

# QUANTUM FIELD THEORY

by

H. UMEZAWA

*Professor of Physics  
University of Tokyo*

\*

NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY

Amsterdam, 1956

*Х. Умэдзава*

КВАНТОВАЯ  
ТЕОРИЯ  
ПОЛЯ

---

---

*Перевод с английского*  
А. Н. МАТВЕЕВА

*Под редакцией*  
А. А. СОКОЛОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва, 1958

## АННОТАЦИЯ

Книга японского физика-теоретика Умэдзава посвящена квантовой теории поля и написана с учетом исследований, проведенных японскими теоретиками.

После краткого исторического очерка рассматриваются уравнение Дирака, обобщенное релятивистское волновое уравнение, квантование волновых уравнений для свободных полей и с учетом взаимодействия, теория возмущений, теория перенормировок и некоторые другие вопросы.

Книга рассчитана на физиков и математиков, интересующихся современными проблемами теоретической физики, и является хорошим дополнением к вышедшим на русском языке другим монографиям по квантовой теории поля.

Редакция литературы по физике

*Выведующий редакцией проф. А. А. СОКОЛОВ*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателя книга написана японским физиком-теоретиком Умэдзава — профессором университета в Токио. Она посвящена изложению современной квантовой теории поля.

Как известно, вклад японских физиков-теоретиков в развитие современной квантовой теории поля весьма значителен. Известный японский физик Юкава — лауреат Нобелевской премии — первым предложил мезонную теорию ядерных сил. Он ввел поле новых частиц (названных им  $U$ -частицами) с массой покоя, превышающей массу покоя электрона более чем в 200 раз, и объяснил короткодействующий характер ядерных сил. Впоследствии эти частицы были открыты экспериментально. В настоящее время имеются все основания считать, что ядерные силы между нуклонами в основном обусловлены  $\pi$ -мезонами (заряженными и нейтральными). Затем Юкава и его ученики объяснили распад мезона как его превращение в электрон и нейтрино. (В настоящее время установлено, что  $\pi$ -мезон распадается на  $\mu$ -мезон и нейтрино, а  $\mu$ -мезон распадается на электрон и два нейтрино.) Таким образом, наряду с развитием квантовой электродинамики (теория электронов, позитронов и фотонов) начали развиваться новые главы квантовой теории поля — мезонная теория ядерных сил (взаимодействие нуклонов с полем  $\pi$ -мезонов) и теория распада мезонов на другие частицы (более легкие мезоны, электроны, позитроны и нейтрино).

Постоянная тонкой структуры, соответствующая взаимодействию нуклонов с  $\pi$ -мезонами, больше единицы. Это взаимодействие получило название сильного, так как благодаря большому значению постоянной тонкой структуры на малых (т. е. ядерных) расстояниях оно во много раз превышает электромагнитное взаимодействие. Наоборот, взаимодействие, связанное с распадом мезонов, является слабым (соответствующее значение постоянной тонкой структуры имеет порядок  $10^{-12}$ ).

Нужно заметить, что если в первых приближениях результаты квантовой электродинамики давали поразительное совпадение с экспериментом (несмотря на то, что в целом теория далеко не завершена и в ней имеется ряд трудностей, связанных главным образом с расходимостями, обусловленными членами самодействия),

то в теориях сильной и слабой связи наряду с общими трудностями квантовой теории поля мы еще далеки от такого хорошего совпадения количественных результатов теории с опытом, которое имеется в квантовой электродинамике. Таким образом, развитие теории сильной и слабой связи следует считать еще далеко не завершенным.

В разрешении же общих трудностей квантовой теории поля (исключение расходимостей) большую роль сыграли работы другого японского теоретика—Томонага. Предложенный им метод многовременного формализма (развитый далее Швингером) обладает большой теоретической общностью, хотя при проведении конкретных расчетов для исключения расходимостей теоретики чаще используют метод регуляризации Фейнмана — Дайсона.

Автор в своей книге не ограничился рассмотрением квантовой электродинамики, являющейся более или менее законченным разделом теории поля, а развивает теорию поля в ее наиболее общем виде. При современном состоянии теории элементарных частиц, когда основные интересы физиков переместились на изучение новых частиц, такой подход к изложению теории поля является вполне своевременным, хотя нельзя еще сказать, в каком из направлений развития теории будет найдено решение неясных в настоящее время вопросов.

Книга начинается с предисловия редактора английского издания проф. Розенфельда, который в увлекательной форме описывает процесс создания этой книги.

Весьма интересна гл. 1, в которой автор дает исторический обзор квантовой теории поля. В этом обзоре читатель может ознакомиться с кратким содержанием многих работ японских теоретиков, напечатанных главным образом в японских физических журналах и, возможно, далеко не всем читателям хорошо известных.

Последующие главы (2—5) посвящены исследованию общих релятивистских волновых уравнений. Изложение этих глав носит далеко не стандартный характер. В частности, автор при изложении волновых уравнений, относящихся к частицам различного спина ( $1/2, 0, 1$ ), умело использовал теорию спиноров  $n$ -го ранга. В гл. 6 читатель может познакомиться с многовременным формализмом Томонага — Швингера и его применением в теории возмущений.

Довольно подробно автор излагает теорию частиц со спином  $3/2$  (уравнение Рарита — Швингера), а также теорию изотопического спина и изотопической инвариантности (гл. 7).

В остальных главах (8—18) автор излагает общую теорию вторичного квантования. Весьма оригинально он сочетает изложение теории и ее применений для рассмотрения конкретных примеров. По этой книге читатель может познакомиться с гейзенберговским представлением и диаграммами Фейнмана. Рассмотрены

вопросы, связанные с „инфракрасной катастрофой“, а также теорией перенормировок. Теория перенормировок в квантовой электродинамике иллюстрируется примером вычисления лэмбовского сдвига уровней в атоме водорода и аномального магнитного момента электрона. Весьма подробно автор излагает „теорию затухания“, которая позволяет производить своеобразное сворачивание рядов теории возмущений.

Заканчивается книга подробным изложением теории  $S$ -матрицы Гейзенберга и общих вопросов, относящихся к свойствам функций Грина. Рассматривается уравнение Швингера; уравнение Бете — Сальпетера для функции Грина двух частиц и, наконец, изложена теория модели Ли, в которой функция Грина может быть найдена точно.

В книге приведена довольно подробная библиография по всем основным вопросам квантовой теории поля и, в частности, подробно освещены работы японских авторов.

Квантовая теория поля развивается настолько быстро, что отдельные места книги Умэдзава, посвященные  $\beta$ -распаду (см. гл. 7, пример 8), успели несколько устареть. Это связано с тем обстоятельством, что в конце 1956 г. известные китайские теоретики Ли и Янг сделали фундаментальное открытие — несохранение четности при слабом взаимодействии. Не прошло и года с момента опубликования этого открытия, как его авторам (октябрь 1957 г.) была присуждена Нобелевская премия.

Мы думаем, что несохранение четности связано с асимметрией нашего мира относительно положительных и отрицательных зарядов<sup>1)</sup>, хотя на этот вопрос имеется и другая точка зрения, согласно которой несохранение четности связано с асимметрией пространства, проявляющейся в микромире. Поскольку несохранение четности приобретает в теории  $\beta$ -распада первостепенное значение, мы

---

<sup>1)</sup> В самом деле, атомы нашего мира состоят из протонов, нейтронов и электронов. Симметричные по отношению к ним антиатомы должны состоять из антипротонов, антинейтронов и позитронов. Хотя совместное существование атомов и антиатомов в течение более или менее длительного времени является недопустимым и поэтому античастицы в нашем мире встречаются весьма редко, считалось, что физические законы изолированных друг от друга атомов и антиатомов должны быть тождественными. Однако, согласно теории Ли и Янга, это оказывается не так.

Они предсказали полярированную асимметрию и продольную (круговую) поляризацию при спонтанном распаде частиц. Так, например, при  $\beta$ -распаде число электронов, вылетающих по направлению спина нейтрона, должно быть меньше соответствующего числа электронов, вылетающих в противоположном направлении, что находится в блестящем согласии с опытами, которые были поставлены по прямому предложению Ли и Янга (более подробно см. примечание на стр. 133). По-видимому, при распаде антинейтрона мы должны иметь обратную картину для числа вылетающих позитронов, т. е. асимметрии, которые мы должны наблюдать при спонтанном распаде частиц и античастиц, должны взаимно компенсировать друг друга.

считали необходимым хотя бы кратко коснуться этих вопросов в редакционных примечаниях.

Следует также отметить, что в этой сравнительно небольшой по объему книге изложен довольно обширный материал по квантовой теории поля. Однако не всегда место и внимание, отведенное тому или иному вопросу, соответствует его важности с точки зрения теории в целом. На характер изложения книги в целом наложен определенный отпечаток научных интересов автора.

К сожалению, в книге имеется довольно много опечаток; в переводе по мере возможности они были исправлены. Автор отступил также от некоторых общепринятых обозначений. Например, скорость света он обозначил прописной буквой *S*. При переводе книги мы, естественно, заменили ее строчной буквой *c*. Автор называет электроны и позитроны соответственно негатонами и позитонами, подразумевая под термином «электроны» лишь их совокупность. Поскольку эта терминология не привилась у нас, мы при переводе восстановили общепринятую терминологию. В конце книги автор добавил ряд примечаний, сделанных при корректуре. Мы сочли целесообразным перенести эти примечания в соответствующие главы книги.

Мы надеемся, что книга Умэдзава — первая книга японского физика, переведенная на русский язык, — будет служить хорошим дополнением к вышедшим у нас в Советском Союзе монографиям по квантовой теории поля.

*А. Соколов.*

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ К АНГЛИЙСКОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящая книга вызывает в памяти приятные воспоминания о группе физиков, работавших в Манчестере в период с 1953 по 1955 г. Когда доктор Умэдзава приехал в Манчестер, он привез с собой небольшую книгу, написанную им на японском языке; многочисленные формулы и имена современных европейских физиков, напечатанные латинским шрифтом, позволили угадать содержание книги: было ясно, что это учебник по квантовой электродинамике. Сам Умэдзава был полностью захвачен этим предметом, однако в течение некоторого времени его речь была для нас так же мало понятна, как и книга, с тем дополнительным осложнением, что имена европейских физиков здесь надо было воспринимать на слух. Эта мучительная ситуация вскоре несколько изменилась, так как Умэдзава быстро совершенствовал свои знания английского языка и предложил перевести книгу на английский язык. Все сразу выразили желание помочь ему осуществить это намерение. Эта работа составила лишь небольшую часть кипучей деятельности автора. Он организовал вокруг себя группу сотрудников, поддерживал научную переписку со своими японскими коллегами и вел интенсивную научную работу, в результате которой в книгу добавлялись новые страницы почти в том же темпе, в каком делался перевод.

По мере появления переведенные главы, надо сказать весьма измаранные правкой, оживленно обсуждались нашей группой. Для нас это обсуждение оказалось чрезвычайно полезным, но и книга получила ряд существенных конструктивных улучшений. Во всяком случае, в настоящем виде эта книга довольно сильно отличается от своего японского оригинала, и можно сказать, что она выдержала серьезную проверку на пригодность в качестве



введения в различные вопросы квантовой теории поля, начиная с истории вопроса и кончая последними достижениями в этой области. Среди них мне хотелось бы отметить включенное в последний момент в настоящую книгу весьма изящное изложение теории функций распространения, которую развили в нашем институте Умэдзава и Висконти. Я не сомневаюсь, что книга будет полезна для всех читателей в той же мере, в какой она была полезна для нас, хотя они лишены очарования личного общения с автором, которое так обогащало книгу по мере того, как она рождалась на наших глазах.

*Л. Розенфельд.*

## ОБОЗНАЧЕНИЯ

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| $A^*$                       | Оператор ( $q$ -число), эрмитово-сопряженный к оператору $A$ , или число ( $c$ -число), комплексно-сопряженное к числу $A$ .   |
| $A_\mu^*$                   | Вектор, эрмитово-сопряженный к четырехмерному вектору, т. е. $A_\mu^* = (A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^* = -iA_0^*)$ .  |
| $A_\mu^\dagger$             | Четырехмерный вектор, компонентами которого являются величины $A_1^*, A_2^*, A_3^*$ и $iA_0^*$ .   |
| $A^T$                       | Матрица, транспонированная к $A$ .   |
| $A$                         | Трехмерный вектор, компонентами которого являются величины $A_k$ .   |
| $(A, B)$                    | Векторное произведение $A$ и $B$ .   |
| $[A, B]_-$ или $[A, B]$     | Коммутатор $AB - BA$ .   |
| $[A, B]_+$                  | Антикоммутатор $AB + BA$ .   |
| $A \sim B$                  | $A$ пропорционально $B$ .  |
| $c$                         | Скорость света.  |
| Дельта-функции              | $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3)$ , $\delta^4(x) = \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \delta(x_0)$ .   |
| Операторы дифференцирования | $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ , $\square = \partial_\mu \partial_\mu$ , $\triangle = \partial_k \partial_k$ .   |
| $\epsilon(z)$               | $= \begin{cases} +1 & z_0 > 0 \\ -1 & z_0 < 0 \end{cases}$   |
| Волновые функции            | $Q(x) = \{Q_\alpha(x)\}$ для общего вида полей;<br>$\psi(x)$ для полей, волновыми уравнениями которых является система дифференциальных уравнений первого порядка;<br>$U_{\alpha\dots}(x)$ для бозе-полей в тензорном представлении. |
| $\Phi$                      | Скалярный потенциал ( $c$ -число).   |
| $H'$                        | Гамильтониан взаимодействия.   |
| $h$                         | Постоянная Планка.   |
| $\hbar$                     | $h/2\pi$ .   |
| Обозначения интегрирования  | $\int d\mathbf{k} = \int d^3k = \int dk_1 dk_2 dk_3,$<br>$\int d^4k = \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_0,$<br>$\int d^3x = \int dx_1 dx_2 dx_3,$<br>$\int d^4x = \int dx_1 dx_2 dx_3 dt \quad (t = x_0 = -ix_4).$                              |

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| $(k, l, m)$ Цикл.<br>(1, 2, 3) | обозначает, что $(k, l, m)$ — одна из комбинаций (1, 2, 3), (2, 3, 1) или (3, 1, 2).   |
| $K_\mu$                        | Величина энергии-импульса свободной частицы, т. е. $K_\mu = (k_1, k_2, k_3, iK_0)$ с $K_0 = \sqrt{(k, k) + \chi^2}$ .                                |
| $\chi$                         | Масса частицы общего вида.   |
| $L$                            | Полный лагранжиан.   |
| $L^0$                          | Лагранжиан свободных полей.  |
| $L'$                           | Лагранжиан взаимодействия.   |
| Массы                          | $m$ — масса электрона, $\chi$ — масса частицы общего вида.   |
| $\mathfrak{M}$                 | Оператор магнитного момента.   |
| $n_\mu(x)$                     | Вектор нормали к пространственно-подобной поверхности $\sigma$ в точке $x$ .   |
| $P_{\mu\nu}$                   | Оператор полного момента количества движения полей.  |
| Вектор состояния               | $\Psi[\sigma]$ — для состояний на поверхности $\sigma$ ; $\Phi_0$ — для состояния вакуума  |
| Индексы                        | $\mu$ пробегает значения от 1 до 4, т. е. $a_\mu = (a_1, a_2, a_3, a_4 = ia_0)$<br>$k$ пробегает значения от 1 до 3, т. е. $a_k = (a_1, a_2, a_3)$ . |
| $\text{Sp}(A)$                 | След (шпур) матрицы $A$ .  |
| $\sigma$                       | Пространственно-подобная поверхность.  |
| $\sigma(x)$                    | Пространственно-подобная поверхность, проходящая через точку $x$ .   |
| $\sigma_k$ ( $k = 1, 2, 3$ )   | Матрицы спина.   |
| $T_\mu$                        | Оператор энергии-импульса полей.   |

## ВЕЛИЧИНЫ ПОСТОЯННЫХ

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} = \left( \frac{1}{137,3} \right) \hbar c.$$

Масса электрона

$$m \begin{cases} = 0,78 \cdot 10^{21} \text{сек.}^{-1} \left( \frac{1}{h} \right) \\ = 0,26 \cdot 10^{11} \text{см.}^{-1} \left( \frac{c}{h} \right) \end{cases}$$

Классический радиус электрона

$$r_0 \equiv \frac{\alpha}{mc^2} = 2,80 \cdot 10^{-13} \text{см.}$$

Комптоновская длина волны электрона

$$\lambda_0 \equiv \frac{\hbar}{mc} = 3,85 \cdot 10^{-11} \text{см.}$$

Радиус атома водорода

$$a \equiv \frac{\hbar^2}{m\alpha} = 0,528 \cdot 10^{-8} \text{см.}$$

# Историческое введение

## § 1. Исследования по теории элементарных частиц

Различные формы вещества принято классифицировать в соответствии с теми физическими законами, которыми они описываются. Таким способом, например, мы различаем между собой твердое, жидкое и газообразное состояние какого-либо вещества. С точки зрения рассматриваемых нами вопросов удобнее произвести классификацию, которая определяется масштабами явлений; так, мы различаем между собой туманности, небесные тела, вещество в лабораторных масштабах, атомы, ядра и элементарные частицы. Однако все они зависят друг от друга — атомы состоят из ядер, ядра — из элементарных частиц.

Законы, управляющие движением вещества в различных масштабах, не одинаковы; в лабораторных масштабах применимы законы ньютоновой механики, а движение в атомных системах описывается законами квантовой механики. Мы можем сказать, что задачей теории элементарных частиц является открытие новых законов этой пока еще не изученной формы вещества.

Единственным способом построения теории элементарных частиц являются попытки основывать ее на соответствующим образом модифицированных законах близкой формы вещества. Хотя на этом пути возникают серьезные противоречия с известными законами, но именно эти противоречия и являются ключом к новой теории. Классическим примером является противоречие между квантовым условием Бора и ньютоновой механикой, которое привело к построению новой квантовой механики.

Пределы применимости теории определяют границы соответствующей формы вещества. Однако существует плавный переход из одной формы в другую в том смысле, что определенные результаты одной теории соответствуют определенным результатам другой — так называемый принцип соответствия. Например, квантовая механика и теория относительности характеризуются соответственно постоянными  $\hbar$  и  $c$ , и когда величины  $\hbar$  и  $(1/c)$  стремятся к нулю, результаты этих теорий должны быть аналогичны результатам ньютоновой механики.

Историю теории элементарных частиц мы рассмотрим с указанной точки зрения. Хотя существующая теория элементарных частиц и не описывает всех особенностей поведения элементарных частиц, все же в этом отношении сделаны значительные успехи. Например, недавние открытия ряда новых элементарных частиц сделали возможным обсуждение основных проблем в более общей форме. Большое значение имеют успехи в развитии мезонной теории.

Многие из основных трудностей, связанных со структурой элементарных частиц, содержались уже в классической теории электрона Лоренца. Однако открытие квантовой механики отодвинуло эти трудности в нерешенном виде на задний план, и современная формулировка теории элементарных частиц основывается на обобщении квантовой механики (см. гл. 6). Ряд приближенных результатов квантовой теории находится в блестящем согласии с результатами экспериментов, проведенных над электронами и электромагнитным полем; тем не менее давно было известно, что теория не может дать точных предсказаний ввиду наличия эффектов так называемого *собственного поля*, по-видимому, тесно связанных с трудностями классической теории электрона. Необходимо подчеркнуть, что эти трудности являются основной проблемой, которую должна решить точная теория элементарных частиц.

Естественно спросить, как можно приложить настоящую теорию к электронам и электромагнитному полю и насколько это будет разумно, учитывая указанные основные трудности? Этот вопрос связан с пределами применимости существующей теории элементарных частиц.

Первоначально проблемы, связанные с собственными полями, рассматривались с чисто академической точки зрения, несмотря на то, что удовлетворительное решение общей проблемы зависит от исследования связанных с ними физических явлений. Первым значительным шагом в решении этой проблемы явились работы Томонага и Швингера по перенормировке в квантовой электродинамике. Эти работы привели к объяснению ряда реальных физических особенностей собственных полей в электродинамике.

В следующем параграфе будет кратко изложена история этих проблем — открытие элементарных частиц и доказательство того, что физические эффекты, связанные с собственными полями, наблюдаемы. Мы обсудим также проблемы применимости существующей теории.

## § 2. Теория элементарных частиц

Элементарными частицами мы будем называть частицы, которые, насколько нам известно, не имеют внутренней структуры. Наиболее известными из элементарных частиц являются электрон

и фотон, сыгравшие важную роль в открытии квантовой механики. Благодаря этому существующая теория элементарных частиц развивалась как обобщение квантовой механики (см. гл. 6).

Первые указания о существовании электронов были получены из экспериментальных данных электрохимии, из которых следовало, что заряды ионов всегда в целое число раз больше элементарного заряда  $e$ . С помощью своих опытов с катодными лучами Томсон доказал существование частицы с отрицательным элементарным электрическим зарядом—электрона. Элементарность электрического заряда является характерной особенностью элементарных частиц.

Электрон имеет собственный момент количества движения, или *спин*. Спин не равен нулю даже в том случае, когда электрон покоится. Чтобы объяснить тонкую структуру атомных спектров и аномальный эффект Зеемана щелочных атомов, необходимо для величины спина электрона принять значение  $\hbar/2$ , которое выводится из релятивистской квантовой теории электрона Дирака.

Ввиду того что масса любого атома примерно равна массе атома водорода, умноженной на некоторое целое число, можно предположить, что протон является той частицей, из которой построены ядра (ср. гипотезу Прюта, 1815 г.). Однако отсюда нельзя еще заключить, что ядра состоят только из одних протонов, потому что дейтрон, например, масса которого равна удвоенной массе атома водорода, имеет лишь единичный заряд  $e$  (а не  $2e$ ).

Но даже с учетом того, что масса электрона пренебрежимо мала по сравнению с массой протона, нельзя допустить, что дейтрон состоит из двух протонов и одного электрона (т. е. из трех частиц со спином  $\hbar/2$ ), так как это допущение приводит к заключению о полуцелой величине спина дейтрона, что противоречит экспериментальной величине его спина, равной  $\hbar$ .

Эта трудность разрешена открытием нейтрона в 1932 г. Жолио-Кюри [23, 24] открыл, что при искусственной радиоактивности ядер Be наблюдается нейтральное излучение, которое при столкновении с ядрами водорода сообщает последним весьма значительную энергию. Чэдвик [18] показал, что это излучение состоит из нейтральных частиц, масса которых примерно равна массе протона.

Значительно раньше, еще в 1920 г., Резерфорд предположил существование нейтральной частицы с массой, примерно равной массе протона; причем он указал, что эта частица состоит из одного протона и одного электрона и благодаря отсутствию заряда обладает большой проникающей способностью. Тем не менее Глэссону [49] и Робертсу [104] не удалось открыть такой частицы в элементарных разрядах в водороде и доказать правильность гипотезы Резерфорда. Однако эта гипотеза не была отвергнута. И не удивительно, что Чэдвик, работавший с Резерфордом в лаборатории Кавендиша, открыл нейтрон. Во второй статье Чэдвика имеется ссылка на предсказание Резерфорда.

На основе этого открытия Иваненко [65] выдвинул гипотезу, что все ядра состоят из протонов и нейтронов. Независимо Гейзенберг [52] с целью выявления общих закономерностей провел детальный анализ различных свойств ядер. С этого времени протон и нейтрон стали рассматриваться как два различных состояния одной и той же частицы — *нуклона* (см. гл. 7, пример 10). Это представление легло в основу теории ядер, но, с другой стороны, привело к некоторым трудностям, которые стимулировали создание мезонной теории.

Созданные Кокрофтом и Уолтоном ускорители высоких энергий в лаборатории Кавендиша (1932 г.) позволили получить экспериментальные данные о структуре ядер. С помощью ускорителей стало возможным вызвать расщепление многих ядер. Успехи в развитии ускорителей высоких энергий связаны с созданием Лоуренсом циклотрона (1930 г.), Ван де Граафом высоковольтного электростатического генератора, Макмилланом (1945 г.) и Векслером (1945 г.) синхротрона и Керстом (1941 г.) бетатрона. В последнее время созданы различные ускорители, с помощью которых получают частицы с энергиями, достаточно высокими, чтобы вызвать искусственное рождение некоторых элементарных частиц.

Ввиду того что протонно-нейтронная теория строения ядра не допускает существования электронов в ядре, необходимо интерпретировать  $\beta$ -распад ядер как порождение электронов ядром. Тот факт, что энергии порождаемых электронов имеют непрерывный спектр, тогда как разница между энергиями материнских и дочерних ядер равна вполне определенной величине, на первый взгляд кажется несовместимым с законом сохранения энергии. Паули в лекции, прочитанной в Пасадене в 1931 г., указал, что для удовлетворения закона сохранения энергии необходимо допустить испускание одновременно с электроном еще нейтральной частицы очень малой массы (названной нейтрино)<sup>1</sup>). Эта идея, обсуждавшаяся на седьмом Сольвеевском конгрессе в 1933 г., подкреплялась тем обстоятельством, что максимальная энергия, с которой электрон мог быть испущен при  $\beta$ -распаде, примерно равна разнице между энергиями материнских и дочерних ядер [37]. В 1934 г. была развита теория  $\beta$ -распада, основанная на гипотезе о нейтрино [39], и это обстоятельство, как это будет показано позднее, подготовило почву для создания мезонной теории.

Теперь на сцену появляется позитрон. Релятивистская квантовая теория [26, 27] при интерпретации состояний с отрицательной энергией [74] столкнулась с весьма серьезными трудностями. Для преодоления этих трудностей Дирак выдвинул так называемую теорию дырок, которая ввела частицу с массой, равной массе элек-

<sup>1</sup>) Экспериментально существование нейтрино было окончательно доказано на большом ядерном реакторе сравнительно недавно [145].— *Прим. ред.*

трона, но с положительным зарядом [28, 29]. Эта частица была названа позитроном и могла быть отождествлена с частицей, открытой Андерсоном [1]<sup>1)</sup> при изучении космических лучей с помощью камеры Вильсона. Электроны и позитроны входят в теорию Дирака симметрично<sup>2)</sup>. Таким образом, эта теория является прототипом позднейших квантовых теорий полей заряженных частиц, которые всегда имеют дело одновременно и с положительным и с отрицательным зарядом (см. гл. 9). На этом основании мы прием существование частицы с массой, равной массе протона, и с зарядом, противоположным по знаку, но равным по абсолютной величине. Хотя в настоящий момент существуют некоторые экспериментальные данные, подтверждающие существование такой частицы, однако этого пока нельзя ни утверждать, ни отрицать. Разрешение этого вопроса укажет, подчиняется ли протон существующей теории элементарных частиц<sup>3)</sup>.

### • § 3. Мезоны

Существование электромагнитных и гравитационных сил между различными телами было установлено уже давно. Электромагнитные силы могут быть выведены из квантовой электродинамики. В самом деле, существующая квантовая теория поля всегда дает силу, действующую между элементарными частицами (например, электронами), которая обуславливается другими элементарными частицами (например, фотонами), когда оба типа частиц (например, электроны и фотоны) взаимодействуют друг с другом. Мы не будем рассматривать силу тяготения<sup>4)</sup>, потому что пока еще не ясно, может ли она быть правильно описана с помощью механизма взаимодействия элементарных частиц; во всяком случае, известно, что константа связи гравитационного поля с другими полями очень мала в сравнении с другими известными константами связи. Силы, действующие между нуклонами, не могут быть чисто электромагнитного происхождения, так как нейтрон не имеет электрического заряда и известно из эксперимента, что ядерные

<sup>1)</sup> См. также [9].

<sup>2)</sup> Автор называет электроны негатоном (negaton), а позитроны — позитонами (positon), с тем чтобы под термином электроны понимать и негатоны и позитоны. Однако эта терминология не привилась в нашей литературе, хотя под термином электроны часто понимают электроны и позитроны. При переводе мы придерживались этого правила, в конкретных же случаях использовались соответственно термины электрон и позитрон.— *Прим. ред.*

<sup>3)</sup> Недавно существование антипротона (т. е. протона с отрицательным зарядом) было доказано экспериментально на беватроне группой Сегре [146]. Точно так же на беватроне был открыт антинейтрон [147] (нейтрон, у которого магнитный момент параллелен спину).— *Прим. ред.*

<sup>4)</sup> Поэтому везде в этой книге специальная теория относительности будет именоваться просто теорией относительности.



силы превышают более чем в 100 раз электромагнитные силы (см. гл. 7, пример 11).

С тех пор, как Гейзенберг опубликовал свою теорию строения ядра, делались попытки развить ее в двух направлениях: по линии создания феноменологической теории ядерных сил и по линии приложения теории элементарных частиц к ядрам. Многие авторы развивали феноменологические теории ядерных сил, беря различные потенциалы и сравнивая полученные таким путем теоретические результаты с экспериментальными данными. Они изучали стационарные состояния легких ядер, особенно дейтрона, и рассеяние нуклонов на нуклонах, а затем применяли полученные из экспериментов сведения о ядерных силах к изучению свойств более тяжелых ядер.

Тяжелые ядра имеют весьма характерную особенность, так называемое насыщение. Если бы все нуклоны в ядре (с массовым числом  $n$ ) взаимодействовали друг с другом обычно, т. е. по принципу взаимодействия двух тел, то энергия связи была бы пропорциональна  $n^2$ , а не  $n$ , как известно из эксперимента. Это напоминает валентности в теории химической связи. Каждая частица, по-видимому, выбирает небольшое число других частиц, с которыми она взаимодействует. Исходя из этой аналогии, Гейзенберг в своей феноменологической теории ядерных сил ввел представление об обменных силах. Размеры области действия ядерных сил между двумя нуклонами равны на основе феноменологических оценок примерно  $2 \cdot 10^{-13}$  см, что намного меньше области действия электромагнитных сил.

Как сказано выше, ядерные силы нельзя свести к электромагнитному взаимодействию. Уже два десятилетия известны элементарные частицы, взаимодействующие с нуклонами, — электроны и нейтрино. Иваненко [65] и Тамм [117] ввели в теорию ядерные силы, которые обусловлены взаимодействием электронов и нейтрино с нуклонами (т. е.  $\beta$ -взаимодействие). Позднее мы покажем, что в существующей квантовой теории поля магнитный момент каждой элементарной частицы должен включать также и вклад от взаимодействия с другими элементарными частицами. Поэтому, если считать, что ядерные силы обусловлены  $\beta$ -взаимодействием, то следует принять, что магнитные моменты нуклонов должны быть связаны с этим взаимодействием. Вик [135] и Вейцекер [132] исследовали вопрос о том, может ли указанный механизм дать правильную величину магнитных моментов протона и нейтрона ( $2,8 e\hbar/2Mc$ ,  $-1,9 e\hbar/2Mc$ , где  $M$  — масса нуклона). Однако оказалось, что величина ядерной силы и аномальной части магнитного момента, даваемые теорией  $\beta$ -взаимодействия, слишком малы по сравнению с экспериментальными данными. К тому времени не было известно других элементарных частиц, и поэтому возник вопрос, можно ли вообще вывести ядерные силы из квантовой теории поля.

Однако эта трудность была разрешена с помощью весьма простой идеи, правомерность которой может быть проверена соответствующим экспериментом. В существующей квантовой теории можно показать [136], исходя лишь из принципа неопределенности (см. гл. 12), что величина массы частицы, обуславливающей силу с радиусом действия  $r$ , равна  $\kappa = (h/rc)$ . Подставляя в эту формулу значение  $r$ , полученное при феноменологических исследованиях ядерных сил, мы видим, что ядерные силы должны быть обусловлены элементарными частицами с массой покоя  $\kappa \approx 200 m$  ( $m$  — масса электрона). Эту частицу, мезон, ввел в теорию Юкава [140]. Далее мезонная теория давала возможность получить обменные силы различной величины. Однако обменные силы еще не дают полного решения проблемы насыщения ядерных сил. Как отмечено выше, проблемы ядерных сил и аномального магнитного момента нуклона связаны между собой самым тесным образом. Позднее мы обсудим вопрос об аномальном магнитном моменте нуклона на основе мезонной теории. В 1936 г. Андерсон и Неддермейер с помощью камеры Вильсона открыли в космических лучах частицу с массой около  $200 m$ , а Оппенгеймер, Штукельберг [113] и Юкава [141] указали, что эта новая частица может быть мезоном Юкавы<sup>1)</sup>. Это открытие вызвало новый интерес к теории элементарных частиц и возродило надежды на то, что формализм квантовой теории поля, являющейся обобщением квантовой электродинамики, оправдывает себя.

#### § 4. Краткий обзор известных элементарных частиц

Вслед за открытием мезона появились сообщения о существовании многих элементарных частиц.

Космические лучи состоят из двух компонент — жесткой компоненты (проникающей сквозь слой свинца толщиной  $10$  см) и мягкой компоненты (поглощаемой в слое свинца толщиной  $10$  см). Жесткая компонента состоит главным образом из мезонов. Как показывают наблюдения, мезоны, содержащиеся в космических лучах, распадаются в течение очень короткого промежутка времени ( $\approx 10^{-8}$  сек.) на электроны и нейтральные частицы. Этот распад впервые наблюдали Вильямс и Робертс [137] с помощью камеры Вильсона. Указанное выше значение времени жизни установлено на основе наблюдения различных явлений в космических лучах. Разетти [100] и Мейзе [87] измерили непосредственно время жизни мезона относительно каждого процесса распада. На основе закона сохранения энергии можно ожидать, что вместе с электроном образуется нейтральная частица.

<sup>1)</sup> Андерсон и Неддермейер открыли  $\mu$ -мезоны. Ядерные мезоны Юкавы следует отождествить с  $\pi$ -мезонами, открытыми несколько позднее (см. ниже). — *Прим. ред.*

Процесс распада мезона был принят во внимание также в теории Юкавы, в которой предполагается, что  $\beta$ -распад не является прямым следствием превращения нуклонов, сопровождаемого излучением электрона и нейтрино, но что сначала в виде промежуточного состояния образуется мезон, который в дальнейшем распадается на электрон и нейтрино. Поскольку величину взаимодействия нуклон — мезон и нуклон — электрон можно оценить исходя из экспериментальных данных о ядерных силах и  $\beta$ -распаде, то на основании этого можно получить величину взаимодействия мезон — электрон и тем самым определить время жизни мезонов. Однако подобного рода оценки в качестве времени жизни дают величину  $10^{-8}$  сек., что примерно на  $10^{-2}$  меньше экспериментально полученной величины (см. работы Бете и Нордгейм [4], Юкава, Саката, Кобаяси и Такетани [144]).

Так как мезоны естественным образом распадаются на электроны, то следует предположить, что все наблюдаемые в космических лучах мезоны образуются вблизи поверхности Земли. Более того, тот факт, что большая часть первичной компоненты космических лучей, падающих на Землю, состоит из протонов [111], заставляет предположить, что мезоны должны образовываться в результате столкновений этих протонов с атомами атмосферы. Следовательно, для объяснения наблюдаемого количества мезонов необходимо было предположить, что взаимодействие мезонов с нуклонами должно быть достаточно сильным. И действительно, в теории Юкавы для получения правильной величины ядерных сил это взаимодействие предполагается достаточно большим. Однако это обстоятельство несовместимо с тем фактом, что мезоны, содержащиеся в космических лучах, имеют малое эффективное сечение взаимодействия с веществом [138].

Эти трудности были выявлены римской группой физиков [22] в результате наблюдений космических лучей. Однако еще раньше Томонага и Араки [124] указывали, что в теории Юкавы почти все отрицательно заряженные мезоны должны быть захвачены нуклонами благодаря кулоновскому притяжению и взаимодействию мезона с нуклонами. Однако эксперименты римской группы показали, что значительная часть отрицательно заряженных мезонов не поглощается углеродом, а распадается на электроны. Подробные вычисления Ферми, Теллера и Вайскопфа [41] привели к заключению, что теоретическая и экспериментальная величины эффективного сечения захвата различаются между собой множителем  $\approx 10^{12}$ .

Поскольку трудности оказались слишком серьезными, чтобы можно было надеяться разрешить их какими-либо усовершенствованиями вычислений, то была создана „двухмезонная теория“, согласно которой мезоны в космических лучах вблизи уровня моря не являются теми мезонами, которые, по теории Юкавы, обуслов-

ливают ядерные силы, а представляют собой вторичные продукты распада мезонов, связанных с ядерными силами, лишь слабо взаимодействующие с веществом. Были сделаны многочисленные попытки разрешить эту трудность. Например, Вайскопф [131] рассмотрел интересную возможность, основанную на введении понятия о „содержащем мезон состоянии нуклона“. Эти две попытки имели между собой ту общую черту, что они отделяли процесс поглощения мезона от процесса его порождения. В 1942 г. двухмезонную теорию развили Саката, Таникава и др. Независимо двухмезонная теория была разработана также Маршаком и Бете [86].

Двухмезонная теория была экспериментально подтверждена бристольской группой физиков (Латтес, Оккиалини и Пауэлл [80]). С помощью метода фотопластинок они показали, что более тяжелые мезоны, получающиеся в результате ядерных взаимодействий, распадаются на более легкие мезоны. С этого времени техника фотоэмульсий дала замечательный вклад в наши знания о свойствах новых элементарных частиц.

В двухмезонной теории имеется следующая схема взаимодействий: ядерный мезон (который со времени экспериментов бристольской группы называется  $\pi$ -мезоном) сильно взаимодействует с нуклонами и приводит к возникновению ядерных сил. Поскольку роль этого мезона эквивалентна роли частицы, которую ввел Юкава, можно сказать, что окончательная идентификация мезона Юкавы была дана экспериментами бристольской группы. Как было сказано выше, мезоны, содержащиеся в космических лучах на уровне моря, слабо взаимодействуют с нуклонами и самопроизвольно распадаются на электроны с временем жизни  $\sim 10^{-6}$  сек. Эти мезоны сейчас называются  $\mu$ -мезонами. Многими авторами [82] экспериментально показано, что число нейтральных частиц, образующихся при распаде  $\mu$ -мезона, — больше двух;  $\pi$ -мезоны распадаются с образованием  $\mu$ -мезонов с временем жизни  $\sim 10^{-8}$  сек. Точные измерения времени жизни  $\pi$ -мезонов были проведены Ричардсоном [103], исследовавшим искусственно полученные мезоны. Закон сохранения энергии требует, чтобы при распаде  $\pi$ -мезона наряду с  $\mu$ -мезоном образовывалась нейтральная частица очень малой массы. Таким образом, протоны первичных космических лучей в результате столкновений с атомами атмосферы приводят к рождению  $\pi$ -мезонов; эти  $\pi$ -мезоны распадаются на  $\mu$ -мезоны, которые в свою очередь распадаются с образованием электронов. При этом для детальной картины взаимодействия нуклонов,  $\pi$ - и  $\mu$ -мезонов и электронов имеются различные возможности; например, к  $\beta$ -распаду ядер могут привести как прямое взаимодействие между нуклоном и электроном, так и одновременно осуществляющиеся взаимодействия  $\pi$ -мезон — нуклон и  $\pi$ -мезон — электрон. Много усилий было затрачено на создание теории (например, Тимонно и Уиллер [121], Такетани, Накамура и Сасаки [116],

Юкава [142]), которая давала бы близкие к эксперименту результаты (см. гл. 7, пример 11). Отсюда можно сделать вывод, что  $\beta$ -распад не является процессом, обусловленным исключительно только  $\pi$ -мезонами.

В 1948 г. с помощью бомбардировки мишени  $\alpha$ -частицами, ускоренными на Берклеевском циклотроне, удалось искусственно получить  $\pi$ -мезоны. С помощью искусственно полученных мезонов были достигнуты значительные успехи в мезонной физике. В частности, было показано (Маршак [85], Честон [19], Дурбин, Лоар и Штейнбергер [35], Кларк, Робертс и Вильсон [21]), что спин  $\pi$ -мезона равен нулю и что  $\pi$ -мезон по всем данным является псевдоскалярной частицей (см. гл. 10, пример 6).

Треки нейтральных мезонов нельзя непосредственно наблюдать в камере Вильсона или на фотопластинке. Однако экспериментальные данные о ядерных силах заставляют предполагать существование нейтральных ядерных мезонов (которые сейчас называются  $\pi^0$ -мезонами). Тот факт [16], что эффективное сечение рассеяния нуклонов на нуклонах при низких энергиях не зависит от зарядового состояния нуклона (за исключением случая  $pp$ -рассеяния, когда действует кулоновская сила), показывает, что в общую величину ядерной силы имеется вклад от нейтральных ядерных мезонов (Фрелих, Гайтлер и Кеммер [47], Юкава, Саката, Кобаяси и Такетани [144]). В 1940 г. Саката и Таникава показали на основании квантовой теории, что нейтральный ядерный мезон должен очень быстро распадаться на фотоны (см. гл. 13, пример 3); он должен испытать распад либо на два, либо на три фотона, в зависимости от того, равен ли его спин нулю или единице. Этот вывод заставил предполагать, что фотоны, получающиеся в результате распада нейтральных мезонов, дают значительный вклад в мягкую компоненту космических лучей. Так называемые атмосферные ливни, наблюдаемые в космических лучах, также приводят к предположению о существовании фотонов, образовавшихся в результате распада нейтральных мезонов. Более того, опыты с фотопластинками, облученными на высоте около 33 км [70], дали фотографии, по-видимому, продемонстрировавшие распад нейтральных мезонов на фотоны. В 1950 г. с помощью бомбардировки бериллиевой мишени ускоренными протонами [7] берклеевской группе удалось искусственно получить нейтральные мезоны, которые распадались на два фотона. Согласно современной квантовой теории, из этого факта следует, что спин нейтрального мезона равен нулю (см. гл. 13, пример 2).

В 1947 г. Рочестер и Батлер обнаружили новые положительно заряженные и нейтральные частицы с массами около 1000  $m$ . С тех пор сообщалось о многих наблюдениях над новыми элементарными частицами. Эти частицы названы  $\Lambda$ -,  $\theta$ -,  $\tau$ -,  $\chi$ - и  $\kappa$ -частицами и т. д. (см. гл. 4, § 5). В современной квантовой теории поля прини-

мается, что эти частицы имеют определенные спины, массы и заряды<sup>1)</sup>).

Предположение о том, что все эти частицы являются квантами действительно различных полей, вероятно, носит предварительный характер и справедливо только при определенных ограничениях (например, в области не слишком больших энергий, не очень больших величин константы связи и т. д.), когда можно пренебречь внутренним строением частиц. Однако можно надеяться, что на этом пути удастся понять взаимосвязь между частицами и в конце концов построить их общую теорию.

Проблема структуры частиц много раз обсуждалась в связи с основными трудностями, свойственными современной квантовой теории поля. Этой проблемы мы коснемся в последующих параграфах.

## § 5. Квантовая теория поля и ее трудности

Как было указано выше, характерной чертой элементарных частиц является их взаимопревращаемость. Современная квантовая теория поля была сформулирована Гейзенбергом и Паули [60] как обобщение квантовой механики, которое должно было удовлетворить требованиям теории относительности и позволить трактовать разнообразные взаимопревращения частиц.

В своей первоначальной формулировке квантовая механика была ограничена рассмотрением явлений, в которых число частиц оставалось постоянным, а их скорости были достаточно малы, чтобы можно было удовлетвориться нерелятивистским приближением. Первым обобщением теории явилась релятивистская квантовая механика частиц, построенная Дираком [26, 27], которая для решения трудностей с состояниями с отрицательной энергией привела к построению теории позитронов [28, 29]. В этой последней теории описываются взаимопревращения электронов и фотонов, и сейчас мы знаем, что эта теория эквивалентна теории электронного поля<sup>2)</sup> (см. работы Крамерса [76], Иваненко и Соколова [67]).

Электромагнитное поле требует более непосредственного применения квантовой теории поля. В этом случае имеется теория Максвелла, которая является ковариантной теорией, и явления излучения электромагнитных волн могут рассматриваться как классическая форма превращений элементарных частиц (электронов и фотонов): в квантовой теории поля излучение и поглощение электромагнитных волн рассматриваются соответственно как порождение и уничтожение фотонов.

<sup>1)</sup> Более подробно об открытых элементарных частицах и их основных свойствах см. работу [148]. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Напомним, что под электронами автор понимает как электроны, так и позитроны. — *Прим. ред.*

Сущность квантовой теории поля можно грубо сформулировать следующим образом: состояние полей в некоторый момент времени может быть определено с помощью наблюдений во всех точках поля в этот момент времени. Для того чтобы такое состояние могло быть определено однозначно, необходимо, чтобы два наблюдения в различных точках в одно и то же время не возмущали друг друга. Это требование автоматически удовлетворяется, если оказываются удовлетворенными требования теории относительности, потому что скорость распространения возмущений должна быть меньше скорости распространения света. Фотон достаточно большой энергии ( $>2mc^2$ , где  $m$  — масса электрона) может вызвать изменение состояния электронного поля в веществе (образование пары электрона и позитрона). Вектор состояния можно рассматривать таким же способом, как и в квантовой механике (т. е. имеет место принцип суперпозиции, изменение вектора состояния со временем в соответствии с уравнением Шредингера и т. д.).

Квантовая электродинамика в своем развитии основывалась на некоторых экспериментальных фактах о квантовых особенностях систем, состоящих из электрона и электромагнитного поля (см. гл. 6), и достигла блестящих успехов, например, в теории каскадных ливней. В 1932 г. стало ясно, что проникающая способность космических лучей через свинец больше вычисленной при учете потерь на излучение и ионизацию. В 1933 г. Блэккетт и Оккиалини открыли явление, в котором происходит одновременное образование многих заряженных частиц, т. е. открыли ливни. Это явление было объяснено каскадной теорией (Карлсон и Опленгеймер [17], Баба и Гайтлер [6]) как процесс повторного образования пар фотонами и излучения фотонов электронами высокой энергии<sup>1)</sup>. Это показывает, что квантовая электродинамика может быть успешно применена в области даже очень высоких энергий. Однако сильно проникающая часть космических лучей, т. е. жесткая компонента, о которой говорилось в § 3 и 4, оставалась необъясненной.

В 1936 г. Дирак обобщил свою релятивистскую теорию электрона на случай произвольного спина. В деталях эту теорию исследовали Фирц и Паули [45] (см. гл. 4). Для нулевого спина теория уже раньше (в 1934 г.) была разработана Паули и Вайскопфом. В 1940 г. Паули выяснил соотношение между спином и статистикой; элементарные частицы с полуцелым спином (электроны, нуклоны и т. д.) должны подчиняться статистике Ферми, а с целым спином (например, фотоны) — статистике Бозе (см. гл. 8). Общие типы релятивистских волновых уравнений рассмотрены в гл. 5.

Работы по общей теории элементарных частиц нашли свое применение в мезонной теории. Юкава, Саката, Такетани и Кобаяси [144], а также Кеммер [73] и Баба [5]<sup>1)</sup> исследовали мезонную

<sup>1)</sup> См. также [149, 150]. — Прим. ред.

теорию для различных типов мезонов. Теоретически говоря, следует ожидать наличия в природе всех типов элементарных частиц, к которым приводит общая теория релятивистских волновых уравнений. Поэтому очень интересным является вопрос о том, какие же из всех мыслимых типов элементарных частиц реализуются в природе.

По-видимому, для ответа на этот вопрос необходимо углубить знания структуры элементарных частиц. Эта проблема исследовалась многими авторами в связи с серьезными затруднениями современной теории элементарных частиц. Однако ввиду того, что эта проблема имеет несколько академический характер, более плодотворные результаты были получены при изучении более конкретного вопроса о взаимодействиях элементарных частиц, осуществляющихся в природе. Следует подчеркнуть, что последняя проблема наполняет указанную выше более академическую проблему конкретным содержанием.

В числе трудностей, возникающих в связи с вопросами о структуре элементарных частиц, можно назвать классическую теорию электрона Лоренца. В классической электромагнитной теории сосредоточение конечного заряда определенного знака в точке приводит к появлению бесконечной энергии, связанной с кулоновским полем. В соответствии с хорошо известным соотношением Эйнштейна, связывающим энергию и массу, такой электрон имеет бесконечную массу и быстро распадется. В теории Лоренца на электрон (кроме силы от внешнего поля) действует следующая сила:

$$\mathbf{F} = -\delta m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^2} \frac{d^3}{dt^3} \mathbf{x} + \dots$$

Первый член соответствует упомянутому выше возрастанию энергии, связанному собственному полю, т. е. электромагнитному полю, возбуждаемому самим электроном. Действительно, поскольку этот член пропорционален ускорению, он связан с изменением  $\delta m$  в величине массы электрона. Второй член проистекает от эффекта затухания, т. е. уменьшения энергии, вызванного излучением. Члены, обозначенные многоточием (...), зависят от распределения заряда внутри электрона<sup>1)</sup>.

Эффекты, связанные с силой ( $\mathbf{F}$ ), называются эффектами самодействия. Так как  $\delta m \sim 1/a$  ( $a$  — радиус электрона), то при стягивании электрона в точку его масса становится бесконечной.

Чтобы обойти эту трудность, были сделаны многочисленные попытки построить модель подходящим образом протяженного электрона. Однако эта проблема была слишком умозрительной,

<sup>1)</sup> Классическая теория электрона Дирака [33] сформулирована в ковариантном виде, и члены высшего порядка ( $\geq 3$ ) в выражении для ( $\mathbf{F}$ ) в этой теории равны нулю. Его „новая классическая теория электрона“ опубликована в 1952 г.



чтобы привести к определенному заключению. По-видимому, более подходящим путем являются поиски эффектов, связанных с собственным полем, которые дают ключ к разгадке этой трудности.

Попытки разрешить проблему бесконечной собственной массы электрона были сделаны многими авторами (Борн и Инфельд [14], Бопп [12], Дирак [33] и т. д.). Боппу удалось получить устойчивый электрон путем добавления энергии, знак которой противоположен знаку бесконечной электромагнитной энергии электрона. Этот метод может быть приведен в качестве примера метода компенсирующего поля, в котором для получения устойчивого электрона для компенсации кулоновского отталкивания вводится сила притяжения между зарядами одинаковых знаков. Представление о компенсирующем поле впервые ввел Пуанкаре [99]. Подробное исследование вопроса о компенсирующем поле в классической теории было проведено Штюкельбергом [114], который показал, что введением компенсирующего поля нейтрального скалярного типа можно построить непротиворечивую теорию электрона (см. также [151]).

В квантовой теории поля этот вопрос исследовали независимо Саката [107] и Пайс [91], показавшие, что трудности бесконечной массы можно преодолеть с помощью компенсирующего нейтрального скалярного поля. Это компенсирующее поле названо *S*-мезонным, или *f*-полем, а теория — смешанной теорией, или теорией компенсирующего поля.

Ввиду того, что компенсирующее поле может быть введено тем же самым методом, как и в квантовой электродинамике, применение этого метода к различным проблемам не должно представлять трудности. При этом можно получить выводы, справедливость которых не зависит от конкретного вида компенсирующего поля [107]. Поэтому можно построить непротиворечивую теорию, не пользуясь каким-либо компенсирующим полем, но используя характерные моменты из теории с компенсирующим полем. Саката назвал этот метод методом „конкретного и абстрактного“.

В любой теории структуры элементарных частиц необходимо учесть их внутренние степени свободы. В теории смешанных полей этим степеням свободы соответствуют различные спины и массы компенсирующих полей. Делались неоднократные попытки связать внутренние степени свободы с внутренними движениями (модель Уленбека и Гаудсмита [126], Весселя [134], Хенля [61], Хенля и Папапетроу [62]). В этих теориях вместо энергии, обусловленной взаимодействием с компенсирующим полем, выступает энергия внутреннего движения. Если момент количества движения  $mv$  электрона, вращающегося с угловой скоростью  $v/a$  ( $v$  — скорость точек на поверхности электрона,  $a$  — радиус электрона), приравнять величине спина  $(1/2)h$ , то получится равенство  $a = (1/2)(h/mv)$ . Ввиду того, что  $v \leq c$  ( $c$  — скорость света), получается, что радиус электрона ненамного меньше комптоновской длины волны  $(h/mc)$ . С дру-

гой стороны, приравнивая энергию покоя электрона  $mc^2$  к величине электромагнитной энергии, получаем  $a \approx (e^2/mc^2) = (1/137)(h/mc)$ , что при  $v \leq c$  не согласуется с найденным выше результатом. Этот аргумент, по-видимому, указывает на необходимость введения энергии неэлектромагнитного происхождения (Борн и Шредингер [15]).

Как с каждым электроном связано электромагнитное поле, так и каждое электромагнитное поле связано с бесконечным числом электронов, что приводит к явлению, называемому поляризацией вакуума. Согласно квантовой теории поля, эффекты поляризации вакуума в различных явлениях выступают как бесконечности. К этим проблемам была применена идея компенсирующего поля (Райский [101], Умэдзава, Юкава и Ямада [129]). В качестве абстрактной теории, соответствующей теории компенсирующего поля, можно назвать теорию регуляризации<sup>1)</sup>, которую развили Паули и Вилларс [97] и в которой в явном виде не используется какое-либо компенсирующее поле.

В том случае, когда используется модель протяженного электрона, взаимодействие электрона с электромагнитным полем не сосредоточивается в точке, а происходит в некоторой протяженной области. Такое взаимодействие называется нелокальным. Различные характеристики нелокального взаимодействия исследовали многие авторы (например, Ватагин [130], Бопп [13], Блох [10], Кристенсен и Меллер [77], Паули [95], Шретъен и Пайерлс [20], Умэдзава и Такахачи [128], Катаяма [71], Хайяши [51] и т. д.). Юкава [143] развил нелокальную теорию, в которой поля имеют нелокальный характер даже тогда, когда никакого взаимодействия нет. Эта теория исследовалась также многими авторами (например, Иенни [139], Райский [102], Хара и Шимазу [50], Токуока и Катаяма [122] и т. д.). Эти теории автоматически дают значения различных масс и спинов [144, 102]. Юкава исследовал спектр масс в теории нелокального поля с нелокальным взаимодействием.

В теории протяженного электрона возникает трудность с соблюдением принципа причинности; обычная формулировка принципа причинности для области внутри электрона не может иметь места. В самом деле, Штюкельберг [115] показал, что требование причинности приводит к теории  $S$ -матрицы Дайсона современной квантовой теории поля бесструктурных элементарных частиц (см. гл. 13). Гейзенберг [57] построил теорию<sup>2)</sup>, в которой все частицы конструируются из некоторого основного поля со спином  $1/2$ . Гейзенберг и Фирц исследовали эту теорию в 1950 г. с точки зрения принципа причинности и показали, что хотя эта теория и

<sup>1)</sup> Правила регуляризации, используемые в этой теории, могут быть получены из формальной теории компенсирующего поля [92]. В этой теории Пайс и Уленбек подчеркнули важность свойства „распространения“.

<sup>2)</sup> Невозможно сконструировать частицу с полуцелым спином с помощью частиц с целым спином.

устраняет некоторые трудности с бесконечностями, однако обычный принцип причинности не может в ней иметь места в области вблизи элементарных частиц. Например, пользуясь обычным способом выражения, можно говорить о довольно странных процессах (происходящих „в короткий промежуток времени“), в которых частицы сначала аннигилируют (из состояния, в котором их нет) и лишь затем порождаются (а не порождение и затем аннигиляция!). Поэтому необходимо прежде всего дать подходящую интерпретацию этих математических результатов.

Почти во всех теориях, обсужденных в настоящем параграфе, можно отметить определенные соотношения между массами элементарных частиц. Установление этих соотношений является одной из важных проблем теории элементарных частиц.

### § 6. Наблюдаемые эффекты собственных полей

Получить какие-либо определенные заключения из изложенных выше теорий невозможно ввиду их умозрительного характера. Так как трудности возникают в связи с эффектами собственных полей, то можно ожидать, что реальной базой для изучения проблемы внутреннего строения элементарных частиц могут явиться наблюдаемые эффекты, обусловленные собственными полями известных элементарных частиц.

Наблюдаемые эффекты собственных полей могут дать важные указания о пределах применимости современной квантовой теории поля. Другими словами, можно ожидать, что эти эффекты прольют некоторый свет на вопрос о том, почему ряд приближенных результатов квантовой электродинамики (в которых эффекты собственного поля не принимались во внимание) находится в блестящем согласии с экспериментами.

Современная квантовая теория поля дает нам возможность вычислить вероятность наблюдения всех частиц, которые, подобно облаку, расположены в окрестности частицы, являющейся их источником, причем эта частица — источник и облако (т. е. собственное поле) — наблюдаются вместе как частица (см. гл. 12). Например, каждый электрон окружен облаком электромагнитного поля. Больше того, существует взаимодействие между облаком и частицей — источником, порождающим это облако, что приводит к так называемой реакции со стороны собственного поля. Плотности частиц высоких энергий собственного поля увеличиваются в точках вблизи источника и приводят к различным трудностям с бесконечностями, например к бесконечной массе.

Облако заряженных частиц, связанных с электромагнитным полем, приводит к эффектам так называемой поляризации вакуума, благодаря которым, например, наблюдаемая величина заряда  $e'$  включает вклад  $\delta e$  от заряженных частиц облака. Однако суще-

ствующие вычисления для величины  $\delta e$  дают бесконечное значение (см. гл. 13, пример 6).

Соприкосновение облака элементарной частицы с другой частицей приводит к возникновению взаимодействия между ними. Это взаимодействие известно в квантовой теории как контактное взаимодействие (см. гл. 12). Облако собственного поля (массы  $\kappa$ ) сосредоточено в основном в области радиуса  $r = (\hbar/\kappa c)$  вокруг частицы, являющейся источником [136]. Главная часть ядерной силы возникает за счет мезонного поля вблизи нуклона.

Движение частицы вместе с ее собственным полем отличается от движения голый частицы, следовательно, в обоих этих случаях мы имеем дело с различными моментами количества движения. Более того, сами собственные поля обладают моментом количества движения. Поэтому частицы с собственным полем имеют другие магнитные моменты, чем голые частицы. Например, на основании теоретических соображений можно ожидать наличия у электрона небольшого аномального магнитного момента (т. е. отклонения от собственного магнитного момента  $-\hbar e/2mc$ ), обязанного наличию собственного электромагнитного поля. В силу того, что взаимодействие между нуклонами и мезонами сильнее электромагнитного взаимодействия, можно ожидать легко наблюдаемых эффектов собственного мезонного поля: например, главная часть наблюдаемого аномального магнитного момента нуклонов связана с собственным мезонным полем. Однако теоретические расчеты снова приводят к бесконечностям.

Начиная с 1936 г., Гейзенберг анализировал вопросы применимости квантовой теории поля в связи с наблюдаемыми эффектами собственного поля и удивительными успехами квантовой электродинамики [53—55].

Ввиду того, что эффекты собственного поля тесно связаны со структурой элементарных частиц, естественно ожидать, что применимость квантовой теории поля зависит от того, существенны ли эффекты собственного поля или нет, и поэтому, когда эти эффекты становятся достаточно большими с точки зрения применяемой теории, явление начинает зависеть от структуры элементарных частиц. В квантовой электродинамике эффекты собственного поля ввиду слабого взаимодействия собственных полей могут рассматриваться как слабые возмущения. Свой анализ Гейзенберг [55] начал с классификации взаимодействий, разбив их на два класса — взаимодействия 1-го и 2-го рода. В первом случае квантовая теория поля приводит к заключению, что плотность частиц собственного поля не зависит существенно от их энергии, тогда как во втором случае плотность сильно возрастает с ростом энергии частиц собственного поля.

Математическим выражением этой классификации является размерность констант взаимодействия. В общем случае константа

взаимодействия имеет размерность  $[L^2]$  с различными значениями  $\eta$  ( $[L]$  — размерность длины). Взаимодействия 1-го и 2-го рода характеризуются значениями  $\eta \leq 0$  и  $\eta > 0$  (см. гл. 15). Гейзенберг ожидал, что взаимодействия 1-го и 2-го рода различаются применимостью (для 1-го рода) и неприменимостью (для 2-го рода) квантовой теории поля. Условие применимости называется условием Гейзенберга — Оппенгеймера, поскольку оно было подробно исследовано Оппенгеймером и др. [90].

Кроме того, Гейзенберг предложил теорию, справедливую вне области применимости квантовой теории поля и основанную на введении в теорию фундаментальной длины  $r_0$ , существование которой можно было ожидать на основании следующих соображений: в современной квантовой теории поля собственные поля характеризуют области вблизи элементарной частицы. Так как трудности с бесконечностями проистекают за счет вклада от частиц высоких энергий собственных полей, особенности этих полей, предсказываемые современной теорией, должны быть модифицированы в будущей теории. Поэтому представляется необходимым ввести величину  $r_0 = (\hbar c/E_0)$ , разделяющую области низких и высоких энергий таким образом, чтобы упомянутые выше высокие энергии соответствовали энергиям, превышающим  $E_0$ . Точно таким же образом, как излучения высоких энергий, которые приводили к трудностям, указанным Рэлеем, были устранены в теории Планка с помощью постоянной Планка  $h$ , величина  $r_0$  может играть роль параметра обрезания области высоких энергий собственного поля. Трудности появляются только тогда, когда современная квантовая теория поля применяется недостаточно осмотрительно без учета эффектов, зависящих от  $r_0$ . В случае частиц с длинами волн, много большими  $r_0$ , следует считать, что эффекты собственного поля окажутся полностью включенными в постоянные, т. е. в заряды и массы. С другой стороны, в явлениях, связанных с частицами с малыми длинами волн ( $\ll r_0$ ), следует ожидать значительных динамических эффектов собственных полей.

Обрезание области высокой энергии собственного поля представляется особенно необходимым для взаимодействий 2-го рода, потому что распределение вероятностей частиц высоких энергий в этом случае значительно больше, чем при взаимодействиях 1-го рода.

Другой причиной введения константы длины  $r_0$  в теорию является необходимость иметь в теории спектра масс такую постоянную, потому что, пользуясь только постоянными  $\hbar$  и  $c$ , невозможно получить некоторую константу размерности массы. Однако характерные особенности, связанные с введением константы длины  $r_0$  в теорию, еще недостаточно выяснены, поскольку неизвестно какое-либо конкретное значение для  $r_0$  и неясно, каким образом эту величину можно измерить. Взаимодействия 2-го рода могут

привести к явлениям, сильно зависящим от свойств собственных полей. В качестве примера подобного рода явлений Гейзенберг указал на множественное рождение частиц. Если в мезонном собственном поле нуклона имеется много мезонов высокой энергии, то под влиянием внешнего поля они могут оторваться от нуклона. Такую теорию множественного рождения мезонов разработали Льюис, Оппенгеймер и Воутхаузен [84] (см. гл. 12). Гейзенберг [56, 59] рассмотрел множественное рождение по аналогии с теорией турбулентности. Существовала еще одна теория множественного рождения, основанная на аналогии с излучением черного тела. Эта теория была предложена Гейзенбергом [55] и развита Ферми [40]. В этой теории явление множественного рождения не связано со свойствами собственного поля мезона, потому что энергия столкновения быстро распределяется по всему облаку мезона, благодаря чему образуются новые состояния равновесия и порождаются мезоны. Недавно явление множественного рождения наблюдалось на фотопластинках (брисольская группа). Хотя до сих пор не выяснено, принадлежит ли взаимодействие мезона с нуклоном к взаимодействию 2-го рода или не принадлежит, однако можно ожидать, что явление множественного рождения добавит новые черты к теории элементарных частиц.

В свете анализа, проведенного Гейзенбергом, экспериментальные успехи квантовой электродинамики объясняются тем, что взаимодействие между электронами и электромагнитными полями принадлежит к взаимодействиям 1-го рода. Однако это объяснение представляется неполным, потому что, несмотря на предполагаемый характер взаимодействия 1-го рода, в теории все же присутствуют бесконечности. С другой стороны, Ватагин [130] выдвинул так называемое условие применимости Гейзенберга — Ватагина, согласно которому все явления, связанные с высокими энергиями ( $> E_0$ ), находятся вне области применимости квантовой теории поля независимо от рода взаимодействия. Однако это условие не в состоянии объяснить успеха квантовой электродинамики. Как обсуждается позднее, причина этого противоречия отчасти выяснена „теорией перенормировок“ в связи с наблюдаемыми эффектами электромагнитных собственных полей.

Уже давно имелись определенные указания на реальность эффектов, связанных с электромагнитным собственным полем. Например, вычисление без учета эффекта собственных полей дает бесконечную вероятность для рассеяния электрона внешним полем („инфракрасная катастрофа“). В 1937 г. Блох и Нордсик указали, что эта бесконечность исключается, если принять во внимание вклад фотонов малых энергий собственного поля (см. гл. 13, пример 4)<sup>1)</sup>. Однако непоследовательно учитывать эффекты от фотонов

<sup>1)</sup> Упомянутая выше теория множественного рождения Льюиса, Оппенгеймера и Воутхаузена основывается также на методе Блоха — Нордсика.

малых энергий и пренебрегать эффектами от фотонов высоких энергий. Фотоны высоких энергий приводят также к бесконечности („ультрафиолетовая катастрофа“). Эта трудность, разобранный Паули и Фирцом [96], мешает получить в проблеме рассеяния определенный ответ относительно эффектов собственного поля. Более определенное указание на эффекты собственного поля было получено при анализе атомных спектров. Хорошо известно, что одним из успехов релятивистской теории электрона Дирака было объяснение тонкой структуры уровней энергии атомных электронов. Однако в этих вычислениях не принимались во внимание эффекты собственного поля. Препятствием к более детальному исследованию результатов теории Дирака был эффект Допплера и столкновения атомов, которые приводят к уширению спектральных линий (см. гл. 16). Однако многие исследователи замечали различие в несколько процентов между теоретическими предсказаниями и результатами экспериментов. В частности, Пастернак [93] указал, что  $2S$ -уровень атома водорода лежит выше на  $\sim 0,03 \text{ см}^{-1}$ , чем это дает теория.

Используя микроволновую радиотехнику, Лэмб и Ризерфорд [79] смогли измерить точную величину энергии  $2^2S_{1/2}$ -уровня атома водорода с помощью следующего метода. Бомбардировкой электронами водород возбуждался из своего основного состояния в состояние  $2^2S_{1/2}$ . Состояние  $2^2S_{1/2}$ , являющееся метастабильным (время жизни 0,15 сек.), может быть с помощью ультракоротких радиоволн (длина волны около 3 см) быстро превращено в состояние  $2^2P_{1/2}$ , а из состояния  $2^2P_{1/2}$  происходит быстрое превращение (время жизни  $1,6 \cdot 10^{-9}$  сек.) в состояние  $1S$ . Точная величина длины волны, соответствующей разнице энергий между  $2^2P_{1/2}$ - и  $2^2S_{1/2}$ -состояниями, может быть измерена с помощью резонансного эффекта.

Результаты показывают, что в противоречии с теорией Дирака и в хорошем согласии с предсказанием Пастернака  $2^2S_{1/2}$ -уровень лежит выше  $2^2P_{1/2}$ -уровня на  $\sim 1000 \text{ мггц}$  (т. е. примерно  $0,033 \text{ см}^{-1}$ ). Этот сдвиг уровней назван лэмбовским сдвигом.

Таким образом, вычисления, в которых не учитываются эффекты собственного поля, приводят к неправильным результатам даже в квантовой электродинамике. Еще раньше многие авторы (Кэмбл и Презент [72], Пастернак [93], Фрелих, Гайтлер и Кан [46]) пытались объяснить отклонение энергии уровней атомных электронов от результатов теории Дирака соответствующим изменением кулоновского поля вблизи протона. С другой стороны, Юлинг [125] вычислил добавок к энергии уровня электрона в атоме водорода только от собственного поля электрона (т. е. эффект поляризации вакуума), индуцированный электромагнитным полем протона. Однако эта идея не имела успеха ввиду того, что получился неправильный знак результата.

## § 7. Развитие теории перенормировок

В 1947 г. Бете объяснил лэмбовский сдвиг уровней как эффект электромагнитного собственного поля. Вклад собственного поля электрона в массу, хотя он бесконечен, должен быть включен в наблюдаемую массу электрона. Поэтому можно ожидать, что лэмбовский сдвиг уровней может быть вычислен как разность вкладов собственного поля в энергию электрона в свободном состоянии и в кулоновском поле протона. Хотя эти вклады собственного поля бесконечны, их разность может быть конечной величиной. В соответствии с этой идеей Бете удалось вычислить сдвиг уровней и получить результат, согласующийся с экспериментом. Ввиду того, что достаточно последовательной формулировки этой идеи не существовало, он провел лишь нерелятивистский расчет и искусственно устранил бесконечность.

Таким образом, возникает вопрос, можно ли бесконечный вклад от собственного электромагнитного поля электрона включить в массу электрона независимо от его состояния.

Роль реакции излучения в различных явлениях исследовалась многими авторами. В 1939 г. Данков, приняв во внимание результаты Блоха—Нордсика и Паули—Фирца (о которых говорилось в предыдущем параграфе), вычислил эффективное сечение рассеяния электрона внешним полем с учетом эффектов собственного поля. Однако в его вычислениях вкратились некоторые ошибки, которые впоследствии исправили Ито, Коба и Томонага [63, 64]. После создания теории Бете проблема рассеяния рассматривалась многими авторами (Ито, Коба и Томонага [64], Льюис [83], Эпштейн [38], Умэдзава, Юкава и Ямада [129]). Эти исследования показали, что бесконечность, обусловленная собственным электромагнитным полем, всегда независимо от состояния электрона может быть полностью включена в наблюдаемое значение массы электрона. Более того, было показано, что бесконечность, связанная с эффектами поляризации вакуума, может быть, по крайней мере в 4-м приближении теории возмущений, включена в наблюдаемую величину заряда. Таким образом, получается квантовая электродинамика, в которой собственные поля с помощью „перенормировки“ приводят к конечным эффектам. Скоро в работе Томонага [123] такого рода теории перенормировок была придана ковариантная форма с помощью сверхмноговременного формализма. Эта ковариантная теория перенормировок дала величину лэмбовского сдвига в великолепном согласии с результатами эксперимента [112, 48] (см. гл. 14, пример 2). Томонага, Коба и Ито рассмотрели эту проблему с точки зрения применимости к ней теории С-мезона.

В предыдущем параграфе мы говорили об аномальном магнитном моменте электрона, обусловленном электромагнитным собственным полем. В 1947 г. колумбийская группа (Нафе, Нельсон и Раби [88])



исследовала тонкую структуру основных состояний электронов в атомах водорода, дейтерия, натрия и калия, чтобы обнаружить аномальный магнитный момент электрона, который равен  $\sim 0,1\%$  величины собственного магнитного момента. Экспериментальные результаты согласуются с данными теории (см. гл. 14, пример 2).

Эти успехи теории перенормировок, по-видимому, показывают, что собственное электромагнитное поле приводит к реальным эффектам, которыми нельзя пренебрегать. На основе теории Блоха — Нордсика, о которой говорилось в предыдущем параграфе, легко видеть, что в перенормированной квантовой электродинамике „инфракрасная катастрофа“ не возникает, если только принять во внимание эффекты, связанные с фотонами малых энергий собственного поля. Томонага подчеркнул, что теорию перенормировок можно рассматривать как продолжение исследований Блоха — Нордсика и Паули — Фирца.

Сверхмноговременной формализм есть полностью ковариантная переформулировка квантовой теории поля. Этот формализм есть обобщение ковариантной теории свободных полей Йордана и Паули [69] и многовременной теории Дирака [30,31]. Его физическое содержание эквивалентно квантовой теории поля Гейзенберга и Паули. Однако ковариантный характер теории не виден непосредственно, хотя теория и ковариантна по существу. Очевидно, с самого начала важно потребовать совместности теории с такими фундаментальными принципами, как принцип относительности. В самом деле, можно напомнить о той важной роли, которую сыграла каноническая формулировка классической механики при открытии квантовой механики.

Аналогичная формулировка квантовой теории поля была дана Швингером [112] и Фейнманом [42], которые исходили из несколько различных точек зрения. Эта ковариантная теория поля в связи с методом перенормировок была применена не только к проблемам квантовой электродинамики, но и ко многим проблемам элементарных частиц. Это обстоятельство привело к замечательным результатам в теории элементарных частиц.

В 1949 г. Дайсон показал, что теория перенормировок в квантовой электродинамике не приводит к бесконечностям в любом приближении.

В 1948 г. Вельтон указал, что лэмбовский сдвиг, вычисленный по теории перенормировок, может быть получен с помощью наглядного образа электрона, движущегося в своем собственном поле (см. гл. 14, пример 1). Улучшив метод Вельтона, Коба [75] провел соответствующее вычисление аномального магнитного момента электрона. Таким образом, проблема применимости квантовой теории поля свелась к проблеме применимости теории перенормировок. Более того, можно теоретически показать, что соответствующая процедура перенормировок приводит к замкнутой теории

только в случае взаимодействий 1-го рода, но не для взаимодействий 2-го рода (см. гл. 15). Таким образом, мы видим, что условие применимости Гейзенберга — Оппенгеймера является условием применимости теории перенормировок [110].

