречь p и q, то одним из решений этого уравнения будет

$$u = \cos Nz = U_0(z).$$

Чтобы получить более точное приближение, представим

$$-8(p + 2q\cos 2z)\,U_0(z)$$

в виде суммы косинусов, т. е. в виде

$$-8\,\{q\cos(N-2)z + p\cos Nz + q\cos(N+2)z\} = V_1(z).$$

Затем, вместо того чтобы решать уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} + N^2u = V_1(z),$$

отбросим члены[3]) в $V_1(z)$, которые содержат $\cos Nz$, т. е. рассмотрим функцию $W_1(z)$, где

$$W_1(z) = V_1(z) + 8p\cos Nz.$$

---

[1]) Существенной частью этой теоремы является *доказательство сходимости рядов, которые встречаются в коэффициентах*; уже известно (§§ 10.2, 10.21, часть I), что решения уравнения Матье будут целыми функциями от z, а существование разложения Фурье (в случае *периодических* решений) вытекает из § 9.11 части I.

[2]) Frobenius, Journ. für Math., LXXVI (1873), 214—224.

[3]) Основанием для такого отбрасывания служит то обстоятельство, что частный интеграл уравнения $\frac{d^2u}{dz^2} + N^2u = \cos Nz$ содержит непериодические члены.

Одним из интегралов уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2}+N^2u=W_1(z)$$

будет

$$u=2\left\{\frac{q}{1(1-N)}\cos(N-2)z+\frac{q}{1(1+N)}\cos(N+2)z\right\}=U_1(z).$$

Представим теперь $-8(p+2q\cos 2z)U_1(z)$ как сумму косинусов; обозначив эту сумму через $V_2(z)$, возьмем α_2 в виде такой функции от p и q, что $V_2(z)+\alpha_2\cos Nz$ не содержит члена с $\cos Nz$, и положим

$$V_2(z)+\alpha_2\cos Nz=W_2(z).$$

Решим уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2}+N^2u=W_2(z)$$

и будем продолжать тот же процесс. Таким путем мы получим три совокупности функций $U_m(z)$, $V_m(z)$, $W_m(z)$, которые определены так, что $U_m(z)$ и $W_m(z)$ не содержат члена с $\cos Nz$, когда $m\neq 0$, и

$$W_m(z)=V_m(z)+\alpha_m\cos Nz,$$
$$V_m(z)=-8(p+2q\cos 2z)U_{m-1}(z),$$
$$\frac{d^2U_m(z)}{dz^2}+N^2U_m(z)=W_m(z),$$

где α_m — функция от p и q, но не от z.

Тогда

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2}+N^2\right\}\sum_{m=0}^{n}U_m(z)=\sum_{m=1}^{n}W_m(z)=\sum_{m=1}^{n}V_m(z)+\left(\sum_{m=1}^{n}\alpha_m\right)\cos Nz=$$
$$=-8(p+2q\cos 2z)\sum_{m=0}^{n-1}U_{m-1}(z)+\left(\sum_{m=1}^{n}\alpha_m\right)\cos Nz.$$

Поэтому, если $U(z)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}U_m(z)$ — равномерно сходящийся ряд аналитических функций в некоторой двумерной области плоскости z, то мы имеем (§ 5.3, часть I)

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}+(a+16q\cos 2z)U(z)=\psi(a,\ q)\cos Nz,$$

где

$$\psi(a,\ q)=\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m.$$

Очевидно, что если a взято так, что $\psi(a, q) = 0$, то $U(z)$ приводится к $ce_N(z)$.

Подобный же процесс, очевидно, может быть выполнен для функций $se_N(z, q)$, если применим синусы аргументов, кратных z.

19.61. Сходимость рядов, определяющих функции Матье

Рассмотрим теперь разложения § 19.6 более подробно с целью исследовать сходимость содержащихся в них рядов.

Когда $n \geqslant 1$, очевидно, можно положить

$$U_n(z) = \sum_{r=1}^{n}{}^{*} \beta_{n,r} \cos(N-2r) z + \sum_{r=1}^{n} \alpha_{n,r} \cos(N+2r) z,$$

причем звездочка обозначает, что первое суммирование распространяется до наибольшего значения r, для которого $r \leqslant \frac{1}{2} N$.

Так как

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2} + N^2\right\} U_{n+1}(z) = \alpha_{n+1} \cos Nz - 8(p + 2q \cos 2z) U_n(z),$$

то из сравнения коэффициентов при $\cos(N \pm 2r) z$ в обеих частях уравнения [1]) находим

$$\alpha_{n+1} = 8q(\alpha_{n,1} + \beta_{n,1}),$$

$$r(r+N)\alpha_{n+1,r} = 2\{p\alpha_{n,r} + q(\alpha_{n,r-1} + \alpha_{n,r+1})\} \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

$$r(r-N)\beta_{n+1,r} = 2\{p\beta_{n,r} + q(\beta_{n,r-1} + \beta_{n,r+1})\} \qquad \left(r \leqslant \frac{1}{2}N\right).$$

Эти формулы будут справедливы при всех значениях индексов, если принять следующие соглашения [2]):

(I) $\alpha_{n,0} = \beta_{n,0} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad \alpha_{n,r} = \beta_{n,r} = 0, \qquad (r > n),$

(II) $\beta_{n, \frac{1}{2}N+1} = \beta_{n, \frac{1}{2}N-1}$, когда N четное и $r = \frac{1}{2} N$,

(III) $\beta_{n, \frac{1}{2}(N+1)} = \beta_{n, \frac{1}{2}(N-1)}$, когда N нечетное и $r = \frac{1}{2}(N-1)$.

Легко получить следующие частные формулы:

(I′) $\alpha_1 = 8p \qquad (N \neq 1), \quad \alpha_1 = 8(p+q) \qquad (N = 1),$

(II′) $\alpha_{n,n} = \dfrac{(2q)^n N!}{n!(N+n)!} \qquad (N \neq 0), \quad \alpha_{n,n} = \dfrac{2^{n+1} q^n}{(n!)^2} \qquad (N = 0),$

(III′) $\alpha_{n,r}$ и $\beta_{n,r}$ — однородные полиномы n-й степени относительно p и q.

---

[1]) Когда $N = 0$ или 1, эти уравнения должны быть видоизменены отбрасыванием всех коэффициентов $\beta_{n,r}$.

[2]) Соглашения (II) и (III) возникают благодаря тому, что

$$\cos z = \cos(-z), \quad \cos 2z = \cos(-2z).$$

Если $\sum_{n=r}^{\infty} \alpha_{n,r} = A_r$, $\sum_{n=r}^{\infty} \beta_{n,r} = B_r$, то мы имеем:

$$\psi(a, q) = 8p + 8q(A_1 + B_1) \qquad (N \neq 1)$$

$$r(r+N)A_r = 2\{pA_r + q(A_{r-1} + A_{r+1})\}, \tag{A}$$

$$r(r-N)B_r = 2\{pB_r + q(B_{r-1} + B_{r+1})\}, \tag{B}$$

где $A_0 = B_0 = 1$ и B_r подчиняется условиям, вытекающим из (II) и (III).

Положим теперь

$$w_r = -q\{r(r+N) - 2p\}^{-1}, \quad w'_r = -q\{r(r-N) - 2p\}^{-1}.$$

Результат исключения $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}, A_{r+1}, \ldots$ из совокупности уравнений (A) выразится так:

$$A_r\Delta_0 = (-1)^r w_1 w_2 \ldots w_r \Delta_r,$$

где Δ_r — бесконечный определитель типа Коха (§ 2.82, часть I):

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & w_{r+1} & 0 & 0 \ldots \\ w_{r+2} & 1 & w_{r+2} & 0 \ldots \\ 0 & w_{r+3} & 1 & w_{r+3} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Этот определитель сходится абсолютно (пример § 2.82, часть I), если знаменатели у всех w_r отличны от нуля; $\Delta_r \to 1$, когда $r \to \infty$ (§ 19.52). Далее, если p и q заданы так, что $\Delta_0 \neq 0$, $2p \neq r(r+N)$[1]), где $r = 1, 2, 3, \ldots$, то ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r w_1 w_2 \ldots w_r \Delta_r \Delta_0^{-1} \cos(N + 2r)z$$

представляет целую функцию от z.

Подобным же образом $B_r D_0 = (-1)^r w'_1 w'_2 \ldots w'_r D_r$, где D_r — определитель конечного порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & w'_{r+1} & 0 \ldots \\ w'_{r+2} & 1 & w'_{r+2} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

---

[1]) Действительно, если $|q| < 1$, можно показать, что $\Delta_0 \neq 0$ и $2p \neq r(r+N)$ при всяком N.

Для этого необходимо принять во внимание взаимное расположение характеристических чисел $a = N^2 + 8p$ и асимптотический характер их распределения, вытекающий из вариационного принципа для собственных значений уравнения типа Штурма — Лиувилля, каковым является уравнение Матье.

Подробно см. В. Д. Купрадзе, Специальные задачи дифракции в теории упругости (Труды Математического ин-та Академии наук СССР, 1933, № 6). — *Прим. ред.*

Последняя строка в этом определителе будет $0, 0, \ldots, 0, 2w'_{\frac{1}{2}N}, 1$ или $0, 0, \ldots, 0, w'_{\frac{1}{2}(N-1)}, 1 + w'_{\frac{1}{2}(N-1)}$, смотря по тому, будет ли N четным или нечетным. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} U_n(z)$ имеет вид

$$\cos Nz + \Delta_0^{-1} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r w_1 w_2 \ldots w_r \Delta_r \cos(N+2r)z + \\ + D_0^{-1} \sum_{r=1}^{r \leqslant \frac{1}{2}N} (-1)^r w'_1 w'_2 \ldots w'_r D_r \cos(N-2r)z.$$

Входящие в это выражение ряды сходятся равномерно в любой ограниченной области значений z, так что допустимо почленное дифференцирование.

Далее, условие $\psi(a, q) = 0$ эквивалентно условию

$$p = q\left(\frac{w_1\Delta_1}{\Delta_0} + \frac{w'_1 D_1}{D_0}\right),$$

т. е.

$$p\Delta_0 D_0 - q\left(w_1\Delta_1 D_0 + w'_1 D_1 \Delta_0\right) = 0.$$

Если мы обе части этого уравнения помножим на

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1 - \frac{2p}{r(r+N)}\right\} \prod_{r=1}^{r \leqslant \frac{1}{2}N}\left\{1 - \frac{2p}{r(r-N)}\right\},$$

то слева получим целую функцию $\Psi(a, q)$ от p, q; члены функции $\Psi(a, q)$ с наименьшими степенями относительно p и q будут соответственно

$$p \text{ и } q^2\left\{\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+1}\right\}.$$

Разложим теперь интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{p}{\Psi(N^2+8p, q)} \frac{\partial\Psi(N^2+8p, q)}{\partial p}\, dp$$

по возрастающим степеням q (§ 7.31, часть I), принимая за контур интегрирования малую окружность в плоскости p с центром в начале координат и предполагая $|q|$ настолько малым, что $\Psi(N^2+8p, q)$ имеет только один нуль внутри этого контура. Тогда, как в § 7.31, найдем, что для достаточно малых значений $|q|$ мы можем разложить p в степенной ряд по q, начинающийся [1]) с члена q^2; и если $|q|$ достаточно мал, то D_0 и Δ_0 не будут равны нулю, так как они оба равны 1 при $q = 0$.

---

[1]) Если $N = 1$, этот результат видоизменится, так как тогда имеется добавочный член q в правой части, а член $\frac{q^2}{N-1}$ выпадет.

Подставив вместо p его выражение через q в ряд для $U(z)$, видим, что ряды, фигурирующие в $ce_N(z, q)$, абсолютно сходятся при $|q|$ достаточно малом.

Ряды, фигурирующие в $se_N(z, q)$, очевидно, могут быть исследованы подобным же образом.

19.7. Метод замены параметра[1])

Методы Хилла и Линдемана — Стилтьеса позволяют определить μ, но лишь после сложного анализа. Такой анализ неизбежен, так как μ отнюдь не простая функция от q; это можно видеть, давая q определенное вещественное значение и изменяя a от $-\infty$ до $+\infty$; тогда μ поочередно принимает вещественные и комплексные значения; переход от одних значений к другим происходит, когда в обозначениях Хилла — Матье функция $\Delta(0)\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{a}\right)$ проходит через значения 0 и 1; сложный характер этого поведения объясняется тем, что $\Delta(0)$ есть сложное выражение, содержащее как a, так и q.

Тем не менее удается выразить μ и a через q и новый параметр σ; получаемые результаты весьма хорошо приспособлены для числовых вычислений, когда $|q|$ мал[2]).

Введение параметра σ подсказывается рядами для $ce_1(z, q)$ и $se_1(z, q)$, данными в примере 1 § 19.3; рассмотрение этих рядов приводит к исследованию возможностей решения общего уравнения Матье в виде $y = e^{\mu z}\varphi(z)$, где

$$\varphi(z) = \sin(z-\sigma) + a_3\cos(3z-\sigma) + b_3\sin(3z-\sigma) + a_5\cos(5z-\sigma) + \\ + b_5\sin(5z-\sigma) + \ldots,$$

причем параметр σ определяется вследствие того, что в $\varphi(z)$ должен отсутствовать член с $\cos(z-\sigma)$; функции $se_1(z, q)$, $ce_1(z, q)$ являются частными случаями такого решения, когда σ равно 0 или $\frac{1}{2}\pi$.

Подставив это выражение в уравнение Матье, читатель легко получит следующие приближения, годные для[3]) малых значений q и вещественных значений σ:

$$\mu = 4q\sin 2\sigma - 12q^3\sin 2\sigma - 12q^4\sin 4\sigma + O(q^5),$$

$$a = 1 + 8q\cos 2\sigma + (-16 + 8\cos 4\sigma)q^2 - 8q^3\cos 2\sigma + \\ + \left(\frac{256}{3} - 88\cos 4\sigma\right)q^4 + O(q^5),$$

$$a_3 = 3q^2\sin 2\sigma + 3q^3\sin 4\sigma + \left(-\frac{274}{9}\sin 2\sigma + 9\sin 6\sigma\right)q^4 + O(q^5),$$

$$b_3 = q + q^2\cos 2\sigma + \left(-\frac{14}{3} + 5\cos 4\sigma\right)q^3 + \left(-\frac{74}{9}\cos 2\sigma + 7\cos 6\sigma\right)q^4 + O(q^5),$$

$$a_5 = \frac{14}{9}q^3\sin 2\sigma + \frac{44}{27}q^4\sin 4\sigma + O(q^5),$$

---

[1]) Whittaker, Proc. Edinburgh, Math. Soc., XXXII (1914), 75—80.

[2]) Они были применены к задаче Хилла Айнсом (Ince, Monthly Notice of the R. A. S., LXXV (1915), 436—448).

[3]) В этом анализе следует рассматривать как основные параметры q и σ вместо a и q, как это было до сих пор.

$$b_5 = \frac{1}{3}q^2 + \frac{4}{9}q^3\cos 2\sigma + \left(-\frac{155}{54} + \frac{82}{27}\cos 4\sigma\right)q^4 + O(q^5),$$

$$a_7 = \frac{35}{108}q^4 \sin 2\sigma + O(q^5), \quad b_7 = \frac{1}{18}q^3 + \frac{1}{12}q^4\cos 2\sigma + O(q^5),$$

$$a_9 = O(q^5), \quad b_9 = \frac{1}{180}q^4 + O(q^5),$$

причем постоянные, входящие в $O(q^5)$, зависят от σ.

Область значений q и σ, при которых эти ряды сходятся, пока еще не определена [1]).

Если полученное таким образом решение обозначить $\Lambda(z, \sigma, q)$, то $\Lambda(z, \sigma, q)$ и $\Lambda(z, -\sigma, q)$ образуют фундаментальную систему решений общего уравнения Матье при $\mu \neq 0$.

Пример 1. Показать, что при $\sigma = i \times 0{,}5$ и $q = 0{,}01$

$$a = 1{,}1248414\ldots$$
$$\mu = i \times 0{,}0469935\ldots;$$

показать также, что при $\sigma = i$ и $q = 0{,}01$

$$a = 1{,}3211693\ldots$$
$$\mu = i \times 0{,}1450276\ldots$$

Пример 2. Получить уравнения

$$\mu = 4q\sin 2\sigma - 4qa_3,$$
$$a = 1 + 8q\cos 2\sigma - \mu^2 - 8qb_3,$$

выражающие μ и a в конечном виде как функции от q, σ, a_3 и b_3.

Пример 3. Получить рекуррентные формулы

$$\{-4n(n+1) + 8q\cos 2\sigma - 8qb_3 \pm$$
$$\pm 8qi(2n+1)(a_3 - \sin 2\sigma)\}\, z_{2n+1} + 8q(z_{2n-1} + z_{2n+3}) = 0,$$

где z_{2n+1} обозначает $b_{2n+1} + ia_{2n+1}$ или $b_{2n+1} - ia_{2n+1}$, смотря по тому, берется ли верхний или нижний знак.

19.8. Асимптотическое решение уравнения Матье

Если в уравнении Матье

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(a + \frac{1}{2}k^2\cos 2z\right)u = 0$$

положить $k\sin z = \xi$, то получим

$$(\xi^2 - k^2)\frac{d^2u}{d\xi^2} + \xi\frac{du}{d\xi} + (\xi^2 - M^2)u = 0,$$

где

$$M^2 \equiv a + \frac{1}{2}k^2.$$

[1]) Весьма вероятно, что если $|q|$ достаточно мал, то ряды сходятся для всех вещественных значений σ и также для комплексных значений σ, для которых $|\operatorname{Im}\sigma|$ достаточно мал. Отметим, что если q вещественно. то вещественные и чисто мнимые значения σ соответствуют вещественным и чисто мнимым значениям μ.

Это уравнение имеет неправильную особую точку в бесконечности. По его сходству с уравнением Бесселя положим $u = e^{i\xi}\xi^{-\frac{1}{2}}v$ и будем искать v в виде

$$v = 1 + \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\xi^2} + \dots;$$

тогда найдем, что

$$a_1 = -\frac{1}{2}i\left(\frac{1}{4} - M^2 + k^2\right),$$

$$a_2 = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4} - M^2 + k^2\right)\left(\frac{9}{4} - M^2 + k^2\right) + \frac{1}{4}k^2,$$

причем дальнейшие коэффициенты определяются рекуррентной формулой

$$2i(r+1)a_{r+1} = \left\{\frac{1}{4} - M^2 + k^2 + r(r+1)\right\} + \\ + (2r-1)ik^2a_{r-1} - \left(r^2 - 2r + \frac{3}{4}\right)k^2a_{r-2}.$$

Два ряда

$$e^{i\xi}\xi^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\xi^2} + \dots\right), \quad e^{-i\xi}\xi^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{a_1}{\xi} + \frac{a_2}{\xi^2} - \dots\right)$$

являются формальными решениями уравнения Матье, приводящимися к известным асимптотическим решениям уравнения Бесселя (§ 17.5), когда $k \to 0$. Окончательные формулы, связывающие их с решениями $e^{\pm\mu z}\varphi(\pm z)$, еще неизвестны, хотя некоторые шаги к получению их и сделаны Дауголлом (Dougall, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIV, 176—196).

ЛИТЕРАТУРА [1])

E. L. Mathieu, Journ. de Math. (2), XIII (1868), 137—203.
G. W. Hill, Acta Mathematica, VIII (1886), 1—36.
G. Floquet, Ann. de l'École norm. sup. (2), XII (1883), 47—88.
C. L. F. Lindemann, Math. Ann., XXII (1883), 117—123.
T. J. Stieltjes, Astr. Nach., CIX (1884), столбцы 145—152, 261—266.
A. Lindstedt, Astr. Nach., CIII (1882), столбцы 211—220, 257—268; CIV (1883), столбцы 145—150; CV (1883), столбцы 97—112.
H. Bruns, Astr. Nach., CVI (1883), столбцы 193—204; CVII (1884), столбцы 129—132.
R. C. Maclaurin, Trans. Camb. Phil. Soc., XVII (1899), 41—108.
K. Aichi, Proc. Tōkyō Math. and Phys. Soc. (2), IV (1908), 266—278.
E. T. Whittaker, Proc. International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912, I, 366—371.
E. T., Whittaker, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXII (1914), 75—80.
G. N. Watson, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIII (1915), 25—30.
A. W. Young, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXII (1914), 81—90.
E. Lindsay Ince, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIII (1915), 2—15.
J. Dougall, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIV (1916), 176—196.
М. Д. О. Стретт, Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, ОНТИ — ДНТВУ, Харьков — Киев, 1935.
Н. В. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матье, ИЛ, М., 1953.

[1]) Полная литература указана Эмбером (Humbert, Fonctions de Mathieu et fonctions de Lamé, Paris, 1926).

Примеры

1. Показать, что при $k = \sqrt{32q}$

$$2\pi ce_0(z, q) = ce_0(0, q) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \sin z \sin \theta)\, ce_0(\theta, q)\, d\theta.$$

2. Показать, что четные функции Матье удовлетворяют интегральному уравнению

$$G(z) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} J_0\{ik(\cos z + \cos \theta)\}\, G(\theta)\, d\theta.$$

3. Показать, что уравнению

$$(az^2 + c)\frac{d^2u}{dz^2} + 2az\frac{du}{dz} + (\lambda^2 cz^2 + m)\, u = 0$$

(где a, c, λ, m — постоянные) удовлетворяет интеграл

$$u = \int e^{\lambda zs}\, \nu(s)\, ds,$$

взятый вдоль надлежащего контура, если только $\nu(s)$ удовлетворяет уравнению

$$(as^2 + c)\frac{d^2\nu(s)}{ds^2} + 2as\frac{d_\nu(s)}{ds} + (\lambda^2 cs^2 + m)\, \nu(s) = 0,$$

тождественному с уравнением для u.

Получить интегральные уравнения, которым удовлетворяют функции Матье, как частные случаи этого результата.

4. Показать, что если пренебречь степенями q выше четвертой, то

$$ce_1(z, q) = \cos z + q\cos 3z + q^2\left(\frac{1}{3}\cos 5z - \cos 3z\right) + \\ + q^3\left(\frac{1}{18}\cos 7z - \frac{4}{9}\cos 5z + \frac{1}{3}\cos 3z\right) + \\ + q^4\left(\frac{1}{180}\cos 9z - \frac{1}{12}\cos 7z + \frac{1}{6}\cos 5z + \frac{11}{9}\cos 3z\right),$$

$$se_1(z, q) = \sin z + q\sin 3z + q^2\left(\frac{1}{3}\sin 5z + \sin 3z\right) + \\ + q^3\left(\frac{1}{18}\sin 7z + \frac{4}{9}\sin 5z + \frac{1}{3}\sin 3z\right) + \\ + q^4\left(\frac{1}{180}\sin 9z + \frac{1}{12}\sin 7z + \frac{1}{6}\sin 5z - \frac{11}{9}\sin 3z\right),$$

$$ce_2(z, q) = \cos 2z + q\left(\frac{2}{3}\cos 4z - 2\right) + \frac{1}{6}q^2\cos 6z + \\ + q^3\left(\frac{1}{45}\cos 8z + \frac{43}{27}\cos 4z + \frac{40}{3}\right) + q^4\left(\frac{1}{540}\cos 10z + \frac{293}{540}\cos 6z\right).$$

(Mathieu)

5. Показать, что

$$ce_3(z, q) = \cos 3z + q\left(-\cos z + \frac{1}{2}\cos 5z\right) +$$
$$+ q^2\left(\cos z + \frac{1}{10}\cos 7z\right) + q^3\left(-\frac{1}{2}\cos z + \frac{7}{40}\cos 5z + \frac{1}{90}\cos 9z\right) + O(q^4)$$

и что в этом случае

$$a = 9 + 4q^2 - 8q^3 + O(q^4).$$

(Mathieu)

6. Показать, что если $y(z)$ — функция Матье, то второе решение соответствующего дифференциального уравнения будет

$$y(z)\int^{z}\{y(t)\}^{-2}\,dt.$$

Показать, что второе решение [1]) уравнения для $ce_0(z, q)$ будет

$$zce_0(z, q) - 4q\sin 2z - 3q^2\sin 4z - \ldots$$

7. Показать, что если $y(z)$ — решение общего уравнения Матье, то отношение

$$\frac{\{y(z+2\pi) + y(z-2\pi)\}}{y(z)}$$

постоянно.

8. Выразить функции Матье как ряды по функциям Бесселя, в которых коэффициенты пропорциональны коэффициентам в рядах Фурье для функций Матье.

[Подставить ряд Фурье под знак интеграла в интегральные уравнения § 19.22.]

9. Показать, что предельной формой уравнений для $ce_n(z, q)$ и $se_n(z, q)$, когда эксцентриситет основного эллипса стремится к нулю, будет уравнение, которому удовлетворяет функция $J_n(ik\cos z)$.

10. Получить функции параболического цилиндра главы 16 как предельные формы функций Матье, заставляя эксцентриситет основного эллипса стремиться к единице.

11. Показать, что $ce_n(z, q)$ может быть разложен в ряд вида

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos^{2m} z \quad \text{или} \quad \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos^{2m+1} z,$$

смотря по тому, будет ли n четным или нечетным; показать также, что эти ряды сходятся, когда $|\cos z| < 1$.

12. При обозначениях примера 11 показать, что если

$$ce_n(z, q) = \lambda_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos z\cos\theta} ce_n(\theta, q)\,d\theta,$$

---

[1]) Это решение обозначается через $in_0(z, q)$; вторые решения уравнений, которым удовлетворяют функции Матье, исследованы Айнсом (Ince, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIII (1915), 2—15). См. также § 19.2.

то λ_n дается одним из рядов

$$A_0 = 2\pi\lambda_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m}{2^{2m}(m!)^2} A_m, \quad B_0 = 2\pi\lambda_n k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)!}{2^{2m+1} m!\,(m+1)!} B_m,$$

если эти ряды сходятся.

13. Показать, что дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет произведение каких-либо двух решений уравнения Бесселя порядка n, будет

$$\vartheta(\vartheta - 2n)(\vartheta + 2n)\,u + 4z^2(\vartheta + 1)\,u = 0,$$

где ϑ обозначает $z\dfrac{d}{dz}$.

Показать, что одно из решений этого уравнения есть целая функция от z; получить затем по методам §§ 19.5—19.53 функции Бесселя, разобрав специально частный случай целого n.

14. Показать, что уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (A + k^2 \operatorname{sh}^2 z)\,u = 0$$

имеет приближенное решение

$$u = C\,(\operatorname{cosech} z)^{\frac{1}{2}} \sin(k \operatorname{ch} z + \varepsilon),$$

где C и ε — постоянные интегрирования; предполагается, что k велико, A не слишком велико и z не мало.

ГЛАВА 20

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ И ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

20.1. Двоякопериодические функции

Наиболее важное свойство тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, ... заключается в том, что если $f(z)$ обозначает какую-нибудь из них, то

$$f(z+2\pi)=f(z),$$

а отсюда $f(z+2n\pi)=f(z)$ для всех целых значений n. На основании этого свойства тригонометрические функции часто описывают как *периодические функции* с периодом 2π. Чтобы отличать их от функций, которые рассматриваются в этой и двух последующих главах, их называют *однопериодическими функциями.*

Пусть ω_1, ω_2 — какие-нибудь два числа (вещественные или комплексные), *отношение* [1]) *которых не чисто вещественно.*

Функция, удовлетворяющая уравнениям

$$f(z+2\omega_1)=f(z), \quad f(z+2\omega_2)=f(z)$$

для всех значений z, для которых $f(z)$ существует, называется *двоякопериодической* функцией от z с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$. Двоякопериодическая функция, если она аналитическая и не имеет никаких особых точек, кроме полюсов в конечной части плоскости, называется *эллиптической функцией.*

[Примечание. Выражение, называемое теперь *эллиптическим интегралом* [2]), встречается в исследованиях Якова Бернулли по теории

---

[1]) Если $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ вещественно, то параллелограммы, определяемые в § 20.11, сплющиваются, и функция приводится к однопериодической функции, если $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ рационально; если же $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ иррационально, то, как было показано Якоби (Jacobi, Journ. für Math., XIII (1835), 55—56. [Ges. Werke, II (1882), 25—26]), функция приводится к постоянной.

[2]) Краткое изложение эллиптических интегралов читатель найдет в §§ 22.7—22.741.

упругости. Маклорен, Фаньяно (Fagnano), Лежандр и другие рассматривали такие интегралы в связи с задачей спрямления дуги эллипса; идея «обращения» эллиптического интеграла (§ 21.7) для получения эллиптической функции принадлежит Абелю, Якоби и Гауссу.]

Периоды $2\omega_1$, $2\omega_2$ играют примерно ту же роль в теории эллиптических функций, какую один период играет в случае тригонометрических функций.

Прежде чем фактически построить какие-нибудь эллиптические функции и даже до установления существования таких функций, удобно будет привести доказательство некоторых общих теорем (§§ 20.11—20.14) о свойствах, присущих всем эллиптическим функциям; такой способ изложения, не будучи строго логичным, удобен тем, что весьма многие свойства специальных эллиптических функций могут быть получены простой ссылкой на эти теоремы.

Пример. Производная эллиптической функции сама является эллиптической функцией.

20.11. Параллелограммы периодов

Изучение эллиптических функций значительно облегчается геометрическим представлением на комплексной плоскости.

Предположим, что в плоскости переменной z мы отметили точки 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_1+2\omega_2$ и вообще все точки, комплексные координаты которых имеют вид $2m\omega_1+2n\omega_2$, где m и n — целые числа.

Соединив последовательно точки 0, $2\omega_1$, $2\omega_1+2\omega_2$, $2\omega_2$, 0, мы получим параллелограмм. Если внутри или на границе этого параллелограмма (исключая вершины) нет точки ω такой, что

$$f(z+\omega)=f(z)$$

для всех значений z, то этот параллелограмм называется *основным параллелограммом периодов* для эллиптической функции с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Ясно, что плоскость z можно покрыть сетью параллелограммов, равных основному параллелограмму периодов и одинаково с ним расположенных, причем каждая из точек $2m\omega_1+2n\omega_2$ является вершиной четырех таких параллелограммов.

Эти параллелограммы называются *параллелограммами периодов*; для всех значений z точки

$$z,\ z+2\omega_1,\ \ldots,\ z+2m\omega_1+2n\omega_2,\ \ldots,$$

очевидно, занимают сходственные положения в параллелограммах периодов; любые две такие точки называются *сравнимыми*. Сравнимость двух точек z, z' обозначается так:

$$z'\equiv z\ (\mathrm{mod}\ 2\omega_1,\ 2\omega_2).$$

Из основного свойства эллиптических функций вытекает, что эллиптическая функция принимает одно и то же значение в сравнимых точках; таким образом, *ее значения в любом параллелограмме периодов являются простым повторением ее значений в любом другом параллелограмме периодов.*

Иногда при интегрировании неудобно пользоваться параллелограммом периодов, если он имеет особые точки подинтегральной функции на своей границе; принимая во внимание периодичность эллиптических функций, можно вместо параллелограмма периодов в качестве контура взять параллелограмм, полученный таким переносом первого (без вращения), чтобы ни один из полюсов рассматриваемой подинтегральной функции не лежал на сторонах нового параллелограмма. Такой параллелограмм называется *ячейкой.*

Очевидно, что значения, принимаемые эллиптической функцией в ячейке, являются просто повторением ее значений в каком-либо параллелограмме периодов.

Совокупность полюсов (или нулей) эллиптической функции в какой-нибудь данной ячейке называется *неприводимой*; все другие полюсы (или нули) функции сравнимы с каким-нибудь из них.

20.12. Простые свойства эллиптических функций

(I) *Число полюсов эллиптических функций в любой ячейке конечно.* Ибо в противном случае полюсы имели бы предельную точку в силу двумерного аналога теоремы § 2.21 (часть I). Эта точка была бы (§ 5.61, часть I) существенно особой точкой функции; таким образом, по определению, функция не была бы эллиптической.

(II) *Число нулей в эллиптической функции $f(z)$ в любой ячейке конечно.* Ибо в противном случае функция $1/f(z)$ имела бы бесконечное число полюсов в ячейке и поэтому имела бы существенно особую точку; эта точка была бы также существенно особой точкой первоначальной функции, которая поэтому не была бы эллиптической. [Доказательство предполагает, что функция не равна тождественно нулю.]

(III) *Сумма вычетов эллиптической функции $f(z)$ в ее полюсах в любой ячейке равна нулю.*

Пусть C — контур, образованный сторонами ячейки, и пусть вершинами ячейки будут t, $t+2\omega_1$, $t+2\omega_1+2\omega_2$, $t+2\omega_2$.

[Примечание. В дальнейшем периоды эллиптической функции обозначаются через $2\omega_1$, $2\omega_2$ не в произвольном порядке, а в таком, чтобы отношение $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ *имело положительную мнимую часть*, и тогда направление обхода C, указанное порядком вершин, данным выше, будет *против часовой стрелки.*

Во всей этой главе мы обозначаем символом C контур, составленный сторонами ячейки.]

Сумма вычетов функции $f(z)$ в ее полюсах внутри контура C равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_t^{t+2\omega_1}+\int\limits_{t+2\omega_1}^{t+2\omega_1+2\omega_2}+\int\limits_{t+2\omega_1+2\omega_2}^{t+2\omega_2}+\int\limits_{t+2\omega_2}^{t}\right\}f(z)\,dz.$$

Во втором и третьем интегралах заменим $z+2\omega_1$, $z+2\omega_2$ соответственно через z; тогда правая часть примет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_t^{t+2\omega_1}\{f(z)-f(z+2\omega_2)\}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_t^{t+2\omega_2}\{f(z)-f(z+2\omega_1)\}\,dz,$$

и каждый из интегралов равняется нулю в силу периодичности функции $f(z)$; итак, $\int\limits_C f(z)\,dz=0$, и теорема доказана.

(IV) *Теорема Лиувилля*[1]. *Эллиптическая функция* $f(z)$, *не имеющая полюсов в ячейке, есть постоянная.* Если $f(z)$ не имеет полюсов внутри ячейки, то она аналитическая (а следовательно, ограниченная) внутри и на границах ячейки (следствие II § 3.61, часть I); другими словами, имеется такое число K, что $|f(z)|<K$, когда z находится внутри или на границе ячейки.

Из периодических свойств функции $f(z)$ вытекает, что $f(z)$ аналитическая и $|f(z)|<K$ для всех значений z; следовательно, по § 5.63 части I $f(z)$ — постоянная.

Ниже увидим, что очень большое число теорем, относящихся к эллиптическим функциям, может быть доказано при помощи этого результата.

20.13. Порядок эллиптической функции

Покажем теперь, что если $f(z)$ — эллиптическая функция и c — какая-нибудь постоянная, то *число корней уравнения*

$$f(z)=c,$$

лежащих в ячейке, зависит только от $f(z)$, *но не от* c; это число называется *порядком эллиптической функции* и равняется числу полюсов функции $f(z)$ в ячейке.

---

[1]) Эта модификация теоремы § 5.63 части I и является тем результатом, на котором Лиувилль основал свой курс лекций по эллиптическим функциям.

В силу § 6.31 части I разность между числами нулей и полюсов функции $f(z)-c$, лежащих в ячейке C, равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz.$$

Так как $f'(z+2\omega_1)=f'(z+2\omega_2)=f'(z)$, то делением контура на четыре части, как в § 20.12 (III), найдем, что этот интеграл равен нулю.

Поэтому число нулей функции $f(z)-c$ равняется числу полюсов функции $f(z)-c$; но любой полюс функции $f(z)-c$, очевидно, будет полюсом функции $f(z)$, и наоборот; отсюда число нулей функции $f(z)-c$ равняется числу полюсов функции $f(z)$, которое не зависит от c; теорема, таким образом, доказана.

[Примечание. При определении порядка эллиптической функции числом ее неприводимых полюсов следует каждый полюс считать соответственно его кратности, как это ясно из § 6.31 части I.]

Порядок эллиптической функции *не может быть меньше* 2, ибо эллиптическая функция порядка 1 должна иметь единственный неприводимый полюс, и притом простой; но если бы эта точка действительно была полюсом, а не обыкновенной точкой, то вычет в ней был бы отличен от нуля, что противоречит результату § 20.12 (III).

Простейшими по числу особых точек эллиптическими функциями являются функции второго порядка. Такие функции могут быть разделены на два класса: (I) функции, имеющие только один неприводимый двойной полюс, в котором вычет равен нулю в соответствии с § 20.12 (III); (II) функции, имеющие два простых полюса, в которых по § 20.12 (III) вычеты численно равны, но противоположны по знаку.

Функции, относящиеся к этим двум классам, рассматриваются в этой главе и в главе 22 соответственно под названием эллиптических функций Вейерштрасса и Якоби; будет показано, что любая эллиптическая функция может быть выражена через функции любого из этих типов.

20.14. Соотношение между нулями и полюсами эллиптической функции

Покажем теперь, что *сумма аффиксов совокупности неприводимых нулей эллиптической функции сравнима с суммой аффиксов совокупности неприводимых полюсов.* Из § 6.31 части I, во введенных нами обозначениях, следует, что разность между рассматриваемыми суммами равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int\limits_t^{t+2\omega_1}+\int\limits_{t+2\omega_1}^{t+2\omega_1+2\omega_2}+\int\limits_{t+2\omega_1+2\omega_2}^{t+2\omega_2}+\int\limits_{t+2\omega_2}^{t}\right\}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_t^{t+2\omega_1}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}-\frac{(z+2\omega_2)f'(z+2\omega_2)}{f(z+2\omega_2)}\right\}dz-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_t^{t+2\omega_2}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}-\frac{(z+2\omega_1)f'(z+2\omega_1)}{f(z+2\omega_1)}\right\}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{-2\omega_2\int\limits_t^{t+2\omega_1}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz+2\omega_1\int\limits_t^{t+2\omega_2}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left\{-2\omega_2\left[\lg f(z)\right]_t^{t+2\omega_1}+2\omega_1\left[\lg f(z)\right]_t^{t+2\omega_2}\right\},$$

если воспользоваться подстановками, примененными в § 20.12 (III), и периодичностью функций $f(z)$ и $f'(z)$. Но $f(z)$ имеет в точках $t+2\omega_1$, $t+2\omega_2$ те же самые значения, что и в t, так что значения функции $\lg f(z)$ в этих точках могут отличаться от значения функции $\lg f(z)$ в t только на целые кратные числа $2\pi i$, скажем на $-2n\pi i$, $2m\pi i$; таким образом, мы получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz=2m\omega_1+2n\omega_2,$$

и следовательно, сумма аффиксов нулей минус сумма аффиксов полюсов равна периоду; а это и есть тот результат, который надо было установить.

20.2. Построение эллиптической функции. Определение функции $\wp(z)$

Как мы видели в § 20.1, можно ожидать, что эллиптические функции обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам тригонометрических функций. Поэтому естественно ввести эллиптические функции в анализ с помощью определения, аналогичного одному из тех, которые могут быть положены в основу теории тригонометрических функций.

Один из способов построения теории тригонометрических функций заключается в том, что исходят из ряда $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}(z-m\pi)^{-2}$;

обозначив сумму этого ряда через $(\sin z)^{-2}$, можно вывести все известные свойства функции $\sin z$; как это сделать, вкратце указано в § 20.222.

Аналогичный метод обоснования теории эллиптических функций заключается в определении функции $\wp(z)$ равенством [1])

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{m,n}{}'\left\{\frac{1}{(z-2m\omega_1-2n\omega_2)^2}-\frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2}\right\},$$

где ω_1, ω_2 удовлетворяют условиям, приведенным в § 20.1, 20. 12 (III); суммирование распространяется по всем целым значениям (положительным, отрицательным и нулевым) m и n, за исключением одновременных нулевых значений m и n.

Для краткости напишем $\Omega_{m,n}$ вместо $2m\omega_1+2n\omega_2$, так что

$$\wp(z)=z^{-2}+\sum_{m,n}{}'\left\{(z-\Omega_{m,n})^{-2}-\Omega_{m,n}^{-2}\right\}.$$

Если m и n таковы, что $|\Omega_{m,n}|$ велик, то общий член ряда, определяющего функцию $\wp(z)$, будет $O\left(|\Omega_{m,n}|^{-3}\right)$ и, таким образом (§ 3.4, часть I), ряд сходится абсолютно и равномерно (относительно z) всюду, за исключением окрестностей его полюсов, т. е. точек $\Omega_{m,n}$.

Поэтому (§ 5.3, часть I) $\wp(z)$ — функция, аналитическая во всей плоскости z, за исключением точек $\Omega_{m,n}$, в которых она имеет двойные полюсы.

Введение этой функции $\wp(z)$ принадлежит Вейерштрассу [2]). Приступим теперь к изучению свойств функции $\wp(z)$; мы увидим, что функция $\wp(z)$ — эллиптическая функция с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Для числовых вычислений указанный ряд для $\wp(z)$ непригоден ввиду медленности его сходимости. Эллиптические функции, свободные от этого недостатка, будут получены в главе 21.

---

[1]) Во всей этой главе символ $\sum\limits_{m,n}$ употребляется для обозначения суммирования по всем целым значениям m и n, причем значок $'$ $\left(\sum\limits_{m,n}{}'\right)$ означает, что при суммировании опускается член, для которого $m=n=0$. С другой стороны, через $\wp'(z)$ обозначаем обычно производную функции $\wp(z)$. Применение значка $'$ в разных смыслах не вызовет путаницы.

[2]) Weierstrass, Werke, II (1895), 245—255. Содержание большей части этой главы принадлежит Вейерштрассу и содержится в его лекциях, которые были опубликованы Шварцем (Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Prof. K. Weierstrass (Berlin, 1893)). См. также Cayley, Journ. de Math. X (1845), 385—420. (Math. Papers, I, 156—182) и Eisenstein, Journ. für Math., XXXV (1847), 137—184, 185—274.

Пример. Доказать, что

$$\wp(z)=\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\left[-\frac{1}{3}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{z-2n\omega_2}{2\omega_1}\pi\right)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\operatorname{cosec}^2\frac{n\omega_2}{\omega_1}\pi\right].$$

20.21. Периодичность и другие свойства функции $\wp(z)$

Так как ряд для функции $\wp(z)$ есть равномерно сходящийся ряд аналитических функций, то почленное дифференцирование законно (§ 5.3, часть I) и, следовательно,

$$\wp'(z)=\frac{d}{dz}\wp(z)=-2\sum_{m,n}\frac{1}{(z-\Omega_{m,n})^3}.$$

Функция $\wp'(z)$ — *нечетная функция от* z; в самом деле, из определения функции $\wp'(z)$ получаем непосредственно

$$\wp'(-z)=2\sum_{m,n}(z+\Omega_{m,n})^{-3}.$$

Но совокупность точек $-\Omega_{m,n}$ совпадает с совокупностью $\Omega_{m,n}$, и следовательно, члены ряда для функции $\wp'(-z)$ те же самые, что и для функции $-\wp'(z)$, но расположены в другом порядке. Ряд для $\wp'(z)$ абсолютно сходится (§ 3.4, часть I), и следовательно, перестановка его членов не оказывает влияния на его сумму; поэтому

$$\wp'(-z)=-\wp'(z).$$

Таким же образом члены абсолютно сходящегося ряда

$$\sum_{m,n}{}'\left\{(z+\Omega_{m,n})^{-2}-\Omega_{m,n}^{-2}\right\}$$

являются членами ряда

$$\sum_{m,n}{}'\left\{(z-\Omega_{m,n})^{-2}-\Omega_{m,n}^{-2}\right\},$$

расположенными в другом порядке; отсюда

$$\wp(-z)=\wp(z),$$

иначе говоря, *функция* $\wp(z)$ — *четная функция от* z.

Далее,

$$\wp'(z+2\omega_1)=-2\sum_{m,n}(z-\Omega_{m,n}+2\omega_1)^{-3},$$

но совокупность точек $\Omega_{m,n}-2\omega_1$ та же самая, что и совокупность $\Omega_{m,n}$; таким образом, ряд для $\wp'(z+2\omega_1)$ получается перестановкой членов в ряде для $\wp'(z)$, и в силу абсолютной сходимости находим, что

$$\wp'(z+2\omega_1)=\wp'(z);$$

другими словами, *функция* $\wp'(z)$ *имеет период* $2\omega_1$; так же можно показать, что она имеет и период $2\omega_2$.

Так как $\wp'(z)$ — аналитическая функция, имеющая только полюсы, то из последнего результата вытекает, что $\wp'(z)$ — *эллиптическая функция*.

Если теперь проинтегрируем уравнение

$$\wp'(z+2\omega_1)=\wp'(z),$$

то получим

$$\wp(z+2\omega_1)=\wp(z)+A,$$

где A — постоянная. Положив $z=-\omega_1$ и принимая во внимание, что $\wp(z)$ — четная функция, получим $A=0$, так что

$$\wp(z+2\omega_1)=\wp(z);$$

таким же образом

$$\wp(z+2\omega_2)=\wp(z).$$

Так как $\wp(z)$ не имеет других особых точек, кроме полюсов, то из этих двух равенств вытекает, что $\wp(z)$ — *также эллиптическая функция*.

Существуют другие методы введения в анализ как тригонометрических, так и эллиптических функций; так, для тригонометрических функций можно отметить следующие:

(1) Геометрическое определение, по которому $\sin z$ является отношением катета, противолежащего углу z, к гипотенузе в прямоугольном треугольнике, в котором один из углов есть z. Такое определение дается в элементарных учебниках по тригонометрии; с нашей точки зрения, такое определение страдает многими недостатками, некоторые из которых приведены в Приложении (часть I).

(2) Определение при помощи ряда

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots$$

(3) Определение при помощи бесконечного произведения

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\dots$$

(4) Определение при помощи «обращения» интеграла

$$z=\int_0^{\sin z}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Свойства периодичности легко получить из (4), взяв соответствующие пути интегрирования (Forsyth, Theory of Functions, 1918, § 104), но чрезвычайно трудно доказать, что $\sin z$, определяемый таким образом, будет аналитической функцией.

Мы увидим позже (§§ 22.82, 22.1, 20.42, 20.22 и пример 4 § 20.53), что эллиптические функции могут быть введены при помощи определений, аналогичных каждому из приведенных, с соответственными недостатками в случаях первом и четвертом.

Пример. Вывести периодичность функции $\wp(z)$ непосредственно из ее определения в виде двойного ряда. [Нетрудно обосновать необходимую перестановку.]

20.22. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $\wp(z)$

Выведем теперь дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $\wp(z)$ и которое имеет, как увидим далее, большое значение в теории этой функции.

Функция $\wp(z)-z^{-2}$, равная $\sum\limits_{m,n}{}' \left\{(z-\Omega_{m,n})^{-2}-\Omega_{m,n}^{-2}\right\}$, будет аналитической в окрестности начала координат и четной функцией от z. Следовательно, по теореме Тейлора имеем разложение вида

$$\wp(z)-z^{-2}=\frac{1}{20}g_2z^2+\frac{1}{28}g_3z^4+O(z^6),$$

годное для достаточно малых значений $|z|$. Легко видеть, что

$$g_2=60\sum_{m,n}{}'\Omega_{m,n}^{-4},\quad g_3=140\sum_{m,n}{}'\Omega_{m,n}^{-6}.$$

Таким образом,

$$\wp(z)=z^{-2}+\frac{1}{20}g_2z^2+\frac{1}{28}g_3z^4+O(z^6);$$

дифференцируя это равенство, получим

$$\wp'(z)=-2z^{-3}+\frac{1}{10}g_2z+\frac{1}{7}g_3z^3+O(z^5).$$

Возводя в куб обе части первого из двух последних равенств и в квадрат обе части второго, получим

$$\wp^3(z)=z^{-6}+\frac{3}{20}g_2z^{-2}+\frac{3}{28}g_3+O(z^2),$$

$$\wp'^2(z)=4z^{-6}-\frac{2}{5}g_2z^{-2}-\frac{4}{7}g_3+O(z^2).$$

Отсюда

$$\wp'^2(z)-4\wp^3(z)=-g_2z^{-2}-g_3+O(z^2),$$

и следовательно,

$$\wp'^2(z)-4\wp^3(z)+g_2\wp(z)+g_3=O(z^2).$$

Таким образом, функция

$$\wp'^2(z)-4\wp^3(z)+g_2\wp(z)+g_3,$$

которая, очевидно, является эллиптической функцией, будет аналитической в начале координат и, следовательно, также аналитической во всех сравнимых точках. Но эти точки являются единственно возможными особыми точками рассматриваемой функции; *итак, она будет эллиптической функцией без особых точек и, следовательно, будет равна постоянной* (§ 20.12 (IV)).

Заставив $z \to 0$, видим, что эта постоянная равна нулю.

Итак, функция $\wp(z)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3,$$

где g_2 и g_3 (называемые *инвариантами*) даются равенствами

$$g_2 = 60 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-6}.$$

Обратно, если дано уравнение

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$$

и если можно определить[1] *такие числа* ω_1, ω_2, *что*

$$g_2 = 60 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-6},$$

то общим решением дифференциального уравнения будет

$$y = \wp(\pm z + \alpha),$$

где α — постоянная интегрирования. Это легко видеть, введя новую зависимую переменную u, определяемую уравнением[2] $y = \wp(u)$, что приводит дифференциальное уравнение к виду $\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = 1$.

Так как $\wp(z)$ — четная функция от z, то имеем $y = \wp(z \pm \alpha)$, и следовательно, не теряя общности, решение уравнения можно написать в виде

$$y = \wp(z + \alpha).$$

Пример. Вывести из дифференциального уравнения, что если

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} z^{2n},$$

то

$$c_2 = \frac{g_2^3}{2^2 \cdot 5}, \quad c_4 = \frac{g_3}{2^2 \cdot 7}, \quad c_6 = \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2}, \quad c_8 = \frac{3g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11},$$

$$c_{10} = \frac{g_2^3}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 13} + \frac{g_3^2}{2^4 \cdot 7^2 \cdot 13}, \quad c_{12} = \frac{g_2^2 g_3}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}.$$

---

[1]) Трудная задача установления существования таких чисел ω_1 и ω_2, когда g_2 и g_3 даны, решается в § 21.73.

[2]) Это уравнение относительно u согласно § 20.13 всегда имеет решения.

20.221. Интегральная формула для $\wp(z)$

Рассмотрим равенство

$$z = \int_{\zeta}^{\infty} (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-\frac{1}{2}}\, dt,$$

определяющее z как функцию от ζ; путь интегрирования может быть любой кривой, которая не проходит через нули выражения

$$4t^3 - g_2 t - g_3.$$

После дифференцирования получим

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3,$$

и следовательно,

$$\zeta = \wp(z + \alpha),$$

где α — постоянная. Но при $\zeta \to \infty$ имеем $z \to 0$ в силу сходимости интеграла; следовательно, α есть полюс функции $\wp(u)$, т. е. имеет форму $\Omega_{m,n}$; итак, $\zeta = \wp(z + \Omega_{m,n}) = \wp(z)$. Результат, что равенство

$$z = \int_{\zeta}^{\infty} (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

эквивалентно равенству $\zeta = P(z)$, записывают иногда в форме

$$z = \int_{\wp(z)}^{\infty} (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-\frac{1}{2}}\, dt.$$

20.222. Иллюстрация из теории тригонометрических функций

Теоремы, полученные в §§ 20.2—20.221, могут быть проиллюстрированы аналогичными теоремами для тригонометрических функций. Так, можно вывести свойства функции $\operatorname{cosec}^2 z$ из ряда $\sum_{m=-\infty}^{\infty} (z - m\pi)^{-2}$ следующим образом.

Обозначим этот ряд через $f(z)$. Ряд сходится абсолютно и равномерно[1]) (относительно z) всюду, исключая окрестности точек $m\pi$, в которых он имеет, очевидно, двойные полюсы. За исключением этих точек, функция $f(z)$ всюду аналитическая. Результат прибавления к z числа, кратного π, приводит к ряду, члены которого будут те же, что и у исходного ряда; так как ряд сходится абсолютно, сумма $f(z)$ ряда не изменится и будет, следовательно, *периодической функцией от z с периодом π*.

---

[1]) Это видно из сравнения с рядом $\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' m^{-2}$.

Исследуем теперь поведение $f(z)$ в полосе $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2}\pi$.

Из периодичности $f(z)$ следует, что значение $f(z)$ в какой-либо точке плоскости равно ее значению в соответствующей точке полосы

$$-\frac{1}{2}\pi \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2}\pi.$$

В этой полосе $f(z)$ имеет только одну особенность, именно $z=0$, а при $z \to \infty$ и остающемся в полосе $f(z)$ остается ограниченной, как это следует из сравнения членов ряда для $f(z)$ с соответствующими членами ряда $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}{}' m^{-2}$.

В окрестности $z=0$ функция $f(z)-z^{-2}$ является аналитической и четной функцией от z, и следовательно, ее разложение в ряд Маклорена

$$f(z)-z^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$$

будет иметь место при $|z|<\pi$. Легко видеть, что

$$a_{2n}=2\pi^{-2n}(2n+1)\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2n-2};$$

в частности,

$$a_0=\frac{1}{3}, \quad a_2=6\pi^{-4}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-4}=\frac{1}{15}.$$

Отсюда следует для малых значений $|z|$

$$f(z)=z^{-2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}z^2+O(z^4).$$

Дифференцируя это равенство дважды и, с другой стороны, возводя обе его части в квадрат, будем иметь

$$f''(z)=6z^{-4}+\frac{2}{15}+O(z^2),$$

$$[f(z)]^2=z^{-4}+\frac{2}{3}z^{-2}+\frac{11}{45}+O(z^2)$$

и, следовательно,

$$f''(z)-6[f(z)]^2+4f(z)=O(z^2).$$

Это показывает, что функция $f''(z)-6[f(z)]^2+4f(z)$ является аналитической в начале координат и, очевидно, периодической с периодом π. Поскольку единственными возможными особыми точками этой функции являются точки $m\pi$, из ее периодичности следует, что она является целой функцией. Кроме того, она остается ограниченной при $z \to \infty$ в полосе $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\pi$, ибо таковой будет $f(z)$, а следовательно, и $f''(z)$ [1];

---

[1]) Ряд для $f''(z)$ может быть сравнен с $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}{}' m^{-4}$.

поэтому она остается ограниченной во всей этой полосе, а в силу периодичности и во всей плоскости z. По теореме Лиувилля (§ 5.63, часть I) она должна быть постоянной. Устремляя $z \to 0$, мы видим, что эта постоянная равна 0.

Итак, функция $\operatorname{cosec}^2 z$ удовлетворяет уравнению

$$f''(z) = 6[f(z)]^2 - 4f(z).$$

Умножая на $2f'(z)$ и интегрируя, получим

$$[f'(z)]^2 = 4[f(z)]^2 \{f(z) - 1\} + c,$$

где c — постоянная, которая равна нулю, как это следует из подстановки в это уравнение степенных рядов для $f(z)$ и $f'(z)$ и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях z.

Отсюда вытекает, что

$$2z = \int\limits_{f(z)}^{\infty} t^{-1}(t-1)^{-\frac{1}{2}}\,dt,$$

где интеграл взят по пути, выбранному надлежащим образом.

Пример 1. Пусть $y = \wp(z)$ и штрих обозначает дифференцирование по z; доказать, что

$$\frac{3y''^2}{4y'^4} - \frac{y'''}{2y'^3} = \frac{3}{16}\{(y-e_1)^{-2} + (y-e_2)^{-2} + (y-e_3)^{-2}\} - \\ - \frac{3}{8}\,y\,(y-e_1)^{-1}(y-e_2)^{-1}(y-e_3)^{-1},$$

где e_1, e_2, e_3 — корни уравнения $4t^3 - g_2 t - g_3 = 0$.

[Имеем

$$y'^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3 = 4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3).$$

Взяв здесь логарифмическую производную и деля на y', получаем

$$2\frac{y''}{y'^2} = \sum_{r=1}^{3} (y-e_r)^{-1}.$$

Дифференцируя еще раз, получим

$$\frac{2y'''}{y'^3} - \frac{4y''^2}{y'^4} = -\sum_{r=1}^{3} (y-e_r)^{-2}.$$

Складывая это равенство, умноженное на $\frac{1}{4}$, с предыдущим, возведенным в квадрат и умноженным затем на $\frac{1}{16}$, получим требуемый результат.

Следует отметить, что слева в доказанном равенстве стоит половина шварциана[1]) от z по y; это показывает, что z есть отношение двух

---

[1]) Cayley, Camb. Phil. Trans., XIII (1885), 5 (Math. Papers, XI, 148).

решений уравнения

$$\frac{d^2v}{dy^2}+\left\{\frac{3}{16}\sum_{r=1}^{3}(y-e_r)^{-2}-\frac{3}{8}y\prod_{r=1}^{3}(y-e_r)^{-1}\right\}v=0\,[1].\Bigg]$$

Пример 2. Получить следующие формулы, выражающие однородность функции $\wp(z)$:

$$\wp\left(\lambda z\,\middle|\,\begin{matrix}\lambda\omega_1\\ \lambda\omega_2\end{matrix}\right)=\lambda^{-2}\wp\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix}\right),\quad \wp(\lambda z;\,\lambda^{-4}g_2,\,\lambda^{-6}g_3)=\lambda^{-2}\wp(z;\,g_2,\,g_3),$$

где $\wp\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix}\right)$ обозначает функцию $\wp(z)$ с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$, а $\wp(z;\,g_2,\,g_3)$ — функцию $\wp(z)$ с инвариантами g_2, g_3.

[Первая следует из определения $\wp(z)$ двойным рядом; вторая может быть получена из двойных рядов, определяющих инварианты g.]

20.3. Теорема сложения для функции $\wp(z)$

Функция $\wp(z)$ обладает алгебраической *теоремой сложения*; другими словами, существует формула, выражающая $\wp(z+y)$ как алгебраическую функцию от $\wp(z)$ и $\wp(y)$ для любых значений [2] z и y.

Рассмотрим уравнения

$$\wp'(z)=A\wp(z)+B,\quad \wp'(y)=A\wp(y)+B,$$

которые определяют A и B через z и y, за исключением случаев, когда $\wp(z)=\wp(y)$, т. е. [3]

$$z\equiv\pm y\,(\operatorname{mod}2\omega_1,\ 2\omega_2).$$

Затем рассмотрим выражение

$$\wp'(\zeta)-A\wp(\zeta)-B$$

---

[1] О свойствах шварциана (производной Шварца) можно прочесть в книге В. В. Голубева «Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений», 1950. *Шварцианом* $\{f\}_w$ от f по w называется выражение

$$\{f\}_w=\frac{2f'_wf'''_w-3\left(f''_w\right)^2}{2(f')^2}$$

(см. Голубев, стр. 289).

Доказывается, что отношение $z=v_1/v_2$ двух линейно независимых интегралов дифференциального уравнения $\frac{d^2v}{dw^2}+p(w)\frac{dv}{dw}+q(w)v=0$ удовлетворяет уравнению $\{z\}_w=-p'(w)+\frac{p^2(w)}{2}+2q(w)$. (См. Голубев, стр. 299). — *Прим. ред.*

[2] Частные случаи, когда y, или z, или $y+z$ — периоды, разумеется, нет необходимости рассматривать.

[3] Функция $\wp(z)-\wp(y)$, как функция от z, имеет двойные полюсы в точках, сравнимых с $z=0$, и не имеет никаких других особых точек; поэтому (§ 20.13) она имеет только два неприводимых нуля; точки, сравнимые с $z=\pm y$, дают поэтому *все* нули функции $\wp(z)-\wp(y)$.

как функцию от ζ. Эта функция имеет тройной полюс при $\zeta=0$ и, следовательно, по § 20.13 имеет три и только три неприводимых нуля; по § 20.14 сумма их равна некоторому периоду, и так как два из этих нулей суть $\zeta=z$, $\zeta=y$, то третий неприводимый нуль должен быть сравним с $-z-y$. Поэтому и $-z-y$ есть нуль выражения $\wp'(\zeta)-A\wp(\zeta)-B$, и следовательно,

$$\wp'(-z-y)=A\wp(-z-y)+B.$$

Исключая A и B из этого уравнения и уравнений, которыми определяются A и B, имеем

$$\begin{vmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(y) & \wp'(y) & 1 \\ \wp(z+y) & -\wp'(z+y) & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Так как производные, входящие в это соотношение, могут быть выражены алгебраически соответственно через $\wp(z)$, $\wp(y)$, $\wp(z+y)$ (§ 20.22), то оно действительно выражает функцию $\wp(z+y)$ алгебраически через $\wp(z)$ и $\wp(y)$. Это и есть *теорема сложения.*

Другие методы получения теоремы сложения указаны в примерах 1 и 2 § 20.311, а также в § 20.312. Отметим симметричную форму теоремы сложения; если $u+v+w=0$, то

$$\begin{vmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \end{vmatrix}=0.$$

20.31. Другая форма теоремы сложения

Сохраняя обозначения § 20.3, видим, что значения ζ, при которых $\wp'(\zeta)-A\wp(\zeta)-B$ равно нулю, сравнимы с одним из значений z, y, $-z-y$.

Значит, $\wp'^2(\zeta)-\{A\wp(\zeta)+B\}^2$ равняется нулю, когда ζ сравнимо с каким-либо из значений z, y, $-z-y$, и следовательно,

$$4\wp^3(\zeta)-A^2\wp^2(\zeta)-(2AB+g_2)\wp(\zeta)-(B^2+g_3)$$

равняется нулю, когда $\wp(\zeta)$ равна какому-либо из значений

$$\wp(z),\quad \wp(y),\quad \wp(z+y).$$

Для общих значений z и y значения $\wp(z)$, $\wp(y)$ и $\wp(z+y)$ различны, и таким образом, они дают все корни уравнения

$$4Z^3-A^2Z^2-(2AB+g_2)Z-(B^2+g_3)=0.$$

Следовательно, по известной формуле для суммы корней кубического уравнения

$$\wp(z)+\wp(y)+\wp(z+y)=\frac{1}{4}A^2,$$

откуда, решив уравнения, которыми определяются A и B, получим

$$\wp(z+y)=\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z)-\wp'(y)}{\wp(z)-\wp(y)}\right\}^2-\wp(z)-\wp(y).$$

Этот результат выражает $\wp(z+y)$ явно через функции от z и y.

20.311. Формула удвоения для $\wp(z)$

Формулы сложения, полученные выше, теряют смысл, когда $y=z$. Но результат § 20.31 будет верен при заданном значении z для общих значений y.

Переходя к пределу, когда y стремится к z, получим

$$\lim_{y\to z}\wp(z+y)=\frac{1}{4}\lim_{y\to z}\left\{\frac{\wp'(z)-\wp'(y)}{\wp(z)-\wp(y)}\right\}^2-\wp(z)-\lim_{y\to z}\wp(y).$$

Из этого равенства мы видим, что если $2z$ не есть период, то

$$\wp(2z)=\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\wp'(z)-\wp'(z+h)}{\wp(z)-\wp(z+h)}\right\}^2-2\wp(z)=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{-h\wp''(z)+O(h^2)}{-h\wp'(z)+O(h^2)}\right\}^2-2\wp(z),$$

если применить теорему Тейлора к $\wp(z+h)$, $\wp'(z+h)$; таким образом,

$$\wp(2z)=\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right\}^2-2\wp(z),$$

за исключением случая, когда $2z$ есть период. Эта формула называется *формулой удвоения*.

Пример 1. Доказать, что

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z)-\wp'(y)}{\wp(z)-\wp(y)}\right\}^2-\wp(z)-\wp(z+y),$$

как функция от z, не имеет особенностей в точках, сравнимых с $z=0$, $\pm y$, и, применяя теорему Лиувилля, вывести отсюда теорему сложения.