Далее возникает следующий важный вопрос: все ли взаимодействия, встречающиеся в природе, принадлежат к 1-му роду? Если бы в природе существовали взаимодействия 2-го рода, то было бы трудно понять успех квантовой электродинамики, потому что электрон и электромагнитное поле взаимодействуют также и с другими полями, которые, согласно современной квантовой теории, имеют взаимодействие 2-го рода в высших приближениях теории взаимодействий. Например,  $\beta$ -взаимодействия, по-видимому, принадлежат к взаимодействиям 2-го рода<sup>1)</sup>.

Было сделано много попыток исследовать особенности собственного мезонного поля. В этих работах было показано, что взаимодействие мезона с нуклоном значительно сильнее, чем электромагнитное взаимодействие, и иногда высказывалось предположение о существовании возбужденного состояния нуклона. Таким образом, ввиду невозможности применить в этом случае метод возмущений с 1951 г. было предпринято много попыток обойтись без использования каких-либо приближений. Одним из наиболее важных результатов этих работ является определение спина  $\pi$ -мезона (см. гл. 10, пример 6). Наблюдения рассеяния нуклонов на нуклонах при высоких энергиях также позволили выяснить ряд характерных особенностей мезонного поля. В частности, они наводят на предположение о существовании сильной отталкивающей силы с коротким радиусом действия ( $1/3$  величины радиуса действия ядерных сил). Хотя еще не ясно, связана ли эта отталкивающая сила с тяжелыми частицами, недавно открытыми, или она исходит от радиационных поправок высших порядков мезонного поля, эта сила должна быть тесно связана со структурой нуклона.

Теория перенормировок, о которой говорилось выше, была сформулирована в терминах теории возмущений. Поэтому даже в случае взаимодействия 1-го рода остаются невыясненными многие проблемы; например, необходимо исследовать вопрос о сходимости ряда теории возмущений и найти формулировку теории перенормировок, которая не основывалась бы на разложении решения в ряды (см. гл. 14). Простой пример взаимодействующих полей, который допускает перенормировку и имеет полное решение, привел Ли [81]. Применение метода перенормировок к этому примеру приводит к новой трудности, которая будет обсуждена в гл. 18.

<sup>1)</sup> См. работы Таникава [120], Умэдзавы [127], Танака и Ито [118], в которых сделана попытка объяснить  $\beta$ -взаимодействия, используя только взаимодействия 1-го рода.

## Примечание при корректуре

Хотя теория перенормировок и достигла в области квантовой электродинамики больших успехов, все же ряд вопросов остается открытым. Эти вопросы связаны с выяснением внутренней непротиворечивости теории, анализа ее предсказаний, а также явлений при высоких энергиях. В теории перенормировок принимается, что перенормированная константа связи  $g_1$  равна наблюдаемой величине  $g_{\text{наб.}}$ , константы связи. Предположим, что при изменении перенормированной константы связи  $g$  во всей области значений, при которых гамильтониан взаимодействия является эрмитовым, перенормированная константа связи  $g_1$ , являющаяся функцией от  $g$ , пробегает значения, лежащие в некоторой области  $N(g_1)$ . Эта последняя область называется нормальной зоной. Если  $g_{\text{наб.}}$  не лежит в нормальной зоне, то рассматривать  $g_1$  как  $g_{\text{наб.}}$  значит принять, что гамильтониан взаимодействия неэрмитов. Такую ситуацию мы имеем в примере Ли. В этом примере область  $N(g_1)$  содержит только значение  $g_1 = 0$ , и  $g_{\text{наб.}}$  не принадлежит к  $N(g_1)$ , приводит к появлению состояния с отрицательной вероятностью (см. работу Челлена и Паули, 1955). В общем случае перенормировочный множитель  $Z$  является функцией  $Z(g_1)$  от  $g_1$ . Однако в теории перенормировок  $g_1$  в  $Z(g_1)$  заменяется на  $g_{\text{наб.}}$ . Теперь ясно, что если условие  $0 \leq Z \leq 1$  не удовлетворяется функцией  $Z(g_{\text{наб.}})$ , т. е. если  $Z(g_{\text{наб.}}) \leq 0$ , то  $g_{\text{наб.}}$  лежит вне области  $N(g_1)$ . В этой связи сразу возникает вопрос о том, лежат ли константы связи, реализуемые в природе, в своих нормальных зонах? В области квантовой электродинамики было различными путями показано (Ландау и др. [79a], Умэдзава и Камефучи [127a], Тэйлор [120a]), что наблюдаемая величина электрического заряда  $e_{\text{наб.}} = 1/\sqrt{137}$  лежит вне своей нормальной зоны  $N(e_1)$ . В примере Ли было показано, что существует некоторая критическая энергия обрезания  $\lambda$ ; величина  $g_{\text{наб.}}$  может лежать в  $N(g_1)$  и перенормировочный множитель может быть положительным только тогда, когда мы пренебрегаем эффектами, связанными с энергиями, превышающими  $\lambda$ . Аналогичные критические константы  $\lambda$  появляются также и в квантовой электродинамике. Чу и Лоу [19a] сделали надежную оценку константы связи для взаимодействия мезон — нуклон по рассеянию мезонов на нуклонах при низких энергиях и по явлениям порождения фотон — мезон и нашли величину  $g_{\text{наб.}}^2 = 0,08$ . В их анализе использован метод обрезания; энергия обрезания равна приблизительно  $5m(\pi)$  [через  $m(\pi)$  обозначена масса  $\pi$ -мезона]. В этой теории критическая константа обрезания  $\lambda$  равна, по-видимому, приблизительно массе нуклона. Это значение  $\lambda$ , к счастью, не меньше того, которое было использовано для обрезания в вычислениях.

В частном случае, для которого значение  $g_{\text{наб.}}$  лежит вне  $N(g_1)$ , характерно появление состояний с отрицательными вероятностями. Однако очевидно, что эти последние состояния в наблюдениях никогда не проявляются. Поэтому представляется желательным для случаев, когда  $g_{\text{наб.}}$  не лежит в нормальной зоне, найти какие-либо наблюдаемые особенности. Чтобы это сделать, полезно вспомнить, что во все матричные элементы переходов входят перенормированные константы  $g_1$ , перенормированные функции распространения  $G(g_1)$  и вершины  $\Gamma(g_1)$ . В теории перенормировок  $g_1$  заменяется на  $g_{\text{наб.}}$ . Поэтому представляется важным найти некоторые существенные различия между  $G(g_{\text{наб.}})$  при вначении  $g_{\text{наб.}}$ , лежащих в  $N(g_1)$ , и при значениях  $g_{\text{наб.}}$ , лежащих вне  $N(g_1)$ . Такие различия действительно проявляются в области высоких энергий. Когда  $g_{\text{наб.}}$  лежит вне  $N(g_1)$  и перенормировочный множитель отрицателен, функция  $ZR(-k^2, g_{\text{наб.}})$ , определенная с помощью соотношения

$$G(k) = \Delta_F(k) \frac{1}{ZR(-k^2, g_1) + iZ'(-k^2, g_1)},$$

в области высоких энергий —  $k^2 > \lambda^2$  (где  $\lambda$  — критическая константа обрезания) оказывается отрицательной. Это легко установить на основе того обстоятельства, что  $ZR(\Lambda^2, g_{\text{наб.}})$  есть перенормировочный множитель, полученный с помощью метода обрезания при энергии обрезания  $\Lambda$ . Знак величины  $ZR$  играет важную роль в явлениях, протекающих при высокой энергии. Действительно, можно показать, что знак сдвига фаз в примере Ли существенно зависит от знака величины  $ZR$ . Более того, в квантовой электродинамике в теории перенормировок кулоновский потенциал оказывается притягивающим в процессах рассеяния заряженных частиц, когда передача энергии больше  $\lambda$ .

Когда  $g_{\text{наб.}}$  лежит вне нормальной зоны, можно ожидать, что некоторые физические эффекты при этом выпадают из поля зрения и что учет такого рода эффектов может в области высоких энергий ( $-k^2 > \lambda^2$ ) существенно изменить перенормированную функцию распространения. Так как важное влияние на функцию распространения  $G(k)$  при  $-k^2 > \lambda^2$  оказывают частицы с массами, большими  $\lambda$ , может оказаться важным исследовать влияние тяжелых частиц на нормальную зону  $N(g)$ . Критическая константа  $\lambda$  в квантовой электродинамике равна приблизительно  $m \cdot \exp(3\pi \cdot 137) \approx 10^{23} m$  ( $m$  — масса электрона). Это значительно больше величины массы любой из известных частиц. Поэтому представляется ошибочным утверждение, что трудности в квантовой электродинамике удасться устранить с помощью учета эффектов других полей, если только они связаны с взаимодействием 1-го рода. Поэтому окончательное решение вопроса может быть получено путем исследования структуры самого пространства — времени или путем введения новой фундаментальной длины. Можно ожидать, что фундаментальную длину в квантовую электродинамику удасться ввести как промежуточную величину между взаимодействиями 2-го рода (см. гл. 15), в которых принимает участие электрон, т. е. между ферми-взаимодействием [ $\mu - e$ ]-распад,  $\beta$ -распад и т. д.] и гравитационным взаимодействием. Из оценок порядка величины можно предположить, что эти взаимодействия существенны соответственно в областях  $\geq 5 \cdot 10^5 m$  и  $\geq 10 \cdot 10^{22} m$ . Так как эти величины много больше любых масс известных частиц и малы по сравнению с критической величиной обрезания  $\lambda \approx 10^{23} m$ , то при рассмотрении вопроса о нормальной зоне электрического заряда вклад от них может играть существенную роль.

В мезонной теории можно ожидать, что величина  $\lambda$  равна приблизительно массе нуклона и что поэтому теория перенормировок для систем, состоящих только из мезона и нуклона, немедленно приведет к противоречиям в области наблюдаемых явлений. Перенормированные функции распространения  $\pi$ -мезона и нуклона для области больших энергий зависят от эффектов, обусловленных тяжелыми мезонами и гиперонами, и поэтому для получения нормальной зоны для взаимодействия мезон — нуклон нам надо тщательно учитывать эти эффекты.

В гл. I было указано, что фундаментальные проблемы квантовой теории поля, т. е. проблемы расходимостей, значения масс частиц и констант связи пределы применимости теории и структура частиц и т. д. нашли реальную основу своего дальнейшего развития в наблюдаемых эффектах собственного поля, которое учитывается теорией перенормировок. Сейчас мы видим, что наблюдаемые значения констант связи ограничены величинами, заключающимися в их нормальных зонах, и что для дальнейшего изучения фундаментальных проблем существенно знание поведения перенормированных полей при высоких энергиях.

Как было указано выше, исследование явлений взаимодействия мезон — нуклон при низких энергиях привело к заключению о малой величине взаимодействия мезон — нуклон при низких энергиях. Исследования ядерного потенциала также увеличились значительными успехами; было установлено, что существующая мезонная теория во втором и четвертом порядке теории возмущений может правильно предсказать ту часть ядерного потенциала, которая описывает взаимодействие на далеких расстояниях ( $\geq 0,6/m$  ( $\pi$ )) (см. работу

Такетани и др. [116а]). В экспериментах на космотроне в Брукхэйвене (см. Валкер и др. [129а], Фаулер и др. [45а]) удалось воспроизвести множественное рождение мезонов и исследовать особенности углового распределения порожденных мезонов. Очевидно, что важной задачей является построение такой теории, которая была бы в состоянии объяснить как явления при низких энергиях, так и при высоких энергиях. Существование антипротоона было экспериментально подтверждено на ускорителе в Беркли. Это открытие находится в согласии с существующей теорией, в которой предполагается, что заряженные частицы всегда существуют с положительным и отрицательным зарядами. В экспериментах на ускорителе в Беркли (работы Чэппа, Гольдхабера и др. [20а]) удалось получить пучок  $K$ -частиц. Это обстоятельство будет способствовать изучению тяжелых мезонов и выяснению их особенностей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson C. D., Phys. Rev., **41**, 405 (1932).
2. Anderson C. D., Neddermeyer, S. H., Phys. Rev., **50**, 273 (1936).
3. Bethe H. A., Phys. Rev., **72**, 339 (1947) (см. перевод в сборнике „Сдвиг уровней атомных электронов“, ИЛ, 1950).
4. Bethe H. A., Nordheim L. W., Phys. Rev., **57**, 998 (1940).
5. Bhabha H. J., Proc. Roy. Soc., **A166**, 501 (1938).
6. Bhabha H. J., Heitler W., Proc. Roy. Soc., **A159**, 432 (1936).
7. Bjorklund R., Crandall W. E., Moyer B. J., York H. F., Phys. Rev., **77**, 213 (1950).
8. Blackett P. M., Occhialini G. P., Proc. Roy. Soc., **A139**, 699 (1933).
9. Blackett P. M. S., Chadwick J., Occhialini G. P. S., Proc. Roy. Soc., **A144**, 235 (1934).
10. Bloch C., Det. Kgl. Dansk. Vid. Selsk., **26** (1950).
11. Bloch F., Nordsieck A., Phys. Rev., **52**, 54 (1937).
12. Bopp F., Ann. d. Phys., **38**, 345 (1940).
13. Bopp F., Zs. f. Naturforsch., **1**, 237 (1946).
14. Born M., Infeld L., Proc. Roy. Soc., **A144**, 425 (1934).
15. Born M., Schrödinger E., Nature, **135**, 342 (1935).
16. Breit G., Hoisington L., Share S., Thaxton H., Phys. Rev., **55**, 1103 (1939).
17. Carlson J. F., Oppenheimer J. R., Phys. Rev., **51**, 220 (1936).
18. Chadwick J., Nature, **129**, 312 (1932), Proc. Roy. Soc., **A136**, 692 (1932).
19. Cheston W. B., Phys. Rev., **83**, 1118 (1951).
- 19a. Chew G. F., Low F. E., Proc. of the 5-th Rochester Conference on High Energy Nuclear Physics, 1955.
20. Chrétien M., Peierls R. E., Nuovo Cimento, **10**, 669 (1953).
- 20a. Chupp W. W., Goldhaber G. *et al.*, Phys. Rev., **99**, 335 (1955).
21. Clark D. L., Roberts A., Wilson R., Phys. Rev., **83**, 646 (1951).
22. Conversi M., Pancini E., Piccioni O., Phys. Rev. **71**, 209 (1947).
23. Curie I., Compt. Rend., **193**, 1412 (1931).
24. Curie I., Joliot F., Compt. Rend., **194**, 273 (1932).

25. Dancoff S. M., Phys. Rev., **55**, 959 (1939).
26. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A117**, 610 (1928).
27. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A118**, 351 (1928).
28. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A126**, 360 (1931).
29. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A133**, 60 (1931).
30. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A136**, 453 (1932).
31. Dirac P. A. M., Fock V. A., Podolsky B., Phys. Zs. d. Sowjetunion, **2**, 468 (1932).
32. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A155**, 447 (1936).
33. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A167**, 148 (1938).
34. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A209**, 291 (1951).
35. Durbin R., Loar H., Steinberger J., Phys. Rev., **83**, 646 (1951).
36. Dyson F. J., Phys. Rev., **75**, 486, 1736 (1949).
37. Ellis C. D., Mott N. F., Proc. Roy. Soc., **A141**, 502 (1933).
38. Epstein S. T., Phys. Rev., **73**, 177 (1948).
39. Fermi E., Zs. f. Phys., **88**, 161 (1934).
40. Fermi E., Prog. Theor. Phys., **5**, 570, (1950).
41. Fermi E., Teller E., Weisskopf V. F., Phys. Rev., **71**, 209 (1947).
42. Feynman R. P., Phys. Rev., **76**, 749, 769 (1949) (см. перевод в сборнике: Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).
43. Fierz M., Helv. Phys. Acta, **12**, 3 (1939).
44. Fierz M., Helv. Phys. Acta, **23**, 731 (1950) (см. перевод в сборнике: Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).
45. Fierz M., Pauli W., Proc. Roy. Soc., **A173**, 211 (1939).
- 45a. Fowler W. B., Shutt R. P., Thorndike A. M., Whittemore W. L., Phys. Rev., **95**, 1026 (1954).
46. Fröhlich H., Heitler W., Kahn B., Phys. Rev., **56**, 961 (1939).
47. Fröhlich H., Heitler W., Kemmer N., Proc. Roy. Soc., **A166**, 154 (1938).
48. Fukuda H., Miyamoto Y., Tomonaga S., Prog. Theor. Phys., **4**, 47, 4, 121 (1949).
- 48a. Fukuda N., Sawada K., Taketani M., Prog. Theor. Phys., **12**, 156 (1954).
49. Glasson J. L., Phil. Mag., **42**, 596 (1921).
50. Hara O., Shimazu H., Prog. Theor. Phys., **5**, 1055 (1950).
51. Hayashi C., Prog. Theor. Phys., **11**, 226, (1954).
52. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **77**, 1; **78**, 156; **80**, 587 (1932).
53. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **101**, 533 (1936).
54. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **110**, 251, (1938).
55. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **113**, 61 (1939), Solvay Berichte, Kap. III, IV.
56. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **126**, 569 (1949).
57. Heisenberg W., Zs. f. Naturforsch., **5a**, 251, 367 (1950).
58. Heisenberg W., Zs. f. Naturforsch., **6a**, 281 (1951).
59. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **133**, 65 (1952).
60. Heisenberg W., Pauli W., Zs. f. Phys., **56**, 1; **59**, 168 (1929).
61. Hönl H., Ann. d. Phys., **33**, 565 (1938).

62. Hönl H., Papapetrou Z., *Zs. f. Phys.*, **112**, 512 (1939).
63. Ito D., Koba Z., Tomonaga S., *Prog. Theor. Phys.*, **2**, 216 (1947).
64. Ito D., Koba Z., Tomonaga S., *Prog. Theor. Phys.*, **3**, 276 (1948).
65. Иваненко Д., *Nature*, **129**, 798 (1932).
66. Иваненко Д., *Nature*, **133**, 981 (1934).
67. Иваненко Д., Соколов А., *Phys. Zs. d. Sowjetunion*, **11**, 590 (1937).
68. Joliot F., *Compt. Rend.*, **193**, 1415 (1931).
69. Jordan P., Pauli W., *Zs. f. Phys.*, **47**, 151 (1928).
- 69a. Källén G., *Helv. Phys. Acta*, **25**, 417 (1952).
70. Kaplan M. F., Peter B., Bradt H. L., *Phys. Rev.*, **76**, 1736 (1949).
71. Katayama Y., *Prog. Theor. Phys.*, **10**, 31 (1953).
72. Kemble E. C., Present R. D., *Phys. Rev.*, **44**, 1031 (1933).
73. Kemmer N., *Proc. Roy. Soc.*, **A166**, 127 (1938).
74. Klein O., *Zs. f. Phys.*, **53**, 157 (1929).
75. Koba Z., *Prog. Theor. Phys.*, **4**, 98 (1949).
76. Kramers H. A., *Proc. Amst. Acad. Sci.*, **40**, 814 (1937).
77. Kristensen P., Møller C., *Dan. Mat. Fys. Medd.*, **27**, № 7 (1952).
78. Kunze P., *Zs. f. Phys.*, **79**, 203 (1932).
79. Lamb W. E., Retherford R. C., *Phys. Rev.*, **72**, 241 (1947).
- 79a. Ландау Л. Д. и др., *ДАН СССР*, **95**, 497, 733, 1177; **96**, 261 (1954).
80. Lattes C. M. G., Occhialini G. P. S., Powell C. F., *Nature*, **160**, 453 (1947).
81. Lee T. D., *Phys. Rev.*, **95**, 1329 (1954).
82. Leighton R. B., Anderson C. D., Seriff A. J., *Phys. Rev.*, **75**, 1432 (1949).
83. Lewis H. W., *Phys. Rev.*, **73**, 173 (1948).
84. Lewis H. W., Oppenheimer J. R., Wouthuysen S. A., *Phys. Rev.*, **73**, 127 (1948).
85. Marshak R. E., *Rev. Mod. Phys.*, **23**, 137 (1951).
86. Marshak R. E., Bethe H. A. *Phys. Rev.*, **72**, 506 (1947).
87. Maze, Thesis, Paris, 1941.
88. Nafe E., Nelson E. B., Rabi I. I., *Phys. Rev.*, **71**, 914 (1947).
89. Oppenheimer J. R., Serber R., *Phys. Rev.*, **51**, 1113 (1937).
90. Oppenheimer J. R., Snyder H., Serber R., *Phys. Rev.*, **57**, 75 (1949).
91. Pais A., *Verh. Kon. Ac. Wetenschappen, Amsterdam*, **19**, 1 (1947).
92. Pais A., Uhlenbeck G. E., *Phys. Rev.*, **79**, 145 (1950).
93. Pasternack S., *Phys. Rev.*, **54**, 1113 (1938).
94. Pauli W., *Phys. Rev.*, **58**, 716 (1940).
95. Pauli W., *Nuovo Cimento*, **10**, 648 (1953).
96. Pauli W., Fierz M., *Nuovo Cimento*, **15**, 1 (1938).
97. Pauli W., Villars F., *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 434 (1949).
98. Pauli W., Weisskopf V. F., *Helv. Phys. Acta*, **7**, 709 (1934).
99. Poincaré H., *Compt. Rend.*, **140**, 1504 (1905).
100. Rasetti F., *Phys. Rev.*, **57**, 613, 706 (1940).
101. Ryski J., *Acta Phys. Polonica*, **9**, 2 (1948).

102. Rayski J., Proc. Phys. Soc., **A64**, 957 (1951).
103. Richardson J. R., Phys. Rev., **74**, 1720 (1948).
104. Robert J. K., Proc. Roy. Soc., **A102**, 72 (1922).
105. Rochester G. D., Butler C. C., Nature, **160**, 855 (1947).
106. Rutherford E., Proc. Roy. Soc., **A97**, 374 (1920).
107. Sakata S., Prog. Theor. Phys., **2**, 30 (1947).
108. Sakata S., Inoue T., Subutsu Kaishi, **16**, 232 (1942).
109. Sakata S., Tanikawa Y., Phys. Rev., **57**, 548 (1940).
110. Sakata S., Umezawa H., Kamefuchi S., Prog. Theor. Phys., **7**, 377 (1952).
111. Schein M., Jesse W. P., Wollan E. O., Phys. Rev., **57**, 849 (1940).
112. Schwinger J., Phys. Rev., **74**, 1439 (1948).
113. Stueckelberg E. C. G., Phys. Rev., **52**, 41 (1937).
114. Stueckelberg E. C. G., Nature, **144**, 118 (1939).
115. Stueckelberg E. C. G., Rivier D., Helv. Phys. Acta., **23**, 215, 236 (1950).
116. Taketani M., Nakamura S., Ono K., Sasaki M., Phys. Rev., **76**, 60 (1949).
- 116a. Taketani M., Machida S., Onuma S., Prog. Theor. Phys., **7**, 45 (1952).
117. Тамм И., Nature, **133**, 981 (1934).
118. Tanaka S., Ito M., Prog. Theor. Phys., **9**, 169 (1953).
119. Tanikawa Y., Prog. Theor. Phys., **1**, 200 (1947).
120. Tanikawa Y., Prog. Theor. Phys., **10**, 361 (1953).
- 120a. Taylor J. C., Preprint (1956).
121. Tiomno J., Wheeler J. A., Rev. Mod. Phys., **21**, 144 (1949).
122. Tokioka Z., Katayama Y., Prog. Theor. Phys., **6**, 132 (1951).
123. Tomonaga S., Rikken-Iho, **22**, 711, 781 (1943).
124. Tomonaga S., Araki G., Phys. Rev., **58**, 90 (1940).
125. Uehling E. A., Phys. Rev., **48**, 55 (1935).
126. Uhlenbeck G. E., Goudsmidt S., Naturwiss., **13**, 953 (1925).
127. Umezawa H., Prog. Theor. Phys., **7**, 551 (1952).
- 127a. Umezawa H., Kamefuchi S., Prog. Theor. Phys., **6**, 543 (1951).
128. Umezawa H., Takahashi Y., Prog. Theor. Phys., **9**, 501 (1953).
129. Umezawa H., Yukawa J., Yamada E., Prog. Theor. Phys., **3**, 317 (1948).
- 129a. Walker W. D., Crussard J., Koshihama M., Phys. Rev., **95**, 852 (1954).
130. Watagin G., Zs. f. Phys., **88**, 92 (1934).
131. Weisskopf V. F., Phys. Rev., **72**, 510 (1947).
132. Weizsäcker C. v., Zs. f. Phys., **102**, 572 (1936).
133. Welton T. A., Phys. Rev., **74**, 1157 (1948).
134. Wessel W., Zs. f. Naturforsch., **1**, 622 (1938).
135. Wick G. C., Atti. Acc. Lincei. XXI, 170 (1935).
136. Wick G. C., Nature, **142**, 993 (1938).
137. Williams, Roberts, Nature, **145**, 102 (1940).
138. Wilson J. G., Proc. Roy. Soc., **A172**, 517 (1939).



139. Yennie D. R., Phys. Rev., **80**, 1053 (1950).  
140. Yukawa H., Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **17**, 48 (1935).  
141. Yukawa H., Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **19**, 712 (1937).  
142. Yukawa H., Rev. Mod. Phys., **21**, 474 (1949).  
143. Yukawa H., Phys. Rev., **77**, 219; **80**, 1047 (1950).  
144. Yukawa H., Sakata S., Kobayashi M., Taketani M., Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **20**, 720 (1938).  
145\*. Cowan C. L., Jr., Reines, F., Harrison F. B., Kruse H. W., McGueire A. D., Science, **124**, 103 (1956) [см. перевод: Проблемы современной физики, ИЛ, № 11 (1956)].  
146\*. Chamberlain O., Segrè E., Wiegand C., Ypsilantis T., Phys. Rev., **100**, 947 (1955) [см. перевод: Проблемы современной физики, ИЛ, № 4 (1956) (статья 10)].  
147\*. Cork B., Lambertson G., Picconi O., Wenzel W., Phys. Rev. **104**, 1193 (1956).  
148\*. Проблемы современной физики, ИЛ, № 11 (1956).  
149\*. Ландау Л., Румер Ю., Proc. Roy. Soc. (A), **16**, 213 (1938).  
150\*. Иваненко Д., Соколов А., ЖЭТФ, **8**, 639 (1938).  
151\*. Иваненко Д., Соколов А., Классическая теория поля, М.-Л., 1951.

---

Литература, отмеченная звездочкой (\*), здесь и в последующих главах добавлена редактором перевода.

# Релятивистское волновое уравнение

## § 1. Релятивистское волновое уравнение

В предыдущей главе были перечислены различные частицы, существование которых доказано экспериментально и которые предварительно мы будем считать элементарными. Поскольку взаимодействия приводят к взаимопревращению частиц, то число частиц определенного сорта с течением времени меняется. Поэтому состояние системы частиц в определенный момент времени необходимо определять заданием значений наблюдаемых величин во всем пространстве, например энергии, импульса, числа частиц. Это определение можно сравнить со способом задания электромагнитного поля в определенный момент времени, когда во всем пространстве задаются напряженности электромагнитного поля.

Эти соображения приводят к представлению о *состоянии поля*, которое, по определению, в данный момент времени зависит от значения некоторых переменных во всех точках пространства. Мы будем считать, что состояние элементарных частиц есть состояние поля, и будем обозначать различные компоненты поля через  $Q_\alpha(x)$ , где  $\alpha = 1, 2$  и т. д. Например, электромагнитное поле будет описываться четырьмя компонентами  $A_\mu(x)$  потенциала ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ).

Квантовая теория поля получается из классической теории поля с помощью обычной процедуры квантования. Так  $c$ -числа, которые представляют компоненты классического поля в классических уравнениях поля (например, в уравнениях Максвелла электродинамики), заменяются на  $q$ -числа<sup>1)</sup>. Эта замена может быть, по-видимому, оправдана с помощью принципа соответствия. Тем не менее таким способом нельзя получить уравнения квантовой теории поля для частиц (например, электронов), для которых не существует классической теории поля.

В последнем случае можно поступить следующим образом. Когда число частиц постоянно, квантовое состояние частицы описывается волновой функцией, которая удовлетворяет некоторому волновому уравнению. В квантовой теории поля, которая допускает рождение и аннигиляцию частиц, постулируется, что

<sup>1)</sup> То есть операторы.— Прим. ред.

волновые функции являются некоторыми  $q$ -числами компонент поля  $Q_\alpha(x)$  и что волновыми уравнениями поля являются волновые уравнения, которым удовлетворяют  $Q_\alpha(x)$ .

Короче говоря, введение такого постулата обусловливается требованием, чтобы результаты квантовой теории поля при преобращении эффектами рождения и аннигиляции частиц согласовывались с результатами квантовой механики частиц.

Кроме того, уравнения поля должны удовлетворять требованиям принципа относительности, который следует рассматривать как общий принцип природы. Волновые уравнения, удовлетворяющие этому принципу, называются *релятивистскими волновыми уравнениями*.

## § 2. Свободное поле

Ввиду того, что в обычной нерелятивистской квантовой механике производные по пространственным координатам и по времени входят несимметрично, она не имеет лоренц-инвариантной формы. В самом деле, уравнения, описывающие свободные частицы, могут быть получены из нерелятивистского уравнения  $K_0 = (1/2\kappa) k_i k_i$ , которое связывает энергию  $K_0$  и импульс  $k_i (i = 1, 2, 3)$ . Эти величины необходимо интерпретировать как операторы

$$\begin{aligned} K_4 &\equiv iK_0 = -i\partial_4, \\ k_i &= -i\partial_i. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Хорошо известно, что с помощью фундаментальных соотношений (2.1), которые ставят энергию и импульс частицы в соответствие с частотой и волновым числом, осуществляется связь между корпускулярным и волновым аспектами теории. Поэтому кажется оправданным использование соотношений (2.1) также при выводе релятивистских уравнений. Учтем, что релятивистское соотношение между энергией  $K_0$  и импульсом  $k_i$  частицы имеет вид

$$K_0^2 = k_i k_i + \kappa^2. \quad (2.2)$$

Отсюда, используя соотношения (2.1), получаем волновое уравнение

$$(\square - \kappa^2) Q_\alpha(x) = 0. \quad (2.3a)$$

Это уравнение известно как уравнение Клейна — Гордона.

В связи с вышеизложенным примем, что компоненты поля квантовой теории поля должны подчиняться условию Клейна — Гордона, т. е. *компоненты поля  $Q_\alpha(x)$ , соответствующие свободным элементарным частицам, должны удовлетворять уравнению (2.3a)*. Например, это условие выполняется для компонент  $A_\mu(x)$  электромагнитного поля. Следует заметить, что если компоненты поля  $Q_\alpha(x)$  соответствуют семейству частиц с различными массами

$(x_1, \dots, x_n)$ , то уравнение (2.3а) надо заменить уравнением

$$\prod_{s=1}^n (\square - x_s^2) Q_\alpha(x) = 0. \quad (2.3б)$$

Однако это обобщение понадобится нам лишь в редких случаях. Различие между уравнением (2.3а) и нерелятивистским волновым уравнением состоит в том, что (2.3а) содержит вторую производную по времени. Хорошо известно, что любое дифференциальное уравнение второго порядка с помощью увеличения числа переменных может быть преобразовано в систему уравнений первого порядка. Это обстоятельство имеет важное физическое значение. В самом деле, линейность нерелятивистского волнового уравнения относительно оператора дифференцирования по времени существенна для квантовой механики в канонической формулировке, ибо сохранение заряда в ней обеспечивается канонической инвариантностью теории. Для обеспечения сохранения вероятности примем канонический формализм также и в квантовой теории поля. В этом случае волновые уравнения должны преобразовываться к системе канонических уравнений [см. (7.27)], которая должна быть системой дифференциальных уравнений первого порядка. Таким образом, каноническая теория квантованных полей базируется на компонентах поля, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям первого порядка. Как показано в гл. 9, всегда, когда поля удовлетворяют условию Клейна — Гордона, для их квантования можно применить каноническую теорию.

Хорошо известным примером дифференциальных уравнений поля первого порядка являются уравнения электромагнитного поля. Уравнения Максвелла являются системой дифференциальных уравнений первого порядка для четырех компонент четырехмерного потенциала  $A_\mu$  и шести компонент напряженностей поля  $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ , которые удовлетворяют уравнению (2.3а). Можно привести другой пример для случая скалярного поля  $U$ , удовлетворяющего уравнению (2.3а). Уравнение

$$(\square - x^2) U(x) = 0 \quad (2.4)$$

можно представить в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} U_\mu(x) &= \partial_\mu U(x), \\ \partial_\mu U_\nu(x) &= x^2 U(x), \end{aligned} \quad (2.5)$$

если ввести пять компонент  $(U, U_\mu)$ .

В общем случае релятивистское волновое уравнение для волновых функций  $Q_\alpha (\alpha = 1, \dots, n)$  имеет вид

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial) Q_\beta(x) = 0. \quad (2.6)$$

Условие Клейна — Гордона накладывает на это волновое уравнение

некоторое ограничение, потому что оно требует существования такого оператора  $d_{\alpha\beta}(\partial)$ , который удовлетворял бы соотношению

$$d_{\alpha\beta}(\partial) \Lambda_{\beta\rho}(\partial) = (\square - x^2) \delta_{\alpha\rho} \quad (2.7)$$

и зависел от операторов  $\partial_\mu$

$$d(\partial) \equiv [d_{\alpha\beta}(\partial)] = \alpha + \alpha_\mu \partial_\mu + \dots + \alpha_{\mu_1 \dots \mu_l} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_l} + \dots \quad (2.8)$$

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\alpha_\mu$ , ... являются матрицами  $n$ -го порядка. Обозначим максимальный порядок производных в (2.8) через  $b$ . Тогда

$$\alpha_{\mu_1 \dots \mu_l} = 0 \quad \text{для } l > b. \quad (2.9)$$

Релятивистское волновое уравнение как система дифференциальных уравнений первого порядка может быть представлено в виде

$$(\rho_\mu \partial_\mu + x\beta) Q(x) = 0, \quad (2.10)$$

где  $\rho_\mu$  и  $\beta$  — некоторые матрицы  $n$ -го порядка, а  $Q$  — матрица с одним столбцом  $[Q_x(x)]$ . Подставляя (2.8) с

$$\Lambda(\partial) \equiv [\Lambda_{\alpha\beta}(\partial)] = \rho_\mu \partial_\mu + x\beta$$

в (2.7), получаем

$$x\alpha\beta = -x^2 I. \quad (2.11)$$

В этом равенстве через  $I$  обозначена единичная матрица  $n$ -го порядка. Равенство (2.11) показывает, что матрица  $\beta$  не может быть сингулярной и, следовательно, должна существовать обратная матрица  $\beta^{-1}$ . Умножение (2.10) на  $\beta^{-1}$  приводит к уравнению

$$(\beta_\mu \partial_\mu + x) Q(x) = 0, \quad (2.12)$$

в котором

$$\beta_\mu \equiv \beta^{-1} \rho_\mu. \quad (2.13)$$

Из того факта, что из (2.12) можно получить (2.10), мы заключаем, что (2.10) и (2.12) приводят к эквивалентным теориям. Поэтому, не ограничивая общности, релятивистское волновое уравнение всегда можно представить в форме (2.12).

Если  $d(\partial)$  есть дифференциальный оператор первого порядка

$$d(\partial) = \alpha + \alpha_\mu \partial_\mu \quad (2.14)$$

[т. е.  $b=1$  в (2.9)], соотношение (2.7) с  $\Lambda = -(\beta_\mu \partial_\mu + x)$  приводит к равенству

$$-(\alpha + \alpha_\mu \partial_\mu)(\beta_\mu \partial_\mu + x) = (\square - x^2) I.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \alpha x &= x^2 I, \\ x\alpha_\mu + \alpha\beta_\mu &= 0, \\ \alpha_\mu \beta_\nu + \alpha_\nu \beta_\mu &= -2\delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Последние равенства приводят к формулам

$$d(\partial) = -(\beta_\mu \partial_\mu - \kappa), \quad (2.16a)$$

$$\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (2.16б)$$

Как показано в гл. 5, число  $b$ , введенное в равенство (2.9), равно  $2f$ , где  $f$  — максимальная величина спина полей, описываемых величинами  $Q_\alpha$ . В случае (2.14)  $b=1$ , и поэтому спин поля  $Q_\alpha$  равен  $1/2$ . Таким образом, уравнение (2.12) является уравнением поля со спином  $1/2$ , если только величины  $\beta_\mu$  удовлетворяют соотношениям (2.16б). С помощью аналогичных соображений мы выведем в гл. 5 уравнения поля для произвольного спина.

# Уравнение Дирака

## § 1. Уравнение

В этой главе будут рассмотрены свойства волнового уравнения для описания частиц со спином  $1/2$ . Это уравнение может быть записано в форме<sup>1)</sup>

$$(\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + \kappa) \psi = 0, \quad (3.1)$$

где  $\kappa$  — масса частицы, а величины  $\gamma_{\mu}$  удовлетворяют, согласно (2.16а) и (2.16б), следующим соотношениям коммутации:

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} + \gamma_{\nu} \gamma_{\mu} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что

$$(\square - \kappa^2) \psi = 0. \quad (3.3)$$

Это показывает, что условие Клейна — Гордона, о котором говорилось в предыдущей главе, для теории, базирующейся на уравнении Дирака, выполнено.

Из (3.2) следует, что любая алгебраическая функция  $X$  величин  $\gamma_{\mu}$  может быть представлена в виде линейной формы

$$X = c^A \gamma^A, \quad (3.4)$$

в которой через  $\gamma^A$  обозначены следующие выражения:

$$\gamma^A = \begin{cases} I, \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \\ i\gamma_2\gamma_3, i\gamma_3\gamma_1, i\gamma_1\gamma_2, i\gamma_1\gamma_4, i\gamma_2\gamma_4, i\gamma_3\gamma_4, \\ i\gamma_1\gamma_2\gamma_3, i\gamma_1\gamma_2\gamma_4, i\gamma_3\gamma_1\gamma_4, i\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \\ \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4. \end{cases} \quad (3.5)$$

Последовательность шестнадцати величин в этих рядах и колонках выбрана так, что значок  $A$  в  $\gamma^A$  пробегает все значения от 1 до 16. Множитель — мнимая единица  $i$  — введен для того, чтобы все  $\gamma^A$  удовлетворяли соотношению

$$(\gamma^A)^2 = 1. \quad (3.6)$$

<sup>1)</sup> См. работы Дирака [5,6]. Первоначально уравнение имело форму (3.45а).

Величины  $\gamma^A$ , которые пока не конкретизированы, могут быть представлены в виде матриц. Следы, или шпур, этих матриц играют важную роль и могут быть вычислены с помощью общего соотношения, известного из теории матриц,

$$\text{Sp}(\alpha\beta) = \text{Sp}(\beta\alpha). \quad (3.7)$$

Например, шпур матрицы  $\gamma_1$  равен нулю, потому что

$$\text{Sp}(\gamma_1) = \text{Sp}(\gamma_1\gamma_2\gamma_2) = -\text{Sp}(\gamma_2\gamma_1\gamma_2) = -\text{Sp}(\gamma_1) = 0.$$

В общем случае имеет место соотношение

$$\text{Sp}(\gamma^A) = 0, \text{ если } \gamma^A \neq I \quad (3.8)$$

и

$$\text{Sp}(\gamma^A\gamma^B) = 0, \text{ если } A \neq B.$$

Можно также доказать полезное в практических вычислениях правило, что шпур произведения любого нечетного числа матриц  $\gamma_\mu$  равен нулю.

Сейчас мы покажем, что матрицы, представляющие величины  $\gamma^A$ , линейно независимы между собой в том смысле, что не существует нетривиального соотношения вида

$$c^A\gamma^A = 0. \quad (3.9)$$

В самом деле, из этого соотношения следует, что имеет место равенство

$$\sum_{A \neq B} c^A\gamma^A\gamma^B + c^B = 0 \quad \text{для всех } B.$$

Беря шпур этих матриц и используя (3.8), получаем

$$c^B = 0 \quad (B=1, \dots, 16). \quad (3.10)$$

Это означает, что  $\gamma^A$  линейно независимы между собой. Эти величины составляют полный набор величин, с помощью которых любая алгебраическая функция от  $\gamma^A$  может быть представлена в виде (3.4).

Все приводимые представления величин  $\gamma^A$  матрицами эквивалентны между собой. Действительно, если матрица  $X$  коммутирует со всеми матрицами  $\gamma^A$ , то с помощью (3.4) можно показать, что  $X$  является единичной матрицей  $I$ , умноженной на  $c$ -число, т. е. имеет вид

$$X = cI. \quad (3.11)$$

Ввиду того что число независимых величин  $\gamma^A$  равно шестнадцати, матричное представление должно состоять из четырехмерных матриц. В этом представлении  $\phi$  должно иметь вид четырехмерной матрицы с одним столбцом.

Величины, комплексно-сопряженные к  $c$ -числам и эрмитово-сопряженные к  $q$ -числам, будут обозначаться звездочкой. Например,



матрица, эрмитово-сопряженная к  $A = [a_{\alpha\beta}]$ , обозначается через  $A^* = [a_{\alpha\beta}^*]$ , где  $a_{\alpha\beta}^*$  — величина, комплексно-сопряженная к  $a_{\beta\alpha}$ .

Различные представления  $\gamma_\mu$ , например  $\gamma'_\mu$  и  $\gamma''_\mu$ , связаны между собой преобразованием, описываемым несингулярными матрицами. Таким образом,

$$\gamma'_\mu = S^{-1} \gamma_\mu S, \quad (3.12)$$

где  $S$  — некоторая несингулярная матрица. По крайней мере одно из этих представлений состоит из эрмитовых матриц, потому что величины  $\gamma_\mu$  и  $-\gamma_\mu$  образуют группу из 32 элементов, которая может быть представлена унитарными матрицами. Но такое представление, скажем  $\gamma'_\mu$ , одновременно является эрмитовым. В самом деле,

$$\gamma_\mu'^2 = 1 \quad \text{и} \quad \gamma'_\mu \gamma_\mu'' = 1 \quad (\text{суммирования нет})$$

и поэтому

$$\gamma'_\mu = \gamma_\mu'^*$$

Различные эрмитовы представления связаны между собой с помощью преобразований, описываемых унитарными матрицами.

Если набор матриц  $\gamma_\mu$  удовлетворяет соотношениям (3.2), тогда и наборы матриц  $\gamma_\mu^*$  и  $\gamma_\mu^T$  (где  $\gamma_\mu^T$  означает матрицу, транспонированную к  $\gamma_\mu$ ) также удовлетворяют соотношению (3.2). Поэтому должны существовать такие матрицы  $A$  и  $B$ , чтобы имели место равенства

$$\gamma_\mu^* = A \gamma_\mu A^{-1}, \quad (3.13)$$

$$\gamma_\mu^T = B \gamma_\mu B^{-1}. \quad (3.14)$$

В последующем изложении везде, где не оговорено противное, мы будем предполагать, что величины  $\gamma_\mu$  представлены определенным набором эрмитовых матриц, так что в равенстве (3.13)  $A = I$ . Более того,  $B$  может быть выбрана в виде унитарной матрицы

$$B^* = B^{-1}. \quad (3.15)$$

Сейчас мы докажем важное свойство [12]:

$$B^T = -B. \quad (3.16)$$

Равенство (3.14) может быть преобразовано к виду

$$\gamma_\mu = (B^T)^{-1} \gamma_\mu^T (B^T).$$

Подставляя (3.14) и используя (3.11), получаем

$$1) \quad B^T = cB.$$

Подставляя значение  $B$ , даваемое уравнением, транспонированным к выражению 1), заключаем, что  $c^2 = 1$  и поэтому

$$2) \quad c = \pm 1.$$

Сейчас мы покажем, что значение  $c=1$  можно отбросить, так как оно приводит к существованию не менее десяти независимых матриц, которые при транспонировании меняют знак [именно, произведения матрицы  $B$  на элементы третьей и четвертой строчек в (3.5):  $iB\gamma_2\gamma_3, \dots, iB\gamma_3\gamma_4; iB\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \dots, iB\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ ]. Другими словами, в этом случае должны были бы существовать десять независимых элементов, которые антисимметричны относительно главных диагоналей. Но этого не может быть, так как известно, что число антисимметричных линейно независимых элементов в четырехмерном пространстве равно шести (антисимметричный тензор в четырехмерном пространстве имеет шесть компонент).

С другой стороны, значение  $c=-1$  приемлемо, так как оно приводит к существованию только шести антисимметричных матриц —  $B, B\gamma_1, B\gamma_2, B\gamma_3, B\gamma_4$  и  $B\gamma_5$ . Поскольку в предыдущих рассмотрениях не делалось никаких специальных предположений об эрмитовом характере величин  $\gamma_\mu$ , то можно заключить, что равенство (3.16) имеет общее значение.

## § 2. Поведение матриц $\gamma$ при преобразованиях Лоренца

Сейчас мы вернемся к рассмотрению лоренцевой инвариантности уравнения (3.1).

Предположим, что два ряда значений координат  $x_\mu$  и  $'x_\mu$  связаны между собой преобразованием Лоренца

$$'x_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu, \quad (3.17a)$$

причем

$$a_{\mu\nu}a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda}. \quad (3.17b)$$

Далее будем предполагать, что  $\phi$  преобразуется при этом линейно по уравнению

$$'\phi = \Lambda\phi, \quad (3.18)$$

в котором  $\Lambda$  — четырехмерная матрица. Подставляя (3.18) в (3.1), получаем следующее необходимое и достаточное условие лоренцевой инвариантности уравнения (3.1):

$$\Lambda^{-1}\gamma_\mu\Lambda = a_{\mu\nu}\gamma_\nu. \quad (3.19)$$

(Более подробное обсуждение этого вопроса проведено в гл. 4.) Ничто не мешает считать, что величина  $\Lambda$  нормирована условием

$$|\det \Lambda| = 1. \quad (3.20)$$

Бесконечно малое преобразование Лоренца может быть представлено в виде

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \delta\omega_{\mu\nu}, \quad (3.21a)$$

где

$$\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}. \quad (3.21b)$$

[Последнее равенство является следствием условия ортогональности (3.176) и бесконечной малости величины  $\delta\omega_{\mu\nu}$ .] Теперь, пренебрегая высшими степенями  $\delta\omega_{\mu\nu}$ , можно представить матрицу  $\Lambda$  в виде

$$\Lambda = 1 + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu}, \quad (3.22a)$$

причем

$$S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}. \quad (3.22b)$$

Дальнейшие свойства матриц  $S_{\mu\nu}$  могут быть выяснены с помощью подстановки (3.22a) и (3.21a) в (3.19), что приводит к соотношению

$$[\gamma_\mu, S_{\lambda\nu}] = \delta_{\lambda\mu} \gamma_\nu - \delta_{\nu\mu} \gamma_\lambda. \quad (3.23)$$

Принимая во внимание (3.2), можно представить  $S_{\mu\nu}$  в виде

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu). \quad (3.24)$$

Из того обстоятельства, что величины  $\delta\omega_{i4}$  — мнимы, а  $\delta\omega_{ik}$  — вещественны ( $k, i \neq 4$ ), следует, что

$$\Lambda^* = \gamma_4 \Lambda^{-1} \gamma_4. \quad (3.25)$$

Эти результаты показывают, что, не нарушая справедливости (3.23), можно к  $S_{\mu\nu}$  прибавить любую величину, коммутирующую со всеми  $\gamma_\mu$ . Согласно (3.11), эта величина имеет вид  $\Delta_{\mu\nu} I$  и приводит к добавлению дополнительного члена  $\Delta \equiv (\frac{1}{2}) \Delta_{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} I$  в выражение (3.22a) для  $\Lambda$ . Вследствие того что  $(a_{4i}, a_{i4})$  являются мнимыми величинами, а  $(a_{ik}, a_{ki})$  — вещественными, соотношения (3.19) и эрмитово-сопряженные к ним соотношения

$$\begin{aligned} \Lambda^* \gamma_k \Lambda^{*-1} &= a_{ki} \gamma_i - a_{k4} \gamma_4, \\ \Lambda^* \gamma_4 \Lambda^{*-1} &= -a_{4i} \gamma_i + a_{44} \gamma_4 \end{aligned}$$

требуют выполнения равенства  $\Lambda^* = \pm \gamma_4 \Lambda^{-1} \gamma_4$ . Но отрицательный знак противоречит (3.25) и поэтому должен быть исключен. Отсюда следует, что  $\Delta$  является мнимой величиной, и соотношение (3.18) показывает, что бесконечно малая мнимая величина в  $\Lambda$  не приводит ни к чему иному, кроме изменения фазы у  $\psi$ . Но вследствие произвольности выбора фазы всегда можно считать, что  $\Delta = 0$  (и следовательно,  $\Delta_{\mu\nu} = 0$ ). Поэтому величина  $S_{\mu\nu}$  может быть взята в виде (3.24).

Рассмотренный выше класс бесконечно малых преобразований не включает отражения пространственных и временных координат. Рассмотрение такого рода преобразований дано в § 9, здесь же можно лишь проверить, что (3.19) удовлетворяется следующими выражениями:

$$\Lambda = i\gamma_4 \quad \text{для} \quad 'x_i = -x_i, \quad 'x_4 = x_4, \quad (3.26)$$

$$\Lambda = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \quad \text{для} \quad 'x_i = x_i, \quad 'x_4 = -x_4, \quad (3.27)$$

$$\Lambda = i\gamma_3 \quad \text{для} \quad 'x_\mu = -x_\mu. \quad (3.28)$$

Замена в (3.26) матрицы  $i\gamma_4$  на  $\gamma_4$  и в выражении (3.27) матрицы  $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  на  $i\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  также совместимо с (3.19).

Удобно подытожить некоторые свойства матрицы  $\Lambda$ :

$$\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda = \begin{cases} +\gamma_5 & \text{для бесконечно малого преобразования Лоренца,} \\ -\gamma_5 & \text{для пространственных отражений или отражений} \end{cases} \quad (3.29)$$

времени [(3.26), (3.27)].

В гл. 4 будет показано, что любое преобразование Лоренца может быть рассмотрено как произведение бесконечно малых преобразований вида (3.21a) и отражений (3.26) — (3.28). Если имеются два преобразования Лоренца  $x \rightarrow 'x$  и  $'x \rightarrow ''x$ , определенных формулами

$$'x_\mu = a_{\mu\nu}x_\nu, \quad ''x_\mu = b_{\mu\nu}'x_\nu,$$

и если  $\Lambda^a$  и  $\Lambda^b$  соответствуют  $a_{\mu\nu}$  и  $b_{\mu\nu}$ , то  $(\Lambda^b\Lambda^a)$  соответствует сложному преобразованию  $b_{\mu\nu}a_{\nu\lambda}$ , ибо имеет место равенство

$$b_{\mu\nu}a_{\nu\lambda}\gamma_\lambda = (\Lambda^a)^{-1}b_{\mu\nu}\gamma_\nu(\Lambda^a) = (\Lambda^b\Lambda^a)^{-1}\gamma_\mu(\Lambda^b\Lambda^a),$$

которое показывает, что (3.19) удовлетворяется этими величинами. Далее, (3.20) удовлетворяется в силу правила умножения детерминантов. Таким образом, повторное преобразование приводит к формуле

$$\psi \rightarrow ''\psi = \Lambda\psi, \quad (3.30)$$

в которой

$$\Lambda = \Lambda^b\Lambda^a. \quad (3.31)$$

### § 3. Поведение волновой функции при преобразовании Лоренца. Зарядовое сопряжение

Вводя в рассмотрение матрицу  $\bar{\psi}$  с одной строчкой, согласно определению

$$\bar{\psi} = \psi^*\gamma_4, \quad (3.32)$$

можно показать, что  $\bar{\psi}$  удовлетворяет уравнению

$$\partial_\mu\bar{\psi}\gamma_\mu - x\bar{\psi} = 0. \quad (3.33)$$

Нетрудно выяснить особенности поведения  $\bar{\psi}$  при преобразованиях Лоренца вида (3.17a). Прежде всего имеет место соотношение

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}\gamma_4\Lambda^*\gamma_4. \quad (3.34)$$

Далее, из (3.25) — (3.27) следует

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \bar{\psi}\Lambda^{-1} && \text{для бесконечно малого преобразования (3.22a)} \\ & && \text{или пространственного отражения,} \\ \bar{\psi} &= -\bar{\psi}\Lambda^{-1} && \text{для отражения времени.} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Поэтому  $\bar{\psi}\psi$  изменяет знак при отражении времени. Однако в гл. 8 будет показано, что в рамках квантовой теории поля при отражении времени величину  $\bar{\psi}\psi$  можно рассматривать как скаляр, если одновременно произвести соответствующее преобразование вектора состояния поля.

Аналогичные соображения мы применим к величинам  $\bar{\psi}A\psi$  и  $\bar{\psi}\gamma_5 A\psi$ , в которых  $A$  является некоторой матрицей. Согласно (3.29), при отражении времени эти величины превращаются соответственно в  $-\bar{\psi}\Lambda^{-1}A\Lambda\psi$  и  $\bar{\psi}\gamma_5\Lambda^{-1}A\Lambda\psi$ , а при пространственных отражениях они принимают вид  $\bar{\psi}\Lambda^{-1}A\Lambda\psi$  и  $-\bar{\psi}\gamma_5\Lambda^{-1}A\Lambda\psi$ . В частности, при отражении времени  $\bar{\psi}\psi$  меняет знак, в то время как  $\bar{\psi}\gamma_5\psi$  остается без изменения; при пространственных отражениях  $\bar{\psi}\psi$  и  $\bar{\psi}\gamma_5\psi$  являются соответственно скаляром и псевдоскаляром<sup>1)</sup>. С другой стороны, в квантовой теории поля  $\bar{\psi}\gamma_5\psi$  меняет знак при отражении времени, в то время как  $\bar{\psi}\psi$  остается без изменения.

Теперь введем в рассмотрение матрицу  $C$ , которая с матрицей  $B$ , определенной в (3.14), связана соотношением

$$C = \gamma_5 B^{-1}. \quad (3.36)$$

Можно показать, что

$$\gamma_\mu^T = -C^{-1}\gamma_\mu C \quad (3.37)$$

и

$$C^T = -C. \quad (3.38)$$

Так как  $B$  унитарна (когда  $\gamma_\mu$  — эрмитовы), то

$$C^* C = 1. \quad (3.39)$$

Матрица  $C$  имеет важное физическое значение, которое может быть выяснено с помощью (3.37). Пусть  $\psi'(x)$  и  $\bar{\psi}'(x)$  определены с помощью соотношений

$$\psi'(x) = C\bar{\psi}^T(x), \quad \bar{\psi}'(x) = (C^{-1}\psi(x))^T. \quad (3.40)$$

Очевидно, что  $\psi'$  удовлетворяет волновому уравнению (3.1), а  $\bar{\psi}'$  — волновому уравнению (3.33). Однако в дальнейшем будет показано,

<sup>1)</sup> Величина, скажем,  $a$ , которая инвариантна относительно бесконечно малого преобразования Лоренца, является либо скаляром, либо псевдоскаляром. Эти две категории величин отличаются друг от друга по своему поведению при пространственных отражениях. Так,

$$\text{если } \begin{matrix} a \rightarrow a, \\ a \rightarrow -a, \end{matrix} \text{ то } \begin{matrix} a \text{ — скаляр,} \\ a \text{ — псевдоскаляр.} \end{matrix}$$

Аналогично, если величины  $a_\mu$  при бесконечно малом преобразовании Лоренца преобразуются как вектор, они являются либо вектором, либо псевдовектором, в зависимости от поведения при пространственных отражениях:

$$\text{если } \begin{matrix} a_k \rightarrow -a_k, & a_4 \rightarrow a_4, \\ a_k \rightarrow a_k, & a_4 \rightarrow -a_4, \end{matrix} \text{ то } \begin{matrix} a_\mu \text{ — вектор,} \\ a_\mu \text{ — псевдовектор.} \end{matrix}$$

что в присутствии электромагнитного поля  $\psi$  и  $\psi'$  удовлетворяют волновым уравнениям частиц с зарядами  $e$  и  $-e$  соответственно. Например, когда  $\psi$  представляет электрон с массой  $m$  и зарядом  $-e$ , тогда  $\psi'$  представляет позитрон с массой  $m$  и зарядом  $+e$ . По этой причине (3.40) называются *преобразованиями зарядового сопряжения*.

Если  $\psi$  и  $\psi'$  обладают одинаковыми свойствами при преобразовании Лоренца, то с помощью (3.34) можно найти условие инвариантности (3.40), которое имеет вид

$$C\Lambda^T C^{-1} = \gamma_4 \Lambda \gamma_4. \quad (3.41)$$

Но раньше было указано, что в равенствах (3.26) и (3.27) можно было бы взять в качестве  $\Lambda$  соответственно значения  $\Lambda = \gamma_4$  и  $i\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ ; теперь становится очевидным, что такой выбор был бы несовместимым с (3.41). Другими словами, если  $\psi$  и  $\psi'$  должны вести себя при преобразованиях Лоренца одинаковым образом, то  $\Lambda$  должна быть выбрана в виде, указанном в равенствах (3.26) и (3.27) [14].

Теперь можно доказать важное свойство величин  $\gamma^A$  [13]. Если  $X$  является произвольной четырехмерной матрицей, то [см. (3.4)]

$$X = c^A \gamma^A, \quad (3.42)$$

где  $c^A$  ( $A=1, \dots, 16$ ) — обычные  $c$ -числа. Из (3.6) и (3.8) следует

$$\text{Sp}(X\gamma^B) = 4c^B \quad (B=1, \dots, 16). \quad (3.43)$$

Поэтому имеет место соотношение

$$X_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} X_{\rho\lambda} \gamma_{\lambda\rho}^A \gamma_{\alpha\beta}^A.$$

Если матричные элементы  $X$  таковы, что  $X_{\alpha\rho} \neq 0$ , а остальные исчезают, то

$$\delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\rho} = \frac{1}{4} \gamma_{\rho\lambda}^A \gamma_{\alpha\beta}^A. \quad (3.44a)$$

Далее, если  $F$  и  $G$  — две произвольные четырехмерные матрицы, то

$$F_{\alpha\lambda} G_{\beta\rho} = F_{\alpha\lambda} \delta_{\lambda\rho} \delta_{\beta\sigma} G_{\sigma\beta} = \frac{1}{4} \gamma_{\rho\lambda}^A (F\gamma^A G)_{\alpha\beta}. \quad (3.44b)$$

Пример применения равенств (3.44b) дан в гл. 7, пример 8.

#### § 4. Волновая функция свободного электрона

Здесь будет удобно записать волновое уравнение (3.1) в виде

$$(i\partial_4 + \alpha_k \partial_k + i\chi\beta)\psi = 0, \quad (3.45a)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_k &= i\gamma_4 \gamma_k, \\ \beta &= \gamma_4. \end{aligned} \quad (3.45b)$$

Если  $\gamma_\mu$  — эрмитовы, то эрмитовыми будут также и  $\alpha_k$  и  $\beta$ .

Пусть  $\psi$  имеет вид плоской волны, т. е.

$$\psi = ue^{ik_x x}, \quad (3.46)$$

причем  $k_\mu$  — компоненты четырехвектора. Подстановка этого выражения в (3.45а) приводит к равенству

$$k_0 u = (\alpha_i k_i + \alpha_3^2) u, \quad (3.45б)$$

которое показывает, что энергия  $k_0$  является собственным значением эрмитова оператора  $H = (1/i) \alpha_i \partial_i + \alpha_3^2$ , где  $H$  — гамильтониан свободной частицы. Из (3.3) следует, что  $k_0^2 = k_i k_i + x^2$ , и поэтому

$$k_0 = \begin{cases} K_0, \\ -K_0, \end{cases} \quad (3.47)$$

где

$$K_0 = \sqrt{k_i k_i + x^2}. \quad (3.48)$$

Теперь введем в рассмотрение *спиновые матрицы*  $\sigma_k$  с помощью равенств

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -i\gamma_2\gamma_3 = -i\alpha_2\alpha_3, \\ \sigma_2 &= -i\gamma_3\gamma_1 = -i\alpha_3\alpha_1, \\ \sigma_3 &= -i\gamma_1\gamma_2 = -i\alpha_1\alpha_2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Если  $e$  — единичный вектор, параллельный вектору  $k$ , то легко показать, что  $(\sigma \cdot e)$  коммутирует с  $H$ , т. е. что имеет место равенство

$$[H, (\sigma \cdot e)] = 0. \quad (3.50)$$

Кроме того,

$$(\sigma \cdot e)^2 = (e \cdot e) = 1, \quad (3.51)$$

и поэтому собственными значениями  $(\sigma \cdot e)$  являются значения  $\pm 1$ .

Собственные векторы оператора  $H$  (каждая компонента собственного вектора является функцией) могут быть классифицированы по значениям  $k_0$  и  $(\sigma \cdot e)$ . Таким образом, имеем четыре собственных вектора  $u^1$  и т. д., таких, что

$$\begin{aligned} u^1: & \quad k_0 = K_0, \quad (\sigma \cdot e) u^1 = u^1, \\ u^2: & \quad k_0 = K_0, \quad (\sigma \cdot e) u^2 = -u^2, \\ u^3: & \quad k_0 = -K_0, \quad (\sigma \cdot e) u^3 = u^3, \\ u^4: & \quad k_0 = -K_0, \quad (\sigma \cdot e) u^4 = -u^4. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Компоненты  $u^1$  и т. д. будут обозначаться греческими индексами, например  $u^1_\alpha$ . Если собственные векторы  $u^\alpha$  нормированы и ортогональны друг к другу, то имеют место соотношения

$$\begin{aligned} u^{\alpha'}_\beta u^\alpha_\gamma &= \delta_{\alpha\beta}, \\ u^{\alpha'}_\beta u^\alpha_\gamma &= \delta_{\alpha\gamma}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Второе из этих соотношений является следствием того обстоятельства, что матрица  $[u_\alpha^p]$  ( $\alpha$  и  $p$  нумеруют соответственно строки и столбцы) является унитарной. Следует заметить, что возможны и отрицательные значения энергии, причем абсолютная разница между положительными и отрицательными значениями энергии — не меньше  $2\kappa$ .

Физический смысл  $\sigma_k$  может быть понят на основании соотношения

$$\left[ \frac{1}{i} [\mathbf{r}, \partial] + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}, H \right] = 0, \quad (3.54)$$

в котором через  $\partial$  обозначен трехмерный вектор  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ . Так как  $H$  является гамильтонианом частицы, то получается, что полный момент количества движения  $(1/i)[\mathbf{r}, \partial] + (1/2)\boldsymbol{\sigma}$  является константой движения. Спиновый момент количества движения является внутренним свойством частицы в том смысле, что он не равен нулю даже тогда, когда частица покоится. Более того, равенство (3.54) имеет место и в том случае, когда частица не свободна, а подвергается действию центральных сил (более общее рассмотрение вопроса о моменте количества движения в квантовой теории поля будет дано в гл. 7, пример 1 и в гл. 9, пример 5).

Из (3.52) очевидно, что для частицы, описываемой уравнением Дирака (3.1), энергия может принимать значения  $\pm K_0$ , и слагающие спинового момента в направлении вектора  $\mathbf{e}$  могут быть равны  $\pm 1/2$ .

То обстоятельство, что величина  $(1/2)\boldsymbol{\sigma}$  обладает свойствами момента количества движения, может быть показано и другим способом. Из (3.49) и (3.2) следует

$$\left[ \frac{1}{2} \sigma_k, \frac{1}{2} \sigma_l \right] = i \frac{1}{2} \sigma_m \quad (k, l, m = \text{Цикл. } (1, 2, 3)). \quad (3.55)$$

Но это соотношение характерно для момента количества движения [37]. Из (3.55) следует, что  $(1/2)\sigma_k$  имеет собственные значения  $\pm 1/2$  в зависимости от ориентации спина. Особенно ясно это в выражении (3.51), когда компонента  $\boldsymbol{\sigma}$  берется в направлении вектора  $\mathbf{e}$ .

Из (3.52) видно, что функция  $u_\alpha^p$  относится к электрону с положительной энергией при значениях  $p$ , равных 1 или 2, и относится к электрону с отрицательной энергией, когда  $p$  равно 3 или 4. Для многих практических целей необходимо найти оператор проектирования на векторное многообразие, связанное с электронами, энергия которых имеет определенный знак. Это может быть выполнено с помощью оператора

$$\Lambda_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2K_0} \{K_0 \pm (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \alpha\beta)\}, \quad (3.56)$$



ибо из (3.45в) и (3.47) следует

$$\Lambda_+(\mathbf{k})u^\rho = \begin{cases} u^\rho & \text{для } \rho = 1, 2 \\ 0 & \text{для } \rho = 3, 4 \end{cases}, \quad (3.57)$$

$$\Lambda_-(\mathbf{k})u^\rho = \begin{cases} 0 & \text{для } \rho = 1, 2 \\ u^\rho & \text{для } \rho = 3, 4. \end{cases} \quad (3.58)$$

Другими словами,  $\Lambda_+$  и  $\Lambda_-$  являются операторами проектирования, которые действуют на вектор состояния  $u$  и выделяют компоненты, относящиеся соответственно к положительной или отрицательной энергии.

Дальнейшим полезным применением этих операторов является возможность вычислить средние значения матриц, скажем  $A$ , в состояниях с положительной или отрицательной энергией. Это можно сделать в общем виде, не используя явного выражения для  $u^1$  и  $u^2$  (или  $u^3$  и  $u^4$ ), так как

$$\sum_{\rho=1,2} u^{\rho*} A u^\rho = u^{\rho*} A \Lambda_+ u^\rho = \text{Sp}(A \Lambda_+). \quad (3.59)$$

Последнее выражение может быть легко вычислено, так как на основании (3.4) матрица  $A \Lambda_+$  может быть представлена в виде линейной комбинации  $\gamma^A$ .

Скорость свободной частицы можно вычислить по формуле

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = i[\mathbf{x}, H] = \boldsymbol{\alpha}. \quad (3.60)$$

Так как собственные значения  $\alpha_k$  равны  $\pm 1$ , то можно заключить, что скорость частицы всегда равна скорости света. Однако этот результат не имеет непосредственного значения, так как в действительности мы всегда имеем дело со средним значением скорости частицы с положительной энергией по короткому промежутку времени. Это среднее значение не равно скорости света, потому что

$$\sum_{\rho=1,2} u^{\rho*} \frac{d}{dt} \mathbf{x} u^\rho = \text{Sp}(\boldsymbol{\alpha}, \Lambda_+(\mathbf{k})) = \frac{\mathbf{k}}{K_0}. \quad (3.61)$$

Это равенство показывает соблюдение классического соотношения между скоростью и импульсом частицы.

## § 5. Преобразование Фолди — Воутхаузена — Тани

Применим результаты предыдущего параграфа к конкретным вычислениям. С этой целью мы опишем преобразование Фолди — Воутхаузена — Тани [9, 16], которое дает удобный метод вычисления дираковских операторов в состояниях с определенной энергией.

Преобразование определяется равенством

$$\phi \rightarrow \varphi = S\phi,$$

в котором

$$S = \beta \frac{(\alpha \cdot \mathbf{k}) + \beta (K_0 + x)}{\{2K_0(K_0 + x)\}^{1/2}}, \quad S^{-1} = \frac{(\alpha \cdot \mathbf{k}) + \beta (K_0 + x)}{\{2K_0(K_0 + x)\}^{1/2}} \beta.$$

Гамильтониан свободной частицы преобразуется согласно следующему правилу:

$$H' \equiv SHS^{-1} = S((\alpha \cdot \mathbf{k}) + x\beta)S^{-1} = K_0\beta.$$

Удобно выбрать такое представление, в котором матрица  $\beta$  диагональна и имеет вид

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

В этом случае очевидно, что одна пара функций  $(\varphi_1, \varphi_2)$  относится к положительным значениям энергии, а другая пара  $(\varphi_3, \varphi_4)$  — к отрицательным значениям.

Некоторая матрица  $A$  преобразуется при этом согласно правилу

$$A' = SAS^{-1}.$$

Если матрица  $A'$  имеет элементы, связывающие между собой лишь состояния с энергией одинакового (различного) знака, то она называется четной (нечетной). Легко показать, что  $\beta$  и  $\sigma_k$  — четные матрицы, а  $\alpha_k$  — нечетные.

Ниже приводятся выражения различных операторов после преобразования к  $\varphi$ -представлению

$$x \rightarrow x' = x - i \frac{1}{2K_0} \beta \alpha + \frac{i\beta (\alpha \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k} - [\sigma, \mathbf{k}] k}{2K_0(K_0 + x, k)},$$

$$\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' = \mathbf{k},$$

$$H \rightarrow H' = K_0\beta,$$

$$\alpha \rightarrow \alpha' = \alpha + \frac{\mathbf{k}}{K_0} \beta - \frac{(\alpha \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}}{K_0(K_0 + x)},$$

$$\beta \rightarrow \beta' = \frac{1}{K_0} (x\beta - (\alpha \cdot \mathbf{k})),$$

$$\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma + \frac{i}{K_0} \beta [\alpha, \mathbf{k}] - \frac{[\mathbf{k}, [\sigma, \mathbf{k}]]}{K_0(x + K_0)}.$$

Это преобразование мы используем для вычисления значения оператора  $\beta \alpha$ , относящегося к состоянию нуклона только с поло-

жительной энергией. Этот оператор иногда представляет ту часть гамильтониана, которая описывает взаимодействие при  $\beta$ -распаде, и выражает эффект перехода между состояниями нуклона. Преобразование приводит к выражению

$$S\beta\alpha S^{-1} = \frac{1}{2K_0(K_0 + \kappa)} [-\{(K_0 + \kappa)^2 + k^2\} \alpha\beta + 2k^2 \alpha\beta + \\ + 2k\beta(\alpha \cdot \mathbf{k}) + 2i(K_0 + \kappa)[\mathbf{k}, \boldsymbol{\sigma}]].$$

Так как состояния отрицательной энергии можно не учитывать, то нечетные матрицы в этом выражении следует опустить. Опуская далее члены второго порядка и выше относительно  $(\mathbf{k}/\kappa)$  ( $\kappa$  — масса нуклона), получаем следующее результирующее выражение:

$$\beta\alpha \rightarrow S\beta\alpha S^{-1} \approx \frac{i}{\kappa} [\mathbf{k}, \boldsymbol{\sigma}].$$

При использовании этого выражения в теории  $\beta$ -распада  $\mathbf{k}$  интерпретируется как средний импульс нуклона [1].

Интересно отметить, что если  $\psi$  — функция со свойствами, близкими к  $\delta$ -функции, то  $\varphi$  выражается в виде интеграла по области, размеры которой имеют порядок комптоновской длины волны  $(1/\kappa)$ . Это является следствием наличия оператора пространственного дифференцирования  $\mathbf{k}$  в выражении для  $S$ .

Этот метод был успешно обобщен на частицы, находящиеся во внешнем поле [8].

## § 6. Заряженные частицы в электромагнитном поле. Теория дырок

Вид волнового уравнения заряженной частицы, находящейся в электромагнитном поле (с потенциалом  $A_\mu$ ), определяется требованием калибровочной инвариантности. Более подробные рассуждения, данные в гл. 7, приводят к уравнению

$$\{(\gamma_\mu, \partial_\mu - ieA_\mu(x)) + \kappa\} \psi(x) = 0. \quad (3.62a)$$

С помощью преобразования зарядового сопряжения (3.40) получаем другое уравнение

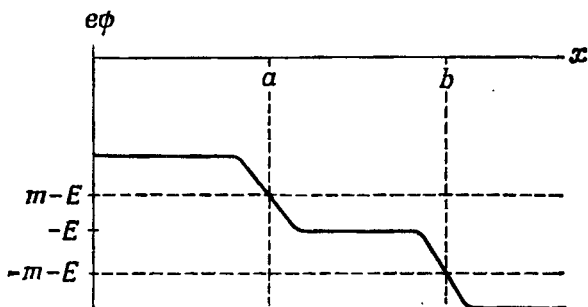
$$\{(\gamma_\mu, \partial_\mu + ieA_\mu(x)) + \kappa\} \psi'(x) = 0. \quad (3.62b)$$

Теперь становится очевидным, что  $\psi'$  и  $\psi$ , связанные друг с другом преобразованием зарядового сопряжения, относятся к частицам с противоположными знаками зарядов. Далее, если  $\psi$  описывает состояние с положительной энергией, то  $\psi'$  описывает состояние с отрицательной энергией. В самом деле, если  $\psi$  описывает состояние с положительной энергией, то  $\psi = \Lambda_+(\mathbf{k})\psi$ ; преобразуя

это равенство с помощью преобразования зарядового сопряжения и используя (3.36) и (3.14), получаем

$$\begin{aligned} \Lambda_+ (-\mathbf{k}) \psi' &= \Lambda_+ (-\mathbf{k}) \gamma_5 \gamma_4 \Lambda_+ (\mathbf{k}) B^{-1} \psi^* = \\ &= \Lambda_+ (-\mathbf{k}) \Lambda_- (-\mathbf{k}) \gamma_5 \gamma_4 B^{-1} \psi^* = 0. \end{aligned}$$

Другими словами, преобразование зарядового сопряжения устанавливает соответствие между состояниями отрицательной энергии частиц с зарядом  $-e$  и состояниями положительной энергии частиц с зарядом  $+e$  (и той же массой).



Фиг. 1.

Существование состояний с отрицательной энергией приводит к физической трудности, которая может быть проиллюстрирована с помощью так называемого парадокса Клейна [10].

В реальном мире электроны всегда имеют положительную энергию, и эти состояния должны быть стабильными. Однако простое соображение может привести к противоположному результату. Электростатический потенциал  $\Phi(x)$ , поведение которого изображено на фиг. 1, имеет такой вид, что связанная с ним потенциальная энергия  $e\Phi(x)$  ведет себя следующим образом:

$$\begin{aligned} E + e\Phi(x) &> m && \text{для } x < a, \\ m > E + e\Phi(x) &> -m && \text{для } a < x < b, \\ -m > E + e\Phi(x) &&& \text{для } x > b. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Предположим, что электрон с полной энергией  $E$  движется в положительном направлении оси  $x$ . Согласно классической механике, электрон не может оказаться в области  $a < x < b$ , потому что в этой области его импульс  $p(x) = [(E + e\Phi(x))^2 - m^2]^{1/2}$  становится мнимым. Таким образом, согласно классической теории, электрон, первоначально находившийся в области  $x < a$ , никогда не сможет попасть в область  $x > b$ . Однако в квантовой теории такой переход не запрещен, он может произойти с помощью процесса, аналогичного туннельному эффекту. Таким образом полу-

чается, что электрон не обязательно будет бесконечно долгое время находиться в состоянии с положительной энергией.

Выход из этого затруднения был указан теорией дырок Дирака [6]. Принимается, что вакуум не есть состояние, в котором отсутствуют электроны, что в вакууме все состояния с положительной энергией свободны, а все состояния с отрицательной энергией заняты. (Согласно принципу Паули, состояние с заданным значением энергии-импульса занято двумя электронами с противоположно направленными спинами.) Теория Дирака предполагает, что фон электронов с отрицательной энергией не может быть наблюдаем; далее, эта теория считает, что наличие этого фона электронов проявляется лишь тогда, когда внешний источник сообщает ему извне энергию, превышающую  $2m$ , в результате чего один из электронов совершает переход из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией. Когда это произойдет, фон электронов характеризуется отсутствием электрона в одном из состояний с отрицательной энергией, т. е. „дыркой“. Благодаря этому парадокс Клейна находит следующее разрешение: электрону с положительной энергией невозможно перейти в состояние с отрицательной энергией, потому что все эти состояния в нормальных условиях целиком заполнены. Переход в состояние с отрицательной энергией оказывается возможным только тогда, когда имеется в наличии дырка.

Дырка на фоне отрицательно заряженных частиц будет обладать свойствами положительно заряженной частицы с массой электрона. В общем случае такого рода частица называется „античастицей“. Таким образом, переход электрона (с отрицательным зарядом) из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией может быть интерпретирован как рождение пары частиц — электрона и позитрона. Именно предсказание возможности рождения пар было наиболее поразительным успехом теории дырок.

Наряду с теорией Дирака предсказание возможности порождения и поглощения электронов дается также общей квантовой теорией поля. Однако в общей теории рождение пары электрон—позитрон интерпретируется не как переход электрона из состояния с отрицательной энергией в состояние с положительной энергией, а как рождение отрицательно заряженной и положительно заряженной частицы. Античастицы при этом могут описываться волновой функцией  $\psi'$ , связанной с функцией  $\psi$  преобразования зарядового сопряжения. Стабильность электронов обеспечивается, при соответствующим образом определенном вакууме, тем, что они подчиняются статистике Ферми, что является следствием применяемых для них соотношений коммутации (см. гл. 9).

Хотя теория дырок и разрешает парадокс Клейна, сама она не свободна от аналогичных трудностей. Например, внешнее электро-

магнитное поле может так поляризовать бесконечное множество электронов, находящихся в вакууме, что некоторые электроны окажутся в состояниях с положительной энергией. Индуцированный таким способом ток оказывается бесконечной величины (см. гл. 13, пример 6).

### § 7. Теория Майорана частиц со спином $1/2$

Соотношение между частицами и античастицами наиболее простым способом представляется теорией Майорана [11]. Эта теория является теорией частиц со спином  $1/2$ , но не наиболее общей теорией этих частиц.

Прежде всего в рассмотрение вводятся четырехвекторы  $\psi^{(1)}$  и  $\psi^{(2)}$ , связанные с зарядово-сопряженной между собой парой векторов  $\psi$  и  $\psi'$  следующими равенствами:

$$\begin{aligned}\psi^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi + \psi'), \\ \psi^{(2)} &= \frac{1}{i\sqrt{2}} (\psi - \psi').\end{aligned}\tag{3.64}$$

Это приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^{(1)} + i\psi^{(2)}), \\ \psi' &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^{(1)} - i\psi^{(2)}).\end{aligned}\tag{3.65}$$

Используя (3.32) можно ввести векторы  $\bar{\psi}^{(1)}$  и  $\bar{\psi}^{(2)}$  с помощью равенств

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{(1)} &\equiv \psi^{(1)*} \gamma_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\psi} + \bar{\psi}'), \\ \bar{\psi}^{(2)} &\equiv \psi^{(2)*} \gamma_4 = -\frac{1}{i\sqrt{2}} (\bar{\psi} - \bar{\psi}').\end{aligned}\tag{3.66}$$

Тогда из (3.40) следуют соотношения

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^{(1)'} &\equiv (C^{-1}\psi^{(1)})^T = \bar{\psi}^{(1)}, & \psi^{(1)'} &\equiv C\bar{\psi}^{(1)T} = \psi^{(1)}, \\ \bar{\psi}^{(2)'} &\equiv (C^{-1}\psi^{(2)})^T = \bar{\psi}^{(2)}, & \psi^{(2)'} &\equiv C\bar{\psi}^{(2)T} = \psi^{(2)},\end{aligned}\tag{3.67}$$

которые показывают, что  $\psi^{(1)}$  и  $\psi^{(2)}$  инвариантны относительно зарядового сопряжения. Следует заметить, что если  $\psi^{(2)} = 0$ , то на основании (3.64)  $\psi = \psi'$ . Это надо интерпретировать в том смысле, что частицы, описываемые такими волновыми функциями, являются нейтральными частицами. Теория Майорана описывает именно такие частицы; вектор  $\psi^{(2)}$  предполагается равным нулю.

Таким образом, в схеме, которую предложил Майорана, не только рассматриваемые частицы являются нейтральными, но и нет никакого логического различия между частицами и античастицами. Это приводит к важному следствию, которое может быть проиллюстрировано на примере спонтанного распада нейтрона. Если нейтрино  $\nu$  и антинейтрино можно отличить друг от друга и если нейтрон  $N$  порождает не антинейтрино, а нейтрино

$$N \rightarrow P + e + \nu, \quad \bar{\nu} + N \rightarrow P + e \quad (\bar{\nu} \text{ — антинейтрино}),$$

то получается, что в двойном  $\beta$ -распаде должны образовываться два нейтрино

$$N + N \rightarrow N + P + e + \nu \rightarrow P + P + e + e + \nu + \nu.$$

С другой стороны, теория Майорана, в которой нет различия между нейтрино и антинейтрино, приводит к следующей схеме процесса [8]:

$$N + N \rightarrow N + P + e + \nu \rightarrow P + P + e + e.$$

Можно считать, что нейтрино, испущенное одним из нейтронов в качестве антинейтрино, поглощается вторым распадающимся нейтроном. Таким образом, изучение двойного  $\beta$ -распада дает способ проверки применимости теории Майорана к нейтрино. К сожалению, имеющихся экспериментальных материалов [12, 7] недостаточно для определенного решения этого вопроса<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Как известно, Майорана (1937 г.) выдвинул гипотезу, согласно которой нейтрино и антинейтрино должны быть тождественными между собой, и потому для их описания можно воспользоваться уравнением Дирака с вещественными волновыми функциями. Эта гипотеза может быть проверена на двойном  $\beta$ -распаде, которым обладают, например, ядра  $\text{Ca}^{48}$ ,  $\text{Zr}^{96}$ ,  $\text{Nd}^{150}$  и т. д. Если предположить, что нейтрино и антинейтрино тождественны между собой, то следовало бы ожидать сравнительно большого значения для вероятности двойного  $\beta$ -распада (время жизни порядка  $10^{15}$  лет) с испусканием двух электронов без нейтрино (один нейтрон ядра испускает электрон и нейтрино, другой нейтрон поглощает нейтрино и испускает второй электрон).

Если же двойной  $\beta$ -распад представляет собой два последовательных  $\beta$ -распада с испусканием двух электронов и двух нейтрино, то вероятность испускания резко уменьшается (соответствующее время жизни будет иметь порядок  $10^{22}$  лет). Экспериментальные исследования показали [18, 19], что время жизни при двойном  $\beta$ -распаде не может быть меньше  $10^{18}$  лет, и поэтому двойной  $\beta$ -распад без испускания нейтрино невозможен. В настоящее время появилась благодаря развитию идей Ли и Янга о несохранении четности теория двухкомпонентного нейтрино (см. примечание на стр. 133). Нейтрино и антинейтрино по этой теории отличаются друг от друга не зарядом (как электрон от позитрона), а проекцией спина на направление движения. Двойной  $\beta$ -распад по этому варианту теории без испускания нейтрино при соответствующем выборе энергии взаимодействия становится уже невозможным.

— *Прим. ред.*

## § 8. Спиноры

При преобразованиях Лоренца функция  $\psi$  ведет себя особым образом, и, чтобы объективно описать это поведение, мы введем некоторые величины, которые называются спинорами.

Если  $\sigma_k$  являются спиновыми матрицами (3.49), то эрмитово представление величин  $\gamma_\mu$  задается следующими формулами:

$$\gamma_k = -\sum_{k\rho_2}, \quad \gamma_4 = \rho_1, \quad \rho_3 = -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4, \quad (3.68)$$

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{bmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \Sigma_k = \begin{bmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Легко показать, что матрицы  $\gamma_\mu$  в равенствах (3.68) удовлетворяют соотношениям коммутации (3.2). (В практике иногда бывает удобнее выбирать представление, в котором  $\gamma_k = -\sum_{k\rho_2}$  и  $\gamma_4 = \rho_3$ .) Подстановка (3.68) в (3.24) дает равенства

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \sigma_i = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{bmatrix}, \quad (j, k, l = \text{цикл. } (1, 2, 3)), \quad (3.71)$$

$$S_{k4} = \frac{1}{2} \sum_k \rho_2 \rho_1 = \frac{i}{2} \begin{bmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{bmatrix}.$$

Последние равенства показывают, что при бесконечно малых преобразованиях Лоренца вида (3.18) и (3.22 а) пары компонент  $\psi_1$  и  $\psi_2$ ,  $\psi_3$  и  $\psi_4$  преобразуются по следующему закону:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}' = \left( I + \frac{i}{2} \sum_{\text{цикл}} \delta\omega_{23} \sigma_1 + \frac{i}{2} \delta\omega_{k4} \sigma_k \right) \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

и

$$\begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}' = \left( I + \frac{i}{2} \sum_{\text{цикл}} \delta\omega_{23} \sigma_1 - \frac{i}{2} \delta\omega_{k4} \sigma_k \right) \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}. \quad (3.73)$$

В этих формулах использованы обозначения

$$\sum_{\text{цикл}} \delta\omega_{23} \sigma_1 \equiv \delta\omega_{23} \sigma_1 + \delta\omega_{12} \sigma_3 + \delta\omega_{31} \sigma_2.$$

Очевидно, что преобразования (3.72) и (3.73) являются унимодулярными (детерминант из коэффициентов преобразования равен единице); это справедливо для всех преобразований непрерывной группы Лоренца (т. е. преобразований, являющихся произведениями бесконечно малых преобразований).

Матрицы с двумя строками или столбцами, бесконечно малые преобразования Лоренца которых унимодулярны, называются



*спинорами*. Если преобразование имеет вид (3.73), то соответствующие спиноры называются *контравариантными* и будут обозначаться верхними индексами. Так, элементы  $\psi_3$  и  $\psi_4$  в (3.73) будут обозначаться через  $\psi^3$  и  $\psi^4$ , а в общем случае контравариантного спинора — через  $b^r$ . Ковариантный спинор есть строка из двух элементов  $a_r$ , так что  $a_r b^r$  является инвариантом относительно преобразований Лоренца. При бесконечно малом преобразовании этот спинор преобразуется согласно следующему правилу:

$$(a_1, a_2) = (a_1, a_2) \left( I - \frac{i}{2} \sum_{\text{цикл}} \delta\omega_{21} \sigma_1 + \frac{i}{2} \delta\omega_{k4} \sigma_k \right). \quad (3.74)$$

Столбец, образованный из величин, комплексно-сопряженных к элементам ковариантного спинора (расположенных в строчку), есть тоже спинор, называемый *комплексно-сопряженным спинором*. Поведение такого столбца при преобразовании такое же, как и в равенстве (3.72), потому что в этом равенстве величины  $\delta\omega_{k4}$  и  $\delta\omega_{ki}$  соответственно мнимы и вещественны. В общем случае компоненты спинора, обладающего такими свойствами, будут обозначаться через  $b_i$ ; по этой причине компоненты  $\psi_1$  и  $\psi_2$  величины  $\psi$  будут записываться как  $\psi_i$  и  $\psi_2$ . Очевидно, что существуют также такие спиноры  $a^i$ , что величина  $a_r b_i$  является инвариантом.

Легко видеть, что из ковариантного спинора  $a_r$  можно получить контравариантный спинор  $a^r$ , если положить

$$a^1 = a_2, \quad a^2 = -a_1. \quad (3.75 \text{ а})$$

Аналогично, спинор (строчка) с элементами  $a^i$  задается равенствами

$$a^i = a_i, \quad a^{\dot{2}} = -a_1 \quad (3.75 \text{ б})$$

причем  $a^i a_i$  — инвариант.

При пространственных вращениях  $\psi^r$  и  $\psi_i$  преобразуются одинаково, что можно видеть, если в (3.72) и (3.73) положить  $\delta\omega_{k4} = 0$ . Те же самые равенства показывают, что при непрерывном преобразовании Лоренца величины  $\psi^r$  и  $\psi_i$  преобразуются независимо.

Последнее утверждение не имеет места в случае пространственных отражений. В самом деле, в смысле равенства (3.26) пространственные отражения характеризуются матрицей

$$\Lambda = i \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Это приводит к перемене мест  $\psi^r$  и  $\psi_i$  (отвлекаясь от множителя  $i$ ). С другой стороны, отражения времени характеризуются

матрицей

$$\Lambda = i \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

которая осуществляет преобразование

$$\psi_r \rightarrow -i\psi_r, \quad \psi^r \rightarrow i\psi^r. \quad (3.78)$$

В общем случае, когда мы имеем дело с преобразованиями, содержащими также пространственные отражения, нельзя рассматривать  $\psi$  как величину, состоящую из двух спиноров; полный вектор  $(\psi^r, \psi_r)$  называется *ундором* [2].

Если пользоваться спинорами  $\psi_r$  и  $\psi^r$ , то волновое уравнение может быть записано в виде

$$\begin{aligned} -(I\partial_4 + i\sigma_k\partial_k) \begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{bmatrix} &= \kappa \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \\ -(I\partial_4 - i\sigma_k\partial_k) \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} &= \kappa \begin{bmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Эти выражения могут быть упрощены, если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_{k:rs} &\equiv [\sigma_k]_{rs}, \\ \sigma_k^{rs} &\equiv -[\sigma_k]_{rs}, \\ \sigma_{4:rs} &\equiv -i[L]_{rs}, \\ \sigma_4^{rs} &\equiv -i[L]_{rs}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

в которых  $[\sigma_k]_{rs}$  и  $[L]_{rs}$  обозначают  $(rs)$ -ые компоненты матриц  $\sigma_k$  и  $L$ . Положив

$$\begin{aligned} \partial_{rs} &\equiv \sigma_{\mu:rs}\partial_\mu, \\ \partial^{sr} &\equiv \sigma_\mu^{sr}\partial_\mu, \end{aligned} \quad (3.81)$$

можно записать волновое уравнение в виде

$$\begin{aligned} \partial^{sr}\psi_r &= i\kappa\psi^s, \\ \partial_{rs}\psi^s &= i\kappa\psi_r. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Ввиду того, что волновое уравнение инвариантно относительно преобразований Лоренца и  $\psi^s$  и  $\psi_r$  являются спинорами, ясно, что  $\partial_{rs}$  и  $\partial^{sr}$  преобразуются относительно своих индексов как спиноры соответствующего типа и являются спинорами 2-го ранга. Аналогично, (3.81) показывает, что величины  $\sigma_{\mu:rs}$  и  $\sigma_\mu^{sr}$  преобразуются как четырехвекторы относительно индекса  $\mu$  и как спиноры относительно индексов  $r$  и  $s$ . Рассмотрение величин  $\sigma_{\mu:rs}$  и других

связанных с ними элементов показывает

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu:rs} &= \sigma_{\mu:sr}, \\ \sigma_{\mu}^{rs} &= \sigma_{\mu}^{sr}.\end{aligned}\quad (3.83)$$

В этих равенствах величины  $\sigma_{\mu:rs}$  и  $\sigma_{\mu}^{rs}$  являются величинами, полученными из  $\sigma_{\mu}^{sr}$  и  $\sigma_{\mu:rs}$  по формулам (3.75 а) и (3.75 б). Из (3.81) видно, что величины  $\sigma_{\mu:rs}$  и  $\sigma_{\mu}^{sr}$  путем свертывания по индексу  $\mu$  преобразуют четырехвекторы в спиноры 2-го ранга.

### § 9. Псевдоспиноры

Как было показано в § 1, при пространственных отражениях функции Дирака преобразуются четырьмя различными способами:

$$\psi = \begin{cases} i\gamma_4\psi & (A), \\ -i\gamma_4\psi & (B), \\ \gamma_4\psi & (C), \\ -\gamma_4\psi & (D). \end{cases}\quad (3.84)$$

Преобразование (A) в деталях описывается с помощью выражения (3.26). В § 3 было показано, что при пространственных отражениях величины  $\psi$  и  $\psi'$  ведут себя по-разному, что находит свое выражение в преобразованиях (C) или (D). Другими словами,  $\psi'$  подчиняется правилу (C) или (D), когда  $\psi$  подчиняется (D) или (C) соответственно, и  $\psi'$  подчиняется правилу (A) или (B), когда  $\psi$  подчиняется (A) или (B) соответственно. Так как в теории Майорана используется линейная комбинация из  $\psi$  и  $\psi'$ , то лоренцова инвариантность теории требует, чтобы  $\psi$  и  $\psi'$  преобразовывались при преобразованиях Лоренца одинаково. Поэтому в теории Майорана  $\psi$  должно подчиняться (A) или (B). Как будет видно из дальнейшего, физические величины содержат пары  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  в виде выражений ( $\bar{\psi}^a O \psi^b$ ), в которых через  $O$  обозначены произведения матриц  $\gamma_{\mu}$ . Равенства (3.84) показывают, что, когда  $\psi^a$  и  $\psi^b$  описывают частицы одного и того же рода ( $a=b$ ), не существует различия между правилами (A), (B), (C) и (D). С другой стороны, когда  $\psi^a$  и  $\psi^b$  описывают частицы различных типов ( $a \neq b$ ), четыре правила (3.84) приводят к разным результатам, потому что  $\psi^a$  и  $\psi^b$  могут различным образом преобразовываться при пространственных отражениях. Волновые функции полей типов (A), (B), (C) и (D) мы будем обозначать через  $\psi_A$ ,  $\psi_B$ ,  $\psi_C$  и  $\psi_D$ . Волновые функции  $\psi_B$ ,  $\psi_C$ ,  $\psi_D$  называются псевдоспинорами, в то время как  $\psi_A$  является спинором [17]<sup>1)</sup>. Таким образом, преобразование величин  $\bar{\psi}_A O \psi_B$  и  $\bar{\psi}_C O \psi_D$  при пространственных отражениях

<sup>1)</sup> Некоторые авторы называют  $\psi_C$  спинором, а  $\psi_A$ ,  $\psi_B$ ,  $\psi_D$  — псевдоспинорами.

отличается от преобразования величины  $\bar{\psi}_A O \psi_A$ . Нетрудно видеть, что отражения времени приводят к аналогичным результатам.

Теперь мы продемонстрируем на примере  $\beta$ -распада физическую важность введения псевдоспиноров.

Взаимодействия, имеющие место при  $\beta$ -распаде, подробно рассмотрены в гл. 7, пример 8. Сейчас мы рассмотрим только скалярную связь

$$(\bar{\psi}^P \psi^N) (\bar{\psi}^e \psi^{\nu}), \quad (3.85a)$$

где  $\psi^P, \psi^N, \psi^e$  и  $\psi^{\nu}$  — волновые функции соответственно протона, нейтрона, электрона и нейтрино.

Если функции  $\psi^P, \psi^N, \psi^e$  и  $\psi^{\nu}$  принадлежат к одному и тому же типу в смысле (3.84), то выражение (3.85 а) инвариантно относительно пространственных отражений. С другой стороны, если  $\psi^P, \psi^N$  и  $\psi^e$  принадлежат к типу (А), а  $\psi^{\nu}$  принадлежит к типу (В), то нельзя выражение (3.85 а) принять в качестве лоренц-инвариантного взаимодействия. В этом случае вместо (3.85 а) можно взять следующее лоренц-инвариантное взаимодействие

$$(\bar{\psi}^P \psi^N) (\bar{\psi}^e \gamma_5 \psi^{\nu}). \quad (3.85b)$$

Это показывает, что взаимодействия псевдоспинорных полей отличаются от обычных взаимодействий.

Если бы схема  $\beta$ -распада имела вид

$$N \rightarrow P + e + \nu, \quad (3.86)$$

то для обратного процесса мы имели бы схему

$$P \rightarrow N + e' + \nu'. \quad (3.87)$$

В этой схеме  $e'$  и  $\nu'$  означают соответственно позитрон и антинейтрино. Так как масса нейтрона больше массы протона, то процесс (3.87) запрещен законом сохранения энергии. Однако процесс (3.87) может быть индуцирован внешним полем. Примером такого процесса является испускание позитронов ядрами.

Теперь рассмотрим следующий процесс:

$$P \rightarrow N' + e' + \nu' \quad (N' — антинейтрон). \quad (3.88)$$

Этот процесс индуцирует процесс  $P + N \rightarrow e' + \nu'$  и должен был бы привести к нестабильности ядер. С другой стороны, процесс (3.87) индуцирует процесс  $P + N' \rightarrow e' + \nu'$ , который совместим со стабильным состоянием ядер, потому что в ядрах мы имеем  $N$ , а не  $N'$ . В связи с этим процесс (3.88) необходимо отбросить.

Если мы хотим иметь процесс (3.87), а не (3.88), то можно поступить следующим образом. Выберем  $\psi^N$  типа (С) или типа (D), тогда  $\psi^N$  и  $\psi^{\nu}$  при пространственных отражениях будут подчиняться различным законам преобразования и поэтому можно

выбрать взаимодействие, которое разрешает процесс (3.87) и запрещает процесс (3.88)<sup>1)</sup>. Отсюда видно, что свойства преобразования спиноров при пространственных отражениях и отражениях времени дают широкий простор для объяснения различных взаимопревращений частиц.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ahrons T., Feinberg E., Phys. Rev., **86**, 64 (1952).
2. Belinfante R. J., Theory of Heavy Quanta, 1939.
3. Dirac P. A. M., Principles of Quantum Mechanics (см. перевод второго издания: П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, М.—Л., 1937).
4. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A117**, 610 (1928).
5. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A118**, 351 (1928).
6. Dirac P. A. M., Proc. Phys. Soc., **A126**, 130; **A133**, 60 (1931).
7. Fireman E. L., Schwarzer D., Phys. Rev., **86**, 451 (1952).
8. Furry, Phys. Rev., **56**, 1184 (1939).
9. Foldy L. L., Wouthuysen S. A., Phys. Rev., **78**, 29 (1950).
10. Klein O., Zs. f. Phys., **52**, 157 (1929).
11. Majorana E., Nuovo Cimento, **14**, 171 (1937).
12. McCarthy, Phys. Rev., **90**, 853 (1953).
13. Pauli W., Inst. H. Poincaré Ann., **6**, 109 (1936).
14. Racah G., Nuovo Cimento, **14**, 322 (1937).
15. Sakata S., Soryushironkenkyu (1955).
16. Tani S., Prog. Theor. Phys., **6**, 267 (1951).
17. Yang C. N., Tiomno J., Phys. Rev., **79**, 495 (1950).
- 18\*. Cowan C. L., Harrison F. B., Langer L. M., Reines F., Nuovo Cimento, **3**, 649 (1956).
- 19\*. Reines F., Cowan C., Nature, **178**, 446 (1956) [см. перевод: Успехи физ. наук, **62**, вып. 4, 391 (1957)].

<sup>1)</sup> Однако это не единственная возможность запрещения процесса (3.88).

# Общий вид релятивистского волнового уравнения (I)

## § 1. Спиноры

В предыдущей главе нами были введены спиноры  $a_r, a^r, b_s, b^s$ . Теперь мы обсудим их общие свойства [7, 18]. Формулы (3.75 а) и (3.75 б) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} a^r &= \varepsilon^{rs} a_s, & a_s &= \varepsilon_{sr} a^r, \\ b^r &= \varepsilon^{rs} a_s, & b_s &= \varepsilon_{sr} a^r, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где использованы обозначения

$$[\varepsilon^{rs}] = [\varepsilon^{rs}] = -[\varepsilon_{rs}] = -[\varepsilon_{rs}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon^{rs} = -\varepsilon^{sr}, \quad \varepsilon_{rs} = -\varepsilon_{sr}, \quad \varepsilon^{rs} = -\varepsilon^{sr}, \quad \varepsilon_{rs} = -\varepsilon_{sr}, \quad (4.3 а)$$

$$\varepsilon^{rs} \varepsilon_{ts} = -\delta_{tr}, \quad \varepsilon^{rs} \varepsilon_{us} = -\delta_{ur}, \quad (4.3 б)$$

$$\varepsilon^{rs} \varepsilon^{ts} = \varepsilon_{rs} \varepsilon_{ts} = \delta_{tr}, \quad \varepsilon_{rs} \varepsilon_{us} = \varepsilon_{rs} \varepsilon_{us} = \delta_{ur}, \quad (4.3 в)$$

$$\varepsilon^{rs} \varepsilon^{st} = \varepsilon_{rs} \varepsilon_{st} = \delta_{rt} - \delta_{rs} \delta_{st}. \quad (4.3 г)$$

Как было показано в гл. 3, величины  $a_r, a^r$  и  $b_s, b^s$  инвариантны относительно непрерывных преобразований Лоренца.

Из (4.1) следуют равенства

$$a^s b_s = -a_s b^s, \quad a^s b_s = -a_s b^s, \quad (4.4)$$

которые приводят к соотношению

$$a^s a_s = 0. \quad (4.5)$$

Из (4.3 г) следует

$$a^s b_s c_t + a_s b_t c^s + a_t b^s c_s = a^s b^r c^u (\varepsilon_{vr} \varepsilon_{tu} + \varepsilon_{uv} \varepsilon_{tr} + \varepsilon_{tv} \varepsilon_{ru}) = 0. \quad (4.6)$$

Соотношения (4.5) и (4.6) остаются справедливыми в том случае, когда нижние и верхние индексы без точек заменяются соответствующими индексами с точками. Как было показано в гл. 3, переход к комплексно-сопряженному спинору осуществляется переходом от индексов без точек к индексам с точками и одновременным снятием точек у тех индексов, у которых они были.

Величины  $a_{\dot{u} \dot{w} \dots}^{r s \dots}$ , которые при непрерывном лоренцовом преобразовании ведут себя так же, как произведения  $(a^r a^s, \dots, b_{\dot{u}} b_{\dot{w}}, \dots)$ , называются спинорами ранга  $n$ , причем  $n$  — число верхних и нижних индексов. Индексы можно поднимать и опускать по правилу (4.1), например,

$$a^{12} = a_2^2 = -a_1^1.$$

Ввиду того что  $a_{\dot{u} \dot{w} \dots}^{r s \dots}$  ведет себя при преобразовании так же, как  $(a^r a^s, \dots, b_{\dot{u}} b_{\dot{w}}, \dots)$ , и величина  $a_s a^s$  является инвариантом, можно понижать порядок спинора путем свертывания по индексам. Например, произведение  $a_s b^{sr}$  может быть сведено к спинору 2-го ранга путем свертывания по одному из индексов

$$a_{s1} b^{1r} = c_s^r. \quad (4.6)$$

Как показано в гл. 3, величины  $\sigma_{\mu}^{rs}$  относительно верхних индексов  $(rs)$  обладают спинорными свойствами, поэтому верхние индексы в них могут быть опущены по правилу (4.1), в результате чего получаются величины  $\sigma_{\mu, s}^r$ ,  $\sigma_{\mu, \dot{r}}^s$  и  $\sigma_{\mu, \dot{r} s}$ .

Из спинора 2-го ранга  $a_r^s$  с помощью  $\sigma_{\mu, s}^r$  можно получить вектор  $a_{\mu}$  по следующему правилу:

$$a_{\mu} = \frac{1}{2} \sigma_{\mu, s}^r a_r^s, \quad (4.7a)$$

так как  $\sigma_{\mu, s}^r$  обладает по индексу  $\mu$  векторными свойствами.

Если (4.7a) расписать подробнее, то получаются равенства

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} (a_{11} + a_{12}), \\ a_2 &= \frac{1}{2i} (a_{21} - a_{12}), \\ a_3 &= \frac{1}{2} (a_{11} - a_{22}), \\ a_4 &= \frac{i}{2} (a_{11} + a_{22}). \end{aligned} \quad (4.7b)$$

В общем случае из спинора ранга  $2n$  можно получить тензор ранга  $n$  по следующей формуле:

$$a_{\mu_1, \dots, \mu_n} = \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} \sigma_{\mu_i, s_i}^{\dot{r}_i} \right) a_{\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_n}^{s_1, \dots, s_n} \quad (4.8a)$$

$$a_{\mu_1, \dots, \mu_n} = (-1)^n \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{2} \sigma_{\mu_i}^{s_i \dot{r}_i} \right) a_{s_1, \dots, s_n \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_n}. \quad (4.8b)$$

Из (3.80) можно вывести соотношения

$$\sigma_{\mu, s}^r \dot{\sigma}_{\nu, r}^s = -\sigma_{\mu, rs} \dot{\sigma}_{\nu}^{sr} = \text{Sp}(\dot{\sigma}_{\mu} \sigma_{\nu}) = 2\delta_{\mu\nu}, \quad (4.9a)$$

$$\sigma_{\mu}^{rs} \dot{\sigma}_{\nu, su} + \sigma_{\nu}^{rs} \dot{\sigma}_{\mu, su} = -(\sigma_{\mu} \sigma_{\nu} + \sigma_{\nu} \sigma_{\mu})_{ru} = -2\delta_{\mu\nu} \delta_{ru}, \quad (4.9б)$$

$$\sigma_{\mu, ur} \dot{\sigma}_{\nu}^{rs} + \sigma_{\nu, ur} \dot{\sigma}_{\mu}^{rs} = -2\delta_{\mu\nu} \dot{\delta}_{ur}^s, \quad (4.9в)$$

$$\sigma_{\mu, rs} \dot{\sigma}_{\mu, uv} = \sigma_{\mu}^{rs} \sigma_{\mu}^{uv} = 2(\delta_{ru} \delta_{vs} - \delta_{rs} \delta_{uv}), \quad (4.9г)$$

в которых введено обозначение

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{для } r=s, \\ 0 & \text{для } r \neq s. \end{cases}$$

Соотношение (4.9г) приводит к равенствам

$$\sigma_{\mu}^{rs} \sigma_{\mu}^{uv} + \sigma_{\mu}^{us} \sigma_{\mu}^{rv} = 0, \quad (4.10a)$$

$$\sigma_{\mu, rs} \dot{\sigma}_{\mu, uv} + \sigma_{\mu, us} \dot{\sigma}_{\mu, rv} = 0, \quad (4.10б)$$

$$\sigma_{\mu, r}^s \dot{\sigma}_{\mu, u}^{vw} + \sigma_{\mu, u}^s \dot{\sigma}_{\mu, r}^{vw} = 0 \quad (4.10в)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu s}^r \dot{\sigma}_{\mu, u}^p &= 2\varepsilon^{rv} \varepsilon^{pw} (\sigma_{\mu, vs} \dot{\sigma}_{\mu, uv}) = 2\varepsilon^{rv} \varepsilon^{pw} (\delta_{vs} \dot{\delta}_{uv} - \delta_{vs} \dot{\delta}_{uv}) = \\ &= 2\varepsilon^{rv} \varepsilon^{pw} \dot{\delta}_{us} - 2\varepsilon^{rs} \varepsilon^{pu} = 2\dot{\delta}_{rp} \dot{\delta}_{us} - 2(\dot{\delta}_{rp} \dot{\delta}_{us} - \delta_{ru} \dot{\delta}_{su}) = \\ &= 2\dot{\delta}_{ru} \dot{\delta}_{sp}^s, \end{aligned} \quad (4.10г)$$

где учтены соотношения (4.3в) и (4.3г).

Используя (4.8) и (4.10г), можно из тензора ранга  $n$  получить спинор ранга  $2n$  по следующей формуле:

$$a_{r_1, \dots, r_n}^{s_1, \dots, s_n} = \prod_{i=1}^n (\sigma_{\mu_i r_i}^{s_i}) a_{\mu_1, \dots, \mu_n}. \quad (4.11)$$

Из (4.9в) и (4.11) получаются равенства

$$\begin{aligned} a_{ur} a^{wr} &= \sigma_{\mu, ur} \dot{\sigma}_{\nu}^{wr} a_{\mu} a_{\nu} = \frac{1}{2} (\sigma_{\mu, ur} \dot{\sigma}_{\nu}^{wr} + \sigma_{\nu, ur} \dot{\sigma}_{\mu}^{wr}) a_{\mu} a_{\nu} = \\ &= -a_{\mu} a_{\mu} \dot{\delta}_{ur}^{wv} \end{aligned} \quad (4.12a)$$

и

$$a^{st} a_{rt} = -a_{\mu} a_{\mu} \dot{\delta}_{st}. \quad (4.12б)$$

В частности,

$$\partial_{ur} \dot{\delta}^{wr} = -\square \dot{\delta}_{uv}^w, \quad (4.12в)$$

$$\partial^{sr} \dot{\delta}_{rt} = -\square \dot{\delta}_{st}. \quad (4.12г)$$

Кососимметричный спинор  $a^{rs}$  ( $a^{rs} = -a^{sr}$ ) имеет только одну независимую компоненту

$$a^{12} = -a^{21} = \frac{1}{2} a_r^r, \quad (4.13a)$$



которая с учетом (4.1) может быть записана в виде

$$a^{rs} = \frac{1}{2} \varepsilon^{rs} a_r^t \quad (4.136)$$

Равенство (4.136) показывает что величина  $a^{rs}$  инвариантна относительно непрерывного преобразования Лоренца.

Из двух симметричных спиноров 2-го ранга  $a_{\dot{r}\dot{u}}$  и  $a^{rt}$  можно получить кососимметричный тензор с помощью формулы

$$a_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} [\sigma_{\mu}^{sr} \sigma_{\nu, s}^{\dot{u}} a_{\dot{r}\dot{u}} - \sigma_{\mu, r\dot{v}} \sigma_{\nu, t}^{\dot{r}} a^{st}]. \quad (4.14a)$$

С помощью (4.4) можно обнаружить, что этот тензор  $a_{\mu\nu}$  — кососимметричный. Формула (4.14a) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} a_{\dot{r}\dot{u}} &= \frac{1}{2} \sigma_{\mu, r\dot{t}} \sigma_{\nu, \dot{u}}^{\dot{t}} a_{\mu\nu}, \\ a^{st} &= \frac{1}{2} \sigma_{\mu, r}^{\dot{v}} \sigma_{\nu}^{\dot{r}} a_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.146)$$

ибо использование (4.9a) и (4.9б) дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_{\mu, r\dot{t}} \sigma_{\nu, \dot{u}}^{\dot{t}} a_{\mu\nu} &= \frac{1}{8} [\sigma_{\mu, r\dot{t}} \sigma_{\nu, \dot{u}}^{\dot{t}} \sigma_{\mu}^{sp} \sigma_{\nu, s}^{\dot{q}} a_{\dot{p}\dot{q}} - \sigma_{\mu, r\dot{t}} \sigma_{\nu, \dot{u}}^{\dot{t}} \sigma_{\mu, \dot{w}v} \sigma_{\nu, t}^{\dot{w}} a^{st}] = \\ &= a_{\dot{r}\dot{u}} + \frac{1}{4} \sigma_{\mu, r\dot{t}} \sigma_{\nu, \dot{u}}^{\dot{t}} a^{st} = a_{\dot{r}\dot{u}} + \frac{1}{8} (\sigma_{\mu, r\dot{t}} \sigma_{\nu, \dot{u}}^{\dot{t}} + \sigma_{\mu, r\dot{v}} \sigma_{\nu, \dot{u}}^{\dot{v}}) a^{st} = a_{\dot{r}\dot{u}}. \end{aligned}$$

Преобразование (4.146) можно проиллюстрировать на примере кососимметричного тензора

$$a_{\mu\nu} = \partial_{\mu} a_{\nu} - \partial_{\nu} a_{\mu}. \quad (4.15a)$$

Равенства (4.146) дают выражения

$$\begin{aligned} a_{\dot{r}\dot{u}} &= \frac{1}{2} (\partial_{r\dot{t}} a_{\dot{u}}^{\dot{t}} + \partial_{\dot{u}t} a_r^{\dot{t}}), \\ a^{st} &= \frac{1}{2} (\partial^{\dot{v}r} a_r^{\dot{t}} + \partial^{\dot{r}t} a_r^{\dot{v}}), \end{aligned} \quad (4.156)$$

в которых  $a_{\dot{u}}^{\dot{t}}$  — спинор, полученный из вектора  $a_{\mu}$  по формуле (4.11). Если  $a_{\dot{u}}^{\dot{t}}$  удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \partial_{r\dot{t}} a_{\dot{u}}^{\dot{t}} &= \partial_{\dot{u}t} a_r^{\dot{t}}, \\ \partial^{\dot{v}r} a_r^{\dot{t}} &= \partial^{\dot{r}t} a_r^{\dot{v}}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

то (4.156) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} a_{\dot{r}\dot{u}} &= \partial_{r\dot{t}} a_{\dot{u}}^{\dot{t}}, \\ a^{st} &= \partial^{\dot{v}r} a_r^{\dot{t}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Из (4.1) и (4.16) можно получить соотношения

$$\partial_{;r} a^{rt} = \partial_{;r} \epsilon^{rn} a'_u = \partial_{;nt} \epsilon^{rn} a'_r = -\partial_{;nt} \epsilon^{nr} a'_r = -\partial_{;nt} a^{nt},$$

которые приводят к равенству

$$\partial_{;r} a^{rt} = 0, \quad (4.18a)$$

эквивалентному уравнению

$$\partial_{;\mu} a_{\mu} = 0, \quad (4.18б)$$

что показывается с помощью (4.9a) и (4.11). Из (4.12в), (4.12г) и (4.17) получается

$$\begin{aligned} \partial^{\sigma r} a_{r\mu} &= -\square a_{\mu}^{\sigma}, \\ \partial_{;r} a^{\sigma t} &= -\square a_r^{\sigma}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

## § 2. Преобразование Лоренца

Преобразование Лоренца есть линейное преобразование, при котором остается инвариантным выражение

$$x_{\mu} x_{\mu} = x_k x_k - t^2.$$

Преобразования Лоренца составляют группу [20]. Это следует из того обстоятельства, что линейные преобразования

$$'x_{\mu} = a_{\mu\nu} x_{\nu}, \quad (4.20)$$

чтобы быть преобразованиями Лоренца, должны обладать следующими свойствами:

$$|a_{\mu\nu}| = \pm 1, \quad (4.21a)$$

$$a_{\mu\nu} a_{\nu\sigma} = \delta_{\mu\sigma}. \quad (4.21б)$$

В частности, при  $\nu = \sigma = 4$

$$a_{\mu 4} a_{\mu 4} = 1. \quad (4.21в)$$

Ввиду того, что  $a_{k4}$  и  $a_{44}$  соответственно мнимое и вещественное, равенство (4.21в) показывает, что

$$a_{44}^2 \geq 1,$$

и, таким образом, либо

$$a_{44} \geq 1, \quad (4.22a)$$

либо

$$a_{44} \leq -1. \quad (4.22б)$$

Из (4.21a) видно, что существуют преобразования двух родов. Невозможно найти преобразования, характеризующиеся положительным знаком, которые были бы произвольно близки к преобразованиям, характеризующимся отрицательным знаком. То же самое

справедливо и в отношении двух случаев (4.22a) и (4.22б). Поэтому можно сказать, что группа преобразований Лоренца состоит из четырех частей:

$$\text{Преобразования Лоренца} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_+ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_+^{\pm} \quad a_{44} \geq 1, \quad |a_{\mu\nu}| = 1, \\ \mathbf{L}_-^{\pm} \quad a_{44} \leq -1, \quad |a_{\mu\nu}| = 1, \end{array} \right. \\ \mathbf{L}_- \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_+^{\pm} \quad a_{44} \geq 1, \quad |a_{\mu\nu}| = -1, \\ \mathbf{L}_-^{\pm} \quad a_{44} \leq -1, \quad |a_{\mu\nu}| = -1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Первая часть состоит из элементов, непрерывно связанных с единственным элементом и образующих группу; эта часть обычно называется непрерывной группой Лоренца, или  $\mathbf{L}_+^{\pm}$ -группой. Произведение каждого элемента  $\mathbf{L}_+^{\pm}$  на любой элемент  $\mathbf{L}_+^{\pm}$ ,  $\mathbf{L}_-^{\pm}$  или  $\mathbf{L}_-^{\pm}$  приводит соответственно к  $\mathbf{L}_+^{\pm}$ ,  $\mathbf{L}_-^{\pm}$  или  $\mathbf{L}_-^{\pm}$ . Пространственные отражения и отражения времени принадлежат соответственно к  $\mathbf{L}_-^{\pm}$  и  $\mathbf{L}_-^{\pm}$ . Полная инверсия, являющаяся произведением пространственного отражения и отражения времени, принадлежит к  $\mathbf{L}_+^{\pm}$ . Отсюда, например, следует, что элемент из  $\mathbf{L}_-^{\pm}$  эквивалентен произведению пространственного отражения на некоторый элемент из  $\mathbf{L}_+^{\pm}$ . Комбинация  $\mathbf{L}_+^{\pm}$  с любой из других частей также является группой.

Теория элементарных частиц будет тогда лоренц-инвариантной теорией, когда каждый вид элементарных частиц описывается неприводимыми величинами в группе Лоренца. Приводимые величины рассматриваются как совокупность нескольких сортов элементарных частиц. Например, векторы и скаляры при преобразованиях Лоренца являются неприводимыми величинами. С другой стороны, поперечные волны и продольные волны векторного поля перемешиваются при преобразовании Лоренца и поэтому не могут описывать две элементарные частицы.

Теперь рассмотрим следующие произведения спиноров  $(k+l-2)$  порядка

$$P_{mn}^{(k,l)} = \frac{a_1^{k-m-1} a_2^m}{\sqrt{m!} (k-m)!} \frac{a_1^{l-n-1} a_2^n}{\sqrt{n!} (l-n)!},$$

$$0 \leq m \leq k-1, \quad 0 \leq n \leq l-1.$$

Эти произведения имеют  $(kl)$  компонент. Теория групп [20] показывает, что линейные комбинации этих компонент дают неприводимое представление непрерывной группы Лоренца. Если принять правило, что в случае пространственных отражений индексы с точками и без точек в  $P_{mn}^{(k,l)}$  должны заменяться соответственно индексами без точек и с точками, то можно сюда включить также группу Лоренца  $\mathbf{L}_+^{\pm}$ . Аналогично могут быть включены также преобразования Лоренца  $\mathbf{L}_+^{\pm}$  и  $\mathbf{L}_-^{\pm}$ , если в случае отражения времени воспользоваться правилами (3.78) для каждого спинорного индекса, так как полное отражение эквивалентно произведению

пространственного отражения на отражение времени. Таким образом, можно принять, что состояния элементарных частиц описываются линейными комбинациями величин  $P_{mn}$ , которые обозначаются через  $U(k, l)$  ( $\equiv a_{mn} P_{mn}^{(k, l)}$ ). Например, волновая функция скалярного поля обозначается через  $U(1, 1)$ , спинорного поля 1-го ранга — через  $U(2, 1)$  и  $U(1, 2)$ , а векторного поля — через  $U(2, 2)$ .

Если  $q$  — число линейно независимых компонент  $U(k, l)$  для покоящейся частицы с не равной нулю массой покоя  $\kappa$ , то спин  $S$  этой частицы можно определить равенством

$$q = 2S + 1. \quad (4.23)$$

Равенство (4.23) показывает, что покоящаяся элементарная частица может находиться в  $(2S + 1)$ -состояниях. В гл. 7 будет показано, что эти состояния соответствуют различным собственным значениям  $(S, S - 1, \dots, -S)$  проекции оператора спина на некоторое выделенное направление и что сумма орбитального и спинового момента количества движения сохраняется. Это было показано в гл. 3, § 4 для элементарной частицы со спином  $1/2$ .

*Пример. Волновое уравнение для частицы со спином 1*

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu, \\ \partial_\mu F_{\mu\nu} - \kappa^2 U_\nu &= 0, \end{aligned} \quad (4.24a)$$

в котором  $U_\mu$  — вектор, а  $\kappa$  — некоторая постоянная. Это есть уравнение Прока [13]. Уравнение (4.24a) эквивалентно уравнениям

$$\begin{aligned} (\square - \kappa^2) U_\mu &= 0, \\ \partial_\mu U_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (4.24b)$$

Отсюда видно, что  $\kappa$  обозначает массу частицы. Второе из уравнений (4.24b) показывает, что в системе покоя имеет место равенство  $U_4 = 0$ . Поэтому число независимых компонент равно трем и спин  $S = 1$ . Сравнивая (4.24a) и (4.24b) с (4.15a), (4.18b) и (4.19), мы видим, что

$$\partial_{rs} \varphi_a^s = i\kappa \chi_{ra}, \quad \partial^{rs} \chi_{su} = i\kappa \varphi_u^r,$$

где  $U_\mu$ ,  $F_{\mu\nu}$ ,  $\varphi_a^s$  и  $\chi_{ra}$  соответствуют  $a_\mu$ ,  $a_{\mu\nu}$ ,  $a_a^s$  и  $(1/i\kappa) a_{ra}$ . Эти уравнения являются уравнениями частицы со спином 1 в спинорном представлении. Уравнения (4.24a) при  $\kappa = 0$  принимают вид

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ \partial_\mu F_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (4.25a)$$

Совместно с условием Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu = 0 \quad (4.25b)$$

эти уравнения являются уравнениями Максвелла. Существенным различием между теориями с  $\kappa \neq 0$  и  $\kappa = 0$  является то, что в последнем случае (4.25б) нельзя вывести из (4.25а). Уравнения (4.25а) и (4.25б) эквивалентны уравнениям

$$\begin{aligned} \square A_\mu &= 0, \\ \partial_\mu A_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (4.25в)$$

Уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразования

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (4.26)$$

в котором  $\Lambda$  — скалярная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\square \Lambda = 0.$$

Это преобразование называется калибровочным преобразованием.

Мы видели, что частица со спином 1 может быть описана спинором 2-го ранга. В следующем параграфе будет показано, что частица со спином  $S$  может быть описана спинором ранга  $2S$ .

### § 3. Общий вид релятивистских волновых уравнений

Уравнения для элементарных частиц в общем случае мы выведем путем обобщения спинорного уравнения (3.82), относящегося к частицам со спином  $1/2$ , для произвольного спина.

Уравнения (3.82) для спиноров ранга  $n$  могут быть обобщены следующим образом [1,4,5]:

$$\begin{aligned} \partial_{rs} \varphi_{\dot{u}\dots}^{st\dots} &= ix \chi_{r\dot{u}\dots}^t \dots, \\ \partial^{vs} \chi_{s\dot{u}\dots}^t \dots &= ix \varphi_{\dot{u}\dots}^{vt\dots} \dots \end{aligned} \quad (4.27)$$

Из (4.27), (4.12в) и (4.12г) получаются уравнения

$$\begin{aligned} (\square - \kappa^2) \varphi_{\dot{u}\dots}^{st\dots} &= 0, \\ (\square - \kappa^2) \chi_{r\dot{u}\dots}^t \dots &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Отсюда видно, что для релятивистских волновых уравнений условие Клейна — Гордона (см. гл. 2) выполнено.

Теперь покажем, что если  $\varphi_{\dot{u}\dots}^{st\dots}$  и  $\chi_{r\dot{u}\dots}^t \dots$  — симметричные спиноры ранга  $n$ , то с их помощью могут описываться частицы со спином  $(n/2)$ . Для частиц с не равной нулю массой покоя ( $\kappa \neq 0$ ) всегда можно выбрать такую лоренцову систему координат, в которой частица покоится, и переписать уравнение (3.81) в виде

$$\partial_{rs} = -\kappa \delta_{rs},$$

где учтено, что  $\partial_k \rightarrow 0$ ,  $\partial_4 \rightarrow (1/i) \kappa$ . Таким образом, в системе покоя имеет место равенство

$$\varphi_{\underline{a}\dots}^{rt\dots} = -i\chi_{\underline{r}\underline{a}\dots}^{t\dots},$$

которое приводит к соотношению

$$\varphi_{\underline{a}\dots}^{st\dots} = -i\chi_{\underline{s}\underline{a}\dots}^{t\dots} = -i\chi_{\underline{a}\underline{s}\dots}^{t\dots} = \varphi_{\underline{s}\dots}^{st\dots}.$$

Другими словами, величины  $\varphi_{\underline{a}\dots}^{st\dots}$  симметричны относительно индексов с точками и индексов без точек.

В системе покоя непрерывные преобразования Лоренца сводятся к пространственным вращениям. Поэтому в этом случае нет необходимости делать различия между индексами с точками и индексами без точек; с величиной  $\varphi_{\underline{a}\dots}^{st\dots}$  можно обращаться как с величиной

$$\varphi_{\underline{a}\dots}^{st\dots}.$$

В силу того, что каждый из верхних и нижних индексов может принимать два значения (1 и 2), число независимых компонент равно

$$\binom{n+2-1}{2-1} = 2 \binom{n}{2} + 1. \quad (4.29)$$

Равенства (4.23) и (4.29) показывают, что (4.24а) и (4.24б) относятся к частицам со спином  $S = n/2$ .

Если число индексов с точками и число индексов без точек в выражении для  $\varphi_{\underline{a}\dots}^{st\dots}$  равно соответственно  $k - 1$  и  $l - 1$  (где

$k + l - 2 = n$ ), то число аналогичных индексов в выражении для

$\chi_{\underline{r}\underline{a}\dots}^{t\dots}$  равно соответственно  $k$  и  $l - 2$ . Принимая  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

получаем  $n (= 2S)$  различных теорий элементарных частиц со спином  $S$ . Обозначим  $\chi_{\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_n}$  и  $\varphi_{\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_{n-1}}$  ( $k = n, l = 2$ )

соответственно через  $\chi$  и  $\varphi$  и введем величины  $(\varphi, \chi)$ , ( $q = 1, \dots, n$ ), определенные следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_{\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_{n-q}}^{(q) t_{n-q+1}, \dots, t_n} &= -\frac{i}{\kappa} \partial^{t_{n-q+1}, \dot{r}_{n-q+1}} \varphi_{\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_{n-q+1}}^{(q-1) t_{n-q+2}, \dots, t_n}, \\ \chi_{\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_{n-q+1}}^{(q) t_{n-q+2}, \dots, t_n} &= \varphi_{\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_{n-q+1}}^{(q-1) t_{n-q+2}, \dots, t_n}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Отсюда видно, что все  $(\varphi, \chi)$  удовлетворяют уравнениям (4.24),

если этим уравнениям удовлетворяют  $(\varphi, \chi)$ . Другими словами, все  $n$  теорий ( $q = 1, 2, \dots, n$ ) эквивалентны между собой. Однако, как показано в § 2, при пространственном отражении величины

$(\varphi, \chi)$  заменяются величинами  $(\chi, \varphi)$ . Таким образом, в

общем преобразовании Лоренца надо принять во внимание величины  $(\varphi)$ ,  $\chi$ ,  $\psi$  с индексами  $(n-q+1)$  и  $(n-q+1)$ . Для полуцелого спина  $S$ , если  $q = (n+1)/2$ , величины  $(\varphi, \chi)$  и  $(\chi, \varphi)$  эквивалентны между собой. Отсюда видно, что для частиц со спином  $S$  существует  $S$  (для  $S = \text{целому числу}$ ) или  $(S + 1/2)$  (для  $S = \text{полуцелому числу}$ ) теорий.

В случае целого значения  $S$  можно пользоваться величинами

$$\begin{aligned} & (\varphi, \chi, \varphi, \chi): \\ & \begin{aligned} \varphi & \equiv \varphi_{\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_S}^{t_1, \dots, t_S}, & \varphi & \equiv \varphi_{\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_{S-1}}^{t_1, \dots, t_{S-1}, vt}, \\ \chi & \equiv \chi_{\dot{r}\dot{u}_2, \dots, \dot{u}_S}^{t_2, \dots, t_S}, & \chi & \equiv \chi_{\dot{r}\dot{u}_2, \dots, \dot{u}_S}^{(S+1), (S)} \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Так как величины  $\chi_{\dot{r}\dot{u}, \dots}^{(S)}$  и  $\varphi_{\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_S}^{(S+1), vt}$  симметричны соответственно относительно нижних индексов ( $\dot{r}\dot{u}$ ) и верхних индексов ( $vt$ ), то на основании (4.14а) и (4.8а) они могут быть преобразованы в тензор  $F_{[\mu, \nu] \mu_2, \dots, \mu_S}$ , который антисимметричен по индексам ( $\mu, \nu$ ). Принимая во внимание, что уравнения (4.17) имеют такой же вид, как уравнения (4.27) относительно нижних индексов ( $\dot{r}\dot{u}$ ) и верхних индексов ( $vt$ ), мы видим, что (4.27) может быть переписано в виде тензорных уравнений, аналогичных (4.15а) и (4.18б):

$$\partial_\nu U_{\mu\mu_2, \dots, \mu_S} - \partial_\mu U_{\nu\mu_2, \dots, \mu_S} = F_{[\nu\mu] \mu_2, \dots, \mu_S}, \quad (4.32a)$$

$$\partial_\mu U_{\mu\mu_2, \dots, \mu_S} = 0. \quad (4.33)$$

Так как на основании (4.28) имеет место равенство

$$(\square - x^2) U_{\mu_1, \dots, \mu_S} = 0, \quad (4.34)$$

то мы получаем

$$\partial_\nu F_{[\nu, \mu] \mu_2, \dots, \mu_S} = x^2 U_{\mu\mu_2, \dots, \mu_S}. \quad (4.32б)$$

Величины  $U_{\mu_1, \dots, \mu_S}$  составляют симметричный тензор, потому что  $\varphi_{\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_S}^{t_1, \dots, t_S}$  — симметричный спинор. Более того, используя (4.10в), можно показать

$$U_{\mu\mu\mu_3, \dots, \mu_S} = 0. \quad (4.32в)$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что с помощью (4.9) из (4.32а), (4.32б) и (4.32в) можно получить (4.27). Это показывает, что уравнения (4.32а), (4.32б) и (4.32в) дают теорию, эквивалентную (4.27), т. е. они дают теорию элементарных частиц со спином  $S$ . Это обстоятельство может быть также доказано путем подсчета числа независимых компонент  $U_{\mu_1, \dots, \mu_S}$  в системе покоя.

Уравнения (4.32а) — (4.32в) эквивалентны следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} (\square - x^2) U_{\mu_1, \dots, \mu_S} &= 0, \\ \partial_\mu U_{\mu_2, \dots, \mu_S} &= 0, \\ U_{\mu\mu_2, \dots, \mu_S} &= 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

В частности, в случае спина  $S=1$  уравнение (4.32в) теряет смысл, а уравнения (4.32а) и (4.32б) принимают вид

$$\begin{aligned} \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu &= F_{\mu\nu}, \\ \partial_\mu F_{\mu\nu} - x^2 U_\nu &= 0, \end{aligned} \quad (4.36а)$$

где  $F_{[\mu, \nu]}$  обозначено через  $F_{\mu\nu}$ . Следовательно, при  $S=1$  уравнения (4.35) записываются в форме

$$\begin{aligned} (\square - x^2) U_\mu &= 0, \\ \partial_\mu U_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (4.36б)$$

Мы видели, что волновые уравнения (4.27) для  $(\varphi, \chi)^{(S)}$  могут быть записаны в виде уравнений для тензоров  $(U_{\mu_1, \dots, \mu_S}, F_{[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_S]})$  и принимают форму (4.32а) — (4.32в). С другой стороны, (4.15), (4.17) и (4.30) показывают, что спиноры  $(\varphi, \chi)^{(S-1)}$  соответствуют тензорам

$$(F_{[\nu, \mu] \mu_2, \dots, \mu_S}, F_{[\nu_1, \mu_1], [\nu_2, \mu_2] \mu_3, \dots, \mu_S}).$$

Последние тензоры определяются равенствами

$$\begin{aligned} F_{[\nu_1, \mu_1] [\nu_2, \mu_2] \mu_3, \dots, \mu_S} &= \partial_{\nu_2} F_{[\nu_1, \mu_1] \mu_2 \mu_3, \dots, \mu_S} - \partial_{\mu_2} F_{[\nu_1, \mu_1] \nu_2 \mu_3, \dots, \mu_S} = \\ &= \partial_{\mu_2 \nu_2: \mu'} F_{[\nu_1, \mu_1] \mu' \mu_2, \dots, \mu_S}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

в которых

$$\partial_{\mu\nu: \mu'} \equiv \partial_\mu \delta_{\mu'\nu} - \partial_{\nu'} \delta_{\mu\mu}. \quad (4.38)$$

Таким путем можно показать, что соответственно  $S$  возможным формулировкам теории целого спина  $S$ , основывающимся на величинах  $(\varphi, \chi, \varphi, \chi)^{(q)}$   $(n-q+1)$   $(n-q+1)$ , имеется точно такое же число возможных тензорных теорий, вытекающих одна из другой путем соответствующего использования оператора  $\partial_{\mu\nu: \mu'}$ .

Величины  $\varphi_{\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_k}^{st_1, \dots, t_k}$  и  $\chi_{r\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_k}^{t_1, \dots, t_k}$  мы будем использовать для полужелого спина  $S = k + \frac{1}{2}$ , и не равной нулю массы покоя ( $x \neq 0$ ). Введем величины

$$\begin{aligned} \psi_{\dot{\nu}_1, \dots, \dot{\nu}_k}^S &= \prod_{i=1}^k \left( \frac{1}{2} \sigma_{\mu_i, t_i} \dot{a}_i \right) \varphi_{\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_k}^{st_1, \dots, t_k}, \\ \psi_{r: \dot{\nu}_1, \dots, \dot{\nu}_k}^S &= \prod_{i=1}^k \left( \frac{1}{2} \sigma_{\mu_i, t_i} \dot{a}_i \right) \chi_{r\dot{a}_1, \dots, \dot{a}_k}^{t_1, \dots, t_k}, \end{aligned} \quad (4.39)$$



в которых  $\phi_{\mu_1, \dots, \mu_k}^s$  и  $\psi_{i; \mu_1, \dots, \mu_k}$  — тензоры ранга  $k$  относительно индексов  $\mu_i$  и спиноры 1-го ранга относительно индексов  $(s, i)$ . Будем обозначать их через  $\phi_{\mu_1, \dots, \mu_k}$  с помощью определения

$$\phi_{\mu_1, \dots, \mu_k} \equiv \begin{pmatrix} \phi_{\mu_1, \dots, \mu_k}^1 \\ \phi_{\mu_1, \dots, \mu_k}^2 \\ \psi_{i; \mu_1, \dots, \mu_k} \\ \phi_{\mu_1, \dots, \mu_k}^3 \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

В случае  $k=0$  эти величины превращаются в  $\psi$  для спина  $1/2$ . В общем случае представление с помощью  $\phi_{\mu_1, \dots, \mu_k}$  является так называемым формализмом Рарита — Швингера [14]. Тензор  $\phi_{\mu_1, \dots, \mu_k}$  симметричен относительно индексов  $\mu_1, \dots, \mu_k$ .

Волновое уравнение (4.27) может быть записано в виде

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa) \phi_{\mu_1, \dots, \mu_k} = 0. \quad (4.41)$$

Величины  $\gamma_\mu$  есть матрицы с четырьмя строчками и четырьмя столбцами, удовлетворяющие соотношениям (3.2). Так как  $\psi_{a_1}^{st_1} \dots$  является симметричным спинором, равенство (4.5) приводит к соотношению

$$\psi_{su_1, \dots, u_k}^{st_2, \dots, t_k} = 0. \quad (4.42)$$

На основании этого соотношения, а также (3.68) и (3.80) можно показать, что

$$\gamma_\mu \phi^{\mu \mu_2, \dots, \mu_k} = 0. \quad (4.43)$$

С другой стороны, можно показать, что (4.27) может быть получено из (4.41) и (4.43). Поэтому (4.41) и (4.43) дают теорию частиц со спином  $S = k + 1/2$ .

Из (4.41) и (4.43) можно получить уравнения

$$(\square - \kappa^2) \phi_{\mu_1, \dots, \mu_k} = 0, \quad (4.44)$$

$$\partial_\mu \phi^{\mu \mu_2, \dots, \mu_k} = 0, \quad (4.45)$$

$$\phi_{\mu \mu_2, \dots, \mu_k} = 0. \quad (4.46)$$

Теперь рассмотрим элементарную частицу с нулевой массой покоя ( $\kappa=0$ ). Волновое уравнение (4.35) в случае  $\kappa=0$  принимает вид

$$\begin{aligned} \square A_{\mu_1, \dots, \mu_S} &= 0, \\ \partial_\mu A^{\mu \mu_2, \dots, \mu_S} &= 0, \\ A_{\mu \mu_2, \dots, \mu_S} &= 0, \end{aligned} \quad (4.47)$$

где  $A_{\mu_1, \dots, \mu_S}$  — симметричный тензор ранга  $S$ . Уравнения (4.47)

эквивалентны уравнениям

$$\begin{aligned} F_{[\nu, \mu] \mu_2, \dots, \mu_S} &= \partial_\nu A_{\mu \mu_2, \dots, \mu_S} - \partial_\mu A_{\nu \mu_2, \dots, \mu_S}, \\ \partial_\nu F_{[\nu, \mu] \mu_2, \dots, \mu_S} &= 0, \\ \partial_\mu A_{\mu \mu_2, \dots, \mu_S} &= 0, \\ A_{\mu \mu_2, \dots, \mu_S} &= 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Существенное отличие теории при  $\kappa \neq 0$  от теории при  $\kappa = 0$  заключается в том, что в последнем случае третье из уравнений (4.48) не может быть выведено из других уравнений.

Полагая в (4.48)  $S=1$ , получаем уравнения Максвелла, причем третье из уравнений (4.48) дает условие Лоренца:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\ \partial_\mu F_{\mu\nu} &= 0, \\ \partial_\mu A_\mu &= 0 \quad (\text{условие Лоренца}). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Определение спина, данное в § 2, нельзя использовать ввиду того, что при  $\kappa = 0$  не существует покоящейся системы координат. Поэтому в случае  $\kappa = 0$  мы определим спин как величину максимального собственного значения оператора спина, который будет введен в гл. 7, пример 1. Можно показать, что определенный таким образом спин равен рангу  $S$  тензора.

Теперь введем в рассмотрение симметричный тензор ранга  $S$

$$N_{\mu_1, \dots, \mu_S} = \partial_{\mu_1} C_{\mu_2, \dots, \mu_S} + \partial_{\mu_2} C_{\mu_1 \mu_3, \dots, \mu_S} + \dots + \partial_{\mu_S} C_{\mu_1, \dots, \mu_{S-1}}; \quad (4.50)$$

здесь величины  $C_{\mu_1, \dots, \mu_{S-1}}$  образуют симметричный тензор ранга  $(S-1)$ , удовлетворяющий уравнению (4.47). Таким образом, мы видим, что уравнения (4.47) инвариантны относительно преобразования

$$A_{\mu_1, \dots, \mu_S} \rightarrow A'_{\mu_1, \dots, \mu_S} = A_{\mu_1, \dots, \mu_S} + N_{\mu_1, \dots, \mu_S}. \quad (4.51)$$

Это преобразование называется калибровочным. Таким образом, теория элементарных частиц с нулевой массой инвариантна относительно калибровочных преобразований. Для частиц с  $\kappa \neq 0$  это утверждение не имеет места. Ввиду того, что различные представления, связанные калибровочным преобразованием, физически эквивалентны между собой, число независимых компонент волновых функций уменьшается на число независимых компонент величин  $N_{\mu_1, \dots, \mu_S}$ .

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в направлении оси  $x_3$   $\{k_\mu = (0, 0, k, ik)\}$ . Второе из уравнений (4.47) дает равенство

$$iA_{4\mu_2, \dots, \mu_S} = -A_{3\mu_2, \dots, \mu_S}. \quad (4.52)$$

Ввиду того, что  $A_{\mu_1, \dots, \mu_S}$  является симметричным тензором, число независимых соотношений, даваемых равенствами (4.52), равно

$$\binom{S-1+4-1}{S-1}.$$

С другой стороны, легко видеть, что в третьем уравнении (4.47) число соотношений, которые независимы от (4.52), равно

$$\binom{S-2+3-1}{S-1}.$$

Таким образом, учитывая, что  $A_{\mu_1, \dots, \mu_S}$  является симметричным тензором, получаем для числа независимых компонент следующее значение:

$$\binom{S+4-1}{S} - \binom{S+2}{S-1} - \binom{S}{S-2} = 2S + 1. \quad (4.53)$$

Поэтому число независимых компонент  $C_{\mu_1, \dots, \mu_{S-1}}$  равно  $2(S-1)+1$ , так как  $C_{\mu_1, \dots, \mu_{S-1}}$  также удовлетворяет уравнениям (4.47). Ввиду того, что представления, связанные калибровочным преобразованием (4.51), физически эквивалентны между собой, то, вычитая из (4.53) число независимых компонент  $C_{\mu_1, \dots, \mu_{S-1}}$ , получаем число независимых состояний

$$(2S+1) - (2S-1) = 2. \quad (4.54)$$

Это утверждение справедливо также для полуполого спина.

Примером теории с  $\kappa=0$  является теория электромагнитного поля. В этом случае уравнения Максвелла инвариантны относительно калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \\ \square \Lambda &= 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Легко видеть, что (4.55) является частным случаем (4.51). Более того, хорошо известно, что электромагнитные волны являются поперечными волнами с двумя независимыми компонентами. Этот факт согласуется с (4.54).

Таким образом, мы видели, что уравнения (4.27) являются возможными общими волновыми уравнениями, которые включают в качестве частных случаев уравнения Дирака и Максвелла. Однако ввиду того, что эти уравнения получены формальным обобщением уравнения Дирака, необходимо еще обсудить теоретическое обоснование такого обобщения. Более подробное обсуждение релятивистских волновых уравнений будет дано в гл. 5.

Пример. Формализм Рарита — Швингера для спина  $\frac{3}{2}$ .

Волновые уравнения для  $\phi_\mu$ , даваемые соотношениями (4.41) и (4.43), имеют вид

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + x) \phi_\nu = 0, \quad \gamma_\mu \phi_\mu = 0. \quad (4.56a)$$

Отсюда следует, что

$$(\square - x^2) \phi_\mu = 0, \quad \partial_\mu \phi_\mu = 0.$$

Можно показать, что уравнения (4.56a) эквивалентны уравнению

$$-\left[ (\gamma_\rho \partial_\rho + x) \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} (\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{3} \gamma_\mu (\gamma_\rho \partial_\rho - x) \gamma_\nu \right] \phi_\nu(x) = 0. \quad (4.56б)$$

В самом деле, умножая левую часть (4.56б) на  $\gamma_\mu$  или  $\partial_\mu$ , получаем соответственно

$$\frac{2}{3} \partial_\nu \phi_\nu - \frac{1}{3} x \gamma_\nu \phi_\nu = 0 \quad (4.56в)$$

и

$$x \partial_\mu \phi_\mu + \partial_\mu \gamma_\mu \left( \frac{2}{3} \partial_\nu \phi_\nu - \frac{1}{3} x \gamma_\nu \phi_\nu \right) = 0. \quad (4.56г)$$

Уравнения (4.56a) могут быть получены из (4.56б), (4.56в) и (4.56г). Подставляя

$$\Lambda_{\mu\nu}(\partial) = - \left[ (\gamma_\rho \partial_\rho + x) \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} (\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{3} \gamma_\mu (\gamma_\rho \partial_\rho - x) \gamma_\nu \right]$$

и выражение (2.8) в равенство (2.7), получаем [17]

$$d_{\mu\nu}(\partial) = - (\gamma_\rho \partial_\rho - x) \left[ \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu + \frac{1}{3x} (\gamma_\mu \partial_\nu - \gamma_\nu \partial_\mu) + \frac{2}{3x^2} \partial_\mu \partial_\nu \right] + \frac{1}{3x^2} (\square - x^2) [(\gamma_\mu \partial_\nu - \gamma_\nu \partial_\mu) + (\gamma_\rho \partial_\rho - x) \gamma_\mu \gamma_\nu]. \quad (4.56д)$$

#### § 4. Полуцелый спин и отрицательная энергия

Как показано в § 2 и 3, волновые функции для целого и полуцелого спинов есть  $U(k, l)$ , где сумма  $(k+l)$  — соответственно четное и нечетное числа. Сначала рассмотрим случай четной величины суммы  $(k+l)$  и введем следующие обозначения:

$$U(k, l) = \begin{cases} U^- & \text{для четных } k, l \\ U^+ & \text{для нечетных } k, l. \end{cases} \quad (4.57)$$

С помощью теоремы Клебша — Гордона легко показать, что произведение  $U(k, l) \times U(k', l')$  может быть представлено в виде линейной комбинации величин  $U(k'', l'')$ , в которых

$$\begin{aligned} k'' &= k + k' - 1, \quad k + k' - 3, \dots, |k - k'| + 1, \\ l'' &= l + l' - 1, \quad l + l' - 3, \dots, |l - l'| + 1. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} U^+U^+ &\doteq U^-U^- \doteq U^+, \\ U^+U^- &\doteq U^-, \end{aligned} \quad (4.59)$$

где символ  $\doteq$  означает тот же тип относительно ( $\pm$ ). Соотношение (4.59) показывает, что тензоры четного ранга являются величинами типа  $U^+$ , потому что они преобразуются подобно четному числу векторов  $U(2,2) \doteq U^-$ . Аналогично тензоры с нечетным рангом принадлежат к величинам типа  $U^-$ . В частности, вектор  $d_\mu$  принадлежит к типу  $U^-$ .

Дифференциальные релятивистские волновые уравнения первого порядка (см. гл. 2) имеют вид

$$\partial U^+ = U^-, \quad \partial U^- = U^+, \quad (4.60)$$

причем здесь мы приняли во внимание соотношения (4.59). В уравнениях (4.60) символ  $\partial$  означает оператор производной  $d_\mu$ . Легко видеть, что уравнения (4.60) инвариантны относительно преобразования

$$\begin{aligned} d_\mu &\rightarrow -d_\mu, \\ U^+ &\rightarrow U^+, \\ U^- &\rightarrow -U^-. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Следует отметить, что первое из преобразований (4.61) эквивалентно изменению направления всех осей координат. При этом преобразовании тензоры нечетного ранга меняют знак, а тензоры четного ранга остаются без изменения. Таким образом, мы видим, что тензоры нечетного ранга, образованные из волновых функций с целым спином, не могут иметь определенного знака. Плотность тока, которая будет введена в гл. 7, является примером тензора нечетного ранга.

В случае полуцелого спина введем обозначения

$$U(k, l) = \begin{cases} U^{+'} & k \text{ — нечетно, } l \text{ — четно} \\ U^{-'} & k \text{ — четно, } l \text{ — нечетно.} \end{cases} \quad (4.62)$$

Используя (4.58), получаем

$$\begin{aligned} U^{+'}U^{+'} &\doteq U^{-'}U^{-'} \doteq U^+, \\ U^{+'}U^{-'} &\doteq U^-, \end{aligned} \quad (4.63)$$

где количества  $U^\pm$  определены в (4.57). Равенства (4.63) приводят к волновым уравнениям

$$\begin{aligned} \partial U^{+'} &= U^{-'}, \\ \partial U^{-'} &= U^{+'}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Легко видеть, что (4.64) инвариантны относительно преобразований

$$\begin{aligned} d_\mu &\rightarrow -d_\mu, \\ U^{+'} &\rightarrow iU^{+'}, \\ U^{-'} &\rightarrow -iU^{-'}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

В преобразованиях (4.65) введен мнимый множитель  $i$ , потому что, как показывает (4.62), величиной, комплексно-сопряженной к  $U^+$ , является  $U^-$ , так что нельзя принять преобразования  $U^+ \rightarrow U^+$ ,  $U^- \rightarrow -U^-$ .