Пример 2. Применить рассуждение, указанное в примере 1, к функции

$$\begin{vmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(y) & \wp'(y) & 1 \\ \wp(z+y) & -\wp'(z+y) & 1 \end{vmatrix}$$

и вывести отсюда теорему сложения.

Пример 3. Показать, что

$$\wp(z+y)+\wp(z-y)=$$

$$=\{\wp(z)-\wp(y)\}^{-2}\left[\left\{2\wp(z)\wp(y)-\frac{1}{2}g_2\right\}\{\wp(z)+\wp(y)\}-g_3\right].$$

[По теореме сложения мы имеем

$$\wp(z+y)+\wp(z-y)=\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z)-\wp'(y)}{\wp(z)-\wp(y)}\right\}^2-\wp(z)-\wp(y)+$$
$$+\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z)+\wp'(y)}{\wp(z)-\wp(y)}\right\}^2-\wp(z)-\wp(y)=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\wp'^2(z)+\wp'^2(y)}{\{\wp(z)-\wp(y)\}^2}-2\{\wp(z)+\wp(y)\}.$$

Заменяя $\wp'^2(z)$ и $\wp'^2(y)$ соответственно через $4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3$ и $4\wp^3(y)-g_2\wp(y)-g_3$, после простых преобразований получим требуемый результат.]

Пример 4. Показать, пользуясь теоремой Лиувилля, что

$$\frac{d}{dz}\{\wp(z-a)\wp(z-b)\}=\wp(a-b)\{\wp'(z-a)+\wp'(z-b)\}-$$
$$-\wp'(a-b)\{\wp(z-a)-\wp(z-b)\}.$$

(Trinity, 1905)

20.312. Метод Абеля[1]) доказательства теоремы сложения для $\wp(z)$

Поучителен нижеследующий метод доказательства теоремы сложения для $\wp(z)$, хотя вполне строгое доказательство длинно и утомительно.

Пусть g_2, g_3 — инварианты функции $\wp(z)$; возьмем в плоскости перпендикулярные оси OX, OY и рассмотрим пересечения кубической кривой

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3$$

с подвижной прямой $y=mx+n$.

Если (x_1, y_1) — какая-нибудь точка на кубической кривой, то уравнение относительно z

$$\wp(z)-x_1=0$$

имеет два решения $+z_1$, $-z_1$ (§ 20.13) и все другие решения сравнимы с этими двумя. Так как $\wp'^2(z)=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3$, то имеем $\wp'^2(z)=y_1^2$; пусть z_1 — то решение, для которого $\wp'(z_1)=+y_1$, а не $-y_1$.

Число z_1, выбранное таким образом, называется *параметром* для (x_1, y_1) на кубической кривой.

Абсциссы x_1, x_2, x_3 пересечений кубической кривой с подвижной прямой являются корнями уравнения

$$\varphi(x)\equiv 4x^3-g_2x-g_3-(mx+n)^2=0,$$

и следовательно,

$$\varphi(x)\equiv 4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Изменение δx_r одной из этих абсцисс, вызванное перемещением секущей прямой при малом изменении δm, δn коэффициентов m, n, опреде-

[1]) Abel, Journ. für Math., II (1827), 101—181; III (1828), 160—190 [Oeuvres, I (Christiania, 1839), 141—252].

ляется уравнением

$$\varphi'(x_r)\,\delta x_r + \frac{\partial\varphi}{\partial m}\,\delta m + \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\delta n = 0$$

или

$$\varphi'(x_r)\,\delta x_r = 2\,(m x_r + n)\,(x_r\,\delta m + \delta n),$$

откуда получим

$$\sum_{r=1}^{3} \frac{\delta x_r}{m x_r + n} = 2 \sum_{r=1}^{3} \frac{x_r\,\delta m + \delta n}{\varphi'(x_r)},$$

предполагая, что x_1, x_2, x_3 не равны, так что $\varphi'(x_r) \neq 0$.

Теперь, если разложим $\dfrac{x\,(x\,\delta m + \delta n)}{\varphi(x)}$, как функцию от x, на простейшие дроби, то это выражение примет вид

$$\sum_{r=1}^{3} \frac{A_r}{x - x_r},$$

где

$$A_r = \lim_{x \to x_r} x\,(x\,\delta m + \delta n)\,\frac{x - x_r}{\varphi(x)} = x_r\,(x_r\,\delta m + \delta n) \lim_{x \to x_r} \frac{x - x_r}{\varphi(x)} = \frac{x_r\,(x_r\,\delta m + \delta n)}{\varphi'(x_r)}$$

по теореме Тейлора.

Положив $x = 0$, получим

$$\sum_{r=1}^{3} \frac{\delta x_r}{y_r} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{r=1}^{3} \delta z_r = 0.$$

Другими словами, *сумма параметров точек пересечений есть постоянная, не зависящая от положения прямой.*

Если прямая изменяет свое положение так, что все точки пересечения удаляются в бесконечность (и притом так, что две точки никогда не сливаются), то очевидно, что $z_1 + z_2 + z_3$ будет равна сумме параметров, когда прямая есть бесконечно удаленная прямая; но когда прямая находится на бесконечности, каждый параметр является периодом функции $\wp(z)$ и поэтому $z_1 + z_2 + z_3$ будет периодом функции $\wp(z)$.

Таким образом, сумма параметров трех коллинеарных точек на кубической кривой сравнима с нулем. После этого детерминантную форму теоремы сложения можно получить, как в § 20.3.

20.32. Постоянные e_1, e_2, e_3

Покажем теперь, что величины $\wp(\omega_1)$, $\wp(\omega_2)$, $\wp(\omega_3)$ (где $\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$) не равны друг другу и если их значения обозначить e_1, e_2, e_3, то e_1, e_2, e_3 будут корнями уравнения

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 0.$$

Рассмотрим сначала $\wp'(\omega_1)$. Так как $\wp'(z)$ — нечетная периодическая функция, то мы имеем

$$\wp'(\omega_1) = -\wp'(-\omega_1) = -\wp'(2\omega_1 - \omega_1) = -\wp'(\omega_1),$$

и следовательно,

$$\wp'(\omega_1) = 0.$$

Подобным же образом

$$\wp'(\omega_2) = \wp'(\omega_3) = 0.$$

Так как $\wp'(z)$ — эллиптическая функция, единственными особыми точками которой являются тройные полюсы в точках, сравнимых с началом координат, то $\wp'(z)$ имеет три и только три (§ 20.13) неприводимых нуля. Поэтому единственными нулями функции $\wp'(z)$ являются точки, сравнимые с ω_1, ω_2, ω_3.

Рассмотрим теперь $\wp(z) - e_1$. Эта функция равна нулю при $z = \omega_1$, и так как $\wp'(\omega_1) = 0$, то она имеет в ω_1 двойной корень. Так как, далее, $\wp(z)$ имеет только два неприводимых полюса, то из § 20.13 вытекает, что все нули функции $\wp(z) - e_1$ сравнимы с ω_1. Подобным же образом единственными нулями функций $\wp(z) - e_2$, $\wp(z) - e_3$ являются двойные нули в точках, сравнимых с ω_2, ω_3.

Отсюда $e_1 \neq e_2 \neq e_3$, так как, если бы, например $e_1 = e_2$, то $\wp(z) - e_1$ имела бы нуль в ω_2, т. е. в точке, не сравнимой с ω_1.

Так как

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

и $\wp'(z)$ равна нулю в точках ω_1, ω_2, ω_3, то отсюда следует, что $4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$ равна нулю, когда $\wp(z) = e_1$, e_2 или e_3.

Другими словами, e_1, e_2, e_3 являются корнями уравнения

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 0.$$

По хорошо известным формулам, связывающим корни уравнений с их коэффициентами, получаем, что

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$
$$e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2 = -\frac{1}{4}g_2,$$
$$e_1e_2e_3 = \frac{1}{4}g_3.$$

Пример 1. Показать, что если g_2 и g_3 вещественны и дискриминант $g_2^3 - 27g_3^2$ положителен, то все три числа e_1, e_2, e_3 вещественны;

расположив их так, что $e_1 > e_2 > e_3$, показать, что

$$\omega_1 = \int\limits_{e_1}^{\infty} (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-\frac{1}{2}}\, dt,$$

$$\omega_3 = -i \int\limits_{-\infty}^{e_3} (g_3 + g_2 t - 4t^3)^{-\frac{1}{2}}\, dt,$$

так что ω_1 — вещественное, а ω_3 — чисто мнимое.

Пример 2. Показать, что при условиях примера 1 функция $\wp(z)$ вещественна на периметре прямоугольника, вершины которого 0, ω_3, $\omega_1 + \omega_3$, ω_1.

20.33. Прибавление полупериода к аргументу функции $\wp(z)$

По теореме сложения в форме, данной в § 20.31, имеем

$$\wp(z + \omega_1) + \wp(z) + \wp(\omega_1) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z) - \wp'(\omega_1)}{\wp(z) - \wp(\omega_1)}\right\}^2,$$

и следовательно, так как

$$\wp'^2(z) = 4\prod_{r=1}^{3}\{\wp(z) - e_r\},$$

имеем

$$\wp(z + \omega_1) = \frac{\{\wp(z) - e_2\}\{\wp(z) - e_3\}}{\wp(z) - e_1} - \wp(z) - e_1,$$

т. е., замечая, что $\sum\limits_{r=1}^{3} e_r = 0$,

$$\wp(z + \omega_1) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(z) - e_1};$$

эта формула выражает функцию $\wp(z + \omega_1)$ через функцию $\wp(z)$.

Пример 1. Показать, что

$$\wp\left(\frac{1}{2}\omega_1\right) = e_1 \pm \{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пример 2. Из формулы для $\wp(z + \omega_2)$ и из примера 1 вывести, что

$$\wp\left(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2\right) = e_1 \mp \{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\}^{\frac{1}{2}}.$$

(Math. Trip., 1913)

Пример 3. Показать, что произведение

$$\wp'(z)\,\wp'(z + \omega_1)\,\wp'(z + \omega_2)\,\wp'(z + \omega_3)$$

равно дискриминанту уравнения

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 0.$$

[Дифференцируя результат, полученный в этом параграфе, имеем

$$\wp'(z + \omega_1) = -(e_1 - e_2)(e_1 - e_2)\,\wp'(z)\,\{\wp(z) - e_1\}^{-2};$$

из этого и аналогичных равенств имеем

$$\wp'(z)\,\wp'(z+\omega_1)\,\wp'(z+\omega_2)\,\wp'(z+\omega_3) =$$
$$= (e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2\,\wp'^4(z)\prod_{r=1}^{3}\{\wp(z)-e_r\}^{-2} =$$
$$= 16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2,$$

что представляет собой искомый дискриминант $g_2^3-27g_3^2$.]

Пример 4. Показать, что при надлежащем выборе радикалов

$$\wp'\left(\frac{1}{2}\omega_1\right) = -2\,\{(e_1-e_2)(e_1-e_3)\}^{\frac{1}{2}}\left\{(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}}+(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

(Math. Trip., 1913)

Пример 5. Показать, что при надлежащем выборе радикалов

$$\{\wp(2z)-e_2\}^{\frac{1}{2}}\{\wp(2z)-e_3\}^{\frac{1}{2}}+\{\wp(2z)-e_3\}^{\frac{1}{2}}\{\wp(2z)-e_1\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\{\wp(2z)-e_1\}^{\frac{1}{2}}\{\wp(2z)-e_2\}^{\frac{1}{2}} = \wp(z)-\wp(2z).$$

20.4. Квазипериодические функции. Функция [1] $\zeta(z)$

Введем теперь функцию $\zeta(z)$, определяемую уравнением

$$\frac{d\zeta(z)}{dz} = -\wp(z)$$

и условием

$$\lim_{z\to 0}\{\zeta(z)-z^{-1}\} = 0.$$

Так как ряд для $\wp(z)-z^{-2}$ равномерно сходится во всякой области, из которой исключены окрестности точек [2] $\Omega'_{m,n}$, то мы можем интегрировать его почленно (§ 4.7, часть I) и получим

$$\zeta(z)-z^{-1} = -\int_0^z\{\wp(z)-z^{-2}\}\,dz = -\sum_{m,n}{}'\int_0^z\left\{(z-\Omega_{m,n})^{-2}-\Omega_{m,n}^{-2}\right\}dz,$$

что дает

$$\zeta(z) = \frac{1}{\zeta}+\sum_{m,n}{}'\left\{\frac{1}{z-\Omega_{m,n}}+\frac{1}{\Omega_{m,n}}+\frac{z}{\Omega_{m,n}^2}\right\}.$$

Легко видеть, что общий член этого ряда будет

$$O\left(|\Omega_{m,n}|^{-3}\right) \text{ при } |\Omega_{m,n}|\to\infty;$$

[1]) Эту функцию, конечно, не следует смешивать с дзета-функцией Римана, рассмотренной в главе 13.

[2]) Символ $\Omega'_{m,n}$ применяется для обозначения всех точек $\Omega_{m,n}$, за исключением начала координат (ср. § 20.2).

отсюда следует (§ 20.2), что $\zeta(z)$ будет аналитической функцией от z во всей плоскости z, за исключением простых полюсов во всех точках $\Omega_{m,n}$ (причем вычеты во всех полюсах равны $+1$).

Очевидно, что

$$-\zeta(-z)=\frac{1}{z}+\sum_{m,n}{}'\left\{\frac{1}{z+\Omega_{m,n}}-\frac{1}{\Omega_{m,n}}+\frac{z}{\Omega_{m,n}^2}\right\},$$

и так как этот ряд состоит из тех же членов, что и ряд для $\zeta(z)$, но расположенных, как в соответствующем ряде § 20.21, то имеем согласно § 2.52 части I

$$\zeta(-z)=-\zeta(z);$$

другими словами, $\zeta(z)$ — *нечетная функция от* z.

Следуя аналогии § 20.222, можно сравнить $\zeta(z)$ с функцией $\operatorname{ctg} z$, определяемой рядом $z^{-1}+\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}{}'\left\{(z-m\pi)^{-1}+(m\pi)^{-1}\right\}$, уравнение $\frac{d}{dz}\operatorname{ctg} z=-\operatorname{cosec}^2 z$ соответствует уравнению $\frac{d}{dz}\zeta(z)=-\wp(z)$.

20.41. Квазипериодичность функции $\zeta(z)$

Название § 20.4 предвосхищало результат, который будет доказан теперь, а именно, что функция $\zeta(z)$ не будет двоякопериодической функцией от z; рассмотрим, как влияет на $\zeta(z)$ прибавление $2\omega_1$ или $2\omega_2$ к z. Из § 20.12 (III) очевидно, что $\zeta(z)$ не может быть эллиптической функцией ввиду того, что вычет функции $\zeta(z)$ в каждом полюсе равен $+1$.

Если проинтегрировать уравнение

$$\wp(z+2\omega_1)=\wp(z),$$

то получим

$$\zeta(z+2\omega_1)=\zeta(z)+2\eta_1,$$

где $2\eta_1$ — постоянная интегрирования; положив $z=-\omega_1$ и принимая во внимание, что $\zeta(z)$ — нечетная функция, имеем

$$\eta_1=\zeta(\omega_1).$$

Подобным же образом

$$\zeta(z+2\omega_2)=\zeta(z)+2\eta_2,$$

где

$$\eta_2=\zeta(\omega_2).$$

Пример 1. Доказать с помощью теоремы Лиувилля, что при $x+y+z=0$

$$\{\zeta(x)+\zeta(y)+\zeta(z)\}^2+\zeta'(x)+\zeta'(y)+\zeta'(z)=0.$$

(Frobenius и Stickelberger, Journ. für Math., LXXXVIII)

[Этот результат представляет собой псевдотеорему сложения. Он не является настоящей теоремой сложения, так как $\zeta'(x)$, $\zeta'(y)$, $\zeta'(z)$ не представляют собой алгебраических функций от $\zeta(x)$, $\zeta(y)$, $\zeta(z)$.]

Пример 2. Доказать с помощью теоремы Лиувилля, что

$$2\begin{vmatrix} 1 & \wp(x) & \wp^2(x) \\ 1 & \wp(y) & \wp^2(y) \\ 1 & \wp(z) & \wp^2(z) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \wp(x) & \wp'(x) \\ 1 & \wp(y) & \wp'(y) \\ 1 & \wp(z) & \wp'(z) \end{vmatrix} = \zeta(x+y+z)-\zeta(x)-\zeta(y)-\zeta(z).$$

Получить обобщение этой теоремы, содержащее n переменных.

(Math. Trip., 1894)

20.411. Соотношение между η_1 и η_2

Покажем теперь, что

$$\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=\frac{1}{2}\pi i.$$

Для получения этого результата рассмотрим интеграл $\int\limits_C \zeta(z)\,dz$, взятый вдоль границы ячейки.

Внутри ячейки имеется только один полюс функции $\zeta(z)$, вычет в котором равен $+1$. Отсюда $\int\limits_C \zeta(z)\,dz=2\pi i$.

Преобразуя контурный интеграл по способу § 20.12, получим

$$2\pi i=\int\limits_t^{t+2\omega_1}\{\zeta(z)-\zeta(z+2\omega_2)\}\,dz-\int\limits_t^{t+2\omega_2}\{\zeta(z)-\zeta(z+2\omega_1)\}\,dz=$$

$$=-2\eta_2\int\limits_t^{t+2\omega_1}dt+2\eta_1\int\limits_t^{t+2\omega_2}dt,$$

и следовательно,

$$2\pi i=-4\eta_2\omega_1+4\eta_1\omega_2,$$

что и представляет собой требуемый результат.

20.42. Функция $\sigma(z)$

Введем теперь функцию $\sigma(z)$, определяемую уравнением

$$\frac{d}{dz}\lg\sigma(z)=\zeta(z) \text{ и условием } \lim_{z\to 0}\left\{\frac{\sigma(z)}{z}\right\}=1.$$

Ввиду равномерной сходимости ряда для $\zeta(z)$ всюду, кроме окрестностей полюсов функции $\zeta(z)$, мы можем интегрировать ряд почленно. Поступая так и потенцируя, находим

$$\sigma(z)=z\prod_{m,n}{}'\left\{\left(1-\frac{z}{\Omega_{m,n}}\right)\exp\left(\frac{z}{\Omega_{m,n}}+\frac{z^2}{2\Omega_{m,n}^2}\right)\right\},$$

где постоянная интегрирования определена из добавочного условия.

Методами, примененными в §§ 20.2, 20.21, 20.4, читатель легко получит следующие результаты:

(I) Произведение для $\sigma(z)$ сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области значений z.

(II) Функция $\sigma(z)$ — нечетная целая функция от z с простыми нулями в точках $\Omega_{m,n}$.

Функцию $\sigma(z)$ можно сравнить с функцией $\sin z$, определяемой произведением

$$z\prod_{m=-\infty}^{\infty}{}'\left\{\left(1-\frac{z}{m\pi}\right)e^{\frac{z}{m\pi}}\right\},$$

причем соотношению $\frac{d}{dz}\lg\sin z=\operatorname{ctg} z$ соответствует $\frac{d}{dz}\lg\sigma(z)=\zeta(z)$.

20.421. Квазипериодичность функции $\sigma(z)$

Интегрируя равенство

$$\zeta(z+2\omega_1)=\zeta(z)+2\eta_1,$$

получим

$$\sigma(z+2\omega_1)=ce^{2\eta_1 z}\sigma(z),$$

где c — постоянная интегрирования; для определения c положим $z=-\omega_1$; тогда

$$\sigma(\omega_1)=-ce^{-2\eta_1\omega_1}\sigma(\omega_1).$$

Следовательно, $c=-e^{2\eta_1\omega_1}$ и

$$\sigma(z+2\omega_1)=-e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma(z).$$

Подобным же образом

$$\sigma(z+2\omega_2)=-e^{2\eta_2(z+\omega_2)}\sigma(z).$$

Эти результаты описывают поведение функции $\sigma(z)$, когда к z прибавляется период функции $\wp(z)$.

Если, как в § 20.32, положить $\omega_3=-\omega_1-\omega_2$, то три другие сигма-функции определятся равенствами

$$\sigma_r(z)=\frac{e^{-\eta_r z}\sigma(z+\omega_r)}{\sigma(\omega_r)}\qquad(r=1,\ 2,\ 3).$$

Четыре определенные таким образом сигма-функции аналогичны четырем тэта-функциям, рассматриваемым в главе 21 (см. § 21.9).

Пример 1. Показать, что если m и n — любые целые числа, то

$$\sigma(z+2m\omega_1+2n\omega_2)=(-1)^{m+n}\,\sigma(z)\times$$
$$\times\exp\{(2m\eta_1+2n\eta_2)z+2m^2\eta_1\omega_1+4mn\eta_1\omega_2+2n^2\eta_2\omega_2\},$$

и вывести отсюда, что $\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1$ — целое, кратное $\frac{1}{2}\pi i$.

Пример 2. Показать, что если $q=\exp(\pi i\omega_2/\omega_1)$, так что $|q|<1$, и если

$$F(z)=\exp\left(\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{\omega_1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-2q^{2n}\cos\frac{\pi z}{\omega_1}+q^{4n}\right\},$$

то $F(z)$ — целая функция с теми же самыми нулями, как у функции $\sigma(z)$, и, следовательно, $\frac{F(z)}{\sigma(z)}$ — двоякопериодическая функция от z с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Пример 3. Пользуясь теоремой Лиувилля, вывести из примера 2, что

$$\sigma(z)=\frac{2\omega_1}{\pi}\exp\left(\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{2\omega_1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-2q^{2n}\cos(\pi z/\omega_1)+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2}\right\}.$$

Пример 4. Получить результат примера 3, выражая каждый множитель справа через однократное бесконечное произведение.

20.5. Формулы, выражающие любую эллиптическую функцию через функции Вейерштрасса с теми же периодами

Существуют различные формулы, аналогичные выражениям любой рациональной функции: (I) в виде отношения двух произведений линейных множителей, (II) в виде суммы простейших дробей; имеются две формулы первого типа, содержащие соответственно сигма-функции и эллиптические функции Вейерштрасса; второго же типа имеется формула, содержащая производные дзета-функции. Перейдем к получению этих формул.

20.51. Выражение любой эллиптической функции через функции $\wp(z)$ и $\wp'(z)$

Пусть $f(z)$ — произвольная эллиптическая функция и $\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса с теми же периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$. Положим сначала

$$f(z)=\frac{1}{2}[f(z)+f(-z)]+\frac{1}{2}\left[\{f(z)-f(-z)\}\{\wp'(z)\}^{-1}\right]\wp'(z).$$

Обе функции

$$f(z)+f(-z),\quad \{f(z)-f(-z)\}\{\wp'(z)\}^{-1}$$

будут *четными* и, очевидно, эллиптическими, когда $f(z)$ — эллиптическая функция.

Задача, стоящая перед нами, будет решена, *если мы сможем выразить любую четную эллиптическую функцию* $\varphi(z)$ *через функцию* $\wp(z)$.

Пусть a — нуль функции $\varphi(z)$ в какой-нибудь ячейке; тогда точка той же ячейки, сравнимая с $-a$, будет также нулем.

Неприводимые нули функции $\varphi(z)$ могут быть поэтому разбиты на две группы: скажем, точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и точки, сравнимые с $-a_1, -a_2, \ldots, -a_n$.

Подобным же образом неприводимые полюсы могут быть разбиты на две группы: скажем, точки $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и точки, сравнимые с $-b_1, -b_2, \ldots, -b_n$.

Рассмотрим теперь функцию [1])

$$\frac{1}{\varphi(z)} \prod_{r=1}^{n} \left\{ \frac{\wp(z)-\wp(a_r)}{\wp(z)-\wp(b_r)} \right\}.$$

Она является эллиптической функцией от z и, очевидно, не имеет полюсов, ибо нули функции $\varphi(z)$ являются нулями числителя произведения, а нули знаменателя произведения являются полюсами $\varphi(z)$ [2]). Следовательно, по теореме Лиувилля она равна постоянной, скажем A_1, и мы будем иметь

$$\varphi(z) = A_1 \prod_{r=1}^{n} \left\{ \frac{\wp(z)-\wp(a_r)}{\wp(z)-\wp(b_r)} \right\};$$

таким образом, функция $\varphi(z)$ выражена как рациональная функция от $\wp(z)$.

Выполняя эту процедуру с каждой из функций

$$f(z)+f(-z), \quad \{f(z)-f(-z)\}\{\wp'(z)\}^{-1},$$

получим теорему: *любая функция* $f(z)$ *может быть выражена через эллиптические функции Вейерштрасса* $\wp(z)$ *и* $\wp'(z)$ *с теми же периодами; выражение рационально относительно* $\wp(z)$ *и линейно относительно* $\wp'(z)$.

---

[1]) Если какая-нибудь из точек a_r или b_r сравнима с началом координат, то соответствующий множитель $\wp(z)-\wp(a_r)$ или $\wp(z)-\wp(b_r)$ опускается. Нуль (или полюс) произведения и нуль (или полюс) функции $\varphi(z)$ в начале координат будут тогда одинаковой кратности. В этом произведении и в произведении § 20.53 множители, соответствующие кратным нулям и полюсам, повторяются соответственно их кратности.

[2]) Той же самой кратности.

20.52. Выражение любой эллиптической функции через линейную комбинацию от дзета-функции и ее производных

Пусть $f(z)$ — какая-нибудь эллиптическая функция с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — совокупность неприводимых полюсов функции $f(z)$, а главная часть (§ 5.61, часть I) функции $f(z)$ вблизи полюса a_k равна

$$\frac{c_{k,1}}{z-a_k}+\frac{c_{k,2}}{(z-a_k)^2}+\ldots+\frac{c_{k,r_k}}{(z-a_k)^{r_k}}.$$

Тогда можно показать, что

$$f(z)=A_2+\sum_{k=1}^{n}\Big\{c_{k,1}\zeta(z-a_k)-c_{k,2}\zeta'(z-a_k)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^{r_k-1}c_{k,r_k}}{(r_k-1)!}\zeta^{(r_k-1)}(z-a_k)\Big\},$$

где A_2 — постоянная, а $\zeta^{(s)}(z)$ обозначает $\frac{d^s}{dz^s}\zeta(z)$.

Обозначая сумму, стоящую справа, через $F(z)$, видим, что

$$F(z+2\omega_1)-F(z)=\sum_{k=1}^{n}2\eta_1 c_{k,1}$$

согласно § 20.41, так как все производные дзета-функции периодичны.

Но сумма $\sum_{k=1}^{n}c_{k,1}$ равна сумме вычетов функции во всех ее полюсах, лежащих в ячейке, и, следовательно (§ 20.12), равна нулю. Поэтому $F(z)$ имеет период $2\omega_1$ и таким же образом можно показать, что она будет иметь и период $2\omega_2$; следовательно, $f(z)-F(z)$ — эллиптическая функция. Кроме того, $F(z)$ образована так, что $f(z)-F(z)$ не имеет полюсов в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$; следовательно, она не имеет полюсов в некоторой ячейке и по теореме Лиувилля приводится к постоянной, скажем A_2.

Таким образом, функция $f(z)$ может быть представлена в виде

$$A_2+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{r_k}\frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}c_{k,s}\zeta^{(s-1)}(z-a_k).$$

Этот результат имеет большое значение в задаче интегрирования эллиптической функции $f(z)$, когда главная часть ее разложения в каждом из ее полюсов известна; очевидно, имеем

$$\int^{z} f(z)\,dz = A_2 z + \sum_{k=1}^{n}\left[c_{k,1}\lg\sigma(z-a_k) + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=2}^{r_k}\frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}c_{k,s}\zeta^{(s-2)}(z-a_k)\right] + C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Пример. Показать вышеизложенным методом, что

$$\wp^2(z) = \frac{1}{6}\wp''(z) + \frac{1}{12}g_2,$$

и вывести отсюда, что

$$\int^{z}\wp^2(z)\,dz = \frac{1}{6}\wp'(z) + \frac{1}{12}g_2 z + C,$$

где C — постоянная интегрирования.

20.53. Выражение любой эллиптической функции в виде отношения сигма-функций

Пусть $f(z)$ — какая-нибудь эллиптическая функция с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — совокупность неприводимых нулей функции $f(z)$. Тогда (§ 20.14) можно выбрать такую совокупность полюсов $b_1, b_2, \ldots, b_n$, что всякий полюс функции $f(z)$ будет сравним с одним из них и, сверх того [1]),

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{\sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_r)}.$$

Это произведение, очевидно, имеет те же самые полюсы и нули, что и функция $f(z)$; далее, результат прибавления $2\omega_1$ к z выра-

[1]) Кратные нули или полюсы, конечно, подсчитываются соответственно их кратности; для определения $b_1, b_2, \ldots, b_n$ возьмем $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b'_n$ так, чтобы они представляли совокупность полюсов в ячейке, в которой лежат $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и выберем затем точку b_n, сравнимую с b'_n, таким образом, чтобы удовлетворялось требуемое равенство.

жается в умножении функции на

$$\prod_{r=1}^{n} \frac{\exp\{2\eta_1(z-a_r)\}}{\exp\{2\eta_1(z-b_r)\}} = 1.$$

Эта функция имеет поэтому период $2\omega_1$; подобным же образом покажем, что она имеет и период $2\omega_2$; следовательно, отношение

$$f(z) : \prod_{r=1}^{n} \frac{\sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_r)}$$

будет эллиптической функцией без нулей и полюсов. По теореме Лиувилля она должна быть равна постоянной, скажем A_3.

Таким образом, функция $f(z)$ может быть представлена в виде

$$f(z) = A_3 \prod_{r=1}^{n} \frac{\sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_r)}.$$

Эллиптическая функция, следовательно, определена (с точностью до постоянного множителя), когда известны ее периоды и совокупности неприводимых нулей и полюсов.

Пример 1. Показать, что

$$\wp(z) - \wp(y) = -\frac{\sigma(z+y)\,\sigma(z-y)}{\sigma^2(z)\,\sigma^2(y)}.$$

Пример 2. Вывести из примера 1 при помощи дифференцирования, что

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(z)-\wp'(y)}{\wp(z)-\wp(y)} = \zeta(z+y) - \zeta(z) - \zeta(y),$$

и при помощи дальнейшего дифференцирования получить теорему сложения для $\wp(z)$.

Пример 3. Пусть $\sum\limits_{r=1}^{n} a_r = \sum\limits_{r=1}^{n} b_r$; показать, что

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\sigma(a_r-b_1)\,\sigma(a_r-b_2)\ldots\sigma(a_r-b_n)}{\sigma(a_r-a_1)\,\sigma(a_r-a_2)\ldots * \ldots\sigma(a_r-a_n)} = 0,$$

где знак * обозначает, что множитель $\sigma(a_r-a_r)$, равный нулю, опущен.

Пример 4. Показать, что

$$\wp(z) - e_r = \frac{\sigma_r^2(z)}{\sigma^2(z)} \qquad (r = 1, 2, 3).$$

[Под $\{\wp(r)-e_r\}^{\frac{1}{2}}$ обыкновенно *принято понимать* $\frac{\sigma_r(z)}{\sigma(z)}$, а не $\frac{-\sigma_r(z)}{\sigma(z)}$.]

Пример 5. Установить при помощи примера 1 «трехчленное уравнение», а именно:

$$\sigma(z+a)\,\sigma(z-a)\,\sigma(b+c)\,\sigma(b-c)+\sigma(z+b)\,\sigma(z-b)\,\sigma(c+a)\,\sigma(c-a)+$$
$$+\sigma(z+c)\,\sigma(z-c)\,\sigma(a+b)\,\sigma(a-b)=0.$$

[Этот результат принадлежит Вейерштрассу, см. стр. 47 его лекций, изданных Шварцем.]

Это уравнение является характеристическим для сигма-функции; Альфан (Halphen, Fonctions Elliptiques, I (Paris, 1886), 187) доказал, что нет функции, существенно отличной от сигма-функции, которая бы удовлетворяла уравнению этого типа, см. стр. 333, пример 38.

20.54. Связь между любыми двумя эллиптическими функциями с одинаковыми периодами

Докажем теперь важную теорему, что *между любыми двумя эллиптическими функциями $f(z)$ и $\varphi(z)$ с одинаковыми периодами существует алгебраическое соотношение.*

Действительно, можно выразить (§ 20.51) $f(z)$ и $\varphi(z)$ как рациональные функции от функций $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ Вейерштрасса с теми же периодами, так что

$$f(z)=R_1\{\wp(z),\ \wp'(z)\},\quad \varphi(z)=R_2\{\wp(z),\ \wp'(z)\},$$

где R_1 и R_2 обозначают рациональные функции двух переменных.

Исключая $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ алгебраически из этих двух уравнений и уравнения

$$\wp'^2(z)=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3,$$

получим алгебраическое соотношение, связывающее $f(z)$ с $\varphi(z)$; теорема, таким образом, доказана.

В частности, всякая эллиптическая функция связана алгебраическим соотношением со своей производной.

Если теперь взять порядки эллиптических функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ равными соответственно m и n, то любому заданному значению функции $f(z)$ соответствует (§ 20.13) совокупность m неприводимых значений z и, следовательно, m значений (вообще говоря, различных) функции $\varphi(z)$.

Следовательно, каждому значению f соответствует m значений φ и, подобным же образом, каждому значению φ соответствует n значений f.

Соотношение между $f(z)$ и $\varphi(z)$ будет поэтому (в общем случае) степени m относительно φ и степени n относительно f.

Это соотношение *может* быть и более низкой степени. Так, если функция $f(z)=\wp(z)$—порядка 2, а функция $\varphi(z)=\wp^2(z)$ — порядка 4, соотношение между ними будет $f^2=\varphi$.

В качестве иллюстрации доказанной теоремы возьмем функцию $f(z)=\wp(z)$ второго порядка и функцию $\varphi(z)=\wp'(z)$ третьего порядка. Соотношение между функциями должно быть степени 2 относительно φ и степени 3 относительно f; это и есть на самом деле, ибо этим соотношением будет

$$\varphi^2 = 4f^3 - g_2 f - g_3.$$

Пример. Пусть u, v, w — три эллиптические функции второго порядка с равными периодами; показать, что в общем случае существует два различных соотношения, линейных относительно каждой функции u, v, w, а именно:

$$Auvw + Bvw + Cwu + Duv + Eu + Fv + Gw + H = 0,$$
$$A'uvw + B'vw + C'wu + D'uv + E'u + F'v + G'w + H' = 0,$$

где A, B, ..., H' — постоянные.

20.6. Об интегрировании функции $\{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4\}^{-\frac{1}{2}}$

Покажем теперь, что некоторые интегралы, которые не берутся при помощи элементарных функций, могут быть взяты введением функции $\wp(z)$.

Пусть

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4 \equiv f(x)$$

— какой-нибудь полином четвертой степени, не имеющий равных линейных множителей; пусть его инварианты[1]) будут

$$g_2 \equiv a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2,$$
$$g_3 \equiv a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_2^3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4.$$

Пусть $z = \int\limits_{x_0}^{x} \{f(t)\}^{-\frac{1}{2}}\,dt$, где x_0 — какой-нибудь корень уравнения $f(x) = 0$; тогда, если функция $\wp(z)$ построена[2]) по инвариантам g_2 и g_3, переменную x можно представить в виде рациональной функции от $\wp(z; g_2, g_3)$.

[Примечание. Мы считаем, что $f(x)$ не имеет равных линейных множителей, потому что если $f(x)$ имеет равные множители, то интегрирование выполняется с помощью одних круговых или логарифмических функций. По той же причине не нужно рассматривать и случай, когда $a_0 = a_1 = 0$.]

---

[1]) Burnside and Panton, Theory of Equations, II, 113. (См. также А. К. Сушкевич, Основы высшей алгебры, Гостехиздат, М., 1941, 203, 336. — *Прим. ред.*).

[2]) См. § 21.73.

По теореме Тейлора имеем

$$f(t)=4A_3(t-x_0)+6A_2(t-x_0)^2+4A_1(t-x_0)^3+A_0(t-x_0)^4$$

(так как $f(x_0)=0$), где

$$A_0=a_0,\quad A_1=a_0x_0+a_1,$$
$$A_2=a_0x_0^2+2a_1x_0+a_2,$$
$$A_3=a_0x_0^3+3a_1x_0^2+3a_2x_0+a_3.$$

Положив $(t-x_0)^{-1}=\tau$, $(x-x_0)^{-1}=\xi$, имеем

$$z=\int\limits_{\xi}^{\infty}\{4A_3\tau^3+6A_2\tau^2+4A_1\tau+A_0\}^{-\frac{1}{2}}\,d\tau.$$

Для того чтобы освободиться от второго члена, входящего в кубический полином, положим[1])

$$\tau=A_3^{-1}\left(\sigma-\frac{1}{2}A_2\right),\quad \xi=A_3^{-1}\left(s-\frac{1}{2}A_2\right);$$

тогда получим

$$z=\int\limits_{s}^{\infty}\left\{4\sigma^3-\left(3A_2^2-4A_1A_3\right)\sigma-\left(2A_1A_2A_3-A_2^3-A_0A_3^2\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}d\sigma.$$

Легко убедиться, что

$$3A_2^2-4A_1A_3 \quad \text{и} \quad 2A_1A_2A_3-A_2^3-A_0A_3^2$$

соответственно равны g_2 и g_3 — инвариантам исходного полинома четвертой степени, и следовательно,

$$s=\wp(z;\ g_2,\ g_3).$$

Далее,

$$x=x_0+A_3\left\{s-\frac{1}{2}A_2\right\}^{-1},$$

так что

$$x=x_0+\frac{1}{4}f'(x_0)\left\{\wp(z;\ g_2,\ g_3)-\frac{1}{24}f''(x_0)\right\}^{-1};$$

таким образом, x выражено в виде рациональной функции от $\wp(z;\ g_2,\ g_3)$.

Эту формулу для x следует рассматривать как интегральный эквивалент соотношения

$$z=\int\limits_{x_0}^{x}\{f(t)\}^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

---

[1]) Такая подстановка законна, так как $A_3\neq 0$; ибо если $A_3=0$, уравнение $f(x)=0$ имеет $x=x_0$ кратным корнем.

Пример 1. Используя обозначения этого параграфа, показать, что

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}=\frac{-f'(x_0)\wp'(z)}{4\left\{\wp(z)-\frac{1}{24}f''(x_0)\right\}^2}.$$

Пример 2. Показать, что если

$$z=\int\limits_a^x\{f(t)\}^{-\frac{1}{2}}dt,$$

где a — *какая-нибудь* постоянная, не обязательно являющаяся нулем функции $f(x)$, а $f(x)$ — полином четвертой степени, не имеющий кратных корней, то

$$x=a+\frac{\{f(a)\}^{\frac{1}{2}}\wp'(z)+\frac{1}{2}f'(a)\left\{\wp(z)-\frac{1}{24}f''(a)\right\}+\frac{1}{24}f(a)f'''(a)}{2\left\{\wp(z)-\frac{1}{24}f''(a)\right\}^2-\frac{1}{48}f(a)f^{\mathrm{IV}}(a)},$$

причем функция $\wp(z)$ составлена по инвариантам полинома $f(x)$.

(Weierstrass)

[Этот результат впервые был опубликован в 1865 г. в Берлинской диссертации Бирмана (Bierman, Inaugural-dissertation), который приписывает его Вейерштрассу. Несколько отличный результат, принадлежащий Морделлу (Mordell, Messenger, XLIV (1915), 138—141), заключается в том, что если

$$z=\int\limits_{a,\,b}^{x,\,y}\frac{y\,dx-x\,dy}{\sqrt{f(x,\,y)}},$$

где $f(x,\,y)$ — однородный полином четвертой степени с гессианом $h(x,\,y)$, то можно положить

$$x=a\wp'(z)\sqrt{f}+\frac{1}{2}\wp(z)f_b+\frac{1}{2}h_b,$$

$$y=b\wp'(z)\sqrt{f}-\frac{1}{2}\wp(z)f_a-\frac{1}{2}h_a,$$

где f и h стоят вместо $f(a,\,b)$ и $h(a,\,b)$, а индексы a, b обозначают частные производные.]

Пример 3. Показать, что в обозначениях примера 2

$$\wp(z)=\frac{\{f(x)f(a)\}^{\frac{1}{2}}+f(a)}{2(x-a)^2}+\frac{f'(a)}{4(x-a)}+\frac{f''(a)}{24},$$

$$\wp'(z)=-\left\{\frac{f(x)}{(x-a)^3}-\frac{f'(x)}{4(x-a)^2}\right\}\{f(a)\}^{\frac{1}{2}}-\left\{\frac{f(a)}{(x-a)^3}+\frac{f'(a)}{4(x-a)^2}\right\}\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}.$$

20.7. Униформизация [1]) кривых рода единица

Теорему § 20.6 можно сформулировать несколько иным образом: *Если переменные x и y связаны уравнением вида*

$$y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4,$$

то они могут быть выражены как однозначные функции переменной z при помощи уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{1}{4} f'(x_0)\left\{\wp(z) - \frac{1}{24} f''(x_0)\right\}^{-1}, \\ y &= -\frac{1}{4} f'(x_0)\wp'(z)\left\{\wp(z) - \frac{1}{24} f''(x_0)\right\}^{-2}, \end{aligned}\right\}$$

где $f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$, x_0 — какой-нибудь нуль функции $f(x)$ и функция $\wp(x)$ составлена по инвариантам $f(x)$, причем $z = \int\limits_{x_0}^{x} \{f(t)\}^{-\frac{1}{2}} dt.$

Очевидно, что y является двузначной функцией от x, а x — четырехзначной функцией от y; то обстоятельство, что x и y могут быть выражены как *однозначные* функции переменной z, делает эту переменную z весьма важной в теории алгебраических уравнений рассматриваемого типа; z называется *униформизующей переменной* уравнения

$$y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4.$$

Читатель, знакомый с теорией плоских алгебраических кривых, знает, что они классифицируются по родам [2]); при этом *родом* кривой называется разность между максимальным числом двойных точек, которые могут иметь кривые того же порядка, что и данная, и числом двойных точек, которыми обладает данная кривая.

Кривые, род которых равен нулю, называются *уникурсальными кривыми*. Если $f(x, y) = 0$ — уравнение уникурсальной кривой, то известно [3]), что координаты x и y точек рассматриваемой кривой могут быть выражены как *рациональные функции некоторого параметра*. Поскольку рациональные функции однозначны, этот параметр является *униформизующей переменной* для уникурсальной кривой.

Здесь мы рассмотрим кривые рода единица; пусть $f(x, y) = 0$ — такая кривая; Клебш [4]) показал, что в этом случае x и y могут быть выражены

---

[1]) Униформизация происходит от слова «uniform», одно из значений которого — «однозначный».

[2]) По-французски «genre», по-немецки «Geschlecht», по-английски «genus».

[3]) См. Salmon, Higher Plane Curves, Dublin, 1873, Ch. II. (См. также А. А. Савелов, Плоские кривые, Физматгиз, 1960, стр. 22—23. — *Прим. ред.*).

[4]) Clebsch, Journ. für Math., LXIV (1865), 210—270. Доказательство результата Клебша дано Форсайтом (Forsyth, Theory of Functions, 1918, § 248). См. также Cayley, Proc. London Math. Soc., IV (1873), 347—352 (Math. Papers, VIII, 181—187).

как рациональные функции от ξ и η, где η^2 — полином относительно ξ третьей или четвертой степени. Отсюда, согласно § 20.6, следует, что ξ и η могут быть выражены как рациональные функции от $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ (причем эти функции составляются по соответствующим инвариантам), и таким образом, x и y могут быть выражены как однозначные (эллиптические) функции от z; переменная z является поэтому униформизующей переменной для рассматриваемого уравнения.

Когда род алгебраической кривой $f(x, y)=0$ больше единицы, униформизацию можно осуществить при помощи так называемых *автоморфных функций*, Были построены два класса таких функций рода, большего единицы, первый — Вебером (Weber, Göttinger Nachr. (1886), 359—370), другой — Уиттекером (Whittaker, Phil. Trans., CXCII (1898), 1—32). Аналог параллелограмма периодов называется «фундаментальным многоугольником».

В случае функции Вебера этот многоугольник многосвязный, т. е. он содержит дыры, которые следует рассматривать как не принадлежащие к нему, между тем как в случае второго класса функций многоугольник будет односвязным, т. е. без дыр. Последний класс функций можно рассматривать поэтому как более непосредственное обобщение эллиптических функций. См. Форд, Введение в теорию автоморфных функций, М. — Л., 1936.

ЛИТЕРАТУРА

K. Weierstrass, Werke, I (1894), 1—49; II (1895), 245—255, 257—309.

C. Briot et J. C. Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques (Paris, 1875)

H. A. Shwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Prof. K. Weierstrass (Berlin, 1893).

A. L. Daniels, Notes on Weierstrass' methods, American Journal of Math., VI (1884), 177—182, 253—269; VII (1885), 82—99.

J. Liouville (Лекции, опубликованные Борхардтом (Borchardt, C. W.)), Journ. für Math., LXXXVIII (1880), 277—310.

A. Enneper, Elliptische Funktionen (zweite Auflage von F. Müller, Halle, 1890).

J. Tannery et J. Molk, Fonctions elliptiques (Paris, 1893—1902).

Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948.

А. Гурвиц, Теория аналитических и эллиптических функций, ГТТИ, 1933.

Примеры

1. Показать, что

$$\wp(z+y)-\wp(z-y)=-\wp'(z)\,\wp'(y)\,\{\wp(z)-\wp(y)\}^{-2}.$$

2. Доказать, что

$$\wp(z)-\wp(z+y+w)=2\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\sum \wp^2(z)\,\{\wp(y)-\wp(w)\}}{\sum \wp'(z)\,\{\wp(y)-\wp(w)\}},$$

где дифференцируемое выражение в правой части симметрично относительно z, y и w.

(Math. Trip., 1897)

3. Показать, что

$$\begin{vmatrix} \wp'''(z-y) & \wp'''(y-w) & \wp'''(w-z) \\ \wp''(z-y) & \wp''(y-w) & \wp''(w-z) \\ \wp(z-y) & \wp(y-w) & \wp(w-z) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g_2 \begin{vmatrix} \wp'''(z-y) & \wp'''(y-w) & \wp'''(w-z) \\ \wp(z-y) & \wp(y-w) & \wp(w-z) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(Trinity, 1898)

4. Пусть

$$y = \wp(z) - e_1, \qquad y' = \frac{dy}{dz};$$

показать, что y есть одно из значений выражения

$$\left\{ y' \left(y - \frac{1}{4} \frac{d^2}{dz^2} \lg y' \right)^{\frac{1}{2}} + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(Math. Trip., 1897)

5. Доказать, что

$$\sum \{\wp(z) - e\} \{\wp(y) - \wp(w)\}^2 \{\wp(y + w) - e\}^{\frac{1}{2}} \{\wp(y - w) - e\}^{\frac{1}{2}} = 0,$$

где знак суммирования относится к трем аргументам z, y, w, а e — любой из корней e_1, e_2, e_3.

(Math. Trip., 1896)

6. Показать, что

$$\frac{\wp'(z + \omega_1)}{\wp'(z)} = -\left\{ \frac{\wp\left(\frac{1}{2}\omega_1\right) - \wp(\omega_1)}{\wp(z) - \wp(\omega_1)} \right\}^2.$$

(Math. Trip., 1894)

7. Доказать, что.

$$\wp(2z) - \wp(\omega_1) = \{\wp'(z)\}^{-2} \left\{ \wp(z) - \wp\left(\frac{1}{2}\omega_1\right) \right\}^2 \left\{ \wp(z) - \wp\left(\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_1\right) \right\}^2.$$

(Math. Trip., 1894)

8. Показать, что

$$\wp(u + v)\wp(u - v) = \frac{\left\{ \wp(u)\wp(v) + \frac{1}{4} g_2 \right\}^2 + g_3 \{\wp(u) + \wp(v)\}}{\{\wp(u) - \wp(v)\}^2}.$$

(Trinity, 1908)

9. Пусть $\wp(u)$ имеет основные периоды $2\omega_1$, $2\omega_2$ и $f(u) = \{\wp(u) - \wp(\omega_2)\}^{\frac{1}{2}}$, а функции $\wp_1(u)$ и $f_1(u)$ подобным же образом построены по периодам $\frac{2\omega_1}{n}$ и $2\omega_2$; доказать, что

$$\wp_1(u) = \wp(u) + \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ \wp\left(u + 2m\frac{\omega_1}{n}\right) - \wp\left(2m\frac{\omega_1}{n}\right) \right\}$$

$$f_1(u) = \frac{\prod_{m=0}^{n-1} f\left(u + 2m\frac{\omega_1}{n}\right)}{\prod_{m=1}^{n-1} f\left(2m\frac{\omega_1}{n}\right)}.$$

(Math. Trip., 1914; первая из этих формул принадлежит Киперту (Kiepert, Journ. für Math., LXXVI (1873), 39)).

10. Пусть $x = \wp(u+\alpha)$, $y = \wp(u-\alpha)$, где α — постоянная; показать, что кривая, на которой лежит (x, y), будет

$$\left(xy + cx + cy + \frac{1}{4} g_2\right)^2 = 4(x+y+c)\left(cxy - \frac{1}{4} g_3\right),$$

где $c = \wp(2\alpha)$.

(Burnside, Messenger, XXI)

11. Показать, что

$$2\wp''^3(u) - 3g_2\wp''^2(u) + g_2^3 = 27\left\{\wp'^2(u) + g_3\right\}^2.$$

(Trinity, 1909)

12. Пусть

$$z = \int_{-\infty}^{x} (x^4 + 6cx^2 + e^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx;$$

проверить, что

$$x = \frac{\frac{1}{2}\wp'(z)}{\wp(z) + c},$$

где эллиптическая функция составлена по корням $-c$, $\frac{1}{2}(c+e)$, $\frac{1}{2}(c-e)$.

(Trinity, 1905)

13. Пусть m — произвольная постоянная; доказать, что

$$\frac{1}{\wp'(y)} \int \frac{e^{m\{\wp(z)-\wp(y)\}}\wp'^2(z)\, dz}{\wp(z) - \wp(y)} + \wp'(z) \int \frac{e^{m\{\wp(z)-\wp(y)\}}\, dy}{\wp(z) - \wp(y)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_r \int \int \frac{e^{m\{\wp(z)-\wp(y)\}}\wp'^2(z)\, dz\, dy}{\{\wp(z) - e_r\}\{\wp(y) - e_r\}},$$

где суммирование по r производится от 1 до 3, а интегралы неопределенные.

(Math. Trip., 1897)

14. Пусть

$$R(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E,$$

и пусть $\xi = \varphi(x)$ — функция, определяемая уравнением

$$x = \int^{\xi} \{R(\xi)\}^{-\frac{1}{2}}\, d\xi,$$

где нижний предел интеграла произволен. Показать, что

$$\frac{2\varphi'(a)}{\varphi(x+y) - \varphi(a)} = \frac{\varphi'(a+y) + \varphi'(a)}{\varphi(a+y) - \varphi(a)} + \frac{\varphi'(a-y) + \varphi'(a)}{\varphi(a-y) - \varphi(a)} -$$

$$- \frac{\varphi'(a+y) - \varphi'(x)}{\varphi(a+y) - \varphi(x)} - \frac{\varphi'(a-y) - \varphi'(x)}{\varphi(a-y) - \varphi(x)}.$$

(Hermite, Proc. Math. Congress (Chicago, 1896), 105. Эта формула является формулой сложения, которой удовлетворяет всякая эллиптическая функция порядка 2.)

15. Показать, что замена переменных

$$\xi' = \frac{\xi}{\eta}, \quad \eta' = \frac{\xi^3}{\eta^2}$$

преобразует уравнения

$$\eta^2 + \eta(1 + p\xi) + \xi^3 = 0, \quad du - \frac{d\xi}{2\eta + 1 + p\xi} = 0$$

в подобные же уравнения

$$\eta'^2 + \eta'(1 + p\xi') + \xi'^3 = 0, \quad du - \frac{d\xi'}{2\eta' + 1 + p\xi'} = 0.$$

Показать, что, выполняя эту замену переменных последовательно три раза, возвратимся к начальным переменным ξ, η; отсюда, далее, получить, что если ξ и η рассматривать как функции от u: $\xi = E(u)$, $\eta = F(u)$, то

$$E(u + A) = \frac{E(u)}{F(u)}, \quad F(u + A) = \frac{E^3(u)}{F^2(u)},$$

где A — треть периода функций $E(u)$ и $F(u)$.

Показать, что

$$E(u) = \frac{p^2}{12} - \wp(u;\ g_2,\ g_3),$$

где

$$g_2 = 2p + \frac{1}{12}p^4, \quad g_3 = -1 - \frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{216}p^6.$$

(De Brun, Öfversigt af K. Vet. Akad., Stockholm, LIV)

16. Показать, что

$$\wp'(z) = \frac{2\sigma(z + \omega_1)\,\sigma(z + \omega_2)\,\sigma(z - \omega_1 - \omega_2)}{\sigma^3(z)\,\sigma(\omega_1)\,\sigma(\omega_2)\,\sigma(\omega_1 + \omega_2)},$$

$$\wp''(z) = \frac{6\sigma(z + a)\,\sigma(z - a)\,\sigma(z + c)\,\sigma(z - c)}{\sigma^4(z)\,\sigma^2(a)\,\sigma^2(c)},$$

где

$$\wp(a) = \left(\frac{1}{12}g_2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \wp(c) = -\left(\frac{1}{12}g_2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Math. Trip., 1913)

17. Доказать, что

$$\wp(z - a)\,\wp(z - b) = \wp(a - b)\,\{\wp(z - a) + \wp(z - b) - \wp(a) - \wp(b)\} +$$
$$+ \wp'(a - b)\,\{\zeta(z - a) - \zeta(z - b) + \zeta(a) - \zeta(b)\} + \wp(a)\,\wp(b)$$

(Math. Trip., 1895)

18. Показать, что

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\wp'(u) + \wp'(w)}{\wp(u) - \wp(w)} - \frac{\wp'(v) + \wp'(w)}{\wp(v) - \wp(w)}\right\} =$$
$$= -\zeta(w - u) + \zeta(w - v) + \zeta(v) - \zeta(u).$$

(Math. Trip., 1910)

19. Показать, что

$$\zeta(u_1)+\zeta(u_2)+\zeta(u_3)-\zeta(u_1+u_2+u_3)=$$
$$=\frac{2\{\wp(u_1)-\wp(u_2)\}\{\wp(u_2)-\wp(u_3)\}\{\wp(u_3)-\wp(u_1)\}}{\wp'(u_1)\{\wp(u_2)-\wp(u_3)\}+\wp'(u_2)\{\wp(u_3)-\wp(u_1)\}+\wp'(u_3)\{\wp(u_1)-\wp(u_2)\}}.$$

(Math. Trip., 1912)

20. Показать, что

$$\frac{\sigma(x+y+z)\,\sigma(x-y)\,\sigma(y-z)\,\sigma(z-x)}{\sigma^3(x)\,\sigma^3(y)\,\sigma^3(z)}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & \wp(x) & \wp'(x)\\ 1 & \wp(y) & \wp'(y)\\ 1 & \wp(z) & \wp'(z)\end{vmatrix}.$$

Пользуясь этой формулой, получить теорему сложения для функции $\wp(z)$.

21. Показать по индукции или другим путем, что

$$\begin{vmatrix}1 & \wp(z_0) & \wp'(z_0)\ldots\wp^{(n-1)}(z_0)\\ 1 & \wp(z_1) & \wp'(z_1)\ldots\wp^{(n-1)}(z_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & \wp(z_n) & \wp'(z_n)\ldots\wp^{(n-1)}(z_n)\end{vmatrix}=$$
$$=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\,1!\,2!\ldots n!\,\frac{\sigma(z_0+z_1+\ldots+z_n)\prod\sigma(z_\lambda-z_\mu)}{\sigma^{n+1}(z_0)\ldots\sigma^{n+1}(z_n)},$$

где произведение берется по всем парам целых значений λ и μ от 0 до n, таким, что $\lambda<\mu$.

(Frobenius и Stickelberger [1]) Journ. für Math., LXXXIII (1877), 179)

22. Выразить

$$\begin{vmatrix}1 & \wp(x) & \wp^2(x) & \wp'(x)\\ 1 & \wp(y) & \wp^2(y) & \wp'(y)\\ 1 & \wp(z) & \wp^2(z) & \wp'(z)\\ 1 & \wp(u) & \wp^2(u) & \wp'(u)\end{vmatrix}$$

в виде дроби, числитель и знаменатель которой являются произведениями сигма-функций.

Отсюда получить, что если $\alpha=\wp(x)$, $\beta=\wp(y)$, $\gamma=\wp(z)$, $\delta=\wp(u)$, где $x+y+z+u=0$, то

$$(e_2-e_3)\{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)(\gamma-e_1)(\delta-e_1)\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$+(e_3-e_1)\{(\alpha-e_2)(\beta-e_2)(\gamma-e_2)(\delta-e_2)\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$+(e_1-e_2)\{(\alpha-e_3)(\beta-e_3)(\gamma-e_3)(\delta-e_3)\}^{\frac{1}{2}}=(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2).$$

(Math. Trip., 1911)

---

[1]) См. также Kiepert, Journ. für Math., LXXVI (1873), 21—33; Hermite, Journ. für Math., LXXXII (1877), 346.

23. Показать, что

$$2\zeta(2u)-4\zeta(u)=\frac{\wp''(u)}{\wp'(u)},$$

$$3\zeta(3u)-9\zeta(u)=\frac{\wp'^3(u)}{\wp^4(u)-\frac{1}{2}g_2\wp^2(u)-g_3\wp(u)-\frac{1}{48}g_2^2}.$$

(Math. Trip., 1905)

24. Показать, что

$$\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4(u)}=-\wp'(u),\quad \frac{\sigma(3u)}{\sigma^9(u)}=3\wp(u)\wp'^2(u)-\frac{1}{4}\wp''^2(u),$$

и доказать, что $\dfrac{\sigma(nu)}{\{\sigma(u)\}^{n^2}}$ есть двоякопериодическая функция от u.

(Math. Trip., 1912)

25. Доказать, что

$$\zeta(z-a)-\zeta(z-b)-\zeta(a-b)+\zeta(2a-2b)=\frac{\sigma(z-2a+b)\,\sigma(z-2b+a)}{\sigma(2b-2a)\,\sigma(z-a)\,\sigma(z-b)}.$$

(Math. Trip., 1895)

26. Показать, что если $z_1+z_2+z_3+z_4=0$, то

$$\left\{\sum\zeta(z_r)\right\}^3=3\left\{\sum\zeta(z_r)\right\}\left\{\sum\wp(z_r)\right\}+\sum\wp'(z_r),$$

где суммирование производится по $r=1,\,2,\,3,\,4$.

(Math. Trip., 1897)

27. Показать, что всякая эллиптическая функция порядка n может быть представлена как отношение двух выражений вида

$$a_1\wp(z+b)+a_2\wp'(z+b)+\ \ldots\ +a_n\wp^{(n-1)}(z+b),$$

где $b,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ — постоянные.

(Painlevé, Bulletin de la Soc. Math., XXVII)

28. Взяв $e_1>e_2>e_3$, $\wp(\omega)=e_1$, $\wp(\omega')=e_3$, рассмотреть значения, принимаемые выражением $\zeta(u)-\dfrac{u\zeta(\omega')}{\omega'}$, когда u движется вдоль периметра прямоугольника с вершинами $-\omega,\ \omega,\ \omega+\omega',\ -\omega+\omega'$.

(Math. Trip., 1914)

29. Получить интеграл уравнения $\dfrac{1}{\omega}\dfrac{d^2\omega}{dz^2}=6\wp(z)+3b$ в виде

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma(z+c)}{\sigma(z)\,\sigma(c)}\exp\left\{\frac{z\wp'(c)}{b-2\wp(c)}-z\zeta(c)\right\}\right],$$

где c определяется уравнением

$$(b^2-3g_2)\,\wp(c)=3(b^3+g_3);$$

получить также другой интеграл в виде

$$\frac{\sigma(z+a_1)\,\sigma(z+a_2)}{\sigma^2(z)}\exp\{-z\zeta(a_1)-z\zeta(a_2)\},$$

где

$$\wp(a_1)+\wp(a_2)=b, \quad \wp'(a_1)+\wp'(a_2)=0$$

и ни a_1+a_2, ни a_1-a_2 не сравнимы с нулем.

(Math. Trip., 1912)

30. Доказать, что

$$g(z)=\frac{\sigma(z+z_1)\,\sigma(z+z_2)\,\sigma(z+z_3)\,\sigma(z+z_4)}{\sigma\left\{2z+\frac{1}{2}(z_1+z_2+z_3+z_4)\right\}}$$

является двоякопериодической функцией от z и

$$g(z)+g(z+\omega_1)+g(z+\omega_2)+g(z+\omega_1+\omega_2)=$$
$$=-2\sigma\left\{\frac{1}{2}(z_2+z_3-z_1-z_4)\right\}\sigma\left\{\frac{1}{2}(z_3+z_1-z_2-z_4)\right\}\times$$
$$\times\sigma\left\{\frac{1}{2}(z_1+z_2-z_3-z_4)\right\}.$$

(Math. Trip., 1893)

31. Пусть $f(z)$ — двоякопериодическая функция третьего порядка с полюсами в $z=c_1$, $z=c_2$, $z=c_3$, и пусть $\varphi(z)$ — двоякопериодическая функция второго порядка с теми же периодами и полюсами в точках $z=\alpha$, $z=\beta$, причем ее значение вблизи $z=\alpha$ равно

$$\varphi(z)=\frac{\lambda}{z-\alpha}+\lambda_1(z-\alpha)+\lambda_2(z-\alpha)^2+\ \ldots;$$

доказать, что

$$\frac{1}{2}\lambda^2\{f''(\alpha)-f''(\beta)\}-\lambda\{f'(\alpha)+f'(\beta)\}\sum_1^3\varphi(c_1)+$$
$$+\{f(\alpha)-f(\beta)\}\left\{3\lambda\lambda_1+\sum_1^3\varphi(c_2)\,\varphi(c_3)\right\}=0.$$

(Math. Trip., 1894)

32. Пусть $\lambda(z)$ — эллиптическая функция с двумя полюсами a_1, a_2, и пусть $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ суть $2n$ постоянных, подчиненных только условию

$$z_1+z_2+\ \ldots\ +z_{2n}=n(a_1+a_2);$$

показать, что определитель, i-я строка которого есть

$$1,\ \lambda(z_i),\ \lambda^2(z_i),\ \ldots,\ \lambda^n(z_i),\ \lambda_1(z_i),\ \lambda(z_i)\,\lambda_1(z_i),\ \lambda^2(z_i)\,\lambda_1(z_i),\ \ldots,\ \lambda^{n-2}(z_i)\,\lambda_1(z_i)$$

[где $\lambda_1(z_i)$ обозначает результат замены z на z_i в производной от $\lambda(z)$], тождественно равен нулю.