Из (4.63) можно видеть, что тензор четного ранга  $U^+$  и тензор нечетного ранга  $U^-$  имеют соответственно структуры  $(U^+U^+, U^-U^-)$  и  $(U^+U^-)$ . Ввиду того, что первый из указанных тензоров изменяет знак при преобразованиях (4.65), а второй знака не меняет, можно заключить, что тензоры четного ранга, сконструированные из волновых функций полуцелого спина, не имеют определенного знака. Ввиду того, что энергия, которую мы введем в гл. 7, определяется как пространственный интеграл от  $T_{44}$ , можно высказать следующую теорему.

*Энергия элементарных частиц с полуцелым спином является indefinitной, т. е. может принимать и положительные и отрицательные значения [9]. Состояния с отрицательной энергией в случае спина  $1/2$  могут служить иллюстрацией этой теоремы.*

Поэтому, чтобы избежать парадокса Клейна, необходимо в любом случае полуцелого спина пользоваться теорией дырок. Это обстоятельство требует, чтобы частицы полуцелого спина подчинялись статистике Ферми — Дирака. В дальнейшем в рамках квантовой теории поля эта теорема будет рассматриваться в гл. 6.

## § 5. Свойства известных элементарных частиц

В табл. 1 даны сведения о частицах, свойства которых хорошо известны.

Таблица 1

|                 | Фотон | Электрон $e$  | Протон $P$    | Нейтрон $N$   | Нейтритро | $\pi$ -мезон | $\mu$ -мезон  | $\pi^0$ -мезон |
|-----------------|-------|---------------|---------------|---------------|-----------|--------------|---------------|----------------|
| Заряд . . . . . | 0     | $\pm e$       | $+e$          | 0             | 0         | $\pm e$      | $\pm e$       | 0              |
| Спин . . . . .  | 1     | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | Полуцелый | 0            | $\frac{1}{2}$ | 0              |
| Масса . . . . . | 0     | $m$           | $1836 m$      | $1838 m$      | $\ll m$   | $276 m$      | $215 m$       | $266 m$        |

Определение спинов  $\pi$ - и  $\pi^0$ -мезонов обсуждается в гл. 10 и 13. Точно не известно, подчиняется ли протон уравнению Дирака (3.1). В пользу применимости уравнения Дирака к протону говорит распад  $\pi^0$ -мезона<sup>1)</sup>, хотя и не вполне определенно. Взаимодействия между указанными выше элементарными частицами обсуждаются в гл. 7.

<sup>1)</sup> Недавнее открытие антипротона, существование которого следовало из теории Дирака, также говорит в пользу применимости уравнения Дирака для описания движения свободного протона [21]. — *Прим. ред.*

Схема распада нейтронов,  $\pi^-$ ,  $\mu^-$  и  $\pi^0$ -мезонов и их времена жизни гласят:

$$\begin{aligned}
 N &\rightarrow P + e + \nu && \sim 12 \text{ мин.} \\
 \pi^- &\rightarrow \mu^- + (\text{легкая нейтральная частица}), && \sim 10^{-8} \text{ сек.} \\
 \mu^- &\rightarrow e^- + (\text{легкие нейтральные частицы, число кото-} && \sim 10^{-6} \text{ сек.} \\
 &\quad \text{рых} \geq 2), && \\
 \pi^0 &\rightarrow \gamma + \gamma && < 10^{-11} \text{ сек.}
 \end{aligned}$$

Существует большая вероятность поглощения отрицательных  $\pi^-$ -мезонов ядрами (см. гл. 7, пример 1). Это обстоятельство дает удобный метод определения знака заряда  $\pi^-$ -мезона. Следует отметить интересный факт, что между массой протона и массой нейтрона имеется небольшая разница —  $2,47 m$ , как это указано в приведенной выше табл. 1. Протон и нейтрон рассматриваются как различные состояния одной и той же частицы — нуклона (см. гл. 7, пример 10). С этой точки зрения интересной проблемой является объяснение разницы в массах протона и нейтрона. В силу того, что электромагнитное поле, которым окружен протон, дает вклад в его массу, как это показано в гл. 13, разницу в массах протона и нейтрона естественно приписать этому электромагнитному эффекту. Однако ввиду того, что современная квантовая теория поля для этой разницы масс дает бесконечный результат, в настоящее время точного решения этой проблемы не существует <sup>1)</sup>.

Недавно было открыто много новых частиц, которые названы  $\Lambda^-$ ,  $\theta^-$ ,  $k^-$ ,  $\tau^-$ -частицами и т. д. Их массы и схемы распада приведены в табл. 2 [11, 12, 15].

Таблица 2

|              | Масса           | Схема распада  | Время жизни, сек.         |
|--------------|-----------------|--|---------------------------|
| $\theta^0$   | $\sim 960 m$    | $\pi^+ + \pi^-$                                      | $\sim 1,5 \cdot 10^{-10}$ |
| $\tau^\pm$   | $\sim 960 m$    | $\pi^\pm + \pi^\pm + \pi^-$                          | $\sim 5 \cdot 10^{-9}$    |
| $k_{1,2}$    | $\sim 960 m$    | $\mu + ?$  | $\sim 10^{-8}$            |
| $k_{\pi 2}$  | $\sim 960 m$    | $\pi^\pm + \pi^0$                                    | $\sim 10^{-8}$            |
| $k_{\pi 3}$  | $\sim 960 m$    | $\mu + ? + ?$  | $\sim 10^{-8}$            |
| $k_{e 3}$    | $\sim 960 m$    | $e + ? + ?$  | $\sim 10^{-8}$            |
| $\Lambda^0$  | $2190 \pm 10 m$ | $P + \pi^-$  | $\sim 3 \cdot 10^{-10}$   |
| $\Sigma^\pm$ | $\sim 2325 m$   | $\begin{cases} n + \pi^\pm \\ P + \pi^0 \end{cases}$ | $\sim 5 \cdot 10^{-10}$   |
| $\Xi^-$      | $2570 m$        | $\Lambda^0 + \pi^-$                                  | $\sim 10^{-10}$           |

<sup>1)</sup> Теория  $S^-$ -мезона дает нужную величину разницы в массах, но ее заключение еще недостаточно определенное [16, 6, 2, 8]. Недавно новые попытки разрешить эту проблему были предприняты Вайскопфом [19], Фейнманом и Шпайзманом [3] и Петерманом [10].

Знаки „0“, „+“ и „—“ означают, что частица нейтральна, положительно или отрицательно заряжена, а знак „?“ означает, что свойства нейтральных частиц пока еще недостаточно выяснены. Кроме того, возможно, что в природе существуют многие, еще не открытые частицы (например, некоторые частицы не удалось пока наблюдать ввиду их малого времени жизни). Во всяком случае, очевидно, что взаимоотношения элементарных частиц, встречающихся в природе, не просты. Так, перед нами возникают многие вопросы. Сколько видов элементарных частиц существует в природе? Почему существуют именно эти частицы из бесконечного множества других, возможных в рамках современной квантовой теории поля? Каким образом можно выяснить взаимоотношения и связи элементарных частиц?

На эти вопросы должна ответить теория элементарных частиц; во всяком случае, исследование этих вопросов может привести нас к теории элементарных частиц, так же как исследование внутренних соотношений между атомами привело к выяснению их структуры и открытию квантовой механики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A155, 447 (1936).
2. Enatsu H., Prog. Theor. Phys., 6, 643 (1951).
3. Feynman R. P., Speisman G., Phys. Rev., 94, 500 (1954).
4. Fierz M., Helv. Phys. Acta, 12, 3 (1939).
5. Fierz M., Pauli W., Proc. Roy. Soc., A173, 211 (1939).
6. Kawabe R., Umezawa H., Prog. Theor. Phys., 4, 461 (1949).
7. Laporte O., Uhlenbeck G. E., Phys. Rev., 32, 1380 (1931).
8. Pais A., Verh. Kon. Ak. Amsterdam, 19 (1947).
9. Pauli W., Report for the Solvay Congress, 1939.
10. Petermann A., Helv. Phys. Acta, 27, 441 (1954).
11. Powell C. F., Report of the Internat. Phys. Conf. Copenhagen, 1952.
12. Powell C. F., Report of the Third Annual Rochester Conference on High Energy Physics, 1952.
13. Proca A., Compt. Rend., 202, 1420 (1936).
14. Rarita W., Schwinger J., Phys. Rev., 60, 61 (1941).
15. Report of the Fifth Rochester Conference, 1955.
16. Sakata S., Umezawa H., Prog. Theor. Phys., 5, 682 (1950).
17. Takahashi Y., Umezawa H., Prog. Theor. Phys., 9, 1 (1953).
18. Van der Waerden, Gött. Nachr., 100 (1929).
19. Weisskopf V. F., Phys. Rev. (1954).
20. Wigner E. P., Ann. of Math., 40, 149 (1939).
- 21.\* Chamberlain Q., Segrè E., Wiegand C., Ypsilanti T., Phys. Rev., 100, 947 (1955); [см. перевод: Проблемы современной физики, ИЛ, вып. 4, 157 (1956)].



# Общая теория релятивистских волновых уравнений (II)

## § 1. Общий вид релятивистского волнового уравнения

В предыдущей главе релятивистские волновые уравнения (4.27) были получены путем обобщения уравнений Дирака в спинорной форме (3.82). Сейчас мы проведем более подробное обсуждение релятивистских волновых уравнений с помощью методов, изложенных в гл. 2. Именно эти методы подвели теоретическую базу под уравнение Дирака. Как будет видно, теория Дuffина — Кеммера<sup>1)</sup> для частиц со спином 0 или 1 также является частным примером общих уравнений; эта теория будет изложена в § 2.

Как показано в гл. 2, релятивистское уравнение поля может быть записано в форме

$$(\beta_{\mu} \partial_{\mu} + \kappa) \psi = 0. \quad (5.1)$$

Предположим, что при преобразовании Лоренца

$$x'_{\mu} = a_{\mu\nu} x_{\nu} \quad (5.2)$$

волновая функция  $\psi$  преобразуется по линейному закону

$$\psi' = \Lambda \psi. \quad (5.3)$$

С помощью соображений, аналогичных использованным в гл. 3, можно показать, что лоренцова инвариантность уравнения (5.1) требует для величин  $\beta_{\mu}$  выполнения соотношений

$$\Lambda^{-1} \beta_{\mu} \Lambda = a_{\mu\nu} \beta_{\nu}. \quad (5.4)$$

В частности, для бесконечно малых преобразований Лоренца

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} + \delta\omega_{\mu\nu}, \\ \delta\omega_{\mu\nu} &= -\delta\omega_{\nu\mu} \end{aligned} \quad (5.5a)$$

матрица  $\Lambda$  имеет вид

$$\Lambda = 1 + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu}, \quad (5.5b)$$

где

$$S_{\nu\mu} = -S_{\mu\nu}. \quad (5.5в)$$

<sup>1)</sup> У автора теория Дuffина — Кеммера — Пэтью (Duffin — Kemmer — Petiau). — *Прим. ред.*

Подставляя (5.5б) и (5.5а) в (5.4), получаем

$$[\beta_{\mu}, S_{\lambda\nu}] = \delta_{\lambda\mu}\beta_{\nu} - \delta_{\nu\mu}\beta_{\lambda}. \quad (5.6)$$

В общем случае любой тензор в  $\beta$ -алгебре может быть представлен в виде произведения  $\beta_{\mu}$  и  $\delta_{\mu\nu}$  [6]. Так как равенство (5.6) показывает, что  $S_{\mu\nu}$  — тензор 2-го ранга, то из (5.4) получается соотношение

$$\Lambda^{-1}S_{\mu\nu}\Lambda = a_{\mu\rho}a_{\nu\sigma}S_{\rho\sigma}. \quad (5.7)$$

Подставляя (5.5а) и (5.5б) в (5.7), имеем

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = -\delta_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\rho}S_{\mu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} - \delta_{\nu\sigma}S_{\mu\rho}. \quad (5.8)$$

Можно показать [7], что существует только одна величина  $S_{\mu\nu}$ , которая удовлетворяет соотношениям (5.6) и (5.8). В самом деле, соотношение (5.6) показывает, что величина  $t_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}^{(1)} - S_{\mu\nu}^{(2)}$ , в которой  $S_{\mu\nu}^{(1)}$  и  $S_{\mu\nu}^{(2)}$  удовлетворяют (5.6) и (5.8), коммутирует с каждой  $\beta_{\mu}$  и тем самым со всеми величинами в  $\beta_{\mu}$ -алгебре. Таким образом имеем

$$[S_{\mu\nu}^{(1)}, S_{\rho\sigma}^{(1)}] - [S_{\mu\nu}^{(2)}, S_{\rho\sigma}^{(2)}] = [S_{\mu\nu}^{(1)}, t_{\rho\sigma}] + [t_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}^{(2)}] = 0.$$

С другой стороны, соотношение (5.8) приводит к равенству

$$[S_{\mu\nu}^{(1)}, S_{\mu\sigma}^{(1)}] - [S_{\mu\nu}^{(2)}, S_{\mu\sigma}^{(2)}] = -2t_{\nu\sigma},$$

которое показывает, что  $t_{\nu\sigma} = 0$ , так что  $S_{\mu\nu}^{(1)} = S_{\mu\nu}^{(2)}$ . Прямым вычислением не трудно показать, что  $S_{\mu\nu}$  для спина  $1/2$  [уравнение (3.24)] удовлетворяет уравнению (5.8).

Так как шпур  $(\beta_{\mu_1}, \dots, \beta_{\mu_s})$  обладает теми же свойствами, что и тензор с индексами  $(\mu_1, \dots, \mu_s)$ , то он может быть составлен из величин  $\delta_{\mu\nu}$ . Ввиду того, что с помощью величин  $\delta_{\mu\nu}$  невозможно сконструировать тензор нечетного ранга, получается, что шпур нечетного числа величин  $\beta_{\mu}$  равен нулю, т. е. (см. [6]):

$$\text{Sp}(\beta_{\mu_1}, \dots, \beta_{\mu_{2n+1}}) = 0. \quad (5.9а)$$

В частности,

$$\text{Sp}(\beta_{\mu}) = 0. \quad (5.9б)$$

Мы привели пример этой общей теоремы для спина  $1/2$  в гл. 3.

Введем в рассмотрение спиновые матрицы  $\sigma_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) с помощью формулы

$$\sigma_k = -iS_{lm} \quad (k, l, m = \text{цикл. } (1, 2, 3)). \quad (5.10)$$

Тогда из (5.8) следует

$$[\sigma_k, \sigma_l] = i\sigma_m \quad (k, l, m = \text{цикл. } (1, 2, 3)). \quad (5.11)$$

Примером<sup>1)</sup> применения (5.11) является соотношение (3.55), которое справедливо для частиц со спином  $\frac{1}{2}$ .

Соотношение (5.11) является соотношением коммутации для матриц момента количества движения. Поэтому  $\sigma_k$  обладает свойствами матриц момента количества движения и имеет собственные значения  $(f, f-1, \dots, -f)$ , где  $f$  равно либо целому, либо полуцелому [3]. Таким образом, характеристическое уравнение для  $\sigma_k$  имеет вид

$$(\sigma_k - f)(\sigma_k - f + 1) \dots (\sigma_k + f) = 0. \quad (5.12)$$

В общем случае представления матриц момента количества движения  $\sigma_k$ , удовлетворяющих (5.12), могут быть разложены на неприводимые представления  $D_{|f|}$ ,  $D_{|f-1|}$ ,  $\dots$  трехмерной группы вращения [13]; эти неприводимые представления соответствуют значениям  $|f|$ ,  $|f-1|$ ,  $\dots$  момента количества движения. Ввиду того, что в неприводимом представлении  $D_l$  волновая функция  $\psi$  имеет  $2l+1$  независимых компонент, соответствующих различным направлениям момента количества движения, равенство (4.23) показывает, что  $\psi$  описывает состояние частицы со спином  $S=l$ . Таким образом, можно сказать, что волновая функция  $\psi$  в (5.1) описывает состояния частиц со спином  $|f|$ ,  $|f-1|$ ,  $\dots$ . Этот момент количества движения является врожденным, внутренним свойством частиц, потому что он не пропадает даже тогда, когда частица покоится. Однако соотношений (5.6) и (5.8) недостаточно, чтобы полностью определить  $\beta$ -алгебру. Сейчас мы приведем два важных случая релятивистских волновых уравнений.

### Случай 1

Волновая функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению Клейна—Гордона (2.3а)

$$(\square - \kappa^2)\psi = 0 \quad (5.13)$$

и поэтому описывает состояния частицы с собственной массой  $\kappa$ . Далее, как показано в гл. 2, должен существовать матричный оператор производных  $d(\partial) = [d_{\alpha\beta}(\partial)]$ , который удовлетворяет соотношениям

$$\Lambda(\partial)d(\partial) = (\square - \kappa^2)I, \quad (5.14)$$

$$\Lambda(\partial) = -(\beta_\mu \partial_\mu + \kappa); \quad (5.15)$$

здесь через  $I$  обозначена единичная матрица. Величина  $d(\partial)$  имеет форму, данную в (2.8) и (2.9). Подставляя (2.8) в (5.14), получаем

<sup>1)</sup> Следует отметить, что определение  $\sigma_k$  в (3.49) и (5.11) отличается на множитель  $\frac{1}{2}$ .

следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha &= \kappa l, \\ \alpha \beta_\mu + \kappa \alpha_\mu &= 0, \\ (\beta_\mu \alpha_\nu + \beta_\nu \alpha_\mu) + 2\kappa \alpha_{\mu\nu} &= -2\delta_{\mu\nu}, \\ \sum^{(P)} (\beta_{\mu_1} \alpha_{\mu_2}, \dots, \mu_l - \kappa \alpha_{\mu_1}, \dots, \mu_l) &= 0 \text{ для } l > 2, \end{aligned} \quad (5.16)$$

в которых  $\sum^{(P)}$  — суммирование по всем членам, получающимся в результате всевозможных перестановок индексов.

Уравнения (5.16) могут быть разрешены, в результате чего получаются равенства

$$\begin{aligned} \alpha &= \kappa l, \\ \alpha_\mu &= -\beta_\mu, \\ \alpha_{\mu\nu} &= -\frac{1}{\kappa} \left[ \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu) \right], \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\alpha_{\mu_1}, \dots, \mu_l = \left( \frac{-1}{\kappa} \right)^{l-1} \frac{1}{l!} \sum^{(P)} \beta_{\mu_1}, \dots, \beta_{\mu_{l-2}} [\delta_{\mu_{l-1}\mu_l} - \beta_{\mu_{l-1}} \beta_{\mu_l}], \text{ для } l > 2.$$

Таким образом, имеем [12]

$$\begin{aligned} d(\partial) &= \kappa l - \beta_\mu \partial_\mu - \frac{1}{\kappa} [\square - \beta_\mu \beta_\nu \partial_\mu \partial_\nu] + \dots + \\ &+ \left( \frac{-1}{\kappa} \right)^{l-1} [\beta_{\mu_2}, \dots, \beta_{\mu_l} \square - \beta_{\mu_1} \dots \beta_{\mu_{l-2}} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2}] \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_l} - \dots = \\ &= \kappa l - \beta_\mu \partial_\mu - \frac{1}{\kappa} [\square - (\beta_\rho \partial_\rho)^2] + \dots + \\ &+ \left( \frac{-1}{\kappa} \right)^{l-1} [\square - (\beta_\rho \partial_\rho)^2] (\beta_\rho \partial_\rho)^{l-2} + \dots \end{aligned} \quad (5.18a)$$

Равенство (2.9) с учетом (5.17) приводит к соотношению<sup>1)</sup> [12]

$$\sum^{(P)} \beta_{\mu_1}, \dots, \beta_{\mu_{b-1}} [\delta_{\mu_b \mu_{b+1}} - \beta_{\mu_b} \beta_{\mu_{b+1}}] = 0. \quad (5.18b)$$

Это — соотношение, которому должны удовлетворять матрицы  $\beta_\mu$  при конечном целом значении  $b$ , чтобы (2.3a) могло быть получено из волнового уравнения (5.1).

Теперь мы докажем важную теорему, касающуюся свойств  $d(\partial)$  [10].

Порядок дифференциального оператора  $d(\partial)$ , обозначаемый через  $b$ , дается соотношением

$$b = 2f, \text{ если } \kappa \neq 0, \quad (5.19)$$

в котором через  $f$  обозначена максимальная величина спина различных полей, описываемых посредством волновой функции  $\psi$  [см. (5.12)].

При непрерывном преобразовании Лоренца оператор  $d_{\alpha\beta}(\partial)$  преобразуется таким же самым способом, как и  $\psi_\alpha \times \psi_\beta$ . Ввиду того, что величины  $\psi_\alpha$  описывают поля с максимальным спином  $f$ , они

<sup>1)</sup> Это соотношение в другой форме получил Хариш-Чандра [6]. См. также работу Баба [2].

образуют инвариантное пространство для представления трехмерной группы вращения, которое распадается на неприводимые представления  $D_f, D_{f-1}, \dots$  [см. (5.12)]. Поэтому представление, база которого дается прямым произведением  $\psi_{\alpha}\psi_{\beta}$ , может быть разложено на  $D_{2f}, D_{2f-1}, \dots$  (теорема Клебша—Гордона). Аналогично  $\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_l}$  соответствуют семейству представлений  $D_l, D_{l-1}, \dots$  до тех пор, пока некоторые из  $\partial_{\mu_i}$  не образуют скалярного оператора  $\square$ . Так,  $\alpha_{\mu_1} \dots \mu_l \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_l}$  в (2.9) может появиться лишь в виде

$$\alpha_{\mu_1} \dots \mu_l \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_l} = \bar{\alpha}_{\mu_1} \dots \mu_{2f} (\square)^{\frac{l-2f}{2}} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_{2f}},$$

причем  $l$  больше  $2f$ . Это соотношение показывает, что  $\alpha_{\mu_1}, \dots, \mu_l$  равно нулю, если величина  $l-2f (>0)$  нечетна. Далее рекуррентная формула (5.16) показывает, что величина  $\alpha_{\mu_1}, \dots, \mu_l$  равна нулю для четных положительных значений  $l-2f$

$$\alpha_{\mu_1} \dots \mu_l = 0 \text{ для } l > 2f,$$

что эквивалентно (5.19).

Из равенства (5.186) при  $b = 2f$  для  $\beta_{\mu}$  получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\beta_{\mu}^{2f-1} (\beta_{\mu}^2 - 1) = 0, \quad (5.20)$$

в котором не надо суммировать по индексу  $\mu$ .

Можно показать, что  $\beta_{\mu}$  не могут быть эрмитовыми, если  $2f > 2$  (т. е. наибольший спин  $f > 1$ ). В самом деле, если бы  $\beta_{\mu}$  были эрмитовыми, то существовало бы представление, в котором  $\beta_{\mu}$  были бы диагональными и поэтому на основании (5.20) имели бы собственные значения, равные  $\pm 1, 0$ . Такая матрица  $\beta_{\mu}$  должна была бы удовлетворять соотношению

$$\beta_{\mu} (\beta_{\mu}^2 - 1) = 0.$$

Это показывает, что уравнение (5.20) не может быть характеристическим уравнением, когда  $b > 2$ .

Хариш-Чандра [6] указал, что при  $b > 1$  (т. е.  $f \geq 1$ ) равенство (5.186) не приводит к конечной алгебре. Чтобы сделать алгебру конечной, необходимо наложить на величины  $\beta_{\mu}$  дополнительные, более строгие условия, совместные с (5.186).

Для спина  $S = 1/2$  (т. е.  $f = 1/2$ ) равенства (5.186) приводят к соотношениям

$$\beta_{\alpha}\beta_{\nu} + \beta_{\nu}\beta_{\alpha} = 2\delta_{\alpha\nu}, \quad (5.21)$$

которые как раз и являются соотношениями (3.2) теории Дирака. При этом оператор  $d(\partial)$  имеет вид

$$d(\partial) = -(\beta_{\alpha}\partial_{\alpha} - \kappa). \quad (5.22)$$

Для спина  $S=1$  или  $0$  (т. е.  $f=1$ ) соотношение (5.18) дает

$$\sum^{(P)} \beta_\mu (\beta_\nu \beta_\sigma - \delta_{\nu\sigma}) = 0. \quad (5.23a)$$

Это равенство может быть переписано в форме

$$\sum^{(P)} (\beta_\mu \beta_\nu \beta_\sigma + \beta_\nu \beta_\sigma \beta_\mu - \beta_\mu \delta_{\nu\sigma} - \beta_\sigma \delta_{\mu\nu}) = 0, \quad (5.23b)$$

а оператор  $d(\partial)$  на основании (5.18a) записывается в виде [11]

$$d(\partial) = - \left[ \frac{1}{x} (\square - x^2) + \beta_\mu \partial_\mu - \frac{1}{2x} (\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu) \partial_\mu \partial_\nu \right]. \quad (5.24)$$

### Случай II

Если требовать, чтобы можно было вывести (2.36) из волнового уравнения (5.1) и поэтому чтобы  $\phi$  описывало состояния частиц с различными массами ( $x_1, x_2, \dots$ ), надо, чтобы матрицы  $\beta_\mu$  удовлетворяли соотношениям, отличным от (5.18б). Примером этого является случай, когда  $S_{\mu\nu}$  не содержит членов, являющихся произведением более чем двух матриц. В этом случае, в силу того, что  $S_{\mu\nu}$  — антисимметричный тензор, сконструированный из  $\beta_\mu$ , он должен иметь вид

$$S_{\mu\nu} = g (\beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu), \quad (5.25)$$

причем  $g$  — некоторое постоянное  $c$ -число [1,2].

Подставляя (5.25) в (5.6), получаем

$$\beta_\mu \beta_\lambda \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\lambda \beta_\mu - \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu + \beta_\nu \beta_\lambda \beta_\mu = \frac{1}{g} \delta_{\lambda\mu} \beta_\nu - \frac{1}{g} \delta_{\nu\mu} \beta_\lambda. \quad (5.26a)$$

В частности,

$$\beta_\mu^2 \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu^2 - 2\beta_\mu \beta_\nu \beta_\mu = \frac{1}{g} \beta_\nu, \quad \text{для } \mu \neq \nu, \quad (5.26b)$$

где суммирование по индексу  $\mu$  не надо производить.

С другой стороны, из (5.6) и (5.25) получаются соотношения

$$a^2 [\beta_k, \beta_l] = i\sigma_m, \quad [\sigma_k, \beta_l] = i\beta_m, \quad [\beta_k, \sigma_l] = i\beta_m \\ \text{для } (k, l, m) = \text{Цикл. } (1, 2, 3), \quad (5.27)$$

$$a^2 [\beta_k, \beta_k] = i\delta_k, \quad [\delta_k, \beta_k] = i\beta_k, \quad [\beta_k, \delta_k] = i\beta_k, \quad (\text{для } k=1, 2, 3), \quad (5.28)$$

в которых

$$a^2 \equiv g, \quad (5.29)$$

$$\delta_k \equiv -iS_{1k} \quad (k=1, 2, 3). \quad (5.30)$$

Эти соотношения коммутации показывают, что операторы  $a\beta_\mu$  и  $\delta_k$  имеют те же собственные значения ( $f, f-1, \dots, -f$ ), что и операторы  $\sigma_k$  [7]. Следовательно<sup>1)</sup>,

<sup>1)</sup> Это соотношение можно также вывести путем некоторого обобщения (5.14). В общем случае соотношение для матриц  $\beta_\mu$  для заданного спектра масс может быть выведено путем определения выражения для  $d(\partial)$  из равенства

$$d(\partial) \Lambda(\partial) = \prod_s (\square - x_s^2) I \quad (2.3в)$$

и последующего использования (5.19) аналогично случаю I [12].

$$(a\beta_\mu - f)(a\beta_\mu - f + 1) \dots (a\beta_\mu + f) = 0. \quad (5.31)$$

Таким путем из (5.31) для различных спинов можно вывести фундаментальные соотношения для  $\beta_\mu$ .

Теперь покажем, что волновая функция  $\psi$  удовлетворяет уравнениям

$$\left(\square - \frac{a^2 x^2}{f^2}\right) \left(\square - \frac{a^2 x^2}{(f-1)^2}\right) \dots \left(\square - a^2 x^2\right) \psi = 0 \quad \text{для целого } f, \quad (5.32a)$$

$$\left(\square - \frac{a^2 x^2}{f^2}\right) \left(\square - \frac{a^2 x^2}{(f-1)^2}\right) \dots \left(\square - \frac{a^2 x^2}{(1/2)^2}\right) \psi = 0 \quad \text{для полуцелого } f. \quad (5.32b)$$

В самом деле, при целом значении  $f$  из (5.31) получаем уравнение

$$((a\beta_4 \partial_4)^2 - f^2 \partial_4^2) ((a\beta_4 \partial_4)^2 - (f-1)^2 \partial_4^2) \dots ((a\beta_4 \partial_4)^2 - \partial_4^2) (a\beta_4 \partial_4) \psi = 0.$$

В системе покоя имеют место равенства

$$\square = \partial_4^2, \\ \beta_\mu \partial_\mu = \beta_4 \partial_4,$$

и поэтому

$$(f^2 \square - (a\beta_\mu \partial_\mu)^2) \dots (\square - (a\beta_\mu \partial_\mu)^2) (a\beta_\mu \partial_\mu) \psi = 0.$$

Однако в силу лоренцевой инвариантности теории это уравнение должно иметь место в любой системе координат. Уравнение (5.32a) может быть получено путем замены  $\beta_\mu \partial_\mu$  на  $(-x)$  на основании волнового уравнения (5.1). Аналогичное доказательство может быть дано и для полуцелого  $f$ .

Уравнения (5.32a) и (5.32b) показывают, что в случае спина  $S > 1$  (т. е.  $f > 1$ ) волновая функция  $\psi$  удовлетворяет не уравнению Клейна — Гордона, а уравнению типа (2.36). Другими словами, в теории, основывающейся на (5.1) и (5.25), масса покоя частицы со спином  $f > 1$  может принимать различные значения, т. е.  $(ax/f), \dots, ax$  для целого спина  $f$  и  $(ax/f), \dots, 2ax$  для полуцелого спина  $f$ .

Однако в этой книге мы ограничимся рассмотрением случая I. Следует заметить, что для более низких значений спина  $S = 1, 1/2, 0$  теория, основывающаяся на (5.1) и (5.25), включается в случай I, потому что в этих случаях уравнения (5.32a) и (5.32b) являются как раз уравнениями Клейна — Гордона. Действительно, полагая в (5.31)  $f = 1/2$  (т. е.  $S = 1/2$ ), будем иметь равенство

$$\left(a\beta_\mu - \frac{1}{2}\right) \left(a\beta_\mu + \frac{1}{2}\right) = 0,$$

откуда находим соотношение

$$a^2 \beta_\mu^2 = \frac{1}{4},$$

в котором суммирования по  $\mu$  нет.

Величину  $\beta_\mu^2$ , не ограничивая общности, можно нормировать условиями

$$\beta_\mu^2 = 1, \quad a = \frac{1}{2}, \quad g = \frac{1}{4}. \quad (5.33)$$

Тогда (5.266) и (5.33) приводят к

$$\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu = 2\delta_{\mu\nu}.$$

Таким образом, мы вновь получили соотношение теории Дирака.

Можно видеть, что правая сторона (5.25) является  $S_\mu$ , в теории Дирака [см. (3.24)].

Далее рассмотрим спины 1 и 0. Подставляя в (5.31)  $f=1$ , получаем

$$a^* \beta_\mu^3 = \beta_\mu. \quad (5.34)$$

Умножение (5.266) слева и справа на  $\beta_\mu$  показывает, что

$$2\beta_\mu^2 \beta_\nu \beta_\mu^2 = \left(\frac{1}{g}\right) \beta_\mu \beta_\nu \beta_\mu \quad \text{для } \nu \neq \mu.$$

Повторное умножение обеих частей на  $\beta_\mu$  приводит к равенству

$$\frac{2}{g} \beta_\mu \beta_\nu \beta_\mu = \beta_\mu^2 \beta_\nu \beta_\mu^2 \quad \text{для } \nu \neq \mu,$$

из которого следует

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\mu = 0 \quad \text{для } \nu \neq \mu. \quad (5.35)$$

С другой стороны, (5.26а) дает соотношение

$$\beta_\mu \beta_\lambda \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\lambda \beta_\mu = \beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu \quad \text{для } \mu \neq \nu, \nu \neq \lambda, \mu \neq \lambda.$$

Поэтому, умножая справа на  $\beta_\mu^2$ , получаем

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = 0 \quad \text{для } \mu \neq \nu, \nu \neq \lambda, \lambda \neq \mu,$$

где учтено (5.26б). Поэтому выражение  $\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu$ , которое симметрично относительно индексов  $\mu, \lambda$ , должно иметь форму

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = \alpha_\mu \delta_{\nu\lambda} + \alpha_\lambda \delta_{\mu\nu} + \alpha'_\nu \delta_{\lambda\mu}.$$

Соотношения (5.35) и (5.34) показывают, что

$$\begin{aligned} \alpha'_\nu &= 0, \\ \alpha_\mu &= \frac{1}{a^2} \beta_\mu. \end{aligned}$$

Поэтому, полагая  $a=1$ , получаем

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu - \beta_\mu \delta_{\nu\lambda} - \beta_\lambda \delta_{\mu\nu}. \quad (5.36)$$

Уравнение (5.36) согласуется с (5.23б) в случае I. Матрица  $d(\partial)$  дается соотношением (5.24). Уравнения (5.1) и (5.36) приводят к теории, предложенной Дуффином и Кеммером, которая будет детально рассмотрена в § 2.



## § 2. Теория Дuffина — Кеммера

Основными уравнениями теории Дuffина — Кеммера для частиц со спином 1 и 0 являются следующие:

$$(\beta_\mu \partial_\mu + \kappa) \psi = 0, \quad (5.37)$$

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = \beta_\mu \delta_{\lambda\nu} + \beta_\lambda \delta_{\mu\nu} \quad (5.38)$$

[4, 8, 9].

На основании (5.25) и (5.29) имеем

$$S_{\mu\nu} = \beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu. \quad (5.39)$$

Соотношение (5.38) дает равенства

$$\beta_\mu \beta_\nu^2 = \begin{cases} (1 - \beta_\nu^2) \beta_\mu & \text{для } \mu \neq \nu, \\ \beta_\mu & \text{для } \mu = \nu \end{cases} \quad (5.40)$$

$$\beta_\mu^2 \beta_\nu^2 = \beta_\nu^2 \beta_\mu^2,$$

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\mu = \beta_\mu \delta_{\mu\nu},$$

где суммирование по индексу  $\mu$  не подразумевается.

Таким образом, для матриц  $\eta_\mu$ , определяемых равенством

$$\eta_\mu \equiv 2\beta_\mu^2 - 1, \quad (5.41)$$

можно получить соотношения

$$\eta_\mu^2 = I,$$

$$\eta_\mu \eta_\nu = \eta_\nu \eta_\mu,$$

$$\beta_\mu \eta_\nu = -\eta_\nu \beta_\mu \quad (\text{для } \mu \neq \nu), \quad (5.42)$$

$$\beta_\mu = \beta_\mu \eta_\mu = \eta_\mu \beta_\mu.$$

В этих соотношениях по-прежнему суммирование по  $\mu$  нет.

В конце этой главы будет указано представление, в котором каждая величина  $\beta_\mu$  является эрмитовой. Мы будем иметь в виду это представление при дальнейшем изложении. В этом случае  $\eta_\mu$  является также эрмитовой.

Определим  $\bar{\psi}$  с помощью равенства

$$\bar{\psi} = \psi^* \eta_4. \quad (5.43)$$

Легко видеть, что  $\bar{\psi}$  удовлетворяет уравнению

$$\partial_\mu \bar{\psi} \beta_\mu - \kappa \bar{\psi} = 0. \quad (5.44)$$

Соотношения (5.56) и (5.39) показывают, что при бесконечно малом преобразовании Лоренца  $\bar{\psi}$  преобразуется следующим образом:

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \psi'^* \eta_4 = \psi^* \Lambda^* \eta_4 = \bar{\psi} \Lambda^{-1}, \quad (5.45)$$

так как  $\delta w_{ik}$  и  $\delta w_{i4}$  в (5.5a) соответственно вещественны и мнимы. При пространственном отражении соотношение (5.4) удовлетво-

руется, если взять

$$\Lambda = \pm \eta_4. \quad (5.46)$$

Вопрос о знаках ( $\pm$ ) более подробно будет обсужден позднее.

Умножение (5.37) на  $d(\partial)$ , взятого из (5.24), приводит к уравнению Клейна — Гордона

$$(\square - x^2)\psi = 0. \quad (5.47)$$

Как было показано в § 1, эта теория соответствует случаям спина, равного 1 и 0. Поэтому волновые функции, соответствующие случаям спина, равного 1 и 0, можно разделить следующим способом [5].

Чтобы выбрать волновую функцию для спина 0, введем оператор

$$P \equiv \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \beta_4^2, \quad (5.48a)$$

$$P_\mu \equiv P \beta_\mu. \quad (5.48b)$$

Тогда с учетом (5.40) получаем равенство

$$P_\mu \beta_\nu = P \delta_{\mu\nu}, \quad (5.49)$$

которое приводит к соотношению

$$P S_{\mu\nu} = P (\beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu) = 0,$$

показывающему, что при бесконечно малом преобразовании Лоренца имеет место следующий результат:

$$P \Lambda \psi = P \psi. \quad (5.50)$$

Аналогично для пространственного отражения (5.46), используя соотношения

$$P \eta_4 = \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 (2\beta_4^4 - \beta_4^2) = \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \beta_4^2 = P, \quad (5.51)$$

получаем следующие равенства:

$$P \Lambda \psi = \begin{cases} -P \psi & \text{для „-“ в (5.46)} \\ +P \psi & \text{для „+“ в (5.46)}. \end{cases} \quad (5.52)$$

Равенства (5.52) показывают, что  $P\psi$  является либо скаляром, либо псевдоскаляром, в зависимости от того, выбирается ли в (5.46) знак „+“ или „-“. С другой стороны, используя (5.42), можно показать, что при преобразованиях Лоренца (5.5a) и (5.46) имеют место соотношения

$$P_\mu \psi = \begin{cases} \text{псевдовектор} & \text{для „-“ в (5.46)} \\ \text{вектор} & \text{для „+“ в (5.46)}. \end{cases} \quad (5.53)$$

Если ввести обозначения  $P\psi = U$  и  $P_\mu \psi = U_\mu$ , то из (5.37) с учетом (5.48b) и (5.49) можно вывести следующие волновые

уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_\mu U^\mu &= -\kappa U, \\ \delta_\mu U^\mu &= -\kappa U_\mu. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Отсюда видно, что (5.54) являются уравнениями для спина 0 и что  $(U, U_\mu)$  описывает скалярное или псевдоскалярное поле в зависимости от того, выбирается ли в (5.46) знак „+“ или „-“. Аналогичным способом можно выделить волновую функцию для спина, равного 1, если ввести операторы

$$R_\mu \equiv \begin{cases} -\beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \beta_\mu \beta_4, & \mu = 1, 2, 3, \\ \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 (1 - \beta_4^2), & \mu = 4 \end{cases} \quad (5.55)$$

$$R_{\mu\nu} \equiv R_\mu \beta_\nu. \quad (5.56)$$

Эти уравнения показывают<sup>1)</sup>

$$R_{\mu\nu} = -R_{\nu\mu}, \quad (5.57)$$

$$R_\mu \beta_\nu \beta_\sigma = \delta_{\nu\sigma} R_\mu - \delta_{\mu\sigma} R_\nu. \quad (5.58)$$

Используя (5.58), можно показать, что  $S_{\mu\nu}$  удовлетворяет следующим соотношениям:

$$R_\mu S_{\rho\nu} = R_\mu (\beta_\rho \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\rho) = \delta_{\mu\rho} R_\nu - \delta_{\mu\nu} R_\rho, \quad (5.59)$$

которые приводят для бесконечно малого преобразования Лоренца (5.5а) и (5.5б) к равенству

$$R_\mu \Lambda = a_{\mu\nu} R_\nu.$$

С другой стороны, с учетом (5.42), имеем

$$R_\mu \eta_\mu = \begin{cases} R_\mu & \text{для } \mu = 1, 2, 3 \\ -R_\mu & \text{для } \mu = 4 \end{cases}. \quad (5.60)$$

Отсюда следует, что

$$R_\mu \psi = \begin{cases} \text{вектор} & \text{для „-“ в (5.46)} \\ \text{псевдовектор} & \text{для „+“ в (5.46)} \end{cases}. \quad (5.61)$$

Если величины  $U_\mu$  и  $F_{\mu\nu}$  ввести с помощью равенств

$$R_\mu \psi = \kappa U_\mu, \quad R_{\mu\nu} \psi = F_{\mu\nu},$$

то из (5.37), (5.57) и (5.58) можно вывести следующие волновые уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F_{\mu\nu} - \kappa^2 U_\nu &= 0, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\nu U_\mu - \partial_\mu U_\nu. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Это — волновые уравнения (4.24) для спина 1.

<sup>1)</sup> Например, с учетом (5.38), имеем

$$R_{12} + R_{21} = -\beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 (\beta_1 \beta_4 \beta_2 + \beta_2 \beta_4 \beta_1) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что теория Дuffина — Кеммера эквивалентна теории для спина 1 и 0. Обиий случай волновых функций в этой теории получается в виде следующих суперпозиций:

$$\begin{aligned} & \text{(Псевдоскалярная частица + Векторная частица) для } \cdot - \cdot \text{ в (5.46)} \\ & \text{(Скалярная частица + Псевдовекторная частица) для } \cdot + \cdot \text{ в (5.46)}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Сейчас мы введем для  $\beta_\mu$  специальное представление, в котором используются два семейства индексов  $\alpha$  и  $\alpha'$  ( $\alpha, \alpha' = 1, 2, 3, 4$ ). Величины, связанные с этими двумя пространствами, обозначим соответственно без штрихов и со штрихами. Используя величины  $\gamma_\mu$  и  $\gamma'_\mu$ , каждая из которых в отдельности удовлетворяет соотношению (3.2), и единичные матрицы  $I$  и  $I'$ , можно показать, что основное соотношение (5.38) удовлетворяется матрицами [8]

$$\beta_\mu = \frac{1}{2} (\gamma_\mu I' + \gamma'_\mu I). \quad (5.64)$$

Поскольку (5.64) имеет четыре строки и четыре столбца как для штрихованных, так и для нештрихованных величин, то волновая функция  $\psi$  имеет 16 компонент. В частности, в спинорном представлении величин  $\gamma_\mu$ , данном в (3.68), функция  $\psi$  может быть разложена на спиноры 2-го ранга  $\psi_{rs}, \psi_r^s, \psi_s^r, \psi^{rs}$  ( $r=1, 2; s=1, 2$ ), причем мы использовали обозначение ( $\dot{1}, \dot{2}$ ) для  $\alpha=(1, 2)$  и обозначение  $(1, 2)$  для  $\alpha=(3, 4)$ . В этом представлении волновое уравнение (5.37) может быть записано в виде уравнений для спиноров 2-го ранга.

Как было показано в гл. 4, выражения (5.54) и (5.62) дают неприводимые представления для спинов, равных 0 и 1. Поскольку они имеют соответственно 5 и 10 компонент, то для того, чтобы найти 16 компонент, надо найти еще одну недостающую компоненту  $\psi$ . Эта компонента составляет неприводимое представление, так что она должна быть скалярной величиной, удовлетворяющей дифференциальному уравнению первого порядка. Однако найти такое уравнение для одной скалярной компоненты, которая должна одновременно удовлетворять уравнению второго порядка Клейна — Гордона, невозможно, если только эта скалярная компонента не равна нулю. Обычно она называется тривиальной компонентой. Если через  $P_t$  обозначить оператор, выделяющий эту тривиальную компоненту из  $\psi$ , то

$$P_t \psi = 0. \quad (5.65)$$

Более конкретное выражение всего сказанного выше может быть дано с помощью спинорного представления.

Так как всего имеется три неприводимых представления, из которых одно первого, одно пятого и одно — десятого порядка, то число линейно независимых матриц равно  $(1)^2 + (5)^2 + (10)^2 = 126$ .

Используя (5.38), можно доказать, что все произведения величин  $\beta_\mu$  могут быть выражены в виде линейных комбинаций следующих 126 матриц:

Число независимых матриц

|  |     |        |
|--|-----|--------|
| $I$  | 1,  |        |
| $\beta_\mu$  | 4,  |        |
| $\beta_\mu \beta_\nu$                              | 12, |        |
| $\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho$                   | 12, |        |
| $\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma$      | 6,  |        |
| $\eta_{\mu\nu}$                                    | 4,  |        |
| $\eta_{\mu\nu} \beta_\rho$                         | 12, |        |
| $\eta_{\mu\nu} \beta_\rho \beta_\sigma$            | 24, | (5.66) |
| $\eta_{\mu\nu} \beta_\rho \beta_\sigma \beta_\tau$ | 12, |        |
| $\eta_{\mu\nu} \eta_\rho$                          | 6,  |        |
| $\eta_{\mu\nu} \eta_\rho \beta_\sigma$             | 12, |        |
| $\eta_{\mu\nu} \eta_\rho \beta_\sigma \beta_\tau$  | 12, |        |
| $\eta_{\mu\nu} \eta_\rho \eta_\sigma$              | 4,  |        |
| $\eta_{\mu\nu} \eta_\rho \eta_\sigma \beta_\tau$   | 4,  |        |
| $\eta_{\mu\nu} \eta_\rho \eta_\sigma \eta_\tau$    | 1.  |        |

Не равными нулю шпурами матриц (5.66) являются следующие:

|  | Спин 1 | Спин 0 | Тривиальный<br>случай |
|--|--------|--------|-----------------------|
| $Sp I$   | 10     | 5      | 1                     |
| $Sp \eta_{\mu\nu}$                                 | 2      | -1     | -1                    |
| $Sp \eta_{\mu\nu} \eta_\rho$                       | -2     | 1      | 1                     |
| $Sp \eta_{\mu\nu} \eta_\rho \eta_\sigma$           | -2     | 3      | -1                    |
| $Sp \eta_{\mu\nu} \eta_\rho \eta_\sigma \eta_\tau$ | 2      | -3     | 1.                    |

Шпуры матриц (5.66), которые не указаны в (5.67), равны нулю. Теперь дадим матричное представление для  $\beta_\mu$ .

Тривиальный случай

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0.$$

Спин 0

$$\beta_1 = \left( \begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \beta_2 = \left( \begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$\beta_3 = \left( \begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad \beta_4 = \left( \begin{array}{cccc|c} & & & & -i \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ \hline i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \beta_1 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \beta_2 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \beta_3 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \beta_4 = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bhabha H. J., Rev. Mod. Phys., **17**, 300 (1945).
2. Bhabha H. J., Rev. Mod. Phys., **21**, 451 (1949).
3. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, 3-d ed., 1947 (см. перевод второго издания: П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, М.—Л., 1937).
4. Duffin R. J., Phys. Rev., **54**, 1114 (1938).
5. Fujiwara I., Prog. Theor. Phys., **10**, 6 (1953).
6. Harish-Chandra, Phys. Rev., **71**, 793 (1947).
7. Heppner W. A., Phys. Rev., **84**, 744 (1951).
8. Kemmer N., Proc. Roy. Soc., **A173**, 91 (1939).
9. Petiau G., Thesis, Paris, 1936.
10. Umezawa H., Prog. Theor. Phys., **7**, 551 (1952).
11. Takahashi Y., Umezawa H., Prog. Theor. Phys., **9**, 1 (1953).
12. Umezawa H., Visconti A. (в печати) 1955.
13. Van der Waerden, Die Gruppentheoretische Methode in der Quantum mechanik, 1932 (см. перевод: Ван дер Верден, Метод теории групп квантовой механики, Харьков — Киев, 1938).

# Предварительные замечания о квантовании

## § 1. Квантовая электродинамика

Обычная квантовая теория поля была построена путем обобщения квантовой теории электрона и электромагнитного поля, т. е. путем обобщения квантовой электродинамики. Поэтому важной задачей является проверка правильности существующей квантовой теории поля при ее применении к системам, отличным от электрона и электромагнитного поля, ибо в настоящее время известно много других элементарных частиц (см. гл. 1).

С другой стороны, хотя существующая квантовая теория поля и дает весьма последовательный формализм для свободных полей, в случае взаимодействующих полей имеется много серьезных трудностей. Такого рода трудности проявляются даже в квантовой электродинамике. Поэтому кажется странным, что квантовая электродинамика так успешно объясняла экспериментальные факты. В гл. 14, 15, и 18 мы обсудим, каким путем современная теория подошла к разрешению этих трудностей и их разъяснению.

В настоящей главе мы создадим основу для общей квантовой теории поля путем определения основных характеристик квантовой электродинамики.

Хотя квантовые свойства фотонов, отмеченные в теории излучения черного тела Планка и в теории световых квантов Эйнштейна, и играли важную роль в открытии квантовой механики, все же нерелятивистская квантовая механика „частиц“ была развита прежде установления релятивистской квантовой теории электромагнитного „поля“. Однако, как показано в гл. 3, релятивистское волновое уравнение Дирака, полученное как обобщение нерелятивистской квантовой механики, приводит к теории дырок. Последняя предполагает существование бесчисленного множества частиц. В гл. 8 и 9 мы увидим, что эта последняя теория эквивалентна квантовой теории полей со спином  $1/2$  (см. работы Иваненко и Соколова [2] и Крамерса [3]).

Электромагнитное поле может быть описано с помощью потенциалов  $A_\mu$ , зависящих от непрерывных параметров (например, от пространственно-временных координат  $x_\mu$  или от амплитуд Фурье  $A_p$ ). Таким образом, электромагнитное поле является системой



с бесконечно большим числом степеней свободы. Теория световых квантов Эйнштейна показывает, что свободное электромагнитное поле может быть охарактеризовано числом световых квантов (фотонов) в различных состояниях. Испускание и поглощение электромагнитных волн может быть интерпретировано как изменение числа квантов.

Согласно теории излучения черного тела Планка, свободное электромагнитное поле может быть описано как ансамбль гармонических осцилляторов. Энергия простого гармонического осциллятора с частотой  $\nu$  имеет собственные значения  $2\pi(n + 1/2)\hbar\nu$ . В этом выражении  $n$  является положительным целым числом (0, 1, 2, ...), которое может быть интерпретировано как число световых квантов с энергией  $2\pi\hbar\nu$ . Поэтому испускание одного кванта соответствует переходу из состояния ( $n$ ) в состояние ( $n + 1$ ). Хорошо известно, что квантовая теория простого гармонического осциллятора может быть развита на основе канонического формализма (см., например, работу Дирака [1]): В этой теории энергия простого гармонического осциллятора в его наименьшем энергетическом состоянии ( $n = 0$ ) равна не нулю, а  $1/2(2\pi\hbar\nu)$  (нулевая энергия). Поэтому свободное электромагнитное поле в его наименьшем энергетическом состоянии (т. е. в состоянии, в котором отсутствуют кванты) имеет энергию<sup>1)</sup>

$$E_0 = 2 \int_0^{\infty} d\nu \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \left( \frac{2\pi\hbar\nu}{2} \right).$$

Это выражение показывает, что вакуум нельзя определить как состояние с нулевой энергией; мы будем определять его как состояние с наименьшей энергией. Конечно, такое определение означает, что вакуум обладает бесконечной энергией. Связанные с этим трудности могут быть преодолены с помощью так называемого правила „вычитания вакуума“, которое предполагает, что наблюдаемые эффекты определяются лишь как разница между полными эффектами, предсказываемыми теорией, и ненаблюдаемыми вакуумными эффектами. Это вычитание применяется не только при вычислении энергии, но и при всех других вычислениях. Тем не менее иногда случается, что получаемые при такого рода вычислениях результаты остаются все же бесконечными.

## § 2. Квантовая теория для любых полей

Уравнения Максвелла и Дирака можно получить из соответствующим образом выбранных лагранжианов с помощью вариаци-

<sup>1)</sup> Из теории теплового излучения хорошо известно, что число осцилляторов в интервале ( $\nu, \nu + d\nu$ ) равно  $(8\pi\nu^2/c^3) d\nu$ . Множитель 2 учитывает два независимых состояния поляризации поперечной волны.

ционного метода. Мы будем предполагать, что аналогичное положение имеет место и для любых полей  $Q_\alpha(x)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots$ ); иначе говоря, мы будем предполагать, что релятивистское волновое уравнение для  $Q_\alpha(x)$  может быть получено из соответствующего лагранжиана. Этот лагранжиан должен быть скаляром, а величины  $Q_\alpha$  ввиду лоренцевой инвариантности теории должны быть неприводимым представлением группы Лоренца. По этим причинам  $Q_\alpha$  подчиняется релятивистскому волновому уравнению, рассмотренному в предыдущих главах.

Как было показано в гл. 4, в случае полей с полуцелым спином вследствие существования состояний с отрицательной энергией возникает парадокс Клейна, который для устранения абсурдных следствий заставляет в этом случае применять статистику Ферми.

Соотношение между спином и статистикой для произвольных частиц будет рассмотрено в гл. 8.

Чтобы обобщить методы рассмотрения электромагнитного поля, приведенные в § 1, мы будем квантовать свободные поля, рассматривая их как систему простых гармонических осцилляторов. Если  $Q_\alpha(x)$  удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона (2.3), то это квантование может быть произведено. В самом деле, каждая компонента Фурье, определенная равенством

$$Q_\alpha(x) = \int d^3k Q_\alpha(\mathbf{k}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})},$$

удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению простого гармонического осциллятора

$$-\partial_i^2 Q_\alpha(\mathbf{k}, t) = (k_i k_i + x^2) Q_\alpha(\mathbf{k}, t). \quad (6.1)$$

В гл. 8 будет показано, что энергия свободного поля есть сумма энергий частиц массы  $x$ . Это определение устанавливает связь между полями и их квантами.

Состояние  $\Psi[\sigma]$  поля в заданный момент времени определяется наблюдениями в трехмерном мире, т. е. на пространственно-подобной плоскости поверхности  $\sigma$  (1). Однако это описание не является релятивистски инвариантным, потому что понятие „одинакового времени“ не является релятивистски инвариантным. Поэтому мы будем рассматривать состояние поля на пространственно-подобной поверхности  $\sigma$ , потому что понятие „пространственно-подобной поверхности“ является уже релятивистски инвариантным. Это состояние может быть определено с помощью независимых наблюдений во всех точках  $\sigma$ , потому что возмущения, связанные с наблюдениями, не могут распространяться быстрее скорости света. Таким образом,  $\Psi[\sigma]$  является функционалом поверхности  $\sigma$ .

<sup>1)</sup> Поверхность называется пространственно-подобной, когда любые ее две точки разделены пространственно-подобным интервалом.

Мы будем считать, что обычные свойства вектора состояния квантовой механики (т. е. принцип суперпозиции и т. д.) имеются также и у  $\Psi[\sigma]$ .

В обычной квантовой механике уравнение Шредингера описывает поведение вектора состояния во времени. Обобщая это положение на квантовую теорию поля, примем, что изменение состояния при переходе от одной поверхности к другой во временно-подобном направлении описывается с помощью уравнения Шредингера для  $\Psi[\sigma]$ .

Теперь введем вектор  $d\sigma_\mu$  [5, 4], нормальный к поверхности  $\sigma$  и равный по длине площади элемента поверхности  $\sigma$ ; этот вектор дается выражением

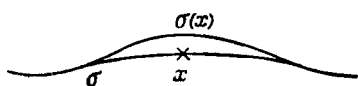
$$d\sigma_\mu \equiv \left( dx_2 dx_3 dt, dx_1 dx_3 dt, dx_1 dx_2 dt, \frac{1}{i} dx_1 dx_2 dx_3 \right). \quad (6.2)$$

Отсюда следует, что при переходе от  $\sigma_t$  к  $\sigma$  надо от интеграла по объему  $\int d^3x$  перейти к интегралу  $i \int d\sigma_\mu$ . В дальнейшем мы будем также пользоваться единичным вектором  $\eta_\mu$  ( $\eta_\mu \eta_\mu = -1$ ), нормальным к поверхности  $\sigma$ .

Функциональная производная от функционала  $F[\sigma]$  определяется с помощью равенства

$$\frac{\delta F[\sigma]}{\delta \sigma(x)} \equiv \lim_{\sigma(x) \rightarrow \sigma} \frac{F[\sigma(x)] - F[\sigma]}{dw}, \quad (6.3)$$

где  $dw = \int d^4x$  — „объем“ четырехмерной области, заключенной между поверхностью  $\sigma$  и поверхностью  $\sigma(x)$ , которая отличается от  $\sigma$  только в бесконечно малой окрестности вблизи точки  $x$  (фиг. 2).



Фиг. 2.

Так как (6.3) является лоренц-инвариантным определением, то оно может быть использовано при написании ковариантного уравнения Шредингера.

Теперь приведем некоторые важные теоремы, касающиеся функциональных производных.

Когда функционал  $F[\sigma]$  может быть представлен в виде поверхностного интеграла

$$F_\mu[\sigma] \equiv \int_\sigma d\sigma'_\mu F(x') \quad (6.4)$$

<sup>1)</sup>  $d^3x$  и  $d^4x$  означают

$$\begin{aligned} d^3x &\equiv dx_1 dx_2 dx_3, \\ d^4x &\equiv dx_1 dx_2 dx_3 dt. \end{aligned}$$

от некоторой дифференцируемой в точках  $\sigma$  функции  $F(x)$ , из теоремы Грина можно получить соотношение

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} F_{\mu}[\sigma] = \lim_{\sigma(x) \rightarrow \sigma} \left[ \int_{\sigma(x)} - \int_{\sigma} \right] \frac{d\sigma'_{\mu} F(x')}{dw} = \partial_{\mu} F(x). \quad (6.5a)$$

Поэтому для функционала  $F[\sigma] \equiv \int d\sigma'_{\mu} F_{\mu}(x')$  с дифференцируемой функцией  $F_{\mu}(x')$  имеет место равенство

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} F[\sigma] = \partial_{\mu} F_{\mu}(x). \quad (6.5b)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

*Функционал  $F[\sigma]$  не зависит от поверхности  $\sigma$ , если  $F_{\mu}(x)$  удовлетворяет уравнению непрерывности  $\partial_{\mu} F_{\mu}(x) = 0$ <sup>1)</sup>.*

Если  $F[x, \sigma]$  явно зависит от поверхности  $\sigma$ , соотношение (6.5a) может быть обобщено следующим образом:

$$F_{\mu}[\sigma] \equiv \int d\sigma'_{\mu} F[x', \sigma], \quad (6.6a)$$

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} F_{\mu}[\sigma] = \partial_{\mu} F[x, \sigma] + \int d\sigma'_{\mu} \frac{\partial}{\partial\sigma(x)} F[x', \sigma], \quad (6.6b)$$

причем  $\partial/\partial\sigma$  означает дифференцирование по аргументам, явно зависящим от  $\sigma$ , а  $\delta/\delta\sigma(x)$  — полное изменение, происходящее от деформации поверхности  $\sigma$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, 3-d ed., 1947 (см. перевод второго издания: П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, М.—Л., 1937).
2. Иваненко Д., Соколов А., Phys. Zs. d. Sowjetunion, 11, 590 (1937).
3. Kramers H. A., Proc. Amst. Akad. Sci., 40, 814 (1937).
4. Schwinger J., Phys. Rev., 75, 651 (1949) (см. перевод в сборнике: Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).
5. Tomonaga S., Prog. Theor. Phys., 1, 27 (1946) (см. перевод в сборнике: Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).

<sup>1)</sup> Когда  $\sigma$  является плоской поверхностью  $\sigma_t$ , выражение (6.4) принимает вид  $F[\sigma_t] = -i \int d^3x F_4(x)$ . Хорошо известно, что  $F[\sigma_t]$  не зависит от времени, если  $F_{\mu}(x)$  удовлетворяет уравнению непрерывности  $\partial_{\mu} F_{\mu}(x) = 0$ . Указанная выше теорема является ковариантным обобщением этого факта.

# Релятивистская квантовая теория поля

## § 1. Релятивистская квантовая теория поля

Мы будем рассматривать поля, описываемые величинами  $Q_\alpha(x)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots$ ). Предположим, что лагранжиан, являющийся эрмитовым и инвариантным относительно преобразований Лоренца, не содержит явно  $x_\mu$  и не содержит производных выше первого порядка. Первое предположение обеспечивает соблюдение условия, чтобы поле было консервативной системой; второе предположение делается только в этой главе. При этих условиях плотность лагранжиана может быть записана в виде  $L(Q_\alpha, Q_{\alpha;\mu})$ , где  $Q_{\alpha;\mu}(x) \equiv \partial_\mu Q_\alpha(x)$ .

Волновое уравнение для  $Q_\alpha(x)$  получается на основании вариационного принципа

$$\delta \int d^4x L(Q_\alpha, Q_{\alpha;\mu}) = 0. \quad (7.1)$$

Варьируя  $Q_\alpha \rightarrow Q_\alpha + \delta Q_\alpha$  при условии  $\delta Q_\alpha = 0$  на границах области интегрирования, получаем на основании (7.1) следующее волновое уравнение:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_\alpha} - \partial_\mu \left( \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}} \right) = 0. \quad (7.2)$$

Условие Клейна — Гордона для уравнения свободного поля, введенное в гл. 2, ограничивает вид члена  $L^0$  в плотности лагранжиана.

Из (7.2) получается следующее уравнение непрерывности:

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0, \quad (7.3a)$$

в котором

$$T_{\mu\nu} \equiv - \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\nu}} Q_{\alpha;\mu} + L \delta_{\mu\nu}. \quad (7.3b)$$

Тензор  $T_{\mu\nu}$  называется каноническим тензором энергии-импульса; он связан с вектором энергии-импульса  $T_\mu$  соотношением

$$T_\mu \equiv -i \int d\sigma'_\nu T_{\mu\nu}(x'). \quad (7.4)$$

В этом соотношении величины  $W \equiv T_4$  и  $G_k \equiv iT_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) являются соответственно полной энергией и полным импульсом

поля на поверхности  $\sigma$ . Из (6.5б) и (7.3а) следует

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x)} T_\mu = 0. \quad (7.5)$$

Это равенство является ковариантным выражением закона сохранения энергии-импульса.

Различные величины поля, например момент количества движения и заряд, естественным образом вводятся в теорию путем рассмотрения ее преобразований, относительно которых теория инвариантна [22, 23].

Прежде всего рассмотрим лоренцову инвариантность теории. При бесконечно малом преобразовании

$$x_\mu \rightarrow 'x_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu = x_\mu + \delta x_\mu,$$

в котором

$$\delta x_\mu = \delta\omega_{\mu\nu} x_\nu, \quad \delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}, \quad (7.6a)$$

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \delta\omega_{\mu\nu}; \quad (7.6б)$$

$Q_\alpha(x)$  преобразуется (см. гл. 5) согласно следующему правилу:

$$Q_\alpha(x) \rightarrow 'Q_\alpha('x) = Q_\alpha(x) + \delta Q_\alpha(x) = \Lambda_{\alpha\beta} Q_\beta(x), \quad (7.7a)$$

$$\delta Q_\alpha(x) = \frac{1}{2} S_{\mu\nu:\alpha\beta} Q_\beta(x) \delta\omega_{\mu\nu}, \quad (7.7б)$$

$$\Lambda \equiv [\Lambda_{\alpha\beta}] = 1 + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu}. \quad (7.7в)$$

В этих равенствах матрица  $S_{\mu\nu}$  имеет  $(\alpha\beta)$ -элементы  $S_{\mu\nu:\alpha\beta}$  и удовлетворяет соотношению

$$S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}. \quad (7.8)$$

Из (5.8) следует, что<sup>1)</sup>

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = -\delta_{\mu\rho} S_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\rho} S_{\mu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} S_{\nu\rho} - \delta_{\nu\sigma} S_{\mu\rho}. \quad (7.9)$$

Если через  $\bar{\delta}Q_\alpha(x)$  обозначить изменение величины  $Q_\alpha(x)$  при пренебрежении изменением  $\delta x_\mu$ , т. е. если

$$\bar{\delta}Q_\alpha(x) \equiv 'Q_\alpha(x) - Q_\alpha(x), \quad (7.10a)$$

то, используя разложение Тэйлора для  $'Q_\alpha('x)$ , получаем

$$\begin{aligned} \bar{\delta}Q_\alpha(x) &= 'Q_\alpha('x) - \partial_\mu Q_\alpha(x) \delta x_\mu - Q_\alpha(x) = \\ &= \delta Q_\alpha(x) - \partial_\mu Q_\alpha(x) \delta x_\mu. \end{aligned} \quad (7.10б)$$

Тогда уравнения (7.6а), (7.7б) и (7.10б) дают равенство

$$\bar{\delta}Q_\alpha(x) = \sum_{\mu < \nu} \delta\omega_{\mu\nu} (x_\mu Q_{\alpha:\nu}(x) - x_\nu Q_{\alpha:\mu}(x) + S_{\mu\nu:\alpha\beta} Q_\beta(x)). \quad (7.11)$$

<sup>1)</sup> Нужно заметить, что в (5.8) было использовано только предположение о лоренцовой инвариантности теории.

Из (7.11) и (7.36) можно получить соотношения

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\sigma}} \bar{\delta} Q_{\alpha} + L \delta x_{\sigma} = \sum_{\mu < \nu} M_{\mu\nu,\sigma} \delta \tau \omega_{\mu\nu}, \quad (7.12)$$

в которых

$$M_{\mu\nu,\sigma} \equiv x_{\nu} T_{\mu\sigma} - x_{\mu} T_{\nu\sigma} + \left( \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\sigma}} \right) S_{\mu\nu;\alpha\beta} Q_{\beta}. \quad (7.13)$$

Надо заметить, что величина  $M_{\mu\nu,\sigma}$  антисимметрична по индексам  $\mu$  и  $\nu$ .

Обозначим преобразованную плотность лагранжиана через  $L'('x)$ . Так как лагранжиан инвариантен относительно преобразований (7.6а) и (7.6б), то

$$\delta L \equiv L'('x) - L(x) = 0.$$

Воспользовавшись разложением  $L'('x)$  в ряд Тэйлора

$$L'('x) = L(x) + \partial_{\mu} L(x) \delta x_{\mu},$$

получим равенство

$$\bar{\delta} L + \partial_{\mu} (L \delta x_{\mu}) = 0, \quad (7.14)$$

в котором  $\bar{\delta} L$  определено соотношением

$$\bar{\delta} L \equiv L'('x) - L(x) = \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}} \bar{\delta} Q_{\alpha;\mu} + \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha}} \bar{\delta} Q_{\alpha} = \partial_{\mu} \left( \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}} \bar{\delta} Q_{\alpha} \right). \quad (7.15)$$

Это соотношение следует из (7.2). Из (7.14) и (7.15) получается

$$\partial_{\mu} \left( \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}} \bar{\delta} Q_{\alpha} + L \delta x_{\mu} \right) = 0. \quad (7.16)$$

Таким образом, используя (7.12), приходим к уравнению

$$\partial_{\sigma} M_{\mu\nu,\sigma} = 0. \quad (7.17)$$

Величина  $M_{\mu\nu,\sigma}$  называется тензором момента количества движения. С помощью этого тензора можно выразить полный момент количества движения  $P_{\mu\nu}$  поля на  $\sigma$  соотношением вида

$$P_{\mu\nu} = -P_{\nu\mu} \equiv -i \int d\sigma_{\rho} M_{\mu\nu,\rho}. \quad (7.18)$$

Уравнения (7.17) и (6.5б) дают

$$\frac{\circ}{\delta \sigma(x)} P_{\mu\nu} = 0. \quad (7.19)$$

Это есть ковариантная форма записи закона сохранения момента количества движения.

Величину  $M_{\mu\nu,\sigma}$  можно записать также в следующем виде:

$$M_{\mu\nu,\sigma} = x_{\nu} T_{\mu\sigma} - x_{\mu} T_{\nu\sigma} - f_{\mu,\nu\sigma} + f_{\nu,\mu\sigma}. \quad (7.20)$$

где через  $f_{\mu,\nu\sigma}$  обозначена величина

$$f_{\mu,\nu\sigma} \equiv \frac{1}{2} \left[ -\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\sigma}} S_{\mu\nu;\alpha\beta} Q_{\beta} - \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\nu}} S_{\sigma\mu;\alpha\beta} Q_{\beta} + \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}} S_{\nu\sigma;\alpha\beta} Q_{\beta} \right]. \quad (7.21)$$

Из (7.21) и (7.8) можно получить равенства

$$\begin{aligned} f_{\mu,\nu\sigma} &= -f_{\mu,\sigma\nu}, \\ f_{\mu,\nu\sigma} - f_{\nu,\mu\sigma} &= -\left(\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\sigma}}\right) S_{\mu\nu;\alpha\beta} Q_{\beta}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Теперь с помощью  $f_{\mu,\nu\sigma}$  можно ввести симметричный тензор энергии-импульса  $\theta_{\mu\nu}$ , который определяется как симметричный тензор, удовлетворяющий следующему уравнению:

$$-i \int_{\sigma} d\sigma_{\nu} \theta_{\mu\nu}(x) = T_{\mu}. \quad (7.23)$$

Пользуясь (7.23), (7.5) и (6.56), можно показать, что

$$\partial_{\nu} \theta_{\mu\nu} = 0. \quad (7.24)$$

Теперь мы покажем, что симметричный тензор, удовлетворяющий (7.23), дается выражением [1, 26]

$$\theta_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \partial_{\sigma} f_{\mu,\nu\sigma}. \quad (7.25)$$

Правая часть этого равенства симметрична по индексам  $\mu, \nu$ , так как подстановка (7.20) в (7.17) с учетом (7.3а) дает равенство

$$T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} - \partial_{\sigma} f_{\mu,\nu\sigma} + \partial_{\sigma} f_{\nu,\mu\sigma} = 0.$$

Поскольку величина  $f_{\nu,\mu\sigma}$  антисимметрична по индексам  $\nu$  и  $\sigma$ , то

$$\partial_{\nu} \partial_{\sigma} f_{\mu,\nu\sigma} = 0.$$

Таким образом, выражение (6.56) показывает, что значение интеграла  $\int_{\sigma} d\sigma_{\nu} (\theta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu})$  не зависит от выбора поверхности  $\sigma$ . Более того, поскольку  $f_{\mu,11} = 0$ , то с помощью интегрирования по частям можно показать, что

$$i \int_{\sigma} d\sigma_{\nu} \partial_{\nu} f_{\mu,\nu\sigma} = \int d^3x \partial_{\sigma} f_{\mu,1\sigma} = \int d^3x \partial_k f_{\mu,1k} = 0,$$

если только пространственно-подобная поверхность  $\sigma$  является плоской. Отсюда можно заключить, что интеграл  $\int_{\sigma} d\sigma_{\nu} (\theta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu})$  равен нулю при любой пространственно-подобной поверхности  $\sigma$ , и поэтому условие (7.23) будет удовлетворено.

Тем же самым способом можно показать, что

$$\int_{\sigma} d\sigma_{\rho} (x_{\mu} \theta_{\nu\rho} - x_{\nu} \theta_{\mu\rho} + M_{\mu\nu,\rho}) = 0.$$



Отсюда с учетом (7.18) следует соотношение

$$P_{\mu\nu} = i \int_{\sigma} d\sigma_{\rho} (x_{\mu} \dot{\theta}_{\nu\rho} - x_{\nu} \dot{\theta}_{\mu\rho}). \quad (7.26)$$

Это есть известное соотношение между тензорами энергии-импульса и момента количества движения.

Главными задачами при квантовании полей являются вывод соотношений коммутации для операторов  $Q_{\alpha}(x)$  и формулировка волновых уравнений (7.2) в канонической форме

$$-\partial_{\alpha} F(x) = [F(x), T_{\mu}]. \quad (7.27)$$

В этом уравнении  $F(x)$  — произвольный функционал от  $Q_{\alpha}(x)$ .

Эта каноническая формулировка подробно будет обсуждена в последующих главах. Уравнение (7.27) показывает, что  $T_{\mu}$  является оператором смещения в направлении  $x_{\mu}$ .

Примером такого метода квантования является метод, предложенный Гейзенбергом и Паули [13, 14]. Величины  $P_{\alpha}(x)$ , сопряженные к  $Q_{\alpha}(x)$ , вводятся с помощью равенства  $P_{\alpha}(x) \equiv (-i) \partial L / \partial Q_{\alpha;4}$ . Принимается, что имеют место следующие канонические перестановочные соотношения<sup>1)</sup>:

$$[Q_{\alpha}(x, t), P_{\beta}(x', t)] = i \delta_{\alpha\beta} \delta(x - x').$$

Величины  $Q_{\alpha;4}$  могут быть исключены с помощью  $P_{\alpha}$ , в результате чего гамильтониан  $\bar{H} = \int d^3x (i P_{\alpha} Q_{\alpha;4} - L)$  станет идентичным с величиной  $T_4$ , определяемой равенством (7.27). В дальнейшем мы используем метод квантования, отличающийся от только что указанного.

В этой главе мы будем считать, что выражение (7.27) получено в результате какого-то пригодного процесса квантования. Тогда (7.3а), (7.24) и (7.17) дают равенства

$$[\dot{\theta}_{\mu\nu}(x), T_{\nu}] = [T_{\mu\nu}(x), T_{\nu}] = 0 \quad (7.28)$$

и

$$[M_{\mu\nu\sigma}(x), T_{\sigma}] = 0. \quad (7.29)$$

Эти уравнения являются квантовомеханическими выражениями законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения.

Теперь рассмотрим уравнение Шредингера, описывающее изменение состояния. Каждая точка на  $\sigma$  имеет различную координату времени  $t = t(x_k)$  ( $k = 1, 2, 3$ ). Это есть уравнение, определяющее трехмерноизогнутую поверхность  $\sigma$ . Поэтому поверхность  $\sigma(x)$ , которая бесконечно мало отличается от  $\sigma$  лишь непосредственно вблизи точки  $x$ , определяется уравнением  $t = t(x_k) + \delta t(x_k)$ , где

<sup>1)</sup>  $\delta(x - x') \equiv \delta(x_1 - x'_1) \delta(x_2 - x'_2) \delta(x_3 - x'_3)$ .

$\delta t(x_k)$  — бесконечно малая величина вблизи точки  $x$ . Принимая во внимание, что наблюдения в различных точках на  $\sigma$  не возмущают друг друга, можно функциональную производную (6.3) для  $\Psi[\sigma]$  записать в виде

$$\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \Psi[\sigma] = \lim_{\sigma \rightarrow \sigma(x)} \frac{\Psi[t(x_k) + \delta t(x_k)] - \Psi[t(x_k)]}{\int \int \int d^3x \delta t(x_k)}. \quad (7.30)$$

Так как в гейзенберговском представлении вектор состояния не зависит от времени, можно на основании (7.30) написать ковариантное уравнение Шредингера

$$\frac{\delta \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = 0. \quad (7.31)$$

Основой квантовой теории поля являются волновое уравнение (7.2) или (7.27) для  $Q_\alpha$ , соотношения коммутации для  $Q_\alpha$  и уравнение Шредингера.

## § 2. Комплексные поля и поля заряженных частиц

В общем случае компоненты поля  $Q_\alpha(x)$ , входящие в лагранжиан, являются компонентами различных полей, из коих некоторые могут быть комплексными. Мы называем поле вещественным или комплексным в зависимости от того, будут ли компоненты этого поля вещественными или комплексными.

Предположим, что имеется некоторое семейство  $n$  комплексных полей, описываемых с помощью  $n$  наборов компонент  $(Q_\alpha^{(j)}, Q_\alpha^{(j)*}; j=1, \dots, n)$ , и лагранжиан инвариантен относительно преобразований фазы всех полей, принадлежащих к этому семейству, т. е.

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(j)} &\rightarrow Q_\alpha^{(j)} e^{i\gamma}, \\ Q_\alpha^{(j)*} &\rightarrow Q_\alpha^{(j)*} e^{-i\gamma}; \end{aligned} \quad (7.32a)$$

здесь  $j=1, 2$  до  $n$ ;  $\gamma$  — постоянная. Такое семейство полей мы называем инвариантным относительно фазы. Если  $\gamma$  бесконечно мала, то инвариантность лагранжиана приводит к соотношению<sup>1)</sup>

$$\delta L \equiv i\gamma \left[ \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha^{(j)}} Q_\alpha^{(j)} + \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}^{(j)}} Q_{\alpha;\mu}^{(j)} - Q_\alpha^{(j)*} \frac{\partial L}{\partial Q_\alpha^{(j)*}} - Q_{\alpha;\mu}^{(j)*} \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}^{(j)*}} \right] = 0, \quad (7.33)$$

в котором подразумевается суммирование по  $j$ . Это соотношение дает уравнение непрерывности

$$\sum_{j=1}^n \partial_\mu N_\mu^{(j)} = 0, \quad (7.34a)$$

<sup>1)</sup>  $Q_{\alpha;\mu}^{(j)*}$  означает не  $(\partial_\mu Q_\alpha^{(j)})^*$ , а  $\partial_\mu (Q_\alpha^{(j)*})$ .

в котором через  $N_\mu^{(j)}$  обозначен „оператор тока  $j$ -поля“, определяемый выражением

$$N_\mu^{(j)} \equiv -i \left( \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}^{(j)}} Q_\alpha^{(j)} - Q_\alpha^{(j)*} \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}^{(j)*}} \right). \quad (7.35a)$$

В этом выражении суммировать по  $j$  не надо.

Из (7.34a), учитывая (6.56), получаем

$$\sum_{j=1}^n \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} N^{(j)} = 0, \quad (7.36a)$$

где

$$N^{(j)} \equiv \int d\sigma_\mu N_\mu^{(j)}. \quad (7.37)$$

Уравнение (7.36a) показывает, что сумма  $\sum N^{(j)}$  постоянна во времени. В гл. 8 мы покажем, что собственными значениями  $N^{(j)}$  являются разности чисел частиц и античастиц, принадлежащих к  $j$ -полю.

В качестве примера рассмотрим лагранжиан, который описывает взаимодействие вида

$$\bar{\psi}_p \psi_N U_\pi. \quad (7.38)$$

В этом выражении  $\psi_p$  и  $\psi_N$  — комплексные величины, описывающие поля протонов и нейтронов, а  $U_\pi$  — поле заряженных  $\pi$ -мезонов. Так как это взаимодействие инвариантно относительно преобразования фазы нуклонных полей ( $\psi_p, \psi_N$ ), то (7.36) приводит к сохранению разности между числами нуклонов и их античастиц в любом процессе превращений, обусловленных этим взаимодействием. Это принято называть сохранением нуклонов.

Одно из наиболее важных следствий, связанных с инвариантностью фазы, получается при рассмотрении любых заряженных полей  $Q_\alpha^{(c)}$  ( $c = 1, 2, \dots$ ). Мы постулируем, что для всех заряженных полей лагранжиан инвариантен относительно преобразования фазы. Это означает, что

$$\begin{aligned} Q_\alpha^{(c)} &\rightarrow Q_\alpha^{(c)} e^{ie\gamma}, \\ Q_\alpha^{(c)*} &\rightarrow Q_\alpha^{(c)*} e^{-ie\gamma}, \end{aligned} \quad (7.326)$$

здесь  $e$  — элементарный электрический заряд. Электрический ток  $J_\mu(x)$  поля  $Q_\alpha^{(c)}$  определяется следующим образом:

$$J_\mu \equiv -ie N_\mu^{(c)} = -ie \left( \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}^{(c)}} Q_\alpha^{(c)} - Q_\alpha^{(c)*} \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}^{(c)*}} \right), \quad (7.35b)$$

причем здесь суммирования по  $(c)$  производить не следует.

В рассматриваемом случае (7.34а) и (7.36а) приводят к уравнениям

$$\sum_c \partial_\mu J_\mu^{(c)} = 0 \quad (7.34б)$$

и

$$\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} e_t = 0, \quad (7.36б)$$

в которых „оператор полного заряда“  $e_t$  дается выражением

$$e_t \equiv \sum_c \int_\sigma d\sigma_\mu J_\mu^{(c)}. \quad (7.36в)$$

Собственные значения  $e_t$  интерпретируются как величины полного электрического заряда на поверхности  $\sigma$ . Уравнение (7.36б) выражает закон сохранения заряда.

При взаимодействии, задаваемом выражением (7.38), имеются два заряженных поля  $\bar{\psi}_p$  и  $U_\pi$  и выражение (7.38) инвариантно относительно преобразования фазы. Таким образом видно, что полный электрический заряд полей протонов и  $\pi$ -мезонов в процессах взаимодействий, обусловливаемых взаимодействием (7.38), сохраняется.

В теории электрона (см. гл. 3) мы видели, что заряды частицы и ее античастицы имеют противоположный знак. В гл. 8 будет показано, что это правило имеет общее значение. Поэтому можно заключить, что сохранение разности между числом заряженных частиц и их античастиц эквивалентно сохранению полного заряда.

Когда величина  $Q_\alpha$  вещественна, то величина  $J_\mu$ , определяемая в (7.34б), обращается в нуль. Другими словами, вещественные волновые функции описывают нейтральные поля. Примером теории вещественного нейтрального поля может служить теория Майорана. Хорошо известными нейтральными частицами, описываемыми вещественными величинами, являются фотон и нейтральный  $\pi$ -мезон. Однако необходимо заметить, что волновые функции нейтральных полей не всегда вещественны; примером этого могут служить нейтроны.

### § 3. Примеры

Эту главу мы закончим приложением полученных выше положений к некоторым конкретным примерам.

#### Пример 1. $S_{\mu\nu}$ - и спиновый момент количества движения

Как показано в гл. 3 и 5, величины  $S_{\mu\nu}$ , определяемые в (7.7в), даются выражениями

$$S_{\mu\nu} = [S_{\mu\nu;\alpha\beta}] = \begin{cases} \frac{1}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) & \text{спин } 1/2, \\ \beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu & \text{теория Дурффина — Кеммера} \\ & \text{(спин } 1, 0), \\ [\delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha}] & \text{вектор или псевдовектор } ^1), \\ 0 & \text{скаляр или псевдоскаляр.} \end{cases} \quad (7.39)$$

Из (7.9) имеем

$$[-iS_{12}, -iS_{23}] = i(-iS_{31}) \text{ и т. д.}$$

Эти соотношения коммутации показывают, что  $(-iS_{ik})$  ( $i, k = \text{Цикл. } (1, 2, 3)$ ) удовлетворяют правилам коммутации момента количества движения и поэтому имеют собственные значения  $(S, S-1, \dots, -S)$ , где  $S$  принимает целые или полуцелые значения. Ввиду того что каждая частица имеет  $(2S+1)$  внутренних степеней свободы, мы из (4.23) видим, что  $S$  является спином, а  $(2S+1)$  внутренних состояний частицы соответствуют различным направлениям спинового момента количества движения.

Полный момент количества движения  $P_{\mu\nu}$  складывается из двух частей:

$$P_{\mu\nu} = P_{\mu\nu}^0 + P_{\mu\nu}^S. \quad (7.40)$$

$$P_{\mu\nu}^0 = i \int_{\sigma} d\sigma_{\rho} (x_{\mu} T_{\nu\rho} - x_{\nu} T_{\mu\rho}), \quad (7.41)$$

$$P_{\mu\nu}^S = -i \int_{\sigma} d\sigma_{\rho} \left( \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\beta}} \right) S_{\mu\nu;\alpha\beta} Q_{\beta}. \quad (7.42)$$

Величина  $P_{\mu\nu}^0$  имеет известный вид орбитального момента количества движения, в то время как  $P_{\mu\nu}^S$  интерпретируется как спиновый момент количества движения. В гл. 9, пример 5, мы покажем, что  $P_{\mu\nu}^0$  и  $P_{\mu\nu}^S$  представляют сумму собственно орбитальных моментов количества движения частиц и их спиновых моментов количества движения.

**Пример 2. Свободные скалярные или псевдоскалярные поля  $U(x)$**

Волновое уравнение для  $U(x)$  дано в гл. 4 в виде

$$(\square - x^2)U(x) = 0. \quad (7.43)$$

Это уравнение может быть выведено из лагранжиана

$$L = -\partial_{\mu} U^* \cdot \partial_{\mu} U - x^2 U^* U. \quad (7.44)$$

<sup>1)</sup> Для векторного или псевдовекторного поля  $U_{\mu}$  выражение (7.7а) записывается следующим образом:

$$'U_{\sigma} = a_{\sigma\rho} U_{\rho} = U_{\sigma} + \delta\omega_{\sigma\rho} U_{\rho} = U_{\sigma} + \frac{1}{2} (\delta_{\mu\tau} \delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\tau\rho}) \delta\omega_{\mu\nu} U_{\rho}.$$

Таким образом, получаем третью строчку в (7.39).

Отсюда следует, что канонический тензор энергии-импульса и электрический ток даются выражениями

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu U^* \cdot \partial_\nu U + \partial_\nu U^* \cdot \partial_\mu U + L\delta_{\mu\nu}, \quad (7.45)$$

$$J_\mu = ie(\partial_\mu U^* \cdot U - U^* \cdot \partial_\mu U). \quad (7.46)$$

В этом случае в качестве симметричного тензора энергии-импульса может быть взят сам тензор  $T_{\mu\nu}$ . Эта теория может быть сформулирована с помощью вещественных величин ( $U^{(1)}, U^{(2)}$ ), определяемых равенствами

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(U^{(1)}(x) - iU^{(2)}(x)),$$

$$U^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(U^{(1)}(x) + iU^{(2)}(x)). \quad (7.47)$$

В этом случае (7.44) — (7.46) принимают вид

$$L = -\frac{1}{2}\{(\partial_\mu U^{(1)})^2 + (\partial_\mu U^{(2)})^2\} - \frac{1}{2}x^2(U^{(1)2} + U^{(2)2}), \quad (7.48)$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu U^{(1)} \cdot \partial_\nu U^{(1)} + \partial_\mu U^{(2)} \cdot \partial_\nu U^{(2)} + L\delta_{\mu\nu}, \quad (7.49a)$$

$$J_\mu = e(\partial_\mu U^{(1)} \cdot U^{(2)} - \partial_\mu U^{(2)} \cdot U^{(1)}). \quad (7.49b)$$

Теория вещественного (а потому нейтрального) поля со спином 0 может быть получена из выписанных выше выражений, если в них положить  $U^{(2)} = 0$ .

### Пример 3. Свободное электромагнитное поле $A_\mu(x)$

Волновое уравнение свободного электромагнитного поля имеет вид (см. гл. 4)

$$\square A_\mu(x) = 0. \quad (7.50)$$

Это уравнение может быть получено из плотности лагранжиана

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\mu)^2, \quad (7.51)$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad (7.52)$$

здесь  $F_{\mu\nu}$  — напряженность электромагнитного поля. Как показано в гл. 4, рассматриваемая теория инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (7.53)$$

$$\square \Lambda(x) = 0, \quad (7.54)$$

где  $\Lambda(x)$  —  $c$ -число. Следовательно, электромагнитная волна является поперечной волной с двумя независимыми компонентами (т. е. двумя состояниями поляризации).

Уравнение (7.50) может быть записано в виде

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} + \partial_\nu(\partial_\mu A_\mu) = 0. \quad (7.55)$$

Как показано в гл. 4, потенциалы  $A_\mu$  также должны удовлетворять условию Лоренца  $\partial_\mu A_\mu = 0$ , благодаря чему теория оказывается основывающейся на неприводимом представлении спина 1<sup>1)</sup>. Однако в гл. 8 мы покажем, что это условие несовместимо с соотношениями коммутации для  $A_\mu$ . Поэтому вместо условия  $\partial_\mu A_\mu = 0$  мы будем пользоваться другим условием, накладываемым на вектор состояния, которое имеет вид

$$(\partial_\mu A_\mu) \Psi = 0 \quad (\text{условие Лоренца}). \quad (7.56)$$

Это условие мы будем также называть условием Лоренца [7].

Последнее условие означает, что в природе осуществляются только такие состояния, для которых собственные значения  $\partial_\mu A_\mu$  равны нулю. Теперь докажем, что условие (7.56) совместимо с волновым уравнением. Если на плоской поверхности  $\sigma_t$ , соответствующей моменту времени  $t$ , имеют место условия

$$\begin{aligned} (\partial_\mu A_\mu(x, t)) \Psi &= 0, \\ (\partial_4 \partial_\mu A_\mu(x, t)) \Psi &= 0, \end{aligned} \quad (7.57)$$

то путем повторного использования (7.50) можно доказать, что

$$(\partial_4)^n (\partial_\mu A_\mu(x, t)) \Psi = 0. \quad (7.58)$$

В самом деле, (7.57) приводит к равенствам

$$(\partial_4)^{2m} \partial_\mu A_\mu(x, t) \Psi = (-1)^m (\partial_k \partial_k)^m \partial_\mu A_\mu(x, t) \Psi = 0$$

и

$$(\partial_4)^{2m+1} \partial_\mu A_\mu(x, t) \Psi = (-1)^m (\partial_k \partial_k)^m \partial_4 \partial_\mu A_\mu(x, t) \Psi = 0.$$

С другой стороны, величина  $\partial_\mu A_\mu(x, t')$  на поверхности  $\sigma_{t'}$ , соответствующей моменту времени  $t'$ , может быть представлена в виде следующего разложения в ряд:

$$\partial_\mu A_\mu(x, t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{i!} (t' - t)^n \partial_4^n (\partial_\mu A_\mu(x, t)).$$

Таким образом, имеем

$$\partial_\mu A_\mu(x, t') \Psi = 0. \quad (7.59)$$

Приведенные выше вычисления показывают, что условие Лоренца оказывается выполненным всегда, когда выполнено начальное условие (7.57). Поэтому условие Лоренца эквивалентно требованию, чтобы функция состояния удовлетворяла начальному условию (7.57).

Из (7.56) имеем

$$\partial_\nu \partial_\mu A_\nu \Psi = 0, \quad (7.60)$$

<sup>1)</sup> Когда это условие опущено, поле с отрицательной энергией со спином 0 оказывается перемешанным с полем с положительной энергией со спином 1.

что дает уравнение

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} \Psi = 0. \quad (7.61)$$

Это уравнение своим видом напоминает классические уравнения Максвелла и показывает, что теория Максвелла применима к состояниям, которые реализуются в природе.

Канонический тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  выводится из лагранжиана (7.51) и имеет вид

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} (F_{\mu\sigma} F_{\nu\sigma} + F_{\nu\sigma} F_{\mu\sigma}) - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \delta_{\mu\nu} + \partial_\rho A_\rho \cdot \partial_\mu A_\nu - \\ & - \frac{1}{2} (\partial_\rho A_\rho)^2 \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (F_{\nu\sigma} \cdot \partial_\sigma A_\mu + \partial_\sigma A_\mu \cdot F_{\nu\sigma}). \end{aligned} \quad (7.62)$$

Симметричный тензор энергии-импульса может быть получен с помощью (7.25) и (7.62). Пользуясь (7.62), (7.56) и (7.4), мы для полной величины энергии свободного электромагнитного поля на плоской поверхности  $\sigma_t$  получим выражение

$$\Psi^* T_4 \Psi = \frac{1}{2} \Psi^* \int d^3x [E^2 + H^2] \Psi, \quad (7.63)$$

в котором  $E$  и  $H$  — напряженности электрического и магнитного поля, задаваемые выражениями

$$E = i(F_{14}, F_{24}, F_{34}), \quad H = (F_2, F_{31}, F_{12}). \quad (7.64)$$

Таким образом, выражение (7.63) имеет вид, аналогичный выражению для энергии классического максвелловского поля.

#### Пример 4. Взаимодействие между электромагнитным полем и заряженными полями

Лагранжиан взаимодействующих между собой электромагнитного и некоторого другого заряженного полей состоит из трех частей — лагранжиана  $L^e$  [см. (7.51)] свободного электромагнитного поля, лагранжиана  $L^c$  другого заряженного поля и члена  $L'$ , представляющего взаимодействие. Таким образом,

$$L = L^e + L^c + L'. \quad (7.65)$$

Член  $L'$ , представляющий взаимодействие, должен быть построен таким образом, чтобы лагранжиан  $L$  был инвариантен относительно калибровочного преобразования

$$\left. \begin{aligned} Q_\alpha(x) &\rightarrow Q_\alpha(x) e^{i\epsilon\Lambda(x)}, \\ Q_\alpha^*(x) &\rightarrow Q_\alpha^*(x) e^{-i\epsilon\Lambda(x)}, \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{калибровочное преобразование 1-го рода,} \\ \text{калибровочное преобразование 2-го рода;} \end{array} \quad (7.66)$$

здесь  $\Lambda(x)$  — вещественное  $c$ -число, удовлетворяющее уравнению

$$\square \Lambda(x) = 0. \quad (7.67)$$



Калибровочное преобразование 1-го рода является обобщением преобразования фазы (7.32б) на случай, когда  $\Lambda(x)$  не является постоянной. Калибровочное преобразование 2-го рода совпадает с преобразованием (7.53). Поэтому лагранжиан  $L^e$  инвариантен относительно преобразований (7.66). При преобразованиях (7.66) члены, входящие в лагранжиан  $L^e$ , изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_\mu Q_\alpha &\rightarrow \{\partial_\mu Q_\alpha + ie(\partial_\mu \Lambda) Q_\alpha\} e^{ie\Lambda}, \\ \partial_\mu Q_\alpha^* &\rightarrow \{\partial_\mu Q_\alpha^* - ie(\partial_\mu \Lambda) Q_\alpha^*\} e^{-ie\Lambda}. \end{aligned} \quad (7.68)$$

Те изменения, которые возникают в величине  $L^e + L'$  благодаря заменам (7.68), должны быть скомпенсированы вкладом от калибровочного преобразования 2-го рода величин, входящих в  $L'$ . Так как  $L$  инвариантен относительно преобразования фазы (7.32б), то величина  $L^e + L'$  должна получаться из  $L^e$  с помощью следующих операций:

а)  $\partial_\mu Q_\alpha$  и  $\partial_\mu Q_\alpha^*$  в  $L^e$  заменяются на новые величины согласно следующему правилу:

$$\begin{aligned} \partial_\mu Q_\alpha &\rightarrow (\partial_\mu - ieA_\mu) Q_\alpha, \\ \partial_\mu Q_\alpha^* &\rightarrow (\partial_\mu + ieA_\mu) Q_\alpha^*. \end{aligned} \quad (7.69)$$

б) К лагранжиану могут быть добавлены члены, пропорциональные  $F_{\mu\nu}$ .

Члены взаимодействия, полученные в результате применения правил „а“ и „б“, мы будем называть соответственно членами взаимодействия  $A_\mu$ -типа и  $F_{\mu\nu}$ -типа, а сами взаимодействия — взаимодействиями  $A_\mu$ -типа и  $F_{\mu\nu}$ -типа<sup>1)</sup>.

Из (7.69) легко видеть, что для  $A_\mu$ -типа взаимодействий  $L'$  выражение для электрического тока (7.35б) может быть записано в виде

$$J_\mu = \frac{\partial L'}{\partial A_\mu}. \quad (7.70)$$

В том случае, когда  $L'$  содержит взаимодействие  $F_{\mu\nu}$ -типа, определение электрического тока можно обобщить следующим образом:

$$J_\mu = J_\mu^{(1)} + J_\mu^{(2)}, \quad (7.71)$$

$$J_\mu^{(1)} = \frac{\partial L'}{\partial A_\mu}, \quad (7.72)$$

$$J_\mu^{(2)} = 2\partial_\nu \left( \frac{\partial L'}{\partial F_{\mu\nu}} \right).$$

<sup>1)</sup> Например, заряд  $e$ , движущийся со скоростью  $v$ , взаимодействует с электромагнитным полем по  $A_\mu$ -типу:

$$V = e\varphi - \frac{1}{c}(vA),$$

а покоящийся магнитный момент  $\mu$  — по  $F_{\mu\nu}$ -типу:  $V = -(\mu \cdot H)$ . — Прим. ред.

Так как  $F_{\mu\nu}$  является антисимметричным тензором, то  $J_{\mu}^{(2)}$  удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_{\alpha} J_{\mu}^{(2)} = 0. \quad (7.73)$$

Из (7.346) и (7.73) для полного тока получается следующее уравнение непрерывности:

$$\partial_{\mu} J_{\mu} = 0. \quad (7.74)$$

Выражение (7.71) можно переписать в виде

$$J_{\mu} = \frac{\delta L'}{\delta A_{\mu}}, \quad (7.75)$$

причем  $\delta L'/\delta A_{\mu}$  определяется равенством

$$\frac{\delta L'}{\delta A_{\mu}} \equiv \frac{\partial L'}{\partial A_{\mu}} - \partial_{\nu} \left( \frac{\partial L'}{\partial (\partial_{\nu} A_{\mu})} \right).$$

Принимая во внимание волновое уравнение (7.2) и то обстоятельство, что  $L'$  и  $J_{\mu}$  определяются соответственно равенствами (7.51) и (7.75), можно без труда доказать, что

$$\square A_{\mu} = -J_{\mu}. \quad (7.76)$$

Это показывает, что (7.75) является разумным определением электрического тока.

Ввиду того что волновое уравнение (7.76) отличается от волнового уравнения свободного поля, необходимо заново доказать совместимость условия Лоренца (7.56) и волнового уравнения. Доказательство проводится аналогично случаю свободного поля [см. (7.57) — (7.59)], так как из (7.57) можно снова получить (7.58), используя равенство

$$\square \partial_{\mu} A_{\mu} = -\partial_{\mu} J_{\mu} = 0. \quad (7.77)$$

Из (7.56) и (7.76) имеем

$$(\partial_{\mu} F_{\mu\nu}) \Psi = -J_{\nu} \Psi. \quad (7.78)$$

Последнее уравнение по своему виду напоминает классическое уравнение Максвелла.

Теперь рассмотрим заряженное поле, взаимодействующее с постоянным по времени однородным магнитным полем  $\mathbf{H}$ . В том приближении, когда можно пренебречь членами со второй и выше степенями относительно  $\mathbf{H}$ , магнитный момент определяется как трехмерный вектор  $\mathbf{m}$  соотношением

$$(\mathbf{H} \cdot \mathbf{m}) = \int d^3x L'. \quad (7.79)$$

В этом соотношении через  $L'$  обозначен лагранжиан взаимодействия <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Как показано в гл. 10, в принятом приближении  $L' \approx -H'$ , где  $H'$  — энергия взаимодействия.

Поэтому на основании (7.70), когда взаимодействие  $F_{\mu\nu}$ -типа равно нулю<sup>1)</sup>, получаем

$$\int_{\sigma} d^3x J_{\nu} A_{\mu} \approx (\mathbf{H} \cdot \mathbf{m}). \quad (7.80)$$

С другой стороны, хорошо известно, что в случае постоянного магнитного поля можно взять такую калибровку потенциалов, чтобы было

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}, \mathbf{x}], \quad A_4 = 0. \quad (7.81)$$

Подставляя (7.81) в (7.80), получаем

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_{\sigma} d^3x [\mathbf{x}, \mathbf{J}]. \quad (7.82)$$

В случае заряженного поля со спином 0 (т. е. скалярного или псевдоскалярного поля) лагранжиан, полученный с помощью правила „а“ (стр. 122), имеет вид

$$L = -(\partial_{\mu} + ieA_{\mu})U^* \cdot (\partial_{\mu} - ieA_{\mu})U - \kappa^2 U^*U + L^e. \quad (7.83)$$

Отсюда, с учетом (7.35б), получается следующее выражение для электрического тока:

$$J_{\mu} = -ie(\partial_{\mu}U^* \cdot U - U^* \cdot \partial_{\mu}U) - 2e^2 A_{\mu}U^*U. \quad (7.84)$$

Это выражение можно также получить непосредственно из (7.70).

Пример 5. Векторные или псевдовекторные поля  $U_{\mu}(x)$

Как показано в гл. 4, волновые уравнения для  $U_{\mu}(x)$  имеют вид

$$\partial_{\nu}U_{\mu\nu} + \kappa^2 U_{\mu} = 0, \quad (7.85a)$$

$$U_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}U_{\nu} - \partial_{\nu}U_{\mu}. \quad (7.85б)$$

Уравнения (7.85а) и (7.85б) приводят к соотношению

$$\partial_{\mu}U_{\mu} = 0. \quad (7.86)$$

Далее отметим, что уравнение (7.85а) может быть получено из лагранжиана

$$L^c = -\frac{1}{2} U_{\mu\nu}^{\dagger} U_{\mu\nu} - \kappa^2 U_{\mu}^{\dagger} U_{\mu}. \quad (7.87)$$

Здесь  $U_{\mu}^{\dagger}$  и  $U_{\mu\nu}^{\dagger}$  определены следующим образом:

$$U_{\mu}^{\dagger} \equiv (U_1^*, U_2^*, U_3^*, iU_0^*) = (U_1^*, U_2^*, U_3^*, -U_4^*) \quad \text{и} \quad U_{\mu\nu}^{\dagger} = \partial_{\mu}U_{\nu}^{\dagger} - \partial_{\nu}U_{\mu}^{\dagger}.$$

Соображения § 2 остаются в силе даже тогда, когда мы заменим значок „\*“ значком „†“.

<sup>1)</sup> В этом выражении символ  $\approx$  означает, что мы пренебрегаем второй и более высокими степенями величины  $e\mathbf{H}$ .

Лагранжиан (7.87) приводит к следующему выражению для канонического тензора энергии-импульса:

$$T_{\mu\nu} = U_{\nu\rho}^{\dagger} \cdot \partial_{\mu} U_{\rho} + \partial_{\mu} U_{\rho}^{\dagger} \cdot U_{\nu\rho} + L^{\circ} \delta_{\mu\nu}. \quad (7.88)$$

Тензор (7.88) несимметричен; симметричный тензор энергии импульса может быть получен с помощью (7.21), (7.25) и (7.39) в виде

$$\begin{aligned} \theta_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} - \partial_{\rho} (U_{\nu\rho}^{\dagger} U_{\mu} + U_{\mu}^{\dagger} U_{\nu\rho}) = \\ &= U_{\mu\rho}^{\dagger} U_{\nu\rho} + U_{\nu\rho}^{\dagger} U_{\mu\rho} + \kappa^2 (U_{\mu}^{\dagger} U_{\nu} + U_{\nu}^{\dagger} U_{\mu}) - \\ &- \partial_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} U_{\rho\sigma}^{\dagger} U_{\rho\sigma} + \kappa^2 U_{\rho}^{\dagger} U_{\rho} \right). \end{aligned} \quad (7.89)$$

Ток для взаимодействия  $A_{\mu}$ -типа, полученный по правилу „а“ в примере 4, равен

$$\begin{aligned} J_{\mu}^{(1)} &= ie (U_{\mu\nu}^{\dagger} U_{\nu} - U_{\nu}^{\dagger} U_{\mu\nu}) - \\ &- e^2 (2A_{\mu} U_{\nu}^{\dagger} U_{\nu} - A_{\nu} U_{\mu}^{\dagger} U_{\nu} - A_{\nu} U_{\nu}^{\dagger} U_{\mu}). \end{aligned} \quad (7.90)$$

В согласии с правилом „б“ в примере 4 в лагранжиан можно еще добавить взаимодействие  $F_{\mu\nu}$ -типа в виде выражения

$$i \frac{e}{2} \gamma (U_{\mu}^{\dagger} U_{\nu} - U_{\nu}^{\dagger} U_{\mu}) F_{\mu\nu}, \quad (7.91)$$

в котором  $\gamma$  — вещественная постоянная. Этот добавок приводит к следующему выражению для электрического тока:

$$J_{\mu}^{(2)} = i\gamma \partial_{\nu} (U_{\mu}^{\dagger} U_{\nu} - U_{\nu}^{\dagger} U_{\mu}). \quad (7.92)$$

Поскольку для постоянного магнитного поля (7.91) имеет вид (7.79), то вклад в магнитный момент от выражения (7.91) равен

$$m_k^{(2)} = ie\gamma \int d^3x (U_i^{\dagger} U_m - U_m^{\dagger} U_i) \quad (k, l, m = \text{Цикл. } (1, 2, 3)).$$

С другой стороны, магнитный момент  $\mathbf{m}^{(1)}$ , обусловленный током  $J_{\mu}^{(1)}$ , согласно (7.90), равен

$$\begin{aligned} m_k^{(1)} &= \frac{1}{2} \int d^3x [x, J^{(1)}]_k d^3x \approx \\ &\approx \frac{ie}{2} \int d^3x [x_l (U_{m\nu}^{\dagger} U_{\nu} - U_{\nu}^{\dagger} U_{m\nu}) - x_m (U_{l\nu}^{\dagger} U_{\nu} - U_{\nu}^{\dagger} U_{l\nu})], \\ &\quad (k, l, m = \text{Цикл. } (1, 2, 3)), \end{aligned}$$

причем символ  $\approx$  означает пренебрежение второй и высшими степенями  $e$ . Это выражение для  $m_k^{(1)}$  на основании (7.85б) и (7.86)

может быть переписано в виде

$$m_k^{(1)} \approx -ie \int d^3x (U_l^\dagger U_m - U_m^\dagger U_l) - ie \int d^3x U_\nu^\dagger L_{lm} U_\nu - \\ - \frac{ie}{2} \int d^3x (x_l \partial_4 (U_m^\dagger U_4 - U_4^\dagger U_m) - x_m \partial_4 (U_l^\dagger U_4 - U_4^\dagger U_l)) \\ (k, l, m = \text{Цикл. (1, 2, 3)}).$$

В этом выражении через  $L_{lm}$  обозначен оператор орбитального момента количества движения частицы

$$L_{lm} \equiv x_l \partial_m - x_m \partial_l.$$

Для частиц малой энергии второй член, связанный с оператором орбитального момента количества движения  $L_{lm}$ , пренебрежимо мал ( $\partial U_\mu \approx 0$ ).

Третьим членом также можно пренебречь, так как (7.85а) приводит к равенству

$$U_4 \approx \frac{1}{x^2} \partial_4 \partial_4 U_4 = -\frac{1}{x^2} \partial_4 \partial_k U_k \approx 0.$$

Таким образом, имеем

$$m_k^{(1)} \approx -ie \int d^3x (U_l^\dagger U_m - U_m^\dagger U_l), \quad (k, l, m = \text{Цикл. (1, 2, 3)})$$

и поэтому для частиц с малой энергией полный магнитный момент равен

$$m_k^{(1)} + m_k^{(2)} \approx -ie(1 - \gamma) \int d^3x (U_l^\dagger U_m - U_m^\dagger U_l).$$

Другими словами, ток  $J_\mu^{(2)}$  к магнитному моменту частиц малой энергии добавляет множитель  $(1 - \gamma)$ .

В случае вещественной волновой функции  $U_\mu(x)$  (т. е. в случае нейтрального поля) имеем<sup>1)</sup>

$$L = -\frac{1}{4} U_{\mu\nu} U_{\mu\nu} - \frac{1}{2} x^2 U_\mu U_\mu, \quad (7.93)$$

$$T_{\mu\nu} = U_{\nu\rho} \partial_\mu U_\rho + L \delta_{\mu\nu}, \quad (7.94)$$

$$\theta_{\mu\nu} = U_{\nu\rho} U_{\rho\sigma} + x^2 U_\mu U_\nu - \delta_{\mu\nu} \left( \frac{1}{4} U_{\rho\sigma} U_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} x^2 U_\rho U_\rho \right). \quad (7.95)$$

### Пример 6. Формализм Штюкельберга для векторного поля

В этом формализме Штюкельберга [27] теория векторного поля принимает форму, весьма напоминающую форму теории электромагнитного поля.

<sup>1)</sup> Следует заметить, что для вещественного векторного поля вещественными компонентами поля являются величины  $(U_1, U_2, U_3, U_0)$ , а поэтому величина  $U_4 \equiv iU_0$  является мнимой.

В этой теории векторное поле описывается четырьмя компонентами вектора  $A_\mu^{(x)}$  и скаляром  $B(x)$ . Поэтому для исключения лишней компоненты необходимо ввести новое дополнительное условие. Это условие можно записать в виде, аналогичном условию Лоренца.

Лагранжиан в этой теории имеет вид<sup>1)</sup>

$$L = -\partial_\mu A_\nu^\dagger \cdot \partial_\mu A_\nu - x^2 A_\mu^\dagger A_\mu - \partial_\mu B^\dagger \cdot \partial_\mu B - x^2 B^\dagger B \quad (7.96)$$

и приводит к волновым уравнениям

$$(\square - x^2) A_\mu(x) = 0, \quad (\square - x^2) B(x) = 0. \quad (7.97)$$

Начальные условия на плоской поверхности  $\sigma_t$  в момент времени  $t$  задаются равенствами

$$\begin{aligned} (\partial_\mu A_\mu + xB)\Psi &= 0, & (\partial_\mu A_\mu^\dagger + xB^\dagger)\Psi &= 0, \\ \partial_4(\partial_\mu A_\mu + xB)\Psi &= 0, & \partial_4(\partial_\mu A_\mu^\dagger + xB^\dagger)\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Если эти равенства удовлетворены, то, используя (7.97), легко показать, что в тот же самый момент времени  $t$  имеют место соотношения

$$\begin{aligned} (\partial_4)^n (\partial_\mu A_\mu + xB)\Psi &= 0, \\ (\partial_4)^n (\partial_\mu A_\mu^\dagger + xB^\dagger)\Psi &= 0 \end{aligned}$$

[см. (7.58)]. По тем же самым соображениям, которые мы использовали в квантовой электродинамике [см. (7.59)], можно доказать, что волновые уравнения (7.97) согласуются с дополнительными условиями

$$\begin{aligned} (\partial_\mu A_\mu + xB)\Psi &= 0, \\ (\partial_\mu A_\mu^\dagger + xB^\dagger)\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (7.99)$$

При начальных условиях (7.98) дополнительные условия (7.99) могут быть записаны в виде

$$(\partial_\mu U_\mu)\Psi = 0, \quad (\partial_\mu U_\mu^\dagger)\Psi = 0, \quad (7.99a)$$

$$U_\mu \equiv A_\mu + \frac{1}{x} \partial_\mu B, \quad U_\mu^\dagger \equiv A_\mu^\dagger + \frac{1}{x} \partial_\mu B^\dagger. \quad (7.100)$$

Это показывает, что соотношение  $\partial_\mu U_\mu = 0$ , имеющее место в обычной теории векторных полей [см. (4.24б)], справедливо для состояний, которые действительно реализуются в природе.

Легко видеть, что рассматриваемая теория инвариантна относительно преобразований

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, & B &\rightarrow B - x\Lambda, \\ (\square - x^2) \Lambda &= 0. \end{aligned} \quad (7.101)$$

<sup>1)</sup>  $A_\mu^\dagger \equiv (A_1^*, A_2^*, A_3^*, iA_0^*), \quad B^\dagger \equiv B^*.$

Благодаря этому излишняя компонента не имеет физического значения. Так как преобразование для  $A_\mu$  в (7.101) имеет тот же вид, что и калибровочное преобразование для электромагнитного поля, то это преобразование будем называть калибровочным.

Для вещественного поля ( $A_\mu, B$ ) (т. е. нейтрального поля) лагранжиан и дополнительное условие записываются следующим образом:

$$L = -\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu \cdot \partial_\mu A_\nu + \kappa^2 A_\mu A_\mu) - \frac{1}{2} (\partial_\mu B \cdot \partial_\mu B + \kappa^2 B^2) \quad (7.102)$$

и

$$(\partial_\mu A_\mu + B)\Psi = 0. \quad (7.103)$$

Соотношение между этим нейтральным векторным полем и электромагнитным полем мы обсудим подробно в гл. 11.

### Пример 7. Теория Дuffина — Кеммера для $\psi(x)$

В теории Дuffина — Кеммера для частиц со спином (0, 1) волновое уравнение имеет вид (см. гл. 5)

$$(\beta_\mu \partial_\mu + \kappa)\psi = 0. \quad (7.104)$$

Это уравнение может быть получено из лагранжиана

$$L = -\bar{\psi} (\beta_\mu \partial_\mu + \kappa) \psi. \quad (7.105)$$

Отсюда для канонического тензора энергии-импульса и электрического тока получаются выражения

$$T_{\mu\nu} = \bar{\psi} \beta_\nu \partial_\mu \psi, \quad (7.106)$$

$$J_\mu = ie \bar{\psi} \beta_\mu \psi. \quad (7.107)$$

Из (7.21), (7.39) и (5.38) следуют равенства

$$\begin{aligned} f_{\mu, \nu\sigma} &= \frac{1}{2} \bar{\psi} \{ \beta_\nu [\beta_\mu, \beta_\sigma] + \beta_\sigma [\beta_\nu, \beta_\mu] - \beta_\mu [\beta_\nu, \beta_\sigma] \} \psi = \\ &= \bar{\psi} (\beta_\nu \beta_\mu \beta_\sigma - \beta_\sigma \beta_\nu \beta_\mu) \psi, \end{aligned} \quad (7.108a)$$

$$\begin{aligned} \partial_\sigma f_{\mu, \nu\sigma} &= \partial_\sigma \bar{\psi} \beta_\nu \beta_\mu \beta_\sigma \psi + \bar{\psi} \beta_\nu \beta_\mu \beta_\sigma \partial_\sigma \psi - \bar{\psi} \beta_\sigma \partial_\sigma \psi \beta_\nu \beta_\mu - \partial_\sigma \bar{\psi} \beta_\nu \beta_\mu \psi \beta_\sigma = \\ &= \kappa \bar{\psi} \beta_\nu \beta_\mu \psi - \bar{\psi} \beta_\nu \beta_\mu \beta_\sigma \partial_\sigma \psi + \bar{\psi} \beta_\sigma \partial_\mu \psi - \partial_\sigma \bar{\psi} \beta_\nu \beta_\mu \psi = \\ &= \kappa \{ \bar{\psi} (\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu) \psi - \delta_{\mu\nu} \bar{\psi} \psi \} + \bar{\psi} \beta_\nu \partial_\mu \psi. \end{aligned} \quad (7.108b)$$

Таким образом, симметричный тензор энергии-импульса имеет вид

$$\theta_{\mu\nu} = -\kappa \{ \bar{\psi} (\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu) \psi - \delta_{\mu\nu} \bar{\psi} \psi \}. \quad (7.109a)$$

В частности, энергия поля равна [см. (5.43)]:

$$W = -\theta_{44} = \kappa \psi^* \psi. \quad (7.109b)$$

Электромагнитное взаимодействие может быть получено с помощью правил „а“ и „б“ в примере 4.

Пример 8. Спинорное поле  $\psi(x)$ Волновые уравнения для  $\psi$ 

$$\begin{aligned}(\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa)\psi &= 0, \\ \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu - \kappa \bar{\psi} &= 0\end{aligned}\quad (7.110)$$

в этом случае могут быть получены из лагранжиана

$$L = -\frac{1}{2}(\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \cdot \gamma_\mu \psi) - \kappa \bar{\psi} \psi. \quad (7.111)$$

Отсюда получаем

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\bar{\psi} \gamma_\nu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \cdot \gamma_\nu \psi), \quad (7.112)$$

$$\begin{aligned}f_{\mu, \nu\sigma} &= \frac{1}{i6} \bar{\psi} \{ \gamma_\sigma [\gamma_\mu, \gamma_\nu] + \gamma_\nu [\gamma_\sigma, \gamma_\mu] - \gamma_\mu [\gamma_\nu, \gamma_\sigma] + \\ &+ [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \gamma_\sigma + [\gamma_\sigma, \gamma_\mu] \gamma_\nu - [\gamma_\nu, \gamma_\sigma] \gamma_\mu \} \psi = \\ &= \frac{1}{4} \bar{\psi} (\gamma_\sigma \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\sigma \partial_{\mu\nu} - \gamma_\nu \partial_{\sigma\mu} + \gamma_\mu \partial_{\nu\sigma}) \psi,\end{aligned}$$

$$\partial_\sigma f_{\mu, \nu\sigma} = \frac{1}{4} (\bar{\psi} \gamma_\nu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi) - \frac{1}{4} (\partial_\mu \bar{\psi} \cdot \gamma_\nu \psi - \partial_\nu \bar{\psi} \cdot \gamma_\mu \psi),$$

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{4} (\bar{\psi} \gamma_\nu \partial_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi) - \frac{1}{4} (\partial_\mu \bar{\psi} \cdot \gamma_\nu \psi + \partial_\nu \bar{\psi} \cdot \gamma_\mu \psi). \quad (7.113)$$

Электромагнитное взаимодействие может быть получено по правилам „а“ и „б“ примера 4 и дается выражением

$$L' = ie \bar{\psi} \gamma_\mu \psi A_\mu + \frac{e}{8} \frac{i}{\kappa} \rho \bar{\psi} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \psi F_{\mu\nu}, \quad (7.114)$$

в котором  $\rho$  — постоянная величина. Первый и второй члены являются соответственно взаимодействиями  $A_\mu$ - и  $F_{\mu\nu}$ -типа. Поскольку последний член имеет тот же вид, что и (7.79) для постоянного магнитного поля  $H$ , то он приводит к появлению собственного магнитного момента. Получаемое из (7.114) выражение для электрического тока записывается в виде

$$J_\mu = J_\mu^{(1)} + J_\mu^{(2)}, \quad (7.115a)$$

$$J_\mu^{(1)} = ie \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \quad (7.115b)$$

$$J_\mu^{(2)} = \frac{i}{4\kappa} \rho e \partial_\nu \{ \bar{\psi} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \psi \}. \quad (7.115b)$$

Используя (3.2) и уравнения поля (7.110), можно выражение для тока  $J_\mu^{(1)}$ , связанного с взаимодействием  $A_\mu$ -типа, переписать следующим образом:

$$J_\mu^{(1)} = -\frac{ie}{4\kappa} \partial_\nu \{ \bar{\psi} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \psi \} + \frac{ie}{2\kappa} (\partial_\mu \bar{\psi} \cdot \psi - \bar{\psi} \cdot \partial_\mu \psi).$$



Последний член обычно называется конвекционным током. Магнитный момент, обусловливаемый током  $J_\mu^{(1)}$ , равен

$$\begin{aligned} m_k^{(1)} &= \frac{1}{2} \int d^3x [\mathbf{x}, \mathbf{J}^{(1)}]_k = \\ &= -\frac{ie}{4\kappa} \int d^3x \bar{\psi} (\gamma_l \gamma_m - \gamma_m \gamma_l) \psi + \\ &+ \frac{ie}{4\kappa} \int d^3x (L_{lm} \bar{\psi} \cdot \psi - \bar{\psi} \cdot L_{lm} \psi) - \\ &- \frac{ie}{4\kappa} \int d^3x \{x_l \partial_4 (\bar{\psi} \gamma_m \gamma_4 \psi) - x_m \partial_4 (\bar{\psi} \gamma_l \gamma_4 \psi)\} \\ &\quad (k, l, m = \text{Цикл. (1, 2, 3)}), \end{aligned} \quad (7.115\text{г})$$

где

$$L_{lm} = x_l \partial_m - x_m \partial_l.$$

С другой стороны, магнитный момент, обусловленный током  $J_\mu^{(2)}$ , дается выражением

$$m_k^{(2)} = \frac{ie}{4\kappa} \rho \int d^3x \bar{\psi} (\gamma_l \gamma_m - \gamma_m \gamma_l) \psi \quad (k, l, m = \text{Цикл. (1, 2, 3)})$$

[см. (7.79)]. Второй член в (7.115г) пренебрежимо мал, так как он зависит от оператора орбитального момента количества движения  $L_{lm}$  частиц малых энергий ( $\partial\psi \approx 0$ ). Далее, третий член в (7.115г) дает пренебрежимо малый вклад в средние значения магнитного момента частицы малой энергии ( $\mathbf{k} \approx 0$ ). Действительно, с учетом (3.61) имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} \approx 0 | \partial_4 (\bar{\psi} \gamma_m \gamma_4 \psi) | \mathbf{k} \approx 0) &= (\mathbf{k} \approx 0 | -\bar{\psi} \gamma_m (\partial_k \gamma_k + \kappa) \psi + \\ &+ (\partial_k \gamma_k^T - \kappa) \bar{\psi} \cdot \gamma_m \psi | \mathbf{k} \approx 0) = 2\kappa i (\mathbf{k} \approx 0 | \psi^* \alpha_m \psi | \mathbf{k} \approx 0) = \frac{2\kappa i k_m}{K_0} \approx 0. \end{aligned}$$

Таким образом, полный магнитный момент частицы малой энергии записывается в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} \approx 0 | m_k | \mathbf{k} \approx 0) &= (\mathbf{k} \approx 0 | m_k^{(1)} + m_k^{(2)} | \mathbf{k} \approx 0) \approx \\ &\approx -\frac{ie}{4\kappa} (1 - \rho) \left( \mathbf{k} \approx 0 \left| \int d^3x \bar{\psi} (\gamma_l \gamma_m - \gamma_m \gamma_l) \psi \right| \mathbf{k} \approx 0 \right) \\ &\quad (k, l, m = \text{Цикл. (1, 2, 3)}). \end{aligned}$$

Другими словами, ток  $J_\mu^{(2)}$  приводит к появлению множителя  $(1 - \rho)$  в выражении для магнитного момента частицы малой энергии.

Скалярное взаимодействие (константа связи  $f$ ) и векторное взаимодействие (константа связи  $g$ ) между вещественным (и, следовательно, нейтральным) скалярным полем  $U$  и спинорным полем  $\psi$  представляется лагранжианом взаимодействия

$$L = f \bar{\psi} \psi U + i g \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \partial_\mu U. \quad (7.116)$$

Псевдоскалярное взаимодействие (константа связи  $f$ ) и псевдовек-

торное взаимодействие (константа связи  $g$ ) между вещественным (и, следовательно, нейтральным) псевдоскалярным полем  $U$  и спинорным полем  $\psi$  представляется в виде

$$L' = i\bar{\psi}\gamma_5\psi U + ig\bar{\psi}\gamma_s\gamma_\mu\psi\partial_\mu U. \quad (7.117)$$

Векторное взаимодействие между вещественным (и, таким образом, нейтральным) векторным полем  $U_\mu$  и спинорным полем  $\psi$  дается лагранжианом взаимодействия

$$L' = i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi U_\mu. \quad (7.118)$$

Псевдовекторное взаимодействие между вещественным (и поэтому нейтральным) псевдовекторным полем  $U_\mu$  и спинорным полем  $\psi$  записывается с помощью выражения

$$L' = i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi U_\mu. \quad (7.119)$$

На примере случая (7.118) мы объясним, каким образом можно прийти к указанным выше взаимодействиям.

а) Форма  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi U_\mu$  диктуется требованием соблюдения лоренцовой инвариантности.

б) Так как оператор, эрмитово-сопряженный к  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi U_\mu$ , есть  $-\bar{\psi}\gamma_\mu\psi U_\mu$ , то требование эрмитовости лагранжиана приводит к необходимости добавления мнимой единицы  $i$  в выражение (7.118). Таким образом, получаем (7.118). Другие взаимодействия получаются с помощью аналогичных соображений.

Теперь рассмотрим взаимодействия между четырьмя спинорными полями  $\psi^a, \psi^b, \psi^c, \psi^d$ . Линейно независимые взаимодействия, которые не содержат производных, с учетом (3.5) даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} L^{(1)}(a, b, c, d) &= g(\bar{\psi}^a\gamma^1\psi^b)(\bar{\psi}^c\gamma^1\psi^d) + \text{Эрм. сопр.} = \\ &= g(\bar{\psi}^a\psi^b)(\bar{\psi}^c\psi^d) + \text{Эрм. сопр.} \quad (\text{скалярный тип, } S), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{(2)}(a, b, c, d) &= \sum_{A=2}^5 g(\bar{\psi}^a\gamma^A\psi^b)(\bar{\psi}^c\gamma^A\psi^d) + \text{Эрм. сопр.} = \\ &= g(\bar{\psi}^a\gamma_\mu\psi^b)(\bar{\psi}^c\gamma_\mu\psi^d) + \text{Эрм. сопр.} \quad (\text{векторный тип, } V), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{(3)}(a, b, c, d) &= \sum_{A=6}^{11} g(\bar{\psi}^a\gamma^A\psi^b)(\bar{\psi}^c\gamma^A\psi^d) + \text{Эрм. сопр.} = \\ &= -\frac{1}{8}g(\bar{\psi}^a[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi^b)(\bar{\psi}^c[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\psi^d) + \text{Эрм. сопр.} \\ &\quad (\text{тензорный тип, } T), \quad (7.120) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{(4)}(a, b, c, d) &= \sum_{A=12}^{15} g(\bar{\psi}^a\gamma^A\psi^b)(\bar{\psi}^c\gamma^A\psi^d) + \text{Эрм. сопр.} = \\ &= -g(\bar{\psi}^a\gamma_5\gamma_\mu\psi^b)(\bar{\psi}^c\gamma_5\gamma_\mu\psi^d) + \text{Эрм. сопр.} \quad (\text{псевдовекторный тип, } A), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L^{(5)}(a, b, c, d) &= g(\bar{\psi}^a\gamma^5\psi^b)(\bar{\psi}^c\gamma^5\psi^d) + \text{Эрм. сопр.} = \\ &= g(\bar{\psi}^a\gamma_5\psi^b)(\bar{\psi}^c\gamma_5\psi^d) + \text{Эрм. сопр.} \quad (\text{псевдоскалярный тип, } P), \end{aligned}$$

причем „эрм. сопр.“ означает „эрмитово-сопряженное выражение“. Очевидно, что эти взаимодействия инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Любое лоренц-инвариантное взаимодействие, не содержащее производных, может быть представлено в виде линейной комбинации пяти взаимодействий, указанных в (7.120). В частности, если  $O$  — некоторое произведение величин  $\gamma_\mu$ , то взаимодействие

$$(\bar{\psi}^a O \psi^a) (\bar{\psi}^c O \psi^b),$$

в котором порядок индексов  $(a, b, c, d)$  не является в общем случае строго определенным, может быть записано в виде такого рода линейной комбинации. Например, можно показать, что скалярное взаимодействие  $L^{(1)}(a, d, c, b)$  может быть записано в виде

$$L^{(1)}(a, d, c, b) = g (\bar{\psi}^a \psi^a) (\bar{\psi}^c \psi^b) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^5 L^{(k)}(a, b, c, d). \quad (7.121)$$

В самом деле, используя (3.44а), получаем

$$(\bar{\psi}^a \psi^a) (\bar{\psi}^c \psi^b) = \frac{1}{4} \bar{\psi}_\alpha^a \psi_\beta^a \bar{\psi}_\rho^c \psi_\delta^b \gamma_{\alpha\beta}^A \gamma_{\rho\delta}^A,$$

что согласуется с (7.121). В общем случае [10] имеем

$$L^{(k)}(a, d, c, b) = a^{kt} L^{(t)}(a, b, c, d), \quad (7.122)$$

где

$$[a^{kt}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \quad (7.123)$$

В качестве примера вычислим  $a^{2t}$ . Из (3.44б) получаем

$$g (\bar{\psi}^a \gamma_\mu \psi^a) (\bar{\psi}^c \gamma_\mu \psi^b) = \frac{1}{4} g (\bar{\psi}^a \gamma^A \psi^a) (\bar{\psi}^c \gamma_\mu \gamma^A \gamma_\mu \psi^b) = L^{(1)}(a, b, c, d) - \frac{1}{2} L^{(2)}(a, b, c, d) + \frac{1}{2} L^{(4)}(a, b, c, d) - L^{(5)}(a, b, c, d),$$

где учтены следующие соотношения:

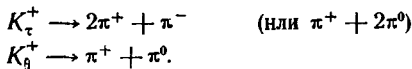
$$\gamma_\mu \gamma^A \gamma_\mu = \begin{cases} 4 & \text{для } A=1 \\ -2 & \text{для } A=2, \dots, 5 \\ 0 & \text{для } A=6, \dots, 11 \\ 2 & \text{для } A=12, \dots, 15 \\ -4 & \text{для } A=16. \end{cases}$$

Когда одна из волновых функций  $\psi^a, \psi^b, \psi^c, \psi^d$  является псевдоспинором, инвариантность относительно преобразований Лоренца требует вида взаимодействия, отличного от (7.120) (см. гл. 3, § 9).

Как видно из (7.122), классификация по типам  $S, V, T, A, P$  определяется порядком индексов  $a, b, c, d$ . В теории  $\beta$ -распада обычно принимается такой порядок  $a, b, c, d$ , при котором  $\psi^a$  означает протон,  $\psi^b$  — нейтрон,  $\psi^c$  — электрон, а  $\psi^d$  — нейтрино.

Экспериментальные данные по  $\beta$ -взаимодействиям получаются из анализа энергетического спектра электронов, времени жизни при  $\beta$ -распаде, спинов и энергетических уровней материнских и дочерних ядер и т. д. Полученные в последние годы экспериментальные данные по энергетическому распределению  $\beta$ -спектров либо от разрешенных, либо от запрещенных переходов и классификация сравнительных периодов полураспада различных  $\beta$ -активных веществ находятся в довольно хорошем согласии с взаимодействиями (7.120) [6]. Более того, эти экспериментальные данные указывают на взаимодействие типа  $T$  и на линейную комбинацию взаимодействий типов  $(S, T, P)$ , как наиболее вероятные [31]. Однако в настоящее время неизвестно, обуславливаются ли  $\beta$ -распады прямыми взаимодействиями четырех спинорных полей или же промежуточными полями целого спина (см. гл. 15)<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Недавно Ли и Янг [32] выдвинули гипотезу о несохранении четности при слабых взаимодействиях. К этому выводу они пришли, анализируя распад заряженных  $K^+$ -мезонов. Всего известно пять типов распада  $K^+$ -мезонов, два из которых мы здесь выпишем:



Распад  $K^+$ -мезона описывается скалярным взаимодействием, а распад  $K^+$ -мезона на три частицы будет описываться псевдоскалярной функцией. Если  $K^+$ - и  $K^0$ -мезоны представляют собой отличные частицы, то эти два различных распада были бы друг от друга совершенно не зависимыми.

На основе же анализа экспериментальных фактов Ли и Янг выдвинули гипотезу, что  $K^+$ - и  $K^0$ -мезоны тождественны друг с другом. Тогда одной и той же частице присуще и скалярное и псевдоскалярное взаимодействие, обладающее различной четностью (при зеркальных преобразованиях скаляр остается без изменений, а псевдоскаляр изменяет свой знак).

Особенно сильное теоретическое развитие фундаментальные идеи Ли и Янга о несохранении четности получили в случаях слабого взаимодействия с участием нейтрино ( $\beta$ -распад, распад  $\pi$ - и  $\mu$ -мезонов). Ли и Янг [33], а также Ландау [34] и Салам [35] построили теорию двухкомпонентного нейтрино с массой покоя, равной нулю. Согласно этой теории, нейтрино отличается от антинейтрино проекцией спина на направление движения.

Основным следствием теории Ли и Янга является тот факт, что заряженные частицы, которые образуются одновременно с нейтрино или антинейтрино, также будут обладать некоторой преимущественной ориентацией спина на направление движения. Это, с одной стороны, должно приводить к асимметрии углового распределения электронов при  $\beta$ -распаде ориентированных ядер (экспериментально это было подтверждено опытами Ву и др. при

Пример 9. Теория Рарита-Швингера для поля  $\psi_\mu$  со спином  $3/2$

Волновое уравнение для  $\psi_\mu$

$$(\gamma_\rho \partial_\rho + \kappa) \psi_\mu - \frac{1}{3} (\gamma_\nu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) \psi_\nu + \frac{1}{3} \gamma_\nu (\gamma_\rho \partial_\rho - \kappa) \gamma_\nu \psi_\nu = 0$$

может быть получено из лагранжиана

$$L = - \left\{ \bar{\psi}_\mu (\gamma_\rho \partial_\rho + \kappa) \psi_\mu - \frac{1}{3} \bar{\psi}_\mu (\gamma_\nu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) \psi_\nu + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \bar{\psi}_\mu \gamma_\mu (\gamma_\rho \partial_\rho - \kappa) \gamma_\nu \psi_\nu \right\}. \quad (7.124)$$

исследовании  $\beta$ -распада ориентированных ядер  $\text{Co}^{60}$  [36]), а с другой стороны, к поляризации получившихся в результате распада заряженных частиц, как было показано экспериментально [37, 38] при распаде  $\pi$ -мезона на  $\mu$ -мезон и нейтрино (спин  $\mu$ -мезона, в полном согласии с предсказаниями Ли и Янга, всегда ориентирован в одном направлении).

Точно так же при  $\beta$ -распаде от неориентированных ядер должна по этой теории наблюдаться частичная круговая поляризация (со степенью поляризации  $\pm v/c$ ). Этот результат также был подтвержден экспериментально [39]. В связи с этим особый интерес представляет изучение поляризации тормозных фотонов от электронов  $\beta$ -распада. В самом деле, электроны со спином, ориентированным по (или против) направлению своего движения, излучают фотоны только с круговой поляризацией (правой или левой). Этот вывод также находится в хорошем согласии с экспериментальными данными [40].

Указанные авторы теории двухкомпонентного нейтрино брали для электрона уравнение Дирака, явно разделенное явно на спиновые состояния, и поэтому для исследования поляризационных свойств им пришлось энергию взаимодействия брать в виде суммы линейной комбинации скалярных и псевдоскалярных величин и т. д.

Однако при рассмотрении этого вопроса можно воспользоваться уравнением Дирака, явно разделенным по спиновым состояниям [41]. Тогда для исследования поляризационных свойств вновь образовавшихся заряженных дираковских частиц мы можем воспользоваться при вычислении шпура формулой (20.21) монографии [41], обобщив ее на случай дираковских частиц, обладающих различной массой, например электронно-нейтринное поле [42].

В частности, если одной из частиц является нейтрино (энергия  $E = c\hbar k$ , импульс  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ , масса покоя  $m_0 = \frac{\hbar k_0}{c} = 0$ ), а другой частицей является электрон или  $\mu$ -мезон ( $K' = \sqrt{k'^2 + k_0'^2}$ ,  $\mathbf{k}'$ ,  $k_0'$ ), то тогда при вычислении шпура мы должны воспользоваться не формулой Казимира, в которой учитывается лишь явное разделение состояний по знаку энергии, а формулой, в которой явно произведено разделение состояний по знаку спина.

$$\langle \gamma, \gamma' \rangle = \frac{1}{16} \text{Sp} \gamma \left( 1 + \rho_1 \epsilon' s' \frac{k'}{K'} + \rho_2 \epsilon' \frac{k_0'}{K'} \right) \times \\ \times \left( 1 + s' \frac{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k}')}{K'} \right) \gamma' \left( 1 + \rho_1 s \epsilon \right) \left( 1 + s \frac{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{k})}{k} \right);$$

## Пример 10. Изотопический спин

Так как превращение протона в нейтрон сопровождается либо порождением  $\pi^+$ -мезона, либо аннигиляцией  $\pi^-$ -мезона, то оно должно обуславливаться взаимодействием вида

$$\bar{\psi}^{(2)} O \psi^{(1)} U^* = \bar{\psi} O \tau_- \psi U^*, \quad (7.125)$$

где

$$\psi \equiv \begin{bmatrix} \psi^{(1)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \tau_- \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (7.126a)$$

здесь  $\psi^{(1)}$  и  $\psi^{(2)}$  — волновые функции соответственно протона и нейтрона, а  $O$  — некоторое произведение величин  $\gamma_\mu$ . Спин  $\pi$ -мезона в (7.125) предполагается равным нулю (см. гл. 10, пример 6),  $\tau_-$  является матрицей с двумя строками и двумя столбцами, причем в этой матрице все элементы равны нулю, за исключением одного ( $\tau_-$ )<sub>21</sub> (соответствующего переходу  $P \rightarrow N$ ), который равен единице. Поэтому матрица  $\tau_+$ , эрмитово-сопряженная к  $\tau_-$ , связана с превращением  $N \rightarrow P$ . Полное взаимодействие может быть получено в виде суммы члена (7.125) с членом, эрмитово-сопряженным к (7.125)<sup>1</sup>).

$$L'_c = f \bar{\psi} O \tau_- \psi U^* + f \bar{\psi} O \tau_+ \psi U, \quad (7.127)$$

где матрица  $\tau_+$  определяется выражением

$$\tau_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.126b)$$

здесь  $\gamma$ ,  $\gamma'$  — матрицы Дирака, определяющие энергию взаимодействия,  $\epsilon'$  — знак энергии у электрона или  $\mu$ -мезона, а  $s' = \pm 1$  проекция спина на направление движения. Для получения результатов Ли и Янга мы должны положить для нейтрино  $s = 1$ , а для антинейтрино  $s = -1$ . Тогда, полагая  $s' = 1$  и  $\epsilon' = 1$ , мы найдем вероятность образования электронов, спин которых направлен по движению, а при  $s' = -1$ ,  $\epsilon' = 1$  — против движения. Для позитронов мы должны положить  $\epsilon' = -1$  и изменить знак у импульса  $k'$ .

Таким образом, выводы теории двухкомпонентного нейтрино о поляризационных свойствах заряженных частиц, образовавшихся в результате слабого взаимодействия, находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными. Однако полного количественного совпадения теории слабого взаимодействия с экспериментом (которое, например, достигнуто в квантовой электродинамике) мы еще не имеем. Возможно, что наблюдающиеся неувязки связаны с не совсем точным выбором закона взаимодействия между частицами, возможно, что здесь имеются еще какие-то другие принципиально не разрешенные вопросы. Во всяком случае, число теоретических и экспериментальных работ, посвященных частицам с ориентированным спином, с неослабевающей быстротой возрастает с каждым днем. — *Прим. ред.*

<sup>1</sup>) Всегда можно выбрать величину  $O$  и фазовый множитель  $f$  так, чтобы имело место равенство  $fO = f^* \gamma_4 O^* \gamma_4$ .

Воспользовавшись матрицами  $\tau_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), задаваемыми выражениями

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (7.128)$$

можно  $\tau_+$  и  $\tau_-$  записать следующим образом:

$$\tau_{\pm} = \frac{1}{2} (\tau_1 \pm i\tau_2). \quad (7.129)$$

Матрицы  $\tau_k$  удовлетворяют соотношениям коммутации

$$\left[ \frac{1}{2} \tau_k, \frac{1}{2} \tau_l \right] = i \frac{1}{2} \tau_m \quad (k, l, m = \text{Цикл. } (1, 2, 3)). \quad (7.130)$$

Это показывает, что  $(\frac{1}{2})\tau_k$  имеют те же свойства, что и момент количества движения  $(\frac{1}{2})\sigma_k$  [см. (3.55)]. Из (7.128) видно, что два собственных значения  $\pm(\frac{1}{2})$  и  $-(\frac{1}{2})$  матрицы  $(\frac{1}{2})\tau_3$  относятся соответственно к состояниям протона и нейтрона. При этой формулировке протон и нейтрон рассматриваются как различные состояния одной и той же частицы — нуклона. Матрицы  $\tau_k$  обычно называются матрицами изотопического спина нуклона.

Из (7.47) имеем

$$(\tau_+ U + \tau_- U^*) = V \sqrt{2} \sum_{k=1}^2 \tau_k U^{(k)}. \quad (7.131)$$

Таким образом, на основе (7.127) взаимодействие между заряженным полем  $U^{(k)}$  ( $k = 1, 2$ ) и нуклоном может быть записано в виде

$$L'_c = V \sqrt{2} f' \bar{\psi} \sum_{k=1}^2 \bar{\psi} O \tau_k \psi U^{(k)}. \quad (7.132)$$

С другой стороны, общий вид взаимодействия между вещественными (и поэтому нейтральными) скалярными полями  $U^{(3)}$ ,  $U^{(4)}$  и нуклоном записывается следующим образом:

$$L'_n = V \sqrt{2} f' \bar{\psi} O \tau_3 \psi U^{(3)} + g \bar{\psi} O \psi U^{(4)}. \quad (7.133)$$

Теперь введем в рассмотрение операторы мезонного поля

$$L_\mu \equiv (-i) \partial_\mu [\mathbf{U}, \mathbf{U}], \quad (7.134)$$

$$L[\sigma] = i \int d\sigma_\mu L_\mu, \quad (7.135)$$

где  $\mathbf{U}$  — трехмерный вектор с компонентами  $U^{(k)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ), а квадратными скобками обозначено векторное произведение. Из (7.49б) видно, что оператор  $eL_3[\sigma]$  эквивалентен оператору полного заряда мезонного поля

$$e_i^{(m)} = eL_3[\sigma]. \quad (7.136a)$$

Из (7.37) и (7.115б) получается следующее выражение для оператора полного заряда нуклонного поля  $e_i^{(n)}$ :

$$e_i^{(n)} = ie \int_0 d\sigma_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \psi = \frac{e}{2} (\tau_3 [\sigma] + I[\sigma]). \quad (7.136б)$$

Здесь посредством  $\tau_3[\sigma]$  обозначена третья компонента трехмерного вектора  $\boldsymbol{\tau}[\sigma]$ , определяемого равенством

$$\boldsymbol{\tau}[\sigma] \equiv i \int_0 d\sigma_\mu \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma}_\mu \boldsymbol{\tau} \psi,$$

а величина  $I[\sigma]$  равна

$$I[\sigma] \equiv i \int_0 d\sigma_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi.$$

Сравнивая это выражение с (7.35а), видим, что собственными значениями  $I[\sigma]$  являются как раз числа нуклонов. Вводя оператор  $J$  с помощью равенства

$$J[\sigma] = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}[\sigma] + L[\sigma], \quad (7.137а)$$

заключаем, что оператор

$$e_i = e_i^{(n)} + e_i^{(m)} = e \left\{ J_3[\sigma] + \frac{1}{2} I[\sigma] \right\} \quad (7.137б)$$

является оператором полного заряда системы, состоящей из мезонов и нуклонов. В силу закона сохранения заряда этот оператор не зависит от времени. Операторы  $J[\sigma]$ ,  $(1/2)\boldsymbol{\tau}[\sigma]$  и  $L[\sigma]$  называются соответственно операторами полного изотопического спина, изотопического спина нуклона и изотопического спина мезона.

Теперь рассмотрим вращение на угол  $\alpha$  вокруг единичного вектора  $\mathbf{e}$  в трехмерном изотопическом пространстве. Потребуем, чтобы при этом вращении  $U^{(k)}$  и  $\bar{\psi} O \tau_k \psi$  преобразовывались как два трехмерных вектора, согласно правилу

$$U^{(k)} = a_{kl} U^{(l)}, \quad (7.138а)$$

$$\bar{\psi} O \tau_k \psi = a_{kl} \bar{\psi} O \tau_l \psi, \quad (7.138б)$$

причем  $[a_{kl}]$  является хорошо известной матрицей преобразования трехмерного вектора при этом вращении. Что касается оператора  $\psi$ , то он преобразуется также линейно

$$\psi = R \psi. \quad (7.138в)$$

Из (7.138б) и (7.138в) имеем

$$R^{-1} \tau_k R = a_{kl} \tau_l. \quad (7.139)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$R = \exp \left\{ -i \frac{\alpha}{2} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}) \right\} = \cos \frac{\alpha}{2} + i (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}) \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (7.140а)$$



В частности, для бесконечно малого вращения

$$a_{kl} = \delta_{kl} + \delta\omega_{kl}, \quad \delta\omega_{kl} = -\delta\omega_{lk}$$

решение уравнения (7.139) записывается в виде

$$R = I + \frac{1}{2} \tau_{kl} \delta\omega_{kl}, \quad (7.140б)$$

причем

$$\tau_{kl} \equiv \frac{1}{4} (\tau_k \tau_l - \tau_l \tau_k) = \frac{i}{2} \tau_m \quad (k, l, m = \text{Цикл. (1, 2, 3)}).$$

С другой стороны, пользуясь соотношениями коммутации, приведенными в гл. 8, пример 1, можно получить следующие соотношения коммутации<sup>1)</sup>:

$$[\psi(x), \tau_{kl}[\sigma(x)]] = \tau_{kl}\psi(x), \quad (7.141а)$$

$$[U^{(m)}(x), L_{kl}[\sigma(x)]] = \begin{cases} U^{(l)} & \text{для } m = k \\ -U^{(k)} & \text{для } m = l \\ 0 & \text{для } m \neq k, m \neq l \end{cases}. \quad (7.141б)$$

В этих соотношениях величины  $\tau_{kl}[\sigma]$  и  $L_{kl}[\sigma]$  определяются равенствами

$$\tau_{kl}[\sigma] \equiv \frac{i}{2} \tau_m[\sigma]; \quad L_{kl}[\sigma] \equiv iL_m[\sigma] \quad (k, l, m = \text{Цикл. (1, 2, 3)}),$$

а через  $\sigma(x)$  обозначена пространственно-подобная поверхность, проходящая через точку  $x$ . Ввиду того что операторы поля  $\psi(x)$  и  $U^{(k)}(x')$ , зависящие от координат  $x$  и  $x'$ , лежащих на одной и той же пространственно-подобной поверхности, коммутируют друг с другом, мы имеем

$$[\tau_{kl}[\sigma(x)], U^{(m)}(x)] = [L_{kl}[\sigma(x)], \psi(x)] = 0.$$

Таким образом, (7.138а) и (7.138в) могут быть переписаны в виде

$$\psi'(x) = R^{-1}\psi(x)R, \quad (7.142а)$$

$$U^{(k)'}(x) = R^{-1}U^{(k)}(x)R; \quad (7.142б)$$

здесь через  $R$  обозначен оператор

$$R = I + \frac{1}{2} J_{kl}[\sigma] \delta\omega_{kl}, \quad (7.143а)$$

причем

$$J_{kl}[\sigma] \equiv iJ_m[\sigma] = i\left\{ \frac{1}{2} \tau_m[\sigma] + L_m[\sigma] \right\}, (k, l, m = \text{Цикл. (1, 2, 3)}). \quad (7.143б)$$

<sup>1)</sup> Например,

$$\begin{aligned} [U^{(1)}(x), L_{12}[\sigma(x)]] &= i \int_{\sigma(x)} d\sigma'_\mu [U^{(1)}(x), \partial_\mu U^{(1)}(x') \cdot U^{(2)}(x') - \partial_\mu U^{(2)}(x') \cdot U^{(1)}(x')] = \\ &= - \int_{\sigma(x)} d\sigma'_\mu \partial'_\mu \Delta(x - x') \cdot U^{(2)}(x') = \int d^3x' \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) U^{(2)}(x') = U^{(2)}(x). \end{aligned}$$

Соотношение (7.142a) может быть доказано следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1}\psi(x)\mathbf{R} &= \psi(x) + \frac{1}{2} [J_{kl}[\sigma], \psi(x)] \delta\omega_{kl} = \\ &= \psi(x) + \frac{1}{2} \tau_{kl} \delta\omega_{kl} \psi(x) = R\psi(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

Соотношение (7.143б) доказывается тем же способом. Из (7.143а) и (7.143б) видно, что некоторая величина  $F(x)$ , характеризующая поле, при бесконечно малом вращении преобразуется в величину  $F(x)$  по следующему правилу:

$$F(x) = \mathbf{R}^{-1}F(x)\mathbf{R}. \quad (7.144)$$

Это правило с учетом (7.143а) показывает, что оператор полного изотопического спина  $\mathbf{J}[\sigma]$  является производящим оператором вращения и коммутирует с любой величиной, которая инвариантна относительно вращения в трехмерном  $\tau$ -пространстве. Теорию называют зарядово-независимой, если ее лагранжиан взаимодействия инвариантен относительно вращений в изотопическом пространстве. В зарядово-независимой теории оператор  $\mathbf{J}[\sigma]$  коммутирует с лагранжианом взаимодействия и поэтому является константой движения; собственные значения полной величины и третьей компоненты оператора  $\mathbf{J}[\sigma]$  являются удобными квантовыми числами.