(Math. Trip., 1893)

33. Вывести из примера 21 переходом к пределу или другим путем, что

$$\begin{vmatrix} \wp'(z) & \wp''(z) & \ldots & \wp^{(n-1)}(z) \\ \wp''(z) & \wp'''(z) & \ldots & \wp^{(n)}(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \wp^{(n-1)}(z) & \wp^{(n)}(z) & \ldots & \wp^{(2n-3)}(z) \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\{1!\,2!\ldots(n-1)!\}^2\,\sigma(nu)/\{\sigma(u)\}^{n^2}.$$

(Kiepert, Journ. für Math., LXXVI)

34. Показать, что при определенных условиях в виде неравенств имеем

$$\frac{\sigma(z+y)}{\sigma(z)\,\sigma(y)}\,e^{-\frac{\eta_1 zy}{\omega_1}} = \frac{\pi}{2\omega_1}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{2\omega_1} + \operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2\omega_1}\right) + \frac{2\pi}{\omega_1}\sum q^{2mn}\sin\frac{\pi}{\omega_1}(mz+ny),$$

где суммирование распространяется на все положительные целые значения m и n, а $q = \exp\left(\frac{\pi i\omega_2}{\omega_1}\right)$.

(Math. Trip., 1895)

35. Предполагая известной формулу

$$\sigma(z) = e^{\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}}\,\frac{2\omega_1}{\pi}\sin\frac{\pi z}{2\omega_1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos\frac{\pi z}{\omega_1}+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2},$$

доказать, что

$$\wp(z) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\operatorname{cosec}^2\frac{\pi z}{2\omega_1} - 2\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos\frac{n\pi z}{\omega_1},$$

когда z удовлетворяет неравенствам

$$-2\operatorname{Re}\left(\frac{\omega_2}{i\omega_1}\right) < \operatorname{Re}\left(\frac{z}{i\omega_1}\right) < 2\operatorname{Re}\left(\frac{\omega_2}{i\omega_1}\right).$$

(Math. Trip., 1896)

36. Показать, что если $2\tilde{\omega}$ — какая-нибудь из точек вида $2m\omega_1 + 2n\omega_2$ и если

$$x = \wp\left(\frac{2}{5}\tilde{\omega}\right) + \wp\left(\frac{4}{5}\tilde{\omega}\right),$$

то x будет корнем уравнения шестой степени

$$x^6 - 5g_2x^4 - 40g_3x^3 - 5g_2^2x^2 - 8g_2g_3x - 5g_3^2 = 0,$$

и получить все корни этого уравнения.

(Trinity, 1898)

37. Показать, что

$$\int\{(x^2-a)(x^2-b)\}^{-\frac{1}{4}}\,dx = -\frac{1}{2}\lg\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} + \frac{i}{2}\lg\frac{\sigma(z-iz_0)}{\sigma(z+iz_0)},$$

где

$$x^2 = a + \frac{1}{6}\frac{1}{\wp^2(z)-\wp^2(z_0)}, \quad g_2 = \frac{2b}{3a(a-b)}, \quad g_3 = 0, \quad \wp^2(z_0) = \frac{1}{6(a-b)}.$$

(Долбня, Darboux, Bulletin (2), XIX)

38. Доказать, что всякая аналитическая функция, которая удовлетворяет трехчленному уравнению

$$\sum_{a, b, c} f(z+a) f(z-a) f(b+c) f(b-c)=0$$

для общих значений a, b, c и z, выражается через элементарные функции и сигма-функцию (которая в вырожденных случаях заменяется тригонометрической или алгебраической функцией).

(Hermite, Fonctions elliptiques, I, 187)

[Положив $z=a=b=c=0$, найдем $f(0)=0$; положив $b=c$, найдем $f(a-b)+f(b-a)=0$, так что $f(z)$ — нечетная функция.

Если $F(z)$ — логарифмическая производная от $f(z)$, то, дифференцируя данное соотношение по b и полагая затем $b=c$, получим

$$\frac{f(z+a) f(z-a) f(2b) f'(0)}{f(z+b) f(z-b) f(a+b) f(a-b)}=$$
$$=F(z+b)-F(z-b)+F(a-b)-F(a+b).$$

Продифференцировав это равенство по b и положив $b=0$, получим, далее,

$$\frac{f(z+a) f(z-a)\{f'(0)\}^2}{\{f(z) f(a)\}^2}=F'(z)-F'(a).$$

Если бы $f'(0)$ было нулем, то $F'(z)$ была бы постоянной и, интегрируя, мы получили бы, что функция $f(z)$ имеет вид $A \exp(Bz+Cz^2)$, а это выражение будет нечетной функцией только в тривиальном случае, когда оно равно нулю.

Если $f'(0) \neq 0$ и мы положим $F'(z)=-\Phi(z)$, то найдем, что коэффициент при a^4 в разложении выражения

$$\frac{12 f(z+a) f(z-a)}{\{f(z)\}^2}$$

равен $6\{\Phi(z)\}^2-\Phi''(z)$, а коэффициент при a^4 в выражении

$$12\{f(a)\}^2\{\Phi(a)-\Phi(z)\}$$

будет линейной функцией от $\Phi(z)$. Отсюда $\Phi''(z)$ будет функцией второй степени от $\Phi(z)$; если же мы умножим эту функцию на $\Phi'(z)$ и проинтегрируем, то найдем, что

$$\{\Phi'(z)\}^2=4\{\Phi(z)\}^3+12 A\{\Phi(z)\}^2+12 B \Phi(z)+4 C,$$

где A, B, C — постоянные. Если кубический полином справа не имеет равных линейных множителей, то (§ 20.6) $\Phi(z)=\wp(z+\alpha)+A$, где α — постоянная; интегрируя, отсюда получаем

$$f(z)=\sigma(z+\alpha) \exp\left(-\frac{1}{2} A z^2-K z-L\right),$$

где K и L — постоянные; так как $f(z)$ — нечетная функция, то $\alpha=K=0$ и

$$f(z)=\sigma(z) \exp\left\{-\frac{1}{2} A z^2-L\right\}.$$

Если тот же полином имеет кратный линейный множитель, то сигма-функция заменяется (§ 20.222) синусом аргумента, кратного z, а если он полный куб, то сигма-функция заменяется кратным z.]

ГЛАВА 21

ТЭТА-ФУНКЦИИ

21.1. Определение тэта-функции

Когда в задачах, связанных с эллиптическими функциями, желательно получить определенный численный результат, то вычисления легче всего выполняются при помощи вспомогательных функций, известных под названием *тэта-функций*.

Эти функции представляют значительный самостоятельный интерес и вне связи их с эллиптическими функциями, и мы изложим теперь их основные свойства.

Тэта-функции впервые были изучены систематически Якоби [1]), который получил ряд их свойств чисто алгебраическими методами; его анализ был настолько исчерпывающим, что, по существу, все результаты, содержащиеся в этой главе (за исключением способа рассмотрения задачи обращения в § 21.7 и след.), имеются в его работах.

В соответствии с общим планом этой книги мы не будем пользоваться методами Якоби, а воспользуемся более сильными методами, основанными на применении теоремы Коши. Эти методы впервые были применены в теории эллиптических и родственных им функций Лиувиллем в его лекциях и после этого применялись в нескольких других трактатах по эллиптическим функциям; наиболее ранним из них был трактат Брио и Буке.

[Примечание. Первой функцией типа тэта-функций, появившейся в анализе, была *функция разбиения* (Partition function) [2])

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n z)^{-1}$$

---

[1]) Jacobi, Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum (Königsberg, 1829) и Ges. Werke, I, 497—538.

[2]) Эта и аналогичные функции были изучены Гауссом (Gauss, Comm. Soc. reg. sci. Göttingensis, rec. I (1811), 7—12, Werke, II, 16—21 и Werke, III, 433—480) и Коши (Cauchy, Comptes Rendus, X (1840), 178—181). Об исследовании свойств различных функций, связанных с так называемыми основ-

Эйлера (Введение в анализ бесконечных, I, § 304, М., 1961); при помощи результатов, данных в § 21.3, легко выразить тэта-функции через функции разбиения. Эйлер получил также некоторые свойства произведений типа

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 \pm x^n), \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1 \pm x^{2n}), \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1 \pm x^{2n-1}).$$

Соответствующие ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^{\frac{1}{2}n(n+3)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} m^{\frac{1}{2}n(n+1)} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} m^{n^2}$$

встречаются еще ранее в посмертной работе Якова Бернулли (Jacob Bernoulli, Ars Conjectandi, 1713, 55).

Тэта-функции также встречаются у Фурье (Fourier, La Théorie Analytique de la Chaleur (Paris, 1822), 265).

Теория тэта-функций была развита из теории эллиптических функций Якоби в его «Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum» (1829), помещенной также в его Ges. Werke, I, 49—239; обозначения, примененные там, приводятся в § 21.62. В последующих лекциях он ввел функции, рассмотренные в этой главе; изложение этих лекций (1838) дано Борхардтом (Borchardt) в собрании сочинений Якоби (Jacobi, Ges. Werke, I, 497-538). Наиболее важные результаты, содержащиеся в них, по-видимому, были открыты в 1835 г.; см. Kronecker, Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin (1891), 653—659.]

Пусть τ — (постоянное) комплексное число, мнимая часть которого *положительна*; положим $q = e^{\pi i\tau}$, так что $|q| < 1$.

Рассмотрим функцию $\vartheta(z, q)$, определяемую рядом

$$\vartheta(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz},$$

как функцию переменной z.

Если A — любая положительная постоянная, то при $|z| \leqslant A$ имеем

$$\left| q^{n^2} e^{\pm 2niz} \right| \leqslant |q|^{n^2} e^{2nA}$$

при всяком целом положительном n.

Деламберово отношение (§ 2.36, часть I) двух последовательных членов ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |q|^{n^2} e^{2nA}$ равно $|q|^{2n+1} e^{2A}$ и стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому ряд для $\vartheta(z, q)$ есть ряд аналитических функций, равномерно сходящийся (§ 3.34, часть I) в любой ограниченной

ными числами (которые тесно связаны с функциями разбиения), см. Jackson, Proc. Royal Soc., LXXIV (1905), 64—72; Proc. London Math. Soc. (1), XXVIII (1897), 475—486, (2), I (1904), 63—88, II (1904), 192—220 и Watson. Camb. Phil. Trans., XXI (1912), 281—299. Основная формула в теории основных чисел была дана Гейне (Heine, Kugelfunktionen (Berlin, 1878), I, 107).

области значений z, и следовательно, он представляет целую функцию (§§ 5.3, 5.64, часть I).

Очевидно, что

$$\vartheta(z, q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz$$

и

$$\vartheta(z+\pi, q) = \vartheta(z, q);$$

далее,

$$\vartheta(z+\pi\tau, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}q^{2n}e^{2niz} =$$

$$= -q^{-1}e^{-2iz}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1} q^{(n+1)^2}e^{2(n+1)iz},$$

и следовательно,

$$\vartheta(z+\pi\tau, q) = -q^{-1}e^{-2iz}\vartheta(z, q).$$

В соответствии с этими формулами $\vartheta(z, q)$ называется *квазидвоякопериодической функцией от* z. При прибавлении π или $\pi\tau$ к z функция $\vartheta(z, q)$ умножается на 1 или $-q^{-1}e^{-2iz}$; соответственно этому 1 и $-q^{-1}e^{-2iz}$ называются *мультипликаторами* или *множителями периодичности*, соответствующими периодам π и $\pi\tau$.

21.11. Четыре типа тэта-функций

Обычно пишут $\vartheta_4(z, q)$ вместо $\vartheta(z, q)$; остальные три тэта-функции определяются следующим образом.

Функция $\vartheta_3(z, q)$ определяется равенством

$$\vartheta_3(z, q) = \vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi, q\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2nz;$$

затем $\vartheta_1(z, q)$ определяется через $\vartheta_4(z, q)$ равенством

$$\vartheta_1(z, q) = -ie^{iz+\frac{1}{4}\pi i\tau}\vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau, q\right) =$$

$$= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2n+1)iz},$$

откуда [1])

$$\vartheta_1(z, q) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)z.$$

---

[1]) По всей этой главе многозначную функцию q^λ следует понимать как $\exp(\lambda\pi i\tau)$.

Наконец, $\vartheta_2(z, q)$ определяется равенством

$$\vartheta_2(z, q) = \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi, q\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n+1)z.$$

Если представим ряды в развернутом виде, то получим

$$\vartheta_1(z, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin z - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3z + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5z - \ldots,$$
$$\vartheta_2(z, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos z + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3z + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5z + \ldots,$$
$$\vartheta_3(z, q) = 1 + 2q \cos 2z + 2q^4 \cos 4z + 2q^9 \cos 6z + \ldots,$$
$$\vartheta_4(z, q) = 1 - 2q \cos 2z + 2q^4 \cos 4z - 2q^9 \cos 6z + \ldots$$

Очевидно, что $\vartheta_1(z, q)$ — *нечетная* функция от z, а остальные тэта-функции — *четные*.

Обозначения, введенные сейчас, являются видоизменением обозначений, примененных в трактате Таннери и Молька (Tannery, Molk); единственное различие между этими обозначениями и обозначением Якоби заключается в том, что $\vartheta_4(z, q)$ пишется там, где Якоби писал бы $\vartheta(z, q)$. К сожалению, различные авторы употребляют различные обозначения; схема, сопоставляющая их между собой, приводится в § 21.9.

Для краткости параметр q обычно опускается, так что мы будем писать $\vartheta_1(z), \ldots$ вместо $\vartheta_1(z, q), \ldots$ Если желательно представить зависимость тэта-функции от параметра τ, то будем писать $\vartheta(z|\tau)$. Далее, вместо $\vartheta_2(0)$, $\vartheta_3(0)$, $\vartheta_4(0)$ будем писать соответственно ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 и под ϑ_1' будем понимать значение производной от $\vartheta_1(z)$ при $z = 0$.

Пример 1. Показать, что

$$\vartheta_3(z, q) = \vartheta_3(2z, q^4) + \vartheta_2(2z, q^4),$$
$$\vartheta_4(z, q) = \vartheta_3(2z, q^4) - \vartheta_2(2z, q^4).$$

Пример 2. Получить соотношения

$$\vartheta_1(z) = -\vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = -iM\vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = -iM\vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right),$$
$$\vartheta_2(z) = M\vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = M\vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\right),$$
$$\vartheta_3(z) = \vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = M\vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = M\vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right),$$
$$\vartheta_4(z) = -iM\vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = iM\vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = \vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi\right),$$

где

$$M = q^{\frac{1}{4}} e^{iz}.$$

Пример 3. Показать, что множители тэта-функций, соответствующие периодам π и $\pi\tau$, даются схемой

	$\vartheta_1(z)$	$\vartheta_2(z)$	$\vartheta_3(z)$	$\vartheta_4(z)$
π	-1	-1	1	1
$\pi\tau$	$-N$	N	N	$-N$

где $N = q^{-1}e^{-2iz}$.

Пример 4. Пусть $\vartheta(z)$ — какая-нибудь одна из четырех тэта-функций и $\vartheta'(z)$ — ее производная по z; показать, что

$$\frac{\vartheta'(z+\pi)}{\vartheta(z+\pi)} = \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}, \quad \frac{\vartheta'(z+\pi\tau)}{\vartheta(z+\pi\tau)} = -2i + \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}.$$

21.12. Нули тэта-функций

Из квазипериодических свойств тэта-функций очевидно, что если $\vartheta(z)$ — одна из них и z_0 — какой-нибудь нуль функции $\vartheta(z)$, то

$$z_0 + m\pi + n\pi\tau$$

будет также нулем функции $\vartheta(z)$ при любых целых значениях m и n.

Покажем теперь, что *если C — какая-нибудь ячейка с вершинами*

$$t, \; t+\pi, \; t+\pi+\pi\tau, \; t+\pi\tau,$$

то $\vartheta(z)$ имеет один и только один нуль внутри C.

Так как $\vartheta(z)$ — аналитическая функция во всей конечной части плоскости z, то из § 6.31 части I следует, что число ее нулей внутри C равно

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}\,dz.$$

Поступая с контуром по образцу § 20.12, видим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi} \left\{\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} - \frac{\vartheta'(z+\pi\tau)}{\vartheta(z+\pi\tau)}\right\} dz -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi\tau} \left\{\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} - \frac{\vartheta'(z+\pi)}{\vartheta(z+\pi)}\right\} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi} 2i\,dz$$

согласно примеру 4 § 21.11. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}\,dz = 1;$$

таким образом, $\vartheta(z)$ имеет только один простой нуль внутри C, что и требовалось доказать.

Так как $z=0$ является, очевидно, нулем функции $\vartheta_1(z)$, то отсюда вытекает, что нулями функций $\vartheta_1(z)$, $\vartheta_2(z)$, $\vartheta_3(z)$, $\vartheta_4(z)$ будут точки, сравнимые с 0, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$, $\frac{1}{2}\pi\tau$. Читатель заметит, что эти четыре точки представляют собой последовательные вершины параллелограмма, обходимого против часовой стрелки.

21.2. Соотношения между квадратами тета-функций

Очевидно, что если тэта-функции рассматривать как функции только переменной z, то эта переменная может быть исключена из уравнений, определяющих любую пару тэта-функций; в результате получится соотношение[1]) между тэта-функциями, которое, как можно ожидать по общим соображениям, будет не алгебраическим; имеются, однако, чрезвычайно простые соотношения между любыми *тремя* тэта-функциями, которые мы теперь и получим.

Каждая из четырех функций $\vartheta_1^2(z)$, $\vartheta_2^2(z)$, $\vartheta_3^2(z)$, $\vartheta_4^2(z)$ — аналитическая для всех значений z и имеет множители периодичности 1, $q^{-2}e^{-4iz}$, соответствующие периодам π, $\pi\tau$; каждая из них имеет двойной нуль (и никаких других нулей) в любой ячейке.

Отсюда заключаем, что если a, b, a' и b' — надлежащим образом выбранные постоянные, то каждая из функций

$$\frac{a\vartheta_1^2(z)+b\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_2^2(z)},\qquad \frac{a'\vartheta_1^2(z)+b'\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_3^2(z)}$$

будет *двоякопериодической функцией* (с периодами π, $\pi\tau$), имеющей самое большее только один простой полюс в каждой ячейке. По § 20.13 такая функция будет равна постоянной, и, очевидно, можно так выбрать a, b, a', b', чтобы постоянные в каждом из рассматриваемых случаев равнялись единице.

Поэтому существуют соотношения вида

$$\vartheta_2^2(z)=a\vartheta_1^2(z)+b\vartheta_4^2(z),\qquad \vartheta_3^2(z)=a'\vartheta_1^2(z)+b'\vartheta_4^2(z).$$

---

[1]) Аналогичным соотношением для функций $\sin z$ и $\cos z$ является, конечно, $(\sin z)^2+(\cos z)^2=1$.

Чтобы определить a, b, a', b', дадим z частные значения $\frac{1}{2}\pi\tau$ и 0; так как

$$\vartheta_2\left(\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_3,\quad \vartheta_4\left(\frac{1}{2}\pi\tau\right)=0,\quad \vartheta_1\left(\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}\vartheta_4,$$

то имеем

$$\vartheta_3^2=-a\vartheta_4^2,\quad \vartheta_2^2=b\vartheta_4^2,\quad \vartheta_2^2=-a'\vartheta_4^2,\quad \vartheta_3^2=b'\vartheta_4^2.$$

Таким образом, мы получили следующие соотношения:

$$\vartheta_2^2(z)\,\vartheta_4^2=\vartheta_4^2(z)\,\vartheta_2^2-\vartheta_1^2(z)\,\vartheta_3^2,\quad \vartheta_3^2(z)\,\vartheta_4^2=\vartheta_4^2(z)\,\vartheta_3^2-\vartheta_1^2(z)\,\vartheta_2^2.$$

Если заменим z на $z+\frac{1}{2}\pi$, то получим еще два соотношения:

$$\vartheta_1^2(z)\,\vartheta_4^2=\vartheta_3^2(z)\,\vartheta_2^2-\vartheta_2^2(z)\,\vartheta_3^2,\quad \vartheta_4^2(z)\,\vartheta_4^2=\vartheta_3^2(z)\,\vartheta_3^2-\vartheta_2^2(z)\,\vartheta_2^2.$$

С помощью этих результатов можно выразить любую тэта-функцию через любую пару других тэта-функций.

Следствие. Положив $z=0$ в последнем соотношении, имеем

$$\vartheta_2^4+\vartheta_4^4=\vartheta_3^4,$$

т. е.

$$16q(1+q^{1\cdot 2}+q^{2\cdot 3}+q^{3\cdot 4}+\ldots)^4+(1-2q+2q^4-2q^9+\ldots)^4=$$
$$=(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^4.$$

21.21. Формулы сложения для тэта-функций

Результаты, полученные только что, являются частными случаями формул, содержащих две переменные; эти формулы не являются теоремами сложения в прямом смысле, так как они не выражают алгебраически тэта-функций от $z+y$ через тэта-функции от z и y; но они содержат тэта-функции от $z-y$ наряду с тэта-функциями от $z+y$, z и y.

Для того чтобы получить одну из этих формул, рассмотрим $\vartheta_3(z+y)\,\vartheta_3(z-y)$ как функцию от z. Множители периодичности этой функции, соответствующие периодам π и $\pi\tau$, будут 1 и $q^{-1}e^{-2i(z+y)}\cdot q^{-1}e^{-2i(z-y)}=q^{-2}e^{-4iz}$. Но функция $a\vartheta_3^2(z)+b\vartheta_1^2(z)$ имеет те же множители периодичности, и мы можем, очевидно, выбрать отношение $a:b$ так, чтобы *двоякопериодическая функция*

$$\frac{a\vartheta_3^2(z)+b\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_3(z+y)\,\vartheta_3(z-y)}$$

не имела полюсов в нулях функции $\vartheta_3(z-y)$; тогда указанная функция будет иметь самое большее один простой полюс в любой ячейке, а именно нуль функции $\vartheta_3(z+y)$ в этой ячейке, и, следовательно (§ 20.13), будет постоянной, т. е. не зависящей от z; поскольку до сих пор было фиксировано только отношение $a:b$, мы можем далее выбрать a и b так, чтобы эта постоянная была равна единице.

Теперь нам надо определить a и b из тождества относительно z:

$$a\vartheta_3^2(z)+b\vartheta_1^2(z)\equiv\vartheta_3(z+y)\,\vartheta_3(z-y).$$

Чтобы сделать это, положим z последовательно равным 0 и $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$; тогда получим

$$a\vartheta_3^2=\vartheta_3^2(y),\quad b\vartheta_1^2\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=$$
$$=\vartheta_3\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau+y\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau-y\right);$$

и следовательно,

$$a=\frac{\vartheta_3^2(y)}{\vartheta_3^2},\qquad b=\frac{\vartheta_1^2(y)}{\vartheta_3^2}.$$

Итак, мы получили формулу сложения, а именно:

$$\vartheta_3(z+y)\,\vartheta_3(z-y)\,\vartheta_3^2=\vartheta_3^2(y)\,\vartheta_3^2(z)+\vartheta_1^2(y)\,\vartheta_1^2(z).$$

Совокупность формул, к типу которых относится последняя формула, будет приведена в примерах 1 и 2 в конце этой главы.

21.22. Основные формулы Якоби [1])

Полученные выше формулы сложения являются частными случаями ряда тождеств, впервые данных Якоби, который получил их чисто алгебраическими методами; каждое тождество содержит целых четыре независимых переменных: w, x, y, z.

Пусть w', x', y', z' выражаются через w, x, y, z формулами

$$\begin{aligned}2w'&=-w+x+y+z,\\2x'&=w-x+y+z,\\2y'&=w+x-y+z,\\2z'&=w+x+y-z.\end{aligned}$$

Легко убедиться, что w, x, y, z выражаются через w', x', y', z' теми же формулами [2]).

[1]) Jacobi, Ges. Werke, I, 505.

[2]) В работе Якоби знаки при w', x', y', z' всюду обратные, что нарушает полную симметрию соотношений; симметричные формулы, данные здесь, принадлежат Смиту (H. J. S. Smith, Proc. London Math. Soc., I (май 21, 1866), 1—12).

Для краткости[1]) будем писать $[r]$ вместо $\vartheta_r(w)\,\vartheta_r(x)\,\vartheta_r(y)\,\vartheta_r(z)$ и $[r]'$ вместо $\vartheta_r(w')\,\vartheta_r(x')\,\vartheta_r(y')\,\vartheta_r(z')$.

Рассмотрим [3], [1]', [2]', [3]', [4]' как функции от z. При прибавлении π или $\pi\tau$ к z функции первой строки следующей таблицы переходят соответственно в функции второй и третьей строки.

	[3]	[1]'	[2]'	[3]'	[4]'
π	[3]	$-[2]'$	$-[1]'$	[4]'	[3]'
$\pi\tau$	$N[3]$	$-N[4]'$	$N[3]'$	$N[2]'$	$-N[1]'$

Для краткости через N обозначено $q^{-1}e^{-2iz}$.

Отсюда как $-[1]'+[2]'+[3]'+[4]'$, так и [3] имеют множителями периодичности 1 и N, и следовательно, их отношение будет двоякопериодической функцией самое большее с одним простым полюсом в любой ячейке, каковым может быть лишь нуль функции $\vartheta_3(z)$ в этой ячейке.

Это отношение (§ 20.13) будет просто постоянным, т. е. не зависящим от z; соображения симметрии показывают, что оно будет также не зависящим от w, x и y.

Таким образом, получаем

$$A[3] = -[1]' + [2]' + [3]' + [4]',$$

где A не зависит от w, x, y, z; для определения A положим $w=x=y=z=0$, получим

$$A\vartheta_3^4 = \vartheta_2^4 + \vartheta_3^4 + \vartheta_4^4;$$

отсюда, согласно следствию § 21.2, видим, что $A=2$.

Итак,

$$2[3] = -[1]' + [2]' + [3]' + [4]'. \tag{I}$$

Это и есть одна из формул Якоби; чтобы получить другую, прибавим к w, x, y, z (и тем самым к w', x', y', z') по $\frac{1}{2}\pi$; тогда получим

$$2[4] = [1]' - [2]' + [3]' + [4]'. \tag{II}$$

Прибавляя ко всем переменным в (I) и (II) по $\frac{1}{2}\pi\tau$, получим дальнейшие формулы

$$2[2] = [1]' + [2]' + [3]' - [4]', \tag{III}$$
$$2[1] = [1]' + [2]' - [3]' + [4]'. \tag{IV}$$

[Примечание. Имеется 256 выражений вида $\vartheta_p(w)\,\vartheta_q(x)\,\vartheta_r(y)\,\vartheta_s(z)$, которые могут быть получены из $\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z)$ прибавлением

[1]) Идею этого сокращенного обозначения можно усмотреть в мемуаре Смита. Однако, по-видимому, оно никем не употреблялось до Кронекера (Kronecker, Journ. für Math., CII (1887), 260—272).

к w, x, y, z надлежащих полупериодов; но только те из них, в которых значки p, q, r, s или попарно равны, или все различны, приводят к формулам, не содержащим четвертей периодов в правой части.]

Пример 1. Показать, что

$$[1]+[2]=[1]'+[2]',\quad [2]+[3]=[2]'+[3]',\quad [1]+[4]=[1]'+[4]',$$
$$[3]+[4]=[3]'+[4]',\quad [1]+[3]=[2]'+[4]',\quad [2]+[4]=[1]'+[3]'.$$

Пример 2. Заменив w, x на $w+\frac{1}{2}\pi$, $x+\frac{1}{2}\pi$ $\left(\text{а следовательно, } y', z' \text{ на } y'+\frac{1}{2}\pi,\ z'+\frac{1}{2}\pi\right)$, показать, что

$$[3344]+[2211]=[4433]'+[1122]',$$

где [3344] обозначает $\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_4(y)\,\vartheta_4(z)$ и т. д.

Пример 3. Показать, что

$$2\,[1234]=[3412]'+[2143]'-[1234]'+[4321]'.$$

Пример 4. Показать, что

$$\vartheta_1^4(z)+\vartheta_3^4(z)=\vartheta_2^4(z)+\vartheta_4^4(z).$$

21.3. Выражения Якоби для тэта-функций через бесконечные произведения[1])

Докажем теперь формулу

$$\vartheta_4(z)=G\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2})$$

(где G не зависит от z) и три формулы, ей аналогичные.

Пусть

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}e^{2iz})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}e^{-2iz});$$

вследствие абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{2n-1}$ оба произведения сходятся абсолютно и равномерно в любой ограниченной области значений z (§ 3.341, часть I); следовательно, $f(z)$ будет аналитической функцией во всей конечной части плоскости z; таким образом, она будет целой функцией.

Нулями функции $f(z)$ будут простые нули в тех точках, где

$$e^{2iz}=e^{(2n+1)\pi i\tau}\qquad (n=\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\ldots),$$

т. е. где

$$2iz=(2n+1)\pi i\tau+2m\pi i,$$

так что $f(z)$ и $\vartheta_4(z)$ имеют одни и те же нули; следовательно, отношение $\frac{\vartheta_4(z)}{f(z)}$ не имеет ни нулей, ни полюсов в конечной части плоскости.

[1]) Jacobi, Fundamenta Nova, 145.

Далее, очевидно, что $f(z+\pi)=f(z)$ и

$$f(z+\pi\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n+1}e^{2iz})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-3}e^{-2iz})=$$

$$=\frac{f(z)(1-q^{-1}e^{-2iz})}{1-qe^{2iz}}=-q^{-1}e^{-2iz}f(z).$$

Другими словами, $f(z)$ *и* $\vartheta_4(z)$ *имеют одинаковые множители периодичности* (§ 21.11, пример 3). Поэтому $\frac{\vartheta_4(z)}{f(z)}$ будет двоякопериодической функцией без нулей и полюсов и, следовательно (§ 20.12), будет постоянной, которую обозначим через G, поэтому

$$\vartheta_4(z)=G\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}).$$

[В § 21.42 мы покажем, что $G=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$.]

Заменяя в этом тождестве z на $z+\frac{1}{2}\pi$, получим

$$\vartheta_3(z)=G\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}).$$

Далее,

$$\vartheta_1(z)=-iq^{\frac{1}{4}}e^{iz}\vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=$$

$$=-iq^{\frac{1}{4}}e^{iz}G\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}e^{2iz})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-2}e^{-2iz})=$$

$$=2Gq^{\frac{1}{4}}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}e^{2iz})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}e^{-2iz}),$$

так что

$$\vartheta_1(z)=2Gq^{\frac{1}{4}}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n});$$

наконец,

$$\vartheta_2(z)=\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\right)=2Gq^{\frac{1}{4}}\cos z\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}).$$

Пример. Показать, что[1])

$$\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})\right\}^8+16q\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})\right\}^8=\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})\right\}^8.$$

(Jacobi)

21.4. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют тэта-функции

Можно рассматривать $\vartheta_3(z\,|\,\tau)$ как функцию двух независимых переменных z и τ, и можно дифференцировать ряд для $\vartheta_3(z\,|\,\tau)$ любое число раз по z и τ вследствие равномерной сходимости получаемых после этого рядов (следствие § 4.7, часть I); в частности,

$$\frac{\partial^2\vartheta_3(z\,|\,\tau)}{\partial z^2}=-4\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2\exp(n^2\pi i\tau+2niz)=-\frac{4}{\pi i}\frac{\partial\vartheta_3(z\,|\,\tau)}{\partial\tau}.$$

Следовательно, функция $\vartheta_3(z\,|\,\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными

$$\frac{1}{4}\pi i\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}+\frac{\partial y}{\partial\tau}=0.$$

Читатель легко докажет, что три другие тэта-функции также удовлетворяют этому уравнению.

21.41. Соотношение между тэта-функциями нулевого аргумента

Установим теперь замечательное соотношение

$$\vartheta_1'(0)=\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)\text{[2]}.$$

Сначала надо получить некоторые формулы для производных всех тэта-функций.

Так как получаемые при дифференцировании ряды сходятся равномерно по исключении окрестностей нулей соответствующих тэта-функций, то можно дифференцировать формулы для логарифмов тэта-функций, которые следуют из § 21.3, сколько угодно раз.

---

[1]) Якоби называет это соотношение (Fundamenta Nova, 90) «aequatio identica satis abstrusa» — «достаточно хорошо скрытое тождество».

[2]) Было дано несколько доказательств этого важного предложения, но ни одно из них не является простым. Доказательство самого Якоби (Ges. Werke, I, 515—517), хотя несколько труднее данного здесь, однако весьма заслуживает изучения. По поводу иных способов доказательства этого предложения см. стр. 372—373, пример 21.

Обозначая дифференцирование по z значком $'$, получим этим путем

$$\vartheta_3'(z)=\vartheta_3(z)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2iq^{2n-1}e^{2iz}}{1+q^{2n-1}e^{2iz}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2iq^{2n-1}e^{-2iz}}{1+q^{2n-1}e^{-2iz}}\right],$$

$$\vartheta_3''(z)=\vartheta_3'(z)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2iq^{2n-1}e^{2iz}}{1+q^{2n-1}e^{2iz}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2iq^{2n-1}e^{-2iz}}{1+q^{2n-1}e^{-2iz}}\right]+$$

$$+\vartheta_3(z)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^2q^{2n-1}e^{2iz}}{(1+q^{2n-1}e^{2iz})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^2q^{2n-1}e^{-2iz}}{(1+q^{2n-1}e^{-2iz})^2}\right].$$

Заставляя $z\to 0$, получим

$$\vartheta_3'(0)=0,\quad \vartheta_3''(0)=-8\vartheta_3(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}.$$

Подобным же образом

$$\vartheta_4'(0)=0,\quad \vartheta_4''(0)=8\vartheta_4(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2},$$

$$\vartheta_2'(0)=0,\quad \vartheta_2''(0)=\vartheta_2(0)\left[-1-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right],$$

и если положим $\vartheta_1(z)=\sin z\cdot\varphi(z)$, то получим

$$\varphi'(0)=0,\quad \varphi''(0)=8\varphi(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

Если же продифференцируем равенство $\vartheta_1(z)=\sin z\cdot\varphi(z)$ три раза, то получим

$$\vartheta_1'(0)=\varphi(0),\quad \vartheta_1'''(0)=3\varphi''(0)-\varphi(0).$$

Отсюда находим

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}=24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}-1,$$

а из предыдущих формул

$$1+\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}=$$

$$=8\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}\right]=$$

$$=8\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{(1+q^{n})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{(1-q^{n})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\right],$$

если объединим первые два ряда и представим третий как разность двух рядов. Складывая соответствующие члены первых двух рядов в последней строке, немедленно получим

$$1+\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}=24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}=1+\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}.$$

Пользуясь дифференциальными уравнениями § 21.4, можем переписать эту формулу в виде

$$\frac{1}{\vartheta_1'(0\mid\tau)}\frac{d\vartheta_1'(0\mid\tau)}{d\tau}=$$

$$=\frac{1}{\vartheta_2(0\mid\tau)}\frac{d\vartheta_2(0\mid\tau)}{d\tau}+\frac{1}{\vartheta_3(0\mid\tau)}\frac{d\vartheta_3(0\mid\tau)}{d\tau}+\frac{1}{\vartheta_4(0\mid\tau)}\frac{d\vartheta_4(0\mid\tau)}{d\tau}.$$

Интегрируя по τ, найдем

$$\vartheta_1'(0,\ q)=C\vartheta_2(0,\ q)\,\vartheta_3(0,\ q)\,\vartheta_4(0,\ q),$$

где C — постоянная (не зависящая от q). Для определения C заставим $q\to 0$; так как

$$\lim_{q\to 0} q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_1'=2,\quad \lim_{q\to 0} q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2=2,\quad \lim_{q\to 0}\vartheta_3=1,\quad \lim_{q\to 0}\vartheta_4=1,$$

мы видим, что $C=1$ и, следовательно,

$$\vartheta_1'=\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4,$$

что и представляет собой требуемый результат.

21.42. Значение постоянной G

Из только что полученного результата мы можем найти значение постоянной G, введенной в § 21.3.

По формулам этого параграфа

$$\vartheta_1' = \varphi(0) = 2q^{\frac{1}{4}} G \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2, \quad \vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}} G \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n})^2,$$

$$\vartheta_3 = G \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1})^2, \quad \vartheta_4 = G \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})^2,$$

и следовательно (§ 21.41), имеем

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 = G^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n})^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1})^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1})^2.$$

Далее, все произведения сходятся абсолютно, так как $|q| < 1$, и следовательно, допустимы следующие преобразования:

$$\left\{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})\right\} \left\{\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n})\right\} =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}),$$

из коих первое следует из того, что все положительные целые числа имеют один из видов $2n - 1$, $2n$.

Отсюда находим, что уравнение, определяющее G, будет

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 = G^2,$$

и следовательно,

$$G = \pm \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}).$$

Для определения знака заметим, что G — аналитическая (и следовательно, однозначная) функция от q во всей области $|q| < 1$, и из произведения для $\vartheta_3(z)$ мы видим, что $G \to 1$ при $q \to 0$. Отсюда следует, что всегда нужно брать знак плюс, и следовательно, мы получаем окончательно

$$G = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}).$$

Пример 1. Показать, что

$$\vartheta_1' = 2q^{\frac{1}{4}} G^3.$$

Пример 2. Показать, что

$$\vartheta_4 = \prod_{n=1}^{\infty} \{(1 - q^{2n-1})(1 - q^n)\}.$$

Пример 3. Показать, что

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \{(1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2\}.$$

21.43. Связь сигма-функции с тэта-функциями

Было показано (§ 20.421, пример 3), что функция $\sigma(z \mid \omega_1, \omega_2)$ с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$ может быть представлена в виде

$$\sigma(z) = \frac{2\omega_1}{\pi} \exp\left(\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2\omega_1}\right) \times$$
$$\times \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 - 2q^{2n}\cos\frac{\pi z}{\omega_1} + q^{4n}\right)(1 - q^{2n})^{-2}\right\},$$

где $q = \exp\left(\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}\right)$.

Если сравнить этот результат с произведением § 21.3 для $\vartheta_1(z \mid \tau)$, то видим непосредственно, что

$$\sigma(z) = \frac{2\omega_1}{\pi} \exp\left(\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right) \cdot \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{-3} \vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2\omega_1} \,\middle|\, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

Чтобы выразить η_1 через тэта-функции, прологарифмируем и дважды продифференцируем это равенство; получим

$$-\wp(z) = \frac{\eta_1}{\omega_1} - \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi z}{2\omega_1}\right) + \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \left[\frac{\varphi''(\nu)}{\varphi(\nu)} - \left\{\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)}\right\}^2\right],$$

где $\nu = \frac{1}{2}\frac{\pi z}{\omega_1}$ и функция φ та же, что в § 21.41.

Разлагая по возрастающим степеням z и сравнивая между собою члены, не зависящие от z, получим

$$0 = \frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)}$$

и, следовательно,

$$\eta_1 = -\frac{\pi^2}{12\omega_1} \cdot \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}.$$

Следовательно, $\sigma(z \mid \omega_1, \omega_2)$ может быть выражена через тэта-функции при помощи формулы

$$\sigma(z \mid \omega_1, \omega_2) = \frac{2\omega_1}{\pi\vartheta_1'} \exp\left(-\frac{\nu^2\vartheta_1'''}{6\vartheta_1'}\right) \vartheta_1\left(\nu \,\middle|\, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right),$$

где $\nu = \frac{1}{2}\frac{\pi z}{\omega_1}$.

Пример. Доказать, что

$$\eta_2 = -\left(\frac{\pi^2\omega_2\vartheta_1'''}{12\omega_1^2\vartheta_1'} + \frac{\pi i}{2\omega_1}\right).$$

21.5. Выражение эллиптических функций при помощи тэта-функций

Мы только что видели, что тэта-функции, по существу, эквивалентны сигма-функциям, и таким образом, будут существовать выражения для эллиптических функций через тэта-функции, соответствующие формулам §§ 20.5—20.53. С теоретической точки зрения формулы §§ 20.5—20.53 важнее вследствие их симметрии относительно периодов, но с точки зрения практики выражения через тэта-функции имеют два преимущества: (I) тэта-функции легче вычисляются, чем сигма-функции; (II) тэта-функции ведут себя особенно просто по отношению к вещественному периоду, который, как правило, и имеет значение в применениях эллиптических функций в прикладной математике.

Пусть $f(z)$ — эллиптическая функция с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$; пусть выбрана такая основная совокупность нулей $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и полюсов $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, что

$$\sum_{r=1}^{n}(\alpha_r - \beta_r) = 0,$$

как в § 20.53.

Тогда по методам § 20.53 читатель легко проверит, что

$$f(z) = A_3\prod_{r=1}^{n}\left\{\vartheta_1\left(\frac{\pi z - \pi\alpha_r}{2\omega_1}\,\middle|\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) : \vartheta_1\left(\frac{\pi z - \pi\beta_r}{2\omega_1}\,\middle|\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right\},$$

где A_3 — постоянная; точно так же, если

$$\sum_{m=1}^{m_r} A_{r,m}(z-\beta_r)^{-m}$$

есть главная часть функции $f(z)$ в ее полюсе β_r, найдем по методам § 20.52

$$f(z) = A_2 + \sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{m=1}^{m_r}\frac{(-1)^{m-1}A_{r,m}}{(m-1)!}\frac{d^m}{dz^m}\lg\vartheta_1\left(\frac{\pi z - \pi\beta_r}{2\omega_1}\,\middle|\,\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\right\},$$

где A_2 — постоянная.

Эта формула важна при интегрировании эллиптических функций. В § 22.741 помещен пример применения этой формулы к одной динамической задаче.

Пример. Показать, что

$$\frac{\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_1^2(z)} = -\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_1'^2}\frac{d}{dz}\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} + \frac{\vartheta_3\vartheta_3''}{\vartheta_1'^3},$$

и вывести, что

$$\int_z^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_1^2(z)}\,dz = \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_1'^2}\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} + \left(\frac{1}{2}\pi - z\right)\frac{\vartheta_3\vartheta_3''}{\vartheta_1'^3}.$$

21.51. Мнимое преобразование Якоби

Если эллиптическая функция имеет периоды $2\omega_1$, $2\omega_2$ такие, что

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0,$$

то иногда удобно рассматривать вместо них периоды $2\omega_2$, $-2\omega_1$, ибо эти числа являются периодами, и если $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$, то и $\operatorname{Im}\left(\frac{-\omega_1}{\omega_2}\right) > 0$. В эллиптические функции, которые рассматривались до сих пор, периоды входили симметрично, и указанный подход не давал никаких преимуществ. Но в случае тэта-функций, которые являются лишь квазипериодическими, поведение функций по отношению к вещественному периоду π значительно отличается от ее поведения по отношению к комплексному периоду $\pi\tau$. Следовательно, имея в виду результат, полученный в § 21.43, можно ожидать получения преобразований для тэта-функций, в которых отношения периодов двух тэта-функций, связанных преобразованием, будут соответственно τ и $-\frac{1}{\tau}$.

Эти преобразования для четырех тэта-функций впервые были получены Якоби[1]) из теории эллиптических функций; впрочем, Пуассон[2]) ранее получил формулу, тождественную с одной из формул преобразований, из которой при помощи элементарной алгебры могут быть получены и другие три преобразования. Прямое доказательство преобразований принадлежит Ландсбергу, который применил методы интегрирования по контуру[3]).

---

[1]) Jacobi, Journ. für Math., III (1828), 403—404 (Ges. Werke, I (1881), 264—265).

[2]) Poisson, Mém. de l'Acad. des Sci., VI (1827), 592; в частном случае эта формула для $z=0$ была дана раньше Пуассоном в Journ. de l'École polytechnique, XII (тетрадь XIX), (1823), 420.

[3]) Этот метод указан в примере 17 главы 6, ч. I, стр. 174. См. Landsberg, Journ. für Math., CXI (1893), 234—253.

Вывод формул Якоби, который мы сейчас дадим, основывается на теореме Лиувилля; формула, которую мы докажем, имеет вид

$$\vartheta_3(z\,|\,\tau) = (-i\tau)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{z^2}{\pi i \tau}\right) \vartheta_3\left(\frac{z}{\tau}\,\Big|\,-\frac{1}{\tau}\right),$$

где значение $(-i\tau)^{-\frac{1}{2}}$ определяется условием $|\arg(-i\tau)| < \frac{1}{2}\pi$.

Для краткости положим

$$-\frac{1}{\tau} \equiv \tau', \qquad q' = \exp(\pi i \tau').$$

Единственными нулями функций $\vartheta_3(z\,|\,\tau)$ и $\vartheta_3(\tau' z\,|\,\tau')$ будут простые нули, расположенные в точках, в которых

$$z = m\pi + n\pi\tau + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau, \qquad z\tau' = m'\pi + n'\pi\tau' + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau'$$

соответственно, где m, n, m', n' принимают все целые значения; взяв $m' = -n-1$, $n' = m$, видим, что отношение

$$\psi(z) \equiv \exp\left(\frac{z^2}{\pi i \tau}\right) \vartheta_3\left(\frac{z}{\tau}\,\Big|\,-\frac{1}{\tau}\right) : \vartheta_3(z\,|\,\tau)$$

будет целой функцией без нулей.

Кроме того,

$$\psi(z+\pi\tau) : \psi(z) = \exp\left(\frac{2z\pi\tau + \pi^2\tau^2}{\pi i \tau}\right) : q^{-1} e^{-2iz} = 1$$

и

$$\psi(z-\pi) : \psi(z) = \exp\left(\frac{-2z\pi + \pi^2}{\pi i \tau}\right) \times q'^{-1} e^{-\frac{2iz}{\tau}} = 1.$$

Следовательно, $\psi(z)$ — двоякопериодическая функция без нулей и полюсов; согласно § 20.12 $\psi(z)$ должна быть постоянной, скажем A (не зависящей от z).

Таким образом,

$$A\vartheta_3(z|\tau) = \exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right) \vartheta_3(z\tau'|\tau');$$

а заменяя z последовательно через $z + \frac{1}{2}\pi$, $z + \frac{1}{2}\pi\tau$, $z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau$, легко получим

$$A\vartheta_4(z|\tau) = \exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right) \vartheta_2(z\tau'|\tau'),$$

$$A\vartheta_2(z|\tau) = \exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right) \vartheta_4(z\tau'|\tau'),$$

$$A\vartheta_1(z|\tau) = -i \exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right) \vartheta_1(z\tau'|\tau').$$

Остается еще доказать, что $A=(-i\tau)^{\frac{1}{2}}$. Для этого продифференцируем последнее равенство и положим затем $z=0$; получим

$$A\vartheta_1'(0|\tau) = -i\tau'\vartheta_1'(0|\tau').$$

Но

$$\vartheta_1'(0|\tau) = \vartheta_2(0|\tau)\,\vartheta_3(0|\tau)\,\vartheta_4(0|\tau)$$

и

$$\vartheta_1'(0|\tau') = \vartheta_2(0|\tau')\vartheta_3(0|\tau')\,\vartheta_4(0|\tau');$$

деля последние формулы друг на друга и пользуясь предыдущими, получим непосредственно $A^{-2}=-i\tau'$, и следовательно,

$$A = \pm(-i\tau)^{\frac{1}{2}}.$$

Для определения знака отметим, что

$$A\vartheta_3(0|\tau) = \vartheta_3(0|\tau'),$$

причем обе тэта-функции являются аналитическими функциями от τ при $\operatorname{Im}\tau > 0$; таким образом, функция A аналитическая и однозначная в верхней полуплоскости τ.

Так как обе тэта-функции будут положительными, когда τ чисто мнимое, то в этом случае нужно будет взять знак *плюс*. Отсюда, по теории аналитического продолжения, мы *всегда* имеем

$$A = +(-i\tau)^{\frac{1}{2}},$$

что и дает требуемое преобразование.

Таким образом нами показано, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2\pi i\tau+2niz} = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(z-n\pi)^2/\pi i\tau}.$$

Пример 1. Показать, что

$$\frac{\vartheta_4(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)} = \frac{\vartheta_2(0|\tau')}{\vartheta_3(0|\tau')},$$

когда $\tau\tau'=-1$.

Пример 2. Показать, что

$$\frac{\vartheta_2(0|\tau+1)}{\vartheta_3(0|\tau+1)} = e^{\frac{1}{4}\pi i}\frac{\vartheta_2(0|\tau)}{\vartheta_4(0|\tau)}.$$

Пример 3. Показать, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right) = \pm 2^{\frac{1}{2}}q'^{\frac{1}{8}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q'^{2n}}{1+q'^{2n-1}}\right),$$

и показать затем, что следует взять знак плюс.

21.52. Преобразование типа Ландена

Ландену (Landen) принадлежит преобразование (§ 22.42) эллиптических интегралов (§ 22.7), имеющее исторический интерес; это преобразование получается непосредственно из одной формулы, связывающей тэта-функции с параметрами τ и 2τ, а именно:

$$\frac{\vartheta_3(z\mid\tau)\,\vartheta_4(z\mid\tau)}{\vartheta_4(2z\mid 2\tau)}=\frac{\vartheta_3(0\mid\tau)\,\vartheta_4(0\mid\tau)}{\vartheta_4(0\mid 2\tau)},$$

которую мы и должны теперь доказать.

Нулями выражения $\vartheta_3(z|\tau)\,\vartheta_4(z|\tau)$ будут простые нули в точках

$$z=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\tau$$

и в точках

$$z=m\pi+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\tau,$$

где m и n принимают все целые значения; в тех же точках $2z=m\pi+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\cdot 2\tau$, т. е. эти точки будут нулями и функции $\vartheta_4(2z|2\tau)$. Следовательно, отношение

$$\frac{\vartheta_3(z\mid\tau)\,\vartheta_4(z\mid\tau)}{\vartheta_4(2z\mid 2\tau)}$$

не имеет ни нулей, ни полюсов. Кроме того, по отношению к периодам π и $\pi\tau$ оно имеет множители: 1 и

$$(q^{-1}e^{-2iz})(-q^{-1}e^{-2iz}):(-q^{-2}e^{-4iz})=1;$$

поэтому оно будет двоякопериодической функцией и, следовательно (§ 20.12), постоянным. Значение этой константы можно найти, положив $z=0$, тогда мы получим высказанный выше результат.

Если заменим z на $z+\frac{1}{2}\pi\tau$, то получим соответствующую формулу для других тэта-функций, а именно:

$$\frac{\vartheta_2(z\mid\tau)\,\vartheta_1(z\mid\tau)}{\vartheta_1(2z\mid 2\tau)}=\frac{\vartheta_3(0\mid\tau)\,\vartheta_4(0\mid\tau)}{\vartheta_4(0\mid 2\tau)}.$$

21.6. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют отношения тэта-функций

Из примера 3 § 21.11 видно, что функция

$$\vartheta_1(z):\vartheta_4(z)$$

имеет множители периодичности -1, $+1$, соответствующие периодам π, $\pi\tau$; поэтому и ее производная

$$\left\{\vartheta_1'(z)\,\vartheta_4(z)-\vartheta_4'(z)\,\vartheta_1(z)\right\}:\vartheta_4^2(z)$$

имеет те же самые множители периодичности.

С другой стороны, лёгко убедиться, что и $\dfrac{\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)}{\vartheta_4^2(z)}$ имеет множители периодичности -1, $+1$; следовательно, если обозначим через $\varphi(z)$ отношение

$$\{\vartheta_1'(z)\,\vartheta_4(z)-\vartheta_4'(z)\,\vartheta_1(z)\} : \{\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)\},$$

то $\varphi(z)$ будет двоякопериодической функцией с периодами π и $\pi\tau$; единственно возможными полюсами функции $\varphi(z)$ будут простые полюсы в точках, сравнимых с $\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$.

Теперь рассмотрим $\varphi\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)$; из соотношений § 21.11, а именно:

$$\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_4(z), \qquad \vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_1(z),$$

$$\vartheta_2\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_3(z), \qquad \vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_2(z),$$

легко видеть, что

$$\varphi\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=\{-\vartheta_4'(z)\,\vartheta_1(z)+\vartheta_1'(z)\,\vartheta_4(z)\} : \{\vartheta_3(z)\,\vartheta_2(z)\}.$$

Следовательно, $\varphi(z)$ — двоякопериодическая функция с периодами π и $\frac{1}{2}\pi\tau$. Поэтому *единственно возможными полюсами функции $\varphi(z)$ являются простые полюсы в точках, сравнимых с $\frac{1}{2}\pi$ по этим периодам.*

Поэтому (§ 20.12) $\varphi(z)$ — постоянная; заставляя $z\to 0$, видим, что значение этой постоянной равно

$$\{\vartheta_1'\vartheta_4\} : \{\vartheta_2\vartheta_3\}=\vartheta_4^2.$$

Таким образом, мы установили важный результат, а именно:

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\right\}=\vartheta_4^2\,\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}\,\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)};$$

положив $\xi\equiv\dfrac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}$ и применяя результаты § 21.2, видим, что

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2=(\vartheta_2^2-\xi^2\vartheta_3^2)(\vartheta_3^2-\xi^2\vartheta_2^2).$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение $\dfrac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}$. Нетрудно видеть, что общим решением будет $\pm\dfrac{\vartheta_1(z+\alpha)}{\vartheta_4(z+\alpha)}$, где α — постоянная интегрирования; так как это отношение изменяет знак, когда α

возрастает на π, то отрицательный знак можно отбросить, не нарушая общности решения.

Пример 1. Показать, что

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}\right\} = -\vartheta_3^2\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)}.$$

Пример 2. Показать, что

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)}\right\} = -\vartheta_2^2\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}.$$

21.61. Генезис эллиптической функции Якоби sn u[1])

Дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 = (\vartheta_2^2 - \xi^2\vartheta_3^2)(\vartheta_3^2 - \xi^2\vartheta_2^2),$$

полученное в § 21.6, может быть приведено к каноническому виду при помощи несущественной замены переменных.

Положим[2])

$$\frac{\xi\vartheta_3}{\vartheta_2} = y, \quad z\vartheta_3^2 = u;$$

тогда, если написать $k^{\frac{1}{2}}$ вместо $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$, уравнение, определяющее y как функцию от u, будет

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2).$$

Это дифференциальное уравнение имеет частное решение

$$y = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_1(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})}.$$

Функция от u справа имеет множители периодичности -1, $+1$, соответствующие периодам $\pi\vartheta_3^2$, $\pi\tau\vartheta_3^2$; она будет поэтому двоякопериодической функцией с периодами $2\pi\vartheta_3^2$, $\pi\tau\vartheta_3^2$. В любой ячейке она имеет два простых полюса в точках, сравнимых с $\frac{1}{2}\pi\tau\vartheta_3^2$ и $\pi\vartheta_3^2 + \frac{1}{2}\pi\tau\vartheta_3^2$; принимая же во внимание характер квазипериодичности переменной y, видим, что вычеты в этих точках будут равны и про-

---

[1]) Якоби и другие ранние авторы пользовались обозначением sin am вместо sn.

[2]) Отметим, что из формул § 21.3 видно, что $\vartheta_2 \neq 0$, $\vartheta_3 \neq 0$, когда $|q| < 1$, исключая случай, когда $q = 0$; в последнем случае тэта-функции вырождаются; подстановки поэтому законны.

тивоположны по знаку; нулями функции являются точки, сравнимые с 0 и $\pi\vartheta_3^2$.

Принято рассматривать y как функцию, зависящую от k, а не от q; чтобы представить y как функцию от u и k, пишут

$$y = \operatorname{sn}(u, k)$$

или, проще,

$$y = \operatorname{sn} u.$$

Очевидно, что $\operatorname{sn}(u, k)$ — эллиптическая функция второго из типов, указанных в § 20.13; далее, при $q \to 0$ (так что $k \to 0$) легко видеть, что

$$\operatorname{sn}(u, k) \to \sin u.$$

Постоянная k называется *модулем*; если $k'^{\frac{1}{2}} = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}$, так что $k^2 + k'^2 = 1$, то k' называется *дополнительным модулем*. Квазипериоды $\pi\vartheta_3^2$, $\pi\tau\vartheta_3^2$ обычно обозначаются через $2K$, $2iK'$, так что $\operatorname{sn}(u, k)$ имеет периоды $4K$, $2iK'$.

Из § 21.51 видим, что $2K' = \pi\vartheta_3^2(0|\tau')$, так что K' будет той же самой функцией от τ', как функция K от τ, если $\tau\tau' = -1$.

Пример 1. Показать, что

$$\frac{d}{dz}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)} = -\vartheta_3^2\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)},$$

и вывести отсюда, что если

$$y = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)} \quad \text{и} \quad u = z\vartheta_3^2,$$

то

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - u^2)(k'^2 + k^2u^2).$$

Пример 2. Показать, что

$$\frac{d}{dz}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)} = -\vartheta_2^2\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)},$$

и вывести отсюда, что если

$$y = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)} \quad \text{и} \quad u = z\vartheta_3^2,$$

то

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - u^2)(u^2 - k'^2).$$

Пример 3. Получить следующие формулы:

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}(1+q^2+q^6+q^{12}+q^{20}+\ldots),$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \vartheta_3 = 1+2q+2q^4+2q^9+\ldots,$$

$$\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \vartheta_4 = 1-2q+2q^4+2q^9-\ldots,$$

$$K' = K\pi^{-1}\lg\left(\frac{1}{q}\right).$$

[Эти формулы удобны для вычисления k, k', K, K', когда q дано.]

21.62. Более ранние обозначения Якоби[1]). Тэта-функция $\Theta(u)$ и эта-функция $\mathrm{H}(u)$

Наличие множителей ϑ_3^{-2} в выражении для $\operatorname{sn}(u, k)$ делает иногда желательным использовать обозначения, которые Якоби употреблял в «Fundamenta Nova» и впоследствии оставил. Функция, имеющая первостепенную важность в этой системе обозначений, есть функция $\Theta(u)$, определяемая равенством

$$\Theta(u) = \vartheta_4(u\vartheta_3^{-2}\,|\,\tau),$$

так что периоды для $\Theta(u)$ будут $2K$ и $2iK'$.

Функция $\vartheta_3(z)$ тогда заменяется функцией $\Theta(u+K)$; вместо функции $\vartheta_1(z)$ имеем функцию $\mathrm{H}(u)$, определяемую равенством

$$\mathrm{H}(u) = -iq^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{i\pi u}{2K}}\Theta(u+iK') = \vartheta_1(u\vartheta_3^{-2}\,|\,\tau);$$

$\vartheta_2(z)$ заменяется функцией $\mathrm{H}(u+K)$.

Читатель не встретит затруднений в переводе содержания этой главы в ранние обозначения Якоби.

Пример 1. Показать, что особыми точками функции $\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$, где $\Theta'(u) = \frac{d\Theta(u)}{du}$, являются простые полюсы в точках, сравнимых с iK' $(\mathrm{mod}\,2K,\ 2iK')$, и что вычет в каждой особой точке равен 1.

Пример 2. Показать, что

$$\mathrm{H}'(0) = \frac{1}{2}\pi K^{-1}\mathrm{H}(K)\,\Theta(0)\,\Theta(K).$$

---

[1]) Эти обозначения применялись в «Fundamenta Nova».

21.7. Задача обращения

До сего времени эллиптическая функция Якоби $\operatorname{sn}(u, k)$ неявно рассматривалась как зависящая скорее от параметра q, чем от модуля k, и было показано, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d \operatorname{sn} u}{du}\right)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u),$$

где

$$k^2 = \frac{\vartheta_2^4(0, q)}{\vartheta_3^4(0, q)}.$$

Но в тех задачах прикладной математики, в которых встречаются эллиптические функции, мы имеем дело с решением дифференциального уравнения

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2),$$

в котором *модуль* k задан, и мы *a priori* не знаем значения q; для того чтобы доказать существование аналитической функции $\operatorname{sn}(u, k)$, удовлетворяющей этому уравнению, мы должны показать, что существует такое число τ[1]), что

$$k^2 = \frac{\vartheta_2^4(0 \mid \tau)}{\vartheta_3^4(0 \mid \tau)}.$$

Если уже показано, что такое число τ существует, то можно построить, как отношение тэта-функций, функцию $\operatorname{sn}(u, k)$, которая будет удовлетворять дифференциальному уравнению, будет аналитической, исключая простые полюсы, и будет обладать свойством двоякой периодичности и, кроме того, свойством

$$\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{u} = 1.$$

Иными словами, мы можем *обратить* интеграл

$$u = \int_0^y \frac{dt}{(1 - t^2)^{\frac{1}{2}} (1 - k^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

и в результате получим уравнение $y = \operatorname{sn}(u, k)$.

[1]) Существование числа τ, для которого $\operatorname{Im} \tau > 0$, влечет за собою существование такого числа q, что $|q| < 1$. Другим способом было бы непосредственное изучение дифференциального уравнения по методу главы 10.

Трудность, конечно, заключается в том, чтобы показать, что уравнение

$$c = \frac{\vartheta_2^4(0 \mid \tau)}{\vartheta_3^4(0 \mid \tau)}$$

(в котором c написано вместо k^2) имеет решение.

Если $0 < c < 1$ [1]), то легко видеть, что решение существует. Из тождества, данного в следствии § 21.2, ясно, что достаточно доказать существование решения уравнения

$$1 - c = \frac{\vartheta_4^4(0 \mid \tau)}{\vartheta_3^4(0 \mid \tau)},$$

которое можно переписать в виде

$$1 - c = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}} \right)^8.$$

Но при возрастании q от 0 до 1 произведение справа остается непрерывным и монотонно уменьшается от 1 до 0; таким образом (§ 3.63, часть I), оно пройдет через значение $1 - c$ один и только один раз. Следовательно, решение уравнения относительно τ существует и задачу обращения можно считать решенной.

21.71. Задача обращения для комплексных значений c. Модулярные функции $f(\tau)$, $g(\tau)$, $h(\tau)$

Задачу обращения можно рассматривать как задачу интегрального исчисления и при помощи несколько длинных алгебраических рассуждений, состоящих в изучении поведения интеграла

$$\int_0^y (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt;$$

когда y лежит на «римановой поверхности», можно доказать, что задача обращения имеет решение. Для исчерпывающего изучения этого вопроса отсылаем читателя к книге Хэнкока (Hancock, Elliptic Functions, I (New York, 1910)).

Однако в соответствии с общим характером этой книги лучше будет доказать при помощи метода Коши (§ 6.31, часть I), что уравнение $c = \dfrac{\vartheta_2^4(0 \mid \tau)}{\vartheta_3^4(0 \mid \tau)}$ имеет один корень, лежащий в определенной области плоскости τ, и что этот корень (подчиненный определенным ограничениям) будет аналитической функцией от c, когда c рассматривается как переменная. Мы видели, что существование этого корня дает решение задачи обращения;

[1]) Это практически наиболее важный случай.

будет, таким образом, доказано и существование эллиптической функции Якоби с данным модулем k.

Только что указанный метод имеет то преимущество, что он раскрывает возможности так называемых *модулярных функций*.

Общая теория этих функций (которые имеют большое значение в теории преобразования эллиптических функций) рассмотрена в трактате Клейна и Фрике [1]).

Пусть

$$f(\tau)=16e^{\pi i\tau}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+e^{2n\pi i\tau}}{1+e^{(2n-1)\pi i\tau}}\right\}^8=\frac{\vartheta_2^4(0\mid\tau)}{\vartheta_3^4(0\mid\tau)},$$

$$g(\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-e^{(2n-1)\pi i\tau}}{1+e^{(2n-1)\pi i\tau}}\right\}^8=\frac{\vartheta_4^4(0\mid\tau)}{\vartheta_3^4(0\mid\tau)},$$

$$h(\tau)=-\frac{f(\tau)}{g(\tau)}.$$

Тогда, если $\tau\tau'=-1$, введенные функции, по следствию § 21.2 и примеру 1 § 21.51, обладают следующими свойствами;

$$f(\tau+2)=f(\tau),\quad g(\tau+2)=g(\tau),\quad f(\tau)+g(\tau)=1,$$
$$f(\tau+1)=h(\tau),\quad f(\tau')=g(\tau),\quad g(\tau')=f(\tau).$$

Легко видеть, что при $\operatorname{Im}\tau\to+\infty$ функции $\frac{1}{16}e^{-\pi i\tau}f(\tau)=f_1(\tau)$ и $g(\tau)$ стремятся к единице равномерно относительно $\operatorname{Re}\tau$, когда

$$-1\leqslant\operatorname{Re}\tau\leqslant 1;$$

производные же их по τ стремятся при этом равномерно к нулю [2]).

21.711. Главное решение уравнения $f(\tau)-c=0$

Мы видели в § 6.31 части I, что если функция $f(\tau)$ аналитическая на каком-нибудь контуре и внутри его, то число корней уравнения $f(\tau)-c=0$ внутри контура, помноженное на $2\pi i$, равно интегралу

$$\int\frac{1}{f(t)-c}\,\frac{df(\tau)}{d\tau}\,d\tau,$$

взятому по рассматриваемому контуру.

Возьмем контур $ABCDEFE'D'C'B'A$, показанный на чертеже; временно предположим [3]), что $f(\tau)-c$ не имеет нулей на контуре.

Контур составлен следующим образом:

FE параллельна вещественной оси и лежит на большом расстоянии от нее;

AB получается из FE инверсией относительно окружности $|\tau|=1$;

---

[1]) F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen (ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke) (Leipzig, 1890.)

[2]) Это вытекает из выражений для тэта-функций в виде степенных рядов относительно q, если заметим, что $|q|\to 0$, когда $\operatorname{Im}\tau\to+\infty$.

[3]) Значения функции $f(\tau)$ в точках на контуре будут рассмотрены в § 21.712.

BC получается из ED инверсией относительно окружности $|\tau|=1$, причем D берется так, что $D1 = AO$.

Из элементарных геометрических соображений следует, что так как точки C и D в инверсии соответствуют друг другу и точка 1 соответствует сама себе, то окружность, построенная на $D1$ как на диаметре, проходит через C; таким образом, дуга CD этой окружности есть отражение дуги AB относительно прямой $\operatorname{Re}\tau = \frac{1}{2}$.

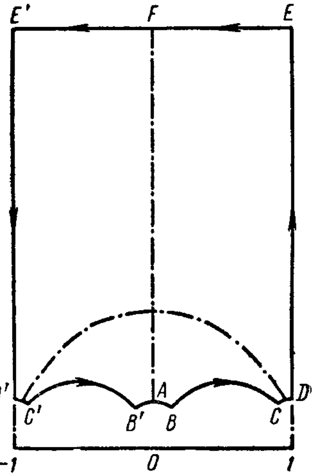

Рис. 5.

Левая половина чертежа есть отражение правой половины относительно прямой $\operatorname{Re}\tau = 0$.

Предполагая, что FE достаточно удалено от вещественной оси, покажем теперь, что уравнение $f(\tau) - c = 0$ имеет один и только один корень внутри начерченного контура, если исключить случаи $c \geqslant 1$ и $c \leqslant 0$[1]). Этот корень называется *главным корнем* уравнения.

Чтобы установить существование корня, рассмотрим интеграл $\int \frac{1}{f(\tau)-c}\frac{df(\tau)}{d\tau}\,d\tau$, взятый по различным частям контура.

Так как $f(\tau+2) = f(\tau)$, то имеем

$$\left\{\int\limits_{DE} + \int\limits_{E'D'}\right\}\frac{1}{f(\tau)-c}\frac{df(\tau)}{d\tau}\,d\tau = 0.$$

Далее, если τ описывает BC и $B'C'$, то $\tau'\left(= -\frac{1}{\tau}\right)$ описывает соответственно $E'D'$ и ED и, следовательно,

$$\left\{\int\limits_{BC} + \int\limits_{C'B'}\right\}\frac{1}{f(\tau)-c}\frac{df(\tau)}{d\tau}\,d\tau = \left\{\int\limits_{BC} + \int\limits_{C'B'}\right\}\frac{1}{g(\tau')-c}\frac{dg(\tau')}{d\tau}\,d\tau =$$
$$= \left\{\int\limits_{E'D'} + \int\limits_{DE}\right\}\frac{1}{g(\tau')-c}\frac{dg(\tau')}{d\tau'}\,d\tau' = 0,$$

ибо $g(\tau'+2) = g(\tau')$ и соответствующие элементы интеграла сокращаются.

Наконец, так как $f(\tau \pm 1) = h(\tau)$, то имеем

$$\left\{\int\limits_{D'C'} + \int\limits_{CD}\right\}\frac{1}{f(\tau)-c}\frac{df(\tau)}{d\tau}\,d\tau = \int\limits_{B'AB}\frac{1}{h(\tau)-c}\frac{dh(\tau)}{d\tau}\,d\tau;$$

но если τ' описывает $B'AB$, то τ описывает EE'; таким образом, интеграл по всему контуру приводится к интегралу

$$\int\limits_{EE'}\left\{\frac{1}{f(\tau)-c}\frac{df(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{h(\tau')-c}\frac{dh(\tau')}{d\tau} + \frac{1}{f(\tau')-c}\frac{df(\tau')}{d\tau}\right\}d\tau =$$
$$= \int\limits_{EE'}\left\{\frac{1}{f(\tau)-c}\frac{df(\tau)}{d\tau} - \frac{1}{h(\tau)\{1-c\cdot h(\tau)\}}\frac{dh(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{g(\tau)-c}\frac{dg(\tau)}{d\tau}\right\}d\tau.$$

[1]) В § 21.712 будет показано, что если $c \geqslant 1$ или $c \leqslant 0$, то $f(\tau) - c$ имеет нуль на контуре.

Далее, когда EE' уходит в бесконечность[1], $f(\tau)-c\to -c\neq 0$, $g(\tau)-c\to 1-c\neq 0$, и предел этого интеграла будет

$$-\lim \int_{EE'} \frac{1}{1-c\cdot h(\tau)} \frac{d}{d\tau}\{\lg h(\tau)\}\,d\tau =$$

$$= \lim \int_{E'E} \frac{1}{1-c\cdot h(\tau)} \left\{\pi i + \frac{d\lg f_1(\tau)}{d\tau} - \frac{d\lg g(\tau)}{d\tau}\right\} d\tau.$$

Но

$$1-c\cdot h(\tau)\to 1,\quad f_1(\tau)\to 1,\quad g_1(\tau)\to 1,\quad \frac{df_1(\tau)}{d\tau}\to 0,\quad \frac{dg(\tau)}{d\tau}\to 0,$$

и таким образом, предел интеграла будет

$$\int_{E'E} \pi i\,d\tau = 2\pi i.$$

Далее, если мы с самого начала возьмем EE' настолько далеко от вещественной оси, что $f(\tau)-c$, $1-c\cdot h(\tau)$, $g(\tau)-c$ не имеют нулей, когда точка τ находится выше EE', то контур не пройдет ни через один нуль выражения $f(\tau)-c$, когда EE' уходит в бесконечность и радиусы дуг CD, $D'C'$, $B'AB$ уменьшаются до нуля; от такого изменения контура интеграл не меняется, и таким образом, исходный контурный интеграл равен $2\pi i$, а число нулей выражения $f(\tau)-c$ внутри исходного контура будет в точности равно единице.

21.712. Значения модулярной функции $f(\tau)$ на рассмотренном выше контуре

Рассмотрим теперь вопрос, упомянутый в начале § 21.711, о нулях функции $f(\tau)-c$ на полупрямых[2], соединяющих точки ± 1 и $\pm 1+\infty i$, и на полуокружностях $OBC1$ и $(-1)C'B'O$.

Когда τ движется от $+1$ до $+1+\infty i$ или от -1 до $-1+\infty i$, функция $f(\tau)$ изменяется от $-\infty$ до 0, оставаясь в области действительных отрицательных значений. Таким образом, при c отрицательном мы делаем надлежащий полукруговой вырез на DE и соответствующий вырез на $D'E'$, с помощью которых выделяем точки, в которых $f(\tau)-c=0$; при этом интегралы предыдущего параграфа по сделанным вырезам взаимно сократятся в силу соотношения $f(\tau+2)=f(\tau)$.

Пусть теперь τ описывает полуокружность $OBC1$; тогда τ' изменяется от $-1+\infty i$ до -1, а функция $f(\tau)=g(\tau')=1-f(\tau')$ изменяется от 1 до $+\infty$, оставаясь действительной. Аналогичным образом и здесь при c положительном, большем 1, делаем надлежащие вырезы на BC и $B'C'$ для избежания встречающейся трудности; подробнее на этом не останавливаемся; аналогичное будет и с $B'C'O$. Исследуем теперь поведение τ как функции от c, именно, как должно изменяться c в своей плоскости, чтобы τ изменялось в вышерассмотренной области, оставаясь однозначным и непрерывным.

[1]) Временно предполагается, что $c\neq 0$ и $c\neq 1$.

[2]) Мы видели, что EE' может быть взято таким образом, что $f(\tau)-c$ не будет иметь нулей ни на EE', ни на малых дугах контура.

Для этого будем c изменять вблизи вещественной оси и отметим, что при переходе ее знак вещественной части τ изменяется. Если теперь $0 < \operatorname{Re} c < 1$, то τ при таком переходе изменяется непрерывно, и если $\operatorname{Re} c < 0$, то τ переходит от точки, близкой к DE, к точке, близкой к $D'E'$ (или обратно), и в этом случае значение q изменяется непрерывно; наконец, если $\operatorname{Re} c > 1$, то τ переходит от точек, близких к BC, к точкам, близким к $B'C'$, и в этом случае $q = e^{\pi i \tau}$ терпит разрыв, пока нет разреза в плоскости c от $+1$ к $+\infty$; но в разрезанной плоскости q будет уже однозначной и непрерывной функцией от c через посредство τ, лежащего в рассмотренной области; эту функцию обозначим через $q(c)$; она определяется по формуле $q(c) = e^{\pi i \tau(c)}$, где

$$\tau(c) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\tau}{f(\tau) - c} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

как это следует из § 6.3 части I.

Из сказанного легко заключаем, что если c описывает замкнутый контур, не окружающий точки $c = 1$, то $q(c)$ возвратится к исходному значению; для того же, чтобы $\tau(c)$ возвращалось к прежнему значению, необходимо, чтобы контур не окружал и точку $c = 0$.

21.72. Периоды, рассматриваемые как функции модуля

Так как $K = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0, q)$, то мы видим по § 21.712, что K будет однозначной аналитической функцией от $c\,(= k^2)$, когда в плоскости c сделан разрез от 1 до $+\infty$; но так как $K' = -i\tau K$, то мы видим, что K' будет однозначной функцией от c только после того, как будет сделан добавочный разрез от 0 до $-\infty$; ниже (§ 22.32) мы покажем, что разрез от 1 до $+\infty$, который необходим для однозначности K, не необходим для K'.

21.73. Задача обращения, связанная с эллиптическими функциями Вейерштрасса

Покажем теперь, что если заданы инварианты g_2 и g_3 такие, что $g_2^3 \neq \neq 27g_3^2$, то можно построить эллиптическую функцию Вейерштрасса с этими инвариантами; иными словами, покажем, что *можно построить*[1] *периоды* $2\omega_1$, $2\omega_2$ *такие, чтобы функция* $\wp(z \mid \omega_1, \omega_2)$ *имела инварианты* g_2 *и* g_3. Задача будет решена, если мы сможем получить решение дифференциального уравнения

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$$

в виде

$$y = \wp(z \mid \omega_1, \omega_2).$$

Получим решение уравнения с помощью тэта-функций.

Пусть $\nu = Az$, где A — постоянная, которую сейчас определим.

С помощью методов § 21.6 легко видеть, что

$$\vartheta_2'(\nu)\,\vartheta_1(\nu) - \vartheta_1'(\nu)\,\vartheta_2(\nu) = -\vartheta_3(\nu)\,\vartheta_4(\nu)\,\vartheta_2^2,$$

[1]) Относительно действительного вычисления периодов см. R. T. A. Innes, Edinburgh Royal Sos., XXVII (1907), 357—368.

а отсюда, воспользовавшись результатами § 21.2, найдем

$$\left\{\frac{d}{dz}\frac{\vartheta_2^2(\nu)}{\vartheta_1^2(\nu)}\vartheta_3^2\vartheta_4^2\right\}^2=$$

$$=4A^2\left(\frac{\vartheta_2^2(\nu)}{\vartheta_1^2(\nu)}\vartheta_3^2\vartheta_4^2\right)\left(\frac{\vartheta_2^2(\nu)}{\vartheta_1^2(\nu)}\vartheta_3^2\vartheta_4^2+\vartheta_4^4\right)\left(\frac{\vartheta_2^2(\nu)}{\vartheta_1^2(\nu)}\vartheta_3^2\vartheta_4^2+\vartheta_3^4\right).$$

Пусть теперь e_1, e_2, e_3 — корни уравнения $4y^3-g_2y-g_3=0$, взятые в таком порядке, что $\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}$ не будет [1]) вещественным числом, отрицательным или бо́льшим единицы.

При этих условиях уравнение

$$\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}=\frac{\vartheta_4^4(0\mid\tau)}{\vartheta_3^4(0\mid\tau)}$$

имеет решение (§ 21.712) такое, что $\operatorname{Im}\tau>0$; это уравнение определяет параметр τ тэта-функций, который был до сих пор в нашем распоряжении.

Выбрав τ таким образом, возьмем затем A такое, что [2])

$$A^2\vartheta_4^4=e_1-e_2.$$

Тогда функция

$$y=A^2\frac{\vartheta_2^2(\nu\mid\tau)}{\vartheta_1^2(\nu\mid\tau)}\vartheta_3^2(0\mid\tau)\,\vartheta_4^2(0\mid\tau)+e_1$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2=4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3).$$

Периоды y, *как функции от* z, будут πA, $\frac{\pi\tau}{A}$; обозначив их через $2\omega_1$, $2\omega_2$, имеем

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)>0.$$

По этим периодам можно построить функцию $\wp(z\mid\omega_1,\omega_2)$, и легко видеть, что

$$\wp(z)-A^2\frac{\vartheta_2^2(\nu\mid\tau)}{\vartheta_1^2(\nu\mid\tau)}\vartheta_3^2(0\mid\tau)\,\vartheta_4^2(0\mid\tau)-e_1$$

---

[1]) Если $\frac{e_i-e_j}{e_i-e_k}>1$, то $0<\frac{e_i-e_k}{e_i-e_j}<1$; а если $\frac{e_i-e_j}{e_i-e_k}<0$, то

$$1-\frac{e_i-e_j}{e_i-e_k}>1 \quad\text{и}\quad \frac{e_j-e_i}{e_j-e_k}=\left\{1-\frac{e_i-e_k}{e_i-e_j}\right\}^{-1}<1.$$

Значения 0, 1, ∞ для выражения $(e_1-e_2)/(e_1-e_3)$ исключаются, так как $g_2^3\neq 27g_3^2$.

[2]) Знак, приписываемый A, совершенно безразличен, так как мы имеем дело исключительно с *четными* функциями от ν и z.

будет эллиптической функцией без полюса в начале координат[1]); она будет поэтому постоянной, скажем C.

Если G_2, G_3 — инварианты функции $\wp(z \mid \omega_1, \omega_2)$, то имеем

$$4\wp^3(z) - G_2\wp(z) - G_3 = \wp'^2(z) =$$
$$= 4\{\wp(z) - C - e_1\}\{\wp(z) - C - e_2\}\{\wp(z) - C - e_3\},$$

и таким образом, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\wp(z)$, находим

$$0 = 12C, \quad G_2 = g_2 - 12C^2, \quad G_3 = g_3 - g_2C + 4C^3.$$

Отсюда

$$C = 0, \quad G_2 = g_2, \quad G_3 = g_3,$$

и таким образом, функция $\wp(z \mid \omega_1, \omega_2)$ с требуемыми инвариантами построена.

21.8. Вычисление эллиптических функций

Ряды, расположенные по возрастающим степеням, удобны для вычисления тэта-функций даже тогда, когда $|q|$ довольно большой, например 0,9. Но обычно на практике случается, что бывает задан модуль k и необходимо вычислить величины K, K' и q. Ниже увидим (§§ 22.301, 22.32), что K, K' могут быть выражены через гипергеометрические функции при помощи равенств

$$K = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right); \quad K' = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k'^2\right);$$

но эти ряды сходятся медленно, за исключением случая, когда $|k|$ и $|k'|$ соответственно весьма малы, так что эти ряды никогда одновременно не пригодны для численных вычислений.

Для того чтобы получить более пригодные для этого ряды, вычислим сначала q как корень уравнения $k = \dfrac{\vartheta_2^2(0, q)}{\vartheta_3^2(0, q)}$ и затем получим K по формуле $K = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0, q)$ и K' по формуле

$$K' = \pi^{-1}K \lg\left(\frac{1}{q}\right).$$

Уравнение $k = \dfrac{\vartheta_2^2(0, q)}{\vartheta_3^2(0, q)}$ эквивалентно уравнению[2])

$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta_4(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}.$$

[1]) Члены с z^{-2} взаимно уничтожаются, а членов с z^{-1} вообще нет, так как функция четная.

[2]) При вычислениях обычно бывает $0 < k < 1$, и таким образом, q положительно и $0 < \sqrt{k'} < 1$.

Положив $2\varepsilon = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$ $\left(\text{так что } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}, \text{ когда } 0 < k < 1\right)$, получим

$$2\varepsilon = \frac{\vartheta_3(0, q) - \vartheta_4(0, q)}{\vartheta_3(0, q) + \vartheta_4(0, q)} = \frac{\vartheta_2(0, q^4)}{\vartheta_3(0, q^4)}.$$

Мы видели (§§ 21.71—21.712), что это уравнение относительно q^4 имеет решение, которое является аналитической функцией от ε^4, когда $|\varepsilon| < \frac{1}{2}$; таким образом, q можно разложить в ряд Маклорена по степеням ε в этой области[1]). Остается определить коэффициенты в этом разложении из уравнения

$$\varepsilon = \frac{q + q^9 + q^{25} + \ldots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots},$$

которое может быть переписано в виде

$$q = \varepsilon + 2q^4\varepsilon - q^9 + 2q^{16}\varepsilon - q^{25} + \ldots;$$

легко убедиться последовательной подстановкой $\varepsilon + 2q^4\varepsilon - q^9 + \ldots$ [2]) вместо q в правую часть, что четыре первых члена даются рядом

$$q = \varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^9 + 150\varepsilon^{13} + O(\varepsilon^{17}).$$

Только что было показано, что этот ряд сходится, когда

$$|\varepsilon| < \frac{1}{2}.$$

[Примечание. Обычно достаточно двух первых членов этого разложения; даже когда k равно, например, $\sqrt{0,8704} = 0,933\ldots$, $\varepsilon = \frac{1}{8}$, $2\varepsilon^5 = 0,0000609$, $15\varepsilon^9 = 0,0000002$.]

Пример. При данных $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ вычислить q, K, K' при помощи только что полученного разложения, а также на основании того, что $\tau = i$, так что $q = e^{-\pi}$.

[$q = 0,0432139$, $K = K' = 1,854075$.]

---

[1]) Тэта-функции не обращаются в нуль нигде в области $|q| < 1$, кроме точки $q = 0$; таким образом, эта последняя есть единственная возможная точка ветвления.

[2]) Это разложение дано Вейерштрассом (Weierstrass, Werke, II (1895), 276).

21.9. Обозначения, применяемые для тэта-функций

Следующая схема указывает главные системы обозначений, применяемые различными авторами; символы в каком-либо одном столбце обозначают одну и ту же функцию.

$\vartheta_1(\pi z)$	$\vartheta_2(\pi z)$	$\vartheta_3(\pi z)$	$\vartheta(\pi z)$	Якоби (Jacobi)
$\vartheta_1(z)$	$\vartheta_2(z)$	$\vartheta_3(z)$	$\vartheta_4(z)$	Таннери и Мольк (Tannery, Molk)
$\theta_1(\omega z)$	$\theta_2(\omega z)$	$\theta_3(\omega z)$	$\theta(\omega z)$	Брио и Буке (Briot, Bouquet)
$\theta_1(z)$	$\theta_2(z)$	$\theta_3(z)$	$\theta_0(z)$	Вейерштрасс, Альфан, Хенкок (Weierstrass, Halphen, Hancock)
$\theta(z)$	$\theta_1(z)$	$\theta_3(z)$	$\theta_2(z)$	Жордан, Харкнесс, Морли (Jordan, Harkness, Morley)

Эрмит, Смит (H. J. S. Smith) и некоторые другие математики применяют обозначения, выражаемые равенством

$$\theta_{\mu,\nu}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n\nu} q^{\frac{1}{4}(2n+\mu)^2} e^{i\pi(2n+\mu)\frac{x}{a}} \qquad (\mu = 0,\ 1;\quad \nu = 0,\ 1).$$

При этом обозначения формулы примера 3 § 21.11 принимают весьма сжатую форму:

$$\theta_{\mu,\nu}(x+a) = (-1)^{\mu}\,\theta_{\mu,\nu}(x), \quad \theta_{\mu,\nu}(x+a\tau) = (-1)^{\nu} q^{-1} e^{-\frac{2i\pi x}{a}}\,\theta_{\mu,\nu}(x).$$

Кэли применяет ранние обозначения Якоби (§ 21.62). Преимущество обозначений Вейерштрасса заключается в том, что единица (а не π) является вещественным периодом функций $\theta_3(z)$ и $\theta_0(z)$.

Обозначения Жордана показывают аналогию между тэта-функциями и тремя сигма-функциями, определенными в § 20.421. Легко получить соотношения, подобные соотношениям § 21.43, связывающие $\theta_r(z)$ с $\sigma_r(2\omega_1 z)$, когда $r = 1,\ 2,\ 3$.

ЛИТЕРАТУРА

L. Euler, Opera Omnia (1), XX (Leipzig, 1912).
C. G. J. Jacobi, Fundamenta Nova [1] (Königsberg, 1829); Ges. Math. Werke, I, 497—538.
C. Hermite, Oeuvres Mathématiques (Paris, 1905—1917).
F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen (ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke) (Leipzig, 1890).
H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen (Brunswick, 1891).
J. Tannery et J. Molk, Functions elliptiques (Paris, 1893—1902).

[1]) Напечатано в его Ges. Math. Werke, I (1881), 49—239.

А. Гурвиц, Теория аналитических и эллиптических функций, Ленинград, ГТТИ, 1933.

Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, М. — Л., 1948.

Примеры

1. Получить формулы сложения

$$\vartheta_1(y+z)\,\vartheta_1(y-z)\,\vartheta_4^2=\vartheta_3^2(y)\,\vartheta_2^2(z)-\vartheta_2^2(y)\,\vartheta_3^2(z)=\vartheta_1^2(y)\,\vartheta_4^2(z)-\vartheta_4^2(y)\,\vartheta_1^2(z),$$
$$\vartheta_2(y+z)\,\vartheta_2(y-z)\,\vartheta_4^2=\vartheta_4^2(y)\,\vartheta_2^2(z)-\vartheta_1^2(y)\,\vartheta_3^2(z)=\vartheta_2^2(y)\,\vartheta_4^2(z)-\vartheta_3^2(y)\,\vartheta_1^2(z),$$
$$\vartheta_3(y+z)\,\vartheta_3(y-z)\,\vartheta_4^2=\vartheta_4^2(y)\,\vartheta_3^2(z)-\vartheta_1^2(y)\,\vartheta_2^2(z)=\vartheta_3^2(y)\,\vartheta_4^2(z)-\vartheta_2^2(y)\,\vartheta_1^2(z),$$
$$\vartheta_4(y+z)\,\vartheta_4(y-z)\,\vartheta_4^2=\vartheta_3^2(y)\,\vartheta_3^2(z)-\vartheta_2^2(y)\,\vartheta_2^2(z)=\vartheta_4^2(y)\,\vartheta_4^2(z)-\vartheta_1^2(y)\,\vartheta_1^2(z).$$

(Jacobi)

2. Получить формулы сложения

$$\vartheta_4(y+z)\,\vartheta_4(y-z)\,\vartheta_2^2=\vartheta_4^2(y)\,\vartheta_2^2(z)+\vartheta_3^2(y)\,\vartheta_1^2(z)=\vartheta_2^2(y)\,\vartheta_4^2(z)+\vartheta_1^2(y)\,\vartheta_3^2(z),$$
$$\vartheta_4(y+z)\,\vartheta_4(y-z)\,\vartheta_3^2=\vartheta_4^2(y)\,\vartheta_3^2(z)+\vartheta_2^2(y)\,\vartheta_1^2(z)=\vartheta_3^2(y)\,\vartheta_4^2(z)+\vartheta_1^2(y)\,\vartheta_2^2(z)$$

и увеличением y на полупериоды получить соответствующие формулы для

$$\vartheta_r(y+z)\,\vartheta_r(y-z)\,\vartheta_2^2 \quad \text{и} \quad \vartheta_r(y+z)\,\vartheta_r(y-z)\,\vartheta_3^2,$$

где $r=1,\ 2,\ 3$.

(Jacobi)

3. Получить формулы

$$\vartheta_1(y\pm z)\,\vartheta_2(y\mp z)\,\vartheta_3\vartheta_4=\vartheta_1(y)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta_4(z)\pm\vartheta_3(y)\,\vartheta_4(y)\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(z),$$
$$\vartheta_1(y\pm z)\,\vartheta_3(y\mp z)\,\vartheta_2\vartheta_4=\vartheta_1(y)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_4(z)\pm\vartheta_2(y)\,\vartheta_4(y)\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_3(z),$$
$$\vartheta_1(y\pm z)\,\vartheta_4(y\mp z)\,\vartheta_2\vartheta_3=\vartheta_1(y)\,\vartheta_4(y)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)\pm\vartheta_2(y)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_4(z),$$
$$\vartheta_2(y\pm z)\,\vartheta_3(y\mp z)\,\vartheta_2\vartheta_3=\vartheta_2(y)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)\mp\vartheta_1(y)\,\vartheta_4(y)\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_4(z),$$
$$\vartheta_2(y\pm z)\,\vartheta_4(y\mp z)\,\vartheta_2\vartheta_4=\vartheta_2(y)\,\vartheta_4(y)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_4(z)\mp\vartheta_1(y)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_3(z),$$
$$\vartheta_3(y\pm z)\,\vartheta_4(y\mp z)\,\vartheta_3\vartheta_4=\vartheta_3(y)\,\vartheta_4(y)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta_4(z)\mp\vartheta_1(y)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(z).$$

(Jacobi)

4. Получить формулы удвоения

$$\vartheta_2(2y)\,\vartheta_2\vartheta_4^2=\vartheta_2^2(y)\,\vartheta_4^2(y)-\vartheta_1^2(y)\,\vartheta_3^2(y),$$
$$\vartheta_3(2y)\,\vartheta_3\vartheta_4^2=\vartheta_3^2(y)\,\vartheta_4^2(y)-\vartheta_1^2(y)\,\vartheta_2^2(y),$$
$$\vartheta_4(2y)\,\vartheta_4^3=\vartheta_3^4(y)-\vartheta_2^4(y)=\vartheta_4^4(y)-\vartheta_1^4(y).$$

(Jacobi)

5. Получить формулу удвоения

$$\vartheta_1(2y)\,\vartheta_2\vartheta_3\theta_4=2\vartheta_1(y)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_4(y).$$

(Jacobi)

6. Получить формулы удвоения из результатов, указанных в примере 2.

7. Показать, что при обозначениях § 21.22

$$[1]-[2]=[4]'-[3]',\quad [1]-[3]=[1]'-[3]',\quad [1]-[4]=[2]'-[3]',$$
$$[2]-[3]=[1]'-[4]',\quad [2]-[4]=[2]'-[4]',\quad [3]-[4]=[2]'-[1]'.$$

8. Показать, что

$$\begin{aligned}
2[1122] &= [1122]' + [2211]' - [4433]' + [3344]',\\
2[1133] &= [1133]' + [3311]' - [4422]' + [2244]',\\
2[1144] &= [1144]' + [4411]' - [3322]' + [2233]',\\
2[2233] &= [2233]' + [3322]' - [4411]' + [1144]',\\
2[2244] &= [2244]' + [4422]' - [3311]' + [1133]',\\
2[3344] &= [3344]' + [4433]' - [2211]' + [1122]'.
\end{aligned}$$

(Jacobi)

9. Получить формулы

$$2\pi^{-1}Kk^{\frac{1}{2}} = 2q^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^{2n})^2(1-q^{2n-1})^{-2}\},$$

$$k^{\frac{1}{2}}k'^{-\frac{1}{2}} = 2q^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}\{(1+q^{2n})^2(1-q^{2n-1})^{-2}\}.$$

10. Вывести из примера 9 следующие результаты:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^6 = 2q^{\frac{1}{4}}k'k^{-\frac{1}{2}}, \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^6 = 2q^{\frac{1}{4}}(kk')^{-\frac{1}{2}},$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^6 = 2\pi^{-3}q^{-\frac{1}{2}}kk'K^3, \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^6 = \frac{1}{4}q^{-\frac{1}{2}}kk'^{-\frac{1}{2}},$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n})^6 = 4\pi^{-3}q^{-\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{2}}k'^2K^3, \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n})^6 = \frac{1}{2}q^{-\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{2}}k'^{-1}.$$

(Jacobi)

11. Рассматривая интеграл $\int \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} e^{2niz}\,dz$, взятый по контуру, образованному параллелограммом с вершинами $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi+\pi\tau$, $-\frac{1}{2}\pi+\pi\tau$, показать, что когда n — положительное целое число,

$$(1-q^{2n})\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)}e^{2niz}\,dz = 2\pi i q^n,$$

и вывести отсюда, что при $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\pi\tau)$

$$\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n \sin 2nz}{1-q^{2n}}.$$

12. Получить следующие разложения:

$$\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} = \operatorname{ctg} z + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}\sin 2nz}{1-q^{2n}},$$

$$\frac{\vartheta_2'(z)}{\vartheta_2(z)} = -\operatorname{tg} z + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n}\sin 2nz}{1-q^{2n}},$$

$$\frac{\vartheta_3'(z)}{\vartheta_3(z)} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n}\sin 2nz}{1-q^{2n}},$$

каждое из которых имеет место в полосе плоскости z, в которой соответствующий ряд абсолютно сходится.

13. Показать, что если $|\operatorname{Im} y| < \operatorname{Im}(\pi\tau)$ и $|\operatorname{Im} z| < \operatorname{Im}(\pi\tau)$, то

$$\frac{\vartheta_1(y+z)\,\vartheta_1'}{\vartheta_1(y)\,\vartheta_1(z)} = \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z + 4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q^{2mn}\sin(2my+2nz).$$

(Math. Trip., 1908)

14. Показать, что при $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\pi\tau)$

$$\frac{Kk^{\frac{1}{2}}}{\pi}\,\frac{\vartheta_4}{\vartheta_4(z)} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos 2nz,$$

где

$$a_n = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(2n+m+\frac{1}{2}\right)}.$$

(Math. Trip., 1903)

[Получить формулу приведения для a_n, рассматривая интеграл

$$\int \{\vartheta_4(z)\}^{-1} e^{2niz}\,dz,$$

взятый по контуру примера 11.]

15. Показать, что выражение

$$\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} - \left[\operatorname{ctg} z + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\sin 2z}{1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}}\right]$$

будет двоякопериодической функцией от z без особых точек, и вывести отсюда, что оно будет равно нулю.

Доказать подобным же образом, что

$$\frac{\vartheta_2'(z)}{\vartheta_2(z)} = -\operatorname{tg} z - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}\sin 2z}{1+2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}},$$

$$\frac{\vartheta_3'(z)}{\vartheta_3(z)} = -4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}\sin 2z}{1+2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}},$$

$$\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}\sin 2z}{1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}}.$$

16. Получить значения k, k', K, K' с точностью до шести десятичных знаков при $q=\frac{1}{10}$.

[$k=0{,}895769$, $k'=0{,}444518$,
$K=2{,}262700$, $K'=1{,}658414$.]

17. Показать, что если $w+x+y+z=0$, то в обозначениях § 21.22

$$[3]+[1]=[2]+[4],$$
$$[1234]+[3412]+[2143]+[4321]=0.$$

18. Показать, что

$$\frac{\vartheta_4'(y)}{\vartheta_4(y)}+\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)}-\frac{\vartheta_4'(y+z)}{\vartheta_4(y+z)} = \vartheta_2\vartheta_3\frac{\vartheta_1(y)\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_1(y+z)}{\vartheta_4(y)\,\vartheta_4(z)\,\vartheta_4(y+z)}.$$

19. Положив $x=y=z$, $w=3x$ в основных формулах Якоби, получить следующие формулы:

$$\vartheta_1^3(x)\,\vartheta_1(3x)+\vartheta_4^3(x)\,\vartheta_4(3x)=\vartheta_4^3(2x)\,\vartheta_4,$$

$$\vartheta_3^3(x)\,\vartheta_3(3x)-\vartheta_4^3(x)\,\vartheta_4(3x)=\vartheta_2^3(2x)\,\vartheta_2,$$

$$\vartheta_2^3(x)\,\vartheta_2(3x)+\vartheta_4^3(x)\,\vartheta_4(3x)=\vartheta_3^3(2x)\,\vartheta_3.$$

20. Показать, исходя из примера 19, что

$$\left\{\vartheta_1^3(x)\,\vartheta_1(3x)\,\vartheta_4^2+\vartheta_4^3(x)\,\vartheta_4(3x)\,\vartheta_4^2\right\}^{\frac{2}{3}}+\left\{\vartheta_3^3(x)\,\vartheta_3(3x)\,\vartheta_2^2-\vartheta_4^3(x)\,\vartheta_4(3x)\,\vartheta_2^2\right\}^{\frac{2}{3}}=$$
$$=\left\{\vartheta_2^3(x)\,\vartheta_2(3x)\,\vartheta_3^2+\vartheta_4^3(x)\,\vartheta_4(3x)\,\vartheta_3^2\right\}^{\frac{2}{3}}.$$

(Trinity, 1882)

21. Показать с помощью теоремы Лиувилля, что

$$\frac{2\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta_4(z)}{\vartheta_1(2z)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)}$$

— постоянная, и затем, заставляя $z\to 0$, что эта постоянная равна 1.

Отсюда сравнением коэффициентов при z^2 в разложениях выражений

$$\lg \frac{\vartheta_1(2z)}{2\vartheta_1(z)} \quad \text{и} \quad \lg \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_2(0)} + \lg \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0)} + \lg \frac{\vartheta_4(z)}{\vartheta_4(0)}$$

по формуле Маклорена вывести, что

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = \frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} + \frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)} + \frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}.$$

Отсюда, далее, по способу § 21.41 вывести, что

$$\vartheta_1'(0) = \vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0).$$

[На этот способ вывода предварительной формулы § 21.41 указал авторам Стюарт (C. A. Stewart).]

ГЛАВА 22

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЯКОБИ

22.1. Эллиптические функции с двумя простыми полюсами

При доказательстве общих теорем об эллиптических функциях, изложенных в начале главы 20, было указано, что наиболее простыми являются два класса эллиптических функций, а именно классы эллиптических функций второго порядка. Функции первого класса имеют двойной полюс (с нулевым вычетом) в каждой ячейке, функции второго — два простых полюса, причем сумма вычетов в этих полюсах равна нулю.

Пример функции первого класса, а именно функция $\wp(z)$, был рассмотрен подробно в главе 20; в настоящей главе мы рассмотрим различные примеры функций второго класса, известных под названием *эллиптических функций Якоби*[1]).

Мы увидим (§ 22.122, примечание), что при известных условиях функции Якоби вырождаются в обыкновенные круговые функции; соответственно этому будут применяться обозначения (выведенные Якоби и видоизмененные Гудерманом и Глешером), которые подчеркивают аналогию между функциями Якоби и круговыми функциями.

С теоретической точки зрения проще всего рассматривать функции Якоби как отношения тэта-функций (§ 21.61). Но так как многие из их основных свойств могут быть получены при помощи совсем элементарных методов, без обращения к теории тэта-функций, мы будем изучать функции Якоби, не пользуясь главой 21, за исключением случаев, когда желательно к этому прибегнуть ради краткости или простоты.

---

[1]) Эти функции были введены Якоби, но многие из их свойств были получены независимо от него Абелем, который применял иные обозначения. См. примечание на стр. 404.

22.11. Эллиптические функции Якоби sn u, cn u, dn u

В § 21.61 было показано, что если

$$y = \frac{\vartheta_3 \vartheta_1 \left(u/\vartheta_3^2\right)}{\vartheta_2 \vartheta_4 \left(u/\vartheta_3^2\right)},$$

где тэта-функции составляются с параметром τ, то

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2),$$

где $k^{\frac{1}{2}} = \vartheta_2(0|\tau)/\vartheta_3(0|\tau)$. Обратно, если задана постоянная k (называемая *модулем*[1])), то, кроме случаев, когда $k^2 \geqslant 1$ или $k^2 \leqslant 0$, всегда может быть найдено значение τ (§§ 21.7—21.712), для которого

$$\frac{\vartheta_2^4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3^4(0\,|\,\tau)} = k^2;$$

тогда решением дифференциального уравнения

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2),$$

подчиненным условию $\left(\frac{dy}{du}\right)_{u=y=0} = 1$, будет

$$y = \frac{\vartheta_3 \vartheta_1 \left(u/\vartheta_3^2\right)}{\vartheta_2 \vartheta_4 \left(u/\vartheta_3^2\right)},$$

причем тэта-функции имеют в качестве параметра найденное значение τ.

Дифференциальное уравнение можно переписать в виде

$$u = \int_0^y (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt,$$

и по методам § 21.73 можно показать, что если y и u связаны между собой этой интегральной зависимостью, то y можно выразить через u как отношение двух тэта-функций по только что указанной формуле.

Таким образом, если

$$u = \int_0^y (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt,$$

то y можно рассматривать как функцию от u, определяемую отно-

[1]) Если $0 < k < 1$ и θ — острый угол, такой, что $\sin\theta = k$, то θ называется *модулярным углом*.

шением тэта-функций; таким образом, y является аналитической функцией от u, исключая особые точки, которые будут простыми полюсами; для того чтобы выразить эту функциональную зависимость, положим

$$y = \operatorname{sn}(u, k)$$

или просто $y = \operatorname{sn} u$, когда нет необходимости указывать модуль [1]).

Функция $\operatorname{sn} u$ есть одна из *эллиптических функций Якоби* от u, и мы имеем

$$\operatorname{sn} u = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_1(u/\vartheta_3^2)}{\vartheta_4(u/\vartheta_3^2)}. \tag{A}$$

[Если теория тэта-функций не предполагается известной, то чрезвычайно трудно показать, что интегральная формула определяет y как функцию от u, аналитическую всюду, за исключением простых полюсов. См. Hancock, Elliptic Functions, I (New York, 1910).]

Теперь положим

$$\operatorname{cn}(u, k) = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2(u/\vartheta_3^2)}{\vartheta_4(u/\vartheta_3^2)}, \tag{B}$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3(u/\vartheta_3^2)}{\vartheta_4(u/\vartheta_3^2)}. \tag{C}$$

Тогда из соотношения § 21.6 находим

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \tag{I}$$

а из соотношений § 21.2 найдем

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \tag{II}$$

$$k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1 \tag{III}$$

и, очевидно,

$$\operatorname{cn} 0 = \operatorname{dn} 0 = 1. \tag{IV}$$

Мы будем теперь изучать свойства функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, определенных равенствами (A), (B), (C), пользуясь четырьмя соотношениями (I), (II), (III), (IV); эти четыре соотношения достаточны для того, чтобы сделать $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ определенными функциями от u.

Мы будем считать известным, что $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ — однозначные функции от u, аналитические всюду, за исключением их полюсов; также будем считать известным, что они являются однозначными функциями от k^2, когда в плоскости комплексной переменной k^2 сделаны разрезы от 1 до $+\infty$ и от 0 до $-\infty$.

---

[1]) Модуль будет всегда указываться, когда он не равен k.

22.12. Простые свойства функций sn u, cn u, dn u

Из формулы

$$u = \int_0^y (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$$

ясно, что при изменении знака у y изменяется также знак у u: для доказательства достаточно заменить t на $-t$.

Отсюда следует, что $\operatorname{sn} u$ — *нечетная функция от* u.

Так как $\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u$, то из (II) вытекает, что $\operatorname{cn}(-u) = \pm \operatorname{cn} u$; вследствие однозначности $\operatorname{cn} u$ из теории аналитического продолжения вытекает, что всегда следует брать один и тот же знак, верхний или нижний. В частном случае, когда $u=0$, следует взять верхний знак, и таким образом он берется всегда; отсюда $\operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u$, и следовательно, $\operatorname{cn} u$ будет *четной функцией от* u. Подобным же образом $\operatorname{dn} u$ является четной функцией от u. Эти результаты ясны также из определений (A), (B) и (C) § 22.11.

Продифференцируем теперь равенство $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$ и используем равенство (I); тогда получим

$$\frac{d \operatorname{cn} u}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u;$$

подобным же образом из соотношений (III) и (I) находим

$$\frac{d \operatorname{dn} u}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

22.121. Дополнительный модуль

Если $k^2 + k'^2 = 1$ и $k' \to +1$, когда $k \to 0$, то k' называется *дополнительным модулем*. При наличии разреза в плоскости k^2 от 1 до $+\infty$ k' является однозначной функцией от k.

[С помощью тэта-функций мы можем сделать и $k'^{\frac{1}{2}}$ однозначным, определяя его как

$$\frac{\vartheta_4(0 \mid \tau)}{\vartheta_3(0 \mid \tau)}.]$$

Пример. Показать, что если

$$u = \int_y^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (k'^2 + k^2t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

то

$$y = \operatorname{cn}(u, k).$$

Показать также, что если

$$u = \int_y^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (t^2 - k'^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt,$$

то

$$y = \operatorname{dn}(u, k).$$

[Эти результаты иногда пишутся в форме

$$u = \int_{\operatorname{cn} u}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (k'^2 + k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt = \int_{\operatorname{dn} u}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (t^2 - k'^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt.\Big]$$

22.122. Обозначение Глешера [1]) для отношений

Глешером введено было краткое и удобное обозначение для обратных величин и отношений эллиптических функций Якоби; для обозначения обратных величин изменяется порядок букв, обозначающих функцию, например:

$$\operatorname{ns} u = \frac{1}{\operatorname{sn} u}, \quad \operatorname{nc} u = \frac{1}{\operatorname{cn} u}, \quad \operatorname{nd} u = \frac{1}{\operatorname{dn} u},$$

а для обозначения отношений пишутся по порядку первые буквы названий функций, стоящих в числителе и знаменателе, например:

$$\operatorname{sc} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \operatorname{sd} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{cd} u = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$

$$\operatorname{cs} u = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad \operatorname{ds} u = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad \operatorname{dc} u = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

[Примечание. Якоби обозначал функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ соответственно через $\operatorname{sinam} u$, $\operatorname{cosam} u$, $\Delta \operatorname{am} u$; сокращенное обозначение, применяемое ныне, принадлежит Гудерману [2]), который писал также $\operatorname{tn} u$ как сокращенное обозначение для $\operatorname{tg} \operatorname{am} u$, вместо чего теперь пишется $\operatorname{sc} u$.

Основанием обозначений Якоби было то обстоятельство, что он рассматривал обращение интеграла

$$u = \int_0^\varphi (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta$$

как основную функцию и писал [3]) $\varphi = \operatorname{am} u$; он же употреблял обозначение $\Delta\varphi = (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$ для $\dfrac{d\varphi}{du}$.]

---

[1]) Glaisher, Messenger of Mathematics, XI (1882), 86.
[2]) Gudermann, Journ. für Math., XVIII (1838), 12, 20.
[3]) Fundamenta Nova, 30. Когда $k \to 0$, то $\operatorname{am} u \to u$.

Пример. Получить следующие результаты:

$$u=\int_0^{\operatorname{sc} u}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}(1+k'^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\int_{\operatorname{cs} u}^{\infty}(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}(t^2+k'^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=\int_0^{\operatorname{sd} u}(1-k'^2t^2)^{-\frac{1}{2}}(1+k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\int_{\operatorname{ds} u}^{\infty}(t^2-k'^2)^{-\frac{1}{2}}(t^2+k^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=\int_{\operatorname{cd} u}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\int_{\operatorname{dc} u}^{1}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(t^2-k^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=\int_{\operatorname{ns} u}^{\infty}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(t^2-k^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\int_1^{\operatorname{nc} u}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(k'^2t^2+k^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=\int_1^{\operatorname{nd} u}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-k'^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

22.2. Теорема сложения для функции $\operatorname{sn} u$

Покажем теперь, как выразить $\operatorname{sn}(u+v)$ через эллиптические функции Якоби от u и v; результат и будет теоремой сложения для функции $\operatorname{sn} u$; это будет теорема сложения в точном смысле слова, так как она может быть написана в виде алгебраического соотношения, связывающего $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{sn}(u+v)$.

[Имеется много методов доказательства теоремы сложения; приводимый нами, по существу, принадлежит Эйлеру [1]), который первым нашел (в 1756, 1757 гг.) интеграл уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0$$

в форме алгебраического соотношения между x и y, где X обозначает полином 4-й степени от x, а Y — тот же самый полином от y.

Три других метода [2]) даны как примеры в конце этого параграфа.]

Предположим, что u и v изменяются так, что $u+v$ остается постоянным и равным α, т. е. так, что

$$\frac{dv}{du}=-1.$$

[1]) Acta Petropolitana, VI (1761), 35—57. Эйлер получил некоторые частные случаи этого результата на несколько лет раньше.

[2]) Иной метод дан Лежандром (Legendre, Fonctions Elliptiques, I (Paris, 1825), 20), и весьма интересное геометрическое доказательство дано Якоби (Jacobi, Journ. für Math., III (1828), 376).

Введем теперь в качестве новых переменных s_1 и s_2, определяемые равенствами

$$s_1 = \operatorname{sn} u, \quad s_2 = \operatorname{sn} v,$$

так что[1])

$$\dot{s}_1^2 = (1 - s_1^2)(1 - k^2 s_1^2)$$

и

$$\dot{s}_2^2 = (1 - s_2^2)(1 - k^2 s_2^2),$$

так как $\dot{v}^2 = 1$.

Дифференцируя по u и деля соответственно на $2\dot{s}_1$ и $2\dot{s}_2$, найдем, что для общих значений[2]) u и v

$$\ddot{s}_1 = -(1+k^2)s_1 + 2k^2 s_1^3, \quad \ddot{s}_2 = -(1+k^2)s_2 + 2k^2 s_2^3.$$

Отсюда при помощи легких алгебраических действий находим

$$\frac{\ddot{s}_1 s_2 - \ddot{s}_2 s_1}{\dot{s}_1^2 s_2^2 - \dot{s}_2^2 s_1^2} = \frac{2k^2 s_1 s_2 (s_1^2 - s_2^2)}{(s_2^2 - s_1^2)(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)},$$

т. е.

$$(\dot{s}_1 s_2 - \dot{s}_2 s_1)^{-1} \frac{d}{du}(\dot{s}_1 s_2 - \dot{s}_2 s_1) = (1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^{-1} \frac{d}{du}(1 - k^2 s_1^2 s_2^2);$$

интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{\dot{s}_1 s_2 - \dot{s}_2 s_1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} = C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Заменяя выражения в левой части их значениями через u и v, получим

$$\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v + \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \operatorname{sn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = C.$$

Таким образом, имеем два интеграла уравнения $du + dv = 0$, а именно:

$$u + v = \alpha \tag{I}$$

и

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = C, \tag{II}$$

---

[1]) Для краткости обозначаем производные по u точками над буквами, а именно:

$$\dot{v} \equiv \frac{dv}{du}, \quad \ddot{v} \equiv \frac{d^2 v}{du^2}.$$

[2]) То есть для тех значений, для которых $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ и $\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v$ не равны нулю.

причем каждый интеграл содержит произвольную постоянную. По общей теории дифференциальных уравнений первого порядка эти интегралы не могут быть функционально независимыми, и таким образом,

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$$

является функцией от $u+v$; назовем эту функцию через $f(u+v)$.

Положив $v=0$, видим, что $f(u) = \operatorname{sn} u$, и следовательно, функция f есть sn.

Таким образом, мы доказали формулу

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

что и представляет теорему сложения.

Пользуясь очевидными обозначениями[1]), можем написать

$$\operatorname{sn}(u+v) = \frac{s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2}.$$

Пример 1. Получить теорему сложения для $\sin u$, воспользовавшись формулами

$$\left(\frac{d \sin u}{du}\right)^2 = 1 - \sin^2 u, \qquad \left(\frac{d \sin v}{dv}\right)^2 = 1 - \sin^2 v.$$

Пример 2. Доказать, пользуясь соотношениями (I) — (IV) § 22.11, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\right) \frac{s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} = 0,$$

и вывести теорему сложения для $\operatorname{sn} u$.

(Abel, Journ. für Math., II (1827), 105)

Пример 3. Показать, что

$$\operatorname{sn}(u+v) \frac{s_1^2 - s_2^2}{s_1 c_2 d_2 - s_2 c_1 d_1} = \frac{s_1 c_1 d_2 + s_2 c_2 d_1}{c_1 c_2 + s_1 d_1 s_2 d_2} = \frac{s_1 d_1 c_2 + s_2 d_2 c_1}{d_1 d_2 + k^2 s_1 s_2 c_1 c_2}.$$

(Cayley, Elliptic Functions (1876), 63)

Пример 4. Получить теорему сложения для $\operatorname{sn} u$ из формул

$$\vartheta_1(y+z)\,\vartheta_4(y-z)\,\vartheta_2\vartheta_3 = \vartheta_1(y)\,\vartheta_4(y)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z) + \vartheta_2(y)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_4(z),$$

$$\vartheta_4(y+z)\,\vartheta_4(y-z)\,\vartheta_4^2 = \vartheta_4^2(y)\,\vartheta_4^2(z) - \vartheta_1^2(y)\,\vartheta_1^2(z),$$

данных в примерах 1 и 3 к главе 21 (стр. 369).

(Jacobi)

---

[1]) Эти обозначения принадлежат Глешеру (Glaisher, Messenger, X (1881), 92, 124).

Пример 5. Предполагая, что координаты любой точки кривой

$$y^2=(1-x^2)(1-k^2x^2)$$

могут быть выражены в виде $(\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)$, получить теорему сложения для $\operatorname{sn} u$ по методу Абеля (§ 20.312).

[Рассмотреть точки пересечения данной кривой с переменной кривой $y=1+mx+nx^2$, одна из них будет $(0, 1)$; пусть другие имеют параметры u_1, u_2, u_3, из которых u_1, u_2 могут быть взяты произвольно при надлежащем выборе m и n. Показать методом § 20.312, что $u_1+u_2+u_3$ постоянна, и вывести, что эта постоянная равняется нулю, полагая

$$m=0, \quad n=-\frac{1}{2}(1+k^2).$$

Заметим также, что в силу соотношений

$$(k^2-n^2)\,x_1x_2x_3=2m, \quad (k^2-n^2)(x_1+x_2+x_3)=2mn$$

имеем

$$\begin{aligned}x_3(1-k^2x_1^2x_2^2)&=x_3-\left(1+\frac{n^2}{k^2-n^2}\right)2mx_1x_2=\\&=x_3-2mx_1x_2-nx_1x_2(x_1+x_2+x_3)=\\&=(x_1+x_2+x_3-nx_1x_2x_3)-(x_1+x_2)-2mx_1x_2-nx_1x_2(x_1+x_2)=\\&=-x_1y_2-x_2y_1.]\end{aligned}$$

22.21. Теоремы сложения для $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$

Докажем теперь формулы

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v-\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{dn}(u+v)=\frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v-k^2\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v};$$

наиболее просто будет получить их из формулы для $\operatorname{sn}(u+v)$.

Пользуясь обозначением, введенным в конце § 22.2, имеем

$$\begin{aligned}(1-k^2s_1^2s_2^2)^2\operatorname{cn}^2(u+v)&=(1-k^2s_1^2s_2^2)^2\{1-\operatorname{sn}^2(u+v)\}=\\&=(1-k^2s_1^2s_2^2)^2-(s_1c_2d_2+s_2c_1d_1)^2=\\&=1-2k^2s_1^2s_2^2+k^4s_1^4s_2^4-s_1^2(1-s_2^2)(1-k^2s_2^2)-\\&\quad-s_2^2(1-s_1^2)(1-k^2s_1^2)-2s_1s_2c_1c_2d_1d_2=\\&=(1-s_1^2)(1-s_2^2)+s_1^2s_2^2(1-k^2s_1^2)(1-k^2s_2^2)-2s_1s_2c_1c_2d_1d_2=\\&=(c_1c_2-s_1s_2d_1d_2)^2,\end{aligned}$$

и таким образом,

$$\operatorname{cn}(u+v)=\pm\frac{c_1c_2-s_1s_2d_1d_2}{1-k^2s_1^2s_2^2}.$$

Но обе части этого равенства являются однозначными функциями от u, аналитическими всюду, кроме полюсов, и невозможно по теории аналитического продолжения, чтобы их отношение было $+1$

для одних значений u и -1 для других значений, так что двойной знак является в действительности определенным; положив $u=0$, видим, что следует взять знак плюс. Первая формула, следовательно, доказана.

Формула для $\operatorname{dn}(u+v)$ получается подобным же образом из тождества

$$\left(1-k^2s_1^2s_2^2\right)^2-k^2\left(s_1c_2d_2+s_2c_1d_1\right)^2\equiv$$
$$\equiv\left(1-k^2s_1^2\right)\left(1-k^2s_2^2\right)+k^4s_1^2s_2^2\left(1-s_1^2\right)\left(1-s_2^2\right)-2k^2s_1s_2c_1c_2d_1d_2,$$

доказательство которого предоставляется читателю.

Пример 1. Показать, что

$$\operatorname{dn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v)=\frac{d_2^2-k^2s_1^2c_2^2}{1-k^2s_1^2s_2^2}.$$

(Jacobi)

[Совокупность 33 формул подобного рода, связывающих функции от $u+v$ и от $u-v$, дана в «Fundamenta Nova», 32—34.]

Пример 2. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\operatorname{cn} u+\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} u\operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\operatorname{dn} u}=\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\operatorname{cn} u+\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} u\operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\operatorname{dn} u},$$

так что отношение $(\operatorname{cn} u+\operatorname{cn} v)/(\operatorname{sn} u\operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\operatorname{dn} u)$ является функцией только от $u+v$, и вывести, что оно равно $\{1+\operatorname{cn}(u+v)\}/\operatorname{sn}(u+v)$.

Получить соответствующий результат для функции $(s_1c_2+s_2c_1)/(d_1+d_2)$.

(Cayley, Messenger, XIV (1885), 56—61)

Пример 3. Показать, что

$$1-k^2\operatorname{sn}^2(u+v)\operatorname{sn}^2(u-v)=(1-k^2\operatorname{sn}^4 u)(1-k^2\operatorname{sn}^4 v)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v)^{-2},$$
$$k'^2+k^2\operatorname{cn}^2(u+v)\operatorname{cn}^2(u-v)=$$
$$=(k'^2+k^2\operatorname{cn}^4 u)(k'^2+k^2\operatorname{cn}^4 v)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v)^{-2}.$$

(Jacobi, Glaisher)

Пример 4. Получить теоремы сложения для $\operatorname{cn}(u+v)$, $\operatorname{dn}(u+v)$ по методу примера 4 § 22.2.

Пример 5. Применяя сокращенные обозначения Глешера (Messenger, X (1881), 105), а именно:

$$s,\ c,\ d=\operatorname{sn} u,\ \operatorname{cn} u,\ \operatorname{dn} u\ \text{ и }\ S,\ C,\ D=\operatorname{sn} 2u,\ \operatorname{cn} 2u,\ \operatorname{dn} 2u,$$

доказать, что

$$S=\frac{2scd}{1-k^2s^4},\quad C=\frac{1-2s^2+k^2s^4}{1-k^2s^4},\quad D=\frac{1-2k^2s^2+k^2s^4}{1-k^2s^4},$$

$$s=\frac{(1+S)^{\frac12}-(1-S)^{\frac12}}{(1+kS)^{\frac12}+(1-kS)^{\frac12}}.$$

Пример 6. В обозначениях примера 5 показать, что

$$s^2=\frac{1-C}{1+D}=\frac{1-D}{k^2(1+C)}=\frac{D-k^2C-k'^2}{k^2(D-C)}=\frac{D-C}{k'^2+D-k^2C},$$

$$c^2=\frac{D+C}{1+D}=\frac{D+k^2C-k'^2}{k^2(1+C)}=\frac{k'^2(1-D)}{k^2(D-C)}=\frac{k'^2(1+C)}{k'^2+D-k^2C},$$

$$d^2=\frac{k'^2+D+k^2C}{1+D}=\frac{D+C}{1+C}=\frac{k'^2(1-C)}{D-C}=\frac{k'^2(1+D)}{k'^2+D-k^2C}.$$

(Glaisher)

22.3. Постоянная K

Мы видели, что если

$$u=\int_0^y(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt,$$

то

$$y=\operatorname{sn}(u,\ k).$$

При верхнем пределе, равном единице (причем путь интегрирования — прямая), принято обозначать значение этого интеграла символом K, так что $\operatorname{sn}(K,\ k)=1$.

[В § 22.302 увидим, что это определение K эквивалентно определению его как $\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2$ в § 21.61.]

Очевидно, что $\operatorname{cn}K=0$ и $\operatorname{dn}K=\pm k'$; для определения знака предположим, что $0<k<1$, и проследим, как изменяется выражение $(1-k^2t^2)^{\frac{1}{2}}$, когда t возрастает от 0 до 1; так как это выражение первоначально равно единице и так как t не встречает ни одной из его точек ветвления (точек $t=\pm k^{-1}$), то конечное значение выражения будет положительно и, следовательно, будет равно $+k'$; так как $\operatorname{dn}K$ — непрерывная функция от k, то ее значение будет всегда $+k'$.

Значения эллиптических функций при $u=K$ даются, таким образом, формулами

$$\operatorname{sn}K=1,\quad \operatorname{cn}K=0,\quad \operatorname{dn}K=k'.$$

22.301. Выражение K через k

Положим $t=\sin\varphi$ в интеграле, определяющем K, тогда получим

$$K=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi.$$

При $|k| < 1$ подинтегральная функция может быть разложена в ряд по степеням k, ряд будет равномерно сходящимся относительно φ (по § 3.34 части I, так как $\sin^{2n}\varphi \leqslant 1$); интегрируя его почленно (§ 4.7, часть I), получим

$$K = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right) = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ c\right),$$

где $c = k^2$. По теории аналитического продолжения этот результат сохраняется для всех значений c, когда в плоскости c сделан разрез от 1 до $+\infty$, ибо как подинтегральная функция, так и гипергеометрическая функция будут однозначными и аналитическими в разрезанной плоскости.

Пример. Показать, что

$$\frac{d}{dk}\left(kk'^2 \frac{dK}{dk}\right) = kK.$$

(Legendre, Fonctions Elliptiques, 1 (1825), 62)

22.302. Эквивалентность определений K

Положив в § 21.61 $u = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2$, видим сразу, что $\operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2\right) = 1$ и, таким образом, $\operatorname{cn}\left(\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2\right) = 0$. Следовательно, $1 - \operatorname{sn} u$ имеет *двойной нуль* при $\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2$. Так как число полюсов функции $\operatorname{sn} u$ в ячейке с вершинами $0,\ 2\pi\vartheta_3^2,\ \pi(\tau+1)\vartheta_3^2,\ \pi(\tau-1)\vartheta_3^2$ равно двум, то на основании § 20.13 заключаем, что нули, расположенные в точках $u = \frac{1}{2}\pi(4m+1+2n\pi)\vartheta_3^2$, где m и n — целые числа, будут *единственными* нулями функции $1 - \operatorname{sn} u$. Поэтому по определению § 22.3

$$K = \frac{1}{2}\pi(4m+1+2\pi\tau)\vartheta_3^2.$$

Возьмем теперь τ чисто мнимым, так что $0 < k < 1$, а K вещественно; мы имеем $n = 0$, так что

$$\frac{1}{2}\pi(4m+1)\vartheta_3^2 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\, d\varphi,$$

где m — положительное целое число или нуль; отрицательным целым числом оно, очевидно, быть не может.

Если бы m было положительным числом, то, поскольку

$$\int_0^{\alpha} (1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\, d\varphi$$

является непрерывной функцией от α и, следовательно, пробегает все значения между 0 и K при возрастании α от 0 до $\frac{1}{2}\pi$, мы могли бы найти значение α, *меньшее* $\frac{1}{2}\pi$, такое, что

$$\frac{K}{(4m+1)} = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2 = \int_0^{\alpha} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}\, d\varphi,$$

то тогда

$$\operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2\right) \equiv \sin\alpha < 1,$$

что неверно, так как

$$\operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2\right) = 1.$$

Поэтому *m должно быть нулем*, другими словами, имеем

$$K = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2.$$

Как K, так и $\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2$ являются аналитическими функциями от k в плоскости c с разрезом от 1 до $+\infty$, и таким образом, по теории аналитического продолжения, это соотношение, доказанное для $0 < k < 1$, сохраняется во всей разрезанной плоскости.

Эквивалентность двух определений K, таким образом, установлена.

Пример 1. Рассматривая интеграл

$$\int_0^{(1+)} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt,$$

показать, что $\operatorname{sn} 2K = 0$.

Пример 2. Доказать, что

$$\operatorname{sn}\frac{1}{2}K = (1+k')^{-\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{cn}\frac{1}{2}K = k'^{\frac{1}{2}}(1+k')^{-\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{dn}\frac{1}{2}K = k'^{\frac{1}{2}}.$$

[Обратить внимание на то, что, когда $u = \frac{1}{2}K$, $\operatorname{cn} 2u = 0$. Для определения знаков, которые следует приписывать различным радикалам, проще всего заставить $k \to 0$, $k' \to 1$, тогда $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ вырождаются в $\sin u$, $\cos u$, 1.]

Пример 3. Доказать при помощи теории тэта-функций, что

$$\operatorname{cs}\frac{1}{2}K = \operatorname{dn}\frac{1}{2}K = k'^{\frac{1}{2}}.$$

22.31. Свойства периодичности (связанные с K) эллиптических функций Якоби

Тесную связь величины K со свойствами периодичности функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, которую можно предвидеть из свойств периодичности тэта-функций, связанных с $\frac{\pi}{2}$, докажем теперь непосредственно, исходя из теоремы сложения. Согласно § 22.2 имеем

$$\operatorname{sn}(u+K)=\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} K \operatorname{dn} K+\operatorname{sn} K \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 K}=\operatorname{cd} u.$$

Подобным же образом (§ 22.21)

$$\operatorname{cn}(u+K)=-k' \operatorname{sd} u, \quad \operatorname{dn}(u+K)=k' \operatorname{nd} u.$$

Отсюда

$$\operatorname{sn}(u+2K)=\frac{\operatorname{cn}(u+K)}{\operatorname{dn}(u+K)}=-\frac{k' \operatorname{sd} u}{k' \operatorname{nd} u}=-\operatorname{sn} u$$

и подобным же образом

$$\operatorname{cn}(u+2K)=-\operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn}(u+2K)=\operatorname{dn} u.$$

Окончательно получаем

$$\operatorname{sn}(u+4K)=-\operatorname{sn}(u+2K)=\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn}(u+4K)=\operatorname{cn} u.$$

Таким образом, $4K$ является периодом функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, в то время как $\operatorname{dn} u$ имеет меньший период $2K$.