Так как  $\mathbf{J}[\sigma]$  является производящим оператором вращения, то его компоненты удовлетворяют соотношениям коммутации момента количества движения, т. е.

$$[J_k[\sigma], J_l[\sigma]] = iJ_m[\sigma] \quad (k, l, m = \text{Цикл. (1, 2, 3)}). \quad (7.145a)$$

Это приводит к следующим соотношениям:

$$\left[ \frac{1}{2} \tau_k[\sigma], \frac{1}{2} \tau_l[\sigma] \right] = \frac{1}{2} i\tau_m[\sigma] \quad (k, l, m = \text{Цикл. (1, 2, 3)}), \quad (7.145б)$$

$$[L_k[\sigma], L_l[\sigma]] = iL_m[\sigma] \quad (k, l, m = \text{Цикл. (1, 2, 3)}). \quad (7.145в)$$

Эти соотношения могут быть также выведены из (7.130), (7.141а) и (7.141б). Поэтому собственными значениями операторов  $(\frac{1}{2})\tau_m[\sigma]$  и  $L_m[\sigma]$  являются величины  $(S, S-1, \dots, -S)$ , причем  $S$  принимает целые или полужелые значения.

Так как один нуклон или один мезон могут находиться соответственно в двух<sup>1)</sup> и трех зарядовых состояниях, то мы имеем

<sup>1)</sup> Под двумя зарядовыми состояниями автор понимает возможность нахождения нуклона в состоянии протона и нейтрона. В связи с открытием антинейтрона и антинейтрона (см. примечание к гл. 1), которые могут появляться при ультрарелятивистских энергиях относительно нуклонов, такое подразделение может носить лишь ограниченный характер и будет относиться к нерелятивистским энергиям нуклонов. — *Прим. ред.*

соответственно  $S = 1/2$  для  $(1/2)\tau[\sigma]$  и  $S = 1$  для  $L[\sigma]$ . Другими словами, величина изотопического спина нуклона равна  $1/2$ , а  $\pi$ -мезона — 1. Так как  $eL_3[\sigma]$  и  $(e/2)(I[\sigma] + \tau_3[\sigma])$  являются соответственно операторами заряда для  $\pi$ -мезона и нуклона, то

$$L_3[\sigma]\omega(\alpha) = \eta\omega(\alpha), \quad (7.146a)$$

$$\eta = \begin{cases} +1 & \text{для } \alpha = + \\ 0 & \text{для } \alpha = 0 \\ -1 & \text{для } \alpha = - \end{cases},$$

$$\frac{1}{2}(I[\sigma] + \tau_3[\sigma])\omega(P) = \omega(P), \quad (7.146б)$$

$$\frac{1}{2}(I[\sigma] + \tau_3[\sigma])\omega(N) = 0; \quad (7.146в)$$

здесь через  $\omega(+)$ ,  $\omega(-)$  и  $\omega(0)$  обозначены векторы состояния соответственно  $\pi^+$ ,  $\pi^-$  и  $\pi^0$ -мезонов, а через  $\omega(P)$  и  $\omega(N)$  — векторы состояния протонов и нейтронов соответственно. Далее, так как  $I[\sigma]$  равно оператору числа нуклонов  $N$  [см. (7.37)], то его собственные значения равны разности чисел нуклонов и антинуклонов. Таким образом, получаем

$$I[\sigma]\omega(P) = \omega(P), \quad (7.147a)$$

$$I[\sigma]\omega(N) = \omega(N). \quad (7.147б)$$

Из (7.146б), (7.146в), а также (7.147a) и (7.147б) могут быть получены следующие соотношения:

$$\frac{1}{2}(I[\sigma] - \tau_3[\sigma])\omega(P) = 0, \quad (7.148a)$$

$$\frac{1}{2}(I[\sigma] - \tau_3[\sigma])\omega(N) = \omega(N). \quad (7.148б)$$

В качестве операторов проектирования состояния  $\pi$ -мезона на три возможных зарядовых состояния можно принять операторы  $n^+$ ,  $n^-$ ,  $n^0$ , определяемые следующим образом [30]<sup>1)</sup>:

$$n^+ = \frac{1}{2} \left\{ L_3[\sigma] + (L_3[\sigma])^2 \right\}, \quad (7.149a)$$

$$n^- = \frac{1}{2} \left\{ -L_3[\sigma] + (L_3[\sigma])^2 \right\}, \quad (7.149б)$$

$$n^0 = \frac{1}{2} \left( \mathbf{L}[\sigma] \cdot \mathbf{L}[\sigma] - (L_3[\sigma])^2 \right)$$

<sup>1)</sup> В равенстве (7.149 в) собственное значение оператора  $(\mathbf{L}[\sigma] \cdot \mathbf{L}[\sigma])$  для изотопического момента количества движения  $S$  равно  $S(S+1)$ .

или

$$n^0 = 1 - (L_3[\sigma])^2, \quad (7.149 \text{ в})$$

$$n^\alpha \omega(\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \quad (\alpha, \beta = +, -, 0). \quad (7.149 \text{ г})$$

С другой стороны, операторы проектирования на протонное и нейтронное состояния соответственно имеют вид

$$n^P = \frac{1}{2} (I[\sigma] + \tau_3[\sigma]), \quad (7.150 \text{ а})$$

$$n^N = \frac{1}{2} (I[\sigma] - \tau_3[\sigma]), \quad (7.150 \text{ б})$$

где мы воспользовались выражениями (7.146 б), (7.146 в), (7.148 а) и (7.148 б).

Перемена местами протона и нейтрона (так называемое  $T$ -преобразование) представляется в виде

$$\psi' = T\psi, \quad (7.151 \text{ а})$$

где

$$T \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \tau_1.$$

Ввиду того что

$$\bar{\psi}' \tau_k \psi' = \varepsilon \bar{\psi} \tau_k \psi \quad (\tau_k \equiv 1)$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{для } k=1 \\ -1 & \text{для } k=2 \\ -1 & \text{для } k=3 \\ 1 & \text{для } k=4, \end{cases}$$

взаимодействия (7.132) и (7.133) инвариантны относительно  $T$ -преобразования, коль скоро  $U^{(k)}$  преобразуется по следующему правилу:

$$U^{(k)'} \doteq t_{kl} U^{(l)}, \quad (7.151 \text{ б})$$

$$[t_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это преобразование мы называем  $T$ -преобразованием  $U$ -поля. Теория, которая инвариантна относительно  $T$ -преобразования, называется зарядово-симметричной.

В частности, если в (7.132) и (7.133)  $f = f'$  и  $g = 0$ , то теория является зарядово-симметричной и вследствие (7.138а) и (7.138б) — зарядово-независимой. Однако ввиду того, что электромагнитное взаимодействие не инвариантно относительно  $T$ -преобразования или вращения в  $\tau$ -пространстве, можно говорить лишь о приблизительно зарядово-симметричных или зарядово-независимых теориях, пренебрегая высшими степенями величины  $(e/f)$ , что возможно лишь при  $f \gg e$ . Разница в массах протона и нейтрона также нарушает

зарядовую симметрию и независимость (см. гл. 4, § 5). Однако возможно, что эта разница в массах возникает как раз за счет электромагнитных взаимодействий.

В качестве примера применения закона сохранения изотопического спина рассмотрим процесс рождения  $\pi$ -мезонов при столкновениях двух нуклонов. Рассматриваемые процессы имеют вид

$$P + P \rightarrow \pi^+ + D. \quad (7.152a)$$

$$N + P \rightarrow \pi^0 + D. \quad (7.152б)$$

Изотопический спин системы  $(P + P)$  равен единице. Так как состояние дейтрона есть  ${}^3S$  (орбитальный момент количества движения  $l=1$ , спин  $S=1$ ), то его изотопический спин должен быть равен нулю (вследствие принципа Паули). Поэтому изотопический спин системы  $(\pi + D)$  равен единице. С другой стороны, изотопический спин системы  $(N + P)$  имеет два значения 1 и 0, которые соответствуют симметричной  $(1/\sqrt{2})(\omega_1(P)\omega_2(N) + \omega_1(N)\omega_2(P))$  и антисимметричной  $(1/\sqrt{2})(\omega_1(P)\omega_2(N) - \omega_1(N)\omega_2(P))$  частям волновой функции. В силу закона сохранения изотопического спина в зарядово-независимой теории состояние  $(N + P)$  с изотопическим спином, равным нулю, не дает вклада в указанный выше процесс (7.152б). Так как матричные элементы переходов двух процессов (7.152a) и (7.152б) эквивалентны в силу зарядовой независимости, то эффективные сечения этих двух процессов связаны следующим образом [16]:

$$\sigma(P + P \rightarrow \pi^+ + D) = 2\sigma(N + P \rightarrow \pi^0 + D). \quad (7.153)$$

Экспериментальные данные [24] по угловым распределениям процессов  $N + P \rightarrow \pi^0 + D$  и  $\pi^+ + D \rightarrow P + P$  [процесс, обратный (7.152a)] в системе центра инерции показывает хорошее согласие с (7.153). Этот факт говорит в пользу зарядово-независимой теории системы  $\pi$ -мезон — нуклон.

В самом общем случае вектор изотопического момента некоторого поля определяется как оператор, производящий преобразование компонент поля  $Q^{(i)}$  при вращениях в изотопическом трехмерном пространстве.

В зарядово-независимой теории хорошим квантовым числом является третья компонента полного изотопического спина. Рассмотрим состояние, в котором число частиц<sup>1)</sup> характеризуется числами  $n_i$  ( $i=1, \dots$ ). Индексы обозначают вид частиц. Из (7.137б) следует, что полный заряд  $e_t$  дается следующим равенством:

$$e_t = eJ_3[\sigma] + \frac{1}{2}eN, \quad (7.137в)$$

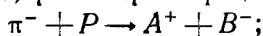
<sup>1)</sup> Число античастиц учитывается с отрицательным знаком.

в котором

$$N = \sum n_i C_i. \quad (7.137г)$$

В равенстве (7.137в) через  $J_3[\sigma]$  обозначена третья компонента полного изотопического спина, определяемая всеми частицами в рассматриваемом состоянии. Величина  $C_i$  определяется таким образом, что  $(eC_i/2)$  является средней величиной (или „центром“) зарядов частиц  $i$ -го сорта, находящихся во всевозможных зарядовых состояниях. Сохранение полного электрического заряда совместно с сохранением третьей компоненты полного изотопического спина приводит к закону сохранения числа  $N$ , введенного в (7.137в). Для системы нуклон — мезон  $N$  является числом нуклонов; это число сохраняется при всех известных процессах взаимопревращений, происходящих в этой системе.

В качестве примера правила отбора, к которому приводит сохранение величины  $N$ , рассмотрим процесс



здесь через  $A$  и  $B$  обозначены соответственно зарядовые состояния  $e, 0, -e$  (изотопический спин равен 1) и  $-e, 0$  (изотопический спин равен  $1/2$ ). Этот процесс не может обуславливаться зарядово-независимыми взаимодействиями, потому что величина  $N$  для левой и правой частей указанного выше процесса равна 1 и  $-1$  соответственно. Принимая, что  $\theta^0$  и  $K^+$  являются двумя состояниями  $\theta$ -частицы и что  $K^-$  является античастицей к  $K^+$ , то для средней величины заряда  $\theta$ -частицы получим значение  $(e/2)$ . Для  $\theta$ -частицы  $C_i = 1$ . Надо заметить, что на закон сохранения для  $N$  могут оказать слабое воздействие электромагнитное и другие слабые взаимодействия, которые не являются зарядово-независимыми<sup>1)</sup>.

### Пример 11. Взаимодействия между известными частицами

Величина констант связи между полями различных известных частиц может быть оценена по экспериментальным данным, касающимся взаимопревращений этих частиц (см. гл. 4, § 5).

Поскольку для изучения рассматриваемого примера нам нужна только грубая оценка констант связи, мы будем писать лагранжиан взаимодействия  $L'$  в виде произведения волновых функций, не учитывая более детальную структуру взаимодействий [8]. Как показано в гл. 13, вероятность некоторого процесса, отнесенная к единице времени, в низшем порядке разложения в ряд по константе связи определяется выражением [см. (13.6)]

$$\frac{dw}{dt} = 2\pi |S|^2 \rho, \quad (7.154a)$$

<sup>1)</sup> Закон сохранения для  $N$  был применен в теории Гелл-Манна, Накано и Нишиджима в 1953 г. для нуклона,  $k^-$ ,  $\theta^-$ ,  $A$ -частиц (см. гл. 4, § 5).

в котором

$$S \equiv \int d^3x L'(x). \quad (7.1546)$$

Здесь через  $\rho$  обозначена плотность конечных состояний, отнесенная к единице энергии. В рассматриваемом случае выражение (7.154a) можно рассматривать как естественное обобщение вычислений по теории возмущений, проводимых в квантовой электродинамике. Матричный элемент волновой функции  $Q$ , соответствующий рождению или аннигиляции частицы (массы  $\kappa$ ) с малой величиной энергии-импульса ( $\mathbf{k}$ ,  $k_0$ ) в выражении для  $Q$ , может быть грубо представлен в приближенном виде

$$Q(x) \approx \begin{cases} V^{-1/2} e^{\pm i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k_0 t)} & \text{для спина } 1/2, \\ (2\kappa V)^{-1/2} e^{\pm i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - k_0 t)} & \text{для спина } 0. \end{cases} \quad (7.155a)$$

В этом выражении знаки „+“ или „-“ в экспонентах относятся соответственно к процессам аннигиляции или рождения. Через  $V$  обозначен объем области интегрирования в (7.1546). Вывод выражений (7.155a) будет дан в гл. 9 [см. (9.43) и (9.78)]. Откладывая доказательство равенств (7.154a) и (7.155a) до следующих глав, мы воспользуемся этими выражениями для получения грубых оценок констант связи. Так как нас интересуют только процессы с сохранением величины полной энергии и полного импульса, можно в выражении для  $L'$  величины  $Q(x)$  заменить на

$$Q(x) \approx \begin{cases} V^{-1/2} & \text{для спина } 1/2, \\ (2\kappa V)^{-1/2} & \text{для спина } 0 \end{cases}, \quad (7.1556)$$

не заботясь об экспоненциальных множителях в (7.155a)<sup>1</sup>.

В этой главе волновые функции полей мы будем обозначать теми же символами, которые употребляются для самих частиц. Масса частиц „А“ будет обозначаться через  $\kappa(A)$ , за исключением случая электрона, масса которого будет обозначаться через  $m$ .

Электромагнитная константа связи, т. е. элементарный электрический заряд  $e$ , точно измерена и равна  $e/\sqrt{4\pi} = 1/\sqrt{137}$ . Как хорошо известно, все открытые до сих пор заряженные частицы имеют ту же величину электрического заряда  $e$ . Это обстоятельство в теории полей заряженных частиц при наличии электромагнитного поля находит свое выражение в калибровочной инвариантности

<sup>1</sup> Примечание при корректуре. Грубые вычисления, основанные на (7.154) и (7.1556), показывают, что константы связи взаимодействий для процессов распада  $\Xi$ -,  $\Sigma$ - и  $\Lambda$ -частиц, а также для процессов распада  $K_{u1}$ -,  $K_{e2}$ -частиц принадлежат к третьему и четвертому классу соответственно. Далее, взаимодействия между бозе-частицами, т. е. взаимодействия для процессов распада  $\theta$ ,  $K_{\pi 2}$ -,  $\tau$ -частиц, также, по-видимому, принадлежат к третьему классу, причем их константы связи примерно те же, что и  $g_{\mu}^{\nu}$ .

теории<sup>1</sup>). В самом деле, как будет показано в гл. 9 [см. (9.81)], сохранение заряда, выводимое из требования калибровочной инвариантности, эквивалентно сохранению разности между числом положительно и отрицательно заряженных частиц. Это означает, что каждая заряженная частица (античастица) несет на себе тот же заряд  $e$  ( $-e$ ).

Константа связи  $g_\pi^n$ , характеризующая взаимодействие  $\pi$ -мезонов и нуклонов, может быть оценена на основе данных о ядерных силах. Однако ввиду различных трудностей теоретического анализа вопросов, связанных с  $\pi$ -мезонами, точная величина этой константы пока еще неизвестна. Значения, полученные различными способами, заключены в пределах от 0,1 до  $\sim 20$ .

Величина константы связи  $g_\mu^\pi$ , описывающей взаимодействие полей  $\pi$ - и  $\mu$ -мезонов, может быть оценена по времени жизни  $\pi$ -мезона  $\tau_\pi = 2 \cdot 10^{-8}$  сек. относительно  $\pi$ - $\mu$ -распада. При взаимодействии  $\pi$ -мезона с  $\mu$ -мезоном величина  $S$  записывается в виде  $S = g_\mu^\pi \int d^3x \pi \mu^0$ , где через  $\mu^0$  обозначена легкая нейтральная частица, образующаяся при  $\pi$ - $\mu$ -распаде (см. гл. 4, § 5). Так как спин  $\pi$ -мезона равен 0, величину  $\pi$  в выражении для  $S$  можно заменить через  $(2\kappa(\pi)V)^{-1/2}$ . Аналогично, если считать, что спины полей  $\mu$  и  $\mu^0$  равны  $1/2$ , величины  $\mu$  и  $\mu^0$  в выражении для  $S$  на основании (7.1556) надо заменить на  $V^{-1/2}$ . Таким образом, величина  $S$  равна приблизительно  $g_\mu^\pi / \sqrt{2\kappa(\pi)V}$ . В системе центра инерции, где  $\mathbf{k} + \mathbf{k}' = 0$  ( $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  являются импульсами  $\mu$  и  $\mu^0$ ), число состояний в интервале энергий  $(E, E + dE)$  равно<sup>2</sup>)

$$pdE = 4\pi k^2 \frac{Vdk}{(2\pi)^3} = \frac{k^2 V dk}{2\pi^2} dE = \frac{V k^2}{2\pi^2 (v_\mu + v_{\mu^0})} dE.$$

Здесь  $\mathbf{k} \equiv |\mathbf{k}|$ , а  $v_\mu$  и  $v_{\mu^0}$  — скорости  $\mu$  и  $\mu^0$  соответственно. Так как из экспериментальных данных следует, что величина массы  $\mu^0$  очень мала, то можно положить величину  $v_{\mu^0}$  равной скорости света  $c$  ( $= 1$ ). Если считать, что  $\kappa(\pi) = 276m$  и  $\kappa(\mu) = 210m$ , то величина  $k$  может быть вычислена с помощью закона сохранения энергии

$$276m = \sqrt{k^2 + (210m)^2} + k.$$

<sup>1</sup>) Если бы существовало поле  $\psi(n)$  с зарядом  $ne$  ( $n$  не обязательно целое), то из закона сохранения заряда следовало бы, что при калибровочном преобразовании волновая функция должна была бы изменяться следующим образом:

$$\psi(n) \rightarrow \psi(n) \exp(in\Lambda(x)).$$

<sup>2</sup>)  $\frac{df}{dk} = \frac{d}{dk} \left( \sqrt{k^2 + \kappa(\mu)^2} + \sqrt{k^2 + \kappa(\mu^0)^2} \right) = v_\mu + v_{\mu^0}.$



Отсюда для  $k$  получаем значение  $k = 58 m^1$ , и поэтому

$$v_u = \frac{k}{\sqrt{k^2 + \kappa(\mu)^2}} = 0,22.$$

Пользуясь этим значением, получаем следующий результат:

$$\frac{dw}{dt} = 1,2 \cdot 10^{21} (g_\mu^\pi)^2.$$

Поскольку время жизни  $\tau_\pi$  равно  $(dw/dt)^{-1}$ , то

$$g_\mu^\pi \approx 0,2 \cdot 10^{-6} = 2,4 \cdot 10^{-6} (e/\sqrt{4\pi}). \quad (7.157)$$

Величина константы связи  $g_\beta$  между полями нуклонов и электронов может быть оценена, исходя из времени жизни нейтрона  $\tau_\beta = 12,60$  сек. Если член, представляющий взаимодействие, записать в виде  $g_\beta \int d^3x N P e v$ , то на основании (7.155б) величина  $S$  может быть представлена как  $g_\beta V^{-1}$ . Соотношение (7.154б) показывает, что размерность  $S$  есть размерность энергии, т. е.<sup>2)</sup>

$$[S] = [L^{-1}].$$

Поэтому  $g_\beta$  имеет размерность

$$[g_\beta] = [S][V] = [L]^2.$$

Оценивая  $g_\beta$  тем же способом, что и  $g_\mu^\pi$ , получаем

$$g_\beta = 2 \cdot 10^{-12} \left\{ \left( \frac{4\pi}{3} \right) r_0^3 \right\} \text{ эрг} \cdot \text{см}^3, \quad (7.158a)$$

где  $r_0 = e^2/m$  — классический радиус электрона. Поэтому величину  $(4\pi/3) r_0^3$  можно назвать классическим объемом электрона. Те единицы, в которых классический объем электрона равен единице, называются релятивистскими единицами. Таким образом,

$$g_\beta = 2 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} \cdot \text{рел. ед.} = 1,3 \text{ эв рел. ед.} \quad (7.158б)$$

Равенство (7.158б) показывает, что  $g_\beta$ -взаимодействие, грубо говоря, эквивалентно прямоугольной потенциальной яме глубиной 1,3 эв и шириной  $r_0$ . Отсюда можно заключить, что  $g_\beta$ -взаимодействие много слабее ядерных сил, так как последние могут быть грубо представлены с помощью прямоугольной потенциальной ямы глубиной  $20 \cdot 10^6$  эв и шириной  $\approx r_0$ .

Аналогичным способом по времени жизни  $\mu$ -мезона  $\tau_\mu = 2,15 \cdot 10^{-6}$  сек. оценивается величина константы связи  $g_\mu^e$  между полями электронов и  $\mu$ -мезонов. Используя взаимодействие

<sup>1)</sup> В системе единиц, в которой  $\hbar = c = 1$ ,  $m = 0,26 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-1} = 0,78 \cdot 10^{21} \text{ сек}^{-1}$ .

<sup>2)</sup>  $[L^n]$  означает  $n$ -ую степень длины.

$g_{\mu}^e \int d^3x \mu e \nu \nu$ , в котором предполагается, что двумя легкими частицами в конечном состоянии являются нейтрино ( $\nu$ ), получаем

$$g_{\mu}^e \approx 3 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} \cdot \text{рел.ед.} \approx g_3. \quad (7.159)$$

Хотя  $g_{\mu}^e \approx g_3$ , нейтрон все же имеет большее время жизни, чем  $\mu$ -мезон, что связано с малостью разницы масс протона и нейтрона.

Константа связи между полями протонов и  $\mu$ -мезонов оценивается по процессу захвата отрицательно заряженных  $\mu$ -мезонов ядрами:  $P + \mu^- \rightarrow N + \nu$ . Экспериментальные данные говорят о том, что вероятность этого процесса захвата ядрами атомного номера  $Z = 11$  приблизительно равна вероятности процесса распада  $\mu - e$  [29], т. е. равна  $1/\tau_{\mu} (= 0,5 \cdot 10^8 \text{ сек.}^{-1})$ . Так как полное время замедления  $\mu^-$ -мезонов с энергией в несколько *Мэв* и захвата их на наименьшую боровскую орбиту (т. е. *K*-орбиту) много меньше времени их жизни относительно распада [9], мы можем считать, что все  $\mu$ -мезоны сначала захватываются на *K*-орбиты и лишь затем поглощаются ядрами. Радиус *K*-орбиты равен

$$a' = \frac{m}{z(\mu)} \frac{1}{Z} a = \frac{2,5 \cdot 10^{-11}}{Z} \text{ см}, \quad (7.160)$$

причем  $a$  — боровский радиус первой электронной орбиты в атоме водорода. Это равенство показывает, что чем больше значения  $Z$ , тем меньше должен быть радиус и благодаря этому оказывается, что волновые функции  $\mu^-$ -мезонов и нуклонов сильно перекрываются. Таким образом, вероятность захвата возрастает с увеличением  $Z$  и равна вероятности распада при  $Z = 11$ .

Вероятность захвата  $\mu^-$ -мезона протоном ядра может быть оценена с помощью простого лагранжиана взаимодействия  $L' = g_{\mu}^p P N \mu \nu$ . В этом случае получаем

$$\frac{dw}{dt} = 11400 (g_{\mu}^p)^2 \frac{m^2}{V}. \quad (7.161)$$

При этом вычислении волновая функция протона должна быть представлена в виде  $(V)^{-1/2}$  внутри *K*-орбиты и положена равной нулю вне *K*-орбиты. Таким образом, для величины объема области взаимодействия мы имеем выражение  $V \approx 4\pi a'^3/3$ . Вероятность захвата  $\mu^-$ -мезона ядром равна величине, указанной в (7.161), умноженной на  $Z$ , так как захват может быть осуществлен любым из протонов ядра. Таким образом, мы видим, что вероятность захвата ядром растет приблизительно пропорционально  $Z^4$ . Это заключение согласуется с экспериментальными результатами. По принципу Паули протон не может совершить переход в занятое нейтронное состояние. Это обстоятельство несколько уменьшает величину вероятности захвата, так как главная часть энергии  $\mu^-$ -мезона

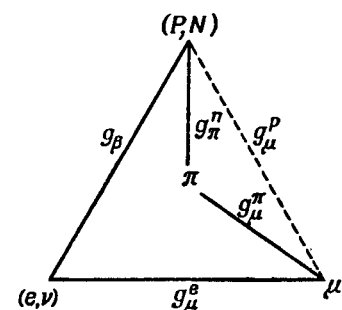
уносится нейтральными частицами  $\nu$ . Оценивая грубым способом этот эффект Ферми [8], для вероятности захвата  $\mu^-$ -мезона ядром можно получить следующее выражение:

$$\frac{dw}{dt} \approx 5000 (g_\mu^P)^2 m^2 Z^4 \left( \frac{x(\mu)}{m} \frac{1}{a} \right)^2. \quad (7.162)$$

Сравнивая (7.162) для  $Z=11$  с величиной  $1/\tau_\mu$ , имеем

$$g_\mu^P \approx 10^{-12} \text{ эрг} \cdot \text{рел. ед.} \approx g_\mu^e \approx g_\beta. \quad (7.163)$$

Указанная выше схема взаимодействий представлена на фиг. 3. Если бы мы предположили, что электронные и нуклонные поля взаимодействуют между собой посредством  $\pi$ -мезонного поля, то величину константы связи электронных и  $\pi$ -мезонных полей мы смогли бы оценить на основе величин  $g_\pi^e$  и  $g_\pi^P$ .



Фиг. 3.

Такая оценка приводит к заключению, что большинство  $\pi$ -мезонов должно было бы распадаться не на  $\mu$ -мезоны, а на электроны. Это заключение не согласуется с экспериментальными данными, которые показывают, что на позитроны распадается не больше одного  $\pi^+$ -мезона из 1400 [11]. Таким образом, можно заключить, что  $\pi$ -мезонное поле не является промежуточным звеном для  $\beta$ -взаимодействий. С другой стороны, некоторые преимущества имеет предположение, что  $g_\mu^P$ -взаимодействие происходит посредством  $\pi$ -мезонного поля. Действительно, если бы  $\pi$ - и  $\mu$ -мезонные поля взаимодействовали между собой не непосредственно, а через нуклонное поле, тогда в силу того, что масса электрона меньше массы  $\mu$ -мезона, происходил бы  $\pi$ - $e$ -распад. Этого положения можно избежать с помощью выбора подходящего вида  $g_\pi^e$ - и  $g_\pi^P$ -взаимодействий. Это изображено на фиг. 3, где  $(P, N)$  и  $\mu$  соединены пунктирной кривой.

На этой фигуре можно проследить интересную симметрию. Частицы  $(P, N)$ ,  $(e, \nu)$  и  $\mu$ , расположенные в вершинах треугольника, обладают одинаковым спином  $1/2$ , и величины констант связи  $g_\beta$ ,  $g_\mu^e$  и  $g_\mu^P$  полей этих частиц поразительно близки друг к другу. Эта симметрия впервые была отмечена О. Клейном [15] (см. также [28]). Хотя значение этой симметрии пока еще непонято, она, вероятно, означает больше, чем простое совпадение. С целью обобщения этой симметрии было предпринято много попыток в направлении исследования возможности того, чтобы взаимодействия между всеми дираковскими частицами считать взаимо-

действиями одного и того же типа. Такого рода взаимодействие называется универсальным взаимодействием Ферми. Первая работа по симметричным взаимодействиям между  $P$ ,  $N$ ,  $e$  и  $\nu$  была выполнена Хричфильдом и Вигнером [4], которые показали (см. также [3]), что полностью симметричного взаимодействия между дираковскими полями нет и существует только одно полностью антисимметричное взаимодействие<sup>1)</sup>. Последнее взаимодействие эквивалентно линейной комбинации (скалярное)  $+$  (псевдовекторное)  $-$  (псевдоскалярное). Однако такое взаимодействие не согласуется с экспериментальными данными, которые свидетельствуют в пользу существования  $\beta$ -взаимодействия тензорного типа (см. пример 8). Предположение о симметрии зарядовых состояний нуклонного поля и зарядовых состояний электронного поля приводит к двум линейным комбинациям [5] — ( $SAP$ ) или ( $TV$ ), которые также не согласуются с экспериментальными результатами, которые исключают существование  $V$ . Для улучшения теории универсального взаимодействия Ферми было сделано много попыток учесть ( $P$ ,  $N$ ,  $e$ ,  $\nu$ ,  $\mu$ ) и псевдоспиноры [18, 2]. Однако при этом имеется еще одна неопределенность, возникающая вследствие необходимости решить, какие частицы играют соответствующие роли в их процессах. Электронный спектр в  $\mu - e$ -распаде дает важные данные о виде линейной комбинации в  $g_{\mu}^e$ -взаимодействии [17, 18].

Константы связи, соответствующие известным взаимодействиям, могут быть разбиты на четыре класса. Первый класс составляют сильные взаимодействия, константы связи которых имеют тот же порядок, что и  $g_{\pi}^n$ .

Экспериментальные данные о порождении  $\Lambda$ -частиц говорят о том, что взаимодействие  $\Lambda$ -частиц с нуклонами принадлежит к этому классу взаимодействий<sup>2)</sup>. Многие эксперименты, связанные с исследованием взаимодействий  $\pi$ -мезонов с ядрами, показывают, что эти взаимодействия являются зарядово-независимыми. Если бы сильное взаимодействие  $\Lambda$ -частиц с нуклонами не было зарядово-независимым, оно бы нарушило зарядовую независимость взаимодействий  $\pi$ -мезонов с нуклонами. Отсюда следует, что взаимодействие  $\Lambda$ -частицы с нуклонами, по-видимому, является зарядово-независимым. Взаимодействием второго класса является электромагнитное взаимодействие. К третьему классу отнесены слабые взаимодействия между бозе- и ферми-частицами; константы связи, соответствующие этим взаимодействиям, — приблизительно той же

<sup>1)</sup> Прайс [25] исследовал с более общей точки зрения неприводимые представления группы перестановок четырех спинов.

<sup>2)</sup> Полное время жизни при  $\Lambda$ -распаде кажется противоречащим существованию сильного взаимодействия между  $\Lambda$ -частицами и нуклонами. Чтобы сделать вероятность  $\Lambda$ -распада малой, были предприняты попытки найти правила отбора, основывающиеся на зарядовой независимости сильных взаимодействий [21, 19, 12].

величины, что и  $g_{\mu}^{\pi}$  [20]. Четвертый класс составляют слабые взаимодействия между ферми-частицами с константами связи  $\approx g_{\beta}$ . Можно надеяться, что экспериментальные данные о взаимодействиях, осуществляемых в природе, позволят найти естественный закон, с помощью которого можно будет из всех возможных мыслимых взаимодействий, к которым приводит современная квантовая теория поля, выделить фактически осуществляющиеся.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Belinfante F. J., *Physica*, **6**, 887 (1939).
2. Caianiello E. R., *Nuovo Cimento*, **8**, 10 (1951).
3. Chritchfield C., *Phys. Rev.*, **63**, 417 (1943).
4. Chritchfield C., Wigner E., *Phys. Rev.*, **60**, 412 (1941).
5. De Groot S. R., Tolhoek H. A., *Physica*, **16**, 456 (1950).
6. Feingold A., *Rev. Mod. Phys.*, **23**, 10 (1951).
7. Fermi E., *Rev. Mod. Phys.*, **4**, 87 (1932).
8. Fermi E., *Elementary Particles*, London, 1951 (см. перевод: Э. Ферми, *Элементарные частицы*, ИЛ, 1952).
9. Fermi E., Teller E., *Phys. Rev.*, **72**, 339 (1947).
10. Fierz M., *Zs. f. Phys.*, **102**, 572 (1936).
11. Friedman H., Rainwater J., *Phys. Rev.*, **81**, 644 (1951).
12. Gell-Mann M., *Phys. Rev.*, **92**, 833 (1953).
13. Heisenberg W., Pauli W., *Zs. f. Phys.*, **56**, 1 (1929).
14. Heisenberg W., Pauli W., *Zs. f. Phys.*, **59**, 168 (1929).
15. Klein O., *Nature*, **161**, 897 (1948).
16. Messiah A. M. L., *Phys. Rev.*, **86**, 430 (1952).
17. Michel L., *Nature*, **163**, 959 (1949).
18. Michel L., *Proc. Roy. Soc.*, **A63**, 514 (1950).
19. Nakano T., Nishijima K., *Prog. Theor. Phys.*, **10**, 581 (1953).
20. Ogawa S., Okonogi H., Oneda S., *Prog. Theor. Phys.*, **11**, 330 (1954).
21. Pais A., *Physica*, **19**, 869 (1953).
22. Pauli W., *Solvay Report*, 1939.
23. Pauli W., *Rev. Mod. Phys.*, **13**, 203 (1941) (см. перевод: В. Паули, *Релятивистская теория элементарных частиц*, ИЛ, 1947).
24. *Proceeding of the 3-d Annual Rochester Conf. on High Energy Physics*, 1952.
25. Pryce M. H. L., *Zs. f. Phys.*, **133**, 309 (1952).
26. Rosenfeld L., *Mémoires de l'Academie Roy. Belgique*, **6**, 30 (1940).
27. Stueckelberg E. C. G., *Helv. Phys. Acta*, **11**, 225 (1938).
28. Tiomno J., Wheeler J. A., *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 144 (1949).
29. Valley G. E., *Phys. Rev.*, **72**, 772 (1947).
30. Watson K. M., *Phys. Rev.*, **85**, 852 (1952).
31. Wu C. S., *Physica*, **18**, 989 (1952).
- 32\*. Lee T. D., Yang C. N., *Phys. Rev.*, **104**, 254 (1956) (см. перевод в сборнике: Новые свойства симметрии элементарных частиц, ИЛ, 1957, стр. 13).

- 33\*. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **105**, 1671 (1957) (см. перевод в сборнике: Новые свойства симметрии элементарных частиц, ИЛ, 1957, стр. 46).
- 34\*. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **32**, 405 (1957).
- 35\*. Salam A., Nuovo Cimento, **5**, 299 (1957) (см. перевод в сборнике: Новые свойства симметрии элементарных частиц, ИЛ, 1957, стр. 27).
- 36\*. Wu C S., Ambler E., Hayward R. W., Hoppes D. D., Hudson R. P., Phys. Rev., **105**, 1413 (1957) (см. перевод в сборнике: Новые свойства симметрии элементарных частиц, ИЛ, 1957, стр. 69).
- 37\*. Garwin R., Lederman L., Weinrich M., Phys. Rev., **105**, 1415 (1957) (см. перевод в сборнике: Новые свойства симметрии элементарных частиц, ИЛ, 1957, стр. 75).
- 38\*. Friedman I., Telegdi V., Phys. Rev., **105**, 1618 (1957).
- 39\*. Frauenfelder H., Bobone R., von Goeler E., Levine N., Lewis H. R., Peacock R. N., Rossi A., de Pasquall G., Phys. Rev., **106**, 386 (1957) (см. перевод в сборнике: Новые свойства симметрии элементарных частиц, ИЛ, 1957, стр. 91).
- 40\*. Goldhaber M., Grodins L., Sunyar, Phys. Rev., **106**, 826 (1957),
- 41\*. Соколов А., Иваненко Д., Квантовая теория поля, М.—Л., 1952.
- 42\*. Соколов А., ЖЭТФ, **33**, 794 (1957).

# Квантовая теория свободных полей (I)

## Соотношения коммутации

### § 1. Квантовая теория свободных полей

Правила коммутации для волновых функций, относящихся к разным моментам времени, не имеют простого вида для взаимодействующих полей ввиду нелинейности их волновых уравнений. С другой стороны, когда волновые функции свободных полей подчиняются уравнению Клейна — Гордона, ковариантные соотношения коммутации для этих волновых функций можно построить с помощью квантовой механики простого гармонического осциллятора.

Прежде всего рассмотрим поле, описываемое комплексными величинами  $Q_\alpha(x)$  и эрмитово-сопряженными к ним величинами  $Q_\alpha^*(x)$ . Волновое уравнение и уравнение Шредингера для свободного поля в гейзенберговском представлении имеют вид

$$\frac{\partial L^0}{\partial Q_\alpha} - \partial_\mu \left( \frac{\partial L^0}{\partial Q_{\alpha;\mu}} \right) = 0, \quad (8.1a)$$

$$\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \Psi[\sigma] = 0; \quad (8.1б)$$

здесь  $L^0$  — лагранжиан свободного поля.

Линейное дифференциальное уравнение (8.1a) можно записать в форме

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial) Q_\beta(x) = 0, \quad (8.2a)$$

причем  $\Lambda_{\alpha\beta}(\partial)$  — оператор. Это уравнение может быть получено из лагранжиана

$$\bar{L}^0 \doteq \int d^4x \bar{Q}_\alpha(x) \Lambda_{\alpha\beta}(\partial) Q_\beta(x). \quad (8.3a)$$

В этом выражении символ  $\doteq$  означает равенство с точностью до поверхностного интеграла по границе объема интегрирования, причем этот поверхностный интеграл появляется за счет интегрирования по частям; величина  $\bar{Q}_\alpha(x)$  связана с  $Q_\alpha^*(x)$  с помощью матрицы  $\eta$  равенством

$$\bar{Q}_\alpha(x) \equiv Q_\alpha^*(x) \eta_{\alpha\beta}. \quad (8.3б)$$

Матрица  $\eta$  должна быть не сингулярной. В самом деле, вариация  $Q_\alpha^* \rightarrow Q_\alpha^* + \delta Q_\alpha^*$  в лагранжиане приводит к уравнению

$$\bar{\Lambda}_{\rho\beta}(\partial) Q_\beta(x) = 0, \quad (8.26)$$

в котором

$$\bar{\Lambda}(\partial) \equiv \eta \Lambda(\partial), \quad (8.4)$$

причем

$$\bar{\Lambda}(\partial) \equiv [\bar{\Lambda}_{\alpha\beta}(\partial)], \quad \Lambda(\partial) \equiv [\Lambda_{\alpha\beta}(\partial)].$$

Это уравнение не могло бы привести к (8.2), если бы матрица  $\eta$  была сингулярной. Пример равенства (8.36) был дан в теории Дирака равенством (3.32), в котором  $\eta = \gamma_4$ .

Согласно условию Клейна—Гордона (гл. 2), компоненты поля должны удовлетворять уравнению Клейна—Гордона

$$(\square - \kappa^2) Q_\alpha(x) = 0.$$

Так как соотношения коммутации между  $Q_\alpha(x)$  и  $\bar{Q}_\beta(x')$  не должны зависеть от конкретного выбора лоренцевой системы отсчета, то они должны зависеть от  $(x, x')$  только посредством разности  $(x - x')$ . Поэтому они имеют вид<sup>1)</sup>

$$[Q_\alpha(x), \bar{Q}_\beta(x')]_{\pm} = \Delta_{\alpha\beta}(x - x'). \quad (8.5)$$

Действительно, некоторая функция от  $x, x'$  может быть записана как функция от  $(x - x', x + x')$ , но лишь разность  $(x - x')$  инвариантна относительно преобразования  $x \rightarrow x + a, x' \rightarrow x' + a$ .

При преобразованиях Лоренца, обозначенных через  $L^{\pm}$  (см. гл. 4, § 2), функция  $\Delta_{\alpha\beta}(x)$  преобразуется так же, как  $Q_\alpha \times \bar{Q}_\beta$ . Эта функция удовлетворяет уравнению

$$(\square - \kappa^2) \Delta_{\alpha\beta}(x) = 0. \quad (8.6)$$

Свойства соотношений коммутации при отражении времени требуют специального рассмотрения. Мы вернемся к этому в примере 5.

Как будет показано ниже, знаки „—“ и „+“ относятся к полям с целым и полуцелым спином.

С другой стороны, имеется еще одно требование, накладываемое на  $\Delta_{\alpha\beta}$ . Так как скорость распространения сигнала не может быть больше скорости света, то полевые величины, относящиеся к двум точкам, разделенным пространственным интервалом, могут быть независимо определены из наблюдений. Это означает, что функция  $\Delta_{\alpha\beta}(x - x')$  в соотношениях коммутации (8.5) равна нулю, если  $x$  и  $x'$  разделены пространственным интервалом, т. е.

$$\Delta_{\alpha\beta}(x) = 0 \text{ для пространственно-подобного вектора } x_\mu. \quad (8.7)$$

<sup>1)</sup> Значки ( $\pm$ ) внизу у скобок означают:

$$[A, B]_+ \equiv AB + BA, \quad [A, B]_- \equiv [A, B] = AB - BA.$$



Из (8.6) следует, что разложение функции  $\Delta_{\alpha\beta}(x)$  в ряд Фурье может быть представлено в виде<sup>1)</sup>

$$\Delta_{\alpha\beta}(x) = \int d^4k e^{ik_\mu x_\mu} \delta(k_\mu k_\mu + x^2) \Delta_{\alpha\beta}(k). \quad (8.8)$$

Инвариантность относительно преобразований Лоренца, обозначенных через  $L_+^\dagger$ ,  $L_+$ , требует, чтобы величина  $\Delta_{\alpha\beta}(k)$  имела вид<sup>2)</sup>

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = F_{\alpha\beta}(ik)(a + b\varepsilon(k)), \quad (8.9)$$

причем  $F_{\alpha\beta}(ik)$  — величина, которая при преобразованиях Лоренца преобразуется таким же образом, как и  $Q_\alpha \times \bar{Q}_\beta$ , а  $a$  и  $b$  — две константы. Значение символа  $\varepsilon(z)$  (причем  $z$  есть вектор  $z_\mu$ ) определяется следующим образом:

$$\varepsilon(z) \equiv \begin{cases} +1 & z_0 > 0 \\ -1 & z_0 < 0 \end{cases}. \quad (8.10)$$

Таким образом,  $\Delta_{\alpha\beta}(x)$  может быть записана в виде линейной комбинации двух „инвариантных  $\Delta$ -функций“  $\Delta$  и  $\Delta^{(1)}$ , к которым применен оператор  $F_{\alpha\beta}(\partial)$ , причем  $\Delta$  и  $\Delta^{(1)}$  определяются равенствами

$$\Delta(x) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{ik_\mu x_\mu} \delta(k_\mu k_\mu + x^2) \varepsilon(k), \quad (8.11a)$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ik_l x_l} \left(\frac{1}{2} K_0\right) (e^{iK_0 t} - e^{-iK_0 t}), \quad (8.11b)$$

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k e^{ik_\mu x_\mu} \delta(k_\mu k_\mu + x^2). \quad (8.12)$$

В этих равенствах

$$K_0 \equiv \sqrt{(k_l k_l + x^2)}.$$

Однако ввиду того, что, как это будет показано ниже,  $\Delta^{(1)}$  не равно нулю для пространственно-подобного вектора  $x$ , в (8.9) необходимо положить  $a = 0$  и поэтому (8.5) имеет вид

$$[Q_\alpha(x), \bar{Q}_\beta(x')]_{\pm} = iF_{\alpha\beta}(\partial) \Delta(x - x'), \quad (8.13a)$$

причем  $F_{\alpha\beta}(\partial)$  — дифференциальный оператор, который преобразуется при преобразованиях Лоренца аналогично величине  $Q_\alpha \times \bar{Q}_\beta$ .

<sup>1)</sup>  $d^4k \equiv dk_1 dk_2 dk_3 dk_0$ ,  $d^3k \equiv dk \equiv dk_1 dk_2 dk_3$ .

<sup>2)</sup> Легко видеть, что величина  $\delta(k_\mu k_\mu + x^2) \varepsilon(k)$  инвариантна относительно преобразований Лоренца, обозначенных через  $L_+^\dagger$ ,  $L_+$ , потому что ее значения на верхней и нижней частях светового конуса равны соответственно  $\delta(k_\mu k_\mu + x^2)$  и  $-\delta(k_\mu k_\mu + x^2)$ .

Как показано в гл. 2, существует зависящий от производных оператор  $d(\partial) \equiv [d_{\alpha\beta}(\partial)]$ , который удовлетворяет соотношению (2.7)

$$d(\partial) \Lambda(\partial) = (\square - x^2) I. \quad (8.136)$$

В следующей главе мы покажем, что оператор  $F_{\alpha\beta}(\partial)$  совпадает с оператором  $d_{\alpha\beta}(\partial)$  в (8.136) и что  $Q_\alpha(x)(\bar{Q}_\alpha(x))$  и  $Q_\beta(x')(\bar{Q}_\beta(x'))$  коммутируют друг с другом [15, 9]. Таким образом, имеем<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} [Q_\alpha(x), \bar{Q}_\beta(x')]_{\pm} &= id_{\alpha\beta}(\partial) \Delta(x - x'), \\ [Q_\alpha(x), Q_\beta(x')]_{\pm} &= [\bar{Q}_\alpha(x), \bar{Q}_\beta(x')]_{\pm} = 0. \end{aligned} \quad (8.14a)$$

В том случае, когда  $Q_\alpha(x)$  являются вещественными операторами поля, соотношения коммутации записываются в виде

$$[Q_\alpha(x), Q_\beta(x')]_{\pm} = id_{\alpha\beta}(\partial) \Delta(x - x'). \quad (8.146)$$

Следует заметить, что соотношение

$$\Lambda(\partial) d(\partial) = (\square - x^2) I \quad (8.13в)$$

может быть получено из (8.136). В самом деле, (8.136) приводит к соотношению

$$\bar{d}(\partial) \bar{\Lambda}(\partial) = (\square - x^2) I, \quad (8.13г)$$

в котором

$$\bar{d}(\partial) \equiv d(\partial) \eta^{-1}. \quad (8.13д)$$

Так как лагранжиан является вещественной величиной, то оператор  $\bar{\Lambda}(\partial)$  с учетом (8.3а) является эрмитовым. Поэтому и  $\bar{d}(\partial)$  является также эрмитовым оператором, и, следовательно,

$$\bar{\Lambda}(\partial) \bar{d}(\partial) = (\square - x^2) I.$$

Это соотношение приводит к (8.13в).

Следует заметить, что оператор  $\Lambda(\partial)$  в (8.136) определен полностью, даже включая знак и постоянный множитель, получаемый из лагранжиана  $L^0$ . Таким образом, исходя из данного лагранжиана  $L^0$ , используя (8.1а) и (8.136), можно получить  $\Lambda(\partial)$  и  $d(\partial)$ . Выражения оператора  $d(\partial)$  для различных полей приводились в гл. 3—5.

<sup>1)</sup> Соотношения коммутации для полей, которые связаны с состояниями с различными массами, также могут быть записаны в виде (8.14а) и (8.146) и поэтому удовлетворяют (2.36). В этом случае  $d(\partial)$  и  $\Delta$  могут быть получены из соотношений

$$d(\partial) \Lambda(\partial) = \prod_i (\square - x_i^2), \quad \prod_i (\square - x_i^2) \Delta(x) = 0.$$

Например, для случая поля Баба (см. гл. 5, § 1) величина  $d(\partial)$  была вычислена в работе Умэдзава и Висконти [18]. Общие свойства полей со многими массами детально проанализировали Пайс и Уленбек [6].

Волновое уравнение (8.2а), уравнение Шредингера (8.16) и соотношения коммутации (8.14а) и (8.14б)<sup>1)</sup> являются основой ковариантной теории свободных полей в гейзенберговском представлении. Как будет показано в следующей главе, выражение (8.2а) может быть записано с помощью вектора энергии-импульса  $T_{\mu}^0$  свободного поля

$$-\partial_{\mu} F(x) = [F(x), T_{\mu}^0], \quad (8.15)$$

где  $F(x)$  — некоторый функционал от  $Q_{\alpha}(x)$ .

## § 2. Инвариантные $\Delta$ -функции, функции Грина и условие причинности

Теперь можно систематизировать в одном месте важные свойства инвариантных  $\Delta$ -функций.

Из (8.11б) имеем

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= -\Delta(-x), \\ \Delta(x, x_4) &= -\Delta(x, -x_4), \\ \Delta(x, x_4) &= \Delta(-x, x_4). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Эти равенства показывают, что  $\Delta(x)$  не меняет знака при пространственном отражении, но изменяет знак при отражении времени. Кроме того, (8.11а) и (8.11б) дают<sup>2)</sup>

$$(\square - x^2) \Delta(x) = 0, \quad (8.17)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \Delta(x) \right)_{t=0} = -\delta(x). \quad (8.18)$$

Из (8.16) имеем

$$\Delta(x, 0) = 0, \quad (8.19а)$$

$$(\partial_k \Delta(x, x_4))_{t=0} = 0 \text{ для } k = 1, 2, 3, \quad (8.19б)$$

$$(\partial_k \Delta(x, x_4))_{x=0} = 0 \text{ для } k = 1, 2, 3. \quad (8.19в)$$

Из (8.18), (8.19а) и (8.19б) получаются следующие соотношения<sup>3)</sup>:

$$(\partial_{\mu} \varepsilon(x)) \Delta(x) = 0, \quad (8.20а)$$

$$(\partial_{\mu} \varepsilon(x)) (\partial_{\nu} \Delta(x)) = 2\delta_{\mu 4} \delta_{\nu 4} \delta^4(x), \quad (8.20б)$$

<sup>1)</sup> Недавно интересный способ получения ковариантных соотношений коммутации дал Пайерлс [9]. См. также работу М. Чини [1]. Их результаты согласуются с (8.14а) и (8.14б) для свободных полей.

<sup>2)</sup>  $\delta(x) \equiv \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3)$ .

<sup>3)</sup>  $\delta^4(x) \equiv \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \delta(x_0)$ .

при выводе которых было использовано равенство<sup>1)</sup>

$$\partial_\mu \varepsilon(x) = -2i\delta(t)\delta_{\mu 4}. \quad (8.20в)$$

Из (8.20а) и (8.20б) получаются соотношения

$$(\partial_\mu \partial_\nu \varepsilon(x)) \cdot \Delta(x) = -(\partial_\nu \varepsilon(x))(\partial_\mu \Delta(x)), \quad (8.20г)$$

$$(\square - \kappa^2)(\varepsilon(x)\Delta(x)) = 2\delta^4(x). \quad (8.20д)$$

Функция  $\Delta(x)$  может быть выражена через функции Бесселя  $J_0$  с помощью равенств [2]

$$\Delta(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F(r, t), \quad r \equiv (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2}, \quad (8.21а)$$

$$F(r, t) \equiv \begin{cases} J_0(\kappa(t^2 - r^2)^{1/2}) & \text{для } t > r, \\ 0 & \text{для } -r < t < r \\ -J_0(\kappa(t^2 - r^2)^{1/2}) & \text{для } t < -r. \end{cases} \quad (8.21б)$$

В частном случае нулевой массы  $\kappa = 0$  имеем [4]

$$\Delta(x) \Big|_{\kappa=0} = \frac{1}{4\pi r} \{ \delta(r-t) - \delta(r+t) \}. \quad (8.22)$$

Равенства (8.21б) показывают, что  $\Delta(x)$  обращается в нуль вне светового конуса с вершиной в  $\mathbf{x} = 0$  (т. е. в пространственно-подобной области). Поскольку  $F(r, t)$  на световом конусе терпит разрыв, функция  $\Delta(x)$  на световом конусе имеет  $\delta$ -образную особенность.

Функция  $\Delta^{(1)}(x)$  является скаляром, удовлетворяющим следующим соотношениям:

$$(\square - \kappa^2)\Delta^{(1)}(x) = 0, \quad (8.23)$$

$$\Delta^{(1)}(x) = \Delta^{(1)}(-x), \quad (8.24)$$

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} F_1(r, t), \quad (8.25а)$$

$$F_1(r, t) = \begin{cases} N_0(\kappa(t^2 - r^2)^{1/2}) & \text{для } t > r \text{ или } t < -r \\ -iH_0^{(1)}(i\kappa(r^2 - t^2)^{1/2}) & \text{для } r > t > -r. \end{cases} \quad (8.25б)$$

Здесь через  $N_0$  и  $H_0^{(1)}$  обозначены соответственно функция Неймана и функция Ханкеля 1-го рода. В частном случае  $\kappa = 0$

$$\Delta^{(1)}(x) \Big|_{\kappa=0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{r^2 - t^2}. \quad (8.26)$$

<sup>1)</sup> Из (8.10) для любого положительного значения  $a$  имеем

$$\partial_k \varepsilon(x) = 0 \quad (k=1, 2, 3), \quad \int_{-a}^a dt \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(x) = 2.$$

Эти соотношения приводят к (8.20в).

Соотношение (8.25б) показывает, что функция  $\Delta^{(1)}(x)$  не равна нулю даже вне светового конуса.

Теперь мы введем некоторые функции, которые нам часто будут нужны в последующем изложении [12]. Эти функции определяются следующим образом:

$$\bar{\Delta}(x) \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon(x) \Delta(x), \quad (8.27a)$$

$$\Delta_F(x) \equiv \Delta^{(1)}(x) - 2i \bar{\Delta}(x), \quad (8.27б)$$

$$\Delta^{ret}(x) \equiv -\frac{1}{2} (1 + \varepsilon(x)) \Delta(x) = \bar{\Delta}(x) - \frac{1}{2} \Delta(x), \quad (8.27в)$$

$$\Delta^{adv}(x) \equiv \frac{1}{2} (1 - \varepsilon(x)) \Delta(x) = \bar{\Delta}(x) + \frac{1}{2} \Delta(x). \quad (8.27г)$$

Функция  $\bar{\Delta}(x)$  выражается в виде интеграла Фурье

$$\bar{\Delta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} P \int d^4k e^{ik_\mu x_\mu} \frac{1}{k_\mu k_\mu + x^2}, \quad (8.28)$$

причем  $P$  означает, что интеграл в окрестности полюса следует брать в смысле главного значения [12].

Из (8.27а) и (8.28) следует

$$\Delta(x) = -2\varepsilon(x) \frac{1}{(2\pi)^4} P \int d^4k e^{ik_\mu x_\mu} \frac{1}{k_\mu k_\mu + x^2}. \quad (8.29)$$

С другой стороны, имеем<sup>1)</sup>

$$\delta_+(a) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\beta e^{i\alpha\beta} = \lim_{\varepsilon' \rightarrow +0} \frac{-1}{2\pi i (a + i\varepsilon')} = -\frac{1}{2\pi i} \left( P \frac{1}{a} - i\pi\delta(a) \right), \quad (8.30a)$$

причем  $\varepsilon'$  — бесконечно малое положительное число.

Величина  $\delta_-(a)$ , являющаяся комплексно-сопряженной к  $\delta_+(a)$ , дается равенством

$$\begin{aligned} \delta_-(a) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\beta e^{-i\alpha\beta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 d\beta e^{i\alpha\beta} = \lim_{\varepsilon' \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i (a - i\varepsilon')} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( P \frac{1}{a} + i\pi\delta(a) \right). \end{aligned} \quad (8.30б)$$

Отсюда

$$\delta_+(a) + \delta_-(a) = \delta(a), \quad (8.31a)$$

$$\delta_+(a) - \delta_-(a) = \frac{i}{\pi} P \frac{1}{a}. \quad (8.31б)$$

<sup>1)</sup>  $\delta_+(a) = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\beta e^{i\alpha\beta - \varepsilon'\beta} = \lim_{\varepsilon' \rightarrow +0} \frac{-1}{2\pi i (a + i\varepsilon')}$

Поэтому (8.12) и (8.28) могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(x) &= -\frac{i\pi}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik_\mu x_\mu} \{ \delta_+ (k_\mu k_\mu + x^2) - \delta_- (k_\mu k_\mu + x^2) \} = \\ &= \frac{1}{2i(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int d^4k \varepsilon(\beta) e^{i\beta (k_\mu k_\mu + x^2) + i(k_\mu x_\mu)}, \end{aligned} \quad (8.32)$$

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int d^4k e^{i\beta (k_\mu k_\mu + x^2) + i(k_\mu x_\mu)}. \quad (8.33)$$

С помощью (8.12), (8.27б) и (8.28)  $\Delta_F$  можно записать в виде

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik_\mu x_\mu} \left\{ 2\pi \delta(k_\mu k_\mu + x^2) - 2iP \frac{1}{k_\mu k_\mu + x^2} \right\}, \quad (8.34)$$

$$= -\frac{2i}{(2\pi)^4} \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int d^4k e^{ik_\mu x_\mu} \frac{1}{k_\mu k_\mu + x^2 - i\epsilon'}. \quad (8.35)$$

Как это видно из (8.28) и (8.35), коэффициенты разложений Фурье функции  $\bar{\Delta}$  и  $\Delta_F(x)$  имеют полюса в точках  $k_0 = \pm \sqrt{(k_i k_i + x^2)}$  (фиг. 4). Два полюса в (8.35) в  $k_0 = +K_0$  и  $-K_0$  отклонены от действительной оси на величины  $-(i\epsilon'/2)$  и  $+(i\epsilon'/2)$  соответственно, причем предельный переход  $\epsilon' \rightarrow 0$  совершается после выполнения интегрирований по  $d^4k$ .

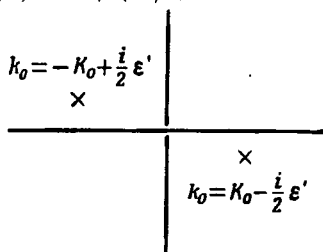
Из (8.27а) — (8.27г) и (8.20д) имеем

$$(\square - x^2) \bar{\Delta}(x) = -\delta^4(x), \quad (8.36)$$

$$(\square - x^2) \Delta_F(x) = 2i\delta^4(x), \quad (8.37)$$

$$(\square - x^2) \Delta^{ret}(x) = -\delta^4(x), \quad (8.38)$$

$$(\square - x^2) \Delta^{adv}(x) = -\delta^4(x). \quad (8.39)$$



Фиг. 4.

Теперь из (8.13б) следует, что функции Грина, определяемые уравнениями (8.2), зависят от  $d(\partial)$  и даются выражениями

$$\bar{G}(x) \equiv -d(\partial) \bar{\Delta}(x), \quad (8.40a)$$

$$G_F(x) \equiv -\frac{1}{2} id(\partial) \Delta_F(x), \quad (8.40б)$$

$$G^{ret}(x) \equiv -d(\partial) \Delta^{ret}(x), \quad (8.40в)$$

$$G^{adv}(x) \equiv -d(\partial) \Delta^{adv}(x), \quad (8.40г)$$

$$\Lambda(\partial) G(x) = \delta^4(x) I. \quad (8.41)$$

В последнем равенстве через  $G(x)$  обозначена любая из функций

Грина, определяемых в (8.40а) — (8.40г). Вообще, если  $\Delta_G(x)$  удовлетворяет уравнению

$$(\square - x^2)\Delta_G(x) = \delta^4(x),$$

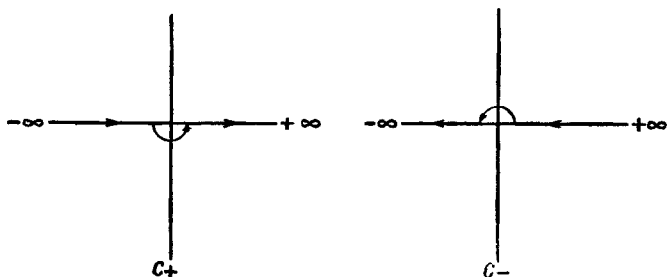
то  $d(\partial)\Delta_G(x)$  — функция Грина, удовлетворяющая (8.41).

Физический смысл функций Грина в (8.40в) и (8.40г) может быть понят из рассмотрения выражений (8.27в) и (8.27г). Из этих выражений следует, что

$$G^{ret}(x - x') = 0 \quad \text{для } \sigma(x) < \sigma(x'), \quad (8.42)$$

$$G^{adv}(x - x') = 0 \quad \text{для } \sigma(x) > \sigma(x'), \quad (8.43)$$

где  $\sigma(x)$  — пространственно-подобная поверхность, проходящая через точку  $x$ , а  $\sigma(x) > \sigma(x')$  означает, что поверхность  $\sigma(x)$  следует за поверхностью  $\sigma(x')$ . Последние равенства показывают, что  $G^{ret}$  и  $G^{adv}$  в точке  $x$  содержат соответственно точки  $x'$ , предшествующие  $x$ , и точки  $x'$ , следующие за  $x$  (т. е. учитывают запаздывающие и опережающие эффекты). Таким образом,  $G^{ret}$  и  $G^{adv}$  являются соответственно функциями Грина, когда заданными являются начальные и конечные состояния.



Фиг. 5.

Физический смысл функции  $G_F$  можно понять с помощью разделения  $\Delta(x)$  на две части, соответствующие „положительным“ и „отрицательным“ частотам [12]. Таким образом,

$$\Delta(x) = \Delta^+(x) + \Delta^-(x), \quad (8.44)$$

где

$$\Delta^\pm(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\pm} \Delta(x - \epsilon'\tau) \frac{d\tau}{\tau}.$$

Контур интегрирования  $C_+$  ( $C_-$ ) идет от  $-\infty$  до  $+\infty$  (от  $+\infty$  до  $-\infty$ ) и точку сингулярности  $\tau=0$  обходит в комплексной плоскости снизу (сверху) (фиг. 5). Аргумент  $x - \epsilon'\tau$  есть сокращенное обозначение для вектора  $x_\alpha - \epsilon'_\alpha \tau$ , причем  $\epsilon'_\alpha$  является

временно-подобным единичным вектором, удовлетворяющим соотношению

$$\varepsilon'_0 (= -i\varepsilon'_4) > 0. \quad (8.45)$$

Пользуясь формулами

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_+} e^{-ik_\mu \varepsilon'_\mu \tau} \frac{d\tau}{\tau} = \begin{cases} 1 & \text{для } -k_\mu \varepsilon'_\mu > 0 \\ 0 & \text{для } -k_\mu \varepsilon'_\mu < 0 \end{cases} \quad (8.46a)$$

и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_-} e^{-ik_\mu \varepsilon'_\mu \tau} \frac{d\tau}{\tau} = \begin{cases} 0 & \text{для } -k_\mu \varepsilon'_\mu > 0 \\ 1 & \text{для } -k_\mu \varepsilon'_\mu < 0, \end{cases} \quad (8.46b)$$

мы из (8.44) и (8.11a) получаем равенства

$$\Delta^+(x) = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int_{-k_\mu \varepsilon'_\mu > 0} d^4 k \delta(k_\mu k_\mu + x^2) e^{ik_\mu x_\mu}$$

и

$$\Delta^-(x) = + \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-k_\mu \varepsilon'_\mu > 0} d^4 k \delta(k_\mu k_\mu + x^2) e^{-ik_\mu x_\mu}. \quad (8.47)$$

В этих равенствах интегрирования проводятся по области  $(-k_\mu \varepsilon'_\mu > 0)$ . Следует заметить, что условие  $-k_\mu \varepsilon'_\mu > 0$  не зависит от конкретного вектора  $\varepsilon'_\mu$  и инвариантно относительно преобразований Лоренца, обозначаемых через  $\mathcal{L}_\pm^+$ ,  $\mathcal{L}_\pm^-$ . В самом деле, мы имеем

$$-k_\mu \varepsilon'_\mu = k_0 \varepsilon'_0 \left(1 - \frac{k_i \varepsilon'_i}{k_0 \varepsilon'_0}\right),$$

откуда следует

$$k_0 (= -ik_4) > 0 \text{ для } -k_\mu \varepsilon'_\mu > 0, \quad (8.48)$$

так как  $k_\mu$  и  $\varepsilon'_\mu$  — временно-подобные векторы, удовлетворяющие, следовательно, соотношению

$$\left| \frac{(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}')}{k_0 \varepsilon'_0} \right| \leq \frac{|\mathbf{k}| |\boldsymbol{\varepsilon}'|}{|k_0| |\varepsilon'_0|} < 1.$$

Неравенство (8.48) не зависит от вектора  $\varepsilon'_\mu$  и инвариантно при преобразованиях Лоренца  $\mathcal{L}_\pm^+$ ,  $\mathcal{L}_\pm^-$ . Равенства (8.47) показывают в явном виде, что  $\Delta^+$  и  $\Delta^-$  являются частями с положительными и отрицательными частотами. Далее,  $\Delta^\pm$  удовлетворяют уравнению

$$(\square - x^2) \Delta^\pm(x) = 0 \quad (8.49a)$$

и соотношению

$$\Delta^-(x) = -\Delta^+(-x). \quad (8.49b)$$



Равенства (8.47) показывают, что  $\Delta^+(x)$  является комплексно-сопряженной к  $\Delta^-(x)$  величиной. На основе (8.47) и (8.12) можно написать

$$\Delta^{(1)}(x) = i \{ \Delta^+(x) - \Delta^-(x) \}. \quad (8.50)$$

С помощью (8.27б), (8.44) и (8.50) получается

$$\Delta_F(x-x') = \begin{cases} 2i\Delta^+(x-x') & \text{для } \sigma(x) > \sigma(x') \\ -2i\Delta^-(x-x') & \text{для } \sigma(x) < \sigma(x') \end{cases} \quad (8.51)$$

Теперь введем в рассмотрение функцию

$$M(x, x') = \begin{cases} a\Delta^+(x-x') & \text{для } \sigma(x) > \sigma(x') \\ b\Delta^-(x-x') & \text{для } \sigma(x) < \sigma(x') \end{cases},$$

где  $a$  и  $b$  не содержат в себе  $x$  и  $x'$ . Так как  $\Delta^\pm(x-x')$  являются суперпозицией плоских волн с положительными и отрицательными частотами вида

$$\exp iE \{ (\mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{x}') \mp (t - t') \}, \quad (\mathbf{v} \equiv \mathbf{k}/K_0),$$

то связь точки  $x'$  (в настоящем) с точкой  $x$  в будущем или прошедшем содержится в  $M(x, x')$  с помощью сходящейся  $f((t-t') \mp (\mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{x}'))$  или расходящейся  $f((t-t') - (\mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{x}'))$  волны. Это находится в согласии с принципом причинности, который требует, чтобы состояние в настоящем зависело только от прошедшего и влияло только на будущее. Когда теория формулируется таким образом, что начальное и конечное состояния входят в нее симметрично, должно соблюдаться равенство

$$M(x, x') = M(x', x),$$

которое, с учетом (8.49б), приводит к соотношению

$$a = -b.$$

Это как раз то соотношение, которому удовлетворяет  $\Delta_F(x-x')$ . Таким образом, причинная связь между событиями в различных точках в теории, в которой конечное и начальное состояния рассматриваются симметрично, описывается с помощью функции  $G_F(x-x')$  [14]. Это будет продемонстрировано в явном виде в гл. 13.

### § 3. Соотношения коммутации и спин

Соотношения коммутации компонент поля тесно связаны со спином частиц, которые описываются соответствующим полем. Настоящий параграф посвящен выяснению этой связи.

Прежде всего рассмотрим поле с целочисленным спином. Как показано в гл. 4, в этом случае волновые функции могут быть выбраны в тензорном виде. Предположим, что соотношения

коммутации являются соотношениями коммутации со знаком „+“. Тогда для  $Q_\alpha$  и  $Q_\alpha^*$  (с тем же индексом  $\alpha$ ) имеем

$$[Q_\alpha(x), Q_\alpha^*(x')]_+ = i\bar{d}_{\alpha\alpha}(\partial)\Delta(x-x'),$$

где суммирование по  $\alpha$  не подразумевается. Так как  $Q_\alpha$  и  $Q_\alpha^*$  являются тензорами одинакового ранга, то  $d_{\alpha\alpha}(\partial)$  является тензором четного ранга, сконструированным из  $\delta_{\mu\nu}$  и  $\partial_\mu$ . Таким образом, имеем

$$\bar{d}_{\alpha\alpha}(-\partial) = \bar{d}_{\alpha\alpha}(\partial).$$

Принимая во внимание (8.16) и меняя местами  $x$  и  $x'$  в указанном выше соотношении коммутации, получаем

$$[Q_\alpha(x'), Q_\alpha^*(x)]_+ = i\bar{d}_{\alpha\alpha}(-\partial)\Delta(x'-x) = -i\bar{d}_{\alpha\alpha}(\partial)\Delta(x-x').$$

Складывая оба соотношения коммутации, имеем

$$[Q_\alpha(x), Q_\alpha^*(x')]_+ + [Q_\alpha(x'), Q_\alpha^*(x)]_+ = 0,$$

откуда следует<sup>1)</sup>

$$[Q_\alpha(x), Q_\alpha^*(x')]_+ = 0.$$

Поэтому

$$Q_\alpha = Q_\alpha^* = 0.$$

Чтобы избежать этого бессодержательного результата, мы вынуждены в случае целого спина в соотношениях (8.14а) и (8.14б) пользоваться правилами коммутации со знаком „-“ [7].

С другой стороны, мы уже указывали, что для устранения парадокса Клейна необходимо считать, что частицы полуцелого спина должны подчиняться статистике Ферми. В следующей главе будет показано, что это требование равносильно требованию, чтобы частицы полуцелого спина описывались соотношениями коммутации со знаком „+“.

В гл. 5 нами была высказана важная теорема, касающаяся свойств  $d(\partial)$  [16]:

*Порядок дифференциального оператора  $d(\partial)$ , обозначаемый через  $b^{(s)}$ , дается формулой*

$$b^{(s)} = 2S, \text{ если } \kappa \neq 0, \quad (8.52)$$

в которой  $S$  — максимальное значение спина различных полей, описываемых компонентами поля  $Q_\alpha$ . (Следует напомнить, что в общем случае величины  $Q_\alpha$  принадлежат к приводимому представлению и описывают несколько полей.)

<sup>1)</sup> В общем случае матричное соотношение  $[A, A^*]_+ = 0$  приводит к  $A = A^* = 0$ .

Когда речь идет о поле с нулевой массой, эти выводы могут уже не иметь места. Общие соображения, связанные с размерностью, показывают, что высшие производные в выражении для  $d(\partial)$  могут появиться лишь в виде произведения  $(\partial_\mu/\kappa)$ . Если  $\kappa$  равно нулю, то производные высшего порядка в выражении для  $d(\partial)$  не будут присутствовать. Следствием этого обстоятельства может явиться то, что соотношения коммутации могут оказаться несовместными с уравнениями поля. Именно этот случай имеет место для электромагнитного поля (7.50). Когда  $\Lambda(\partial) = \square$ ,  $d(\partial) = I$ , то уравнение поля

$$\Lambda(\partial) A_\mu(x) = 0$$

не включает условия Лоренца

$$\partial_\mu A_\mu(x) = 0.$$

Это положение полностью противоположно тому, которое имеет место в случае векторного поля  $U_\mu$  с не равной нулю массой покоя ( $\kappa \neq 0$ ). В последнем случае уравнение  $\partial_\mu U_\mu = 0$  не является независимым от уравнения поля (7.85а). Именно по этим причинам мы в гл. 7, пример 3, сочли целесообразным заменить условие Лоренца, т. е. ограничение, накладываемое на компоненты поля  $A_\mu(x)$ , условием [см. (7.56)]

$$\partial_\mu A_\mu(x) \Psi = 0,$$

являющимся ограничением, накладываемым на вектор состояния  $\Psi$ .