Пример 1. Получить формулы

$$\operatorname{sn}(u+K)=\operatorname{cd} u, \quad \operatorname{cn}(u+K)=-k' \operatorname{sd} u, \quad \operatorname{dn}(u+K)=k' \operatorname{nd} u$$

непосредственно из определений функций $\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ как отношений тэта-функций.

Пример 2. Показать, что $\operatorname{cs} u \operatorname{cs}(K-u)=k'$.

22.32. Постоянная K'

Обозначим интеграл

$$\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1-k'^2 t^2\right)^{-\frac{1}{2}} dt$$

символом K', так что K' является той же самой функцией от $k'^2 (=c')$, что и K от $k^2 (=c)$, и следовательно,

$$K'=\frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k'^2\right),$$

когда плоскость c' разрезана от 1 до $+\infty$, т. е. когда плоскость c разрезана от 0 до $-\infty$.

Чтобы показать, что это определение K' эквивалентно определению § 21.61, заметим, что K при $\tau\tau' = -1$ будет в разрезанной плоскости *однозначной* функцией от k^2, определяемой уравнениями

$$K = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0\,|\,\tau), \quad k^2 = \vartheta_2^4(0\,|\,\tau) : \vartheta_3^4(0\,|\,\tau),$$

в то время как, согласно определению § 21.51,

$$K' = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0\,|\,\tau'), \quad k'^2 = \vartheta_2^4(0\,|\,\tau') : \vartheta_3^4(0\,|\,\tau'),$$

так что K' должно быть той же самой функцией от k'^2, как K от k^2, а это согласуется с интегральным определением K' как

$$\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k'^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Покажем теперь, что если плоскость c разрезана от 0 до $-\infty$ и от 1 до $+\infty$, то в разрезанной плоскости K' может быть определено равенством

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} (s^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2s^2)^{-\frac{1}{2}}\,ds.$$

Сначала предположим, что $0<k<1$, тогда и $0<k'<1$, и соответствующие интегралы будут вещественны.

В интеграле

$$\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1-k'^2t^2\right)^{-\frac{1}{2}}dt$$

сделаем подстановку

$$s = \left(1-k'^2t^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

которая дает

$$(s^2-1)^{\frac{1}{2}} = k't\left(1-k'^2t^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$(1-k^2s^2)^{\frac{1}{2}} = k'(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1-k'^2t^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{k'^2t}{(1-k'^2t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

причем предполагаем, что каждый корень положителен.

После подстановки непосредственно получим требуемый результат:

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} (s^2-1)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2s^2)^{-\frac{1}{2}} ds,$$

если $0 < k < 1$; теперь нужно обобщить этот результат на комплексные значения k.

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{k}} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

где путь интегрирования проходит над точкой 1 и не пересекает мнимой оси [1]). Этот путь может быть составлен из отрезков прямой, соединяющих точки 0, $1-\delta$ и точки $1+\delta$, k^{-1}, и из полуокружности (малого) радиуса δ над вещественной осью. Если $(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$ и $(1-k^2t^2)^{\frac{1}{2}}$ приводятся к $+1$ при $t=0$, то значение первого радикала в точке $1+\delta$ равно $e^{-\frac{1}{2}\pi i} \delta^{\frac{1}{2}} (2+\delta)^{\frac{1}{2}} = -i(t^2-1)^{\frac{1}{2}}$, где каждый радикал положителен; значение же последнего в точке $t=1$ равно $+k'$, когда k вещественно, а отсюда, по теории аналитического продолжения, оно всегда равно $+k'$.

Заставим $\delta \to 0$, тогда интеграл по полуокружности стремится к нулю, как $\delta^{\frac{1}{2}}$, и мы получим

$$\int_0^{\frac{1}{k}} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = K + i \int_1^{\frac{1}{k}} (t^2-1)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Но интеграл [2])

$$\int_0^{\frac{1}{k}} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 (k^2-u^2)^{-\frac{1}{2}} (1-u^2)^{-\frac{1}{2}} du$$

и величина K — аналитические функции во всей разрезанной плоскости.

Следовательно, и интеграл

$$\int_1^{\frac{1}{k}} (t^2-1)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$$

[1]) $\operatorname{Re} k > 0$, так как $|\arg c| < \pi$.

[2]) Путь интегрирования проходит над точкой $u = k$.

будет аналитической функцией на всей разрезанной плоскости, а так как он равен аналитической функции K' при $0 < k < 1$, то это равенство сохраняется на всей разрезанной плоскости; другими словами,

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} (t^2-1)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

во всей c-плоскости, разрезанной от 0 до $-\infty$ и от 1 до $+\infty$.

Так как

$$K + iK' = \int_0^{\frac{1}{k}} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt,$$

то мы имеем

$$\operatorname{sn}(K+iK') = \frac{1}{k}, \quad \operatorname{dn}(K+iK') = 0,$$

а значение $\operatorname{cn}(K+iK')$ есть значение радикала $(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$, когда t проходит по вышеуказанному пути в точку $\frac{1}{k}$, и, таким образом, его значение равно $\frac{-ik'}{k}$, *а не* $\frac{+ik'}{k}$.

Пример 1. Показать, что

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \{t(1-t)(1-k^2t)\}^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{k^2}}^{\infty} \{t(t-1)(k^2t-1)\}^{-\frac{1}{2}}\, dt = K,$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \{-t(1-t)(1-k^2t)\}^{-\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{k^2}} \{t(t-1)(1-k^2t)\}^{-\frac{1}{2}}\, dt = K'.$$

Пример 2. Показать, что K' удовлетворяет тому же самому линейному дифференциальному уравнению, что и K (§ 22.301, пример).

22.33. Свойства периодичности [1]) (связанные с $K+iK'$) эллиптических функций Якоби

Если воспользуемся тремя равенствами:

$$\operatorname{sn}(K+iK') = k^{-1}, \quad \operatorname{cn}(K+iK') = -ik'/k, \quad \operatorname{dn}(K+iK') = 0,$$

то получим непосредственно из теорем сложения для $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$

[1]) Двоякая периодичность функции $\operatorname{sn} u$ может быть выведена из динамических соображений. См. Э. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, М. — Л., 1937, § 44.

следующие формулы:

$$\operatorname{sn}(u+K+iK') =$$
$$= \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(K+iK') \operatorname{dn}(K+iK') + \operatorname{sn}(K+iK') \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(K+iK')} = k^{-1} \operatorname{dc} u$$

и подобным же образом

$$\operatorname{cn}(u+K+iK') = -ik'k^{-1} \operatorname{nc} u,$$
$$\operatorname{dn}(u+K+iK') = ik' \operatorname{sc} u.$$

Повторным применением этих формул получим, далее,

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sn}(u+2K+2iK') = -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+2K+2iK') = \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+2K+2iK') = -\operatorname{dn} u, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sn}(u+4K+4iK') = \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+4K+4iK') = \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+4K+4iK') = \operatorname{dn} u. \end{array}\right.$$

Следовательно, функции $\operatorname{sn} u$ *и* $\operatorname{dn} u$ *имеют период* $4K+4iK'$, *в то время как* $\operatorname{cn} u$ *имеет меньший период* $2K+2iK'$.

22.34. Свойства периодичности (связанные с iK') эллиптических функций Якоби

По теореме сложения имеем

$$\operatorname{sn}(u+iK') = \operatorname{sn}(u-K+K+iK') = k^{-1} \operatorname{dc}(u-K) = k^{-1} \operatorname{ns} u.$$

Подобным же образом получим равенства

$$\operatorname{cn}(u+iK') = -ik^{-1} \operatorname{ds} u, \quad \operatorname{dn}(u+iK') = -i \operatorname{cs} u.$$

Повторным применением этих формул найдем

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sn}(u+2iK') = \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+2iK') = -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+2iK') = -\operatorname{dn} u, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sn}(u+4iK') = \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+4iK') = \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+4iK') = \operatorname{dn} u. \end{array}\right.$$

Следовательно, функции $\operatorname{cn} u$ *и* $\operatorname{dn} u$ *имеют период* $4iK'$, *в то время как* $\operatorname{sn} u$ *имеет меньший период* $2iK'$.

Пример. Получить формулы

$$\operatorname{sn}(u+2mK+2niK') = (-1)^m \operatorname{sn} u,$$
$$\operatorname{cn}(u+2mK+2niK') = (-1)^{m+n} \operatorname{cn} u,$$
$$\operatorname{dn}(u+2mK+2niK') = (-1)^n \operatorname{dn} u.$$

22.341. Поведение эллиптических функций Якоби в окрестности начала координат и в окрестности iK'

Имеем

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d^3}{du^3}\operatorname{sn} u = 4k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u (\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{cn}^2 u).$$

Отсюда по теореме Маклорена, используя нечетность функции $\operatorname{sn} u$, имеем для малых значений $|u|$

$$\operatorname{sn} u = u - \frac{1}{6}(1+k^2)u^3 + O(u^5).$$

Подобным же образом

$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{1}{2}u^2 + O(u^4),$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - \frac{1}{2}k^2u^2 + O(u^4).$$

Отсюда найдем

$$\operatorname{sn}(u+iK') = k^{-1}\operatorname{ns} u = \frac{1}{ku}\left\{1 - \frac{1}{6}(1+k^2)u^2 + O(u^4)\right\}^{-1} = \\ = \frac{1}{ku} + \frac{1+k^2}{6k}u + O(u^3),$$

и подобным же образом

$$\operatorname{cn}(u+iK') = \frac{-i}{ku} + \frac{2k^2-1}{6k}iu + O(u^3),$$

$$\operatorname{dn}(u+iK') = -\frac{i}{u} + \frac{2-k^2}{6}iu + O(u^3).$$

Таким образом, в точке iK' функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ имеют простые полюсы с вычетами k^{-1}, $-ik^{-1}$, $-i$ соответственно.

Пример. Получить вычеты функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ при $u = iK'$ из теории тэта-функций.

22.35. Общее описание функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$

Предыдущие исследования функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ могут быть сведены к следующим заключениям.

(I) Функция $\operatorname{sn} u$ есть двоякопериодическая функция от u с периодами $4K$, $2iK'$. Она аналитическая всюду, за исключением точек, сравнимых с iK' и с $2K+iK' \pmod{4K, 2iK'}$; эти точки являются простыми полюсами; вычеты для первой совокупности полюсов равны k^{-1}, а вычеты для второй совокупности полюсов равны $-k^{-1}$;

кроме того, функция имеет простые нули во всех точках, сравнимых с $0 \pmod{2K,\ 2iK'}$.

Заметим, что $\operatorname{sn} u$ — единственная функция от u, имеющая эти свойства; ибо если бы имелась другая такая функция $\varphi(u)$, то $\operatorname{sn} u - \varphi(u)$ не имела бы особых точек и была бы двояко-периодической функцией; следовательно (§ 20.12), она приводилась бы к постоянной, а эта постоянная равнялась бы нулю, как это видно, если положить $u = 0$; таким образом, $\varphi(u) \equiv \operatorname{sn} u$.

Если $0 < k^2 < 1$, то очевидно, что K и K' вещественны; тогда $\operatorname{sn} u$ вещественна для вещественных значений u и чисто мнимая, когда u чисто мнимое.

(II) Функция $\operatorname{cn} u$ — двоякопериодическая функция от u с периодами $4K$ и $2K + 2iK'$. Она аналитическая всюду, за исключением точек, сравнимых с iK' и с $2K + iK' \pmod{4K,\ 2K + 2iK'}$; эти точки являются простыми полюсами; вычеты в первой совокупности полюсов равны $-ik^{-1}$, а вычеты во второй совокупности полюсов равны ik^{-1}; функция имеет простые нули во всех точках, сравнимых с $K \pmod{2K,\ 2iK'}$.

(III) Функция $\operatorname{dn} u$ — двоякопериодическая функция от u с периодами $2K$ и $4iK'$. Она аналитическая всюду, за исключением точек, сравнимых с iK' и с $3iK' \pmod{2K,\ 4iK'}$; эти точки суть простые полюсы; вычеты в первой совокупности полюсов равны $-i$, а вычеты во второй совокупности полюсов равны i; функция имеет простые нули во всех точках, сравнимых с $K + iK' \pmod{2K,\ 2iK'}$.

[Чтобы видеть, что функции не имеют других нулей или полюсов, кроме только что указанных, следует обратиться к их определению через тэта-функции.]

22.351. Связь между эллиптическими функциями Вейерштрасса и Якоби

Если e_1, e_2, e_3 — какие-нибудь три различных числа, сумма которых равна нулю, и если положим

$$y = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\lambda u, k)},$$

то имеем

$$\begin{aligned}\left(\frac{dy}{du}\right)^2 &= 4(e_1 - e_3)^2 \lambda^2 \operatorname{ns}^2 \lambda u \operatorname{cs}^2 \lambda u \operatorname{ds}^2 \lambda u = \\ &= 4(e_1 - e_3)^2 \lambda^2 \operatorname{ns}^2 \lambda u (\operatorname{ns}^2 \lambda u - 1)(\operatorname{ns}^2 \lambda u - k^2) = \\ &= 4\lambda^2 (e_1 - e_3)^{-1} (y - e_3)(y - e_1)\{y - k^2(e_1 - e_3) - e_3\}.\end{aligned}$$

Таким образом, если $\lambda^2 = e_1 - e_3$ и $k^2 = (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3)$, то y удовлетворяет уравнению [1])

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3,$$

[1]) Значения g_2 и g_3 будут, как обычно, равны $-\frac{1}{4}\sum e_2 e_3$ и $\frac{1}{4} e_1 e_2 e_3$.

и следовательно,

$$e_3+(e_1-e_3)\,\mathrm{ns}^2\left\{u(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}\right\}=\wp(u+\alpha;\ g_2,\ g_3),$$

где α — постоянная. Заставляя $u\to 0$, мы видим, что α будет периодом, и, таким образом, имеем

$$\wp(u;\ g_2,\ g_3)=e_3+(e_1-e_3)\,\mathrm{ns}^2\left\{u(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

причем эллиптическая функция Якоби имеет модуль, определяемый уравнением

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

22.4. Мнимое преобразование [1]) Якоби

Результат § 21.51, дающий преобразование тэта-функций с параметром τ в тэта-функции с параметром $\tau'=-\frac{1}{\tau}$, естественно, приводит к преобразованию эллиптических функций Якоби, это преобразование выражается уравнениями

$$\mathrm{sn}(iu,\ k)=i\,\mathrm{sc}(u,\ k'),\quad \mathrm{cn}(iu,\ k)=\mathrm{nc}(u,\ k'),\quad \mathrm{dn}(iu,\ k)=\mathrm{dc}(u,\ k').$$

Предположим для простоты, что $0<c<1$ и $y>0$; пусть

$$\int_0^{iy}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=iu,$$

так что

$$iy=\mathrm{sn}(iu,\ k);$$

возьмем прямолинейный путь интегрирования, имеем

$$\mathrm{cn}(iu,\ k)=(1+y^2)^{\frac{1}{2}},\quad \mathrm{dn}(iu,\ k)=(1+k^2y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим теперь $y=\eta/(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}$, где $0<\eta<1$, так что t изменяется от 0 до $i\eta/(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}$ по прямой, а отсюда, если $t=it_1/(1-t_1^2)^{\frac{1}{2}}$, то t_1 изменяется от 0 до η также по прямой.

[1]) Fundamenta Nova, 34, 35; Абель (Abel, Journ. für Math. (1827), 104) выводит двоякую периодичность эллиптических функций из этого результата. См. письмо Якоби от 12 января 1828 г. Лежандру (Jacobi, Ges. Werke, I (1881), 402).

Кроме того,

$$dt = i\left(1-t_1^2\right)^{-\frac{3}{2}} dt_1, \quad (1-t^2)^{\frac{1}{2}} = \left(1-t_1^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$1-k^2t^2 = \left(1-k'^2t_1^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-t_1^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

и мы получаем

$$iu = \int_0^{\eta} \left(1-t_1^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-k'^2t_1^2\right)^{-\frac{1}{2}} i\,dt_1;$$

следовательно,

$$\eta = \operatorname{sn}(u, k'),$$

и, значит,

$$y = \operatorname{sc}(u, k').$$

Таким образом, мы получили, что

$$\operatorname{sn}(iu, k) = i\operatorname{sc}(u, k').$$

Далее получим

$$\operatorname{cn}(iu, k) = (1+y^2)^{\frac{1}{2}} = (1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{nc}(u, k'),$$

$$\operatorname{dn}(iu, k) = (1-k^2y^2)^{\frac{1}{2}} = \left(1-k'^2\eta^2\right)^{\frac{1}{2}}(1-\eta^2)^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{dc}(u, k').$$

Но $\operatorname{sn}(iu, k)$ и $i\operatorname{sc}(u, k')$ — однозначные функции от u и k (в разрезанной плоскости c) с изолированными полюсами. Поэтому по теории аналитического продолжения формулы, доказанные для вещественных значений u и k, сохраняют силу для любых комплексных значений u и k.

22.41. Доказательство мнимого преобразования Якоби при помощи тэта-функций

Найденные результаты могут быть получены весьма просто при помощи тэта-функций. Например, по § 21.61

$$\operatorname{sn}(iu, k) = \frac{\vartheta_3(0\,|\,\tau)\,\vartheta_1(iz\,|\,\tau)}{\vartheta_2(0\,|\,\tau)\,\vartheta_4(iz\,|\,\tau)},$$

где

$$z = u/\vartheta_3^2(0\,|\,\tau);$$

следовательно (§ 21.51),

$$\operatorname{sn}(iu, k) = \frac{\vartheta_3(0\,|\,\tau')}{\vartheta_4(0\,|\,\tau')}\,\frac{-i\vartheta_1(iz\tau'\,|\,\tau')}{\vartheta_2(iz\tau'\,|\,\tau')} = -i\operatorname{sc}(v, k'),$$

где

$$v = iz\tau'\vartheta_3^2(0\,|\,\tau') = iz\tau'(-i\tau)\,\vartheta_3^2(0\,|\,\tau) = -u,$$

так что окончательно

$$\operatorname{sn}(iu, k) = i\operatorname{sc}(u, k').$$

Пример 1. Доказать, что

$$\mathrm{cn}\,(iu,\ k) = \mathrm{nc}\,(u,\ k'), \quad \mathrm{dn}\,(iu,\ k) = \mathrm{dc}\,(u,\ k'),$$

при помощи тэта-функций.

Пример 2. Показать, что

$$\mathrm{sn}\left(\frac{1}{2}\,iK',\ k\right) = i\,\mathrm{sc}\left(\frac{1}{2}\,K',\ k'\right) = ik^{-\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{cn}\left(\frac{1}{2}\,iK',\ k\right) = (1+k)^{\frac{1}{2}}\,k^{-\frac{1}{2}}, \quad \mathrm{dn}\left(\frac{1}{2}\,iK',\ k\right) = (1+k)^{\frac{1}{2}}.$$

[Если применить не преобразование Якоби, а какой-либо другой метод, то определение знаков $\mathrm{sn}\,\frac{1}{2}\,iK'$, $\mathrm{cn}\,\frac{1}{2}\,iK'$, $\mathrm{dn}\,\frac{1}{2}\,iK'$ представляет большие трудности.]

Пример 3. Показать, что

$$\mathrm{sn}\,\frac{1}{2}\,(K+iK') = \frac{(1+k)^{\frac{1}{2}} + i(1-k)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2k}}, \quad \mathrm{cn}\,\frac{1}{2}\,(K+iK') = \frac{(1-i)\sqrt{k'}}{\sqrt{2k}},$$

$$\mathrm{dn}\,\frac{1}{2}\,(K+iK') = \frac{k'^{\frac{1}{2}}\left\{(1+k')^{\frac{1}{2}} - i(1-k')^{\frac{1}{2}}\right\}}{\sqrt{2}}.$$

Пример 4. Пусть $0 < k < 1$ и θ — модулярный угол; показать, что

$$\mathrm{sn}\,\frac{1}{2}\,(K+iK') = e^{\frac{1}{4}\pi i - \frac{1}{2}i\theta}\sqrt{\mathrm{cosec}\,\theta},$$

$$\mathrm{cn}\,\frac{1}{2}\,(K+iK') = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{\mathrm{ctg}\,\theta},$$

$$\mathrm{dn}\,\frac{1}{2}\,(K+iK') = e^{-\frac{1}{2}i\theta}\sqrt{\cos\theta}.$$

(Glaisher)

22.42. Преобразование Ландена[1])

Докажем теперь формулу

$$\int\limits_0^{\varphi_1} \left(1 - k_1^2 \sin^2\theta_1\right)^{-\frac{1}{2}} d\theta_1 = (1+k')\int\limits_0^{\varphi} (1 - k^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta,$$

где

$$\sin\varphi_1 = (1+k')\sin\varphi\cos\varphi\,(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

и

$$k_1 = (1-k')/(1+k').$$

---

[1]) Landen, Phil. Trans. of the Royal Soc., LXV (1775), 285.

Эта формула, открытая Ланденом, может быть представлена при помощи эллиптических функций Якоби в виде

$$\operatorname{sn}\{(1+k')u,\ k_1\} = (1+k')\operatorname{sn}(u,\ k)\operatorname{cd}(u,\ k),$$

если положим

$$\varphi = \operatorname{am} u, \quad \varphi_1 = \operatorname{am} u_1.$$

Для доказательства этой формулы воспользуемся соотношениями § 21.52, а именно соотношениями

$$\frac{\vartheta_3(z\,|\,\tau)\,\vartheta_4(z\,|\,\tau)}{\vartheta_4(2z\,|\,2\tau)} = \frac{\vartheta_2(z\,|\,\tau)\,\vartheta_1(z\,|\,\tau)}{\vartheta_1(2z\,|\,2\tau)} = \frac{\vartheta_3(0\,|\,\tau)\,\vartheta_4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_4(0\,|\,2\tau)}.$$

Положим¹) $\tau_1 = 2\tau$, и пусть k_1, Λ, Λ' суть модуль и четверти периодов, соответствующие параметру τ_1; тогда равенство

$$\frac{\vartheta_1(z\,|\,\tau)\,\vartheta_2(z\,|\,\tau)}{\vartheta_3(z\,|\,\tau)\,\vartheta_4(z\,|\,\tau)} = \frac{\vartheta_1(2z\,|\,\tau_1)}{\vartheta_4(2z\,|\,\tau_1)}$$

может быть, очевидно, переписано в виде

$$k\operatorname{sn}(2Kz/\pi,\ k)\operatorname{cd}(2Kz/\pi,\ k) = k_1^{\frac{1}{2}}\operatorname{sn}(4\Lambda z/\pi,\ k_1). \tag{A}$$

Чтобы найти выражение k_1 через k, положим $z = \frac{1}{4}\pi$ и тогда тотчас получим

$$\frac{k}{1+k'} = k_1^{\frac{1}{2}},$$

что дает по возведении в квадрат $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$, как и утверждалось выше. Для определения Λ разделим равенство (A) на z и заставим затем $z \to 0$; тогда получим $2Kk = 4k_1^{\frac{1}{2}}\Lambda$, так что

$$\Lambda = \frac{1}{2}(1+k')K.$$

Отсюда, заменив в (A) $\frac{2Kz}{\pi}$ на u, получим

$$(1+k')\operatorname{sn}(u,\ k)\operatorname{cd}(u,\ k) = \operatorname{sn}\{(1+k')u,\ k_1\},$$

так как

$$4\Lambda z/\pi = 2\Lambda u/K = (1+k')u.$$

Итак, преобразование Ландена доказано.

¹) Для того чтобы избегнуть затруднений в определении знака, которые возникают, когда $\operatorname{Re}\tau_1$ не лежит между ± 1, предполагается, что $|\operatorname{Re}\tau| < 1/2$. Когда $0 < k < 1$, это условие удовлетворяется, ибо τ тогда чисто мнимое.

Пример 1. Показать, что $\frac{\Lambda'}{\Lambda}=\frac{2K'}{K}$, а отсюда, что $\Lambda'=(1+k')K'$.

Пример 2. Показать, что

$$\operatorname{cn}\{(1+k')u,\ k_1\}=\{1-(1+k')\operatorname{sn}^2(u,\ k)\}\operatorname{nd}(u,\ k),$$
$$\operatorname{dn}\{(1+k')u,\ k_1\}=\{k'+(1-k')\operatorname{cn}^2(u,\ k)\}\operatorname{nd}(u,\ k).$$

Пример 3. Показать, что

$$\operatorname{dn}(u,\ k)=(1-k')\operatorname{cn}\{(1+k')u,\ k_1\}+(1+k')\operatorname{dn}\{(1+k')u,\ k_1\},$$

где

$$k=2k_1^{\frac{1}{2}}\Big/(1+k_1).$$

22.421. Преобразование эллиптических функций

Формула Ландена есть частный случай так называемого преобразования эллиптических функций; преобразование состоит в выражении эллиптических функций с параметром τ через те же функции с параметром $\frac{a+b\tau}{c+d\tau}$, где a, b, c, d целые. Другим примером такого преобразования, уже нами рассмотренного, является преобразование, в котором $a=-1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$, т. е. мнимое преобразование Якоби. Для ознакомления с общей теорией преобразований, выходящей за рамки этой книги, читатель отсылается к книгам: Jacobi, Fundamenta Nova; Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen (изданной Фрике) и Cayley, Elliptic Functions (London, 1895).

Пример. Рассматривая преобразование $\tau_2=\tau\pm 1$, показать способом § 22.42, что

$$\operatorname{sn}(k'u,\ k_2)=k'\operatorname{sd}(u,\ k),$$

где $k_2=\pm\frac{ik}{k'}$, знак $\pm$ выбирается, смотря по тому, будет ли $\operatorname{Re}\tau<0$ или $\operatorname{Re}\tau>0$; далее, получить формулы для $\operatorname{cn}(k'u,\ k_2)$ и $\operatorname{dn}(k'u,\ k_2)$.

22.5. Бесконечные произведения для эллиптических функций Якоби[1])

Бесконечные произведения для тэта-функций, полученные в § 21.3, дают непосредственно бесконечные произведения для эллиптических функций Якоби; положив $u=2K\frac{x}{\pi}$, очевидно, получаем из формул (A), (B) и (C) § 22.11

$$\operatorname{sn}u=2q^{\frac{1}{4}}k^{-\frac{1}{2}}\sin x\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}\right\},$$

$$\operatorname{cn}u=2q^{\frac{1}{4}}k'^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}\cos x\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}\right\},$$

$$\operatorname{dn}u=k'^{\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}\right\}.$$

---

[1]) Fundamenta Nova, 84—115.

По этим произведениям могут быть составлены произведения для девяти обратных величин и отношений.

Имеются двадцать четыре другие формулы, которые могут быть получены следующим образом.

По формулам удвоения (§ 22.21, пример 5) имеем

$$\frac{1-\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}=\operatorname{sn}\frac{1}{2}u\operatorname{dc}\frac{1}{2}u,\qquad \frac{1+\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}=\operatorname{ds}\frac{1}{2}u\operatorname{nc}\frac{1}{2}u,$$

$$\frac{\operatorname{dn} u+\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}=\operatorname{cn}\frac{1}{2}u\operatorname{ds}\frac{1}{2}u.$$

Возьмем первую из них и воспользуемся произведениями для $\operatorname{sn}\frac{1}{2}u$, $\operatorname{cn}\frac{1}{2}u$, $\operatorname{dn}\frac{1}{2}u$; тогда получим

$$\frac{1-\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}=\frac{1-\cos x}{\cos x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-2(-q)^n\cos x+q^{2n}}{1+2(-q)^n\cos x+q^{2n}}\right\},$$

произведя почленное перемножение бесконечных произведений.

Заменим здесь u на $u+K$ и x на $x+\frac{1}{2}\pi$, получим

$$\frac{\operatorname{dn} u+k'\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}=\frac{1+\sin x}{\cos x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+2(-q)^n\sin x+q^{2n}}{1-2(-q)^n\sin x+q^{2n}}\right\}.$$

Заменяя u на $u+iK'$ в этих формулах, получим

$$k\operatorname{sn} u+i\operatorname{dn} u=i\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+2i(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}\sin x-q^{2n-1}}{1-2i(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}\sin x-q^{2n-1}}\right\}.$$

Отсюда получается выражение для $k\operatorname{cd} u+ik'\operatorname{nd} u$ путем замены $\sin x$ на $\cos x$ в этом произведении.

Из тождеств

$$(1-\operatorname{cn} u)(1+\operatorname{cn} u)\equiv\operatorname{sn}^2 u,\qquad (k\operatorname{sn} u+i\operatorname{dn} u)(k\operatorname{sn} u-i\operatorname{dn} u)\equiv 1$$

и т. д. мы получаем непосредственно четыре другие формулы, что в общем даст восемь формул; другие шестнадцать получаются таким же образом из выражений для $\operatorname{ds}\frac{1}{2}u\operatorname{nc}\frac{1}{2}u$ и $\operatorname{cn}\frac{1}{2}u\operatorname{ds}\frac{1}{2}u$.

Это предоставляется читателю в виде упражнения; отметим одну из них:

$$\operatorname{sn} u+i\operatorname{cn} u=ie^{-ix}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(1-q^{4n-3}e^{2ix})(1-q^{4n-1}e^{-2ix})}{(1-q^{4n-1}e^{2ix})(1-q^{4n-3}e^{-2ix})}\right\}.$$

Пример 1. Показать, что

$$\operatorname{dn}\frac{1}{2}(K+iK')=k'^{\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\left(1+iq^{2n-\frac{1}{2}}\right)\left(1-iq^{2n-\frac{3}{2}}\right)}{\left(1-iq^{2n-\frac{1}{2}}\right)\left(1+iq^{2n-\frac{3}{2}}\right)}\right\}=$$

$$=k'^{\frac{1}{2}}\prod_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n iq^{n+\frac{1}{2}}}{1+(-1)^n iq^{n+\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Пример 2. Показать, пользуясь примером 1 и примером 4 § 22.41, что если θ — модулярный угол, то

$$e^{-\frac{1}{2}i\theta}=\prod_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n iq^{n+\frac{1}{2}}}{1+(-1)^n iq^{n+\frac{1}{2}}}\right\},$$

а затем, взяв логарифмы, получить формулу Якоби:

$$\frac{1}{4}\theta=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arctg} q^{n+\frac{1}{2}}=\operatorname{arctg}\sqrt{q}-\operatorname{arctg}\sqrt{q^3}+\operatorname{arctg}\sqrt{q^5}-\ldots,$$

«quae inter formulas elegantissimas censeri debet»[1]) (Fundamenta Nova, 108).

Пример 3. Разложением каждого члена в равенстве

$$\lg\operatorname{sn}u=\lg\left(2q^{\frac{1}{4}}\right)-\frac{1}{2}\lg k+\lg\sin x+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{\lg(1-q^{2n}e^{2ix})+\lg(1-q^{2n}e^{-2ix})-\lg(1-q^{2n-1}e^{2ix})-\lg(1-q^{2n-1}e^{-2ix})\}$$

по степеням $e^{\pm 2ix}$ и перестановкой членов в полученном двойном ряде показать, что

$$\lg\operatorname{sn}u=\lg\left(2q^{\frac{1}{4}}\right)-\frac{1}{2}\lg k+\lg\sin x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2q^m\cos 2mx}{m(1+q^m)},$$

если $|\operatorname{Im} z|<\frac{1}{2}\pi\operatorname{Im}\tau$.

Получить подобные же ряды для $\lg\operatorname{cn}u$, $\lg\operatorname{dn}u$.

(Jacobi, Fundamenta Nova, 99)

---

[1]) «Которую следует считать одной из самых изящных».

Пример 4. Вывести из примера 3, что

$$\int_0^K \lg \operatorname{sn} u\, du = -\frac{1}{4}\pi K' - \frac{1}{2} K \lg k.$$

(Glaisher, Proc. Royal Soc., XXIX)

22.6. Ряды Фурье для эллиптических функций Якоби[1])

Если $u \equiv 2\dfrac{Kx}{\pi}$, то $\operatorname{sn} u$ будет нечетной функцией от x (с периодом 2π), которая, очевидно, удовлетворяет условиям Дирихле (§ 9.2, часть I) для вещественных значений x; поэтому (§ 9.22, часть I) можно разложить $\operatorname{sn} u$ в ряд Фурье по синусам дуг, кратных x; таким образом,

$$\operatorname{sn} u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

причем разложение справедливо для всех вещественных значений x. Легко видеть, что коэффициенты b_n даются формулой

$$\pi i b_n = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sn} u \exp(nix)\, dx.$$

Чтобы найти значение этого интеграла, рассмотрим интеграл $\int \operatorname{sn} u \exp(nix)\, dx$, взятый вдоль параллелограмма, вершины которого $-\pi$, π, $\pi\tau$, $-2\pi+\pi\tau$.

Из свойств периодичности функций $\operatorname{sn} u$ и $\exp(nix)$ мы видим, что интеграл $\int_{\pi}^{\pi\tau}$ погашает интеграл $\int_{-2\pi+\pi\tau}^{-\pi}$; следовательно, принимая во внимание, что $-\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$ и $\frac{1}{2}\pi\tau$ являются единственными полюсами подинтегральной функции (как функции от x) внутри контура с вычетами[2])

$$-k^{-1}\left(\frac{1}{2}\pi/K\right)\exp\left(-ni\pi+\frac{1}{2}n\pi i\tau\right)$$

и

$$k^{-1}\left(\frac{1}{2}\pi/K\right)\exp\left(\frac{1}{2}n\pi i\tau\right)$$

---

[1]) Эти результаты главным образом принадлежат Якоби (Jacobi, Fundamenta Nova, 101).

[2]) Множитель $\frac{1}{2}\pi/K$ следует добавить, так как мы имеем дело с функцией $\operatorname{sn}(2Kx/\pi)$.

соответственно, имеем

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} - \int_{-2\pi+\pi\tau}^{\pi} \right\} \operatorname{sn} u \exp(nix)\, dx = \frac{\pi^2 i}{Kk} q^{\frac{1}{2}n} \{1 - (-1)^n\}.$$

Заменив во втором интеграле x на $x - \pi + \pi\tau$, получим

$$\{1 + (-1)^n q^n\} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sn} u \exp(nix)\, dx = \frac{\pi^2 i}{Kk} q^{\frac{1}{2}n} \{1 - (-1)^n\}.$$

Отсюда при n четном $b_n = 0$; при n нечетном

$$b_n = \frac{2\pi}{Kk} \frac{q^{\frac{1}{2}n}}{1 - q^n}.$$

Итак, имеем

$$\operatorname{sn} u = \frac{2\pi}{Kk} \left\{ \frac{q^{\frac{1}{2}} \sin x}{1 - q} + \frac{q^{\frac{3}{2}} \sin 3x}{1 - q^3} + \frac{q^{\frac{5}{2}} \sin 5x}{1 - q^5} + \ldots \right\},$$

когда x вещественно; но правая часть этого равенства будет аналитической, если как $q^{\frac{1}{2}n} \exp(nix)$, так и $q^{\frac{1}{2}n} \exp(-nix)$ стремятся к нулю при $n \to \infty$, а левая часть будет аналитической, всюду кроме полюсов $\operatorname{sn} u$.

Отсюда следует, что обе части равенства будут аналитическими в полосе (в плоскости комплексной переменной x), определяемой неравенством $|\operatorname{Im} x| < \frac{1}{2} \pi \operatorname{Im} \tau$.

Следовательно, по теории аналитического продолжения получаем разложение

$$\operatorname{sn} u = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} \sin(2n+1)x}{1 - q^{2n+1}}$$

(где $u = 2Kx/\pi$), годное во всей полосе $|\operatorname{Im} x| < \frac{1}{2} \pi \operatorname{Im} \tau$.

Пример 1. Показать, что при $u = 2Kx/\pi$

$$\operatorname{cn} u = \frac{2\pi}{Kk} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+\frac{1}{2}} \cos(2n+1)x}{1 + q^{2n-1}}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \cos 2nx}{1 + q^{2n}},$$

$$\operatorname{am} u = \int_0^u \operatorname{dn} t\, dt = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q^n \sin 2nx}{n(1 + q^{2n})},$$

причем разложения имеют силу при $|\operatorname{Im} x| < \frac{1}{2} \pi \operatorname{Im} \tau$.

Пример 2. Заменяя в уже полученных результатах x на $x+\frac{1}{2}\pi$, показать, что если

$$u=2Kx/\pi \quad \text{и} \quad |\operatorname{Im} x| < \frac{1}{2}\pi \operatorname{Im}\tau,$$

то

$$\operatorname{cd} u = \frac{2\pi}{Kk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n+\frac{1}{2}}\cos(2n+1)x}{1-q^{2n+1}},$$

$$\operatorname{sd} u = \frac{2\pi}{Kkk'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n+\frac{1}{2}}\sin(2n+1)x}{1+q^{2n+1}},$$

$$\operatorname{nd} u = \frac{\pi}{2Kk'}+\frac{2\pi}{Kk'}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n\cos 2nx}{1+q^{2n}}.$$

22.61. Ряды Фурье для обратных величин эллиптических функций Якоби

В формуле, полученной в § 22.6, заменим u на $u+iK'$ и, следовательно, x на $x+\frac{1}{2}\pi\tau$; тогда при $0>\operatorname{Im} x>-\pi\operatorname{Im}\tau$

$$\operatorname{sn}(u+iK') = \frac{2\pi}{Kk}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+\frac{1}{2}}\sin(2n+1)\left(x+\frac{1}{2}\pi\tau\right)}{1-q^{2n+1}},$$

и таким образом (§ 22.34),

$$\operatorname{ns} u = -\frac{i\pi}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+\frac{1}{2}}\left\{q^{n+\frac{1}{2}}e^{(2n+1)ix}-q^{-n-\frac{1}{2}}e^{-(2n+1)ix}\right\}}{1-q^{2n+1}}=$$

$$=-\frac{i\pi}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{2iq^{2n+1}\sin(2n+1)x+(1-q^{-2n-1})e^{-(2n+1)ix}\}}{1-q^{2n+1}}=$$

$$=\frac{2\pi}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}\sin(2n+1)x}{1-q^{2n+1}}-\frac{i\pi}{K}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(2n+1)ix},$$

т. е.

$$\operatorname{ns} u = \frac{\pi}{2K}\operatorname{cosec} x+\frac{2\pi}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{2n+1}\sin(2n+1)x}{1-q^{2n+1}}.$$

Но, за исключением изолированных полюсов в точках $x=n\pi$, обе части этого равенства являются аналитическими функциями от x в полосе $\pi\operatorname{Im}\tau>\operatorname{Im} x>-\pi\operatorname{Im}\tau$, которая вдвое шире той полосы, где справедливость формулы была доказана; следовательно, по теории аналитического продолжения это разложение для $\mathrm{ns}\, u$ имеет силу во всей расширенной полосе, за исключением точек $x = n\pi$.

Пример. Получить следующие разложения, справедливые в полосе $|\mathrm{Im}\, x| < \pi \,\mathrm{Im}\, \tau$, за исключением полюсов первых членов в правых частях соответствующих разложений:

$$\mathrm{ds}\, u = \frac{\pi}{2K} \operatorname{cosec} x - \frac{2\pi}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1} \sin (2n+1) x}{1 + q^{2n+1}},$$

$$\mathrm{cs}\, u = \frac{\pi}{2K} \operatorname{ctg} x - \frac{2\pi}{K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n} \sin 2nx}{1 + q^{2n}},$$

$$\mathrm{dc}\, u = \frac{\pi}{2K} \sec x + \frac{2\pi}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n+1} \cos (2n+1) x}{1 - q^{2n+1}},$$

$$\mathrm{nc}\, u = \frac{\pi}{2Kk'} \sec x - \frac{2\pi}{Kk'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n+1} \cos (2n+1) x}{1 + q^{2n+1}},$$

$$\mathrm{sc}\, u = \frac{\pi}{2Kk'} \operatorname{tg} x + \frac{2\pi}{Kk'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n} \sin 2nx}{1 + q^{2n}}.$$

22.7. Эллиптические интегралы

Интеграл вида $\int R(w, x)\, dx$, где R обозначает рациональную функцию от w и x, а w^2 — полином четвертой или третьей степени от x (без кратных корней), называется *эллиптическим интегралом*[1].

[Примечание. Эллиптические интегралы имеют большое историческое значение вследствие того, что весьма большое число важных свойств таких интегралов было открыто Эйлером и Лежандром раньше, чем выяснилось, что следовало бы рассматривать как основные функции анализа скорее *обращения* некоторых канонических типов таких интегралов, чем сами эти интегралы.

Первым математиком, рассматривавшим эллиптические *функции* как обращения эллиптических *интегралов*, был Гаусс (§ 22.8), но первые результаты были опубликованы Абелем[2] и Якоби[3]. На результаты, полу-

---

[1]) Точнее говоря, такой интеграл называется эллиптическим интегралом лишь тогда, когда его невозможно выразить при помощи элементарных функций и требуется применение эллиптических интегралов трех родов, введенных в § 22.72.

[2]) Abel, Journ. für. Math., II (1827), 101—196.

[3]) Якоби изложил свое открытие в двух письмах (датированных 13 июня 1827 г. и 2 августа 1827 г.) к Шумахеру (Schumacher), который опубликовал выдержки из них в «Astr. Nach.» (VI, № 123) в сентябре 1827 г., т. е. в том же месяце, когда появился мемуар Абеля.

ченные Абелем, Якоби указал Лежандру немедленно после опубликования Лежандром «Traité des fonctions elliptiques». В добавлении (том III (1828), стр. 1) Лежандр говорит об их открытиях в следующих выражениях:

«A peine mon ouvrage avait-il vu le jour, a peine son titre pouvait-il être connu des savans étrangers, que j'appris, avec autant d'étonnement que de satisfaction, que deux jeunes géomètres, MM. Jacobi (C.—G.—J.) de Koenigsberg et Abel de Christiania, avaient réussi, par leurs travaux particuliers, à perfectionner considérablement la théorie des fonctions elliptiques dans ses points les plus élevés.» [1]).

Интересная переписка между Лежандром и Якоби была напечатана в «Journ. für Math», LXXX (1875), 205—279. В одном из своих писем Лежандр упоминает об утверждении Гаусса, что он получил многие из результатов, опубликованных Якоби и Абелем, уже в 1809 г. Основательность этого утверждения была установлена впоследствии Шерингом (Schering) (см. Gauss, Werke, III (1876), 493, 494), хотя исследования Гаусса (Werke, III, 404—460) оставались неопубликованными до его смерти.]

Дадим теперь краткое изложение важной теоремы, что каждый эллиптический интеграл можно выразить через тэта-функции в комбинации с элементарными функциями.

Мы уже видели (§ 20.6), что в частном случае интеграла $\int w^{-1}\,dx$ это можно выполнить, так как эллиптические функции Вейерштрасса могут быть легко выражены через тэта-функции и их производные (§ 21.73).

[Практически наиболее важен тот случай, когда R есть вещественная функция от x и w, которые в свою очередь вещественны на пути интегрирования; покажем теперь, что при этих условиях интеграл может быть выражен в вещественной форме.]

Так как $R(w, x)$ есть *рациональная функция* от w и x, то мы можем написать

$$R(w, x) \equiv P(w, x)/Q(w, x),$$

где P и Q — полиномы от w и x; тогда получим

$$R(w, x) \equiv \frac{wP(w, x)\,Q(-w, x)}{wQ(w, x)\,Q(-w, x)}.$$

Но $Q(w, x)\,Q(-w, x)$ — *рациональная функция* от w^2 и x, так как она не изменяется при перемене знака w, поэтому она может быть представлена как рациональная функция от x.

Если теперь выполним умножение в $wP(w, x)\,Q(-w, x)$ и подставим вместо w^2, где оно встречается, его выражение через x, то

[1]) «Едва моя работа вышла в свет, едва стало известным иностранным ученым ее название, как я узнал с таким же изумлением, как и удовлетворением, что двум молодым геометрам, Якоби в Кенигсберге и Абелю в Христиании, удалось независимо друг от друга внести значительные усовершенствования в теорию эллиптических функций, и притом в сложнейших ее вопросах».

мы в конце концов придем к полиному от x и w, *линейному относительно* w.

Таким образом, мы получим тождество вида

$$R(w, x) \equiv \{R_1(x) + wR_2(x)\}/w,$$

где R_1 и R_2 обозначают рациональные функции от x.

Интеграл $\int R_2(x)\,dx$ может быть вычислен при помощи только элементарных функций[1]); таким образом, задача свелась к вычислению интеграла $\int w^{-1}R_1(x)\,dx$. Для этого необходимо получить каноническое выражение для w^2, к чему мы теперь и перейдем.

22.71. Представление полинома четвертой степени в виде произведения двух сумм квадратов

Покажем теперь, что *любой полином четвертой* (*или третьей*[2])) *степени относительно* x (*с неравными корнями*) *может быть представлен в форме*

$$\{A_1(x-\alpha)^2 + B_1(x-\beta)^2\}\,\{A_2(x-\alpha)^2 + B_2(x-\beta)^2\},$$

где все числа A_1, B_1, A_2, B_2, α, β вещественны, если коэффициенты в данном полиноме вещественны.

Чтобы получить этот результат, заметим, что любой полином четвертой степени может быть представлен в виде S_1S_2, где S_1, S_2 — полиномы второй степени от x[3]):

$$S_1 \equiv a_1x^2 + 2b_1x + c_1, \quad S_2 \equiv a_2x^2 + 2b_2x + c_2.$$

Далее, если λ — постоянная, то $S_1 - \lambda S_2$ будет полным квадратом относительно x, когда

$$(a_1 - \lambda a_2)(c_1 - \lambda c_2) - (b_1 - \lambda b_2)^2 = 0.$$

Пусть λ_1 и λ_2 — корни этого уравнения; тогда, по предположению, существуют такие числа α и β, что

$$S_1 - \lambda_1 S_2 \equiv (a_1 - \lambda_1 a_2)(x-\alpha)^2, \quad S_1 - \lambda_2 S_2 \equiv (a_1 - \lambda_2 a_2)(x-\beta)^2;$$

---

[1]) Интегрирование *рациональных* функций одной переменной рассматривается в руководствах по интегральному исчислению.

[2]) В последующем анализе полином третьей степени можно рассматривать как полином четвертой степени, в котором коэффициент при x^4 равен нулю.

[3]) Если коэффициенты в полиноме четвертой степени вещественны, то разложение на множители можно выполнить таким образом, что коэффициенты в S_1 и S_2 будут вещественны. В частном случае, когда полином имеет четыре вещественных линейных множителя, эти множители должны быть соединены попарно (чтобы дать S_1 и S_2) таким образом, чтобы корни одной пары не перемежались с корнями другой пары; основание для этого увидим в примечании в конце параграфа.

решая эти уравнения относительно S_1, S_2, получим, очевидно, результаты вида

$$S_1 \equiv A_1(x-\alpha)^2 + B_1(x-\beta)^2, \qquad S_2 \equiv A_2(x-\alpha)^2 + B_2(x-\beta)^2;$$

этим требуемое приведение полинома четвертей степени выполнено.

[Примечание. Если полином четвертой степени веществен и имеет два или четыре комплексных корня, то пусть S_1 имеет комплексные корни; тогда λ_1 и λ_2 вещественны и различны, так как

$$(a_1-\lambda a_2)(c_1-\lambda c_2)-(b_1-\lambda b_2)^2$$

положительно при $\lambda=0$ и отрицательно[1]) при $\lambda = a_1/a_2$.

Если S_1 и S_2 имеют вещественные корни и их разложения суть

$$(x-\xi_1)(x-\xi_1'), \qquad (x-\xi_2)(x-\xi_2'),$$

то условие для того, чтобы λ_1 и λ_2 были вещественны, легко получить в виде

$$(\xi_1-\xi_2)(\xi_1'-\xi_2)(\xi_1-\xi_2')(\xi_1'-\xi_2')>0,$$

а это условие удовлетворяется, когда нули выражений S_1 и S_2 не перемежаются; это и было, конечно, причиной выбора множителей S_1 и S_2 данного полинома таким образом, чтобы их нули не перемежались.]

22.72. Три рода эллиптических интегралов

Пусть α, β определены по только что полученному в § 22.71 правилу; введем в интеграле $\int w^{-1} R_1(x)\,dx$ новую переменную t, определяемую равенством[2])

$$t=(x-\alpha)/(x-\beta);$$

тогда имеем

$$\frac{dx}{w} = \pm \frac{(\alpha-\beta)^{-1}\,dt}{\{(A_1t^2+B_1)\,(A_2t^2+B_2)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Если написать $R_1(x)$ в виде $\pm(\alpha-\beta)R_3(t)$, где R_3 рациональна, то получим

$$\int \frac{R_1(x)\,dx}{w} = \int \frac{R_3(t)\,dt}{\{(A_1t^2+B_1)(A_2t^2+B_2)\}^{\frac{1}{2}}}.$$

---

[1]) Кроме случая $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$; в этом случае

$$S_1 \equiv a_1(x-\alpha)^2 + B_1, \qquad S_2 \equiv a_2(x-\alpha)^2 + B_2.$$

[2]) Замечательно, что Якоби не обратил внимания на существование этой дробно-линейной подстановки; в своем приведении он применял квадратичную подстановку, эквивалентную применению преобразования Ландена к эллиптическим функциям, которое мы введем далее.

Теперь положим

$$R_3(t)+R_3(-t)=2R_4(t^2),\quad R_3(t)-R_3(-t)=2tR_5(t^2);$$

тогда R_4 и R_5 — рациональные функции от t^2 и, таким образом,

$$R_3(t)=R_4(t^2)+tR_5(t^2).$$

Но интеграл

$$\int \{(A_1t^2+B_1)(A_2t^2+B_2)\}^{-\frac{1}{2}}tR_5(t^2)\,dt$$

можно выразить через элементарные функции, приняв t^2 за новую переменную[1]); так что если разложим $R_4(t^2)$ на простейшие дроби, то задача интегрирования $\int R(w, x)\,dx$ приведется к вычислению интегралов следующих типов:

$$\int t^{2m}\{(A_1t^2+B_1)(A_2t^2+B_2)\}^{-\frac{1}{2}}dt,$$

$$\int (1+Nt^2)^{-m}\{(A_1t^2+B_1)(A_2t^2+B_2)\}^{-\frac{1}{2}}dt;$$

в первом из них m — целое число, во втором m — положительное целое число и $N\neq 0$. Дифференцированием выражений вида

$$t^{2m-1}\{(A_1t^2+B_1)(A_2t^2+B_2)\}^{\frac{1}{2}}$$

и

$$t(1+Nt^2)^{1-m}\{(A_1t^2+B_1)(A_2t^2+B_2)\}^{\frac{1}{2}}$$

легко получить формулы приведения, при помощи которых вышеприведенные интегралы могут быть выражены через один из трех канонических интегралов:

$$\text{(I)}\quad \int \{(A_1t^2+B_1)(A_2t^2+B_2)\}^{-\frac{1}{2}}dt,$$

$$\text{(II)}\quad \int t^2\{(A_1t^2+B_1)(A_2t^2+B_2)\}^{-\frac{1}{2}}dt,$$

$$\text{(III)}\quad \int (1+Nt^2)^{-1}\{(A_1t^2+B_1)(A_2t^2+B_2)\}^{-\frac{1}{2}}dt.$$

Эти интегралы были названы Лежандром[2]) соответственно *эллиптическими интегралами первого, второго и третьего рода.*

Эллиптический интеграл первого рода не создает никаких затруднений, так как он может быть проинтегрирован при помощи

[1]) См., например, Hardy, Integration of Functions of a single Variable (Camb. Math. Tracts, № 2). Есть русский перевод: Г. Гарди, Интегрирование элементарных функций, ОНТИ, М.-Л., 1935.

[2]) Legendre, Exercices de Calcul Intégral, I (Paris, 1811), 19.

подстановки, основанной на интегральных формулах §§ 22.121, 22.122; так, например, если все числа A_1, B_1, A_2, B_2 положительны и $A_2B_1 > A_1B_2$, то нужно положить

$$A_1^{\frac{1}{2}} t = B_1^{\frac{1}{2}} \operatorname{cs}(u, k). \qquad [k'^2 = (A_1B_2)/(A_2B_1).]$$

Пример 1. Убедиться, что в случае *вещественных* интегралов следующая схема дает все возможные существенно различные комбинации знаков, и определить подстановки, необходимые для вычисления соответствующих интегралов.

A_1	+	+	−	+	+	−
B_1	+	−	+	−	−	+
A_2	+	+	+	+	−	−
B_2	+	+	+	−	+	+

Пример 2. Показать, что

$$\int \operatorname{sn} u\, du = \frac{1}{2k} \lg \frac{1 - k \operatorname{cd} u}{1 + k \operatorname{cd} u}, \qquad \int \operatorname{cn} u\, du = k^{-1} \operatorname{arctg}(k \operatorname{sd} u),$$

$$\int \operatorname{dn} u\, du = \operatorname{am} u, \qquad \int \operatorname{sc} u\, du = \frac{1}{2k'} \lg \frac{\operatorname{dn} u + k'}{\operatorname{dn} u - k'},$$

$$\int \operatorname{ds} u\, du = \frac{1}{2} \lg \frac{1 - \operatorname{cn} u}{1 + \operatorname{cn} u}, \qquad \int \operatorname{dc} u\, du = \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \operatorname{sn} u}{1 - \operatorname{sn} u},$$

и получить шесть других подобных формул, заменив u на $u + K$.

(Glaisher)

Пример 3. Доказать дифференцированием эквивалентность следующих двенадцати выражений:

$$u - k^2 \int \operatorname{sn}^2 u\, du, \qquad k'^2 u + k^2 \int \operatorname{cn}^2 u\, du,$$

$$\int \operatorname{dn}^2 u\, du, \qquad u - \operatorname{dn} u \operatorname{cs} u - \int \operatorname{ns}^2 u\, du,$$

$$k'^2 u + \operatorname{dn} u \operatorname{sc} u - k'^2 \int \operatorname{nc}^2 u\, du, \qquad k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cd} u + k'^2 \int \operatorname{nd}^2 u\, du,$$

$$\operatorname{dn} u \operatorname{sc} u - k'^2 \int \operatorname{sc}^2 u\, du, \qquad k'^2 u + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cd} u + k^2 k'^2 \int \operatorname{sd}^2 u\, du,$$

$$u + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cd} u - k^2 \int \operatorname{cd}^2 u\, du, \qquad -\operatorname{dn} u \operatorname{cs} u - \int \operatorname{cs}^2 u\, du,$$

$$k'^2 u - \operatorname{dn} u \operatorname{cs} u - \int \operatorname{ds}^2 u\, du, \qquad u + \operatorname{dn} u \operatorname{sc} u - \int \operatorname{dc}^2 u\, du.$$

Пример 4. Показать, что

$$\frac{d^2 \operatorname{sn}^n u}{du^2} = n(n-1)\operatorname{sn}^{n-2} u - n^2(1+k^2)\operatorname{sn}^n u + n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^{n+2} u,$$

и получить одиннадцать других подобных формул для вторых производных от $\operatorname{cn}^n u$, $\operatorname{dn}^n u$, ..., $\operatorname{nd}^n u$. Какая связь имеется между этими формулами и формулой приведения для

$$\int t^n \{(A_1t^2+B_1)(A_2t^2+B_2)\}^{-\frac{1}{2}} dt?$$

(Jacobi; Glaisher, Messenger, XI)

Пример 5. При помощи § 20.6 показать, что если α и β положительны, то

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \{(\alpha^2-x^2)(x^2+\beta^2)\}^{-\frac{1}{2}} dx = \int_{e_1}^{\infty} (4s^3 - g_2 s - g_3)^{-\frac{1}{2}} ds,$$

где e_1 — вещественный корень кубического полинома,

$$g_2 = \frac{1}{12}(\alpha^2-\beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2, \qquad g_3 = -(\alpha^2-\beta^2)\{(\alpha^2-\beta^2)^2 + 36\alpha^2\beta^2\}/216;$$

доказать также, что если $g_2 = 0$, то α и β даются уравнениями

$$\alpha^2 - \beta^2 = -3(2g_3)^{\frac{1}{3}}, \qquad \alpha^2+\beta^2 = 2\sqrt{3}\,|2g_3|^{\frac{1}{3}}.$$

Пример 6. Вывести из примера 5 и из интегральной формулы для $\operatorname{cn} u$, что при g_3 положительном

$$\int_{e_1}^{\infty} (4s^3 - g_3)^{-\frac{1}{2}} ds = 2(\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}} K,$$

$$\int_{-e_1}^{\infty} (4s^3 + g_3)^{-\frac{1}{2}} ds = 2(\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}} K',$$

где

$$\alpha^2 = \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)(2g_3)^{\frac{1}{3}}, \quad \beta^2 = \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)(2g_3)^{\frac{1}{3}},$$

а модуль равен

$$\alpha(\alpha^2+\beta^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

22.73. Эллиптический интеграл второго рода. Функция $E(u)$[1])

Для приведения интеграла типа

$$\int t^2 \{(A_1t^2+B_1)(A_2t^2+B_2)\}^{-\frac{1}{2}} dt$$

---

[1]) Это обозначение было введено Якоби (Jacobi, Journ. für Math., IV (1829), 373; Ges. Werke, I (1881), 299). В «Fundamenta Nova» он писал $E(\operatorname{am} u)$ там, где мы пишем $E(u)$.

применим ту же подстановку через эллиптические функции, что и в случае эллиптического интеграла первого рода с тем же подкоренным выражением. Таким образом мы придем к одному из двенадцати интегралов

$$\int \operatorname{sn}^2 u\,du, \quad \int \operatorname{cn}^2 u\,du, \ldots, \quad \int \operatorname{nd}^2 u\,du.$$

Согласно примеру 3 § 22.72 таковые могут быть выражены через u, эллиптические функции от u и $\int \operatorname{dn}^2 u\,du$; удобно рассматривать

$$E(u) \equiv \int_0^u \operatorname{dn}^2 u\,du$$

как основной эллиптический интеграл второго рода, через который могут быть выражены все остальные; когда требуется особо выделить модуль, мы пишем $E(u, k)$ вместо $E(u)$.

Заметим, что

$$\frac{dE(u)}{du} = \operatorname{dn}^2 u, \quad E(0) = 0.$$

Далее, так как $\operatorname{dn}^2 u$ — четная функция с двойными полюсами в точках $2mK + (2n+1)iK'$ и с вычетами в этих точках, равными нулю, то легко видеть, что $E(u)$ будет нечетной однозначной[1]) функцией от u с простыми полюсами в полюсах функции $\operatorname{dn} u$.

Покажем теперь, что $E(u)$ можно выразить через тэта-функции; наиболее подходящим типом тэта-функции будет здесь функция $\Theta(u)$. Рассмотрим

$$\frac{d}{du}\left\{\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right\};$$

это выражение является двоякопериодической функцией от u с двойными полюсами в нулях функции $\Theta(u)$, т. е. в полюсах функции $\operatorname{dn} u$; таким образом, если A — надлежаще выбранная постоянная, то

$$\operatorname{dn}^2 u - A\frac{d}{du}\left\{\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right\}$$

— двоякопериодическая функция от u с периодами $2K$, $2iK'$ и с одним только простым полюсом в каждой ячейке. Поэтому она будет постоянной; эта постоянная обычно пишется в виде E/K. Для определения постоянной A заметим, что главная часть функции $\operatorname{dn}^2 u$ в точке iK' будет согласно § 22.341 равна $-(u - iK')^{-2}$; вычет же отношения $\Theta'(u)/\Theta(u)$ в этом полюсе равен единице; следова-

---

[1]) Так как вычеты функции $\operatorname{dn}^2 u$ равны нулю, то интеграл, определяющий $E(u)$, не зависит от взятого пути (§ 6.1, часть I).

тельно, главная часть функции $\frac{d}{du}\left\{\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right\}$ также будет $-(u-iK)^{-2}$. Отсюда $A=1$, так что

$$\mathrm{dn}^2 u = \frac{d}{du}\left\{\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right\} + \frac{E}{K}.$$

Интегрируя и замечая, что $\Theta'(0)=0$, получим

$$E(u) = \Theta'(u)/\Theta(u) + uE/K.$$

Так как $\Theta'(K)=0$, то имеем $E(K)=E$; отсюда

$$E = \int_0^K \mathrm{dn}^2 u\, du = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\, d\varphi = \frac{1}{2}\pi F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right).$$

Принято (§ 22.3) называть K и E *полными* эллиптическими интегралами первого и второго рода. Таблицы для них, как для функций модулярного угла, даны Лежандром (Legendre, Fonctions Elliptiques, II).

Пример 1. Показать, что

$$E(u+2nK) = E(u) + 2nE,$$

если n — целое число.

Пример 2. С помощью выражения для $\Theta(u)$ через функцию $\vartheta_4\left(\frac{1}{2}\pi u/K\right)$ и ее разложения около точки $u=iK'$ показать, что

$$E = \frac{1}{3}\left\{2-k^2-\vartheta_1'''/(\vartheta_3^4\vartheta_1')\right\}K.$$

22.731. Дзета-функция $Z(u)$

Функция $E(u)$ не имеет периодами ни $2K$, ни $2iK'$, но при изменении аргумента на эти величины она изменяется на постоянные слагаемые

$$2E,\ \frac{\{2iK'E-\pi i\}}{K};$$

удобно иметь функцию того же общего типа, что и $E(u)$, но просто периодическую; такой функцией является

$$Z(u) \equiv \Theta'(u)/\Theta(u);$$

согласно этому определению имеем[1])

$$Z(u) = E(u) - uE/K, \qquad \Theta(u) = \Theta(0)\exp\left\{\int_0^u Z(t)\,dt\right\}.$$

22.732. Формулы сложения для $E(u)$ и $Z(u)$

Рассмотрим выражение

$$\frac{\Theta'(u+v)}{\Theta(u+v)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(v)} - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v)$$

как функцию от u. Эта функция двоякопериодическая[2]) (с периодами $2K$ и $2iK'$) с простыми полюсами, сравнимыми с iK' и $iK'-v$; вычет первых двух членов в iK' равен -1; вычет же выражения $\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v)$ равен $k^{-1}\operatorname{sn} v \operatorname{sn}(iK'+v) = k^{-2}$.

Следовательно, эта функция двоякопериодическая и не имеет полюсов в точках, сравнимых с iK', и (подобным же образом) в точках, сравнимых с $iK'-v$. По теореме Лиувилля она равна постоянной, а положив $u=0$, видим, что эта постоянная равна нулю. Отсюда получаем формулы сложения

$$Z(u) + Z(v) - Z(u+v) = k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v),$$
$$E(u) + E(v) - E(u+v) = k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v).$$

[Примечание. Так как $Z(u)$ и $E(u)$ не являются двоякопериодическими функциями, то можно доказать, что не существует *алгебраического* соотношения, связывающего их с $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$, так что полученные формулы не являются *теоремами сложения* в точном смысле[3]).]

---

[1]) Интеграл в выражении для $\Theta(u)$ не будет однозначным, так как $Z(t)$ имеет вычет 1 в своих полюсах; но разность интегралов, взятых по любым двум путям с общими концами, равна $2n\pi i$, где n — число охваченных этими путями полюсов; показательная функция от интеграла будет поэтому однозначной, как и должно быть, так как $\Theta(u)$ — однозначная функция.

[2]) $2iK'$ есть период, так как аддитивные постоянные для первых двух членов взаимно уничтожаются.

[3]) Теорема, принадлежащая Вейерштрассу, утверждает, что аналитическая функция $f(z)$, обладающая теоремой сложения в точном смысле слова, должна быть или

(I) алгебраической функцией от z,

или

(II) алгебраической функцией от $\exp(\pi i z/\omega)$,

или

(III) алгебраической функцией от $\wp(z \mid \omega_1, \omega_2)$,

где ω, ω_1, ω_2 — надлежаще выбранные постоянные. См. Forsyth, Theory of Functions (1918), Chap. XIII.

22.733. Мнимое преобразование Якоби[1]) для функции $Z(u)$

Из § 21.51 ясно, что должно существовать преобразование типа Якоби для функции $Z(u)$. Для получения его переведем формулу

$$\vartheta_2(ix \mid \tau) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \exp(-i\tau' x^2/\pi)\, \vartheta_4(ix\tau' \mid \tau'),$$

в ранние обозначения Якоби; тогда она примет вид

$$\mathrm{H}(iu + K,\ k) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi u^2}{4KK'}\right) \Theta(u,\ k'),$$

откуда

$$\mathrm{cn}(iu,\ k) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\pi u^2}{4KK'}\right) \frac{\vartheta_4(0 \mid \tau)}{\vartheta_2(0 \mid \tau)} \frac{\Theta(u,\ k')}{\Theta(iu,\ k)}.$$

Взяв логарифмическую производную от обеих частей, получим с помощью § 22.4

$$Z(iu,\ k) = i\,\mathrm{dn}(u,\ k')\,\mathrm{sc}(u,\ k') - iZ(u,\ k') - \pi i u/(2KK').$$

22.734. Мнимое преобразование Якоби для функции $E(u)$

Удобно получить преобразование функции $E(u)$ непосредственно из интегрального определения; имеем

$$E(iu,\ k) = \int_0^{iu} \mathrm{dn}^2(t,\ k)\,dt = \int_0^{u} \mathrm{dn}^2(it',\ k)\,i\,dt' = i\int_0^{u} \mathrm{dc}^2(t',\ k')\,dt',$$

если положим $t = it'$ и воспользуемся § 22.4.

Отсюда согласно примеру 3 § 22.72 имеем

$$E(iu,\ k) = i\left\{u + \mathrm{dn}(u,\ k')\,\mathrm{sc}(u,\ k') - \int_0^{u} \mathrm{dn}^2(t',\ k')\,dt'\right\}$$

и, таким образом,

$$E(iu,\ k) = iu + i\,\mathrm{dn}(u,\ k')\,\mathrm{sc}(u,\ k') - iE(u,\ k').$$

Это и есть искомое преобразование.

Удобно обозначить через E' ту же функцию от k', какой является E от k, так что $E' = E(K',\ k')$; тогда

$$E(2iK',\ k') = 2i(K' - E').$$

---

[1]) Fundamenta Nova, 161.

22.735. Соотношение[1]) Лежандра

Из только что полученных преобразований для функций $E(u)$ и $Z(u)$ можно вывести замечательное соотношение, связывающее полные эллиптические интегралы обоих родов, а именно соотношение

$$EK' + E'K - KK' = \frac{1}{2}\pi.$$

Действительно, согласно преобразованиям § 22.733, 22.734 имеем

$$E(iu, k) - Z(iu, k) = iu - i\{E(u, k') - Z(u, k')\} + \pi iu/(2KK')$$

и, воспользовавшись связью между функциями $E(u, k)$ и $Z(u, k)$, получим

$$iuE/K = iu - i\{uE'/K'\} + \pi iu/(2KK').$$

Так как мы можем взять $u \neq 0$, то требуемый результат получается непосредственно из этого равенства; он аналогичен соотношению $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{1}{2}\pi i$, которое встречается в теории Вейерштрасса (§ 20.411).

Пример 1. Показать, что

$$E(u+K) - E(u) = E - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cd} u.$$

Пример 2. Показать, что

$$E(2u + 2iK') = E(2u) + 2i(K' - E').$$

Пример 3. Вывести из примера 2, что

$$E(u + iK') = \frac{1}{2}E(2u + 2iK') + \frac{1}{2}k^2 \operatorname{sn}^2(u + iK') \operatorname{sn}(2u + 2iK') =$$
$$= E(u) + \operatorname{cn} u \operatorname{ds} u + i(K' - E').$$

Пример 4. Показать, что

$$E(u + K + iK') = E(u) - \operatorname{sn} u \operatorname{dc} u + E + i(K' - E').$$

Пример 5. Получить следующие разложения:

$$(kK)^2 \operatorname{sn}^2 u = K^2 - KE - 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n \cos 2nx}{1 - q^{2n}},$$

$$KZ(u) = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \sin 2nx}{1 - q^{2n}},$$

справедливые при

$$|\operatorname{Im} x| < \frac{1}{2}\pi \operatorname{Im} \tau.$$

(Jacobi)

---

[1]) Legendre, Exercices de Calcul Intégral, I (1811), 61. Геометрическое доказательство см. у Глешера (Glaisher, Messenger, IV (1874), 95—96).

22.736. Свойства полных эллиптических интегралов, рассматриваемых как функции модуля

Если формулу

$$E=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi$$

продифференцировать по k под знаком интеграла (§ 4.2, часть I), то получим

$$\frac{dE}{dk}=-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}k\sin^2\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi=\frac{E-K}{k}.$$

Поступая таким же образом с формулой для K, получим

$$\frac{dK}{dk}=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}k\sin^2\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}d\varphi=k\int_0^K \operatorname{sd}^2 u\,du=$$

$$=\frac{1}{kk'^2}\left\{\int_0^K \operatorname{dn}^2 u\,du-\left[k'^2u\right]_0^K\right\}$$

согласно примеру 3 § 22.72, так что

$$\frac{dK}{dk}=\frac{E}{kk'^2}-\frac{K}{k}.$$

Если положить $k^2=c$, $k'^2=c'$, то полученные формулы принимают вид

$$2\frac{dE}{dc}=\frac{E-K}{c},\quad 2\frac{dK}{dc}=\frac{E-Kc'}{cc'}.$$

Пример 1. Показать, что

$$2\frac{dE'}{dc}=\frac{K'-E'}{c'},\quad 2\frac{dK'}{dc}=\frac{cK'-E'}{cc'}.$$

Пример 2. Показать дифференцированием по c, что $EK'+E'K-KK'$ постоянно.

Пример 3. Показать, что K и K' суть решения уравнения

$$\frac{d}{dk}\left\{kk'^2\frac{du}{dk}\right\}=ku$$

и что E и $E'-K'$ суть решения уравнения

$$k'^2\frac{d}{dk}\left(k\frac{du}{dk}\right)+ku=0.$$

(Legendre)

22.737. Значения полных интегралов для малых значений k

Из интегральных определений функций E и K легко видеть, разлагая по степеням k, что

$$\lim_{k\to 0} K = \lim_{k\to 0} E = \frac{1}{2}\pi, \quad \lim_{k\to 0}(K-E)/k^2 = \frac{1}{4}\pi.$$

Подобным же образом

$$\lim_{k\to 0} E' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 1.$$

Найти подобным образом $\lim\limits_{k\to 0} K'$ нельзя, вследствие того что $(1-k'^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ претерпевает разрыв при $\varphi=0$, $k=0$; но из примера 21 главы 14 (стр. 105) следует, что при $|\arg k|<\pi$

$$\lim_{k\to 0}\{K' - \lg(4/k)\} = 0.$$

Этот результат можно также вывести и из формул

$$2iK' = \pi\tau\vartheta_3^2, \quad k = \vartheta_2^2/\vartheta_3^2,$$

заставляя $q\to 0$; он может быть, кроме того, доказан для вещественных значений k следующим элементарным путем.

В силу § 22.32 имеем

$$K' = \int_k^1 (t^2-k^2)^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Но если $k<t<\sqrt{k}$, то $1-t^2$ лежит между 1 и $1-k$, а если $\sqrt{k}<t<1$, то $(t^2-k^2)/t^2$ лежит между 1 и $1-k$.

Поэтому K' лежит между

$$\int_k^{\sqrt{k}} (t^2-k^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt + \int_{\sqrt{k}}^1 t^{-1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

и

$$(1-k)^{-\frac{1}{2}}\left\{\int_k^{\sqrt{k}} (t^2-k^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt + \int_{\sqrt{k}}^1 t^{-1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt\right\},$$

и следовательно,

$$K' = (1-\theta k)^{-\frac{1}{2}}\left\{\lg\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k-k^2}}{k} - \lg\frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{1-k}}\right\} =$$
$$= (1-\theta k)^{-\frac{1}{2}}\left[2\lg\{1+\sqrt{1-k}\} - \lg k\right],$$

где $0\leqslant\theta\leqslant 1$.

Но

$$\lim_{k\to 0}\left[2(1-\theta k)^{-\frac{1}{2}}\lg\{1+\sqrt{1-k}\}-\lg 4\right]=0,$$

$$\lim_{k\to 0}\left\{1-(1-\theta k)^{-\frac{1}{2}}\right\}\lg k=0,$$

и следовательно,

$$\lim_{k\to 0}\{K'-\lg(4/k)\}=0,$$

что и представляет собой требуемый результат.

Пример. Вывести соотношение Лежандра из примера 2 § 22.736, заставляя $k\to 0$.

22.74. Эллиптический интеграл третьего рода[1])

Чтобы выразить интеграл типа

$$\int(1+Nt^2)^{-1}\{(A_1t^2+B_1)(A_2t^2+B_2)\}^{-\frac{1}{2}}dt$$

через известные функции, сделаем подстановку, которую мы делали в соответствующих интегралах первого и второго рода (§§ 22.72, 22.73). Тогда интеграл приводится к виду

$$\int\frac{\alpha+\beta\,\mathrm{sn}^2 u}{1+\nu\,\mathrm{sin}^2 u}\,du=\alpha u+(\beta-\alpha\nu)\int\frac{\mathrm{sn}^2 u}{1+\nu\,\mathrm{sn}^2 u}\,du,$$

где α, β, ν — постоянные; если $\nu=0$, -1, ∞ или $-k^2$, то интеграл может быть выражен через интегралы первого и второго рода; для других значений ν мы определяем *параметр* a при помощи уравнения $\nu=-k^2\,\mathrm{sn}^2 a$, и тогда, очевидно, можно принять за основной интеграл третьего рода интеграл

$$\Pi(u,\ a)=\int\limits_0^u\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 u}\,du.$$

Чтобы выразить его через тэта-функции, заметим, что подинтегральную функцию при помощи теоремы сложения для дзета-функции можно записать в виде

$$\frac{1}{2}k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,a\,\{\mathrm{sn}(u+a)+\mathrm{sn}(u-a)\}=$$
$$=\frac{1}{2}\{\mathrm{Z}(u-a)-\mathrm{Z}(u+a)+2\mathrm{Z}(a)\};$$

---

[1]) Legendre, Exercices de Calcul Intégral, I (1811), 17; Fonctions Elliptiques, I (1825), 14—18, 74, 75; Jacobi, Fundamenta Nova (1829), 137—172; мы применяем обозначения Якоби, а не Лежандра.

пользуясь формулой $Z(u) = \Theta'(u)/\Theta(u)$, получим непосредственно

$$\Pi(u,\ a) = \frac{1}{2}\lg\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} + uZ(a),$$

результат, показывающий, что $\Pi(u,\ a)$ является многозначной функцией от u с логарифмическими особенностями в нулях функций $\Theta(u \pm a)$.

Пример 1. Получить формулу сложения [1])

$$\Pi(u,\ a) + \Pi(v,\ a) - \Pi(u+v,\ a) = \frac{1}{2}\lg\frac{\Theta(u+v+a)\,\Theta(u-a)\,\Theta(v-a)}{\Theta(u+v-a)\,\Theta(u+a)\,\Theta(v+a)} =$$

$$= \frac{1}{2}\lg\frac{1-k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v-a)}{1+k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v+a)}.$$

(Legendre)

[Взять

$$x\colon y\colon z\colon w = u\colon v\colon \pm a\colon u+v\pm a$$

в основной формуле Якоби

$$[4]+[1]=[4]'+[1]'.]$$

Пример 2. Показать, что

$$\Pi(u,\ a) - \Pi(a,\ u) = uZ(a) - aZ(u).$$

(Legendre и Jacobi)

[Это так называемая формула перестановки аргумента и параметра.]

Пример 3. Показать, что

$$\Pi(u,\ a) + \Pi(u,\ b) - \Pi(u,\ a+b) =$$

$$= \frac{1}{2}\lg\frac{1-k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a+b-u)}{1+k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a+b+u)} + uk^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b).$$

(Jacobi)

[Это так называемая формула сложения параметров.]

Пример 4. Показать, что

$$\Pi(iu,\ ia+K,\ k) = \Pi(u,\ a+K',\ k').$$

(Jacobi)

Пример 5. Показать, что

$$\Pi(u+v,\ a+b) + \Pi(u-v,\ a-b) - 2\Pi(u, a) - 2\Pi(v,\ b) =$$

$$= -k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b\,\{(u+v)\operatorname{sn}(a+b) - (u-v)\operatorname{sn}(a-b)\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\lg\frac{1-k^2 \operatorname{sn}^2(u-a)\operatorname{sn}^2(v-b)}{1+k^2 \operatorname{sn}^2(u+a)\operatorname{sn}^2(v+b)},$$

и получить частные виды этой формулы, положив v или b равными нулю.

(Jacobi)

[1]) Для выражения справа было получено не менее 96 различных форм. См. Glaischer, Messenger, X (1881), 124.

22.741. Динамическое приложение эллиптического интеграла третьего рода

Из выражения для $\Pi(u, a)$ через тэта-функции ясно, что если u, a, k вещественны, то *средняя* скорость роста функции $\Pi(u, a)$ при возрастании u на $2K$ есть $Z(a)$, так как $\Theta(u \pm a)$ есть периодическая функция с вещественным периодом $2K$.

Этот результат определяет среднюю прецессию по отношению к неизменяемой оси при движении твердого тела относительно его центра тяжести под действием сил, равнодействующая которых проходит через его центр тяжести.

Очевидно, что для целей вычисления результат этого рода предпочтительнее соответственного результата, выраженного через сигма-функции и дзета-функции Вейерштрасса, вследствие того, что тэта-функции имеют особенно простое поведение относительно своего вещественного периода, т. е. периода, имеющего значение в прикладной математике, и что ряды по степеням q значительно лучше приспособлены для вычисления, чем произведение, при помощи которого сигма-функция определяется наиболее просто.

22.8. Лемнискатные функции

Интеграл $\int\limits_0^x (1-t^4)^{-\frac{1}{2}}\,dt$ встречается в задаче спрямления дуги лемнискаты[1]); если обозначить этот интеграл через φ, то зависимость φ от x выражают так[2]):

$$x = \operatorname{sin\,lemn} \varphi.$$

Подобным же образом, если

$$\varphi_1 = \int\limits_x^1 (1-t^4)^{-\frac{1}{2}}\,dt, \quad \frac{1}{2}\tilde{\omega} = \int\limits_0^1 (1-t^4)^{-\frac{1}{2}}\,dt,$$

то пишут

$$x = \operatorname{cos\,lemn} \varphi_1,$$

и мы имеем соотношение

$$\operatorname{sin\,lemn} \varphi = \operatorname{cos\,lemn}\left(\frac{1}{2}\tilde{\omega} - \varphi\right).$$

Эти *лемнискатные функции*, которые были первыми функциями[3]), определенными посредством обращения интеграла, легко выразить через эллиптические функции с модулем $\frac{1}{\sqrt{2}}$; ибо из фор-

---

[1]) Уравнение лемнискаты: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$; уравнение $\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = \frac{a^4}{a^4 - r^4}$ легко вывести из формулы $\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + \left(\frac{r\,d\theta}{dr}\right)^2$.

[2]) Гаусс писал sl и cl вместо sin lemn и cos lemn (Werke, III (1876), 493).

[3]) G a u s s, Werke, III (1876), стр. 404. Идея исследовать эти функции пришла Гауссу 8 января 1797 г.

мулы (§ 22.122, пример)

$$u = \int_0^{\operatorname{sd} u} \{(1 - k'^2 y^2)(1 + k^2 y^2)\}^{-\frac{1}{2}} dy$$

легко видеть $\left(\text{положив } y = t\sqrt{2}\right)$, что

$$\sin \operatorname{lemn} \varphi = 2^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sd}\left(\varphi\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

подобным же образом

$$\cos \operatorname{lemn} \varphi = \operatorname{cn}\left(\varphi\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Далее, $\frac{1}{2}\tilde{\omega}$ есть наименьшее положительное значение φ, для которого $\operatorname{cn}\left(\varphi\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$, так что $\tilde{\omega} = \sqrt{2}K_0$; индекс у полного эллиптического интеграла поставлен, чтобы отметить, что он соответствует частному значению модуля, равному $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Этот результат дает возможность выразить K_0 через гамма-функцию:

$$K_0 = 2^{\frac{1}{2}} \int_0^1 (1 - t^4)^{-\frac{1}{2}} dt = 2^{-\frac{3}{2}} \int_0^1 u^{-\frac{3}{4}} (1 - u)^{-\frac{1}{2}} du =$$

$$= 2^{-\frac{3}{2}} \Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)/\Gamma\left(\tfrac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\pi^{-\frac{1}{2}}\left\{\Gamma\left(\tfrac{1}{4}\right)\right\}^2;$$

это выражение впервые получено Лежандром[1]).

Так как $k = k'$, когда $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $K_0 = K_0'$ и, таким образом, $q_0 = e^{-\pi}$.

Пример 1. Выразить K_0 через гамма-функцию, пользуясь формулой Куммера (см. главу 14, пример 12 в конце главы).

Пример 2. Положив $t = (1 - u^2)^{\frac{1}{2}}$ в формуле

$$E_0 = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}t^2\right)^{\frac{1}{2}} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

---

[1]) Legendre, Exercices de Calcul Intégral, I (Paris, 1811), 209. Значение K_0 есть 1,85407468 ..., а $\tilde{\omega} = 2{,}62205756$ ...

показать, что

$$2^{\frac{1}{2}}E_0=\int_0^1(1-u^4)^{-\frac{1}{2}}\,du+\int_0^1 u^2(1-u^4)^{-\frac{1}{2}}\,du,$$

и получить отсюда, что

$$2E_0-K_0=2\pi^{\frac{3}{2}}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right\}^{-2}.$$

Пример 3. Вывести соотношение Лежандра (§ 22.735) из примера 2 совместно с примером 2 § 22.736.

Пример 4. Показать, что

$$\sin\operatorname{lemn}^2\varphi=\frac{1-\cos\operatorname{lemn}^2\varphi}{1+\cos\operatorname{lemn}^2\varphi}.$$

22.81. Значения K и K' для частных значений k

Мы видели, что при $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ значение K может быть выражено через гамма-функцию и, кроме того, что $K=K'$; это является частным случаем общей теоремы [1]), утверждающей, что если

$$\frac{K'}{K}=\frac{a+b\sqrt{n}}{c+d\sqrt{n}},$$

где a, b, c, d, n — целые числа, то k — корень алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.

Эта теорема основана на теории преобразования эллиптических функций и выходит за пределы этой книги; но имеются три определенных случая, в которых k, K, K' имеют весьма простые значения, а именно:

$$\text{(I)}\qquad k=\sqrt{2}-1,\qquad K'=K\sqrt{2},$$

$$\text{(II)}\qquad k=\sin\frac{1}{12}\pi,\qquad K'=K\sqrt{3},$$

$$\text{(III)}\qquad k=\operatorname{tg}^2\frac{1}{8}\pi,\qquad K'=2K.$$

Мы дадим здесь краткое исследование этих случаев [2]).

(I) *Четверти периодов с модулем* $\sqrt{2}-1$. Преобразование Ландена дает соотношение между эллиптическими функциями с произвольным модулем k и эллиптическими функциями с модулем $k_1=(1-k')/(1+k')$; четверти периодов Λ, Λ', соответствующие модулю k_1, удовлетворяют соотношению $\Lambda'/\Lambda=2K'/K$.

Если взять такое k, что $k_1=k'$, то $\Lambda=K'$ и $k_1'=k$, следовательно, $\Lambda'=K$ и соотношение $\Lambda'/\Lambda=2K'/K$ дает $\Lambda'^2=2\Lambda^2$.

---

[1]) Abel, Journ. für Math., III, 184 (Oeuvres, I (1881), 377).

[2]) Относительно нескольких подобных формул менее простого характера см. Kronecker, Berliner Sitzungsberichte, 1857, 1862.

Итак, четверти периодов Λ, Λ', соответствующие модулю k_1, заданному уравнением $k_1 = (1 - k_1)/(1 + k_1)$, таковы, что $\Lambda' = \pm\Lambda\sqrt{2}$, т. е. если $k_1 = \sqrt{2} - 1$, то $\Lambda' = \Lambda\sqrt{2}$ (так как, очевидно, числа Λ и Λ' положительны).

(II) *Четверти периодов, соответствующие модулю* $\sin\frac{1}{12}\pi$. Случай $k = \sin\frac{1}{12}\pi$ был исследован Лежандром[1]), который получил замечательный результат, а именно, что при таком значении k

$$K' = K\sqrt{3}.$$

Этот результат вытекает из соотношения между определенными интегралами

$$\int_{-\infty}^{1} (1 - x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{3}\int_{1}^{\infty} (x^3 - 1)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Для доказательства этого соотношения рассмотрим интеграл

$$\int (1 - z^3)^{-\frac{1}{2}}\,dz,$$

взятый по контуру, составленному из отрезка вещественной оси (с вырезом при $z = 1$ в виде дуги окружности радиуса R^{-1}), соединяющего точки 0 и R, отрезка прямой, соединяющего точки $Re^{\frac{1}{3}\pi i}$ и 0, и дуги окружности радиуса R, соединяющей точки R и $Re^{\frac{1}{3}\pi i}$; когда $R \to \infty$, интеграл, взятый по дуге окружности, стремится к нулю, как и интеграл, взятый по выемке, и таким образом, по теореме Коши

$$\int_0^1 (1 - x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx + i\int_1^{\infty} (x^3 - 1)^{-\frac{1}{2}}\,dx + e^{\frac{1}{3}\pi i}\int_{\infty}^{0} (1 + x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = 0,$$

если на оставшихся двух отрезках заменим z соответственно на x и $xe^{\frac{1}{3}\pi i}$.

Положив

$$\int_0^1 (1 - x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = I_1, \quad \int_1^{\infty} (x^3 - 1)^{-\frac{1}{2}}\,dx = I_2,$$

$$\int_0^{\infty} (1 + x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int_{-\infty}^{0} (1 - x^3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = I_3,$$

имеем

$$I_1 + iI_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\,I_3,$$

---

[1]) Legendre, Exercices de Calcul Intégral I (1811), 59, 210; Fonctions Elliptiques, I (1825), 59, 60.

откуда, сравнивая вещественные и мнимые части, получим

$$I_1 = \frac{1}{2} I_3, \quad I_2 = \frac{1}{2} I_3 \sqrt{3}$$

и, следовательно,

$$I_1 + I_3 - I_2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} I_3 + I_3 - \frac{3}{2} I_3 = 0,$$

что и дает требуемое соотношение [1]).

Но согласно примеру 6 § 22.72

$$I_2 = 4(\alpha^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} K, \quad I_1 + I_3 = 4(\alpha^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} K',$$

причем модуль равен

$$\alpha (\alpha^2 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

и

$$\alpha^2 = 2\sqrt{3} - 3, \quad \beta^2 = 2\sqrt{3} + 3,$$

что дает

$$k^2 = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3}) = \sin^2 \frac{1}{12}\pi.$$

Итак, когда модуль k равен $\sin \frac{1}{12}\pi$, имеем

$$3^{-\frac{1}{4}} 2K = 3^{\frac{3}{4}} 2K' = I_2 = 3^{\frac{1}{2}} I_1 =$$

$$= 3^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \Big/ \Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

(III) *Четверти периодов с модулем* $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{8}\pi$. Если в преобразовании Ландена (§ 22.42) взять $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то получим $\Lambda'/\Lambda = 2K'/K = 2$; далее, для этого значения k имеем

$$k_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{8}\pi;$$

соответствующие четверти периодов Λ, Λ' будут

$$\frac{1}{2}\left(1 + 2^{-\frac{1}{2}}\right) K_0 \quad \text{и} \quad \left(1 + 2^{-\frac{1}{2}}\right) K_0.$$

Пример 1. Рассмотреть четверти периодов, когда k имеет значения $(2\sqrt{2} - 2)^{\frac{1}{2}}$, $\sin \frac{5}{12}\pi$ и $2^{\frac{5}{4}}(\sqrt{2} - 1)$.

---

[1]) Другой метод доказательства этого соотношения заключается в выражении I_1, I_2, I_3 через гамма-функции путем замены x соответственно на $t^{\frac{1}{3}}$, $t^{-\frac{1}{3}}$, $(t^{-1} - 1)^{\frac{1}{3}}$ в интегралах, определяющих I_1, I_2 и I_3.

Пример 2. Показать, что

$$2^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{24}\pi}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+e^{-(2n+1)\pi}\right),\quad 3^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{18}\pi\sqrt{3}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-e^{-2n\pi/\sqrt{3}}\right).$$

(Glaisher, Messenger, V)

Пример 3. Выразить координаты любой точки на кривой $y^2=x^3-1$ в виде

$$x=1+\frac{3^{\frac{1}{2}}(1-\operatorname{cn}u)}{1+\operatorname{cn}u},\quad y=\frac{2\cdot 3^{\frac{3}{4}}\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u}{(1+\operatorname{cn}u)^2},$$

где модуль эллиптических функций равен $\sin\frac{1}{12}\pi$, и показать, что $\frac{dx}{du}=3^{-\frac{1}{4}}y$.

С помощью соотношения $\int\limits_1^{\infty}y^{-1}dx=3^{-\frac{1}{4}}\int\limits_0^{2K}du$ выразить значение K через гамма-функцию, когда $k=\sin\frac{1}{12}\pi$.

Пример 4. Показать, что при $y^2=x^3-1$

$$\int\limits_1^{\infty}y^{-3}(x-1)^2\,dx=\left[-\frac{2}{3}y^{-1}(1-x^{-1})^2\right]_1^{\infty}+\frac{4}{3}\int\limits_1^{\infty}(x^{-2}y^{-1}-x^{-3}y^{-1})\,dx,$$

а затем, пользуясь примером 3 и выражая последний интеграл через гамма-функции при помощи подстановки $x=t^{-\frac{1}{3}}$, получить формулу Лежандра (Legendre, Calcul Intégral, 60), связывающую первый и второй полные эллиптические интегралы с модулем $\sin\frac{1}{12}\pi$:

$$\frac{\pi}{4\sqrt{3}}=K\left\{E-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}K\right\}.$$

Пример 5. Представив координаты любой точки на кривой $Y^2=1-X^3$ в виде

$$X=1-\frac{3^{\frac{1}{2}}(1-\operatorname{cn}v)}{1+\operatorname{cn}v},\quad Y=\frac{2\cdot 3^{\frac{3}{4}}\operatorname{sn}v\operatorname{dn}v}{(1+\operatorname{cn}v)^2},$$

где модуль эллиптических функций равен $\sin\frac{5}{12}\pi$, и выразив

$$\left\{\int\limits_{-\infty}^{0}+\int\limits_0^1\right\}Y^{-3}(1-X)^2\,dX$$

через гамма-функции, получить формулу Лежандра, по которой[1]) при $k = \sin\frac{1}{12}\pi$ имеем

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{4} = K'\left\{E' - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}K'\right\}.$$

22.82. Геометрическое толкование функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$

Геометрическое представление эллиптических функций Якоби с модулем $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ дается дугой лемнискаты, как мы видели в § 22.8; для функций Якоби с произвольным модулем k $(0 < k < 1)$ мы можем воспользоваться *кривой на сфере*, известной под названием *сферической спирали Зейферта*[2]).

Возьмем сферу единичного радиуса с центром в начале координат, и пусть цилиндрические координаты любой точки на ней будут (ρ, φ, z), так что элемент дуги кривой, проведенной на сфере, дается формулой[3])

$$(ds)^2 = \rho^2(d\varphi)^2 + (1-\rho^2)^{-1}(d\rho)^2.$$

Спираль Зейферта определяется уравнением

$$\varphi = ks,$$

где s — дуга, измеряемая от полюса сферы (т. е. от точки, где ось z встречается со сферой), а k — положительная постоянная, меньшая единицы[4]).

Для этой кривой имеем $(ds)^2(1-k^2\rho^2) = (1-\rho^2)^{-1}(d\rho)^2$, и следовательно, так как s и ρ равны нулю одновременно, $\rho = \operatorname{sn}(s, k)$.

Выражения цилиндрических координат любой точки на кривой через дугу, измеряемую от полюса, поэтому будут

$$(\rho, \varphi, z) = (\operatorname{sn} s, ks, \operatorname{cn} s),$$

и легко видеть, что $\operatorname{dn} s$ будет косинусом угла, под которым кривая пересекает меридиан. Отсюда видно, что если K есть длина дуги кривой от полюса до экватора, то $\operatorname{sn} s$ и $\operatorname{cn} s$ имеют период $4K$, в то время как $\operatorname{dn} s$ имеет период $2K$.

ЛИТЕРАТУРА

A. M. Legendre, Traité des Fonctions Elliptiques (Paris, 1825—1828).
C. G. J. Jacobi, Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum (Königsberg, 1829).

---

[1]) Интересно отметить, что когда Лежандр дифференцированием доказал, что $EK' + E'K - KK'$ постоянно, то он воспользовался для определения этой постоянной результатами примеров 4 и 5, прежде чем применить методы примера 3 § 22.8 и § 22.737.

[2]) Seiffert, Ueber eine neue geometrische Einführung in die Theorie der elliptischen Funktionen (Charlottenburg, 1896).

[3]) Это — очевидное преобразование формулы

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2(d\varphi)^2 + (dz)^2,$$

когда ρ и z связаны соотношением $\rho^2 + z^2 = 1$.

[4]) Если $k > 1$, то кривая будет мнимой.

J. Tannery et J. Molk, Fonctions Elliptiques (Paris, 1893—1902).
A. Cayley, Elliptic Functions (London, 1895).
P. F. Verhulst, Traité élémentaire des fonctions elliptiques (Brussels, 1841).
A. Enneper, Elliptische Funktionen, zweite Auflage von F. Müller (Halle, 1890).
Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, М. — Л., 1948.
А. Гурвиц, Теория аналитических и эллиптических функций, Ленинград, ГТТИ, 1933.

Примеры

1. Показать, что одно из значений выражения

$$\left\{\left(\frac{\operatorname{dn} u+\operatorname{cn} u}{1+\operatorname{cn} u}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\operatorname{dn} u-\operatorname{cn} u}{1-\operatorname{cn} u}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\left\{\left(\frac{1-\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u-k' \operatorname{sn} u}\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1+\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u+k' \operatorname{sn} u}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

есть $2(1+k')$.

(Math. Trip., 1904)

2. Пусть

$$x+iy=\operatorname{sn}^2(u+iv) \quad \text{и} \quad x-iy=\operatorname{sn}^2(u-iv);$$

показать, что

$$\{(x-1)^2+y^2\}^{\frac{1}{2}}=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{dn} 2u+\operatorname{cn} 2u.$$

(Math. Trip., 1911)

3. Показать, что

$$\{1 \pm \operatorname{cn}(u+v)\}\{1 \pm \operatorname{cn}(u-v)\}=\frac{(\operatorname{cn} u \pm \operatorname{cn} v)^2}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

4. Показать, что

$$1+\operatorname{cn}(u+v) \operatorname{cn}(u-v)=\frac{\operatorname{cn}^2 u+\operatorname{cn}^2 v}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

(Jacobi)

5. Представить $\dfrac{1+\operatorname{cn}(u+v) \operatorname{cn}(u-v)}{1+\operatorname{dn}(u+v) \operatorname{dn}(u-v)}$ как функцию от $\operatorname{sn}^2 u+\operatorname{sn}^2 v$.

(Math. Trip., 1909)

6. Показать, что

$$\operatorname{sn}(u-v) \operatorname{dn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} v-\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v \operatorname{cn} u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}.$$

(Jacobi)

7. Показать, что

$$\{1-(1+k') \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+K)\}\{1-(1-k') \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u+K)\}=\{\operatorname{sn}(u+K)-\operatorname{sn} u\}^2.$$

(Math. Trip., 1914)

8. Показать, что

$$\operatorname{sn}\left(u+\frac{1}{2}K\right)=(1+k')^{-\frac{1}{2}}\frac{k'\operatorname{sn}u+\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-(1-k')\operatorname{sn}^2 u},$$

$$\operatorname{sn}\left(u+\frac{1}{2}iK'\right)=k'^{-\frac{1}{2}}\frac{(1+k)\operatorname{sn}u+i\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1+k\operatorname{sn}^2 u}.$$

(Math. Trip., 1914)

9. Показать, что

$$\sin\{\operatorname{am}(u+v)+\operatorname{am}(u-v)\}=\frac{2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v},$$

$$\cos\{\operatorname{am}(u+v)-\operatorname{am}(u-v)\}=\frac{\operatorname{cn}^2 v-\operatorname{sn}^2 v\operatorname{dn}^2 u}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v}.$$

(Jacobi)

10. Показать, что

$$\operatorname{dn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v)=\frac{\operatorname{ds}^2 u\operatorname{ds}^2 v+k^2k'^2}{\operatorname{ns}^2 u\operatorname{ns}^2 v-k^2},$$

и, пользуясь этим, представить

$$\left[\frac{\wp(u+v)-e_2}{\wp(u+v)-e_3}\,\frac{\wp(u-v)-e_2}{\wp(u-v)-e_3}\right]^{\frac{1}{2}}$$

как рациональную функцию от $\wp(u)$ и $\wp(v)$.

(Trinity, 1903)

11. Комбинируя формулы для $\operatorname{cn}(2K-u)$ и $\operatorname{dn}(2K-u)$ с формулами для $1+\operatorname{cn}2u$ и $1+\operatorname{dn}2u$, показать, что

$$\left(1-\operatorname{cn}\frac{2}{3}K\right)\left(1+\operatorname{dn}\frac{2}{3}K\right)=1.$$

(Trinity, 1906)

12. В обозначениях, подобных обозначениям § 22.2, показать, что

$$\frac{c_1d_2-c_2d_1}{s_1-s_2}=\frac{\operatorname{cn}(u_1+u_2)-\operatorname{dn}(u_1+u_2)}{\operatorname{sn}(u_1+u_2)},$$

и вывести отсюда, что при $u_1+u_2+u_3+u_4=2K$

$$(c_1d_2-c_2d_1)(c_3d_4-c_4d_3)=k'^2(s_1-s_2)(s_3-s_4).$$

(Trinity, 1906)

13. Показать, что при $u+v+w=0$

$$1-\operatorname{dn}^2 u-\operatorname{dn}^2 v-\operatorname{dn}^2 w+2\operatorname{dn}u\operatorname{dn}v\operatorname{dn}w=k^4\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v\operatorname{sn}^2 w.$$

(Math. Trip., 1907)

14. По теореме Лиувилля или каким-либо другим образом показать, что

$$\operatorname{dn}u\operatorname{dn}(u+w)-\operatorname{dn}v\operatorname{dn}(v+w)=$$
$$=k^2\{\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{sn}(v+w)\operatorname{cn}(u+w)-\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{sn}(u+w)\operatorname{cn}(v+w)\}$$

(Math. Trip., 10)

15. Показать, что

$$\sum \operatorname{cn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{sn}(u_2-u_3) \operatorname{dn} u_1 + \\ + \operatorname{sn}(u_2-u_3)\operatorname{sn}(u_3-u_1)\operatorname{sn}(u_1-u_2)\operatorname{dn} u_1 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{dn} u_3 = 0,$$

где суммирование распространяется на индексы 1, 2, 3.

(Math. Trip., 1894)

16. Получить формулы

$$\operatorname{sn} 3u = \frac{A}{D}, \quad \operatorname{cn} 3u = \frac{B}{D}, \quad \operatorname{dn} 3u = \frac{C}{D},$$

где

$$\begin{aligned} A &= 3s - 4(1+k^2)s^3 + 6k^2s^5 - k^4s^9, \\ B &= c\{1 - 4s^2 + 6k^2s^4 - 4k^4s^6 + k^4s^8\}, \\ C &= d\{1 - 4k^2s^2 + 6k^2s^4 - 4k^2s^6 + k^4s^8\}, \\ D &= 1 - 6k^2s^4 + 4k^2(1+k^2)s^6 - 3k^4s^8 \end{aligned}$$

и

$$s = \operatorname{sn} u, \quad c = \operatorname{cn} u, \quad d = \operatorname{dn} u.$$

17. Показать, что

$$\frac{1-\operatorname{dn} 3u}{1+\operatorname{dn} 3u} = \left(\frac{1-\operatorname{dn} u}{1+\operatorname{dn} u}\right)\left(\frac{1+a_1 \operatorname{dn} u + a_2 \operatorname{dn}^2 u + a_3 \operatorname{dn}^3 u + a_4 \operatorname{dn}^4 u}{1-a_1 \operatorname{dn} u + a_2 \operatorname{dn}^2 u - a_3 \operatorname{dn}^3 u + a_4 \operatorname{dn}^4 u}\right)^2,$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 — постоянные, подлежащие определению.

(Trinity, 1912)

18. Положив $P(u) = \left(\frac{1+\operatorname{dn} 3u}{1+\operatorname{dn} u}\right)^{\frac{1}{2}}$, показать, что

$$\frac{P(u)+P(u+2iK')}{P(u)-P(u+2iK')} = -\frac{\operatorname{sn} 2u \operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} 2u \operatorname{sn} u}.$$

Определить полюсы и нули функции $P(u)$ и первый член в разложении функции около каждого полюса и нуля.

(Math. Trip., 1908)

19. Показать, что

$$\operatorname{sn}(u_1+u_2+u_3) = \frac{A}{D}, \quad \operatorname{cn}(u_1+u_2+u_3) = \frac{B}{D}, \quad \operatorname{dn}(u_1+u_2+u_3) = \frac{C}{D},$$

где

$$\begin{aligned} A &= s_1s_2s_3\left\{-1-k^2+2k^2\sum s_1^2-(k^2+k^4)\sum s_2^2s_3^2+2k^4s_1^2s_2^2s_3^2\right\} + \\ &\quad + \sum\left\{s_1c_2c_3d_2d_3\left(1+2k^2s_2^2s_3^2-k^2\sum s_2^2s_3^2\right)\right\}, \\ B &= c_1c_2c_3\left\{1-k^2\sum s_2^2s_3^2+2k^4s_1^2s_2^2s_3^2\right\} + \\ &\quad + \sum\left\{c_1s_2s_3d_2d_3\left(-1+2k^2s_2^2s_3^2+2k^2s_1^2-k^2\sum s_2^2s_3^2\right)\right\}, \\ C &= d_1d_2d_3\left\{1-k^2\sum s_2^2s_3^2+2k^2s_1^2s_2^2s_3^2\right\} + \\ &\quad + k^2\sum\left\{d_1s_2s_3c_2c_3\left(-1+2k^2s_2^2s_3^2+2s_1^2-k^2\sum s_2^2s_3^2\right)\right\}, \\ D &= 1-2k^2\sum s_2^2s_3^2+4(k^2+k^4)s_1^2s_2^2s_3^2-2k^4s_1^2s_2^2s_3^2\sum s_1^2+k^4\sum s_2^4s_3^4 \end{aligned}$$

и суммирование распространяется на индексы 1, 2, 3.

(Glaisher, Messenger, XI)

20. Показать, что

$$\operatorname{sn}(u_1+u_2+u_3)=\frac{A'}{D'},\quad \operatorname{cn}(u_1+u_2+u_3)=\frac{B'}{D'},\quad \operatorname{dn}(u_1+u_2+u_3)=\frac{C'}{D'},$$

где

$$\begin{aligned}
A' &= \sum s_1c_2c_3d_2d_3 - s_1s_2s_3\left(1+k^2-k^2\sum s_1^2+k^4s_1^2s_2^2s_3^2\right),\\
B' &= c_1c_2c_3\left(1-k^4s_1^2s_2^2s_3^2\right)-d_1d_2d_3\sum s_2s_3c_1d_1,\\
C' &= d_1d_2d_3\left(1-k^2s_1^2s_2^2s_3^2\right)-k^2c_1c_2c_3\sum s_2s_3c_1d_1,\\
D' &= 1-k^2\sum s_2^2s_3^2+(k^2+k^4)s_1^2s_2^2s_3^2-k^2s_1s_2s_3\sum s_1c_2c_3d_2d_3
\end{aligned}$$

(Cayley, Journ. für Math., XLI)

21. Применяя метод Абеля (§ 20.312) к точкам пересечения кривой двойной кривизны $x^2+y^2=1$, $z^2+k^2x^2=1$ с переменной плоскостью $lx+my+nz=1$, показать, что при $u_1+u_2+u_3+u_4=0$ имеем

$$\begin{vmatrix} s_1 & c_1 & d_1 & 1\\ s_2 & c_2 & d_2 & 1\\ s_3 & c_3 & d_3 & 1\\ s_4 & c_4 & d_4 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Получить этот результат также из равенства

$$(s_2-s_1)(c_3d_4-c_4d_3)+(s_4-s_3)(c_1d_2-c_2d_1)=0,$$

которое может быть доказано тем же методом, что и в примере 12.

(Cayley, Messenger, XIV)

22. Показать, что

$$\left(s_4^2-s_3^2\right)\left(c_1^2d_2^2-c_2^2d_1^2\right)=\left(s_2^2-s_1^2\right)\left(c_3^2d_4^2-c_4^2d_3^2\right),$$

выражая каждую часть равенства через s_1, s_2, s_3, s_4; вывести из примера 21, что при $u_1+u_2+u_3+u_4=0$ имеем

$$\begin{aligned}
s_4c_1d_2+s_3c_2d_1+s_2c_3d_4+s_1c_4d_3&=0,\\
s_4c_2d_1+s_3c_1d_2+s_2c_4d_3+s_1c_3d_4&=0.
\end{aligned}$$

(Forsyth, Messenger, XIV)

23. Показать, пользуясь основными формулами Якоби для тэта-функций, что при $u_1+u_2+u_3+u_4=0$ имеем

$$k'^2-k^2k'^2s_1s_2s_3s_4+k^2c_1c_2c_3c_4-d_1d_2d_3d_4=0.$$

(Gudermann, Journ. für Math., XVIII)

24. Показать, пользуясь основными формулами Якоби для тэта-функций, что при $u_1+u_2+u_3+u_4=0$ имеем

$$k^2(s_1s_2c_3c_4-c_1c_2s_3s_4)-d_1d_2+d_3d_4=0,$$
$$k'^2(s_1s_2-s_3s_4)+d_1d_2c_3c_4-c_1c_2d_3d_4=0,$$
$$s_1s_2d_3d_4-d_1d_2s_3s_4+c_3c_4-c_1c_2=0.$$

(H. J. S. Smith, Proc. London Math. Soc. (I), X)

25. При $u_1+u_2+u_3+u_4=0$ показать, что ангармоническое отношение функций $\operatorname{sn} u_1$, $\operatorname{sn} u_2$, $\operatorname{sn} u_3$, $\operatorname{sn} u_4$ равно ангармоническому отношению функций $\operatorname{sn}(u_1+K)$, $\operatorname{sn}(u_2+K)$, $\operatorname{sn}(u_3+K)$, $\operatorname{sn}(u_4+K)$.

(Math. Trip., 1905)

26. Показать, что

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sn}^2(u+v) & \operatorname{sn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v) & \operatorname{sn}^2(u-v) \\ \operatorname{cn}^2(u+v) & \operatorname{cn}(u+v)\operatorname{cn}(u-v) & \operatorname{cn}^2(u-v) \\ \operatorname{dn}^2(u+v) & \operatorname{dn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v) & \operatorname{dn}^2(u-v) \end{vmatrix} = -\frac{8k'^2 s_1s_2c_1c_2d_1d_2}{\left(1-k^2s_1^2s_2^2\right)^3}.$$

(Math. Trip., 1913)

27. Найти все вещественные системы значений u и v, для которых $\operatorname{sn}^2(u+iv)$ вещественно, причем $0<k^2<1$.

(Math. Trip., 1901)

28. Пусть $k'=\frac{1}{4}(a^{-1}-a)^2$, где $0<a<1$; показать, что

$$\operatorname{sn}^2\frac{1}{4}K=\frac{4a^3}{(1+a^2)(1+2a-a^2)}$$

и что $\operatorname{sn}^2\frac{3}{4}K$ получается отсюда заменой a на $-a^{-1}$.

(Math. Trip., 1902)

29. Пусть значения функции $\operatorname{cn} z$, для которых $\operatorname{cn} 3z=a$, равны $c_1, c_2, \ldots, c_9$; показать, что

$$3k^4\prod_{r=1}^{9}c_r+k'^4\sum_{r=1}^{9}c_r=0.$$

(Math. Trip., 1899)

30. Пусть

$$\frac{a+\operatorname{sn}(u+v)}{a+\operatorname{sn}(u-v)}=\frac{b+\operatorname{cn}(u+v)}{b+\operatorname{cn}(u-v)}=\frac{c+\operatorname{dn}(u+v)}{c+\operatorname{dn}(u-v)},$$

и пусть ни одна из функций $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, $1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v$ не равна нулю; показать, что u удовлетворяет уравнению

$$k^2\left(k'^2a^2+b^2-c^2\right)\operatorname{sn}^2 u=k'^2+k^2b^2-c^2.$$

(King's, 1900)

31. Показать, что

$$1-\operatorname{sn}(2Kx/\pi)=(1-\sin x)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(1-q^{2n-1})^2}{(1+q^{2n})^2}\,\frac{(1-2q^n\sin x+q^{2n})^2}{(1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2})}\right\}.$$

(Math. Trip., 1912)

32. Показать, что

$$\frac{1-\operatorname{sn}(2Kx/\pi)}{\{\operatorname{dn}(2Kx/\pi)-k'\operatorname{sn}(2Kx/\pi)\}^{\frac{1}{2}}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-2q^{2n-1}\sin x+q^{4n-2}}{1+2q^{2n-1}\sin x+q^{4n-2}}\right\}.$$

(Math. Trip., 1904)

33. Показать, что если k настолько мало, что k^4 можно пренебречь, то для малых значений u имеем

$$\operatorname{sn}u=\sin u-\frac{1}{4}k^2\cos u\cdot(u-\sin u\cos u).$$

(Trinity, 1904)

34. Показать, что при $|\operatorname{Im}x|<\frac{1}{2}\pi\operatorname{Im}\tau$

$$\lg\operatorname{cn}(2Kx/\pi)=\lg\cos x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4q^n\sin^2 nx}{n\{1+(-q)^n\}}.$$

[Проинтегрировать ряд Фурье для $\operatorname{sn}(2Kx/\pi)\operatorname{dc}(2Kx/\pi)$.]

(Math. Trip., 1907)

35. Показать, что

$$\int_0^{\frac{1}{4}K}\frac{1-k^2\operatorname{sn}^4 u}{\operatorname{cn}^2 u\operatorname{dn}^2 u}\,du=\left\{(1+k')^{\frac{1}{2}}-1\right\}\Big/k'^{\frac{3}{2}}.$$

[Выразить подинтегральную функцию через функции от $2u$.]

(Math. Trip., 1906)

36. Показать, что

$$\int\frac{\operatorname{cn}v\,du}{\operatorname{sn}v-\operatorname{sn}u}=$$

$$=\lg\frac{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}\pi\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\pi\tau\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}\pi\tau\right)}-x\,\frac{\vartheta_1'\left(y+\frac{1}{2}\pi\tau\right)}{\vartheta_1\left(y+\frac{1}{2}\pi\tau\right)},$$

где $2Kx=\pi u$, $2Ky=\pi v$.

(Math. Trip., 1912)

37. Показать, что

$$(1+k')\,k'^2\int\limits_0^K \frac{\operatorname{sn}^3 u\,du}{(1+\operatorname{cn} u)\,dn^2 u}=1.$$

(Math. Trip., 1903)

38. Показать, что

$$k\int\limits_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}\operatorname{sn} u\,\mathrm{du}=\lg\frac{1+k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\beta}{1-k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\beta}.$$

(St. John's, 1914)

39. Взяв интеграл $\int e^{2iz}\operatorname{dn} u\operatorname{cs} u\,dz$ вдоль прямоугольника, вершины которого $\pm\frac{1}{2}\pi$, $\pm\frac{1}{2}\pi+\infty i$ (где $2Kz=\pi u$), и интегрируя затем по частям, показать, что при $0<k^2<1$

$$\int\limits_0^K \cos(\pi u/K)\lg\operatorname{sn} u\,du=\frac{1}{2}K\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}\pi i\tau\right).$$

(Math. Trip., 1902)

40. Показать, что K и K' удовлетворяют уравнению

$$c(1-c)\frac{d^2u}{dc^2}+(1-2c)\frac{du}{dc}-\frac{1}{4}u=0,$$

где $c=k^2$, и вывести отсюда, что они удовлетворяют уравнению Лежандра для функций степени $-\frac{1}{2}$ с аргументом $1-2k^2$.

41. Выразить координаты любой точки кривой $x^3+y^3=1$ в виде

$$x=\frac{2\cdot 3^{\frac{1}{4}}\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u-(1-\operatorname{cn} u)^2}{2\cdot 3^{\frac{1}{4}}\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u+(1-\operatorname{cn} u)^2},$$

$$y=\frac{2^{\frac{11}{6}}\cos\frac{1}{12}\pi\,(1-\operatorname{cn} u)\left\{1+\operatorname{tg}\frac{1}{12}\pi\operatorname{cn} u\right\}}{2\cdot 3^{\frac{1}{4}}\operatorname{sn} u\operatorname{dn} u+(1-\operatorname{cn} u)^2}$$

причем модуль эллиптических функций равен $\sin\frac{1}{12}\pi$; показать, что

$$\int\limits_x^1 (1-x^3)^{-\frac{2}{3}}\,dx=\int\limits_0^y (1-y^3)^{-\frac{2}{3}}\,dy=2^{-\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}u.$$

Показать, далее, что сумма параметров трех коллинеарных точек на графике этого кубического полинома является периодом.

[См. Richelot, Journ. für Math., IX (1832), 407—408 и Cayley, Proc. Camb. Phil. Soc., IV (1883), 106—109. Униформизующая переменная для общего кубического уравнения в канонической форме $X^3+Y^3+Z^3+6mXYZ=0$ была получена Бобеком (Bobek, Einleitung in die Theorie der elliptischen Funktionen, 251 (Leipzig, 1884)); Диксон (Dixon, Quarterly Journal, XXIV (1890), 167—233) развил теорию эллиптических функций, взяв в качестве основной кривой кривую $x^3+y^3-3\alpha xy=1$ вместо эквивалентной кривой

$$y^2=(1-x^2)(1-k^2x^2).]$$

42. Выразить интеграл $\int\limits_0^2 \{(2x-x^2)(4x^2+9)\}^{-\frac{1}{2}}\,dx$ через полный эллиптический интеграл первого рода с вещественным модулем.

(Math. Trip., 1911)

43. Пусть

$$u=\int\limits_x^\infty \{(t+1)(t^2+t+1)\}^{-\frac{1}{2}}\,dt;$$

выразить x через эллиптические функции Якоби от u с вещественным модулем.

(Math. Trip., 1899)

44. Пусть

$$u=\int\limits_0^x (1+t^2-2t^4)^{-\frac{1}{2}}\,dt;$$

выразить x через u при помощи эллиптических функций Якоби или Вейерштрасса.

(Math. Trip., 1914)

45. Показать, что

$$e^{-\pi}+e^{-9\pi}+e^{-25\pi}+\ldots=\frac{\left(2^{\frac{1}{4}}-1\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2^{\frac{11}{4}}\pi^{\frac{3}{4}}}.$$

(Trinity, 1881)

46. При $\alpha>x>\beta>\gamma$ сделать приведение интегралов

$$\int\limits_x^\alpha \{(\alpha-t)(t-\beta)(t-\gamma)\}^{-\frac{1}{2}}\,dt,\quad \int\limits_\beta^x \{(\alpha-t)(t-\beta)(t-\gamma)\}^{-\frac{1}{2}}\,dt$$

соответственно подстановками

$$x-\gamma=(\alpha-\gamma)\,\mathrm{dn}^2 u,\quad x-\gamma=(\beta-\gamma)\,\mathrm{nd}^2 v,$$

где

$$k^2=(\alpha-\beta)/(\alpha-\gamma).$$

Отсюда вывести, что при $u+v=K$

$$1-\mathrm{sn}^2 u-\mathrm{sn}^2 v+k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v=0.$$

Подстановкой $y=(\alpha-t)(t-\beta)/(t-\gamma)$, примененной к вышеприведенному интегралу, взятому между пределами β и α, получить гауссову форму преобразования Ландена:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(a_1^2\cos^2\theta+b_1^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}d\theta=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta,$$

где a_1, b_1 — арифметическое и геометрическое среднее чисел a и b.

(Gauss, Werke, III, 352; Math. Trip., 1895)

47. Показать, что

$$\operatorname{sc} u=-k'^{-1}\{\zeta(u-K)-\zeta(u-K-2iK')-\zeta(2iK')\},$$

где дзета-функции составлены по периодам $2\omega_1$, $2\omega_2=2K$, $4iK'$.

(Math. Trip., 1903)

48. Показать, что $E-k'^2K$ удовлетворяет уравнению

$$4cc'\frac{d^2u}{dc^2}=u,$$

где $c=k^2$, и найти интеграл этого уравнения.

(Math. Trip., 1911)

49. Показать, что

$$n\int_0^1 k^nK'\,dk=(n-1)\int_0^1 k^{n-2}E'\,dk,$$

$$(n+2)\int_0^1 k^nE'\,dk=(n+1)\int_0^1 k^nK'\,dk.$$

(Trinity, 1906)

50. Пусть

$$u=\frac{1}{2}\int_0^x\{t(1-t)(1-ct)\}^{-\frac{1}{2}}dt;$$

показать, что

$$c(c-1)\frac{d^2u}{dc^2}+(2c-1)\frac{du}{dc}+\frac{1}{4}u=\frac{1}{4}\left\{\frac{x(1-x)}{(1-cx)^3}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(Trinity, 1896)

51. Показать, что интегралом уравнения

$$\frac{du}{dk}+\frac{u^2}{k}+\frac{k}{1-k^2}=0$$

будет

$$u=\frac{A(E-K)+A'E'}{AE+A'(E'-K')},$$

где A, A' — постоянные.

(Math. Trip., 1906)

52. Вывести из теоремы сложения для $E(u)$, что если

$$u_1+u_2+u_3+u_4=0,$$

то выражение

$$(\operatorname{sn} u_1 \operatorname{sn} u_2-\operatorname{sn} u_3 \operatorname{sn} u_4) \operatorname{sn}(u_1+u_2)$$

не изменяется при любой перестановке индексов.

(Math. Trip., 1910)

53. Показать, что

$$E(3u)-3E(u)=\frac{-8k^2s^3c^3d^3}{1-6k^2s^4+4(k^2+k^4)s^6-3k^4s^8}.$$

(Math. Trip., 1913)

54. Показать, что

$$3k^4\int\limits_0^{2K} u \operatorname{cd}^4 u\, du=2K\{(2+k^2)K-2(1+k^2)E\}.$$

(Положить $u=K+v$.)

(Math. Trip., 1904)

55. Рассматривая кривые

$$y^2=x(1-x)(1-k^2x), \qquad y=l+mx+nx^2,$$

показать, что при

$$u_1+u_2+u_3+u_4=0$$

имеем

$$E(u_1)+E(u_2)+E(u_3)+E(u_4)=k\left\{\sum_{r=1}^{4} s_r^2+2c_1c_2c_3c_4-2s_1s_2s_3s_4-2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(Math. Trip., 1908)

56. Методом примера 21 получить следующие семь выражений для $E(u_1)+E(u_2)+E(u_3)+E(u_4)$, когда $u_1+u_2+u_3+u_4=0$:

$$-\frac{k^2s_1s_2s_3s_4}{1+k^2s_1s_2s_3s_4}\sum_{r=1}^{4}\frac{c_rd_r}{s_r}, \qquad \frac{k^2d_1d_2d_3d_4}{k'^2+d_1d_2d_3d_4}\sum_{r=1}^{4}\frac{s_rc_r}{d_r},$$

$$\frac{k^2c_1c_2c_3c_4}{k^2c_1c_2c_3c_4-k'^2}\sum_{r=1}^{4}\frac{s_rd_r}{c_r}, \qquad \frac{k^2s_1s_2s_3s_4d_1d_2d_3d_4}{k^2k'^2s_1s_2s_3s_4-d_1d_2d_3d_4}\sum_{r=1}^{4}\frac{c_r}{s_rd_r},$$

$$\frac{-k^2c_1c_2c_3c_4d_1d_2d_3d_4}{d_1d_2d_3d_4+k^2c_1c_2c_3c_4}\sum_{r=1}^{4}\frac{s_r}{c_rd_r}, \qquad \frac{k^2s_1s_2s_3s_4+c_1c_2c_3c_4}{c_1c_2c_3c_4+k'^2s_1s_2s_3s_4}\sum_{r=1}^{4}\frac{d_r}{s_rc_r},$$

$$-k^2\left\{(s_1s_2s_3s_4)^{-1}+(c_1c_2c_3c_4)^{-1}+k^4(d_1d_2d_3d_4)^{-1}\right\}^{-1}\sum_{r=1}^{4}\frac{1}{s_rc_rd_r}.$$

(Forsyth, Messenger, XV)

57. Показать, что

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \operatorname{ns}^2\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)=\operatorname{cosec}^2 x+\frac{4K(K-E)}{\pi^2}-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}\cos 2nx}{1-q^{2n}},$$

когда $|\operatorname{Im} x| < \pi \operatorname{Im} \tau$, и вывести отсюда дифференцированием, что

$$6\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 \operatorname{ns}^4\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 6\operatorname{cosec}^4 x + 4\left[(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - 1\right]\operatorname{cosec}^2 x + \\ + 64(1+k^2)\frac{K^3(K-E)}{\pi^4} - 2k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 - \\ - 32\sum_{n=1}^{\infty} n\left[(1+k^2)\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - n^2\right]\frac{q^{2n}\cos 2nx}{1-q^{2n}}.$$

Показать также, что при $|\operatorname{Im} x| < \frac{1}{2}\pi \operatorname{Im} \tau$

$$\operatorname{sn}^3\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1+k^2}{2k^3} - \frac{(2n+1)^2}{2k^3}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\right\}\frac{2\pi q^{n+\frac{1}{2}}\sin(2n+1)x}{K(1-q^{2n+1})}.$$

(Jacobi)

58. Показать, что если a — большая полуось эллипса, эксцентриситет которого равен $\sin\frac{1}{12}\pi$, то периметр эллипса равен

$$a\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{\Gamma(^1/_3)}{\Gamma(^5/_6)} + \frac{2\Gamma(^5/_6)}{\Gamma(^1/_3)}\right\}.$$

(Ramanujan, Quarterly Journal, XLV)

59. Вывести из примера 19 главы 21, что

$$k^2\operatorname{cn}^3 2u = \frac{-k'^2 + \operatorname{dn}^3 u \operatorname{dn} 3u}{1+k^2\operatorname{sn}^3 u \operatorname{sn} 3u}, \quad \operatorname{dn}^3 2u = \frac{k'^2 + k^2\operatorname{cn}^3 u \operatorname{cn} 3u}{1+k^2\operatorname{sn}^3 u \operatorname{sn} 3u}.$$

(Trinity, 1882)

60. Из формулы $\operatorname{sd}(iu, k) = i\operatorname{sd}(u, k')$ вывести, что

$$\frac{1}{K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}}\operatorname{sh}\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi u}{K}\right) = \\ = \frac{1}{K'}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n q_1^{n+\frac{1}{2}}}{1+q_1^{2n+1}}\sin\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi u}{K'}\right),$$

где

$$q = \exp\left(\frac{-\pi K'}{K}\right), \quad q_1 = \exp\left(\frac{-\pi K}{K'}\right)$$

и u лежит внутри параллелограмма с вершинами

$$\pm iK \pm K'.$$

Интегрированием от u до K', от 0 до u и снова от u до K' доказать, что

$$\frac{\pi^3}{64}(K'^2 - K^2 - u^2) + K^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)^3 (1+q^{2n+1})} \operatorname{ch}\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi u}{K}\right) =$$

$$= K'^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q_1^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)^3 \left(1+q_1^{2n+1}\right)} \cos\left(\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi u}{K'}\right).$$

[Формула, которая может быть выведена из последней, если положить $u = \xi + i\eta$, где ξ и η вещественны, и приравнять мнимые части, была получена Томсоном и Тэтом (Thomson and Tait, Natural Philosophy, II (1883), 249), но они не заметили, что их формула есть не что иное, как следствие мнимого преобразования Якоби. К этой формуле Томсон и Тэт пришли, решая одну задачу теории упругости.]

ГЛАВА 23

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И УРАВНЕНИЕ ЛАМЕ

23.1. Определение эллипсоидальных гармонических функций

Мы видели раньше в этой книге (§ 18.4), что решения уравнения Лапласа, аналитические вблизи начала координат и пригодные для исследования физических задач, связанных со сферой, могут быть представлены как линейные комбинации функций типа

$$r^n P_n(\cos\theta), \quad r^n P_n^m(\cos\theta) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi,$$

где m и n — положительные целые числа (включая нуль).

Если разложить $P_n(\cos\theta)$ в произведение множителей, линейных относительно $\cos^2\theta$ (умноженное на $\cos\theta$, когда n нечетное), и заменить $\cos\theta$ через $\frac{z}{r}$, то мы видим, что зональная гармоническая функция $r^n P_n(\cos\theta)$ выразится как произведение множителей, линейных относительно x^2, y^2 и z^2, причем это произведение умножается еще на z, когда n нечетное. Тессеральные гармонические функции подобным же образом разлагаются на множители, линейные относительно x^2, y^2 и z^2, причем все произведения умножаются на одно из восьми произведений 1, x, y, z, yz, zx, xy, xyz.

Поверхностями, на которых данная зональная или тессеральная гармоническая функция обращается в нуль, являются поверхности, на которых θ или φ имеет некоторые постоянные значения, т. е. конусы вращения или плоскости, причем в определенных случаях в число их входят координатные плоскости.

Когда дело касается физических задач, связанных с эллипсоидами, координатные поверхности полярной системы координат, т. е. сферы, конусы и плоскости, заменяются софокусными поверхностями второго порядка. Только что объясненное свойство сферических гармонических функций подсказывает способ построения совокупности гармонических функций, обращающихся в нуль на определенных поверхностях этой софокусной системы.

Такие гармонические функции называются *эллипсоидальными* гармоническими функциями; они были изучены Ламе[1]) в первой половине XIX столетия при помощи эллипсоидальных координат.

Выражения для эллипсоидальных гармонических функций в декартовых координатах были получены много лет спустя Нивеном[2]), и нижеследующий обзор их построения основан на его исследованиях.

За основную поверхность примем эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

всякая софокусная с ним поверхность второго порядка будет

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}=1,$$

где θ — постоянная. Нам необходимо будет рассматривать совокупности таких поверхностей второго порядка, причем для краткости будем писать

$$\frac{x^2}{a^2+\theta_p}+\frac{y^2}{b^2+\theta_p}+\frac{z^2}{c^2+\theta_p}-1\equiv\Theta_p,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\theta_p}+\frac{y^2}{b^2+\theta_p}+\frac{z^2}{c^2+\theta_p}\equiv K_p.$$

Уравнение любой поверхности такой совокупности будет тогда

$$\Theta_p=0.$$

Анализ становится более определенным, если принять за ось Ox наибольшую ось основного эллипсоида, а за ось Oz наименьшую, так что $a>b>c$.