Вообще в случае полей с равной нулю массой покоя ( $\kappa = 0$ ) и спином  $S > 1/2$ , уравнения поля состоят из двух совокупностей уравнений

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial) Q_\beta(x) = 0, \quad (8.53)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}^s(\partial) Q_\beta(x) = 0. \quad (8.54)$$

Как показано в гл. 4, § 3, хотя поле и имеет спин  $S$ , число независимых компонент этого поля, ввиду калибровочной инвариантности теории, сводится к 2. Подобно условию Лоренца, дополнительное условие (8.54) приводит к уменьшению числа независимых состояний. Примером такого дополнительного условия является третья из уравнений (4.48). Мы будем рассматривать уравнение (8.53) как полную систему уравнений поля и соотношения коммутации будем выводить из (8.53), (8.14а), (8.14б) и (8.13б), не принимая во внимание уравнения (8.54). Однако эти соотношения коммутации не будут согласовываться с дополнительным условием (8.54). Поэтому его можно заменить условием

$$\Lambda_{\alpha\beta}^s(\partial) Q_\beta(x) \Psi = 0. \quad (8.55)$$

Последнее уравнение накладывает ограничение не на компоненты поля  $Q_\alpha$ , а на вектор состояния  $\Psi$  и обеспечивает исключение излишних компонент, которые не могут появиться в состояниях,

реализуемых в природе. Таким образом, при  $\kappa = 0$  лишь две компоненты доступны наблюдению. Например, в квантовой электродинамике условие Лоренца (7.56) приводит к тому, что плоская электромагнитная волна характеризуется лишь двумя наблюдаемыми состояниями (т. е. двумя состояниями поляризации). Более подробное обсуждение этих вопросов будет дано в гл. 9, пример 2.

В случае поля  $A_{\mu_1, \dots, \mu_S}$  с целым спином, уравнение (8.53) дается первой строчкой в (4.47). Таким образом,

$$\Lambda(\partial) = \square I,$$

откуда следует

$$d(\partial) = I.$$

Уравнение (8.53) в случае поля  $\phi_{\mu_1, \dots, \mu_k}$  ( $S = k + 1/2$ ) с полуцелым спином дается уравнением (4.41) с  $\kappa = 0$ . Поэтому

$$\text{и} \quad \begin{aligned} \Lambda(\partial) &= -\gamma_\mu \partial_\mu \\ d(\partial) &= -\gamma_\mu \partial_\mu. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$b^{(S)} = \begin{cases} 0 & \text{для поля } A_{\mu_1, \dots, \mu_S} \text{ с целым спином, } \kappa = 0 \\ 1 & \text{для поля } \phi_{\mu_1, \dots, \mu_k} \text{ с полуцелым спином, } \kappa = 0. \end{cases} \quad (8.526)$$

### § 4. Примеры

#### Пример 1. Соотношения коммутации различных полей

Мы перечислим соотношения коммутации для различных полей [см. (8.13а), (8.14а) и (8.14б)]. Вид операторов  $\Lambda(\partial)$  устанавливается путем сравнения (8.3а) с лагранжианами  $L^0$ , приведенными в гл. 7.

Мы имеем<sup>1)</sup>

$$\Lambda(\partial) = \begin{cases} (\square - \kappa^2) I & \text{для заряженных скалярных или псевдоскалярных полей } (U, U^*), \\ [(\square - \kappa^2) \delta_{a, b}] (a, b = 1, 2) & \text{для заряженных скалярных или псевдоскалярных полей } (U^{(1)}, U^{(2)}), \\ \square I & \text{для электромагнитного поля } A_\mu, \\ [\partial_\mu \partial_\nu - (\square - \kappa^2) \delta_{\mu\nu}] & \text{для заряженных векторных или псевдовекторных полей } (U_\mu, U_\mu^*), \\ -(\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa) & \text{для спинорных полей } (\psi, \bar{\psi}). \end{cases}$$

<sup>1)</sup>  $\{\partial_\mu \partial_\nu - (\square - \kappa^2) \delta_{\mu\nu}\} U_\nu = \partial_\nu F_{\mu\nu} - \kappa^2 U_\mu.$

Теперь с помощью (8.13) можно найти  $d(\partial)$  и затем получить следующие соотношения коммутации:

Для скалярных или псевдоскалярных полей

$$\begin{aligned} [U(x), U^*(x')]_- &= i\Delta(x-x'), \\ [U^{(1)}(x), U^{(1)}(x')] &= [U^{(2)}(x), U^{(2)}(x')]_- = i\Delta(x-x'), \\ [U^{(1)}(x), U^{(2)}(x')]_- &= 0. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Для электромагнитного поля

$$[A_\mu(x), A_\nu(x')]_- = i\delta_{\mu\nu}\Delta(x-x') \quad (\kappa=0). \quad (8.57)$$

Для векторных или псевдовекторных полей

$$[U_\mu(x), U_\nu^*(x')]_- = i(\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{x^2}\partial_\mu\partial_\nu)\Delta(x-x'). \quad (8.58)$$

Для спинорных полей

$$[\psi(x), \bar{\psi}(x')]_+ = \frac{1}{\gamma}S(x-x'), \quad (8.59a)$$

$$S(x-x') \equiv (\gamma_\mu\partial_\mu - \kappa)\Delta(x-x'). \quad (8.59b)$$

Соотношения коммутации для вещественных (и поэтому нейтральных) полей получаются из (8.56) и (8.58), если в них соответствующие величины записывать без звездочек и положить  $U^{(2)}=0$ . Легко видеть, что (8.57) не согласуется с уравнением  $\partial_\mu A_\mu=0$ . Поэтому в гл. 7, пример 3, условие Лоренца взято в виде (7.56).

Соотношения коммутации для векторного поля в формализме Штюкельберга имеют вид

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), A_\nu^\dagger(x')]_- &= i\delta_{\mu\nu}\Delta(x-x'), \\ [B(x), B^\dagger(x')]_- &= i\Delta(x-x'), \\ [A_\mu(x), B^\dagger(x')]_- &= [A_\mu^\dagger(x), B(x')]_- = 0. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Для получения соотношений коммутации вещественных (и поэтому нейтральных) полей надо соотношения коммутации (8.60) записать без значков  $\dagger$ .

### Пример 2. Теория Дурффина — Кеммера

Из лагранжиана (7.105) получаем

$$\Lambda(\partial) = -(\partial_\mu\beta_\mu + \kappa).$$

Так как спин поля, описываемого этой теорией, равен 0 или 1, то из (8.52a) можно видеть, что  $b^{(S)}=2$ . Вид оператора  $d(\partial)$  был уже указан в (5.24):

$$d(\partial) = -\left\{\frac{1}{x}(\square - \kappa^2) + \beta_\mu\partial_\mu - \frac{1}{2\kappa}(\beta_\mu\beta_\nu + \beta_\nu\beta_\mu)\partial_\mu\partial_\nu\right\}. \quad (8.61)$$

Отсюда следует, что [15]

$$\begin{aligned} [\psi(x), \bar{\psi}(x')]_- &= \frac{1}{i} \left\{ \frac{1}{x} (\square - x^2) + \beta_\mu \partial_\mu - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2x} (\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu) \partial_\mu \partial_\nu \right\} \Delta(x - x') = \\ &= \frac{1}{i} \left\{ \beta_\mu \partial_\mu - \frac{1}{2x} (\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu) \partial_\mu \partial_\nu \right\} \Delta(x - x'). \end{aligned} \quad (8.62)$$

Надо заметить, что член  $(\square - x^2)$  не дает вклада в соотношения коммутации (8.62), но существенен для функций Грина  $G(x)$ .

### Пример 3. Теория Рарита — Швингера (спин $3/2$ )

Из лагранжиана (7.124) получаем

$$\Lambda_{\mu\nu}(\partial) = - \left\{ (\gamma_\rho \partial_\rho + x) \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} (\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{3} \gamma_\mu (\gamma_\rho \partial_\rho - x) \gamma_\nu \right\}. \quad (8.63)$$

Уравнение (8.25а) дает значение  $b^{(S)} = 3$ . Оператор  $\partial_{\mu\nu}(\partial)$  был уже дан в (4.56д) и имеет вид [15]

$$\begin{aligned} d_{\mu\nu}(\partial) &= - (\gamma_\rho \partial_\rho - x) \left\{ \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu + \frac{1}{3x} (\gamma_\mu \partial_\nu - \gamma_\nu \partial_\mu) - \frac{2}{3x^2} \partial_\mu \partial_\nu \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{3x^2} (\square - x^2) \left\{ (\gamma_\mu \partial_\nu - \gamma_\nu \partial_\mu) + (\gamma_\rho \partial_\rho - x) \gamma_\mu \gamma_\nu \right\}. \end{aligned} \quad (8.64)$$

Соотношения коммутации записываются следующим образом:

$$[\psi_\mu(x), \bar{\psi}_\nu(x')] = id_{\mu\nu}(\partial) \Delta(x - x'). \quad (8.65)$$

### Пример 4. Общие случаи

Теперь рассмотрим общее уравнение поля (5.15)

$$\Lambda(\partial) = - (\beta_\mu \partial_\mu + x). \quad (8.66)$$

На основании (5.18а) оператор  $d(\partial)$  имеет вид

$$\begin{aligned} d(\partial) &= xI - \beta_\mu \partial_\mu - \frac{1}{x} [\square - (\beta_\rho \partial_\rho)^2] + \dots + \\ &\quad + \left( \frac{-1}{x} \right)^{2S-1} [\square - (\beta_\rho \partial_\rho)^2] (\beta_\rho \partial_\rho)^{2S-2}. \end{aligned} \quad (8.67)$$

В этом выражении через  $S$  обозначен спин поля. Поэтому соотношение коммутации гласит [18]

$$[\psi(x), \bar{\psi}(x')]_{\pm} = id(\partial) \Delta(x - x'). \quad (8.68)$$

Пример 5. *Отражение времени и принцип детального равновесия*<sup>1)</sup>

Как показано в гл. 3, § 3, лагранжиан дираковского поля (7.111), который можно рассматривать как  $c$ -число, при отражении времени изменяется<sup>2)</sup>. С другой стороны, лагранжиан скалярного поля (7.44) инвариантен относительно такого отражения. В общем случае можно доказать, что при отражении времени

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4x L^0(x) = \begin{cases} \text{нечетный скаляр для полей с полуцелым спином} \\ \text{скаляр для полей с целым спином,} \end{cases}$$

Из (7.3) и (7.4) следует, что при отражении времени

$$T_{\mu}^0 = \begin{cases} \text{четный вектор для полей с полуцелым спином} \\ \text{нечетный вектор для полей с целым спином.} \end{cases} \quad (8.69)$$

что является следствием того, что  $d\sigma_{\mu}$  ведет себя как нечетный вектор [см. (6.2)]. Другими словами, при отражении времени

$$\begin{aligned} x &\rightarrow 'x, \\ Q(x) &\rightarrow 'Q('x) = \Lambda Q(x) \end{aligned} \quad (8.70)$$

вектор энергии-импульса преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} T_k^0[Q(x)] &= -\sigma T_k^0[\Lambda Q(x)] \quad (k=1, 2, 3), \\ T_4^0[Q(x)] &= \sigma T_4^0[\Lambda Q(x)], \end{aligned} \quad (8.71a)$$

причем константа  $\sigma$  определяется равенствами

$$\sigma = \begin{cases} -1 & \text{для полей с полуцелым спином} \\ +1 & \text{для полей с целым спином.} \end{cases} \quad (8.71b)$$

Так как  $\partial_{\mu}$  при отражении времени преобразуется всегда как четный вектор, то преобразование (8.71a) кажется несовместным с каноническим уравнением [см. (8.15)]

$$-\partial_{\mu} Q_{\alpha}(x) = [Q_{\alpha}(x), T_{\mu}^0]. \quad (8.72)$$

Однако такое заключение преждевременно, так как мы не приняли во внимание закона преобразования вектора состояния:

$$\Psi \rightarrow ' \Psi = \Psi^*. \quad (8.73)$$

Действительно, ввиду изменения знака времени должно произойти изменение фазы вектора состояния  $\Psi$ . Преобразование (8.73) можно интерпретировать как преобразование, связывающее два различных мира. Если в одном мире мы имеем переход из состояния с  $n$  частицами в состояние с  $m$  частицами, то в другом это

<sup>1)</sup> См. работы [8, 19, 20, 13, 5, 17].

<sup>2)</sup> Например, мы видим, что  $x\psi$  меняет свой знак при отражении времени.

будет выглядеть как переход из состояния с  $m$  частицами в состояние с  $n$  частицами. К этому следует добавить еще, например, возможные изменения заряда и спина частиц. Отсюда следует, что операторы поля  $Q_\alpha$  и  $Q_\beta^*$  должны преобразовываться в линейные комбинации транспонированных операторов  $Q_\alpha^T$  и  $Q_\beta^{*T}$ . Таким образом, обозначая компоненты поля после отражения времени через  $Q_\alpha('x)$  и  $'Q_\alpha^*( 'x)$ , будем иметь

$$Q_\alpha(x) = a_{\alpha\beta} 'Q_\beta^T('x) + b_{\alpha\beta} 'Q_\beta^{*T}('x), \quad (8.74)$$

где  $[a_{\alpha\beta}]$  и  $[b_{\alpha\beta}]$  — пока неизвестные матрицы. Последнее равенство может быть переписано в виде

$$Q_\alpha(x) = \Lambda_{\alpha\beta}^{-1} r_{\beta\rho} 'Q_\rho^T('x) + \Lambda_{\alpha\beta}^{-1} t_{\beta\rho} 'Q_\rho^{*T}('x); \quad (8.75)$$

здесь  $[r_{\alpha\beta}]$  и  $[t_{\alpha\beta}]$  — унитарные матрицы, определяемые требованием инвариантности теории относительно отражений времени.

Из (8.72) и (8.71) имеем<sup>1)</sup>

$$-\partial'_\mu Q_\alpha('x) = \sigma [Q_\alpha('x), T_\mu^0[r'Q^T('x) + t'Q^{*T}('x)]^T]. \quad (8.76)$$

Инвариантность теории относительно отражения времени требует, чтобы (8.76) было эквивалентно уравнению

$$-\partial'_\mu Q_\alpha('x) = [Q_\alpha('x), T_\mu^0[Q('x)]]. \quad (8.77)$$

Это означает, что должно быть

$$T_\mu^0[r'Q^T('x) + t'Q^{*T}('x)]^T = \sigma T_\mu^0[Q('x)] + c\text{-число}. \quad (8.78)$$

Как показано в гл. 7,  $T_\mu^0[Q(x)]$  имеет вид

$$T_\mu^0[Q(x)] = \int d^2x Q_\alpha^*(x) \Omega_{\mu,\alpha\beta}(\partial) Q_\beta(x), \quad (8.79)$$

где  $\Omega_{\mu,\alpha\beta}(\partial)$  — дифференциальный оператор.

Используя (8.79), условие (8.78) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &'Q('x) (r^{-1} \Omega(\partial) r)^T Q^*( 'x) + 'Q^*( 'x) (t^{-1} \Omega_\mu(\partial) t)^T Q('x) + \\ &+ 'Q('x) (t^{-1} \Omega(\partial) r)^T Q('x) + 'Q^*( 'x) (r^{-1} \Omega_\mu(\partial) t)^T Q^*( 'x) = \\ &= \sigma 'Q^*( 'x) \Omega_\mu(\partial) 'Q('x) + c\text{-число}. \end{aligned} \quad (8.80)$$

Существуют два решения этого уравнения:

*Случай I.* Если  $r$  удовлетворяет уравнению

$$r^{-1} \Omega_\mu(\partial) r + \Omega_\mu(\partial) \quad (8.81a)$$

и

$$t = 0 \quad (8.81b)$$

<sup>1)</sup> При выводе (8.76) нами использовано соотношение

$$[A, B]^T = -[A^T, B^T].$$



и соотношения коммутации являются соотношениями коммутации

$$\begin{aligned} &\text{со знаком „+“ для поля с полуцелым спином,} \\ &\text{со знаком „-“ для поля с целым спином,} \end{aligned} \quad (8.82)$$

то (8.80) решено [см. (8.716)].

В этом случае существует тесная связь между спинами и соотношениями коммутации. Решение уравнения (8.81a) имеет вид  $r=1$ <sup>1)</sup>. Далее из (7.111) легко видеть, что в случае поля со спином  $1/2$  и нулевой массой ( $\alpha=0$ ) другим решением (8.81a) является  $r=\gamma_5$ .

*Случай II:* Уравнение (8.80) имеет решение также и в том случае, когда

$$r=0, \quad (8.83)$$

$$t^{-1}\Omega_\mu(\partial)t = \sigma\Omega_\mu^T(\partial). \quad (8.84)$$

В этом случае никакого ограничения на тип соотношения коммутации не накладывается.

Можно доказать, что матрица  $t$  в (8.84) равна произведению матрицы  $r$  в (8.81a) на матрицу зарядового сопряжения. В качестве примера рассмотрим поле  $\psi$  со спином  $1/2$  и не равной нулю массой ( $\alpha \neq 0$ ); в этом случае (8.81a) дает  $r=1$ , а величина  $\Omega_\mu(\partial)$  равна  $\gamma_4(\gamma_k\partial_k + \alpha)$ .

Из (8.84) и (8.716)<sup>2)</sup> имеем

$$t^{-1}\gamma_4\gamma_k t = (\gamma_4\gamma_k)^T, \quad t^{-1}\gamma_4 t = -\gamma_4^T.$$

Эти соотношения приводят к равенствам

$$\gamma_4^T = -t^{-1}\gamma_4 t, \quad \gamma_k^T = t^{-1}\gamma_k t,$$

которые показывают, что

$$\gamma_\mu^T = -C^{-1}\gamma_\mu C,$$

где матрица  $C = t\gamma_4^T$ . Сравнивая это соотношение с (3.37), мы видим, что  $t$  — матрица, связывающая  $\psi$  и  $\psi^*$  при преобразовании зарядового сопряжения [см. (3.40)],

$$\psi = C\bar{\psi}^T = C\gamma_4^T\psi'^*T = t\psi'^*T.$$

Таким образом, можно заключить, что преобразование, указанное в случае I, может быть представлено в виде произведения пре-

<sup>1)</sup> Можно взять  $r$  в виде комплексного  $c$ -числа с абсолютным значением 1 и  $\pm 1$  соответственно для комплексных и вещественных полей. Однако этот произвол в выборе фазового множителя может быть включен в  $\Lambda$ .

<sup>2)</sup> Учитывая пространственную интеграцию в (8.79), можно взять

$$\partial_k^T = -\partial_k.$$

Это соответствует выполнению интегрирований по частям.

образования, указанного в случае II, и зарядового сопряжения.

Теперь сравним некоторую физическую величину  $F[Q(x)]$  с преобразованной величиной  $F[Q'(x)]$ . Так как оператор  $F[Q(x)]$  должен быть эрмитовым, то каждое собственное значение этого оператора будет вещественным, так что

$$F[Q(x)]\Psi = f\Psi; \quad (8.85)$$

здесь  $\Psi$  — собственный вектор с собственным значением  $f$ . Производя преобразование (8.73), получаем

$$F[Q(x)]^T\Psi = f^*\Psi.$$

Таким образом, вводя знаковую переменную  $\varepsilon = \pm 1$ , определяемую равенством

$$F[Q'(x)] = \varepsilon F[Q(x)]^T, \quad (8.86)$$

мы видим, что  $F[Q'(x)]$  имеет собственное значение  $\varepsilon f$ , потому что

$$F[Q'(x)]\Psi = \varepsilon f^*\Psi. \quad (8.87)$$

Используя (8.75), равенство (8.86) можно записать еще в виде

$$F[r^{-1}\Lambda Q^T(x)] = \varepsilon F[Q(x)]^T \text{ в случае I,}$$

$$F[Q^{*T}(x)\Lambda^{-1}t] = \varepsilon F[Q(x)]^T \text{ в случае II.}$$

Уравнение (8.87) показывает, что  $\varepsilon$  определяет четности физических величин относительно отражения времени. Эти четности для различных величин дираковских полей указаны в табл. 3.

Таблица 3

| Тип  | $\varepsilon$ в случае I | $\varepsilon$ в случае II |
|--|--------------------------|---------------------------|
| $\bar{\psi}\psi$                             | +1                       | +1                        |
| $k$  | +1                       | -1                        |
| $i\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$                  | 4                        | +1                        |
| $ik$   | +1                       | -1                        |
| $i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$        | 4k                       | +1                        |
| $i\bar{\psi}\gamma_5\psi$                    | -1                       | -1                        |
| $k$  | -1                       | -1                        |
| $i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi$          | 4                        | +1                        |
| $ik$   | -1                       | +1                        |
| $\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\psi$ | 4i                       | -1                        |

В качестве примера рассмотрим компоненту тока  $\bar{\psi}\gamma_1\psi$ . Уравнение (8.87) требует, чтобы в случае I удовлетворялось соотношение

$$\varepsilon(\bar{\psi}\gamma_1\psi)^T = \psi^{*T}\Lambda^{-1}r\gamma_4\gamma_1r^{-1}\Lambda\psi^T.$$

Используя соотношение коммутации для  $\psi$  и  $\psi^*$  и беря  $r=1$  и  $\Lambda = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$  [см. (3.27)], имеем

$$\begin{aligned}\psi^{*T}\Lambda^{-1}r\gamma_4\gamma_1r^{-1}\Lambda\psi^T &= \psi^T\gamma_1^T\gamma_4^T\psi^{*T} + \text{Постоянное } c\text{-число} \\ &= (\bar{\psi}\gamma_1\psi)^T + \text{Постоянное } c\text{-число}.\end{aligned}$$

Это приводит к значению  $\varepsilon=1$ , потому что постоянное  $c$ -число может быть включено в нулевой ток. С другой стороны, в случае II уравнение (8.87) требует, чтобы

$$\varepsilon(\bar{\psi}\gamma_1\psi)^T = (t^{-1}\Lambda\psi^T)\gamma_4\gamma_1(\psi^{*T}\Lambda^{-1}t).$$

Полагая  $t = C\gamma_4^T$  и  $\Lambda = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$  и используя (3.37), получаем

$$\begin{aligned}(t^{-1}\Lambda\psi^T)\gamma_4\gamma_1(\psi^{*T}\Lambda^{-1}t) &= \psi^T\Lambda^T t^T \gamma_4 \gamma_1 t^T \Lambda^{-1} \psi^{*T} = \\ &= -\psi^T\gamma_1^T\gamma_4^T\psi^{*T} = -(\bar{\psi}\gamma_1\psi)^T.\end{aligned}$$

Это приводит к значению  $\varepsilon=-1$ .

В табл. 3 показано, что при отражениях времени многие физические величины меняют свой знак. В табл. 4, которую легко можно получить из табл. 3, дано соотношение между состояниями частиц в двух различных мирах, о которых говорилось выше. Знаки „-“ и „+“ указывают, что физическая величина либо меняет, либо не меняет свой знак<sup>1)</sup>.

Таблица 4

|  | Случай I | Случай II |
|--|----------|-----------|
| Заряд $J_4$ . . . . .                              | -        | +         |
| Ток $J_k$ . . . . .                                | +        | -         |
| Импульс $T_k$ . . . . .                            | -        | -         |
| Спиновый } момент количества движения. . .         | -        | -         |
| Орбитальный }                                      |          |           |
| Энергия $T_4$ . . . . .                            | +        | +         |
| Вектор-потенциал $A_k$ электромагнитного поля. . . | +        | -         |
| Скалярный потенциал $A_4$ электромагнитного поля   | -        | +         |

<sup>1)</sup> Четности электромагнитного поля  $A_\mu$  могут быть определены из требования инвариантности лагранжиана взаимодействия  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu$  относительно преобразования времени.

Например, электрон с импульсом  $\mathbf{k}$  и спином  $\sigma$  во взаимном мире может быть представлен в случаях *I* и *II* соответственно позитроном и электроном с импульсом  $-\mathbf{k}$  и спином  $-\sigma$ .

Символ  $\epsilon$  имеет важное значение при анализе принципа детального равновесия, согласно которому вероятность перехода  $A \rightarrow B$  равна вероятности перехода  $B \rightarrow A$ . Проведенные выше рассмотрения показывают, что принцип детального равновесия должен быть несколько модифицирован в том смысле, что вероятность перехода  $A \rightarrow B$  равна вероятности перехода  $B' \rightarrow A'$ , причем  $A'$  и  $B'$  — состояния во взаимном мире, соответствующие  $A$  и  $B$  и определяемые с помощью табл. 4.

В гл. 10 мы покажем, что требования, связанные с отражением времени, иногда ограничивают виды взаимодействий, причем эти ограничения носят различный характер в зависимости от выбора случаев *I* и *II*.

### Пример 6. Истинный порядок дифференциальных операторов

Теорема (8.52) ограничивает величину  $b^{(S)}$ , определяющую порядок дифференциального оператора  $d(\partial)$ . Сейчас мы обсудим наибольший порядок дифференциальных операторов, которые появляются в соотношениях коммутации для  $D(\partial)Q_\alpha(x)$ :

$$[D(\partial)Q_\alpha(x), D(\partial')Q_\beta(x')] = iD(\partial)D(\partial')d_{\alpha\beta}(\partial)\Delta(x-x'); \quad (8.88)$$

здесь  $D(\partial)$  является дифференциальным оператором, а величины  $Q_\alpha$  описывают поле с массой  $\kappa^1$ , отличной от нуля. Когда наибольший порядок дифференциальных операторов в  $D(\partial)D(\partial)d(\partial)$  равен  $(b^{(S)} + 2t)$ , мы называем  $t$  истинным порядком оператора  $D(\partial)$  [11]. Имеется несколько случаев, когда  $t$  не равно максимальной величине порядка дифференциальных операторов в  $D(\partial)$ . Последующее обсуждение покажет, что эти исключения возникают вследствие требования, чтобы элементарные частицы описывались волновыми функциями, составляющими неприводимое представление группы Лоренца.

Как показано в гл. 4, в силу того, что величины  $(U_{\mu_1, \dots, \mu_S}, F_{[\mu_1, \nu_1] \mu_2, \dots, \mu_S})$  и  $(F_{[\mu_1, \nu_1] \mu_2, \dots, \mu_S}, F_{[\mu_1, \nu_1] [\mu_2, \nu_2] \mu_3, \dots, \mu_S})$ , даваемые с помощью (4.37), могут описывать состояние одного и того же поля с целым спином, выражение (8.52) приводит к заключению, что величины  $b^{(S)}$ , которые появляются в соотношениях коммутации, одни и те же. Другими словами, истинный порядок оператора  $d_{\mu\nu; \rho}$  [см. (4.38)], действующего на  $U_{\mu'\mu_2, \dots, \mu_S}$ , равен нулю. Аналогичная ситуация возникает в случае полей с полуцелым

<sup>1</sup>) Для простоты спинорные или тензорные индексы у  $D(\partial)$  опущены.

спином. Так как каждая из величин  $(\varphi, \chi)^{(a)}$  ( $a = 1, \dots$ ) [см. (4.29)] может описывать одно и то же поле, то истинный порядок оператора  $\partial^{rs}$ , действующего на  $\varphi_s \dots$ , равен нулю. Таким образом,  $a^{(s)}$  является суммой порядков всех дифференциальных операторов в  $D(\partial)$ , за исключением порядков операторов  $\partial_{\mu\nu;\mu'}$  и  $\partial^{rs}$ .

Приведем пример того, что истинный порядок оператора  $\partial_{\mu\nu;\mu'}$  равен нулю. Как показано в примере 1, соотношения коммутации для векторных полей включают множители  $R(\mu, \nu)$ , определяемые равенствами

$$R(\mu, \nu) \equiv \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{x^2} \partial_\mu \partial_\nu. \quad (8.89)$$

Отсюда следует, что

$$\partial_{\mu\nu;\mu'} \partial_{\rho\sigma;\mu''} R(\mu', \mu'') = \partial_{\mu\nu;\mu'} \partial_{\rho\sigma;\mu'}. \quad (8.90)$$

Уравнение (8.90) показывает, что истинный порядок  $\partial_{\mu\nu;\mu'}$  равен нулю.

Понятие об истинном порядке будет использовано в гл. 15.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Cini M., Nuovo Cimento, **9**, 10 (1952).
2. Dirac P. A. M., Proc. Cambr. Phil. Soc., **30**, 100 (1934).
3. Fierz M., Helv. Phys. Acta, **12**, 3 (1939).
4. Jordan P., Pauli W., Zs. f. Phys., **47**, 151 (1928).
5. Lüders G., Zs. f. Phys., **133**, 325 (1952).
6. Pais A., Uhlenbeck G. E., Phys. Rev., **79**, 145 (1950).
7. Pauli W., Phys. Rev., **58**, 716 (1940).
8. Pauli W., Belinfante, Physica, **7**, 177 (1940).
9. Peierls R., Proc. Roy. Soc., **A214**, 143 (1952).
10. Rivier D., Prog. Theor. Phys., **6**, 633 (1953).
11. Sakata S., Umezawa H., Kametuchi S., Prog. Theor. Phys., **7**, 377 (1952).
12. Schwinger J., Phys. Rev., **75**, 651 (1949).
13. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 927 (1951).
14. Stueckelberg E. C. G., Green T. A., Helv. Phys. Acta, **24**, 153 (1951).
15. Takahashi Y., Umezawa H., Prog. Theor. Phys., **9**, 1 (1953).
16. Umezawa H., Prog. Theor. Phys., **7**, 551 (1952).
17. Umezawa H., Kametuchi S., Tanaka S., Prog. Theor. Phys., **12**, 383 (1954).
18. Umezawa H., Visconti A. (в печати) 1955.
19. Watanabe S., Phys. Rev., **84**, 1012 (1951).
20. Watanabe S., Rev. Mod. Phys., **27**, № 1 (1955).

# Квантовая теория свободных полей (II)

## Поля и частицы

### § 1. Квантование

Сейчас мы покажем, что соотношения коммутации (8.14а) и (8.14б) приводят к ковариантной квантовой теории поля, в которой состояния полей представляют ансамбли полей Клейна—Гордона, проквантованных в согласии с *канонической теорией* [7,8].

Мы начнем со случая заряженного поля, описываемого компонентами поля  $Q_\alpha(x)$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ), и сопряженных к ним величин  $Q_\alpha^*(x)$ . Так как дифференциальные операторы<sup>1)</sup>

$$\bar{\Lambda}(\partial) = \eta \Lambda(\partial) \quad \text{и} \quad \bar{d}(\partial) = d(\partial) \eta^{-1} \quad [\text{см. (8.4) и (8.13д)}]$$

являются эрмитовыми, то должна существовать унитарная матрица  $s = [s_{\alpha\beta}(\partial)]$ , которая приводит  $\bar{\Lambda}(\partial)$  и  $\bar{d}(\partial)$  к диагональному виду с помощью формул

$$\Lambda(\partial) = s^{-1} \bar{\Lambda}(\partial) s = [\lambda(r:\partial) \delta_{rs}], \quad (9.1a)$$

$$d(\partial) = s^{-1} \bar{d}(\partial) s = [d(r:\partial) \delta_{rs}], \quad (9.1б)$$

$$s_{\alpha r}^*(\partial) s_{\alpha s}(\partial) = \delta_{rs}, \quad (9.1в)$$

$$s_{\alpha s}(\partial) s_{\beta s}^*(\partial) = \delta_{\alpha\beta}, \quad (9.1г)$$

$$\lambda(r:\partial) d(r:\partial) = \square - x^2. \quad (9.2)$$

В (9.2) индекс  $r$  пробегает значения от 1 до  $n$ , но суммирование по нему нет. Операторы  $\lambda(r:\partial)$  и  $d(r:\partial)$  являются вещественными, так что

$$d^*(r:\partial) = d(r:-\partial), \quad (9.3)$$

<sup>1)</sup> Дифференциальный оператор  $f(\partial)$  может быть определен функцией  $f(k)$  с помощью разложения в ряд Фурье

$$f(\partial) F(x) = \int d^4k f(ik) F(k) e^{ik_\mu x^\mu};$$

здесь  $F(x)$  — произвольная функция, разложение которой в ряд Фурье представляется следующим образом:

$$F(x) = \int d^4k F(k) e^{ik_\mu x^\mu}.$$

где учтено, что  $\partial_\mu$  соответствует в импульсном представлении величине  $ik_\mu$ .

Матрица  $s$  преобразует уравнения поля (8.26) в  $n$  независимых уравнений

$$\lambda(r; \partial) q_r(x) = 0. \quad (9.4)$$

Здесь суммирования по  $r$  нет, а  $q_r(x)$  равно

$$q_r(x) \equiv s_{ra}^{-1}(\partial) Q_a(x). \quad (9.5)$$

Лагранжиан (8.3а) может быть переписан в виде

$$\bar{L}^0 \doteq \int d^4x q_r^*(x) \lambda(r; \partial) q_r(x), \quad (9.6)$$

где мы учли (9.5) и (9.1а). Действительно, (9.6) является как раз лагранжианом, который приводит к уравнениям (9.4).

Представив  $q_r(x)$  в виде

$$q_r(x) = (d(r; \partial))^{1/2} u_r(x), \quad (9.7)$$

мы из (9.2) и (9.6) получаем

$$\bar{L}^0 \doteq \int d^4x \bar{u}_r(x) (\square - x^2) u_r(x), \quad (9.8a)$$

$$\bar{L}^0 \doteq - \int d^4x [\partial_\mu \bar{u}_r(x) \cdot \partial_\mu u_r(x) + x^2 \bar{u}_r(x) u_r(x)]. \quad (9.8b)$$

Величина  $\bar{u}_r$  определяется равенством  $q_r^*(x) = (d(r; -\partial))^{1/2} \bar{u}_r(x)$ .

С другой стороны, вследствие (9.3) соотношения коммутации (8.14а) с помощью (9.1б) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} [q_r(x), q_s^*(x')]_{\pm} &= id(r; \partial) \Delta(x - x') \delta_{rs}, \\ [q_r(x), q_s(x')]_{\pm} &= [q_r^*(x), q_s^*(x')]_{\pm} = 0. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Соотношения (9.9) будут удовлетворены, если

$$\begin{aligned} [u_r(x), \bar{u}_s(x')]_{\pm} &= i\Delta(x - x') \delta_{rs}, \\ [u_r(x), u_s(x')]_{\pm} &= [\bar{u}_r(x), \bar{u}_s(x')]_{\pm} = 0. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Последние соотношения для момента времени  $t$  приводят к следующим соотношениям коммутации:

$$\begin{aligned} [P_r(x, t), u_s(x', t)]_{\pm} &= i\partial(x - x') \delta_{rs}, \\ [u_r(x, t), \bar{u}_s(x', t)]_{\pm} &= 0, \\ [u_r(x, t), u_s(x', t)]_{\pm} &= [\bar{u}_r(x, t), \bar{u}_s(x', t)]_{\pm} = 0, \end{aligned} \quad (9.11)$$

в которых

$$P_r(x) \equiv -i\partial_\mu \bar{u}_r(x). \quad (9.12)$$

Так как уравнение Клейна — Гордона является дифференциальным уравнением второго порядка, то соотношения коммутации (9.11),

относящиеся к моменту времени  $t$ , однозначным образом определяют соотношения коммутации между  $u_r(x)$  и  $u_r^*(x')$  для любого промежутка времени  $t - t'$ , а именно (9.10).

Теперь заметим, что  $P_r(x)$  является оператором, канонически сопряженным к  $u_r(x)$  и могущим быть выведенным из лагранжиана (9.86) (см. гл. 7, § 1). Таким образом, можно заключить, что из канонической теории Клейна — Гордона соотношения коммутаций (9.11) вытекают автоматически.

Так как для спина  $S$  каждое из решений волновых уравнений в виде плоских волн является линейной комбинацией  $(2S + 1)$  линейно независимых компонент [см. (4.22)], лишь  $(2S + 1)$  величин  $q_r(k)$  не равны нулю [ $q_r(k)$  являются компонентами  $q_r(x)$  при разложении в интеграл Фурье, причем  $k$  дается соотношением  $k_\mu k_\mu + x^2 = 0$ ]. Поэтому (9.7) показывает, что только  $(2S + 1)$  из  $d(r: ik)$  ( $r = 1, \dots, n$ ) не равны нулю, если  $k$  удовлетворяет соотношению  $k_\mu k_\mu + x^2 = 0$ . Другими словами, порядок матрицы  $d(ik)$  в случае  $k_\mu k_\mu + x^2 = 0$  равен  $2S + 1$ .

Так как  $u_r(x)$  удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона

$$(\square - x^2) u_r(x) = 0, \quad (9.13)$$

то  $u_r, \bar{u}_r$  могут быть представлены в виде<sup>1)</sup>

$$u_r(x) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k (2K_0 V)^{-1/2} \{ u_r^+(K) e^{i(k \cdot x - K_0 t)} + u_r^-(K) e^{-i(k \cdot x - K_0 t)} \}, \quad (9.14a)$$

$$\bar{u}_r(x) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k (2K_0 V)^{-1/2} \{ \epsilon u_r^{*+}(K) e^{i(k \cdot x - K_0 t)} + u_r^{*-}(K) e^{-i(k \cdot x - K_0 t)} \}. \quad (9.14b)$$

Здесь величина  $\epsilon$  равна  $1$  ( $-1$ ) в случае перестановочных соотношений в (9.10) со знаком „ $-$ “ ( $+$ ). Величина  $V$  равна

$$V \equiv \lim_{p \rightarrow 0} \int d^3 x e^{i(p \cdot x)} \quad (9.15)$$

и может быть интерпретирована как рассматриваемый объем. Если этот объем  $V$  взят в виде куба  $V = L^3$ , то волновые числа стоячих волн имеют дискретные значения  $2\pi n/L$ , где  $n$  — целое число. Если к непрерывному спектру энергии частиц переходить с помощью предельного перехода  $L \rightarrow \infty$  [т. е.  $(2\pi/L)^3 \rightarrow d^3 k$ ], то знаки суммирования надо заменять интегрированиями по правилу

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 k. \quad (9.16)$$

<sup>1)</sup>  $K_\mu \equiv (k_1, k_2, k_3, iK_0)$ ,  $K_0 = \sqrt{(k \cdot k + x^2)}$ .



Подстановка (8.116) и (9.14) в соотношения коммутации (9.10) дает<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} [u_r^{*+}(K), u_s^-(K')]_{\pm} &= \delta_{rs} \delta_{KK'}, \\ [u_r^+(K), u_s^{*-}(K')]_{\pm} &= \delta_{rs} \delta_{KK'}, \\ [u_r^{\pm}(K), u_s^{\pm}(K)]_{\pm} &= 0, \\ [u_r^{*\pm}(K), u_s^{*\pm}(K)]_{\pm} &= 0. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Как будет показано примерами § 3, величина  $u_r^{*+}(u_r^{*-})$  не является величиной  $u_r^{+*}(u_r^{-*})$ , эрмитово сопряженной к  $u_r^+(u_r^-)$ .

Соотношения (9.17) являются хорошо известными соотношениями квантовой механики [2]. В представлении, в котором матрицы  $u_r^{*-}(K)u_r^+(K)$  и  $u_r^-(K)u_r^{*+}(K)$  являются диагональными, имеют место равенства

$$\begin{aligned} (n_r^+ + 1 | u_r^{*-}(K) | n_r^+) &= (n_r^+ | u_r^+(K) | n_r^+ + 1) = (n_r^+ + 1)!, \\ (n_r^- + 1 | u_r^-(K) | n_r^-) &= (n_r^- | u_r^{*+}(K) | n_r^- + 1) = (n_r^- + 1)!; \end{aligned} \quad (9.18)$$

остальные матричные элементы в случае коммутаций равны нулю, а в случае антикоммутации (т. е. когда в перестановочных соотношениях используется знак „+“) равны нулю все матричные элементы, за исключением

$$\begin{aligned} (n_r^+ = 0 | u_r^+(K) | n_r^+ = 1), & \quad (n_r^+ = 1 | u_r^{*-}(K) | n_r^+ = 0), \\ (n_r^- = 0 | u_r^{*+}(K) | n_r^- = 1), & \quad (n_r^- = 1 | u_r^-(K) | n_r^- = 0). \end{aligned} \quad (9.19)$$

В (9.18) и (9.19) через  $n_r^+$  и  $n_r^-$  обозначены собственные значения операторов „числа“ частиц

$$\begin{aligned} N_r^+(K) &= u_r^{*-}(K) u_r^+(K), \\ N_r^-(K) &= u_r^-(K) u_r^{*+}(K). \end{aligned} \quad (9.20)$$

Эти величины в случае перестановочных соотношений с коммутаторами могут принимать любые положительные целые значения (0, 1, 2, ...), а в случае перестановочных соотношений с антикоммутаторами — лишь значения (0, 1).

Величины  $n_r^+$  и  $n_r^-$  мы будем интерпретировать соответственно как число частиц в состояниях частицы со значениями  $(r, K_u)$  и античастицы со значениями  $(r, K_u)$ . Отсюда следует, что (9.18) и (9.19) относятся соответственно к случаям статистики Бозе и статистики Ферми. Принимая во внимание связь между соотноше-

<sup>1)</sup>  $\delta_{KK'} = \begin{cases} 1 & \text{для } K_u = K'_u \\ 0 & \text{для } K_u \neq K'_u \end{cases}$

ниями коммутации и спинами (см. гл. 8, § 3), можно заключить, что частицы целого и полуцелого спина подчиняются соответственно статистикам Бозе и Ферми. Это заключение согласуется с тем, что электроны и нуклоны подчиняются статистике Ферми, а фотоны — статистике Бозе.

Согласно (9.5), (9.7) и (9.14),  $Q_\alpha(x)$  и  $\bar{Q}_\alpha(x)$  могут быть записаны в виде

$$Q_\alpha(x) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k (2K_0 V)^{-1} s_{\alpha r}(\partial) (d(r:d))^{1/2} \times \\ \times \{u_r^+(K) e^{i(k \cdot x - K_0 t)} + u_r^-(K) e^{-i(k \cdot x - K_0 t)}\}, \quad (9.21)$$

$$\bar{Q}_\alpha(x) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k (2K_0 V)^{-1} s_{r\beta}^*(\partial) (d(r:-d))^{1/2} \eta_{\beta\alpha} \times \\ \times \{u_r^{*-}(K) e^{-i(k \cdot x - K_0 t)} + \varepsilon u_r^{*+}(K) e^{i(k \cdot x - K_0 t)}\}. \quad (9.22)$$

Эти выражения показывают, что величины  $u_r^+(K)$  и  $u_r^-(K)$  [ $u_r^{*+}(K)$  и  $u_r^{*-}(K)$ ] связаны соответственно с положительно частотными и отрицательно частотными амплитудами Фурье разложения величины  $Q_\alpha(x)$  ( $\bar{Q}_\alpha(x)$ ).

Положительно частотные и отрицательно частотные части величины  $Q_\alpha(x)$  ( $\bar{Q}_\alpha(x)$ ) мы будем обозначать через  $Q_\alpha^+(x)$  и  $Q_\alpha^-(x)$  [ $\bar{Q}_\alpha^+(x)$  и  $\bar{Q}_\alpha^-(x)$ ], так что

$$Q_\alpha(x) = Q_\alpha^+(x) + Q_\alpha^-(x), \quad (9.23a)$$

$$\bar{Q}_\alpha(x) = \bar{Q}_\alpha^+(x) + \bar{Q}_\alpha^-(x), \quad (9.23b)$$

$$(\square - x^2) Q_\alpha^\pm(x) = (\square - x^2) \bar{Q}_\alpha^\pm(x) = 0. \quad (9.24)$$

Такое разделение можно произвести с помощью метода, использованного при выводе (8.44), когда

$$Q_\alpha^+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} Q_\alpha(x - \varepsilon' \tau) \frac{d\tau}{\tau}, \\ Q_\alpha^-(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} Q_\alpha(x - \varepsilon' \tau) \frac{d\tau}{\tau}, \\ \bar{Q}_\alpha^+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \bar{Q}_\alpha(x - \varepsilon' \tau) \frac{d\tau}{\tau}, \\ \bar{Q}_\alpha^-(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} \bar{Q}_\alpha(x - \varepsilon' \tau) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (9.25)$$

Из соотношений коммутации (8.14a) следует

$$[Q_\alpha^\pm(x), \bar{Q}_\beta(x')]_{\pm} = i d_{\alpha\beta}(\partial) \Delta^\pm(x - x').$$

Используя (8.46а) и (8.46б), можно доказать равенство

$$\int_{C_+} e^{i\alpha\tau} \frac{d\tau}{\tau} \int_{C_+} e^{-i\alpha'\tau'} \frac{d\tau'}{\tau'} = 0,$$

с помощью которого получаются соотношения

$$\begin{aligned} [Q_{\alpha}^{-}(x), \bar{Q}_{\beta}^{+}(x')] &= id_{\alpha\beta}(\partial) \Delta^{-}(x-x'), \\ [Q_{\alpha}^{+}(x), \bar{Q}_{\beta}^{-}(x')]_{\pm} &= id_{\alpha\beta}(\partial) \Delta^{+}(x-x'). \end{aligned}$$

В случае вещественных компонент поля  $Q_{\alpha}$  соотношения (9.21) имеют место по-прежнему, но соотношения (9.17) должны быть заменены соотношениями

$$\begin{aligned} [u_r^{+}(K), u_s^{-}(K')]_{\pm} &= \delta_{rs} \delta_{KK'}, \\ [u_r^{+}(K), u_s^{+}(K')]_{\pm} &= [u_r^{-}(K), u_s^{-}(K')]_{\pm} = 0. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Из этих соотношений можно получить соотношение коммутации (8.14б).

## § 2. Четырехмерный вектор энергии-импульса и определение вакуума

Так как канонический четырехмерный вектор энергии-импульса  $T_{\mu}$  (7.4) является билинейным функционалом от  $Q_{\alpha}^{*}$  и  $Q_{\alpha}$  и не зависит от времени<sup>1)</sup>, то он может быть представлен в виде суперпозиции плоских волн  $Q_{\alpha}(k, x) \equiv Q_{\alpha}(k) \exp(ik_{\mu}x_{\mu})$ , являющихся решением волнового уравнения (8.2а). Таким образом, используя (7.3б), можно написать<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} T_{\mu} &= i \sum_{\kappa} \int d\sigma_{\nu} \left\{ \frac{\partial L^0(k, x)}{\partial Q_{\alpha;\nu}^{*}(k, x)} Q_{\alpha;\mu}(k, x) + Q_{\alpha;\mu}^{*}(k, x) \frac{\partial L^0(k, x)}{\partial Q_{\alpha;\nu}^{*}(k, x)} \right\}_{k=k^0} \\ &- i \int d\sigma_{\mu} L^0(k, x)_{k=k^0} \quad (k_{\mu}^0 k_{\mu}^0 + x^2 = 0), \end{aligned}$$

где  $L^0(k, x)$  — плотность лагранжиана, полученная из (8.3а) подстановкой  $Q_{\alpha}(x) \rightarrow Q_{\alpha}(k, x)$ .

<sup>1)</sup> Такой функционал имеет вид

$$T_{\mu} = \int d^3k Q_{\alpha}^{*}(k) \Omega_{\mu\alpha\beta}(k) Q_{\beta}(k),$$

где  $Q_{\alpha}(K)$  — амплитуда Фурье  $Q_{\alpha}(x)$ .

<sup>2)</sup> При вычислениях лагранжиана не следует ограничивать значения вектора энергии-импульса  $k_{\mu}$  значениями  $k_{\mu}^0 (k_{\mu}^0 k_{\mu}^0 + x^2 = 0)$ .

Используя преобразование (9.5) и уравнение (9.4), имеем

$$\begin{aligned}
 T_{\mu} &= i \sum_r \sum_k \int d\sigma_{\nu} \left\{ \frac{\partial L^0(k, x)}{\partial q_{r;\nu}(k, x)} \frac{\partial q_{r;\nu}(k, x)}{\partial Q_{\alpha;\nu}(k, x)} Q_{\alpha;\mu}(k, x) + \right. \\
 &+ Q_{\alpha;\mu}^*(k, x) \frac{\partial q_{r;\nu}^*(k, x)}{\partial Q_{\alpha;\nu}(k, x)} \frac{\partial L^0(k, x)}{\partial q_{r;\nu}^*(k, x)} \left. \right\}_{k=k^0} - i \int d\sigma_{\mu} L^0(k, x)_{k=k^0} = \\
 &= i \sum_r \sum_k \int d\sigma_{\nu} \left\{ \frac{\partial L^0(k, x)}{\partial q_{r;\nu}(k, x)} S_{r\alpha}^{-1}(k) S_{\alpha s}(k) q_{s;\mu}(k, x) + \right. \\
 &+ q_{s;\mu}^*(k, x) S_{s\alpha}^*(k) S_{\alpha r}^{*-1} \frac{\partial L^0(k, x)}{\partial q_{r;\nu}(k, x)} - q_r^*(k, x) \lambda(r; \partial) q_r(k, x) \left. \right\}_{k=k^0} = \\
 &= i \sum_r \sum_k \int d\sigma_{\nu} \left\{ \frac{\partial L^0(k, x)}{\partial q_{r;\nu}(k, x)} q_{r;\mu}(k, x) + q_{r;\mu}^*(k, x) \frac{\partial L^0(k, x)}{\partial q_{r;\nu}^*(k, x)} - \right. \\
 &- \left. q_r^*(k, x) \lambda(r; \partial) q_r(k, x) \right\}_{k=k^0},
 \end{aligned}$$

где символ  $\Sigma'$  означает, что суммирование по величине  $r$  распространяется только на  $(2S + 1)$  не равных нулю компонент  $q_r(k^0, x)$ . Проводя преобразование (9.7) и используя (9.8б), найдем

$$\begin{aligned}
 T_{\mu} &= i \sum_r \sum_k \int d\sigma_{\nu} \left\{ \frac{\partial L^0(k, x)}{\partial u_{r;\nu}(k, x)} u_{r;\mu}(k, x) + \bar{u}_{r;\mu}(k, x) \frac{\partial L^0(k, x)}{\partial \bar{u}_{r;\nu}(k, x)} + \right. \\
 &+ \bar{u}_r(k, x) (k_{\mu} k_{\mu} + x^2) u_r(k, x) \left. \right\}_{k=k^0} = \\
 &= -i \sum_r \sum_k \int d\sigma_{\nu} \left\{ \bar{u}_{r;\nu}(k, x) u_{r;\mu}(k, x) + \bar{u}_{r;\mu}(k, x) u_{r;\nu}(k, x) \right\}_{k=k^0}.
 \end{aligned}$$

Учитывая, что  $u_r(k, x)$  связано с разложением Фурье величины  $u_r^{\pm}(x)$ , получаем равенство

$$\begin{aligned}
 T_{\mu} &= -i \sum_r \int d\sigma_{\nu} \left\{ u_{r;\nu}^{*-}(x) u_{r;\mu}^{+}(x) + u_{r;\mu}^{*-}(x) u_{r;\nu}^{+}(x) + \right. \\
 &+ u_{r;\nu}^{*+}(x) u_{r;\mu}^{-}(x) + \varepsilon u_{r;\mu}^{*+}(x) u_{r;\nu}^{-}(x) \left. \right\}, \quad (9.27)
 \end{aligned}$$

которое с учетом (9.20) приводит к выражению

$$T_{\mu} = -i \sum_r \sum_k K_{\alpha} (N_r^{+}(K) + N_r^{-}(K)) + \text{Постоянное } c\text{-число.} \quad (9.28)$$

Выражение (9.28) показывает, что полная энергия и импульс поля представляются в виде суммы энергий и импульсов отдельных частиц. Тем самым устанавливается тесная связь между частицами и полями.

Вакуум определяется как состояние, в котором отсутствуют частицы ( $n_r^{\pm} = 0$ ). Отсюда на основании (9.28) можно заключить, что вакуум является состоянием с наименьшей энергией, которая равна нулевой энергии в (9.28) (ср. гл. 6, § 1).

Из (9.28), (9.17) и (9.20) имеем

$$[u_r^\pm(K), T_\mu] = \pm(-iK_\mu)u_r^\pm(K), \quad (9.29)$$

$$[u_r^{*\pm}(K), T_\mu] = \pm(-iK_\mu)u_r^{*\pm}(K). \quad (9.30)$$

Отсюда следует

$$[Q_\alpha(x), T_\mu] = -\partial_\mu Q_\alpha(x), \quad (9.31)$$

$$[\bar{Q}_\alpha(x), T_\mu] = -\partial_\mu \bar{Q}_\alpha(x), \quad (9.32)$$

где учтены выражения (9.21) и (9.22). Канонические уравнения 8.15) могут быть выведены из (9.31) и (9.32).

Из (9.29) получаем

$$Wu_r^+(K)\Psi = (W' - w)u_r^+(K)\Psi, \quad (9.33)$$

$$Wu_r^{*+}(K)\Psi = (W' - w)u_r^{*+}(K)\Psi, \quad (9.34)$$

где

$$W = T_4, \quad w = K_0, \quad (9.35)$$

а  $\Psi$  — собственная функция оператора энергии  $W$  с собственным значением  $W'$ . Уравнения (9.33) и (9.34) показывают, что  $u_r^{*+}(K)\Psi$  и  $u_r^+(K)\Psi$  являются также собственными функциями оператора  $W$  с собственным значением  $(W' - w)$ . Другими словами,  $u_r^+(K)$  и  $u_r^{*+}(K)$  являются операторами, которые уменьшают энергию на величину  $w$ . Аналогичным способом можно показать, что  $u_r^-(K)$  и  $u_r^{*-}(K)$  являются операторами, увеличивающими энергию поля на величину  $w$ . Эти свойства операторов  $u_r^\pm(K)$  и  $u_r^{*\pm}(K)$  согласуются со сказанным в § 1, т. е. с интерпретацией операторов  $u_r^+(K)$  ( $u_r^{*+}(K)$ ) и  $u_r^-(K)$  ( $u_r^{*-}(K)$ ) как операторов аннигиляции и рождения частиц (античастиц) поля.

Так как вакуум  $\Phi_0$  является состоянием с наименьшей энергией, то [6]

$$u_r^+(K)\Phi_0 = u_r^{*+}(K)\Phi_0 = 0, \quad (9.36)$$

$$\Phi_0^* u_r^-(K) = \Phi_0^* u_r^{*-}(K) = 0. \quad (9.37)$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} Q_\alpha^+(x)\Phi_0 &= \Phi_0^* Q_\alpha^-(x) = 0, \\ \bar{Q}_\alpha^+(x)\Phi_0 &= \Phi_0^* \bar{Q}_\alpha^-(x) = 0. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Это есть матричное выражение определения вакуума.

В указанной интерпретации нулевая энергия электронного поля соответствует энергии вакуумных электронов старой теории „дырок“. Так как вакуум в квантовой теории поля оказывает влияние на многие реальные эффекты, необходимо это влияние при вычи-

слениях учитывать (вычитание вакуумных эффектов). В связи с этим теоретические предсказания зависят от определения вакуума<sup>1)</sup>.

Сейчас мы приведем некоторые формулы, зависящие от определения вакуума. Вводя  $Q_\alpha^{(1)}(x)$  с помощью равенства

$$Q_\alpha^{(1)}(x) \equiv i \{ Q_\alpha^+(x) - Q_\alpha^-(x) \} = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} Q_\alpha(x - \varepsilon'\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \quad (9.39)$$

получаем

$$[Q_\alpha(x), \bar{Q}_\beta(x')]_{\mp} = -i [Q_\alpha^{(1)}(x), \bar{Q}_\beta(x')]_{\pm} + \\ + 2(Q_\alpha^{\mp}(x) \bar{Q}_\beta(x') \mp \bar{Q}_\beta(x') Q_\alpha^{\pm}(x)). \quad (9.40)$$

Отсюда следует, что

$$([Q_\alpha(x), \bar{Q}_\beta(x')]_{\pm})_0 = -i ([Q_\alpha^{(1)}(x), \bar{Q}_\beta(x')]_{\pm})_0, \quad (9.41)$$

причем через  $( )_0$  обозначено среднее значение по состоянию вакуума. Из (8.50) и (9.39) получаем

$$([Q_\alpha(x), \bar{Q}_\beta(x')]_{\mp})_0 = d_{\alpha\beta}(\partial) \Delta^{(1)}(x - x'), \quad (9.42)$$

причем знак „-“ или „+“ в левой части ставят в зависимости от того, берутся ли соотношения коммутации (8.14а) и (8.14б) со знаком „+“ или со знаком „-“.

### § 3. Примеры

#### Пример 1. Скалярные и псевдоскалярные поля $U(x)$

Для таких полей (9.21) и (9.22) могут быть записаны в виде

$$U(x) = \sum_k (2K_0 V)^{-1/2} (u^+(K) e^{iK_\mu x_\mu} + u^-(K) e^{-iK_\mu x_\mu}), \\ U^*(x) = \sum_k (2K_0 V)^{-1/2} (u^{*+}(K) e^{iK_\mu x_\mu} + u^{*-}(K) e^{-iK_\mu x_\mu}), \quad (9.43)$$

так как в этом случае (см. гл. 8, пример 1)

$$d(\partial) = 1.$$

Соотношения коммутации (9.17) приводят к соотношениям коммутации

$$[u^+(K), u^{*-}(K')] = \delta_{KK'}, \\ [u^{*+}(K), u^-(K')] = \delta_{KK'}. \quad (9.44)$$

<sup>1)</sup> Однако определение (9.38) для вакуума страдает тем недостатком, что  $\Phi_0$ , собственный вектор оператора энергии свободного поля, не стационарен в случае взаимодействующих полей. Поэтому в настоящее время не существует последовательной теории вакуума взаимодействующих полей. Этой проблемы мы коснемся в гл. 18.

Из (9.28) мы имеем

$$T_{\mu} = -i \sum_{\mathbf{k}} K_{\mu} \{u^{*-}(\mathbf{k}) u^{+}(\mathbf{k}) + u^{*+}(\mathbf{k}) u^{-}(\mathbf{k})\}, \quad (9.45)$$

причем это равенство также можно вывести с помощью (7.4) из лагранжиана (7.44).

Полный электрический заряд дается выражением (7.46) в виде

$$e^t = e \sum_{\mathbf{k}} (u^{*-}(\mathbf{k}) u^{+}(\mathbf{k}) - u^{-}(\mathbf{k}) u^{*+}(\mathbf{k})) + \text{Постоянное } c\text{-число} =$$

$$= e \sum_{\mathbf{k}} (N^{+}(\mathbf{k}) - N^{-}(\mathbf{k})) + \text{Постоянное } c\text{-число}, \quad (9.46)$$

$$N^{+}(\mathbf{k}) = u^{*-}(\mathbf{k}) u^{+}(\mathbf{k}), \quad N^{-}(\mathbf{k}) = u^{-}(\mathbf{k}) u^{*+}(\mathbf{k}); \quad (9.47)$$

здесь постоянное  $c$ -число является вакуумным математическим ожиданием величины  $e^t$ , т. е. нулевым зарядом. Используя  $U^{(1)}$  и  $U^{(2)}$ , приведенные в гл. 7, пример 2, можно выражение для полного заряда  $e^t$  представить в виде

$$e^t = ie \sum_{\mathbf{k}} \{u^{(1)+}(\mathbf{k}) u^{(2)-}(\mathbf{k}) - u^{(2)+}(\mathbf{k}) u^{(1)-}(\mathbf{k})\} + \text{Постоянное } c\text{-число}. \quad (9.48)$$

Из (9.42) имеем

$$([U(x), U^*(x')]_{+})_0 = \Delta^{(1)}(x - x'). \quad (9.49)$$

Пример 2. Электромагнитное поле  $A_{\mu}$

Из (9.21) имеем

$$A_{\mu}(x) = \sum_{\mathbf{k}} (2K_0 V)^{-1/2} (a_{\mu}^{+}(\mathbf{k}) e^{iK_{\mu} x_{\mu}} + a_{\mu}^{-}(\mathbf{k}) e^{-iK_{\mu} x_{\mu}}), \quad (9.50)$$

так как  $d(\partial) = 1$ .

Соотношения коммутации (9.17) записываются следующим образом:

$$[a_{\mu}^{+}(\mathbf{k}), a_{\nu}^{-}(\mathbf{k}')] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\mu\nu}. \quad (9.51)$$

Однако условие Лоренца требует, чтобы величины  $a_l^{\pm} \Psi$  ( $l = 1, 2, 3$ ) и  $a_4^{\pm} \Psi$  не были независимыми, а были связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}^{+}(\mathbf{K})) - K_0 a_0^{+}(\mathbf{K})\} \Psi &= 0, \\ \{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}^{-}(\mathbf{K})) - K_0 a_0^{-}(\mathbf{K})\} \Psi &= 0; \end{aligned} \quad (9.52)$$

здесь  $\mathbf{a}^{+}(\mathbf{K})$  и  $\mathbf{a}^{-}(\mathbf{K})$  — соответственно два трехмерных вектора  $a_l^{\pm}(\mathbf{K})$  и  $a_l^{-}(\mathbf{K})$  ( $l = 1, 2, 3$ ).

Принято выбирать величину  $A_0$  эрмитовой, так что  $A_4 = iA_0$  является антиэрмитовой величиной. Далее заметим, что  $a_4^{\pm}$  и  $a_0$  означают не то же самое, что и матрицы (9.18), так как они

величины, эрмитово не сопряженные друг к другу. С другой стороны, из (9.51) получается

$$[a_0^-(K), a_0^+(K')] = \delta_{KK'}. \quad (9.53)$$

Так как  $a_0^-$  и  $a_0^+$  эрмитово сопряжены друг к другу, то (9.53) показывает, что  $a_0^-$  и  $a_0^+$  (а не  $a_0^+$  и  $a_0^-$ ) — операторы уничтожения и операторы порождения. Поэтому  $N_0(K) = a_0^+(K)a_0^-(K)$  имеет целочисленные собственные значения  $(0, 1, 2, \dots)$ . Так как оператор  $N_4(K) = a_4^-(K)a_4^+(K)$  числа  $(K, 4)$ -фотонов имеет вид

$$N_4(K) = -(N_0(K) + 1),$$

то  $N_4(K)$  имеет отрицательные целочисленные собственные значения  $(-1, -2, \dots)$  и приводит к энергии  $(-iK_4)N_4(K) = -K_0(N_0(K) + 1)$ . Другими словами,  $(K, 0)$ -фотоны имеют отрицательную энергию  $-K_0$ . Равенства (9.38) показывают, что в состоянии вакуума невозможно создать (но не уничтожить!) какой-либо  $(K, 0)$ -фотон. Другими словами, этот вакуум является состоянием с максимальным числом  $(K, 0)$ -фотонов. Обычно  $(K, 0)$ -фотоны называются скалярными фотонами. Поскольку  $(K, 0)$ -фотоны обладают отрицательными энергиями, то это состояние является состоянием с наименьшей энергией. Это определение вакуума имеет другие трудности, заключающиеся в том, что оно не согласуется со вторым соотношением (9.52), выражающим условие Лоренца. Действительно, в дальнейшем будет показано, что величина  $a_0^+\Psi$ , в которой  $\Psi$  удовлетворяет второму из соотношений (9.52), не может быть равна нулю. Это противоречие можно также обнаружить с помощью соотношения, получаемого из (9.42),

$$([\partial_\mu A_\mu(x), A_\nu(x')]_+) = \partial_\nu \Delta^{(1)}(x - x'). \quad (9.54)$$

С учетом условия Лоренца, правая часть этого соотношения должна быть равна нулю, а левая часть — не равна нулю.

Теперь рассмотрим физическое содержание этой трудности. В системе координат, в которой  $K_\mu = (0, 0, K_3, iK_0)$ , вектор состояния  $\Psi$  можно представить в виде

$$\Psi = \sum_{n,m} C(n, m) \Phi(n, m), \quad (9.55)$$

где  $\Phi(n, m)$  — векторы состояний, в которых числа  $(K, 3)$ -фотонов (продольные фотоны) и  $(K, 0)$ -фотонов равны соответственно  $n$  и  $m$ . Подстановка (9.55) в (9.52) приводит к следующей рекуррентной формуле [см. (9.18)]:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} C(n, m) &= \sqrt{m+1} C(n+1, m+1), \\ \sqrt{n} C(n, m) &= \sqrt{m} C(n-1, m-1), \end{aligned}$$



из которой следует, что

$$C(n, m) = c \delta_{nm}. \quad (9.56)$$

Постоянная  $c$  должна быть определена из условий нормировки<sup>1)</sup> вектора состояния. Из (9.55) и (9.56) мы имеем равенство

$$\Psi = c \sum_{n=0}^{\infty} \Phi(n, n), \quad (9.57)$$

которое показывает, что вакуумное состояние включает бесконечно много продольных и скалярных фотонов; но их энергии взаимно компенсируются и не приводят (в случае свободных полей) к каким-либо наблюдаемым эффектам.

Поэтому мы видим, что величина  $a_0^+ \Psi$  не может быть равна нулю для состояния, удовлетворяющего условию Лоренца. Для взаимодействующих полей действия продольных и скалярных фотонов не компенсируют друг друга, что приводит к появлению кулоновского потенциала.

Таким образом, для электромагнитного поля мы должны изменить определение вакуума и использовать соотношения

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}^{(r)} \cdot \mathbf{a}^+(K)) \Phi_0 &= 0, \\ [(\mathbf{K} \cdot \mathbf{a}^\pm(K)) - K_0 a_0^{\pm i}(K)] \Phi_0 &= 0, \end{aligned} \quad (9.58)$$

в которых  $\mathbf{e}^{(r)}$  ( $r=1, 2$ ) — трехмерные единичные векторы, удовлетворяющие уравнениям

$$(\mathbf{e}^{(r)}, \mathbf{K}) = 0, \quad (\mathbf{e}^{(r)}, \mathbf{e}^{(s)}) = \delta_{rs}.$$

Второе из соотношений (9.58) представляет собой условие Лоренца. Ввиду того что в соотношения (9.58) входит специальный единичный вектор  $\mathbf{e}^{(r)}$ , эти соотношения по форме не являются ковариантными.

Теперь мы покажем, что при вычислении вероятностей перехода между состояниями в бесконечно отдаленном прошлом ( $\sigma = -\infty$ ) и в бесконечно отдаленном будущем ( $\sigma = +\infty$ ) (т. е. в теории  $S$ -матрицы, см. гл. 13), вместо (9.58) можно использовать (9.38). Из (9.38) имеем

$$A_\mu^+(x) \Phi_0 = 0, \quad (9.59)$$

$$([A_\mu(x), A_\nu(x')]_+)_0 = \delta_{\mu\nu} \Delta^{(1)}(x - x'). \quad (9.60)$$

С другой стороны, из (9.58) получается

$$([\mathbf{e}^{(r)} \cdot \mathbf{a}^-(K), (\mathbf{e}^{(s)} \cdot \mathbf{a}^+(K))]_+)_0 = \delta_{rs}.$$

<sup>1)</sup> Формулы (9.55) и (9.56) показывают, что если  $c$  — конечна, то  $\Psi^* \Psi$  — бесконечно, поэтому  $\Psi$  не может быть вектором гильбертова пространства.

С учетом лоренцовой инвариантности это может быть обобщено на четырехмерный случай

$$([a_{\mu}^{-}(K), a_{\nu}^{+}(K)]_{+})_0 = \delta_{\mu\nu} + K_{\mu}K_{\nu}\Phi(K); \quad (9.61)$$

здесь  $\Phi(K)$  — амплитуда Фурье скалярной функции. Соотношение (9.61) приводит к соотношению

$$([A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')]_{+})_0 = \delta_{\mu\nu}\Delta^{(1)}(x-x') + \partial_{\mu}\partial_{\nu}\Phi(x-x'). \quad (9.62)$$

С другой стороны, из соображений лоренцовой инвариантности величина  $[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')]_{+}$  входит в вычисление матрицы перехода в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4x \int_{-\infty}^{\infty} d^4x' K_{\mu\nu}(x, x')[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')]_{+}. \quad (9.63)$$

На основании калибровочной инвариантности имеем

$$\partial_{\mu}K_{\mu\nu}(x, x') = \partial'_{\nu}K_{\mu\nu}(x, x') = 0. \quad (9.64)$$

В самом деле, калибровочная инвариантность [см. (7.66)] требует, чтобы имели место следующие равенства:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \int_{-\infty}^{\infty} d^4x' K_{\mu\nu}(x, x')[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')]_{+} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \int_{-\infty}^{\infty} d^4x' K_{\mu\nu}(x, x')[A_{\mu}(x) + \partial_{\mu}\Lambda(x), A_{\nu}(x') + \partial_{\nu}\Lambda(x')]_{+} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \int_{-\infty}^{\infty} d^4x' K_{\mu\nu}(x, x')[A_{\mu}(x), A_{\nu}(x')]_{+} - \\ &- 2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \int_{-\infty}^{\infty} d^4x' \partial_{\mu}K_{\mu\nu}(x, x')\Lambda(x)A_{\nu}(x') - \\ &- 2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \int_{-\infty}^{\infty} d^4x' \partial'_{\nu}K_{\mu\nu}(x, x')A_{\mu}(x)\Lambda(x') + \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \int_{-\infty}^{\infty} d^4x' \partial_{\mu}\partial'_{\nu}K_{\mu\nu}(x, x')\Lambda(x)\Lambda(x'). \end{aligned}$$

Это приводит к уравнению (9.64); оно показывает, что второй член в (9.62) не дает вклада в матричный элемент, в котором величина  $[A_{\mu}A_{\nu}]_{+}$  в (9.63) заменена величиной  $([A_{\mu}, A_{\nu}]_{+})_0$ . Таким образом, вместо (9.62) можно использовать (9.60) [3].

Однако, чтобы иметь возможность проводить вычисления в более общих случаях, чем в теории  $S$ -матрицы, необходимо сформулировать ковариантное определение вакуума. С этой целью мы

возвратимся к (9.59). В этом случае для того, чтобы в вакууме, определенном с помощью (9.59), не существовало частиц, надо, чтобы  $A_4^+$  были операторами уничтожения. Это требует, чтобы оператор  $A_4$  был эрмитовым, а  $A_0$  — антиэрмитовым. Теперь (9.51) показывает, что  $N_4(K)$  имеет целочисленные собственные значения (0, 1, 2, ...) и что в вакууме, определенном с помощью (9.59), нет частиц и вакуум является состоянием с наименьшей энергией. Поскольку мы показали, что (9.59) не согласуется с условием Лоренца (9.52), мы сейчас несколько видоизменим условие Лоренца, записав его

$$\partial_\mu A_\mu^+(x) \Psi = 0. \quad (9.65a)$$

Поскольку (9.65a) дает только первое из соотношений (9.52), то оно согласуется с определением вакуума (9.59). Это условие совместно также и с (9.54). В самом деле, правая часть соотношения (9.54) с помощью (9.59) может быть переписана в виде

$$(\partial_\mu A_\mu^+(x) \cdot A_\nu^-(x') + A_\nu^+(x') \cdot \partial_\mu A_\mu^-(x'))_0.$$

Это не равно нулю, но на основании (9.65a) равно  $\partial_\nu \Delta^{(1)}(x - x')$ . Когда мы имеем дело со взаимодействующими полями, величину  $A_\mu$  нельзя разбить на две части, соответствующие положительным и отрицательным частотам, потому что в этом случае  $A_\mu$  не удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона. Однако можно доказать, что в этом случае  $\partial_\mu A_\mu$  все еще удовлетворяет уравнению Клейна — Гордона

$$\square \partial_\mu A_\mu(x) = -\partial_\mu J_\mu(x) = 0. \quad (9.66)$$

Так как благодаря этому всегда оказывается возможным величину  $\partial_\mu A_\mu$  разбить на положительную и отрицательную части, то (9.65a) можно принять в качестве модифицированного условия Лоренца [4,1]. Методом, аналогичным использованному в гл. 7, примеры 3 и 4, можно доказать, что (9.65a) совместно с волновыми уравнениями (7.50). Сейчас мы покажем, что если в некоторый момент времени  $t$  продольные или скалярные фотоны отсутствовали, то они будут отсутствовать и в любой другой момент времени.

Действительно, если в некоторый момент времени  $t$  продольные и скалярные фотоны отсутствуют, то

$$\begin{aligned} \partial_k A_k^+(x, t) \Psi &= 0, \\ A_4^+(x, t) \Psi &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому (9.65a) приводит к равенству

$$\partial_4 A_4^+(x, t) \Psi = -\partial_k A_k^+(x, t) \Psi = 0,$$

из которого с учетом (7.50) следует, что

$$\partial_4^2 A_4^+(x, t) \Psi = 0.$$

Поэтому для произвольного момента времени  $t'$  мы имеем

$$A_4^+(x, t')\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (t' - t)^n \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^n A_4(x, t) \right\} \Psi = 0$$

и, следовательно,

$$\partial_4' A_4^+(x, t')\Psi = 0.$$

Теперь из (9.65а) следует, что

$$\partial_k A_k^+(x, t')\Psi = 0.$$

Таким образом, мы видим, что следствием выполнения условия Лоренца (9.65а) является отсутствие продольных и скалярных фотонов в любой момент времени, если только они отсутствовали в некоторый другой заданный момент времени. Поэтому можно принять, что в состояниях, которые осуществляются в природе, продольные и скалярные фотоны отсутствуют.