23.2. Четыре вида эллипсоидальных гармонических функций

Разложения сферических гармонических функций на множители дают повод предполагать, что следует рассмотреть четыре возможных вида эллипсоидальных гармонических функций. Таковые содержатся в схеме

$$\left\{\begin{matrix} & x, & yz, & \\ 1, & y, & zx, & xyz \\ & z, & xy, & \end{matrix}\right\}\Theta_1\Theta_2\,\ldots\,\Theta_m,$$

где то или иное из выражений в фигурных скобках служит множителем при произведении $\Theta_1\Theta_2\,\ldots\,\Theta_m$.

1) L a m é, Journ. de Math., IV (1839), 100—125, 126—163.
2) W. D. N i v e n, Phil. Trans, 182A (1892), 231—278.

Если обозначить для краткости

$$\Theta_1\Theta_2 \ldots \Theta_m = \Pi(\Theta),$$

то любая гармоническая функция вида $\Pi(\Theta)$ называется *эллипсоидальной гармонической функцией первого вида.*

Гармоническая функция любой из трех форм[1]) $x\Pi(\theta)$, $y\Pi(\theta)$, $z\Pi(\theta)$ называется *эллипсоидальной гармонической функцией второго вида*; гармоническая функция любой из трех форм[1]) $yz\Pi(\Theta)$, $zx\Pi(\Theta)$, $xy\Pi(\Theta)$ называется *эллипсоидальной гармонической функцией третьего вида*; наконец, гармоническая функция формы $xyz\ \Pi(\Theta)$ — *эллипсоидальной гармонической функцией четвертого вида.*

Члены высшей степени в этих видах гармонических функций имеют соответственно степени $2m$, $2m+1$, $2m+2$, $2m+3$.

Впоследствии (§ 23.26) обнаружится, что можно составить $2n+1$ линейно независимых гармонических функций n-й степени, откуда будет следовать, что совокупность членов n-й степени в этих гармонических функциях образует фундаментальную систему (§ 18.3) гармонических функций n-й степени.

Перейдем к детальному рассмотрению построения гармонических функций первого вида и дадим затем общий обзор построения гармонических функций трех других видов. Читателя не затруднит заполнить пробелы в этом обзоре путем сравнения с соответствующими местами исследования для функций первого вида.

23.21. Построение эллипсоидальных гармонических функций первого вида

В качестве простого случая рассмотрим сначала гармонические функции первого вида и второй степени. Такая гармоническая функция должна быть просто вида Θ_1.

Результат действия оператора Лапласа, а именно

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \text{ на } \frac{x^2}{a^2+\theta_1}+\frac{y^2}{b^2+\theta_1}+\frac{z^2}{c^2+\theta_1}-1$$

будет

$$\frac{2}{a^2+\theta_1}+\frac{2}{b^2+\theta_1}+\frac{2}{c^2+\theta_1},$$

и таким образом, Θ_1 *будет гармонической функцией, если* θ_1 *является корнем квадратного уравнения*

$$(\theta+b^2)(\theta+c^2)+(\theta+c^2)(\theta+a^2)+(\theta+a^2)(\theta+b^2)=0.$$

---

[1]) Эти три формы одного и того же вида будем отличать друг от друга тем, что будем говорить, что они принадлежат к различным *типам* этого вида.

Один из корней этого квадратного уравнения лежит между $-c^2$ и $-b^2$, другой — между $-b^2$ и $-a^2$. Поэтому его корни различны, и, приняв за θ значение каждого корня по очереди, мы получим две [1]) эллипсоидальные гармонические функции первого вида и второй степени.

Теперь рассмотрим произведение $\Theta_1 \cdot \Theta_2 \ldots \Theta_m$; это произведение обозначим через $\Pi(\Theta)$ и предположим, что оно не имеет одинаковых множителей, — предположение, которое будет подтверждено позже (§ 23.43). Если временно рассматривать $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m$ как промежуточные переменные, то обычная формула дифференцирования сложной функции дает

$$\frac{\partial \Pi(\Theta)}{\partial x} = \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial \Pi(\Theta)}{\partial \Theta_p} \frac{\partial \Theta_p}{\partial x} = \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial \Pi(\Theta)}{\partial \Theta_p} \frac{2x}{a^2+\theta_p},$$

и если продифференцировать снова, то получим

$$\frac{\partial^2 \Pi(\Theta)}{\partial x^2} = \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial \Pi(\Theta)}{\partial \Theta_p} \frac{2}{a^2+\theta_p} + \sum_{p \neq q} \frac{\partial^2 \Pi(\Theta)}{\partial \Theta_p \, \partial \Theta_q} \frac{8x^2}{(a^2+\theta_p)(a^2+\theta_q)},$$

где последнее суммирование распространяется на все пары *неравных* целых чисел $1, 2, \ldots, m$. Члены, для которых $p=q$, могут быть опущены, так как ни одно из выражений $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m$ не входит в $\Pi(\Theta)$ в степени выше первой.

Результат применения оператора Лапласа к $\Pi(\Theta)$ будет

$$\sum_{p=1}^{m} \frac{\partial \Pi}{\partial \Theta_p} \left\{ \frac{2}{a^2+\theta_p} + \frac{2}{b^2+\theta_p} + \frac{2}{c^2+\theta_p} \right\} +$$
$$+ \sum_{p \neq q} \frac{\partial^2 \Pi(\Theta)}{\partial \Theta_p \, \partial \Theta_q} \left\{ \frac{8x^2}{(a^2+\theta_p)(a^2+\theta_q)} + \frac{8y^2}{(b^2+\theta_p)(b^2+\theta_q)} + \frac{8z^2}{(c^2+\theta_p)(c^2+\theta_q)} \right\}.$$

Но

$$\sum_{\binom{x,\, y,\, z}{a,\, b,\, c}} \frac{x^2}{(a^2+\theta_p)(a^2+\theta_q)} = \frac{\Theta_p - \Theta_q}{\theta_q - \theta_p};$$

далее, $\dfrac{\partial \Pi(\Theta)}{\partial \Theta_p}$ есть произведение $\Pi(\Theta)$ за вычетом множителя Θ_p, в то время как $\dfrac{\partial^2 \Pi(\Theta)}{\partial \Theta_p \, \partial \Theta_q}$ есть произведение $\Pi(\Theta)$ за вычетом множителей Θ_p и Θ_q.

---

[1]) Полная совокупность пяти эллипсоидальных гармонических функций второй степени составляется из этих двух вместе с тремя гармоническими функциями yz, zx, xy, которые будут третьего вида.

Таким образом,

$$\Theta_p \frac{\partial^2 \Pi(\Theta)}{\partial\Theta_p \partial\Theta_q} = \frac{\partial \Pi(\Theta)}{\partial\Theta_q}, \quad \Theta_q \frac{\partial^2 \Pi(\Theta)}{\partial\Theta_p \partial\Theta_q} = \frac{\partial \Pi(\Theta)}{\partial\Theta_p}.$$

Принимая все это во внимание, видим, что

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \Pi(\Theta)$$

может быть написано в виде

$$\sum_{p=1}^{m} \frac{\partial \Pi(\Theta)}{\partial\Theta_p} \left\{ \frac{2}{a^2+\theta_p} + \frac{2}{b^2+\theta_p} + \frac{2}{c^2+\theta_p} + \sum_{q=1}^{m}{}' \frac{8}{\theta_p - \theta_q} \right\},$$

причем штрих обозначает, что член с $q = p$ при суммировании опускается.

Если $\Pi(\Theta)$ — гармоническая функция, то оператор Лапласа обращает ее в нуль, и это наверное будет иметь место, если можно подобрать $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ так, чтобы удовлетворялись уравнения

$$\frac{1}{a^2+\theta_p} + \frac{1}{b^2+\theta_p} + \frac{1}{c^2+\theta_p} + \sum{}' \frac{4}{\theta_p - \theta_q} = 0,$$

где p принимает значения $1, 2, \ldots, m$.

Пусть теперь θ — переменная и $\Lambda_1(\theta)$ обозначает полином степени m относительно θ:

$$\prod_{q=1}^{m} (\theta - \theta_q).$$

Если $\Lambda_1'(\theta)$ обозначает $d\Lambda_1(\theta)/d\theta$, то непосредственным дифференцированием получим, что $\Lambda_1'(\theta)$ равна сумме всех возможных произведений выражений $\theta - \theta_1, \theta - \theta_2, \ldots, \theta - \theta_m$, взятых по $m-1$, а $\Lambda_1''(\theta)$ равна удвоенной сумме всех произведений тех же самых выражений, взятых по $m-2$.

Поэтому, если дать θ частное значение θ_p, то отношение

$$\Lambda_1''(\theta_p) / \Lambda_1'(\theta_p)$$

будет равно удвоенной сумме обратных величин выражений $\theta_p - \theta_1$, $\theta_p - \theta_2, \ldots, \theta_p - \theta_m$ (выражение $\theta_p - \theta_p$ опускается).

Следовательно, совокупность уравнений, вытекающих из предположения, что $\prod_{p=1}^{m} \Theta_p$ — гармоническая функция, показывает, что выражение

$$\frac{1}{a^2+\theta} + \frac{1}{b^2+\theta} + \frac{1}{c^2+\theta} + \frac{2\Lambda_1''(\theta)}{\Lambda_1'(\theta)}$$

обращается в нуль, когда θ принимает частные значения $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$.

Отсюда видно, что выражение

$$(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)\Lambda_1''(\theta)+\frac{1}{2}\left\{\sum_{a,b,c}(b^2+\theta)(c^2+\theta)\right\}\Lambda_1'(\theta)$$

есть полином относительно θ, обращающийся в нуль, когда θ принимает какое-либо из значений $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, и следовательно, он имеет линейные множители $\theta-\theta_1, \theta-\theta_2, \ldots, \theta-\theta_m$. Но этот полином имеет степень $m+1$ относительно θ и коэффициент при θ^{m+1} равен $m\left(m+\frac{1}{2}\right)$. Так как m множителей известны, то остающийся множитель должен иметь вид

$$m\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{1}{4}C,$$

где C — постоянная, которая будет определена впоследствии.

Таким образом, мы показали, что

$$(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)\Lambda_1''(\theta)+\frac{1}{2}\left\{\sum_{a,b,c}(b^2+\theta)(c^2+\theta)\right\}\Lambda_1'(\theta)=$$
$$=\left\{m\left(m+\frac{1}{2}\right)\theta+\frac{1}{4}C\right\}\Lambda_1(\theta).$$

Другими словами, любую эллипсоидальную гармоническую функцию первого вида (четной) степени n можно представить в форме

$$\prod_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\left\{\frac{x^2}{a^2+\theta_p}+\frac{y^2}{b^2+\theta_p}+\frac{z^2}{c^2+\theta_p}-1\right\},$$

где $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\frac{1}{2}n}$ — нули некоторого полинома $\Lambda_1(\theta)$ степени $\frac{1}{2}n$; а этот полином в свою очередь должен быть решением дифференциального уравнения типа

$$4\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}\,\frac{d}{d\theta}\left[\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}\,\frac{d\Lambda_1(\theta)}{d\theta}\right]=$$
$$=\{n(n+1)\theta+C\}\,\Lambda_1(\theta).$$

Это уравнение называется *дифференциальным уравнением Ламе*. Оно будет исследовано весьма подробно в §§ 23.4—23.71, и при исследовании окажется, что: (I) имеется ровно $\frac{1}{2}n+1$ разных вещественных значений C, для которых уравнение имеет решение в виде полинома относительно θ степени $\frac{1}{2}n$, и (II) что эти полиномы не имеют кратных корней.

Рассуждения этого параграфа можно было бы после этого провести шаг за шагом в обратном порядке: мы установили бы существование $\frac{1}{2}n+1$ эллипсоидальных гармонических функций первого вида (четной) степени n, и элементарная теория гармонических функций первого вида была бы закончена.

Теперь мы вкратце укажем соответствующие результаты для гармоник второго, третьего и четвертого вида, придерживаясь, пока это возможно, уже введенных обозначений.

23.22. Эллипсоидальные гармонические функции второго вида

За типичную гармоническую функцию второго вида степени $2m+1$ примем $x\prod\limits_{p=1}^{m}\Theta_p$. Результат применения оператора Лапласа к ней выразится так:

$$x\left[\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial\Pi(\Theta)}{\partial\Theta_p}\left\{\frac{6}{a^2+\theta_p}+\frac{2}{b^2+\theta_p}+\frac{2}{c^2+\theta_p}\right\}+\right.$$
$$+\sum_{p\neq q}\frac{\partial^2\Pi(\Theta)}{\partial\Theta_p\,\partial\Theta_q}\left\{\frac{8x^2}{(a^2+\theta_p)(a^2+\theta_q)}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{8y^2}{(b^2+\theta_p)(b^2+\theta_q)}+\frac{8z^2}{(c^2+\theta_p)(c^2+\theta_q)}\right\}\right],$$

и это выражение должно обращаться в нуль. Отсюда, полагая

$$\Lambda_2(\theta)\equiv\prod_{q=1}^{m}(\theta-\theta_q),$$

найдем, рассуждая как в § 23.21, что $\Lambda_2(\theta)$ является решением дифференциального уравнения

$$\left(a^2+\theta\right)\left(b^2+\theta\right)\left(c^2+\theta\right)\Lambda_2''(\theta)+\frac{1}{2}\left\{3\left(b^2+\theta\right)\left(c^2+\theta\right)+\right.$$
$$\left.+\left(c^2+\theta\right)\left(a^2+\theta\right)+\left(a^2+\theta\right)\left(b^2+\theta\right)\right\}\Lambda_2'(\theta)=$$
$$=\left\{m\left(m+\frac{3}{2}\right)\theta+\frac{1}{4}C_2\right\}\Lambda_2(\theta),$$

где C_2 — постоянная, подлежащая определению.

Если теперь положим $\Lambda_2(\theta)\equiv\dfrac{\Lambda(\theta)}{\sqrt{a^2+\theta}}$, то увидим, что $\Lambda(\theta)$ является решением дифференциального уравнения

$$4\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}\,\frac{d}{d\theta}\left[\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}\,\frac{d\Lambda(\theta)}{d\theta}\right]=$$
$$=\{(2m+1)(2m+2)\theta+C\}\,\Lambda(\theta),$$

где
$$C = C_2 + b^2 + c^2.$$

Заметим, что это дифференциальное уравнение того же самого типа, что и уравнение, выведенное в § 23.21; постоянная n и здесь равна степени гармонической функции, так как степень в данном случае равна $2m+1$.

Отсюда вытекает, что исследование гармонических функций второго вида сводится к исследованию решений дифференциального уравнения Ламе. В случае гармонических функций первого типа требуется, чтобы решения были полиномами относительно θ, умноженными на $\sqrt{a^2+\theta}$; соответствующие множители для гармонических функций второго и третьего типа будут $\sqrt{b^2+\theta}$ и $\sqrt{c^2+\theta}$. Позже будет показано, что каждому из трех типов будет соответствовать в точности $m+1$ значений C, так что в общем получается $3m+3$ гармонических функций второго вида степени $2m+1$.

23.23. Эллипсоидальные гармонические функции третьего вида

За типичную гармоническую функцию третьего вида степени $2m+2$ примем $yz\prod_{p=1}^{m}\Theta_p$. Результат применения оператора Лапласа к этой функции будет

$$yz\left[\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial\Pi(\Theta)}{\partial\Theta_p}\left\{\frac{2}{a^2+\theta_p}+\frac{6}{b^2+\theta_p}+\frac{6}{c^2+\theta_p}\right\}+\right.$$
$$+\sum_{p\neq q}\frac{\partial^2\Pi(\Theta)}{\partial\Theta_p\,\partial\Theta_q}\left\{\frac{8x^2}{(a^2+\theta_p)(a^2+\theta_q)}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{8y^2}{(b^2+\theta_p)(b^2+\theta_q)}+\frac{8z^2}{(c^2+\theta_p)(c^2+\theta_q)}\right\}\right],$$

и это выражение должно равняться нулю. Отсюда, полагая

$$\Lambda_3(\theta)\equiv\prod_{q=1}^{m}(\theta-\theta_q),$$

найдем, рассуждая, как в § 23.21, что $\Lambda_3(\theta)$ будет решением дифференциального уравнения

$$(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)\Lambda_3''(\theta)+\frac{1}{2}\{(b^2+\theta)(c^2+\theta)+$$
$$+3(c^2+\theta)(a^2+\theta)+3(a^2+\theta)(b^2+\theta)\}\Lambda_3'(\theta)=$$
$$=\left\{m\left(m+\frac{5}{2}\right)\theta+\frac{1}{4}C_3\right\}\Lambda_3(\theta),$$

где C_3 — постоянная, подлежащая определению.

Если теперь положим

$$\Lambda_3(\theta) \equiv \frac{\Lambda(\theta)}{\sqrt{(b^2+\theta)(c^2+\theta)}},$$

то найдем, что $\Lambda(\theta)$ является решением дифференциального уравнения

$$4\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}\,\frac{d}{d\theta}\left[\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}\,\frac{d\Lambda(\theta)}{d\theta}\right] = \\ = \{(2m+2)(2m+3)\theta + C\}\,\Lambda(\theta),$$

где

$$C = C_3 + 4a^2 + b^2 + c^2.$$

Заметим, что последнее уравнение того же самого типа, что и уравнение, полученное в § 23.21; постоянная n по-прежнему равна степени гармонической функции, которая в данном случае равна $2m+2$.

Отсюда вытекает, что исследование гармонических функций третьего вида приводится к исследованию решений дифференциального уравнения Ламе. В случае гармонических функций первого типа требуется, чтобы решения были полиномами относительно θ, умноженными на $\sqrt{(b^2+\theta)(c^2+\theta)}$; соответствующие множители для гармонических функций второго и третьего типа будут $\sqrt{(c^2+\theta)(a^2+\theta)}$ и $\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)}$.

Позже будет показано, что каждому из трех типов соответствует ровно $m+1$ значений C, так что в общем получается $3m+3$ гармонических функций третьего вида степени $2m+2$.

23.24. Эллипсоидальные гармонические функции четвертого вида

Гармоническую функцию четвертого вида степени $2m+3$ можно представить в форме $xyz\prod\limits_{p=1}^{m}\Theta_p$. Результат применения к ней оператора Лапласа будет

$$xyz\left[\sum_{p=1}^{m}\frac{\partial\Pi(\Theta)}{\partial\Theta_p}\left\{\frac{6}{a^2+\theta_p}+\frac{6}{b^2+\theta_p}+\frac{6}{c^2+\theta_p}\right\}+ \right.\\ + \sum_{p\neq q}\frac{\partial^2\Pi(\Theta)}{\partial\Theta_p\,\partial\Theta_q}\left\{\frac{8x^2}{(a^2+\theta_p)(a^2+\theta_q)}+\right.\\ \left.\left.+\frac{8y^2}{(b^2+\theta_p)(b^2+\theta_q)}+\frac{8z^2}{(c^2+\theta_p)(c^2+\theta_q)}\right\}\right];$$

это выражение должно равняться нулю. Отсюда, полагая

$$\Lambda_4(\theta) \equiv \prod_{q=1}^{m} (\theta - \theta_q),$$

найдем, рассуждая, как в § 23.21, что $\Lambda_4(\theta)$ является решением уравнения

$$(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)\Lambda_4''(\theta) + \frac{3}{2}\left\{\sum_{a,\,b,\,c}(b^2+\theta)(c^2+\theta)\right\}\Lambda_4'(\theta) =$$
$$= \left\{m\left(m+\frac{7}{2}\right)\theta + \frac{1}{4}C_4\right\}\Lambda_4(\theta),$$

где C_4 — постоянная, подлежащая определению.

Если теперь положить

$$\Lambda_4(\theta) \equiv \Lambda(\theta)/\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)},$$

то найдем, что $\Lambda(\theta)$ является решением дифференциального уравнения

$$4\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}\,\frac{d}{d\theta}\left[\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}\,\frac{d\Lambda(\theta)}{d\theta}\right] =$$
$$= \{(2m+3)(2m+4)\theta + C\}\Lambda(\theta),$$

где

$$C = C_4 + 4(a^2+b^2+c^2).$$

Заметим, что последнее уравнение того же самого типа, что и уравнение, полученное в § 23.21; постоянная n и здесь равна степени гармонической функции, которая в данном случае равна $2m+3$.

Отсюда следует, что исследование гармонических функций четвертого вида приводится к исследованию решений дифференциального уравнения Ламе. Требуется, чтобы решения были полиномами относительно θ, умноженными на $\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}$. Позже будет показано, что этому типу решений соответствует ровно $m+1$ значений C, так что получается $m+1$ гармонических функций четвертого вида степени $2m+3$.

23.25. Выражения Нивена для эллипсоидальных гармонических функций через однородные гармонические функции

Если $G_n(x, y, z)$ обозначает какую-либо из гармонических функций степени n, предварительное построение которых только что было произведено, то $G_n(x, y, z)$ состоит из конечного числа членов степеней n, $n-2$, $n-4$, ... относительно x, y, z. Если $H_n(x, y, z)$ представляет совокупность членов степени n, из однородности оператора Лапласа следует, что $H_n(x, y, z)$ сама является решением уравнения Лапласа; эта функция может быть, очевидно, получена из $G_n(x, y, z)$ заменой множителей Θ_p, встречающихся в выражении функции $G_n(x, y, z)$ в виде произведения, множителями K_p.

Нивен (цит. сочинение, стр. 243—245) показал, что $G_n(x, y, z)$ можно получить из $H_n(x, y, z)$, применяя к последней функции дифференциальный оператор

$$1 - \frac{D^2}{2(2n-1)} + \frac{D^4}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)} - \\ - \frac{D^6}{2\cdot 4\cdot 6\,(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \ldots,$$

где D^2 обозначает символ

$$a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + c^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и члены, содержащие степени D, бо̀льшие n, могут быть опущены.

Дадим доказательство этого результата для любой гармонической функции первого вида [1]).

Для таких гармонических функций степень будет четной, и мы положим

$$G_n(x, y, z) = \prod_{p=1}^{\frac{1}{2}n} \Theta_p = \prod_{p=1}^{\frac{1}{2}n} (K_p - 1) = S_n - S_{n-2} + S_{n-4} - \ldots,$$

где S_n, S_{n-2}, S_{n-4}, ... — однородные функции степеней n, $n-2$, $n-4$, ... соответственно и

$$S_n = H_n(x, y, z) = \prod_{p=1}^{\frac{1}{2}n} K_p.$$

Функция S_{n-2r}, очевидно, равна сумме произведений множителей $K_1, K_2, \ldots, K_{\frac{1}{2}n}$, взятых по $\frac{1}{2}n - r$.

Если $K_1, K_2, \ldots, K_{\frac{1}{2}n}$ рассматривать как промежуточные переменные, то по обычной формуле дифференцирования сложной

[1]) Доказательства для гармонических функций трех других видов предоставляются читателю в виде упражнения. Доказательство, приложимое к функциям всех четырех видов, дано Гобсоном (Hobson, Proc. London Math. Soc., XXIV (1893), 60—64). Доказательство, приведенное в тексте, представляет некоторое видоизменение доказательства Нивена.

Доказательство Гобсона приведено также в его книге «Теория сферических и эллипсоидальных функций», ИЛ, 1952, стр. 458—461. — *Прим. ред.*

функции имеем

$$\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial x}=\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}\frac{\partial K_p}{\partial x}=\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}\frac{2x}{a^2+\theta_p},$$

и если продифференцируем снова, то получим

$$\frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial x^2}=\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}\frac{2}{a^2+\theta_p}+\sum_{p\neq q}\frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p\,\partial K_q}\frac{8x^2}{(a^2+\theta_p)(a^2+\theta_q)}.$$

Члены с $\partial^2 S_{n-2r}/\partial K_p^2$ могут быть опущены, так как ни одна из функций K_p не встречается в S_{n-2r} в степени выше первой.

Отсюда следует, что

$$D^2 S_{n-2r}=\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}\left\{\frac{2a^2}{a^2+\theta_p}+\frac{2b^2}{b^2+\theta_p}+\frac{2c^2}{c^2+\theta_p}\right\}+$$
$$+\sum_{p\neq q}\frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p\,\partial K_q}\left\{\frac{8a^2x^2}{(a^2+\theta_p)(a^2+\theta_q)}+\frac{8b^2y^2}{(b^2+\theta_p)(b^2+\theta_q)}+\right.$$
$$\left.+\frac{8c^2z^2}{(c^2+\theta_p)(c^2+\theta_q)}\right\}.$$

Теперь покажем, что выражение справа отличается лишь постоянным множителем от S_{n-2r-2}.

Заметим сначала, что

$$\sum_{\left(\begin{smallmatrix}x,\ y,\ z\\ a,\ b,\ c\end{smallmatrix}\right)}\frac{a^2x^2}{(a^2+\theta_p)(a^2+\theta_q)}=\frac{\theta_pK_p-\theta_qK_q}{\theta_p-\theta_q}$$

и что согласно уравнению § 23.21 для θ_p

$$\sum_{a,\,b,\,c}\frac{a^2}{a^2+\theta_p}=3-\theta_p\sum_{a,\,b,\,c}\frac{1}{a^2+\theta_p}=3+\theta_p{\sum_{q=1}^{\frac{1}{2}n}}'\frac{4}{\theta_p-\theta_q},$$

так что

$$D^2S_{n-2r}=6\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}+8\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\theta_p\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}\left\{{\sum_{q=1}^{\frac{1}{2}n}}'\frac{1}{\theta_p-\theta_q}\right\}+$$
$$+8\sum_{p\neq q}\frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p\,\partial K_q}\frac{\theta_pK_p-\theta_qK_q}{\theta_p-\theta_q}.$$

Но $\partial S_{n-2r}/\partial K_p$ равна сумме произведений выражений K_1, K_2, .., $K_{\frac{1}{2}n}$ (где K_p опускается), взятых по $\frac{1}{2}n-r-1$; а $K_q\,\partial^2 S_{n-2r}/(\partial K_p\,\partial K_q)$ состоит из тех членов этой суммы, которые содержат множитель K_q.

Следовательно,

$$\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-K_q\frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p\partial K_q}$$

равна сумме произведений выражений K_1, K_2, ..., $K_{\frac{1}{2}n}$ (где K_p и K_q опускаются), взятых по $\frac{1}{2}n-r-1$; а потому по симметрии имеем

$$\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-K_q\frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p\,\partial K_q}=\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_q}-K_p\frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p\,\partial K_q},$$

так что

$$\frac{\partial^2 S_{n-2r}}{\partial K_p\,\partial K_q}=\left\{\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_q}\right\}\Big/(K_q-K_p).$$

После подстановки этого выражения для второй производной найдем, что

$$D^2S_{n-2r}=\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}\left[6+8\theta_p\sum_{q=1}^{\frac{1}{2}n}{}'\frac{1}{\theta_p-\theta_q}-8\sum_{q=1}^{\frac{1}{2}n}{}'\frac{\theta_pK_p-\theta_qK_q}{(\theta_p-\theta_q)(K_p-K_q)}\right]=$$

$$=\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}\left[6-8\sum_{q=1}^{\frac{1}{2}n}{}'\frac{K_q}{K_p-K_q}\right]=$$

$$=(4n-2)\sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n}\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-8\sum_{p\neq q}\left\{K_p\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-K_q\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_q}\right\}\Big/(K_p-K_q).$$

Далее, мы можем записать S_{n-2r} в форме $\bar{S}_{n-2r}+K_p\bar{S}_{n-2r-2}+$ $+K_q\bar{S}_{n-2r-2}+K_pK_q\bar{S}_{n-2r-4}$, где $\bar{S}_{2m}$ обозначает сумму произведений K_1, K_2, ..., $K_{\frac{1}{2}n}$ (где K_p и K_q опускаются), взятых по m; тогда мы увидим, что

$$K_p\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p}-K_q\frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_q}=(K_p-K_q)\bar{S}_{n-2r-2}.$$

Отсюда

$$D^2 S_{n-2r} = (4n-2) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p} - 8 \sum_{p \neq q} \bar{S}_{n-2r-2}.$$

Теперь ясно, что выражение справа есть однородная симметрическая функция от $K_1, K_2, \ldots, K_{\frac{1}{2}n}$ степени $\frac{1}{2}n - r - 1$; кроме того, оно не содержит ни одного из выражений $K_1, K_2, \ldots, K_{\frac{1}{2}n}$ в степени выше первой. Поэтому оно будет кратным выражению S_{n-2r-2}. Для определения постоянного множителя отметим, что когда S_{n-2r-2} написано в развернутом виде, то оно содержит $C_{\frac{1}{2}n}^{r+1}$ членов, тогда как число членов в

$$(4n-2) \sum_{p=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{\partial S_{n-2r}}{\partial K_p} - 8 \sum_{p \neq q} \bar{S}_{n-2r-2}$$

равно

$$\frac{1}{2} n (4n-2) \cdot C_{\frac{1}{2}n-1}^{r} - 8 \cdot C_{\frac{1}{2}n}^{2} \cdot C_{\frac{1}{2}n-2}^{r-1}.$$

Искомый множитель, следовательно, будет

$$\frac{\frac{1}{2} n (4n-2) \cdot C_{\frac{1}{2}n-1}^{r} - 8 \cdot C_{\frac{1}{2}n}^{2} \cdot C_{\frac{1}{2}n-2}^{r-1}}{C_{\frac{1}{2}n}^{r+1}},$$

что равно $(2r+2)(2n-2r-1)$.

Следовательно, доказано, что

$$D^2 S_{n-2r} = (2r+2)(2n-2r-1) S_{n-2r-2}.$$

По индукции непосредственно получается, что

$$S_{n-2r} = \frac{D^{2r} S_n}{2 \cdot 4 \ldots 2r \cdot (2n-1)(2n-3) \ldots (2n-2r+1)},$$

и формула

$$G_n(x, y, z) = \left[\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}n} \frac{(-1)^r D^{2r}}{2\cdot 4 \ldots 2r(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+1)}\right] H_n(x, y, z),$$

где $G_n(x, y, z)$ — эллипсоидальная гармоническая функция первого вида, теперь очевидна.

Пример 1. Доказать формулу Нивена, когда $G_n(x, y, z)$ — эллипсоидальная гармоническая функция второго, третьего или четвертого вида.

Пример 2. Получить символическую формулу

$$G_n(x, y, z) = \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)\left(\frac{1}{2}D\right)^{n+\frac{1}{2}} I_{-n-\frac{1}{2}}(D)\cdot H_n(x, y, z).$$

23.26. Эллипсоидальные гармонические функции степени n

Результаты, доказанные и высказанные в §§ 23.21—23.24, показывают, что когда n четное, то имеется $\frac{1}{2}n+1$ гармонических функций первого вида и $\frac{3}{2}n$ гармонических функций третьего вида; когда n нечетное, то имеется $\frac{3}{2}(n+1)$ гармонических функций второго вида и $\frac{1}{2}(n-1)$ гармонических функций четвертого вида, так что в каждом случае имеется в общем $2n+1$ гармонических функций.

Из § 18.3 следует, что если совокупности членов степени n в этих гармонических функциях линейно независимы, то они составляют фундаментальную систему гармонических функций степени n; любая однородная гармоническая функция степени n может быть выражена как линейная комбинация однородных гармонических функций, которые получаются отбором членов степени n из $2n+1$ эллипсоидальных гармонических функций.

Для того чтобы получить результаты о числе гармонических функций степени n и установить их линейную независимость, необходимо глубже заняться изучением уравнения Ламе, но, прежде чем приступить к этому исследованию, займемся представлением эллипсоидальных гармонических функций в эллипсоидальных координатах.

Эти выражения для эллипсоидальных гармонических функций имеют историческое значение ввиду исследований Ламе, но выражения, только что полученные методом Нивена, в некоторых отношениях более удобны для физических приложений.

О приложениях эллипсоидальных гармонических функций к исследованию фигуры Земли и о приведении гармонических функций к формам, приспособленным к численному вычислению, читатель может прочесть в мемуаре Дарвина: G. H. Darwin, Phil. Trans., 197A (1901), 461—537.

23.3. Эллипсоидальные координаты

Если (X, Y, Z) обозначают текущие координаты в трехмерном пространстве и если a, b, c положительны $(a > b > c)$, то уравнение

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$

представляет эллипсоид; уравнение любой софокусной поверхности второго порядка будет

$$\frac{X^2}{a^2+\theta}+\frac{Y^2}{b^2+\theta}+\frac{Z^2}{c^2+\theta}=1,$$

где θ называется *параметром* этой поверхности.

Поверхность второго порядка проходит через заданную точку (x, y, z), если θ взято так, что

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^4+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}=1.$$

Независимо от того, удовлетворяет ли θ этому уравнению, удобно писать

$$1-\frac{x^2}{a^2+\theta}-\frac{y^2}{b^2+\theta}-\frac{z^2}{c^2+\theta}\equiv\frac{f(\theta)}{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)},$$

и так как $f(\theta)$ — кубический полином от θ, то ясно, что через каждую заданную точку (x, y, z) проходят, вообще говоря, три поверхности второго порядка софокусной системы.

Для определения характера этих трех поверхностей второго порядка составим следующую таблицу:

θ	$f(\theta)$
$-\infty$	$-\infty$
$-a^2$	$-x^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)$
$-b^2$	$y^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)$
$-c^2$	$-z^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)$
$+\infty$	$+\infty$

Из этой таблицы видно, что уравнение $f(\theta)=0$ имеет три вещественных корня λ, μ, ν, и если они расположены так, что

$\lambda > \mu > \nu$, то

$$\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2;$$

кроме того,

$$f(\theta) \equiv (\theta - \lambda)(\theta - \mu)(\theta - \nu).$$

Из значений λ, μ, ν ясно, что поверхности, на которых θ имеет значения λ, μ, ν, суть соответственно эллипсоид, однополостный гиперболоид и двуполостный гиперболоид.

Возьмем теперь тождество относительно θ:

$$1 - \frac{x^2}{a^2+\theta} - \frac{y^2}{b^2+\theta} - \frac{z^2}{c^2+\theta} \equiv \frac{(\theta-\lambda)(\theta-\mu)(\theta-\nu)}{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)},$$

умножим его последовательно на $a^2+\theta$, $b^2+\theta$, $c^2+\theta$ и после этого заменим θ соответственно на $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$. Таким образом найдем, что

$$x^2 = \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2 = -\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)},$$

$$z^2 = \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

Из этих уравнений ясно, что если (x, y, z) — какая-нибудь точка пространства и если λ, μ, ν обозначают параметры поверхностей второго порядка, софокусных с

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1,$$

проходящих через эту точку, то (x^2, y^2, z^2) однозначно определяются через (λ, μ, ν), и наоборот.

Параметры (λ, μ, ν) называются *эллипсоидальными координатами* точки (x, y, z) относительно основного эллипсоида

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1.$$

Легко показать, что эллипсоидальные координаты образуют ортогональную систему; в самом деле, рассмотрим направляющие косинусы касательной к кривой пересечения поверхностей (μ) и (ν); эти косинусы будут пропорциональны выражениям

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \frac{\partial z}{\partial \lambda}\right),$$

и так как

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu} = \frac{1}{4}\sum_{a, b, c} \frac{a^2+\nu}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} = 0,$$

то очевидно, что направления

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}, \frac{\partial y}{\partial\lambda}, \frac{\partial z}{\partial\lambda}\right), \quad \left(\frac{\partial x}{\partial\mu}, \frac{\partial y}{\partial\mu}, \frac{\partial z}{\partial\mu}\right)$$

перпендикулярны; подобным же образом каждое из этих направлений перпендикулярно направлению

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\nu}, \frac{\partial y}{\partial\nu}, \frac{\partial z}{\partial\nu}\right).$$

Таким образом, показано, что три системы поверхностей, на которых λ, μ, ν соответственно будут постоянными, образуют триортогональную систему.

Поэтому квадрат линейного элемента, а именно

$$(\delta x)^2+(\delta y)^2+(\delta z)^2,$$

может быть представлен в виде

$$(H_1\,\delta\lambda)^2+(H_2\,\delta\mu)^2+(H_3\,\delta\nu)^2,$$

где

$$H_1^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)^2;$$

подобные же выражения имеют место для H_2^2 и H_3^2 с заменой λ на μ и ν.

Чтобы выразить H_1^2 через (λ, μ, ν), заметим, что

$$H_1^2=\frac{1}{4x^2}\left(\frac{\partial x^2}{\partial\lambda}\right)^2+\frac{1}{4y^2}\left(\frac{\partial y^2}{\partial\lambda}\right)^2+\frac{1}{4z^2}\left(\frac{\partial z^2}{\partial\lambda}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{a,b,c}\frac{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2+\lambda)(a^2-b^2)(a^2-c^2)}.$$

Но если разложим

$$\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

как функцию от λ, на простейшие дроби, то увидим, что она как раз равна

$$\sum_{a,b,c}\frac{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2+\lambda)(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

и следовательно,

$$H_1^2=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}.$$

Значения H_2^2 и H_3^2 получаются из этого выражения круговой перестановкой (λ, μ, ν).

Формулы, эквивалентные выведенным в этом параграфе, были получены Ламе (Lamé, Journ. de Math., II (1837), 147—183).

Пример 1. В обозначениях этого параграфа показать, что

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2+\lambda+\mu+\nu.$$

Пример 2. Показать, что

$$4H_1^2=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}.$$

23.31. Униформизирующие переменные, связанные с эллипсоидальными координатами

В § 23.3 мы видели, что если выразить декартовы координаты (x, y, z) через эллипсоидальные координаты (λ, μ, ν), то полученные таким образом выражения не будут однозначными функциями от (λ, μ, ν). Для того чтобы избегнуть вызываемой этим неопределенности, выразим (λ, μ, ν) через три новые переменные (u, v, w) соответственно, положив

$$\wp(u)=\lambda+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

$$\wp(v)=\mu+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

$$\wp(w)=\nu+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

где инварианты g_2 и g_3 эллиптической функции Вейерштрасса определяются тождеством

$$4(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\equiv 4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3.$$

Дискриминант, соответствующий этим эллиптическим функциям (ср. § 20.33, пример 3), будет равен

$$16(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2(c^2-a^2)^2,$$

и таким образом, он будет положителен; поэтому[1]) первый из трех периодов $2\omega_1$, $2\omega_2$ и $2\omega_3$, а именно период $2\omega_1$, будет положительным, период же $2\omega_3$ чисто мнимым; $2\omega_2$ имеет отрицательную вещественную часть, так как $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$; мнимая часть ω_2 будет положительной, так как $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1)>0$.

При этих обстоятельствах $e_1>e_2>e_3$, и таким образом, имеем

$$3e_1=a^2+b^2-2c^2,\quad 3e_2=c^2+a^2-2b^2,\quad 3e_3=b^2+c^2-2a^2.$$

---

[1]) Ср. пример 1 § 20.32.

Выразив затем (x, y, z) через (u, v, w), получим

$$x^2 = \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} = \frac{\{\wp(u)-e_3\}\{\wp(v)-e_3\}\{\wp(w)-e_3\}}{(e_1-e_3)(e_2-e_3)} =$$

$$= \frac{\sigma_3^2(u)\,\sigma_3^2(v)\,\sigma_3^2(w)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)\,\sigma^2(w)}\,\frac{\sigma^2(\omega_1)\,\sigma^2(\omega_2)}{\sigma_3^2(\omega_1)\,\sigma_3^2(\omega_2)}$$

согласно примеру 4 § 20.53. Поэтому по § 20.421 имеем

$$x = \pm e^{-\eta_3\omega_3}\sigma^2(\omega_3)\frac{\sigma_3(u)\,\sigma_3(v)\,\sigma_3(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)}$$

и подобным же образом

$$y = \pm e^{-\eta_2\omega_2}\sigma^2(\omega_2)\frac{\sigma_2(u)\,\sigma_2(v)\,\sigma_2(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)},$$

$$z = \pm e^{-\eta_1\omega_1}\sigma^2(\omega_1)\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_1(v)\,\sigma_1(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)}.$$

Результат увеличения каждой из переменных u, v, w на $2\omega_3$ скажется в изменении знака выражения для x, в то время как выражения для y и z остаются без изменения; подобное же утверждение имеет место при увеличении u, v, w на $2\omega_2$ и $2\omega_1$; и кроме того каждое из трех выражений изменяет знак при изменении знаков у u, v, w.

Отсюда следует, что если взять верхние знаки в этих двузначных выражениях, то будет иметь место однозначное соответствие между всеми совокупностями значений (x, y, z), вещественными или комплексными, и всеми совокупностями значений (u, v, w), у которых все три представителя u, v и w лежат в любой заданной ячейке.

Униформизация, следовательно, осуществляется, если взять

$$x = e^{-\eta_3\omega_3}\sigma^2(\omega_3)\frac{\sigma_3(u)\,\sigma_3(v)\,\sigma_3(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)},$$

$$y = e^{-\eta_2\omega_2}\sigma^2(\omega_2)\frac{\sigma_2(u)\,\sigma_2(v)\,\sigma_2(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)},$$

$$z = e^{-\eta_1\omega_1}\sigma^2(\omega_1)\frac{\sigma_1(u)\,\sigma_1(v)\,\sigma_1(w)}{\sigma(u)\,\sigma(v)\,\sigma(w)}.$$

Формулы, отличающиеся от приведенных только перестановкой индексов 1 и 3, даны Альфаном (Halphen, Fonctions Elliptiques, II (1888), 459).

23.32. Уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах

Ламе и Томсоном[1]) было показано, что уравнение Лапласа, отнесенное к любой ортогональной системе координат (λ, μ, ν), имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right\}+\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial\mu}\right\}+\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial V}{\partial\nu}\right\}=0,$$

где (H_1, H_2, H_3) определяются тем, что

$$(H_1\,\delta\lambda)^2+(H_2\,\delta\mu)^2+(H_3\,\delta\nu)^2$$

является квадратом линейного элемента. Хотя доказательство этого результата, принадлежащее Томсону и основанное на рассуждениях физического характера, чрезвычайно просто, все аналитические доказательства либо весьма длинны, либо сильно ужаты.

Тем не менее Ламе[2]) доказал, что в частном случае, когда (λ, μ, ν) — эллипсоидальные координаты, уравнение Лапласа принимает простую форму, которую можно получить без кропотливых выкладок; когда за координаты принимаются униформизирующие переменные (u, v, w) § 23.31, форма уравнения Лапласа становится еще проще.

Прямым дифференцированием можно доказать, что если *любые* три независимые функции (λ, μ, ν) от (x, y, z) принимаются за независимые переменные, то выражение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

преобразуется в такое:

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2\right]\frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2}+$$
$$+2\sum_{\lambda,\mu,\nu}\left[\frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{\partial\nu}{\partial x}+\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\nu}{\partial y}+\frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{\partial\nu}{\partial z}\right]\frac{\partial^2 V}{\partial\mu\,\partial\nu}+$$
$$+\sum_{\lambda,\mu,\nu}\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right]\frac{\partial V}{\partial\lambda}.$$

Для того чтобы упростить это выражение, заметим, что λ удовлетворяет уравнению

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

[1]) См. примечание на стр. 253.

[2]) Lamé, Journ. de Math., IV (1839), 133—136.

откуда, принимая x, y, z за независимые переменные, дифференцированием получим

$$\frac{2x}{a^2+\lambda}-\left\{\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right\}\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0,$$

$$\frac{2}{a^2+\lambda}-\frac{4}{(a^2+\lambda)^2}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+2\left\{\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^3}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^3}\right\}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2-$$
$$-\left\{\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right\}\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}=0.$$

Отсюда находим

$$\frac{2x}{a^2+\lambda}=4H_1^2\frac{\partial\lambda}{\partial x},$$

$$\frac{2}{a^2+\lambda}-\frac{2x^2}{(a^2+\lambda)^3H_1^2}+\frac{x^2}{2H_1^4(a^2+\lambda)^2}\sum_{\binom{x,\,y,\,z}{a,\,b,\,c}}\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3}=4H_1^2\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}$$

и подобные же соотношения для μ, ν и y, z.

Из соотношения первого типа видно, что коэффициент при $\dfrac{\partial^2V}{\partial\lambda^2}$ равен $\dfrac{1}{H_1^2}$, а коэффициент при $\dfrac{\partial^2V}{\partial\mu\,\partial\nu}$ равен нулю; если сложить соотношения второго типа, получаемые круговой перестановкой x, y, z, то получим

$$4H_1^2\left\{\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}\right\}=\sum_{a,\,b,\,c}\frac{2}{a^2+\lambda}$$

и подобные же соотношения для μ и ν.

Если для краткости положим

$$\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\equiv\Delta_\lambda$$

и аналогично определим Δ_μ и Δ_ν, то увидим, что

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z^2}=\frac{\Delta_\lambda^2}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\left\{\frac{2}{a^2+\lambda}+\frac{2}{b^2+\lambda}+\frac{2}{c^2+\lambda}\right\}=$$
$$=\frac{4\Delta_\lambda}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\frac{d\Delta_\lambda}{d\lambda},$$

и таким образом, уравнение Лапласа примет вид

$$\sum_{\lambda,\,\mu,\,\nu}\frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\left[\Delta_\lambda^2\frac{\partial^2V}{\partial\lambda^2}+\Delta_\lambda\frac{d\Delta_\lambda}{d\lambda}\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right]=0$$

или

$$(\mu-\nu)\Delta_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\Delta_\lambda\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right\}+(\nu-\lambda)\Delta_\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\Delta_\mu\frac{\partial V}{\partial\mu}\right\}+$$
$$+(\lambda-\mu)\Delta_\nu\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\Delta_\nu\frac{\partial V}{\partial\nu}\right\}=0.$$

Эквивалентное уравнение с независимыми переменными (u, v, w) имеет вид

$$\{\wp(v)-\wp(w)\}\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\{\wp(w)-\wp(u)\}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}+\{\wp(u)-\wp(v)\}\frac{\partial^2 V}{\partial w^2}=0$$

или, короче,

$$(\mu-\nu)\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+(\nu-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}+(\lambda-\mu)\frac{\partial^2 V}{\partial w^2}=0.$$

Последние три уравнения будем рассматривать в дальнейшем исследовании как канонические формы уравнения Лапласа.

23.33. Эллипсоидальные гармонические функции в эллипсоидальных координатах

Если функцию Θ_p Нивена, определяемую как

$$\frac{x^2}{a^2+\theta_p}+\frac{y^2}{b^2+\theta_p}+\frac{z^2}{c^2+\theta_p}-1,$$

выразим через эллипсоидальные координаты (λ, μ, ν) точки (x, y, z), то она примет вид

$$-\frac{(\lambda-\theta_p)(\mu-\theta_p)(\nu-\theta_p)}{(a^2+\theta_p)(b^2+\theta_p)(c^2+\theta_p)},$$

и следовательно, если опустим постоянные множители вида

$$-(a^2+\theta_p)(b^2+\theta_p)(c^2+\theta_p),$$

эллипсоидальные гармонические функции примут вид

$$\left\{\begin{matrix} & x & yz & \\ 1 & y & zx & xyz \\ & z & xy & \end{matrix}\right\}\prod_{p=1}^{m}(\lambda-\theta_p)\prod_{p=1}^{m}(\mu-\theta_p)\prod_{p=1}^{m}(\nu-\theta_p).$$

Если теперь мы заменим x, y, z их выражениями через λ, μ, ν, то увидим, что любая *эллипсоидальная функция выражается, с точностью до постоянного множителя, в виде* $\Lambda\mathrm{MN}$, где Λ — функция только от λ, а M и N — такие же функции от μ и ν, как Λ от λ. Далее, Λ есть полином степени m относительно λ, умноженный в случае гармонических функций второго, третьего или четвертого вида на одно, два или три из выражений

$$\sqrt{a^2+\lambda},\quad \sqrt{b^2+\lambda},\quad \sqrt{c^2+\lambda}.$$

Так как полином, содержащийся в Λ, равен $\prod_{p=1}^{m}(\lambda-\theta_p)$, то из рассмотрения §§ 23.21—23.24 вытекает, что Λ является решением дифференциального уравнения Ламе

$$4\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\,\frac{d}{d\lambda}\left[\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\,\frac{d\Lambda}{d\lambda}\right]=$$
$$=\{n(n+1)\lambda+C\}\,\Lambda,$$

где n — степень рассматриваемой гармонической функции относительно x, y, z. К этому результату можно придти также, рассматривая решения уравнения Лапласа, которые имеют вид[1]):

$$V=\Lambda\mathrm{M}\mathrm{N},$$

где Λ, M, N — функции соответственно только от λ, μ, ν.

Ибо если подставить это выражение в уравнение Лапласа в форме § 23.32, то после деления на V найдем, что

$$\frac{\wp(v)-\wp(w)}{\Lambda}\frac{d^2\Lambda}{du^2}+\frac{\wp(w)-\wp(u)}{\mathrm{M}}\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2}+\frac{\wp(u)-\wp(v)}{\mathrm{N}}\frac{d^2\mathrm{N}}{dw^2}=0.$$

Последние два члена, рассматриваемые как функции от u, являются линейными функциями от $\wp(u)$, и следовательно, $\frac{1}{\Lambda}\frac{d^2\Lambda}{du^2}$ также должно быть линейной функцией от $\wp(u)$; так как оно не зависит от координат u и w, то имеем

$$\frac{1}{\Lambda}\frac{d^2\Lambda}{du^2}=\{K\wp(u)+B\},$$

где K и B — постоянные.

Если подставить это выражение в дифференциальное уравнение, то получим (тождественное) равенство нулю линейной функции от $\wp(u)$, и таким образом, коэффициенты в этой линейной функции должны равняться нулю; отсюда найдем уравнения

$$K\{\wp(v)-\wp(w)\}-\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2}+\frac{1}{\mathrm{N}}\frac{d^2\mathrm{N}}{dw^2}=0,$$
$$B\{\wp(v)-\wp(w)\}+\frac{\wp(w)}{\mathrm{M}}\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2}-\frac{\wp(v)}{\mathrm{N}}\frac{d^2\mathrm{N}}{dw^2}=0;$$

разрешая их (и замечая при этом, что $\wp(v)-\wp(w)$ не равно нулю тождественно), получим три уравнения:

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2}=\{K\wp(u)+B\}\,\Lambda,$$
$$\frac{d^2\mathrm{M}}{dv^2}=\{K\wp(v)+B\}\,\mathrm{M},$$
$$\frac{d^2\mathrm{N}}{dw^2}=\{K\wp(w)+B\}\,\mathrm{N}.$$

[1]) Гармоническую функцию, являющуюся произведением трех функций, каждая из которых зависит только от одной координаты, иногда называют *нормальным решением* уравнения Лапласа. Так, нормальными решениями в полярных координатах (§ 18.31) будут $r^nP_n^m(\cos\theta)\,{\cos \atop \sin}\,m\varphi$.

Когда за независимую переменную принимается λ, первое уравнение принимает вид

$$4\Delta_\lambda \frac{d}{d\lambda}\left\{\Delta_\lambda \frac{d\Lambda}{d\lambda}\right\}=\left\{K\lambda+B+\frac{1}{3}K(a^2+b^2+c^2)\right\}\Lambda,$$

а это и есть уравнение, уже полученное для Λ; степень n гармонической функции дается формулой

$$n(n+1)=K.$$

Мы продвинулись теперь в изучении эллипсоидальных гармонических функций настолько далеко, насколько было возможно, не прибегая к использованию свойств уравнения Ламе.

Теперь мы приступим к подробному рассмотрению этого уравнения.

23.4. Различные формы дифференциального уравнения Ламе

Мы уже встречались с двумя формами уравнения Ламе, а именно:

$$4\Delta_\lambda \frac{d}{d\lambda}\left\{\Delta_\lambda \frac{d\Lambda}{d\lambda}\right\}=\{n(n+1)\lambda+C\}\Lambda,$$

или

$$\frac{d^2\Lambda}{d\lambda^2}+\left\{\frac{\frac{1}{2}}{a^2+\lambda}+\frac{\frac{1}{2}}{b^2+\lambda}+\frac{\frac{1}{2}}{c^2+\lambda}\right\}\frac{d\Lambda}{d\lambda}=\frac{\{n(n+1)\lambda+C\}\Lambda}{4(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

которая может быть названа алгебраической формой, и

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2}=\{n(n+1)\wp(u)+B\}\Lambda,$$

которая может быть названа формой Вейерштрасса, так как она содержит эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(u)$; постоянные B и C связаны соотношением

$$B+\frac{1}{3}n(n+1)(a^2+b^2+c^2)=C.$$

Если примем функцию $\wp(u)$ за новую независимую переменную, которую обозначим через ξ, то получим несколько видоизмененную алгебраическую форму (ср. § 10.6):

$$\frac{d^2\Lambda}{d\xi^2}+\left\{\frac{\frac{1}{2}}{\xi-e_1}+\frac{\frac{1}{2}}{\xi-e_2}+\frac{\frac{1}{2}}{\xi-e_3}\right\}\frac{d\Lambda}{d\xi}=\frac{\{n(n+1)\xi+B\}\lambda}{4(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)}.$$

Это дифференциальное уравнение имеет особые точки в e_1, e_2, e_3, в каждой из которых показатели равны 0, $\frac{1}{2}$, и особую точку на бесконечности, показатели в которой равны $-\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{2}(n+1)$.

Вейерштрассовская форма уравнения была изучена Альфаном (Halphen, Fonctions Elliptiques, II (Paris, 1888), 457—531).

Алгебраическая форма была изучена Стилтьесом (Stieltjes, Acta Math., VI (1885), 321—326), Клейном (Klein, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen (литографировано, Göttingen, (1894)) и Бохером (Bôcher, Ueber die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie (Leipzig, 1894)).

Более общее дифференциальное уравнение с четырьмя особыми точками, в которых показатели произвольны (за исключением того, что сумма всех показателей во всех особых точках равна 2), было исследовано Хейном (Heun, Math. Ann., XXXIII (1889), 161—179); произвольное расположение особых точек приводит только к кажущемуся выигрышу в общности, так как при помощи дробнолинейного преобразования независимой переменной одну из особых точек можно перевести в точку на бесконечности, а тогда перенос начала координат достаточен для того, чтобы сделать сумму комплексных координат трех конечных особых точек равной нулю.

Другая важная форма уравнения Ламе получается, если перейти к эллиптическим функциям Якоби; если положить

$$z_1 = u\sqrt{e_1 - e_3},$$

то форма Вейерштрасса примет вид

$$\frac{d^2\Lambda}{dz_1^2} = \left[n(n+1)\left\{\frac{e_3}{e_1-e_3} + \operatorname{ns}^2 z_1\right\} + \frac{B}{e_1-e_3}\right]\Lambda,$$

а положив $z_1 = \alpha - iK'$, где $2iK'$ — мнимый период функции $\operatorname{sn} z_1$, получим простую форму

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = \{n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2\alpha + A\}\Lambda,$$

где A — постоянная, связанная с B соотношением

$$B + e_3 n(n+1) = A(e_1 - e_3).$$

Форма Якоби была изучена Эрмитом в мемуаре «Sur quelques applications des fonctions elliptiques», Comptes Rendus, LXXXV (1887), опубликован отдельно, Paris, 1885.

При изучении свойств уравнения Ламе лучше пользоваться не одной только формой, а брать ту форму, которая является наиболее удобной для данной цели. Для практических приложений форма Якоби, приводящая к тэта-функциям, является наиболее подходящей.

Для получения свойств решений уравнения наилучшей формой является, вообще говоря, вторая алгебраическая форма, хотя в некоторых задачах более простое исследование получается при форме Вейерштрасса.

23.41. Решения уравнения Ламе в виде рядов

Допустим, что уравнение Ламе, которое можно написать так

$$4(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)\frac{d^2\Lambda}{d\xi^2}+\left(6\xi^2-\frac{1}{2}g_2\right)\frac{d\Lambda}{d\xi}-\\ -\{n(n+1)\xi+B\}\Lambda=0,$$

имеет решение вида

$$\Lambda=\sum_{r=0}^{\infty}b_r(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r}.$$

Ряд справа, если он является решением, будет сходиться (§ 10.31, часть I) при достаточно больших значениях $|\xi-e_2|$; но нашей целью является не изучение сходимости, а выбор такого B, чтобы ряд обрывался на конечном числе членов, так что исследование сходимости окажется излишним.

Результатом подстановки этого ряда для Λ в левую часть уравнения Ламе и расположения его по степеням $\xi-e_2$ будет ряд

$$4\sum_{r=0}^{\infty}(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r+1}\left[r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)b_r-\right.\\ -\left\{3e_2\left(\frac{1}{2}n-r+1\right)^2-\frac{1}{4}n(n+1)e_2-\frac{1}{4}B\right\}b_{r-1}+\\ \left.+(e_1-e_2)(e_2-e_3)\left(\frac{1}{2}n-r+2\right)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{3}{2}\right)b_{r-2}\right]$$

со знаком минус, причем коэффициенты b_r с отрицательными индексами следует считать равными нулю.

Поэтому, если ряд является решением, зависимость, связывающая последовательные коэффициенты, должна быть следующей:

$$r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)b_r=\left\{3e_2\left(\frac{1}{2}n-r+1\right)^2-\frac{1}{4}n(n+1)e_2-\frac{1}{4}B\right\}b_{r-1}-\\ -(e_1-e_2)(e_2-e_3)\left(\frac{1}{2}n-r+2\right)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{3}{2}\right)b_{r-2}$$

и

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)b_1=\left\{\frac{3}{4}n^2e_2-\frac{1}{4}n(n+1)e_2-\frac{1}{4}B\right\}b_0.$$

Если взять $b_0=1$, что мы можем сделать, не теряя общности, то коэффициенты b_r окажутся функциями от B со следующими свойствами:

(I) b_r — полином относительно B степени r;

(II) — знак коэффициента при B^r в выражении для b_r будет $(-1)^r$ в предположении, что $r\leqslant n$; сам коэффициент при B^r равен

$$\frac{(-1)^r}{2\cdot4\ldots2r(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2r+1)};$$

(III) если e_1, e_2, e_3 и B вещественны и $e_1 > e_2 > e_3$, то при $b_{r-1} = 0$ значения b_r и b_{r-2} противоположны по знаку в предположении, что $r < \frac{1}{2}(n+3)$ и $r < n$.

Теперь предположим, что n четное и что мы взяли такое B, что

$$b_{\frac{1}{2}n+1} = 0.$$

Если сделан этот выбор, то рекуррентная формула показывает, что

$$b_{\frac{1}{2}n+2} = 0,$$

если положить в ней $r = \frac{1}{2}n + 2$, а если как $b_{\frac{1}{2}n+1}$, так и $b_{\frac{1}{2}n+2}$ — нули, то *дальнейшие рекуррентные формулы удовлетворяются, если взять*

$$b_{\frac{1}{2}n+3} = b_{\frac{1}{2}n+4} = \ldots = 0.$$

Таким образом, условие, чтобы уравнение Ламе имело в качестве решения полином от ξ, заключается в том, что B должно быть корнем определенного алгебраического уравнения степени $\frac{1}{2}n + 1$, если n четное.

Когда же n нечетное, мы берем $b_{\frac{1}{2}(n+1)}$ равным нулю, тогда $b_{\frac{1}{2}(n+3)}$ также будет равняться нулю, и то же будет с дальнейшими коэффициентами; так что, когда n нечетное, условие заключается в том, что B должно быть корнем определенного алгебраического уравнения степени $\frac{1}{2}(n+1)$.

Легко показать, что при $e_1 > e_2 > e_3$ все корни этих алгебраических уравнений вещественны. В самом деле, свойства (II) и (III) показывают, что выражения b_0, b_1, b_2, ..., b_r, как функции от B, образуют ряд функций Штурма[1]), когда $r < \frac{1}{2}(n+3)$, и таким образом, у уравнения

$$b_{\frac{1}{2}n+1} = 0 \quad \text{или} \quad b_{\frac{1}{2}(n+1)} = 0$$

все корни вещественные[2]) и неравные.

Таким образом, если постоянные e_1, e_2, e_3 вещественны (случай, который является практически важным, как было видно в § 23.31),

---

[1]) Sturm, Mém. présentés par les Savants Étrangers, VI (1835), 271—318.

[2]) Этот способ рассуждения принадлежит Лиувиллю (Liouville, Journ. de Math., XI (1846), 221).

то при n четном имеется $\frac{1}{2}n+1$ вещественных и различных значений B, для которых уравнение Ламе имеет решение вида

$$\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}n} b_r(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r},$$

а при n нечетном имеется $\frac{1}{2}(n+1)$ вещественных и различных значений B, для которых уравнение Ламе имеет решение вида

$$\sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(n-1)} b_r(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r}.$$

Когда *не все* постоянные e_1, e_2, e_3 вещественны, уравнение, которому удовлетворяет величина B, может иметь равные корни; решения уравнения Ламе в таких случаях были исследованы Коном (Cohn) в Кенигсбергской диссертации (1888 г.).

Пример 1. Исследовать решения уравнения Ламе типа

$$\text{(I)}\qquad (\xi-e_1)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty} b'_r(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r-\frac{1}{2}},$$

$$\text{(II)}\qquad (\xi-e_3)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty} b''_r(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r-\frac{1}{2}},$$

$$\text{(III)}\qquad (\xi-e_1)^{\frac{1}{2}}(\xi-e_3)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty} b'''_r(\xi-e_2)^{\frac{1}{2}n-r-1},$$

получив рекуррентные соотношения

$$\text{(I)}\quad r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)b'_r=$$
$$=\left\{3e_2\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{1}{2}\right)^2+(e_2-e_3)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}n(n+1)e_2-\frac{1}{4}B\right\}b'_{r-1}-$$
$$-(e_1-e_2)(e_2-e_3)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}n-r+1\right)b'_{r-2},$$

$$\text{(II)}\quad r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)b''_r=$$
$$=\left\{3e_2\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{1}{2}\right)^2-(e_1-e_2)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}n(n+1)e_2-\frac{1}{4}B\right\}b''_{r-1}-$$
$$-(e_1-e_2)(e_2-e_3)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}n-r+1\right)b''_{r-2},$$

$$\text{(III)}\quad r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)b'''_r=\left\{3e_2\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{1}{2}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}e_2(n^2+n+1)-\frac{1}{4}B\right\}b'''_{r-1}-$$
$$-(e_1-e_2)(e_2-e_3)\left(\frac{1}{2}n-r+1\right)\left(\frac{1}{2}n-r+\frac{1}{2}\right)b'''_{r-2}.$$

Пример 2. В обозначении примера 1 показать, что число вещественных различных значений B, при которых уравнению Ламе удовлетворяют обрывающиеся ряды различного вида, равно

$$\text{(I)}\ \frac{1}{2}(n-1)\ \text{или}\ \frac{1}{2}(n-2),\quad \text{(II)}\ \frac{1}{2}(n-1)\ \text{или}\ \frac{1}{2}(n-2),$$

$$\text{(III)}\ \frac{1}{2}(n-2)\ \text{или}\ \frac{1}{2}(n-3).$$

23.42. Определение функций Ламе

Если собрать результаты, полученные в § 23.41, то будет ясно, что для уравнения

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2}=[n(n+1)\wp(u)+B]\,\Lambda$$

с целым положительным n имеется $2n+1$ значений B, при которых уравнение имеет решение одного из четырёх видов, описанных в §§ 23.21—23.24.

Если при разложении такого решения по убывающим степеням ξ коэффициент при высшем члене $\xi^{\frac{1}{2}n}$ берется равным единице, как это было сделано в § 23.41, то полученная таким образом функция называется *функцией Ламе степени n первого рода* первого (второго, третьего или четвертого) вида. Полученные таким образом $2n+1$ функций обозначаются символом

$$E_n^m(\xi)\qquad (m=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1);$$

когда же имеем дело лишь с одной такой функцией, то она может быть обозначена символом

$$E_n(\xi).$$

Таблицы выражений, дающих функции Ламе для $n=1,\ 2,\ \ldots,\ 10$ были составлены Герриторе (Guerritore, Giornale di Math. (2), XVI (1909), 164—172).

Пример 1. Получить пять функций Ламе второй степени, а именно:

$$\lambda+\frac{1}{3}\sum a^2\pm\frac{1}{3}\sqrt{\sum a^4-\sum b^2c^2}\,,$$

$$\sqrt{\lambda+b^2}\sqrt{\lambda+c^2},\quad \sqrt{\lambda+c^2}\sqrt{\lambda+a^2},\quad \sqrt{\lambda+a^2}\sqrt{\lambda+b^2}.$$

Пример 2. Получить семь функций Ламе третьей степени, а именно:

$$\sqrt{(\lambda+a^2)(\lambda+b^2)(\lambda+c^2)},$$

и шесть функций, получаемых перестановкой a, b, c в выражениях

$$\sqrt{\lambda+a^2}\left[\lambda+\frac{1}{5}(a^2+2b^2+2c^2)\pm\frac{1}{5}\sqrt{a^4+4b^4+4c^4-7b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}\right].$$

23.43. Об отсутствии кратных корней у функций Ламе

Покажем теперь, что все линейные множители, на которые разлагается функция $E_n^m(\xi)$, *различны*. Этот результат легче всего получается из дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция $E_n^m(\xi)$; ибо если $\xi-\xi_1$ — какой-нибудь множитель функции $E_n^m(\xi)$, где ξ_1 не равно ни одному из чисел e_1, e_2, e_3, то ξ_1 будет правильной точкой уравнения (§ 10.3, часть I), и любое решение, разложение которого по степеням $\xi-\xi_1$ не начинается с члена $(\xi-\xi_1)^0$ или $(\xi-\xi_1)^1$, должно тождественно равняться нулю.

Точно так же, если бы ξ_1 было одним из чисел e_1, e_2 или e_3, то определяющее уравнение, соответствующее особой точке ξ_1, имело бы корни 0 и $\frac{1}{2}$; таким образом, разложение функции $E_n^m(\xi)$ по возрастающим степеням $\xi-\xi_1$ начиналось бы с члена $(\xi-\xi_1)^0$ или $(\xi-\xi_1)^{\frac{1}{2}}$.

Таким образом, ни при каких обстоятельствах $E_n^m(\xi)$, как функция от ξ, не имеет равных корней.

Определение чисел $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, введенных в §§ 23.21—23.24, можно считать теперь законченным, ибо мы видели, что решения уравнения Ламе могут быть составлены из неравных множителей и значения $\theta_1, \theta_2, \ldots$, соответствующие корням функции $E_n^m(\xi)=0$, удовлетворяют уравнениям, необходимым для обеспечения того, чтобы произведения Нивена были решениями уравнения Лапласа.

Остается еще показать, что $2n+1$ эллипсоидальных гармонических функций, построенных таким образом, образуют фундаментальную систему решений степени n уравнения Лапласа.

23.44. Линейная независимость функций Ламе

Покажем теперь, что $2n+1$ функций Ламе $E_n^m(\xi)$ степени n линейно независимы, т. е. что между ними не существует линейных соотношений, имеющих место тождественно относительно ξ.

Во-первых, если бы существовало линейное соотношение, в которое входили бы функции различных видов, то очевидно, что надлежащим изменением знака радикалов $\sqrt{\xi-e_1}$, $\sqrt{\xi-e_2}$, $\sqrt{\xi-e_3}$ можно было бы получить другие соотношения, которые при сложении с первоначальным соотношением и вычетании из него дали бы два (или более) новых линейных соотношения, каждое из которых связывало бы функции не только одного и того же вида, но даже одного и того же типа.

Пусть одно из таких соотношений, если они существуют, будет

$$\sum a_m E_n^m(\xi)\equiv 0 \qquad (a_m\neq 0),$$

и пусть это соотношение содержит r функций.

Подействуем на это тождество оператором

$$\frac{d^2}{du^2} - n(n+1)\xi$$

$r-1$ раз.

Результаты последовательных действий будут

$$\sum a_m (B_n^m)^s E_n^m(\xi) \equiv 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, r-1),$$

где B_n^m — значение B, соответствующее функции $E_n^m(\xi)$.

Исключим $a_1, a_2, \ldots, a_r$ из r полученных уравнений; тогда найдем, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ B_n^1 & B_n^2 & B_n^3 & \ldots & B_n^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (B_n^1)^{r-1} & (B_n^2)^{r-1} & \ldots & \ldots & (B_n^r)^{r-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Но определитель слева равен произведению разностей чисел B_n^m, а эти разности не могут равняться нулю по § 23.41. Поэтому определитель не может равняться нулю, и таким образом, предполагаемого соотношения не существует.

Линейная независимость $2n+1$ функций Ламе степени n, таким образом, доказана.

23.45. Линейная независимость эллипсоидальных гармонических функций

Пусть $G_n^m(x, y, z)$ — эллипсоидальная гармоническая функция степени n, соответствующая функции $E_n^m(\xi)$, и пусть $H_n^m(x, y, z)$ — соответствующая однородная гармоническая функция.

Теперь легко показать не только линейную независимость $2n+1$ гармонических функций $G_n^m(x, y, z)$, но и линейную независимость $2n+1$ гармонических функций $H_n^m(x, y, z)$.

Во-первых, если бы существовало линейное соотношение между гармоническими функциями $G_n^m(x, y, z)$, то, выразив эти гармонические функции через эллипсоидальные координаты (λ, μ, ν), мы должны были бы получить линейное соотношение между функциями Ламе $E_n^m(\xi)$, где $\xi = \lambda + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$, а мы видели, что такого соотношения не существует.

Затем, если бы существовало линейное соотношение между однородными гармоническими функциями $H_n^m(x, y, z)$, то, действуя на него оператором Нивена (§ 23.25)

$$1-\frac{D^2}{2(2n-1)}+\frac{D^4}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}-\ldots,$$

мы получили бы из него линейное соотношение, связывающее функции $G_n^m(x, y, z)$, а так как только что было показано, что такого соотношения не существует, то заключаем, что и однородные гармонические функции степени n линейно независимы.

23.46. Теорема Стилтьеса о нулях функций Ламе

Мы видели, что любая функция Ламе степени n может быть представлена в виде

$$(\theta+a^2)^{\varkappa_1}(\theta+b^2)^{\varkappa_2}(\theta+c^2)^{\varkappa_3}\prod_{p=1}^{m}(\theta-\theta_p),$$

где $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ равны 0 или $\frac{1}{2}$, а числа $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ вещественны и не равны друг другу и числам $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$; кроме того, $\frac{1}{2}n=m+\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3$. Когда $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ заданы, число функций Ламе этой степени и типа равно $m+1$.

Стилтьесом [1]) была доказана замечательная теорема, утверждающая, что эти $m+1$ функций могут быть расположены таким образом, что r-я функция имеет $r-1$ нулей [2]) между $-a^2$ и $-b^2$, а остающиеся $m-r+1$ нулей между $-b^2$ и $-c^2$, так что, между прочим, все корни $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ *всех* $m+1$ функций лежат между $-a^2$ и $-c^2$.

Чтобы доказать эту теорему, предположим, что $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ — любые вещественные переменные, такие, что

$$\begin{cases} -a^2\leqslant\varphi_p\leqslant-b^2 & (p=1, 2, \ldots, r-1),\\ -b^2\leqslant\varphi_p\leqslant-c^2 & (p=r, r+1, \ldots, m),\end{cases}$$

и рассмотрим произведение

$$\Pi=\prod_{p=1}^{m}\left[|\varphi_p+a^2|^{\varkappa_1+\frac{1}{4}}|\varphi_p+b^2|^{\varkappa_2+\frac{1}{4}}|\varphi_p+c^2|^{\varkappa_3+\frac{1}{4}}\right]\prod_{p\neq q}|\varphi_p-\varphi_q|.$$

Это произведение равно нулю, когда все переменные φ_p имеют свои наименьшие значения, а также когда они имеют свои наибольшие значения; когда переменные φ_p не равны друг другу и числам

---

[1]) Stieltjes, Acta Mathematica, VI (1885), 321—326.

[2]) Нули $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ опускаются из перечисления, принимаются во внимание только $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$.

$-a^2$, $-b^2$, $-c^2$, произведение Π положительно и, очевидно, является непрерывной ограниченной функцией переменных φ_p.

Отсюда заключаем, что имеется система значений переменных, для которых Π достигает своей верхней грани, которая строго положительна (см. § 3.62, часть I). Для этой системы значений переменных условия максимума дают

$$\frac{\partial \ln \Pi}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial \ln \Pi}{\partial \varphi_2} = \ldots = 0,$$

т. е.

$$\frac{\varkappa_1 + \frac{1}{4}}{\varphi_p + a^2} + \frac{\varkappa_2 + \frac{1}{4}}{\varphi_p + b^2} + \frac{\varkappa_3 + \frac{1}{4}}{\varphi_p + c^2} + \sum_{q=1}^{m}{}' \frac{1}{\varphi_p - \varphi_q} = 0,$$

где p принимает последовательно значения $1, 2, \ldots, m$.

Но эта система уравнений представляет собой как раз систему, посредством которой определяются $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ (см. §§ 23.21—23.24); *таким образом, система уравнений, определяющих* $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, *имеет решение, удовлетворяющее неравенствам*

$$\begin{cases} -a^2 < \theta_p < -b^2 & (p = 1, 2, \ldots, r-1), \\ -b^2 < \theta_p < -c^2 & (p = r, r+1, \ldots, m). \end{cases}$$

Следовательно, если r — какое-нибудь из значений $1, 2, \ldots, m+1$, то существует функция Ламе с $r-1$ нулем между $-a^2$ и $-b^2$ и с остающимися $m-r+1$ нулями между $-b^2$ и $-c^2$.

Так как имеется всего $m+1$ функция Ламе определенного типа, то они получаются все, если дать r последовательно значения $1, 2, \ldots, m+1$, а это и есть теорема Стилтьеса.

Стилтьес дал интересную статическую интерпретацию теоремы, а именно: пусть $m+3$ частицы, притягивающиеся друг к другу по закону обратной пропорциональности расстояниям, расположены на прямой, причем три из этих частиц, массы которых равны $\varkappa_1 + \frac{1}{4}$, $\varkappa_2 + \frac{1}{4}$, $\varkappa_3 + \frac{1}{4}$, закреплены в точках с координатами $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$, а остальные частицы имеют единичную массу и могут свободно перемещаться по прямой, тогда $\ln \Pi$ будет потенциалом тяготения системы и положениями равновесия системы будут такие положения, в которых координаты подвижных частиц равны θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_m$, т. е. имеют значения, для которых какая-либо из функций Ламе степени $2(m + \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3)$ будет равна нулю.

Пример. Рассмотреть положения нулей полиномов, удовлетворяющих уравнению типа

$$\frac{d^2\Lambda}{d\theta^2} + \sum_{r=1}^{s} \frac{1-a_s}{\theta - a_s} \frac{d\Lambda}{d\theta} + \frac{\varphi_{r-2}(\theta)}{\prod_{s=1}^{r} (\theta - a_s)} \Lambda = 0,$$

где $\varphi_{r-2}(\theta)$ — полином степени $r-2$ относительно θ, в котором коэффициент при θ^{r-2} равен

$$-m\left\{m+r-1-\sum_{s=1}^{r} a_s\right\},$$

где m — положительное целое число, а остальные коэффициенты в функции $\varphi_{r-2}(\theta)$ определяются из того соображения, что уравнение имеет решение в виде полинома.

(Stieltjes)

23.47. Функции Ламе второго рода

Рассмотренные до сего времени функции $E_n^m(\xi)$ известны как функции Ламе *первого рода*. Легко убедиться в том, что вторым независимым решением уравнения Ламе

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2}=\left\{n(n+1)\xi+B_n^m\right\}\Lambda$$

будет функция $F_n^m(\xi)$, определяемая равенством [1])

$$F_n^m(\xi)=(2n+1)E_n^m(\xi)\int_0^u \frac{du}{\left\{E_n^m(\xi)\right\}^2};$$

эта функция $F_n^m(\xi)$ называется функцией Ламе *второго рода*.

Из этой формулы ясно, что вблизи $u=0$

$$F_n^m(\xi)=(2n+1)u^{-n}\{1+O(u)\}\int_0^u u^{2n}\{1+O(u)\}\,du=u^{n+1}\{1+O(u)\},$$

а мы, очевидно, имеем $E_n^m(\xi)=u^{-n}\{1+O(u)\}$.

Из этих результатов ясно, что $F_n^m(\xi)$ никогда не может быть функцией Ламе первого рода, и *таким образом, не имеется значений B_n^m, для которых уравнение Ламе удовлетворялось бы двумя функциями Ламе первого рода различных видов или типов.*

Можно получить выражение для $F_n^m(\xi)$, свободное от квадратур, аналогично формуле Кристоффеля для $Q_n(z)$, данной на стр. 155 (пример 29). Сделаем это для случая, когда $E_n^m(\xi)$ есть функция первого вида. Единственными неприводимыми полюсами выражения $\dfrac{1}{\left\{E_n^m(\xi)\right\}^2}$, как функции от u, являются точки $u_1, u_2, \ldots, u_n$, которые не будут ни периодами, ни половинами периодов.

---

[1]) Это определение функции $F_n^m(\xi)$ принадлежит Гейне (Heine, Journ. für Math., XXIX (1845), 194).

Вблизи любой из этих точек мы имеем разложение вида

$$E_n^m(\xi) = k_1(u-u_r) + k_2(u-u_r)^2 + k_3(u-u_r)^3 + \ldots$$

и после подстановки этого ряда в дифференциальное уравнение найдем, что k_2 равно нулю.

Отсюда заключаем, что главная часть разложения $\dfrac{1}{\{E_n^m(\xi)\}^2}$ вблизи u_r равняется $\dfrac{1}{k_1^2(u-u_r)^2}$, и следовательно, вычет равен нулю.

Поэтому можно найти такие постоянные A_r, что функция

$$\{E_n^m(\xi)\}^{-2} - \sum_{r=1}^{n} A_r \wp(u-u_r)$$

не будет иметь полюсов в точках, сравнимых с точками u_r; и значит по теореме Лиувилля она равна некоторой постоянной A, так как она является двоякопериодической функцией от u.

Отсюда

$$\int_0^u \frac{du}{\{E_n^m(\xi)\}^2} = Au - \sum_{r=1}^{n} A_r \{\zeta(u-u_r) + \zeta(u_r)\}.$$

Но точки u_r могут быть сгруппированы в пары, суммы которых равны нулю, так как $E_n^m(\xi)$ — четная функция от u.

Если взять $u_{n-r} = -u_{r+1}$, то получим

$$\int_0^u \frac{du}{\{E_n^m(\xi)\}^2} = Au - \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}n} A_r \{\zeta(u-u_r) + \zeta(u+u_r)\} =$$

$$= Au - 2\zeta(u) \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}n} A_r - \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}n} \frac{A_r \wp'(u)}{\wp(u) - \wp(u_r)},$$

и следовательно,

$$F_n^m(\xi) = (2n+1)\left\{Au - 2\zeta(u) \sum_{r=1}^{\frac{1}{2}n} A_r\right\} E_n^m(\xi) + \wp'(u)\, w_{\frac{1}{2}n-1}(\xi),$$

где $w_{\frac{1}{2}n-1}(\xi)$ — полином относительно ξ степени $\frac{1}{2}n - 1$.

Пример. Получить формулы, аналогичные этому выражению для $F_n^m(\xi)$, когда $E_n^m(\xi)$ второго, третьего или четвертого вида.

23.5. Уравнение Ламе в связи с эллиптическими функциями Якоби

Все результаты, полученные до сих пор в связи с функциями Ламе, конечно, имеют свои аналоги в обозначениях через эллиптические функции Якоби, и в руках Эрмита (ср. § 23.71) применение эллиптических функций Якоби в исследовании обобщений уравнения Ламе дало чрезвычайно интересные результаты.

К сожалению, невозможно без потери симметрии применить эллиптические функции Якоби, в. которых все переменные были бы вещественны.

Симметричные формулы могут быть получены, если взять новые переменные α, β, γ, определяемые равенствами

$$\begin{cases} \alpha = iK' + u\sqrt{e_1 - e_3}, \\ \beta = iK' + v\sqrt{e_1 - e_3}, \\ \gamma = iK' + w\sqrt{e_1 - e_3}, \end{cases}$$

и тогда формулы § 23.31 будут эквивалентны формулам

$$x = k^2\sqrt{a^2 - c^2}\cdot \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta \operatorname{sn}\gamma,$$

$$y = -\frac{k^2}{k'}\sqrt{a^2 - c^2}\cdot \operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\beta \operatorname{cn}\gamma,$$

$$z = \frac{i}{k'}\sqrt{a^2 - c^2}\cdot \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\beta \operatorname{dn}\gamma,$$

причем модуль эллиптических функций равен

$$\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}.$$

Уравнение поверхности второго порядка софокусной системы, на которой α постоянно, будет

$$\frac{X^2}{(a^2 - b^2)\operatorname{sn}^2\alpha} - \frac{Y^2}{(a^2 - b^2)\operatorname{cn}^2\alpha} - \frac{Z^2}{(a^2 - c^2)\operatorname{dn}^2\alpha} = 1.$$

Это уравнение представляет эллипсоид, если α лежит между iK' и $K + iK'$; поверхность второго порядка, на которой β постоянно, будет однополостным гиперболоидом, если β лежит между $K + iK'$ и K; поверхность второго порядка, на которой постоянно γ, будет двуполостным гиперболоидом, если γ лежит между 0 и K; при этом определении (α, β, γ) точка (x, y, z) лежит в положительном октанте.

Мы уже видели (§ 23.4), что в этих обозначениях уравнение Ламе принимает форму

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = \{n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2\alpha + A\}\,\Lambda$$

и решения, которые можно выразить как периодические функции от α, обозначаются[1]) через $E_n^m(\alpha)$. Функции Ламе первого вида будут тогда полиномами относительно $\operatorname{sn}^2\alpha$, и вообще вид может быть определен схемой, аналогичной схеме § 23.2:

$$\left\{\begin{matrix} & \operatorname{sn}\alpha, & \operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha, & \\ 1, & \operatorname{cn}\alpha, & \operatorname{dn}\alpha\operatorname{sn}\alpha, & \operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha \\ & \operatorname{dn}\alpha, & \operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha & \end{matrix}\right\}\prod_p(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\alpha_p).$$

23.6. Интегральное уравнение, которому удовлетворяют функции Ламе первого и второго вида[2])

Покажем теперь, что если $E_n^m(\alpha)$ — какая-нибудь функция Ламе первого вида (n четное) или второго вида (n нечетное) с множителем $\operatorname{sn}\alpha$, то $E_n^m(\alpha)$ будет решением интегрального уравнения

$$E_n^m(\alpha)=\lambda\int_{-2K}^{2K}P_n(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)\,E_n^m(\theta)\,d\theta,$$

где λ — одно из «характеристических чисел» (§ 11.23, часть I).

Для доказательства этого результата нам нужна лемма: *дифференциальный оператор с частными производными*

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-n(n+1)k^2(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)$$

аннулирует функцию $P_n(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)$.

Для доказательства леммы заметим, что, обозначая для краткости $k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta$ через μ, имеем, если воспользуемся дифференциальным уравнением Лежандра (§ 15.13),

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}&P_n(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)=\\ &=k^2\{\operatorname{cn}^2\alpha\operatorname{dn}^2\alpha\operatorname{sn}^2\theta-\operatorname{cn}^2\theta\operatorname{dn}^2\theta\operatorname{sn}^2\alpha\}P_n''(\mu)+\\ &+2k^3\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)P_n'(\mu)=\\ &=k^2(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)[(\mu^2-1)P_n''(\mu)+2\mu P_n'(\mu)]=\\ &=k^2(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)\,n(n+1)P_n(\mu).\end{aligned}$$

Лемма тем самым доказана.

---

[1]) Опасности смешения их с соответствующими функциями $E_n^m(\xi)$ не существует.

[2]) Это интегральное уравнение и соответствующие формулы § 23.62 для эллипсоидальных гармонических функций даны Уиттекером (Whittaker, Proc. London Math. Soc (2), XIV (1915), 260—268). Доказательства формул, содержащих функции третьего и четвертого видов, даны в этой работе впервые.

Результат применения оператора

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha - A_n^m$$

к интегралу

$$\int_{-2K}^{2K} P_n(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\theta)\,E_n^m(\theta)\,d\theta$$

будет поэтому

$$\int_{-2K}^{2K}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha - A_n^m\right\}P_n(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\theta)\,E_n^m(\theta)\,d\theta =$$

$$= \int_{-2K}^{2K}\left[\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2\theta - A_n^m\right\}P_n(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\theta)\right]E_n^m(\theta)\,d\theta,$$

откуда, интегрируя два раза по частям, получим

$$\left[\frac{\partial P_n(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\theta)}{\partial\theta}E_n^m(\theta) - P_n(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\theta)\frac{dE_n^m(\theta)}{d\theta}\right]_{-2K}^{2K} +$$

$$+\int_{-2K}^{2K} P_n(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\theta)\left\{\frac{d^2}{d\theta^2} - n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2\theta - A_n^m\right\}E_n^m(\theta)\,d\theta = 0.$$

Отсюда следует, что оператор

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} - n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2\alpha - A_n^m$$

аннулирует интеграл

$$\int_{-2K}^{+2K} P_n(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\theta)\,E_n^m(\theta)\,d\theta;$$

кроме того, этот интеграл есть, очевидно, полином степени n относительно $\mathrm{sn}^2\alpha$. Так как уравнение Ламе имеет только один интеграл этого типа[1]), то заключаем, что интеграл будет кратным функции $E_n^m(\alpha)$, если он не нуль; таким образом, результат установлен.

Оказывается, что *всякое* характеристическое число уравнеиия

$$f(\alpha) = \lambda\int_{-2K}^{2K} P_n(k\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\theta)\,f(\theta)\,d\theta$$

приводит к решению уравнения Ламе (см. Ince, Proc. Royal Soc. Edin., XLII (1922), 43—53).

---

[1]) Второе решение, будучи разложено по нисходящим степеням $\mathrm{sn}\,\alpha$, начинается с члена $(\mathrm{sn}\,\alpha)^{-n-1}$.

Пример 1. Показать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяет функция Ламе первого вида (с четным n) или второго вида (с нечетным n) с множителем $\operatorname{cn}\alpha$, может быть взято равным

$$P_n\left(\frac{ik}{k'}\operatorname{cn}\alpha\operatorname{cn}\theta\right).$$

Пример 2. Показать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяет функция Ламе первого вида (с четным n) или второго вида (с нечетным n) с множителем $\operatorname{dn}\alpha$, может быть взято равным

$$P_n\left(\frac{1}{k'}\operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}\theta\right).$$

23.61. Интегральное уравнение, которому удовлетворяют функции Ламе третьего и четвертого вида

Теорема, аналогичная теореме § 23.6 в случае функций Ламе третьего или четвертого вида, заключается в том, что функция Ламе четвертого вида (с нечетным n) или третьего вида (с четным n) с множителем $\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$E_n^m(\alpha)=\lambda\int_{-2K}^{2K}\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta\,P_n''(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)\,E_n^m(\theta)\,d\theta.$$

Аналогично § 23.6 необходима предварительная лемма, заключающаяся в том, что оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-n(n+1)k^2(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)$$

аннулирует ядро

$$\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta\,P_n''(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta).$$

В самом деле, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left\{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\,P_n''(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)\right\}=$$
$$=k^2\operatorname{cn}^3\alpha\operatorname{dn}^3\alpha\operatorname{sn}^2\theta P_n^{\mathrm{IV}}(\mu)-3k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{sn}\theta(\operatorname{dn}^2\alpha+k^2\operatorname{cn}^2\alpha)P_n'''(\mu)-$$
$$-\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha(\operatorname{dn}^2\alpha+k^2\operatorname{cn}^2\alpha-4k^2\operatorname{sn}^2\alpha)P_n''(\mu),$$

и следовательно,

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}\left\{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta\,P_n''(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)\right\}=$$
$$=k\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)\left\{(\mu^2-1)P_n^{\mathrm{IV}}(\mu)+6\mu P_n'''(\mu)+\right.$$
$$\left.+6P_n''(\mu)\right\}=k^2\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)\frac{d^3}{d\mu^3}\left\{(\mu^2-1)P_n'(\mu)\right\}=$$
$$=k^2n(n+1)\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\theta)P_n''(\mu),$$

что и доказывает лемму. Доказательство того, что $E_n^m(\alpha)$ удовлетворяет интегральному уравнению, получается теперь точно так же, как и в случае интегрального уравнения § 23.6.

Пример 1. Показать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяют функции Ламе четвертого вида (с нечетным n) или третьего вида (с четным n) с множителем $\operatorname{sn}\alpha \operatorname{dn}\alpha$, может быть взято равным

$$\operatorname{sn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \operatorname{sn}\theta \operatorname{dn}\theta\, P_n''\left(\frac{ik}{k'} \operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\theta\right).$$

Пример 2. Показать, что ядро интегрального уравнения, которому удовлетворяют функции Ламе четвертого вида (с нечетным n) или третьего вида (с четным n) с множителем $\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha$, может быть взято равным

$$\operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{sn}\theta \operatorname{cn}\theta\, P_n''\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\theta\right).$$

Пример 3. Получить три следующих интегральных уравнения, которым удовлетворяют функции Ламе четвертого вида (с нечетным n) и третьего вида (с четным n):

$$\text{(I)}\quad k^2 \operatorname{sn}^2\alpha\, E_n^m(\alpha) = \lambda \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \int_{-2K}^{2K} P_n(k \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\theta) \frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{\operatorname{cn}\theta \operatorname{dn}\theta} \frac{dE_n^m(\theta)}{d\theta}\right\} d\theta,$$

$$\text{(II)}\quad -k^2 \operatorname{cn}^2\alpha\, E_n^m(\alpha) = \lambda k'^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{dn}\alpha \int_{-2K}^{2K} P_n\left(\frac{ik}{k'} \operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\theta\right) \frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{\operatorname{sn}\theta \operatorname{dn}\theta} \frac{dE_n^m(\theta)}{d\theta}\right\} d\theta,$$

$$\text{(III)}\quad k^2 \operatorname{dn}^2\alpha\, E_n^m(\alpha) = \lambda k'^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \int_{-2K}^{2K} P_n\left(\frac{1}{k'} \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\theta\right) \frac{d}{d\theta}\left\{\frac{1}{\operatorname{sn}\theta \operatorname{cn}\theta} \frac{dE_n^m(\theta)}{d\theta}\right\} d\theta;$$

в случае функций четного порядка каждая из функций различных типов удовлетворяет только одному из этих уравнений.

23.62. Интегральные формулы для эллипсоидальных гармонических функций

Рассмотренные интегральные уравнения позволяют получить изящное представление эллипсоидальной гармонической функции $G_n^m(x, y, z)$ и соответствующей однородной гармонической функции $H_n^m(x, y, z)$ через определенные интегралы.

По общей формуле § 18.3 очевидно, что $H_n^m(x, y, z)$ может быть представлена в форме

$$H_n^m(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} (x\cos t + y\sin t + iz)^n f(t)\,dt,$$

где $f(t)$ — периодическая функция, подлежащая определению.

Но результат применения оператора Нивена D^2 к функции $(x\cos t + y\sin t + iz)^n$ будет

$$n(n-1)(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t - c^2)(x\cos t + y\sin t + iz)^{n-2},$$

и, таким образом, по формуле Нивена (§ 23.25) найдем, что $G_n^m(x, y, z)$ может быть представлена в виде

$$G_n^m(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \mathfrak{A}^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \mathfrak{A}^{n-2}\mathfrak{B}^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot (2n-1)(2n-3)} \mathfrak{A}^{n-4}\mathfrak{B}^4 - \ldots \right\} f(t)\,dt,$$

где

$$\mathfrak{A} \equiv x\cos t + y\sin t + iz,$$
$$\mathfrak{B} \equiv \sqrt{(a^2-c^2)\cos^2 t + (b^2-c^2)\sin^2 t},$$

так что

$$G_n^m(x, y, z) =$$
$$= \frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n)!} \int_{-\pi}^{\pi} \mathfrak{B}^n P_n\left(\frac{x\cos t + y\sin t + iz}{\sqrt{(a^2-c^2)\cos^2 t + (b^2-c^2)\sin^2 t}}\right) f(t)\,dt.$$

Положим теперь $\sin t \equiv \operatorname{cd}\theta$, причем модуль эллиптических функций, как обычно, дается равенством

$$k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}.$$

Новыми пределами интегрирования будут $-3K$ и K, но они могут быть заменены $-2K$ и $2K$ вследствие периодичности подинтегрального выражения.

Таким путем найдем, что

$$G_n^m(x, y, z) = \int_{-2K}^{2K} P_n\left(\frac{k'x\operatorname{sn}\theta + y\operatorname{cn}\theta + iz\operatorname{dn}\theta}{\sqrt{b^2-c^2}}\right)\varphi(\theta)\,d\theta,$$

где $\varphi(\theta)$ — периодическая функция от θ, не зависящая от x, y, z и все еще подлежащая определению.

Если выразить эллипсоидальную гармоническую функцию как произведение трех функций Ламе, то с помощью формул § 23.5 найдем, что

$$E_n^m(\alpha)\,E_n^m(\beta)\,E_n^m(\gamma)=C\int\limits_{-2K}^{2K}P_n(\mu)\,\varphi(\theta)\,d\theta,$$

где C — известная постоянная и

$$\mu\equiv k^2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\beta\operatorname{sn}\gamma\operatorname{sn}\theta-\frac{k^2}{k'^2}\operatorname{cn}\alpha\operatorname{cn}\beta\operatorname{cn}\gamma\operatorname{cn}\theta-\\-\frac{1}{k'^2}\operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}\beta\operatorname{dn}\gamma\operatorname{dn}\theta.$$

Если рассматриваемая эллипсоидальная гармоническая функция — первого вида или второго вида и первого типа, то, дав β и γ частные значения

$$\beta=K,\quad \gamma=K+iK',$$

видим, что

$$C\int\limits_{-2K}^{2K}P_n(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta$$

есть решение уравнения Ламе, и следовательно, по § 23.6 $\varphi(\theta)$ есть решение уравнения Ламе, *которое не может быть не чем иным*[1]*, как кратным функции* $E_n^m(\theta)$.

Отсюда получается, что

$$G_n^m(x,\ y,\ z)=\lambda\int\limits_{-2K}^{2K}P_n\left(\frac{k'x\operatorname{sn}\theta+y\operatorname{cn}\theta+iz\operatorname{dn}\theta}{\sqrt{b^2-c^2}}\right)E_n^m(\theta)\,d\theta,$$

где λ — постоянная.

Если $G_n^m(x,\ y,\ z)$ — второго вида и второго или третьего типа, то положим

$$\beta=0,\quad \gamma=K+iK'$$

или

$$\beta=0,\quad \gamma=K$$

соответственно и получим снова ту же самую формулу.

[1]) Если бы $\varphi(\theta)$ содержала второе решение, то интеграл не сходился бы.

Таким образом, получается, что если $G_n^m(x, y, z)$ — какая-нибудь эллипсоидальная гармоническая функция первого или второго вида, то

$$G_n^m(x, y, z) = \lambda \int_{-2K}^{2K} P_n(\mu) E_n^m(\theta)\, d\theta,$$

$$H_n^m(x, y, z) = \lambda \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2 (b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}n}} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} (k' x \operatorname{sn}\theta + y \operatorname{cn}\theta + iz \operatorname{dn}\theta)^n E_n^m(\theta)\, d\theta,$$

где

$$\mu \equiv \frac{k' x \operatorname{sn}\theta + y \operatorname{cn}\theta + iz \operatorname{dn}\theta}{\sqrt{b^2 - c^2}}.$$

23.63. Интегральные формулы для эллипсоидальных гармонических функций третьего и четвертого вида

Чтобы получить интегральные представления для гармонических функций третьего и четвертого вида, обратимся к уравнению § 23.62, а именно:

$$E_n^m(\alpha) E_n^m(\beta) E_n^m(\gamma) = C \int_{-2K}^{2K} P_n(\mu) \varphi(\theta)\, d\theta,$$

где

$$\mu \equiv k^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta \operatorname{sn}\gamma \operatorname{sn}\theta - \frac{k^2}{k'^2} \operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\beta \operatorname{cn}\gamma \operatorname{cn}\theta - \frac{1}{k'^2} \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\beta \operatorname{dn}\gamma \operatorname{dn}\theta;$$

этому уравнению удовлетворяют гармонические функции *всех* видов.

Предположим теперь, что $E_n^m(\alpha)$ — четвертого вида или первого типа третьего вида, так что она имеет множителем $\operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha$.

Продифференцируем уравнение по β и γ и затем положим $\beta = K$, $\gamma = K + iK'$.

Таким путем найдем, что

$$E_n^m(\alpha) \left[\frac{d}{d\beta} E_n^m(\beta)\right]_{\beta=K} \left[\frac{d}{d\gamma} E_n^m(\gamma)\right]_{\gamma=K+iK'} =$$

$$= C \int_{-2K}^{2K} \left[\frac{\partial^2 P_n(\mu)}{\partial\beta\, \partial\gamma}\right]_{\beta=K,\ \gamma=K+iK'} \varphi(\theta)\, d\theta.$$

Но

$$\left[\frac{\partial P_n(\mu)}{\partial\gamma}\right]_{\gamma=K+iK'}=-\frac{i}{k'}\operatorname{dn}\alpha\operatorname{dn}\beta\operatorname{dn}\theta\, P'_n(\mu),$$

так что

$$\left[\frac{\partial^2 P_n(\mu)}{\partial\beta\,\partial\gamma}\right]_{\beta=K,\ \gamma=K+iK'}=-k\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta P''_n(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta).$$

Поэтому

$$\int\limits_{-2K}^{2K}\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn}\theta\operatorname{dn}\theta\, P''_n(k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta$$

есть решение уравнения Ламе с множителем $\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha$, и таким образом, по § 23.61 $\varphi(\theta)$ *не может быть не чем иным, как кратным функции* $E_n^m(\alpha)$.

Таким образом, мы нашли, что формула

$$G_n^m(x,\ y,\ z)=\lambda\int\limits_{-2K}^{2K}P_n(\mu)\,E_n^m(\theta)\,d\theta$$

имеет место для любой эллипсоидальной гармонической функции, имеющей множителем $\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha$; соответствующая формула для однородной гармонической функции будет

$$H_n^m(x,\ y,\ z)=\lambda\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}n}}\times$$
$$\times\int\limits_{-2K}^{2K}(k'x\operatorname{sn}\theta+y\operatorname{cn}\theta+iz\operatorname{dn}\theta)^n\,E_n^m(\theta)\,d\theta.$$

Пример. Показать, что формула этого параграфа имеет место для эллипсоидальных гармонических функций, имеющих множителем $\operatorname{sn}\alpha\operatorname{dn}\alpha$ или $\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cn}\alpha$.

23.7. Обобщения уравнения Ламе

Два обобщения уравнения Ламе напрашиваются сами собою. В первом постоянная B не равна ни одному из характеристических значений B_n^m, для которых одно из решений выражается как алгебраическая функция от $\wp(u)$; во втором степень n не предполагается более целым числом. Первое обобщение полностью было разработано Эрмитом[1] и Альфаном[2]; единственный случай второго обобщения, привлекший некоторое внимание, это тот, когда n равно половине

[1] Hermite, Comptes Rendus, LXXXV (1877), 689—695, 728—732, 821—826.

[2] Halphen, Fonctions Elliptiques, II (Paris, 1888), 494—502.

нечетного целого числа; этот случай был рассмотрен Бриоски[1]), Альфаном[2]) и Кроуфордом[3]).

Рассмотрим теперь решение уравнения

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2}=\{n(n+1)\wp(u)+B\}\,\Lambda,$$

где B — произвольное, а n — положительное целое число, методом Линдемана — Стилтьеса, уже объясненным в связи с уравнением Матье (§§ 19.5—19.52). Произведение какой-либо пары решений этого уравнения является решением уравнения

$$\frac{d^3X}{du^3}-4\{n(n+1)\wp(u)+B\}\frac{dX}{du}-2n(n+1)\wp'(u)X=0$$

по § 19.52. Алгебраическая форма этого уравнения будет

$$4(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)\frac{d^3X}{d\xi^3}+3\left(6\xi^2-\frac{1}{2}g_2\right)\frac{d^2X}{d\xi^2}-$$
$$-4\{(n^2+n-3)\xi+B\}\frac{dX}{d\xi}-2n(n+1)X=0.$$

Если искать решение этого уравнения в виде ряда по убывающим степеням $\xi-e_2$:

$$X=\sum_{r=0}^{\infty}c_r(\xi-e_2)^{n-r}\qquad(c_0=1),$$

то рекуррентная формула для коэффициентов c_r будет

$$4r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)(2n-r+1)c_r=$$
$$=(n-r+1)\{12e_2(n-r)(n-r+2)-4e_2(n^2+n-3)-4B\}c_{r-1}-$$
$$-2(n-r+1)(n-r+2)(e_1-e_2)(e_2-e_3)(2n-2r+3)c_{r-2}.$$

Положим $r=n+1$; тогда увидим, что $c_{n+1}=0$, затем положим $r=n+2$ и получим $c_{n+2}=0$; рекуррентные формулы при $r>n+2$ удовлетворяются, если положим

$$c_{n+3}=c_{n+4}=\ldots=0.$$

Следовательно, *обобщенное уравнение Ламе всегда имеет два решения, произведение которых имеет вид*

$$\sum_{r=0}^{n}c_r(\xi-e_2)^{n-r}.$$

---

1) Brioschi, Comptes Rendus, LXXXVI (1878), 313—315.
2) Halphen, Fonctions Elliptiques, II (Paris, 1888) 471—473.
3) Crawford, Quarterly Journal, XXVII (1895), 93—98.

Этот полином может быть переписан в виде

$$\prod_{r=1}^{n} \{\wp(u) - \wp(a_r)\},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ пока определены с точностью до знаков; эти два решения уравнения Ламе назовем Λ_1, Λ_2.

Можно различить два случая: (I) когда $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$ постоянно, (II) когда $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$ не постоянно.

(I) Первый случай рассмотреть легко; ибо если полином

$$\prod_{r=1}^{n} \{\xi - \wp(a_r)\}$$

не есть полный квадрат относительно ξ, возможно умноженный на выражения типа $\xi - e_1$, $\xi - e_2$, $\xi - e_3$, то алгебраическая форма уравнения Ламе имеет определяющее уравнение, один из корней которого равен $\frac{1}{2}$, в одной или нескольких точках $\xi = \wp(a_r)$, а в данном случае это не имеет места (§ 23.43).

Следовательно, полином должен быть квадратом, умноженным, возможно, на одно или более из выражений $\xi - e_1$, $\xi - e_2$, $\xi - e_3$, и тогда Λ_1 является функцией Ламе, так что B равно одному из характеристических значений B_n^m; но это — случай, подробно рассмотренный в §§ 23.1—23.47.

(II) Во втором случае имеем (§ 19.53)

$$\Lambda_1 \frac{d\Lambda_2}{du} - \Lambda_2 \frac{d\Lambda_1}{du} = 2\mathfrak{C},$$

где $\mathfrak{C}$ — постоянная, не равная нулю. Тогда

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{d \ln \Lambda_2}{du} - \frac{d \ln \Lambda_1}{du} = \frac{2\mathfrak{C}}{X}, \\ &\frac{d \ln \Lambda_2}{du} + \frac{d \ln \Lambda_1}{du} = \frac{1}{X} \frac{dX}{du}, \end{aligned} \right.$$

так что

$$\frac{d \ln \Lambda_1}{du} = \frac{1}{2X} \frac{dX}{du} - \frac{\mathfrak{C}}{X}, \quad \frac{d \ln \Lambda_2}{du} = \frac{1}{2X} \frac{dX}{du} + \frac{\mathfrak{C}}{X}.$$

Проинтегрировав, увидим, что можно взять

$$\Lambda_1 = \sqrt{X} \exp\left\{-\mathfrak{C} \int \frac{du}{X}\right\}.$$

С другой стороны, если продифференцируем уравнение

$$\frac{1}{\Lambda_1}\frac{d\Lambda_1}{du}=\frac{1}{2X}\frac{dX}{du}-\frac{\mathfrak{C}}{X},$$

то найдем, что

$$\frac{1}{\Lambda_1}\frac{d^2\Lambda_1}{du^2}-\left\{\frac{1}{\Lambda_1}\frac{d\Lambda_1}{du}\right\}^2=\frac{1}{2X}\frac{d^2X}{du^2}-\frac{1}{2X^2}\left(\frac{dX}{du}\right)^2+\frac{\mathfrak{C}}{X^2}\frac{dX}{du},$$

отсюда при помощи уравнения Ламе получим интересную формулу

$$n(n+1)\wp(u)+B=\frac{1}{2X}\frac{d^2X}{du^2}-\left(\frac{1}{2X}\frac{dX}{du}\right)^2+\frac{\mathfrak{C}^2}{X^2}.$$

Если теперь $\xi_r\equiv\wp(a_r)$, то по этой формуле (умноженной на X^2) найдем, давая u частное значение a_r, что

$$\left(\frac{dX}{d\xi}\right)^2_{\xi=\xi_r}=\frac{4\mathfrak{C}^2}{\wp'^2(a_r)}.$$

Фиксируем теперь знаки $a_1, a_2, \ldots, a_n$, взяв

$$\left(\frac{dX}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_r}=\frac{2\mathfrak{C}}{+\wp'(a_r)}.$$

Тогда, если разложим $\frac{2\mathfrak{C}}{X}$, как функцию от ξ, на простейшие дроби, то увидим, что

$$\frac{2\mathfrak{C}}{X}=\sum_{r=1}^{n}\frac{\wp'(a_r)}{\xi-\wp(a_r)}=\sum_{r=1}^{n}\{\zeta(u-a_r)-\zeta(u+a_r)+2\zeta(a_r)\},$$

и следовательно,

$$\Lambda_1=\left[\prod_{r=1}^{n}\{\wp(u)-\wp(a_r)\}\right]^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}\{\lg\sigma(a_r+u)-\lg\sigma(a_r-u)-2u\zeta(a_r)\}\right],$$

откуда следует, что (§ 20.53, пример 1)

$$\Lambda_1=\prod_{r=1}^{n}\left\{\frac{\sigma(a_r+u)}{\sigma(u)\,\sigma(a_r)}\right\}\exp\left\{-u\sum_{r=1}^{n}\zeta(a_r)\right\}$$

и

$$\Lambda_2=\prod_{r=1}^{n}\left\{\frac{\sigma(a_r-u)}{\sigma(u)\,\sigma(a_r)}\right\}\exp\left\{u\sum_{r=1}^{n}\zeta(a_r)\right\}.$$

Таким образом, получено полное решение для произвольных значений постоянной B.

23.71. Форма Якоби обобщенного уравнения Ламе

Мы построим теперь решение уравнения

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = \{n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2\alpha + A\}\Lambda$$

для любых значений A в форме, похожей на форму § 23.6.

Решение, соответствующее решению § 23.6, будет[1])

$$\Lambda = \prod_{r=1}^{n}\left\{\frac{\mathrm{H}(\alpha+\alpha_r)}{\Theta(\alpha)}\right\}e^{\rho\alpha},$$

где ρ, α_1, α_2, ..., α_n — постоянные, подлежащие определению.

Дифференцируя это равенство, найдем, что

$$\frac{1}{\Lambda}\frac{d\Lambda}{d\alpha} = \sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{\mathrm{H}'(\alpha+\alpha_r)}{\mathrm{H}(\alpha+\alpha_r)} - \frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)}\right\} + \rho =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}\{\mathrm{Z}(\alpha+\alpha_r+iK') - \mathrm{Z}(\alpha)\} + \rho + \frac{1}{2}n\pi i/K,$$

так что

$$\frac{1}{\Lambda}\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} - \left\{\frac{1}{\Lambda}\frac{d\Lambda}{d\alpha}\right\}^2 = \sum_{r=1}^{n}\{\operatorname{dn}^2(\alpha+\alpha_r+iK') - \operatorname{dn}^2\alpha\},$$

и следовательно, так как Λ является решением уравнения Ламе, постоянные ρ, α_1, α_2, ..., α_n определяются из условия, что равенство

$$n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2\alpha + A = \sum_{r=1}^{n}\{\operatorname{dn}^2(\alpha+\alpha_r+iK') - \operatorname{dn}^2\alpha\} +$$

$$+\left[\sum_{r=1}^{n}\{\mathrm{Z}(\alpha+\alpha_r+iK') - \mathrm{Z}(\alpha)\} + \rho + \frac{1}{2}n\pi i/K\right]^2$$

должно быть тождеством, т. е. из условия

$$n^2k^2\operatorname{sn}^2\alpha + n + A + \sum_{r=1}^{n}\operatorname{cs}^2(\alpha+\alpha_r) \equiv$$

$$\equiv \left[\sum_{r=1}^{n}\{\mathrm{Z}(\alpha+\alpha_r+iK') - \mathrm{Z}(\alpha)\} + \rho + \frac{1}{2}n\pi i/K\right]^2.$$

---

[1]) Это решение было опубликовано в 1872 г. в литографированных записках лекций Эрмита, читанных в Политехнической школе.

Но обе части предположенного тождества суть двоякопериодические функции от α с периодами $2K$, $2iK'$, и их особые точки суть двойные полюсы в точках, сравнимых с $-iK'$, $-\alpha_1$, $-\alpha_2, \ldots, -\alpha_n$; главные части их вблизи $-iK'$ и $-\alpha_r$ будут соответственно

$$\frac{n^2}{(\alpha+iK')^2}, \quad -\frac{1}{(\alpha+\alpha_r)^2}.$$

Все вычеты выражения слева равны нулю, и таким образом, если возьмем ρ, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ так, что вычеты выражения справа будут нулями, то по теореме Лиувилля эти два выражения будут отличаться друг от друга только на постоянную, которую можно сделать равной нулю надлежащим выбором A.

Мы получаем, таким образом, $n+2$ уравнения, связывающих ρ, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ с A, но эти уравнения не все независимы.

Легко доказать, что вблизи $-\alpha_r$

$$\sum_{r=1}^{n}\{Z(\alpha+\alpha_r+iK')-Z(\alpha)\}+\rho+\frac{1}{2}n\pi i/K=$$
$$=\frac{1}{\alpha+\alpha_r}+\sum_{p=1}^{n}{}' Z(\alpha_p-\alpha_r+iK')+nZ(\alpha_r)+\rho+$$
$$+\frac{1}{2}(n-1)\pi i/K+O(\alpha+\alpha_r),$$

где штрих обозначает, что член, для которого $p=r$, опускается; точно так же вблизи $-iK'$ имеем

$$\sum_{r=1}^{n}\{Z(\alpha+\alpha_r+iK')-Z(\alpha)\}+\rho+\frac{1}{2}n\pi i/K=$$
$$=-\frac{n}{\alpha+iK}+\sum_{r=1}^{n}Z(\alpha_r)+\rho+O(\alpha+iK').$$

Следовательно, вычеты выражения

$$\left[\sum_{r=1}^{n}\{Z(\alpha+\alpha_r+iK')-Z(\alpha)\}+\rho+\frac{1}{2}n\pi i/K\right]^2$$

равняются нулю, если $\rho, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ выбраны так, что все уравнения

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{p=1}^{n}{}' Z(\alpha_p-\alpha_r+iK')+nZ(\alpha_r)+\rho+\frac{1}{2}(n-1)\pi i/K=0,\\&\sum_{r=1}^{n}Z(\alpha_r)+\rho=0\end{aligned}\right.$$

удовлетворяются.

Последнее уравнение дает просто значение величины ρ, а именно:

$$-\sum_{r=1}^{n} Z(\alpha_r),$$

и, подставив это значение в систему первых уравнений, найдем, что

$$\sum_{p=1}^{n}{}' \left[Z(\alpha_p - \alpha_r + iK') + Z(\alpha_r) - Z(\alpha_p) + \frac{1}{2}\pi i/K\right] = 0,$$

где $r = 1, 2, \ldots, n$. Согласно примеру 2 § 22.735 сумма левых частей этих уравнений равна нулю, так что система эквивалентна самое большее $n-1$ уравнению; если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ имеют какие-либо значения, которые удовлетворяют этим уравнениям, то разность

$$\left[n^2k^2 \operatorname{sn}^2 \alpha + n + A + \sum_{r=1}^{n} \operatorname{cs}^2(\alpha + \alpha_r)\right] - \\ - \left[\sum_{r=1}^{n}\left\{Z(\alpha + \alpha_r + iK') - Z(\alpha) - Z(\alpha_r) + \frac{1}{2}\pi i/K\right\}\right]^2$$

будет постоянной. Взяв $\alpha = 0$, видим, что эта постоянная равна нулю, если

$$n + A + \sum_{r=1}^{n} \operatorname{cs}^2 \alpha_r = \left[\sum_{r=1}^{n}\left\{Z(\alpha_r + iK') - Z(\alpha_r) + \frac{1}{2}\pi i/K\right\}\right]^2,$$

т. е. если

$$\left\{\sum_{r=1}^{n} \operatorname{cn} \alpha_r \operatorname{ds} \alpha_r\right\}^2 - \sum_{r=1}^{n} \operatorname{ns}^2 \alpha_r = A.$$

Сделаем теперь приведение системы n уравнений; при обозначении § 22.2, отмечая функции от α_p, α_r значками 1 и 2, легко видеть, что

$$Z(\alpha_p - \alpha_r + iK') + Z(\alpha_r) - Z(\alpha_p) + \frac{1}{2}\pi i/K = \\ = Z(\alpha_p - \alpha_r + iK') + Z(\alpha_r) - Z(\alpha_p + iK') + c_1 d_1/s_1 = \\ = k^2 \operatorname{sn}(\alpha_p + iK') \operatorname{sn} \alpha_r \operatorname{sn}(\alpha_p + iK' - \alpha_r) + c_1 d_1/s_1 = \frac{s_2}{s_1 \operatorname{sn}(\alpha_p - \alpha_r)} + \frac{c_1 d_1}{s_1} = \\ = \frac{s_2(s_1 c_2 d_2 + s_2 c_1 d_1) + c_1 d_1 (s_1^2 - s_2^2)}{s_1(s_1^2 - s_2^2)} = \frac{s_1 c_1 d_1 + s_2 c_2 d_2}{s_1^2 - s_2^2}.$$

Следовательно,

$$\Lambda = \prod_{r=1}^{n}\left[\frac{H(\alpha + \alpha_r)}{\Theta(\alpha)} \exp\{-\alpha Z(\alpha_r)\}\right]$$

будет решением уравнения Ламе

$$\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = \{n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2\alpha + A\}\Lambda$$

в предположении, что $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ выбраны так, что они удовлетворяют n независимым уравнениям, содержащимся в системе

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{p=1}^{n}{}' \left[\frac{\operatorname{sn}\alpha_p \operatorname{cn}\alpha_p \operatorname{dn}\alpha_p + \operatorname{sn}\alpha_r \operatorname{cn}\alpha_r \operatorname{dn}\alpha_r}{\operatorname{sn}^2\alpha_p - \operatorname{sn}^2\alpha_r}\right] \\ \displaystyle\qquad\left[\sum_{r=1}^{n} \operatorname{cn}\alpha_r \operatorname{ds}\alpha_r\right]^2 - \sum_{r=1}^{n} \operatorname{ns}^2\alpha_r = A, \end{array}\right.$$

и если это решение уравнения Ламе не является двоякопериодическим, то

$$\prod_{r=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{H}(\alpha-\alpha_r)}{\Theta(\alpha)} \exp\{\alpha Z(\alpha_r)\}\right]$$

будет вторым решением.

Существование решения системы $n+1$ уравнений вытекает из § 23.7.

ЛИТЕРАТУРА

G. Lamé, Journ. de Math., II (1837), 147—188; IV (1839), 100—125, 126—163, 351—385; VIII (1843), 397—434; Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes (Paris, 1857). Leçons sur les coordonnées curvilignes (Paris, 1859).

E. Heine, Journ. für Math., XXIX (1845), 185—208 Theorie der Kugelfunktionen, II (Berlin, 1880).

C. Hermite, Comptes Rendus, LXXXV (1877), 689—695, 728—732, 821—826; Ann. di Mat. (2) IX (1878), 21—24; Oeuvres Mathématiques (Paris, 1905—1917).

G. H. Halphen, Fonctions Elliptiques, II (Paris, 1888);

F. Lindemann, Math. Ann., XIX (1882), 323—386.

K. Heun, Math. Ann., XXXIII (1889), 161—179, 180—196.

L. Crawford, Quarterly Journal, XXVII (1895), 93—98; XXIX (1898), 196—201.

W. D. Niven, Phil. Trans. of the Royal Society, 182A (1891), 231—278.

A. Cayley, Phil. Trans. of the Royal Society., 165 (1875), 675—774.

G. H. Darwin, Phil. Trans. of the Royal Society, 197A (1901), 461—557; 198A (1901), 301—331.

Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.

Примеры

1. Получить формулу

$$G_n(x, y, z) = \frac{2^n \cdot n}{(2n)!}\int_0^\infty D^{2n}P_n\left(\frac{u}{D}\right)e^{-u}\,du \cdot H_n(x, y, z).$$

(Niven, Phil. Trans. 182A (1891), 245)

2. Показать, что

$$H_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{(-1)^n\cdot(2n)!}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{H_n(x, y, z)}{(x^2+y^2+z^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

(Hobson, Proc. London Math. Soc., XXIV)

3. Показать, что «внешняя эллипсоидальная гармоническая функция» $F_n^m(\xi)\,E_n^m(\eta)\,E_n^m(\zeta)$ есть постоянное кратное выражения

$$H_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(1+\frac{D^2}{2\cdot(2n+3)}+\right.$$
$$\left.+\frac{D^4}{2\cdot 4\cdot(2n+3)(2n+5)}+\ldots\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

(Niven; Hobson, Proc. London Math. Soc., XXIV)

4. Рассмотреть предельную форму уравнения Ламе, когда инварианты g_2 и g_3 эллиптической функции Вейерштрасса стремятся к нулю; выразить решение через функции Бесселя.

(Haentzschel, Zeitschrift für Math. und Phys., XXXI)

5. Пусть v означает

$$\frac{\mathrm{H}(\alpha+\mu)}{\Theta(\alpha)}\exp[\{\lambda-\mathrm{Z}(\mu)\}\,\alpha],$$

где λ и μ — постоянные; показать, что уравнение Ламе имеет решение, которое выражается как линейная комбинация производных

$$\frac{d^{n-1}v}{d\alpha^{n-1}},\quad \frac{d^{n-3}v}{d\alpha^{n-3}},\quad \frac{d^{n-5}v}{d\alpha^{n-5}},\ \ldots,$$

где λ^2 и $\operatorname{sn}^2\mu$ — алгебраические функции постоянной A.

(Hermite)

6. Получить решения уравнения

$$\frac{1}{w}\frac{d^2w}{dz^2} = 12k^2\operatorname{sn}^2 z - 4(1+k^2) \pm 5\sqrt{1-k^2+k^4}.$$

(Stenberg, Acta Math., X)

7. Рассмотреть решение уравнения

$$z(z-1)(z-a)\frac{d^2y}{dz^2}+$$
$$+[(\alpha+\beta+1)z^2-\{\alpha+\beta-\delta+1+(\gamma+\delta)a\}z+\alpha\gamma]\frac{dy}{dz}+\alpha\beta(z-q)y=0$$

в виде ряда

$$1+\alpha\beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G_n(q)(z/a)^n}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)},$$

где

$$G_1(q)=q,\quad G_2(q)=\alpha\beta q^2+\{(\alpha+\beta-\delta+1)+(\gamma+\delta)a\}q-\alpha\gamma,$$
$$G_{n+1}(q)=[n\{(\alpha+\beta-\delta+n)+(\gamma+\delta+n-1)a\}+\alpha\beta q]\,G_n(q)-$$
$$-(\alpha+n-1)(\beta+n-1)(\gamma+n-1)\,naG_{n-1}(q).$$

(Heun, Math. Ann., XXXIII)

8. Показать, что показатели в особых точках 0, 1, a, ∞ уравнения Хейна будут

$$(0,\ 1-\gamma),\quad (0,\ 1-\delta),\quad (0,\ 1-\varepsilon),\quad (\alpha,\ \beta),$$

где

$$\gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+\beta+1.$$

(Heun, Math., Ann., XXXIII)

9. Получить следующую группу подстановок для уравнения Хейна, соответствующую группе

$$z,\quad 1-z,\quad \frac{1}{z},\quad \frac{1}{1-z},\quad \frac{z}{z-1},\quad \frac{z-1}{z},$$

для гипергеометрического уравнения:

$$z,\quad 1-z,\quad \frac{1}{z},\quad \frac{1}{1-z},\quad \frac{z}{z-1},\quad \frac{z-1}{z},$$
$$\frac{z}{a},\quad \frac{a-z}{a},\quad \frac{a}{z},\quad \frac{a}{a-z},\quad \frac{z}{z-a},\quad \frac{z-a}{z},$$
$$\frac{z-a}{1-a},\quad \frac{z-1}{a-1},\quad \frac{1-a}{z-a},\quad \frac{a-1}{z-1},\quad \frac{z-a}{z-1},\quad \frac{z-1}{z-a},$$
$$\frac{z-a}{a(z-1)},\quad \frac{(a-1)z}{a(z-1)},\quad \frac{a(z-1)}{z-a},\quad \frac{a(z-1)}{(a-1)z},\quad \frac{z-a}{(1-a)z},\quad \frac{(1-a)z}{z-a}.$$

(Heun, Math. Ann., XXXIII)

10. Обозначая ряд примера 7 через

$$F(a,\ q;\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta;\ z),$$

получить 192 решения дифференциального уравнения в форме степеней z, $z-1$ и $z-a$, умноженных на функции типа F.

[Хейн дает 48 этих решений.]

11. При $u=2v$ показать, что уравнение Ламе

$$\frac{d^2\Lambda}{du^2}=\{n(n+1)\wp(u)+B\}\Lambda$$

может быть преобразовано в уравнение

$$\frac{d^2L}{dv^2}-2n\frac{\wp''(v)}{\wp'(v)}\frac{dL}{dv}+4\{n(2n-1)\wp(v)-B\}L=0$$

при помощи подстановки

$$\Lambda=\{\wp'(v)\}^{-n}L.$$

12. Полагая $\zeta=\wp(v)$, показать, что

$$L=\sum_{r=0}^{\infty}b_r(\zeta-e_r)^{\alpha-r}$$

есть формальное решение уравнения примера 11, причем α и b_r определяются уравнениями

$$(\alpha-2n)\left(\alpha-n+\frac{1}{2}\right)=0$$

и

$$4(\alpha-r-2n)\left(\alpha-r-n+\frac{1}{2}\right)b_r+[12e_2(\alpha-r+1)(\alpha-r-2n+1)+$$
$$+4e_2n(2n-1)-4B]\,b_{r-1}-$$
$$-4(e_1-e_2)(e_2-e_3)(\alpha-r+2)\left(\alpha-r-n+\frac{3}{2}\right)b_{r-2}=0.$$

(Brioschi, Comptes Rendus, LXXXVI (1878), 313—315 и Halphen)

13. Показать, что если n равно половине нечетного положительного целого числа, то решение уравнения примера 11, которое выражается в конечной форме, имеет вид:

$$L=\sum_{r=0}^{n-\frac{1}{2}} b_r(\zeta-e_2)^{2n-r},$$

причем b_r определяются уравнениями

$$4r\left(n-r+\frac{1}{2}\right)b_r+[12e_2(2n-r+1)(r-1)-4e_2n(2n-1)+4B]\,b_{r-1}+$$
$$+4(e_1-e_2)(e_2-e_3)(2n-r+2)\left(n-r+\frac{3}{2}\right)b_{r-2}=0,$$

а B определяется так, чтобы $b_{n+\frac{1}{2}}=0$.

(Brioschi и Halphen)

14. Показать, что если n равно половине нечетного целого числа, то решение уравнения примера 11, которое выражается в конечной форме, имеет вид:

$$L'=\sum_{p=0}^{n-\frac{1}{2}} b'_p(\zeta-e_2)^{n-p-\frac{1}{2}},$$

причем b'_p определяются уравнениями

$$4p\left(n+p+\frac{1}{2}\right)b'_p-$$
$$-\left[12e_2\left(n-p+\frac{1}{2}\right)\left(n+p-\frac{1}{2}\right)-4e_2n(2n-1)+4B\right]b'_{p-1}+$$
$$+4(e_1-e_2)(e_2-e_3)\left(n-p+\frac{3}{2}\right)(p-1)\,b'_{p-2}=0,$$

а $b'_{n+\frac{1}{2}}=0$ есть уравнение, которое определяет B.

(Crawford)

15. Сохраняя обозначения примеров 13 и 14, показать, что если

$$b'_p = (-1)^p (e_1 - e_2)^p (e_2 - e_3)^p c_{n-p-\frac{1}{2}},$$

то уравнения, которые определяют $c_0, c_1, \ldots, c_{n-\frac{1}{2}}$, тождественны с уравнениями, определяющими $b_0, b_1, \ldots, b_{n-\frac{1}{2}}$, и вывести отсюда, что если одно из решений уравнения Ламе (в котором n равно половине нечетного целого числа) выражается как алгебраическая функция от $\wp(v)$, то тем же свойством обладает и второе.

(Crawford)

16. Доказать, что значения B, определяемые в примере 13, вещественны, когда e_1, e_2, e_3 вещественны.

17. Показать, что общим решением уравнения

$$\frac{1}{\Lambda}\frac{d^2\Lambda}{du^2} = \frac{3}{4}\wp(u)$$

будет

$$\Lambda = \left\{\wp'\left(\frac{1}{2}u\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{A\wp\left(\frac{1}{2}u\right) + B\right\},$$

где A и B — произвольные постоянные.

(Halphen, Mém. par divers savants, XXVIII (I), 1880, 105)

18. Показать, что общим решением уравнения

$$\frac{1}{\Lambda}\frac{d^2\Lambda}{d\alpha^2} = \frac{3}{4}k^2 \operatorname{sn}^2\alpha - \frac{1}{4}(1+k^2)$$

будет

$$\Lambda = \left\{\operatorname{sn}\frac{1}{2}(C-\alpha)\operatorname{cn}\frac{1}{2}(C-\alpha)\operatorname{dn}\frac{1}{2}(C-\alpha)\right\}^{-\frac{1}{2}}\left\{A + B\operatorname{sn}^2\frac{1}{2}(C-\alpha)\right\},$$

где A и B — произвольные постоянные и $C = 2K + iK'$.

(Jamet, Comptes Rendus, CXI)

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ[1]

[1] Римские цифры обозначают I или II часть книги, арабские — страницы.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ [1])

[1]) Римские цифры обозначают I или II часть книги, арабские — страницы. Тире (—) заменяет слово, тильда (~) — группу слов (если заменяется не весь предыдущий термин, то конец заменяемой группы слов отмечен вертикальной черточкой).