В этой теории можно установить условие (9.60).

Теперь введем в рассмотрение оператор  $\eta$  и вектор состояния  $\Psi^\dagger$  с помощью соотношений

$$\eta^\dagger = \eta^{-1}, \quad \eta A_k = A_k \eta, \quad \eta A_4 = -A_4 \eta, \quad \eta^2 = 1, \quad (9.67a)$$

$$\Psi^\dagger = \Psi^* \eta. \quad (9.67b)$$

Принимая во внимание эрмитовость  $A_4$  и мнимость величины  $x_4$ , из (9.66а) получаем

$$\Psi^\dagger \partial_\mu A_\mu^-(x) = 0. \quad (9.65b)$$

На основании (9.65а) и (9.65b) можно написать

$$\Psi^\dagger \partial_\mu A_\mu(x) \Psi = 0. \quad (9.65в)$$

Это равенство показывает, что для среднего значения оператора  $\partial_\mu A_\mu$  можно установить обычное условие Лоренца, если определить среднее значение оператора  $F$  не с помощью формулы  $\Psi^* F \Psi$ , а с помощью  $\Psi^\dagger F \Psi$ . Это обстоятельство иллюстрирует соответствие между классической теорией Максвелла и современной квантовой теорией поля, в которой величины классической теории заменены средними значениями операторов.

В том представлении, в котором оператор  $N_4$  диагонален<sup>1)</sup>,  $\eta$  дается формулой  $\eta = (-1)^{N_4}$ . Поэтому величина  $\Psi^\dagger \Psi$  не всегда положительна. По этой причине рассматриваемая теория называется теорией с неопределенной метрикой. Однако для состояний, которые реализуются в природе,  $\eta = 1$ , а поэтому  $\Psi^\dagger \Psi = \Psi^* \Psi$  для  $N_3 = N_4 = 0$ . В связи с этим оказывается, что если воспользо-

<sup>1)</sup> Так как  $A_4$  — оператор, изменяющий число скалярных фотонов на единицу, мы имеем  $(-1)^{N_4} A_4 = -A_4 (-1)^{N_4}$ .

ваться условиями (9.59), (9.60) и (9.65) и начальными условиями  $N = N_4 = 0$ , то все вычисления можно представить в ковариантном виде.

### Пример 3. Векторные и псевдовекторные поля

Из (8.58) мы имеем

$$d(ik) = [d_{\mu\nu}(ik)] = [\delta_{\mu\nu} + a_\mu a_\nu],$$

где

$$a_\mu = \frac{k_\mu}{x}.$$

Легко видеть, что  $d$  имеет два собственных значения

$$\lambda = 1 \quad \text{и} \quad \lambda = 1 + a_\mu a_\mu,$$

так как

$$\det |\lambda - d(ik)| = (\lambda - 1)^3 (\lambda - 1 - a_\mu a_\mu). \quad (9.68)$$

Поскольку<sup>1)</sup> при  $k_\mu = K_\mu$  имеем  $1 + a_\mu a_\mu = 0$ , то ранг матрицы  $d$  (для  $k_\mu = K_\mu$ ) равен 3, что согласуется с числом  $2S + 1 = 3$  независимых компонент  $U_\mu$ .

Переходя в систему координат, в которой  $k_\mu = (0, 0, k, ik_0)$  эрмитову матрицу  $d(ik)$  можно преобразовать к диагональному виду с помощью матрицы

$$s = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_4 & a_3 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \left( \frac{1}{(a_3^2 + a_4^2)} \right)^{1/2}. \quad (9.69)$$

Тогда с учетом (7.86) для  $U'_\mu = s_{\mu\nu} U_\nu$  будем иметь

$$U'_4(K) = \frac{1}{x} K_u U_u = 0. \quad (9.70)$$

Это показывает, что тремя независимыми компонентами являются величины  $U'_l(K)$  ( $l = 1, 2, 3$ ). Используя (9.21), получаем

$$U(x) = (2V)^{-1/2} \sum_K \left\{ (K_0)^{-1/2} \sum_{r=1,2} e^{(r)} u_r^+(K) + \frac{K_0^{1/2}}{x} e^3 u_3^+(K) \right\} e^{iK_\mu x_\mu} + \\ + \left\{ (K_0)^{-1/2} \sum_{r=1,2} e^{(r)} u_r^-(K) + \frac{K_0^{1/2}}{x} e^3 u_3^-(K) \right\} e^{iK_\mu x_\mu}, \quad (9.71a)$$

$$U_4(x) = \frac{i}{xV^{1/2}} \sum_K (2K_0)^{-1/2} |K| \left\{ u_3^+(K) e^{iK_\mu x_\mu} + u_3^-(K) e^{-iK_\mu x_\mu} \right\}, \quad (9.71b)$$

<sup>1)</sup>  $K_\mu K_\mu + x^2 = 0$ .

где  $e^{(r)}$  ( $r=1, 2$ ) — единичные векторы, которые ортогональны друг к другу и к направлению вектора  $\mathbf{K}$ , а  $e^3$  — единичный вектор в направлении  $\mathbf{K}$ . Другими словами,  $e^{(r)}$  описывают поперечные направления, а  $e^3$  имеет продольное направление.

Из (9.17) имеем

$$[u_r^+(K), u_s^{*-}(K')] = \delta_{rs} \delta_{\mathbf{K}\mathbf{K}'} \quad (r, s = 1, 2, 3). \quad (9.72)$$

Операторы числа положительно и отрицательно заряженных частиц имеют вид

$$N_r^+(K) = u_r^{*-}(K) u_r^+(K), \quad N_r^-(K) = u_r^-(K) u_r^{*+}(K).$$

Вектор полной величины энергии-импульса  $T_\mu$  и полный заряд  $e^t$  поля даются выражениями

$$\begin{aligned} T_\mu &= -i \sum_{\mathbf{K}} \sum_{r=1,2,3} K_\mu \{ N_r^+(K) + N_r^-(K) + 1 \}, \\ e^t &= e \sum_{\mathbf{K}} \sum_{r=1,2,3} \{ N_r^+(K) - N_r^-(K) \}. \end{aligned} \quad (9.73)$$

#### Пример 4. Спинорное поле $\phi(x)$

В этом случае (9.5) и (9.7) могут быть записаны в виде<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \phi_\alpha^+(K) &= 2K_0 V^{1/2} \varphi_r^+(K) a_{r\alpha}(K), \\ \phi_\alpha^-(K) &= 2K_0 V^{1/2} \varphi_r^-(K) b_{r\alpha}(K), \end{aligned} \quad (9.74)$$

где  $a_{r\alpha}$  и  $b_{r\alpha}$  удовлетворяют соотношениям

$$a_{r\alpha} a_{r\beta}^* = \frac{1}{2K_0} (K_0 + \alpha_i k_i + \chi\beta)_{\alpha\beta}, \quad (9.75)$$

$$b_{r\alpha} b_{r\beta}^* = \frac{1}{2K_0} (K_0 - \alpha_i k_i - \chi\beta)_{\alpha\beta}. \quad (9.76)$$

Следует заметить, что соотношения (9.75) и (9.76) согласуются с оператором проектирования  $\Lambda_\pm$  [см. (3.56)], который выделяет состояния с положительной и отрицательной энергией.

Из (9.17) получается

$$\begin{aligned} [\varphi_r^+(K), \varphi_s^{*-}(K')]_+ &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{K}\mathbf{K}'}, \\ [\varphi_r^{*+}(K), \varphi_r^-(K')]_+ &= \delta_{rs} \delta_{\mathbf{K}\mathbf{K}'}. \end{aligned} \quad (9.77)$$

Из (9.21) и (9.22) следует

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(x) &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{K}} \{ \varphi_r^+(K) a_{r\alpha}(K) e^{iK_\mu x_\mu} + \varphi_r^-(K) b_{r\alpha}(K) e^{-iK_\mu x_\mu} \}, \\ \phi_\alpha^*(x) &= V^{-1/2} \sum_{\mathbf{K}} \{ \varphi_r^{*+}(K) b_{r\alpha}^*(K) e^{iK_\mu x_\mu} + \varphi_r^{*-}(K) a_{r\alpha}^*(K) e^{-iK_\mu x_\mu} \}. \end{aligned} \quad (9.78)$$

<sup>1)</sup> , относится к четырем компонентам  $\phi$ , а  $r$  принимает два значения (1, 2), относящиеся к двум направлениям спинового момента количества движения.

Из (9.42) имеем

$$\begin{aligned} \{[\Phi_\alpha(x), \bar{\Phi}_\beta(x')]_0\} &= -S_{\alpha\beta}^{(1)}(x-x'), \\ S_{\alpha\beta}^{(1)}(x-x') &\equiv (\gamma_\mu \partial_\mu - \kappa)_{\alpha\beta} \Delta^{(1)}(x-x'). \end{aligned} \quad (9.79)$$

Вектор энергии-импульса получается из (7.112) в виде

$$T_\mu = -i \sum_K \sum_{r=1,2} K_\mu \{ \varphi_r^{*-}(K) \varphi_r^+(K) + \varphi_r^-(K) \varphi_r^{*+}(K) - 1 \} \quad (9.80)$$

[см. (9.28)]. Нулевая энергия в (9.80) имеет отрицательную величину, которая равна полной величине энергии вакуумных электронов в теории „дырок“.

Последнее равенство показывает, что трудности, связанные с состояниями с отрицательной энергией дираковских частиц, можно преодолеть, если пользоваться антикоммутаторами вместо коммутаторов [т. е. перестановочными соотношениями со знаком „+“], т. е. если в квантовой теории пользоваться принципом Паули, так как разность  $\{T_\mu - (\text{нулевая энергия})\}$  на основании (9.80) является положительной величиной.

Полный заряд дираковского поля дается выражением

$$e^t = e \sum_K \sum_{r=1,2} \{ N_r^+(K) - N_r^-(K) \}, \quad (9.81)$$

в котором

$$N_r^+(K) = \varphi_r^{*-}(K) \varphi_r^+(K), \quad N_r^-(K) = \varphi_r^-(K) \varphi_r^{*+}(K). \quad (9.82)$$

### Пример 5. Момент количества движения и магнитный момент

Прежде всего мы покажем, что среднее значение орбитального момента количества движения  $P_{\mu\nu}^0$  (7.41) и спинового момента количества движения  $P_{\mu\nu}^S$  (7.42) может быть записано в виде суммы соответствующих моментов отдельных частиц.

Пространственная компонента орбитального момента количества движения векторного поля может быть записана на основании (7.41) и (7.88) в виде

$$P_{jk}^0 = \int d^3x \{ U_{4j}^{t*}(x_j \partial_k - x_k \partial_j) U_\rho + (x_j \partial_k - x_k \partial_j) U_\rho^t \cdot U_{4\rho} \}. \quad (9.83)$$

Подставляя (9.71a) и (9.716) в (9.83), получаем среднее значение  $P_{jk}^0$  в состоянии, в котором импульс частиц равен  $K$ ,

$$(P_{jk}^0)_K = i(x_j K_k - x_k K_j) \sum_{r=1,2,3} (N_r^+(K) + N_r^-(K) - 1). \quad (9.84)$$

Это — сумма орбитальных моментов количества движения частиц.

Пространственная компонента спинового момента количества движения записывается в виде

$$P_{jk}^S = \int d^3x \{ U_{4j}^{\dagger} U_k + U_k^{\dagger} U_{4j} - U_{4k}^{\dagger} U_j - U_j^{\dagger} U_{4k} \}, \quad (9.85)$$

где учтены (7.39) и (7.42). Подставляя (9.71а) и (9.71б) в (9.85), получаем следующее выражение для среднего значения величины  $P_{jk}^S$  для покоящейся частицы ( $\mathbf{K}=0$ ):

$$(P_{jk}^S)_{\mathbf{K}=0} = - \{ (u_j^{*-} (K) u_k^{+} (K) - u_k^{*-} (K) u_j^{+} (K)) + (u_j^{-} (K) u_k^{*+} (K) - u_k^{-} (K) u_j^{*+} (K)) \}_{\mathbf{K}=0}, \quad (9.86)$$

причем в качестве координатной системы использованы векторы  $e^{(r)}$  ( $r=1, 2, 3$ ).

Последнее равенство может быть записано в виде

$$i (P_{jk}^S)_{\mathbf{K}=0} = (N_{+}^{\dagger} + N_{-}^{\dagger} - N_{+}^{\pm} - N_{-}^{\pm}), \quad (9.87)$$

где

$$N_s^{\pm} = u_s^{-} u_s^{*+}, \quad N_s^{\dagger} = u_s^{*-} u_s^{\dagger} (s = +, -), \quad (9.88)$$

а величины  $u_{\pm}^{\pm}$  определяются соотношениями [9]

$$\begin{aligned} u_{+}^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_j^{\pm} - i u_k^{\pm}), \\ u_{-}^{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_j^{\pm} + i u_k^{\pm}). \end{aligned} \quad (9.89)$$

Используя (9.72), будем иметь

$$[u_s^{*+}, u_{s'}^{-}] = \delta_{ss'}, \quad [u_s^{\dagger}, u_{s'}^{*-}] = \delta_{ss'}. \quad (9.90)$$

Так как соотношения (9.90) показывают, что возможные собственные значения  $N_s^r$  равны (0, 1, 2, ...), то их можно рассматривать как числа частиц в состояниях, характеризуемых величинами ( $r, s$ ). Соотношения (9.89) говорят о том, что индекс  $r$  характеризует зарядовое состояние, аналогично знаку ( $\pm$ ) в выражении  $N^{\pm}$  (9.20). Принимая во внимание обозначения для спиновых состояний, мы видим, что (9.87) дает сумму спиновых моментов количества движения ( $\pm 1, 0$ ) частиц.

Из (9.85) имеем

$$(i)^2 (P_{jk}^S P_{jk}^S)_{\mathbf{K}=0}^{(+)} = 2, \quad (9.91)$$

причем знаком „+“ обозначено положительное зарядовое состояние, для которого вычисляется среднее значение. Это показывает, что величина спинового момента количества движения равна  $S(S+1)=2$ .



Теперь рассмотрим магнитный момент частиц малых энергий ( $K_0 \approx \kappa$ ). Поскольку для частиц малых энергий  $U_4 \approx 0$  (см. гл. 4, пример в § 2), то величина  $\theta_{k4}$ , определяемая с помощью (7.89), записывается в виде

$$\theta_{k4} \approx U_{kp}^\dagger \cdot \partial_4 U_p + \partial_4 U_p^\dagger \cdot U_{kp}$$

Отсюда с учетом (7.90) получается

$$(\theta_{k4})^\pm = \pm \kappa (U_{kp}^\dagger U_p - U_p^\dagger U_{kp})^\pm = \mp \frac{i}{e} \kappa (J_k)^\pm.$$

Таким образом, имеем

$$(J_k)^\pm \approx \pm \frac{ie}{\kappa} (\theta_{k4})^\pm. \quad (9.92)$$

Здесь, следуя гл. 7, пример 4, при вычислении магнитного момента мы опустили член, пропорциональный  $e^2$ . Пространственная компонента магнитного момента может быть получена из (7.82) и с учетом (7.26) записывается в виде

$$(m_{jk})^\pm \approx \pm \frac{ie}{2\kappa} (P_{jk})^\pm. \quad (9.93)$$

Это соотношение отражает тесную связь между магнитным моментом и моментом количества движения, которая существует у частиц с малой энергией. Поскольку у частиц малой энергии орбитальным моментом количества движения можно пренебречь, из (9.87) и (9.93) следует

$$(m_{jk})^\pm \approx \pm \frac{e}{2\kappa} (N_+^\pm - N_-^\pm). \quad (9.94)$$

Это показывает, что частицы малой энергии с положительным (отрицательным) зарядом обладают магнитным моментом величины  $e/2\kappa$ , который имеет то же направление (или противоположное при отрицательном заряде), что и спиновый момент количества движения. Величина  $e/2\kappa$  называется магнетонном. Как показано в гл. 7, пример 5, при взаимодействии  $F_{\mu\nu}$ -типа, определенном в (7.91), этот магнитный момент заменяется величиной  $(e/2\kappa)(1 - \gamma)$ .

В случае электромагнитного поля покоящейся системы координат, связанной с фотоном, не существует. Вводя величины  $a_\pm^\pm$ , связанные с  $a_r^\pm$  ( $r = 1, 2$ ) с помощью соотношений, аналогичных (9.89), получаем <sup>1)</sup>

$$(P_{12}^S)_K = -i(N_+ - N_-). \quad (9.95)$$

Здесь мы воспользовались координатной системой, третья ось которой совпадает с направлением вектора  $K$ . Последнее равенство

<sup>1)</sup> Поскольку  $A_4^\dagger \Psi = A_3^\dagger \Psi$  для состояний, реализуемых в природе в случае свободного электромагнитного поля, то мы имеем  $P_{23} = P_{13} = 0$ .

показывает, что проекции спинового момента количества движения на направление вектора  $\mathbf{K}$  равны  $\pm 1$ . Числа  $N_+$  или  $N_-$  могут быть интерпретированы как числа фотонов, спиновые моменты количества движения которых направлены соответственно параллельно и антипараллельно направлению вектора  $\mathbf{K}$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bleuler K., *Helv. Phys. Acta*, **23**, 567 (1950).
2. Dirac P. A. M., *The Principles of Quantum Mechanics*, 3-d ed., 1947 (см. перевод второго издания: П. А. М. Дирак, *Основы квантовой механики*, М.—Л., 1937).
3. Dyson F. J., *Phys. Rev.*, **77**, 420 (1950).
4. Gupta S. N., *Proc. Roy. Soc.*, **63**, 681 (1950).
5. Ma S. T., *Phys. Rev.*, **75**, 535 (1949).
6. Schwinger J., *Phys. Rev.*, **75**, 651 (1949) (см. перевод в сборнике: Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).
7. Takahashi Y., Umezawa H., *Prog. Theor. Phys.*, **9**, 1 (1953).
8. Umezawa H., Visconti A. (в печати) 1955.
9. Wentzel G., *Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder*, 1943 (см. перевод: Г. Вентцель, *Введение в квантовую теорию волновых полей*, М.—Л., 1947).

# Квантовая теория взаимодействующих полей

## § 1. Представление взаимодействия

В этой главе мы дадим каноническую формулировку квантовой теории взаимодействующих полей. Мы используем представление, в котором компоненты поля удовлетворяют волновым уравнениям свободных полей и соотношениям коммутации (8.14а) и (8.14б), т. е. используем представление взаимодействия (см. работы Томонага [14], Швингера [12]). При этом состояния взаимодействующих полей описываются как состояния ансамбля простых гармонических осцилляторов, изменяющиеся с течением времени.

Унитарное преобразование, связывающее состояние  $\Psi[\sigma]$  в представлении взаимодействия с состоянием  $\Phi$  в гейзенберговском представлении, может быть записано в виде

$$\Psi[\sigma] = S[\sigma] \Phi. \quad (10.1)$$

В этой главе жирными буквами обозначены величины, относящиеся к гейзенберговскому представлению, а светлыми буквами — относящиеся к представлению взаимодействия.

В гл. 4 показано, что величины  $Q_a(x)$  в общем случае содержат не только независимые компоненты поля, но и зависимые между собой компоненты. Поэтому  $S[\sigma]$  нельзя определить как преобразование, связывающее между собой  $Q_a(x)$  и  $Q_a(x)$ .

Величины  $q_r(x)$ , полученные с помощью преобразования (9.5), являются совокупностью независимых компонент. Поэтому с независимыми компонентами  $q_r(x)$  в гейзенберговском представлении эти величины должны быть связаны с помощью унитарного преобразования  $S[\sigma]$

$$q_r(x) = (S^{-1}[\sigma] q_r(x) S[\sigma])_{x/\sigma}; \quad (10.2)$$

здесь  $x/\sigma$  означает, что точка  $x$  лежит на поверхности  $\sigma$ . Однако поскольку желательно иметь лоренц-инвариантную формулировку, надо равенство (10.2) переписать так, чтобы оно содержало только ковариантные величины.

С этой целью воспользуемся вспомогательными величинами

$$Q_a[x, \sigma] \equiv S^{-1}[\sigma] s_{ra}(\partial) q_r(x) S[\sigma], \quad (10.3)$$

где  $s_{ra}(\partial)$  — матрица дифференциального оператора в (9.5) [13]. Следует заметить, что величины  $Q_\alpha[x, \sigma]$  являются функциями точки  $x$  и функционалами поверхности  $\sigma$  и что  $x$  и  $\sigma$  независимы друг от друга. Из (10.3) и (9.5) имеем

$$Q_\alpha[x, \sigma] \equiv S^{-1}[\sigma] Q_\alpha(x) S[\sigma]. \quad (10.4a)$$

Теперь величины  $q_r(x)$  можно получить из  $Q_\alpha[x, \sigma]$  с помощью равенства

$$q_r(x) = (s_{ra}^{-1}(\partial) Q_\alpha[x, \sigma])_{x\sigma}. \quad (10.4b)$$

В этом равенстве надо сначала подействовать оператором  $s_{ra}^{-1}(\partial)$  на  $Q_\alpha[x, \sigma]$ , а затем точку  $x$  считать находящейся на поверхности  $\sigma$ . Очевидно, величины  $Q_\alpha[x, \sigma]$  дают полное описание величин  $q_r(x)$ , и поэтому (10.4a) можно рассматривать как ковариантное соотношение, соответствующее соотношению (10.2). В следующем параграфе мы воспользуемся соотношением (10.4a) для определения  $S[\sigma]$ . С помощью (10.4a), (8.2a) и (8.14a) можно показать, что дифференциальные уравнения и соотношения коммутации для  $Q_\alpha[x, \sigma]$  имеют тот же вид, что и для  $Q_\alpha(x)$ , т. е.

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial) Q_\beta(x, \sigma) = 0, \quad (10.5)$$

$$[Q_\alpha[x, \sigma], Q_\beta[x', \sigma]_{\pm}] = id_{\alpha\beta} \Delta(x - x'); \quad (10.6)$$

здесь  $\bar{Q}_\alpha[x, \sigma]$  [см. (8.3б)] определяется равенством

$$\bar{Q}_\alpha[x, \sigma] \equiv Q_\alpha^*[x, \sigma] \eta_{\rho\alpha} = S^{-1}[\sigma] \bar{Q}_\alpha(x) S[\sigma]. \quad (10.7)$$

Следует заметить, что аргументы  $\sigma$  величин  $Q_\alpha$  и  $\bar{Q}_\beta$  в (10.6) одинаковы.

Поскольку мы хотим, чтобы величины  $Q_\alpha(x)$  были функциями независимых компонент  $q_r(x)$  (взятых в той же точке  $x$ ), то величины  $Q_\alpha[x, \sigma]$  можно подчинить следующим условиям<sup>1)</sup>:

- а) они должны удовлетворять (10.5) и (10.6);
- б) они должны давать  $Q_\alpha(x)$  как функцию от  $q_r(x)$ , которые связаны с  $Q_\alpha[x, \sigma]$  с помощью равенства (10.4б).

Унитарное преобразование  $S[\sigma, \sigma']$ , связывающее  $Q_\alpha[x, \sigma]$  и  $Q_\alpha[x, \sigma']$  соотношением

$$Q_\alpha[x, \sigma] = S^{-1}[\sigma, \sigma'] Q_\alpha[x, \sigma'] S[\sigma, \sigma'], \quad (10.8)$$

дается формулой

$$S[\sigma, \sigma'] = S[\sigma] S^{-1}[\sigma']. \quad (10.9)$$

<sup>1)</sup> Если имеются две величины  $Q_\alpha[x, \sigma]$ , удовлетворяющие этим условиям, то они приводят к двум каноническим теориям. Однако ввиду того, что эти две теории имеют одинаковое число независимых компонент  $q_r$ , они связаны между собой унитарным преобразованием, т. е. являются различными представлениями одной и той же теории.

Гамильтониан взаимодействия  $H'[x:n]$  определяется [см. (6.3)] с помощью функционального дифференциального уравнения

$$i \frac{\delta S[\sigma]}{\delta \sigma(x)} = H'[x:n] S[\sigma]. \quad (10.10)$$

Ниже будет показано, что  $H'[x:n]$ , вообще говоря, зависит от вектора  $n_\mu(x)$ , являющегося единичным вектором, нормальным к поверхности  $\sigma$  в точке  $x$  (см. гл. 6, § 2). Гамильтониан взаимодействия должен также удовлетворять условию интегрируемости, которое предполагает, что оператор  $S[\sigma]$  должен однозначно определяться уравнением (10.10) и заданными начальными условиями. Это означает, что

$$\frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \frac{\delta}{\delta \sigma(x')} S[\sigma] = \frac{\delta}{\delta \sigma(x')} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} S[\sigma],$$

где  $x, x'$  — две точки на поверхности  $\sigma$  [14].

Уравнение (10.10) может быть переписано в виде

$$-i[H'[x:n], H'[x':n]] = \frac{\partial}{\partial \sigma(x)} H'[x':n] - \frac{\partial}{\partial \sigma(x')} H'[x:n], \quad (10.11)$$

где  $\partial/\partial \sigma$  — дифференцирование по аргументам, явно зависящим от  $\sigma$  (см. гл. 6, § 2). Введенные выше величины имеют большое значение для последующего изложения.

Условие интегрируемости (10.11) содержит член  $\left(\frac{\partial}{\partial \sigma(x')}\right) H[x:n]$ . Конкретное вычисление этого члена облегчается одной важной формулой для нормального вектора  $n_\mu(x)$ . Эти вычисления будут приведены ниже.

Прежде всего докажем, что

$$n_\mu(x) n_\nu(x) = - \int_\sigma d\sigma'_\mu \partial_\nu \Delta(x-x'), \quad (10.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma(x')} \{n_\mu(x) n_\nu(x)\} = - \frac{\delta}{\delta \sigma(x')} \int_\sigma d\sigma'_\mu \partial_\nu \Delta(x-x') = \partial_\mu \partial_\nu \Delta(x-x'). \quad (10.13)$$

Если в качестве поверхности  $\sigma$  взята плоскость, то левая часть (10.12) с учетом (8.18) становится равной  $-\delta_{\nu 4} \delta_{\mu 4}$ . Учитывая, что  $n_\mu n_\nu$  является ковариантной записью величины  $-\delta_{\nu 4} \delta_{\mu 4}$ , получаем (10.12). После этого, если воспользоваться (6.5б), из (10.12)<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Можно показать, что правая часть (10.12) симметрична по индексам  $\mu$  и  $\nu$ . В самом деле она симметрична, когда  $\sigma$  является плоскостью или

$$\int_\sigma d\sigma'_\mu \partial_\nu \Delta(x-x') - \int_\sigma d\sigma'_\nu \partial_\mu \Delta(x-x') = 0.$$

Это соотношение должно оставаться справедливым для любой пространственно-подобной поверхности, поскольку левая часть не зависит от формы

можно вывести (10.13).

Из (10.12) можно получить

$$\partial_\rho(n_\mu(x)n_\nu(x)) = - \int_\sigma d\sigma'_\mu \partial_\rho \partial_\nu \Delta(x-x').$$

С другой стороны,

$$\int_\sigma d\sigma'_\mu \partial_\rho \partial_\nu \Delta(x-x') - \int_\sigma d\sigma'_\rho \partial_\mu \partial_\nu \Delta(x-x') = 0. \quad (10.14)$$

Это соотношение справедливо для поверхности  $\sigma$ , являющейся плоской поверхностью, потому что в этом случае на основании (8.17) и (8.18) каждый член оказывается равным нулю. Мы можем показать, что (10.14) справедливо для любой пространственно-подобной поверхности, поскольку левая часть (10.14) не зависит от поверхности

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\sigma(x'')} \left\{ \int_\sigma d\sigma'_\mu \partial_\rho \partial_\nu \Delta(x-x') - \int_\sigma d\sigma'_\rho \partial_\mu \partial_\nu \Delta(x-x') \right\} = \\ = -\partial_\mu \partial_\rho \partial_\nu \Delta(x-x'') + \partial_\rho \partial_\mu \partial_\nu \Delta(x-x'') = 0. \end{aligned}$$

Пользуясь (10.14), (10.12) и (10.13), получаем

$$\begin{aligned} \partial_\rho(n_\mu(x)n_\nu(x)) = - \int_\sigma \partial_\mu \partial_\nu \Delta(x-x') d\sigma'_\rho = \\ = - \int d\sigma'_\rho \frac{\partial}{\partial\sigma(x')} (n_\mu(x)n_\nu(x)). \end{aligned} \quad (10.15)$$

Равенство (10.15) можно обобщить следующим образом:

$$\partial_\rho(n_{\mu_1}(x) \dots n_{\mu_{2n}}(x)) = - \int d\sigma'_\rho \frac{\partial}{\partial\sigma(x')} (n_{\mu_1}(x) \dots n_{\mu_{2n}}(x)). \quad (10.16)$$

Это равенство зависит от хорошо известного дистрибутивного закона для операторов.

Теперь приведем полезную лемму, заключающуюся в том, что

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \int_\sigma F_{\mu_1, \dots, \mu_{2n}}(x') n_{\mu_1}(x') \dots n_{\mu_{2n}}(x') d\sigma'_\rho = \\ = (\partial_\rho F_{\mu_1, \dots, \mu_{2n}}(x)) n_{\mu_1}(x) \dots n_{\mu_{2n}}(x) - \\ - F_{\mu_1, \dots, \mu_{2n}}(x) \int_\sigma d\sigma'_\rho \frac{\partial}{\partial\sigma(x')} \{n_{\mu_1}(x) \dots n_{\mu_{2n}}(x)\} + \\ + \int_\sigma d\sigma'_\rho F_{\mu_1, \dots, \mu_{2n}}(x') \frac{\partial}{\partial\sigma(x)} \{n_{\mu_1}(x') \dots n_{\mu_{2n}}(x')\}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

поверхности  $\sigma$ . В самом деле,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\sigma(x')} \left\{ \int_\sigma d\sigma'_\mu \partial_\nu \Delta(x-x') - \int_\sigma d\sigma'_\nu \partial_\mu \Delta(x-x') \right\} = \\ = -\partial_\mu \partial_\nu \Delta(x-x'') + \partial_\nu \partial_\mu \Delta(x-x'') = 0. \end{aligned}$$

Эта лемма легко может быть доказана с помощью (6.66) и (10.16). В частном случае ( $n=1$ ) выражение (10.17) приводит к равенству

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \int d\sigma' F_{\mu\nu}(x') n_\mu(x') n_\nu(x') = \\ = (\partial_\rho F_{\mu\nu}(x)) \cdot n_\mu(x) n_\nu(x) - F_{\mu\nu}(x) \int d\sigma' \frac{\delta}{\delta \sigma(x')} \{n_\mu(x) n_\nu(x)\} + \\ + \int d\sigma' F_{\mu\nu}(x') \frac{\partial}{\partial \sigma(x)} \{n_\mu(x') n_\nu(x')\}. \quad (10.18) \end{aligned}$$

Другое важное равенство имеет вид

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) n_\mu(x) n_\nu(x) = \\ = -\frac{1}{2} \int d^4 x' F(x') \cdot (\partial_\mu \varepsilon(x-x')) (\partial_\nu \Delta(x-x')). \quad (10.19) \end{aligned}$$

Это равенство может быть доказано путем ковариантной записи соответствующего равенства для плоской поверхности ( $n_\mu = (0, 0, 0, i)$ ) [см. (8.206)].

## § 2. Вывод гамильтониана взаимодействия

Волновые уравнения в гейзенберговском представлении и представлении взаимодействия имеют вид<sup>1)</sup>

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial) Q_\beta(x) = J_\alpha(x), \quad (10.20a)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial) Q_\beta(x) = 0, \quad (10.206)$$

где

$$J_\alpha(x) \equiv -\frac{\partial L'(x)}{\partial Q_\alpha(x)} + \partial_\mu \frac{\partial L'(x)}{\partial Q_{\alpha;\mu}(x)}, \quad (10.21)$$

а  $L'$  — лагранжиан взаимодействия.

Из (10.20a) и (10.206) получаем

$$Q_\alpha(x) = Q_\alpha(x) + \int d^4 x' \{D'_\alpha G_{\alpha\beta}(x-x')\} \cdot j_{\beta;\alpha}(x').$$

Здесь через  $D_\alpha$  и  $j_{\beta;\alpha}$  обозначены величины, компоненты которых даются равенствами

$$D_\alpha \equiv (1, \partial_\mu), \quad (10.22a)$$

$$j_{\beta;\alpha}(x) \equiv \left( -\frac{\partial L'(x)}{\partial Q_\beta(x)}, -\frac{\partial L'(x)}{\partial Q_{\beta;\mu}(x)} \right). \quad (10.226)$$

<sup>1)</sup> В настоящем изложении мы ограничимся тем случаем, когда  $L'$  содержит дифференциальные операторы более низкого порядка, чем порядок дифференциальных операторов, входящих в лагранжиан свободного поля  $L^0$ . Исследования теории квантования в более общем случае проводились в работах [10, 18, 5, 4, 11].

Символом  $Da'$  обозначена величина  $Da$ , в которую входят производные  $\partial'_\mu$ :

$$D'_a = (1, \partial'_\mu).$$

Функция  $G(x - x')$  является функцией Грина, удовлетворяющей (8.41). Различные функции Грина приводят к разным представлениям взаимодействия. Однако в силу того, что все эти представления взаимодействия должны быть связаны между собой унитарными преобразованиями, можно выбрать конкретную функцию Грина  $G^{ret}(x - x')$  [см. (8.40в)]. Таким образом, имеем

$$Q_\alpha(x) = Q_\alpha(x) + \int d^4x' \{D'_a G_{\alpha\beta}^{ret}(x - x')\} \cdot j_{\beta;\alpha}(x'). \quad (10.23)$$

Далее можно показать, что величины

$$Q_\alpha[x, \sigma] = Q_\alpha(x) + \int_{-\infty}^{\sigma} d^4x' \{D'_a d_{\alpha\beta}(\partial) \Delta(x - x')\} \cdot j_{\beta;\alpha}(x') \quad (10.24)$$

удовлетворяют соотношениям (10.5). В выражении (10.24) точка  $x$  не обязательно лежит на поверхности  $\sigma$ . Позднее, используя для получения  $q_r(x)$  (10.46), покажем, что компоненты поля  $Q_\alpha(x)$  могут быть представлены как функции от  $q_r(x)$ . Поэтому можно принять, что  $Q_\alpha[x, \sigma]$  дается выражением (10.24). Это допущение может быть оправдано, если существует унитарное преобразование  $S[\sigma]$ , связывающее  $Q_\alpha(x)$  с (10.24), потому что в этом случае (10.24) удовлетворяет (10.6). В дальнейшем изложении мы получим условие<sup>1)</sup> существования унитарного преобразования, связывающего  $Q_\alpha(x)$  с (10.24). Из (10.10) очевидно, что это условие эквивалентно условию существования гамильтониана взаимодействия [т. е. (10.29)].

Из (10.23) и (10.24) следует [см. (8.10), (8.27в)]

$$Q_\alpha(x) = Q_\alpha \left[ \frac{x}{\sigma} \right] + \frac{1}{2} \int d^4x' j_{\beta;\alpha}(x') \times \\ \times [D'_a d_{\alpha\beta}(\partial), \varepsilon(x - x')] \Delta(x - x'). \quad (10.25)$$

Здесь величина  $Q_\alpha[x/\sigma]$  является величиной  $Q_\alpha[x, \sigma]$ , взятой в точке  $x$ , лежащей на поверхности  $\sigma$ .

Выражение (10.24) показывает также

$$Q_\alpha[x, -\infty] = Q_\alpha(x)$$

<sup>1)</sup> Когда лагранжиан взаимодействия содержит поля более высоких спинов ( $\geq 3/2$ ) или производные более высокого порядка ( $\geq 2$ ), может случиться, что это условие [и поэтому (10.29)] не может быть удовлетворено. Обобщение формулировки, приведенной в настоящей главе на общий случай, см. в работе [18, 5, 4].



и поэтому с учетом (10.8)

$$S[\sigma] = S[\sigma, -\infty]. \quad (10.26)$$

Из (10.10) имеем

$$i \frac{\delta Q_\alpha[x, \sigma]}{\delta \sigma(x')} = S^{-1}[\sigma][Q_\alpha(x), H'[x':n]] S[\sigma]. \quad (10.27)$$

С другой стороны, (10.24) приводит к уравнению

$$i \frac{\delta Q_\alpha[x, \sigma]}{\delta \sigma(x')} = ij_{\beta:a}(x') \{D'_a d_{\alpha\beta}(\partial) \Delta(x - x')\}. \quad (10.28)$$

Сравнивая это уравнение с (10.27), получаем

$$[Q_\alpha(x), H'[x':n]] = iS[\sigma] j_{\beta:a}(x') \{D'_a d_{\alpha\beta}(\partial) \Delta(x - x')\} S^{-1}[\sigma]. \quad (10.29)$$

Это — фундаментальное уравнение, которым определяется гамильтониан взаимодействия  $H'[x:n]$  [13]. Унитарное преобразование  $S[\sigma]$ , связывающее гейзенберговское представление с представлением взаимодействия, может быть получено с помощью (10.10).

Выражая  $j_{\beta:a}(x')$  через  $Q_\alpha[x, \sigma]$ , можно на основании (10.29) представить  $H'[x:n]$  в виде ряда по степеням константы связи. Это можно сделать с помощью формулы

$$M(\partial) Q_\alpha(x) = (M(\partial) Q_\alpha[x, \sigma])_{x'\sigma} + \frac{1}{2} \int d^4 x' j_{\beta:a}(x') \cdot [M(\partial) D'_a d_{\alpha\beta}(\partial), \varepsilon(x - x')] \Delta(x - x'), \quad (10.30)$$

которая получается из (10.23) и (10.24). Здесь  $M(\partial)$  — некоторый заданный дифференциальный оператор.

Из (10.46) получается

$$s_{r\alpha}^{-1}(\partial) Q_\alpha(x) = Q_r(x) + \frac{1}{2} \int d^4 x' j_{\beta:a}(x') \times \\ \times [s_{r\alpha}^{-1}(\partial) D'_a d_{\alpha\beta}(\partial), \varepsilon(x - x')] \Delta(x - x'),$$

которое приводит к соотношению

$$M(\partial) Q_\alpha(x) = M(\partial) s_{r\alpha}(\partial) q_r(x) + \frac{1}{2} M(\partial) s_{r\alpha}(\partial) \int d^4 x' j_{\beta:a}(x') [s_{r\alpha}^{-1}(\partial) D'_a d_{\alpha\beta}(\partial) \varepsilon(x - x')] \Delta(x - x').$$

На основании (8.20а) и (8.20б) видно, что второй член в выписанном соотношении зависит только от  $x$ . Поэтому этот второй член является функцией компонент поля  $Q_\alpha(x)$  (взятых в точке  $x$ ). Следовательно, величину  $Q_\alpha(x)$  с помощью итераций можно представить в виде ряда, каждый член которого является функцией  $q_r(x)$ . Таким образом, можно заключить, что величина  $Q_\alpha[x, \sigma]$  удовлетворяет условию „б“ (см. § 1).

Теперь мы докажем, что гамильтониан взаимодействия  $H'[x:n]$ , полученный из (10.29), удовлетворяет условию интегрируемости (10.11).

Поскольку правая часть (10.28) не является функционалом от поверхности, то

$$\frac{\delta}{\delta\sigma(x'')} \frac{\delta}{\delta\sigma(x')} Q_\alpha[x, \sigma] = 0.$$

Это равенство в комбинации с (10.27) приводит к соотношению

$$\left[ Q_\alpha(x), [H'[x':n], H'[x'':n]] + i[Q_\alpha(x), \frac{\partial}{\partial\sigma(x'')} H'[x':n]] \right] = 0,$$

которое может быть переписано в форме

$$\begin{aligned} & Q_\alpha(x) H'[x':n] H'[x'':n] + H'[x'':n] H'[x':n] Q_\alpha(x) + \\ & + i \left[ Q_\alpha(x), \frac{\partial}{\partial\sigma(x'')} H'[x':n] \right] - \\ & - \{ H'[x':n] Q_\alpha(x) H'[x'':n] + H'[x'':n] Q_\alpha(x) H'[x':n] \} = 0. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Вычитая из (10.31) соотношение, которое получается при перемене в нем местами  $x'$  и  $x''$ , получаем

$$\left[ Q_\alpha(x), [H'[x':n], H'[x'':n]] - i \frac{\partial}{\partial\sigma(x')} H'[x'':n] + i \frac{\partial}{\partial\sigma(x'')} H'[x':n] \right] = 0.$$

Правый член в скобках должен быть  $c$ -числом, которое должно быть равно нулю, потому что  $H'[x:n]$  выражается в виде суммы членов, каждый из которых является произведением по меньшей мере двух компонент поля. Теперь можно получить условие интегрируемости (10.11).

Канонический вектор энергии-импульса  $T_\mu$  задается выражением

$$\begin{aligned} T_\mu &= -iS^{-1}[\sigma] \int_\Sigma d\sigma'_\nu (T_{\mu\nu}^0(x') - H'[x:n] \delta_{\mu\nu}) \cdot S[\sigma] = \\ &= S^{-1}[\sigma] (T_\mu^0 + i \int_\Sigma d\sigma'_\nu H'[x:n]) S[\sigma], \end{aligned} \quad (10.32)$$

в котором через  $T_{\mu\nu}^0$  и  $T_\mu^0$  обозначены тензор и вектор энергии-импульса свободных полей. Последнее выражение показывает, что полная энергия является суммой энергии взаимодействия и энергии свободных полей. Полный четырехмерный вектор энергии-импульса  $T_\mu$  в представлении взаимодействия мы будем определять следующим образом:

$$T_\mu = S[\sigma] T_\mu S^{-1}[\sigma] = T_\mu^0 + i \int_\Sigma d\sigma'_\nu H'[x:n]. \quad (10.33)$$

Хотя, как показывается ниже, четырехмерный вектор  $T_\mu$  и постоянен по времени, величина  $T_\mu$  не является постоянной. Однако в силу того, что  $T_\mu$  и  $T_\mu$  связаны между собой унитарным преобразованием, они имеют одинаковые собственные значения

Собственные значения  $E_\mu$ , принадлежащие собственным векторам  $\Psi(E)$  оператора  $T_\mu$

$$T_\mu \Psi(E) = E_\mu \Psi(E), \quad (10.34)$$

дают полную энергию и импульс взаимодействующих полей. Больше того,  $\Psi(E)$ , так же как  $T_\mu$ , не зависит от  $\sigma$ . Далее,  $S[\sigma]\Psi(E)$  является собственным состоянием оператора  $T_\mu$  с тем же самым собственным значением  $E_\mu$ .

$$T_\mu S[\sigma]\Psi(E) = E_\mu S[\sigma]\Psi(E). \quad (10.35)$$

Теперь мы докажем, что  $T_\mu$  удовлетворяет уравнениям (7.5) и (7.27)

$$\frac{\delta T_\mu}{\delta \sigma(x)} = 0, \quad (10.36)$$

$$-\partial_\mu F(x) = [F(x), T_\mu]. \quad (10.37)$$

Поскольку  $H'[x:n]$  является скалярной величиной, то она может быть представлена в виде

$$H'[x:n] = \sum_m h_{\mu_1, \dots, \mu_{2m}}(x) n_{\mu_1}(x) \dots n_{\mu_{2m}}(x),$$

где  $h_{\mu_1, \dots, \mu_{2m}}$  — функционалы от компонент поля  $Q_\alpha(x)$ . Из (8.15) имеем

$$\left[ T_\mu, H'[x:n] \right] = \sum_m \partial_\mu h_{\mu_1, \dots, \mu_{2m}}(x) n_{\mu_1}(x) \dots n_{\mu_{2m}}(x).$$

Поэтому (10.32), (10.17) и (10.10) приводят к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\delta T_\mu}{\delta \sigma(x)} = & -S^{-1}[\sigma] \int_\sigma d\sigma'_\mu \left\{ \left[ H'[x:n], H'[x':n] \right] + i \frac{\partial H'[x:n]}{\partial \sigma(x')} - \right. \\ & \left. - i \frac{\partial H'[x':n]}{\partial \sigma(x)} \right\} S[\sigma]. \end{aligned}$$

Это уравнение, ввиду условия интегрируемости (10.11), эквивалентно уравнению (10.36). Следует заметить, что проведенное доказательство сохранения  $T_\mu$  основывается только на условии интегрируемости. Поскольку можно сконструировать различные гамильтонианы  $H'[x:n]$ , удовлетворяющие условию интегрируемости, постольку для однозначного определения  $T_\mu$  оказывается недостаточно закона сохранения вектора энергии-импульса. Однако (10.32) совместно с (10.29) определяют  $T_\mu$  однозначно.

Теперь покажем справедливость (10.37). Как показывает (10.36),  $T_\mu$  не зависит от конкретного выбора поверхности  $\sigma$ . Поэтому выберем поверхность  $\sigma$  в виде плоской поверхности  $\sigma(x) = \sigma(t)$  в некоторый конкретный момент времени  $t$  (т. е.  $n_\alpha = 0, 0, 0, i$ ). Тогда выражение (10.32) может быть записано в виде

$$T_\mu = S^{-1}[\sigma(t)] \left( T_\mu^0 + \int_{\sigma(t)} d^3x H'[x':n] \delta_{\mu 4} \right) S[\sigma(t)]. \quad (10.38)$$

С другой стороны, ввиду того, что  $\varepsilon(x-x')$  изменяет свою величину только при переходе точки  $x'$  через поверхность  $\sigma(x)$ , мы заключаем, что вклад от второго члена в (10.25) возникает только за счет точек  $x=x'$  в подынтегральном выражении [см. (8.206)]. Таким образом, величина  $Q_\alpha$  может быть записана в виде

$$Q_\alpha(x) = S^{-1}[\sigma(x)] \{ Q_\alpha(x) + g_\alpha[x:n] \} S[\sigma(x)], \quad (10.39)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \partial_\mu Q_\alpha(x) = & S^{-1}[\sigma(t)] \{ \partial_\mu Q_\alpha(x) + \\ & + \sum_m \partial_\mu g_{\alpha; \mu_1, \dots, \mu_m}(x) n_{\mu_1}(x) \dots n_{\mu_m}(x) \} S[\sigma(t)] - \\ & - S^{-1}[\sigma(t)] \int_{\sigma(t)} d^3x [Q_\alpha(x) + g_\alpha[x:n], H'[x':n]] S[\sigma(t)] \delta_{\mu 4}, \end{aligned} \quad (10.40)$$

где величина  $g_\alpha[x:n]$  имеет вид

$$g_\alpha[x:n] = \sum_m g_{\alpha; \mu_1, \dots, \mu_m}(x) n_{\mu_1}(x) \dots n_{\mu_m}(x)$$

и было использовано соотношение

$$i \frac{\partial}{\partial t} S[\sigma(t)] = \int_{\sigma(t)} d^3x H'[x:n]. \quad (10.41)$$

Соотношение (10.41) можно вывести из (10.10). Далее, (10.40) может быть с учетом (8.15) переписано в виде

$$\partial_\mu Q_\alpha(x) = -S^{-1}[\sigma(t)] [Q_\alpha(x) + g_\alpha[x:n], T_\mu^0 + \int_{\sigma(t)} d^3x H'[x':n] \delta_{\mu 4}] S[\sigma(t)].$$

Это равенство в комбинации с (10.38) приводит к (10.37).

Равенства (10.226) и уравнение (10.29) показывают, что гамильтониан взаимодействия  $H'[x:n]$  имеет вид

$$H'[x:n] = -L'(x) + W'_{\mu\nu}(x) n_\mu(x) n_\nu(x) + \dots, \quad (10.42)$$

где  $L'(x)$  получается из лагранжиана взаимодействия  $L'(x)$  путем замены  $Q_\alpha$  на  $Q_\alpha$ .

Из того обстоятельства, что  $g_\alpha[x:n]$  содержит лишь члены порядка  $\geq 1$  по константе связи  $g$ , следует, что в (10.40) все члены, за исключением  $-L'(x)$ , имеют по константе связи  $g$  порядок  $\geq 2$ . Следует заметить, что, когда  $W'_{\mu\nu}(x)$  содержит член вида  $w(x) \delta_{\mu\nu}$ , второй член в (10.42) дает член  $-w(x)$ , который не зависит от поверхности  $\sigma$ .

### § 3. Связи с обычной канонической теорией

В предыдущем параграфе мы развили каноническую квантовую теорию поля, используя канонические переменные  $q_r$  в неявном виде. Теперь мы проследим соотношение между этим формализмом и формализмом Гейзенберга и Паули, в котором канонические свойства проявляются в явном виде.

В общем случае величины  $Q_{\alpha}$  разбиваются на две группы компонент; для компонент  $Q_{\alpha'}$  ( $\alpha' = 1, \dots, f$ ) одной группы канонически сопряженные величины

$$P_{\alpha'} \equiv (-i) \frac{\partial L^0}{\partial Q_{\alpha';4}}$$

не равны нулю, а для компонент другой группы  $Q_{\alpha''}$  ( $\alpha'' = f+1, \dots$ ) имеют место равенства

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha''}} = 0, \quad \frac{\partial L^0}{\partial Q_{\alpha''}} = 0. \quad (10.43)$$

Другими словами,  $Q_{\alpha'}$ ,  $P_{\alpha'}$  являются независимыми каноническими компонентами, а  $Q_{\alpha''}$  — зависимыми компонентами. Поэтому величины  $Q_{\alpha'}$  и  $P_{\alpha'}$  связаны с помощью унитарного преобразования  $S[\sigma]$  с независимыми каноническими переменными  $Q_{\alpha'}$  и  $P_{\alpha'}$  ( $P_{\alpha'} \equiv (-i) \partial L / \partial Q_{\alpha';4}$ ) в гейзенберговском представлении соотношениями

$$\begin{aligned} Q_{\alpha'}(x) &= (S^{-1}[\sigma] Q_{\alpha'}(x) S[\sigma])_{x/\sigma}, \\ P_{\alpha'}(x) &= (S^{-1}[\sigma] P_{\alpha'}(x) S[\sigma])_{x/\sigma}. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Другими словами, разности между  $Q_{\alpha''}$  и  $(S^{-1}[\sigma] Q_{\alpha''} S[\sigma])_{x/\sigma}$  не равны нулю, а дают в (10.39) член  $S^{-1}[\sigma] g_{\alpha''} [x;n] S[\sigma]$ . Это обстоятельство мы проиллюстрируем в примере 3.

### § 4. Основные уравнения

На основании (10.1) и (10.10) можно показать, что уравнение Шредингера в представлении взаимодействия имеет вид

$$i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \Psi[\sigma] = H' [x;n] \Psi[\sigma]. \quad (10.45)$$

Это уравнение, а также соотношения коммутации (8.14а) и (8.14б) и уравнения поля (10.20б) являются основными уравнениями квантовой теории поля в представлении взаимодействия.

Решения уравнения (10.45) могут быть записаны в виде

$$\Psi[\sigma] = S[\sigma, \sigma_1] \Psi[\sigma_1] = S[\sigma] \Psi[-\infty], \quad (10.46)$$

где  $S[\sigma, \sigma_1]$  удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} S[\sigma, \sigma_1] &= H' [x;n] S[\sigma, \sigma_1] \text{ для } \sigma > \sigma_1, \\ S[\sigma_1, \sigma_1] &= 1 \text{ (начальное условие)}. \end{aligned} \quad (10.47)$$

Если начальное состояние  $\Psi[-\infty]$  задано, то среднее значение некоторой величины  $F(x)$  может быть найдено с помощью формулы

$$\Psi^*[\sigma]F(x)\Psi[\sigma] = \Psi^*[-\infty]S^{-1}[\sigma]F(x)S[\sigma]\Psi[-\infty].$$

Мы записываем это в виде

$$(F(x))_{\sigma} = (S^{-1}[\sigma]F(x)S[\sigma])_{-\infty}, \quad (10.48)$$

где  $(\ )_{\sigma}$  — среднее значение в состоянии, характеризуемом с помощью  $\Psi[\sigma]$ .

Амплитуда вероятности найти на  $\sigma$  состояние  $a$ , когда  $\Psi[\sigma_1]$  описывает состояние  $b$ , определяется формулой

$$\Psi_a^*\Psi[\sigma] = \Psi_a^*S[\sigma, \sigma_1]\Psi_b = (a|S[\sigma, \sigma_1]|b). \quad (10.49)$$

Уравнение (10.47) может быть записано в виде интегрального уравнения

$$S[\sigma, \sigma_1] = 1 - i \int_{\sigma_1}^{\sigma} d^4x' H'[x':n] S[\sigma(x'), \sigma_1], \quad (10.50)$$

в котором интегрирование подразумевается по области, заключенной между поверхностями  $\sigma$  и  $\sigma_1$ . Условие интегрируемости (10.11) обеспечивает, чтобы  $S[\sigma, \sigma_1]$  не зависело от порядка интегрирования в (10.50).

Матрица перехода  $S[\infty]$  между состояниями при  $t = -\infty$  и  $t = +\infty$  называется матрицей рассеяния, или  $S$ -матрицей.

## § 5. Шредингеровское представление

Сейчас мы установим связь между представлением взаимодействия и шредингеровским представлением, относящимся к плоским поверхностям  $\sigma = \sigma(t)$ , связанным с моментами времени  $t$ . Уравнение Шредингера (10.45) может быть записано в виде

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi[\sigma(t)] = H'[\sigma(t)] \Psi[\sigma(t)] \quad (10.51)$$

с

$$H'[\sigma(t)] \equiv \int_{\sigma(t)} d^3x H'[x:n], \quad (10.52)$$

где учтено соотношение (10.41).

Из (8.15) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} T_4^0 = 0. \quad (10.53)$$

Вводя  $\bar{F}(x)$  с помощью равенства

$$\bar{F}(x) \equiv \exp(-iT_4^0 t) F(x) \exp(iT_4^0 t), \quad (10.54)$$

в котором  $F(x)$  — оператор в представлении взаимодействия, мы с помощью (8.15) и (10.53) получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{F}(x) = 0.$$

Тем самым показано, что  $\bar{F}(x)$  является оператором в шредингеровском представлении и что  $\exp(iT_4^0 t)$  — унитарное преобразование, связывающее представление взаимодействия со шредингеровским представлением. Из (10.54) видно, что операторы энергии в обоих представлениях совпадают друг с другом или что

$$\bar{T}_4^0 = T_4^0. \quad (10.55)$$

Волновые функции  $\varphi(t)$  в шредингеровском представлении, имеющие вид

$$\varphi(t) = \exp(-iT_4^0 t) \Psi[\sigma(t)], \quad (10.56)$$

удовлетворяют уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t) = (H^0 + H') \varphi(t). \quad (10.57)$$

В этом уравнении  $H'$  и  $H^0$  являются соответственно гамильтонианом взаимодействия и оператором свободной энергии  $T_4^0$  в шредингеровском представлении, т. е.

$$H' \equiv \exp(-iT_4^0 t) H'[\sigma(t)] \exp(iT_4^0 t), \quad (10.58)$$

$$H^0 \equiv T_4^0. \quad (10.59)$$

Хотя в настоящем параграфе мы пользовались плоскими поверхностями  $\sigma(t)$ , изложенная теория в шредингеровском представлении лоренц-инвариантна, потому что она получена на основе ковариантного формализма представления взаимодействия.

## § 6. Примеры.

### Пример 1. Различные гамильтонианы взаимодействия

Прежде всего рассмотрим векторное взаимодействие между вещественным (нейтральным) скалярным полем и дираковским полем. Лагранжиан взаимодействия дан в (7.116) в виде

$$L' = ig \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \cdot \partial_\mu U. \quad (10.60)$$

Уравнение (10.29) показывает, что гамильтониан взаимодействия может быть получен с помощью соотношений

$$[U(x), H'[x':n]] = gS[\sigma] \partial'_\mu (\bar{\psi}(x') \gamma_\mu \psi(x') S^{-1}[\sigma] \Delta(x-x'),$$

$$[\psi(x), H'[x':n]] = -ig \gamma_\mu S[\sigma] \psi(x') \cdot \partial'_\mu U(x') S^{-1}[\sigma] S(x-x').$$

$$(10.61).$$

Из (10.30) получаем<sup>1)</sup>

$$U(x) = U\left[\frac{x}{\sigma}\right] - \frac{i}{2} g \int d^4x' \bar{\psi}(x') \gamma_\mu \psi(x') [\partial_{\nu, \varepsilon}(x-x')] \Delta(x-x') = U\left[\frac{x}{\sigma}\right], \quad (10.62a)$$

$$\psi(x) = \psi\left[\frac{x}{\sigma}\right], \quad (10.62b)$$

$$\partial_\mu U(x) = (\partial_\mu U[x, \sigma])_{x/\sigma} - \frac{i}{2} g \int d^4x' \bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x') [\partial_\mu \partial_{\nu, \varepsilon}(x-x')] \times \Delta(x-x') = (\partial_\mu U[x, \sigma])_{x/\sigma} + ig \bar{\psi}\left[\frac{x}{\sigma}\right] \gamma_\nu \psi\left[\frac{x}{\sigma}\right] n_\mu(x) n_\nu(x), \quad (10.63)$$

где использованы (10.19), (8.20a), (8.20b) и (8.20в).

Подставляя (10.62a), (10.62b) и (10.63) в (10.61), будем иметь

$$[U(x), H'[x':n]] = g \partial'_\mu (\bar{\psi}(x') \gamma_\mu \psi(x')) \Delta(x-x'), \quad (10.64a)$$

$$[\psi(x), H'[x':n]] = -ig \gamma_\mu \psi(x') \cdot \partial'_\mu U(x') \cdot S(x-x') + + g^2 \gamma_\mu \psi(x') \cdot (\bar{\psi}(x') \gamma_\nu \psi(x')) S(x-x') n_\mu(x') n_\nu(x'). \quad (10.64b)$$

Отсюда следует, что

$$H'[x:n] = -ig \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \partial_\mu U(x) - \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) n_\mu(x))^2. \quad (10.65)$$

Теперь выищем гамильтонианы взаимодействия, которые аналогичным способом могут быть получены из лагранжианов взаимодействия, приведенных в гл. 7, пример 8. Скалярное и векторное взаимодействия между вещественным (нейтральным) скалярным полем и дираковским полем описываются гамильтонианом

$$H'[x:n] = -f \bar{\psi} \psi U - ig \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \partial_\mu U - \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi n_\mu)^2. \quad (10.66)$$

Псевдоскалярное и псевдовекторное взаимодействия между вещественным (нейтральным) псевдоскалярным полем и дираковским полем описываются гамильтонианом

$$H'[x:n] = -if \bar{\psi} \gamma_5 \psi U - ig \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi \partial_\mu U - \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi n_\mu)^2. \quad (10.67)$$

Векторное взаимодействие между вещественным (нейтральным) векторным полем и дираковским полем задается в виде

$$H'[x:n] = -if \bar{\psi} \gamma_\mu \psi U_\mu - \frac{1}{2x^2} f^2 (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi n_\mu)^2. \quad (10.68)$$

Псевдовекторное взаимодействие между вещественным (нейтральным) псевдовекторным полем и дираковским полем записы-

<sup>1)</sup>  $[\partial_{\nu, \varepsilon}(x-x')] \Delta(x-x') = \partial_{\nu, \varepsilon}(\varepsilon(x-x') \Delta(x-x')) - \varepsilon(x-x') \partial_\nu \Delta(x-x') = \Delta(x-x') \partial_{\nu, \varepsilon}(x-x') = 0$  [см. (8.20a)].



вается в виде

$$H'[x:n] = -if\bar{\Psi}\gamma_5\Psi U_\mu - \frac{1}{2x^2} f^2 (\bar{\Psi}\gamma_5\Psi\phi_{\mu\nu})^2. \quad (10.69)$$

### Пример 2. Электромагнитные взаимодействия в произвольных заряженных полях

Рассмотрим взаимодействия  $A_\mu$ -типа произвольных заряженных полей  $Q_\alpha(x)$  в общем виде.

Лагранжиан взаимодействия не содержит каких-либо дифференциальных операторов, действующих на  $A_\mu$  (см. гл. 7, пример 4), и оператор  $d_{\mu\nu}(\partial)$  для случая электромагнитного поля  $A_\mu$  сводится к  $\delta_{\mu\nu}$  [см. (8.57)]. Поэтому (10.30) дает <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= (S^{-1}[\sigma] A_\mu(x) S[\sigma])_{x/\sigma}, \\ \partial_\nu A_\mu(x) &= (S^{-1}[\sigma] \partial_\nu A_\mu(x) S[\sigma])_{x/\sigma}. \end{aligned} \quad (10.70)$$

Фундаментальное уравнение (10.29) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} [A_\mu(x), H'[x':n]] &= -i\Delta_p(x-x') S[\sigma] \frac{\partial L'}{\partial A_\mu} S^{-1}[\sigma] = \\ &= -i\Delta_p(x-x') S[\sigma] J_\mu(x') S^{-1}[\sigma]. \end{aligned} \quad (10.71)$$

Через  $\Delta_p$  обозначены  $\Delta$ -функции для фотонного поля. Величина  $J_\mu$  в (10.71) является вектором электрического тока, определенным в (7.70). Электрический ток  $J_\mu[x:n]$  в представлении взаимодействия связан с  $J_\mu$  унитарным преобразованием

$$J_\mu[x:n] = (S[\sigma] J_\mu(x) S^{-1}[\sigma])_{x/\sigma}. \quad (10.72)$$

Таким образом, из (10.71) получаем

$$[A_\mu(x), H'[x':n]] = -i\Delta_p(x-x') J_\mu[x':n]. \quad (10.73)$$

Приняв во внимание соотношения коммутации (8.57) для  $A_\mu$ , из (10.73) будем иметь следующее важное соотношение:

$$J_\mu[x':n] = -\frac{\partial}{\partial A_\mu(x)} H'[x:n]. \quad (10.74)$$

Для простоты примем, что  $H'[x:n]$  имеет вид

$$H'[x:n] = -e j_\mu(x) A_\mu(x) - \frac{1}{2} e^2 j_{\mu\nu}[x:n] A_\mu(x) A_\nu(x). \quad (10.75)$$

Здесь величины  $j_\mu$  и  $j_{\mu\nu}$  не содержат  $A_\mu$ . Это предположение оправдывается практическими вычислениями в случаях заряженных полей с малым спином ( $S \leq 1$ ). Последнее равенство показывает

$$j_{\mu\nu}[x:n] = j_{\nu\mu}[x:n]. \quad (10.76)$$

<sup>1)</sup>  $\{\partial_\mu, \varepsilon(x-x')\} \Delta(x-x') = 0$ .

Поэтому (10.74) приводит к выражению для тока

$$J_\mu[x:n] = e j_\mu(x) + e^2 j_{\mu\nu}[x:n] A_\nu(x). \quad (10.77)$$

Далее, (10.42) показывает, что  $j_\mu$  имеет вид электрического тока для случая свободных заряженных полей и поэтому удовлетворяет уравнению  $\partial_\nu j_\mu(x) = 0$ .

Теперь мы докажем теорему [15], согласно которой

$$j_{\mu\nu}[x:n] n_\nu(x) = 0. \quad (10.78a)$$

Из (7.356) следует равенство

$$J_\mu n_\mu = -ie \left( \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}} Q_\alpha - Q_\alpha^* \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}^*} \right) n_\mu,$$

которое с учетом (10.43) и (10.44) приводит к соотношению

$$J_\mu[x:n] n_\mu = -ie \left( \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}} Q_\alpha - Q_\alpha^* \frac{\partial L}{\partial Q_{\alpha;\mu}^*} \right) n_\mu.$$

Ввиду того что лагранжиан  $L$  в представлении взаимодействия (т. е. лагранжиан для свободных заряженных полей) не содержит компонент поля  $A_\mu(x)$ , имеем

$$\frac{\partial}{\partial A_\mu} \{J_\mu[x:n] n_\mu\} = 0.$$

Сравнивая это равенство с (10.77) и учитывая (10.76), получаем (10.78a). Из (10.78a) следует соотношение

$$S[\sigma(x)] J_\nu(x) S^{-1}[\sigma(x)] n_\nu(x) = j_\nu(x) n_\nu(x). \quad (10.78b)$$

Теперь введем уравнение непрерывности в представлении взаимодействия, являющееся аналогом уравнения непрерывности (7.346):

$$\partial_\mu J_\mu(x) = 0.$$

Из (10.72) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \int_{\square} d\sigma'_\mu J_\mu(x') &= S^{-1}[\sigma] \left\{ \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} \int_{\square} d\sigma'_\mu J_\mu[x':n] - \right. \\ &\quad \left. - i \int_{\square} d\sigma'_\mu [J_\mu[x':n], H'[x:n]] \right\} S[\sigma]. \end{aligned} \quad (10.79)$$

Учитывая (6.66) и (10.17), из (10.79) получаем

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_\mu(x) &= -S^{-1}[\sigma] \left\{ \partial_\mu J_\mu[x:n] - \int_{\square} d\sigma'_\mu \frac{\partial}{\partial\sigma(x')} J_\mu[x:n] + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\square} d\sigma'_\mu \frac{\partial}{\partial\sigma(x)} J_\mu[x':n] - i \int_{\square} d\sigma'_\mu [J_\mu[x':n], H'[x:n]] \right\} S[\sigma]. \end{aligned} \quad (10.80)$$

С другой стороны, условие интегрируемости (10.11) приводит<sup>1)</sup> к соотношениям

$$i \left[ \frac{\partial}{\partial A_\mu(x)} H'[x:n], H'[x':n] \right] = \frac{\partial}{\partial \sigma(x')} \frac{\partial}{\partial A_\mu(x)} H'[x:n],$$

$$i \left[ H'[x:n], \frac{\partial}{\partial A_\mu(x')} H'[x':n] \right] = - \frac{\partial}{\partial \sigma(x)} \frac{\partial}{\partial A_\mu(x')} H'[x':n],$$

в которых  $x$  и  $x'$  — две различные точки на пространственно-подобной поверхности  $\sigma$ . Складывая эти два соотношения и принимая во внимание (10.76), найдем

$$i \left[ J_\mu[x:n], H'[x':n] \right] = \frac{\partial}{\partial \sigma(x')} J_\mu[x:n] - \frac{\partial}{\partial \sigma(x)} J_\mu[x':n] - i \left[ H'[x:n], J_\mu[x':n] \right].$$

Очевидно, это равенство остается справедливым и в том случае, когда  $x$  совпадает с  $x'$ . Подставляя это равенство в (10.80), получаем соотношение

$$\partial_\mu J_\mu(x) = S^{-1}[\sigma] \left\{ \partial_\mu J_\mu[x:n] - i \int_\sigma d\sigma'_\mu \left[ J_\mu[x:n], H'[x':n] \right] \right\} S[\sigma],$$

которое приводит к уравнению

$$\partial_\mu J_\mu[x:n] = i \int_\sigma d\sigma'_\mu \left[ J_\mu[x:n], H'[x':n] \right]. \quad (10.81)$$

В этом уравнении оператор  $\partial_\mu$  действует не на нормальный вектор  $n_\mu$ , а на компоненты поля, содержащиеся в  $J_\mu[x:n]$ .

Подставляя (10.75) и (10.76) в (10.81) и сравнивая между собой члены одинаковой степени по  $A_\mu$  в обеих частях уравнения

<sup>1)</sup> Применяя оператор  $\partial/\partial A_\mu(x)$  к (10.11), получаем

$$-i \left[ \frac{\partial}{\partial A_\mu(x)} H'[x:n], H'[x':n] \right] - i \left[ H'[x:n], \frac{\partial}{\partial A_\mu(x')} H'[x':n] \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \sigma(x)} \frac{\partial}{\partial A_\mu(x)} H'[x':n] - \frac{\partial}{\partial \sigma(x')} \frac{\partial}{\partial A_\mu(x)} H'[x:n].$$

С другой стороны, ввиду того что  $x$  и  $x'$  — две различные точки, имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial A_\mu(x)} H'[x':n] = 0.$$

Следовательно,

$$i \left[ \frac{\partial}{\partial A_\mu(x)} H'[x:n], H'[x':n] \right] = \frac{\partial}{\partial \sigma(x')} \frac{\partial}{\partial A_\mu} H'[x':n].$$

(10.81), получаем [15]

$$\partial_\mu j_\mu = 0, \quad (10.82a)$$

$$\int_\sigma d\sigma'_\mu [j_\mu(x), j_\nu(x')] A_\nu(x') = i\partial_\mu (j_{\mu\nu}[x:n] A_\nu(x)), \quad (10.82б)$$

$$\int_\sigma d\sigma'_\mu [j_\mu(x), j_{\rho\nu}[x':n]] A_\rho(x') A_\nu(x') = 0. \quad (10.82в)$$

В этих уравнениях  $x$  и  $x'$  предполагаются лежащими на одной и той же поверхности, а оператор дифференцирования  $\partial_\mu$  не действует на вектор нормали  $n_\mu$ , содержащийся в  $j_{\mu\nu}[x:n]$ . Уравнения (10.82) и (10.78a) приводят к следующим общим свойствам электрического тока, выражаемым с помощью соотношений<sup>1)</sup>:

$$n_\mu(x) [j_\mu(x), j_\nu(x')] = i n_\mu(x) \partial_\rho (j_{\rho\nu}[x:n] \cdot \partial_\mu \Delta(x-x')), \quad (10.83a)$$

$$n_\mu n_\nu [j_\mu(x), j_\nu(x')] = 0, \quad (10.83б)$$

$$n_\mu [j_\mu(x), j_{\rho\nu}[x':n]] = 0. \quad (10.83в)$$

В этих соотношениях точки  $x$  и  $x'$  считаются разделенными пространственно-подобным интервалом, а оператор дифференцирования  $\partial_\mu$  не действует на вектор нормали  $n_\mu$ , содержащейся в  $j_{\mu\nu}$ . Эти соотношения будут использованы нами в следующей главе.

Теперь запишем в представлении взаимодействия условие Лоренца. Из (10.30), (10.72), (10.78a), (10.19) и (8.20г) следует

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial_\nu A_\mu(x) &= (S[\sigma] \partial_\mu \partial_\nu A_\mu(x) S^{-1}[\sigma])_{x/\sigma} + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4 x' S[\sigma] J_\mu(x') S^{-1}[\sigma] \cdot [\partial_\mu \partial_\nu, \varepsilon(x-x')] \Delta_\rho(x-x') = \\ &= (S[\sigma] \partial_\mu \partial_\nu A_\mu(x) S^{-1}[\sigma])_{x/\sigma} - e j_\mu(x) n_\mu(x) n_\nu(x) = \\ &= (S[\sigma] \partial_\mu \partial_\nu A_\mu(x) S^{-1}[\sigma])_{x/\sigma} + e \int_\sigma d\sigma'_\mu j_\mu(x') \partial'_\nu \Delta_\rho(x'-x). \end{aligned} \quad (10.84)$$

<sup>1)</sup> Так как при выводе уравнения непрерывности мы не пользовались никакими специальными свойствами  $A_\mu$ , то вместо  $A_\mu(x)$  в (10.82б) и (10.82в) можно подставить любую функцию  $f(x)$ :

$$\int_\sigma d\sigma'_\mu [j_\mu(x), j_\nu(x')] f(x') = i\partial_\mu [j_{\mu\nu}[x:n] f(x)].$$

Беря в качестве  $f(x)$  величину  $\partial_4 \Delta(x-x'')$  ( $= i\delta(x-x'')$ ) в заданной точке  $x''$  на  $\sigma$ , получаем

$$-i \int [j_4(x), j_\nu(x')] \partial'_4 \Delta(x'-x'') = i\partial_\mu (j_{\mu\nu}[x:n] \partial_4 \Delta(x'-x'')).$$

Это приводит к равенству

$$[j_4(x), j_\nu(x'')] = i\partial_\mu (j_{\mu\nu}[x:n] \partial_4 \Delta(x'-x'')).$$

Из этого равенства можно получить (10.83a). Полагая в (10.83a)  $\nu=4$ , можно вывести (10.83б).

Здесь точка  $x$  расположена на  $\sigma$ . С другой стороны, мы имеем формулу

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\mu(x) = & \int_\sigma d\sigma' \{ \Delta_p(x-x') \partial'_\nu \partial'_\mu A_\mu(x') - \\ & - \partial'_\mu A_\mu(x') \cdot \partial_\nu \Delta_p(x-x') \}, \end{aligned} \quad (10.85)$$

в которой не предполагается, что  $x$  обязательно должна лежать на  $\sigma$ . Мы докажем формулу (10.85), показав, что функциональная производная  $\delta/\delta\sigma$  от правой части равна нулю; тем самым будет доказана независимость (10.85) от  $\sigma$ . С другой стороны, формула (10.85) легко может быть обоснована для плоской поверхности, проходящей через точку  $x$ .

Условия (7.59) и (7.60)

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\mu(x) \Phi &= 0, \\ \partial_\nu \partial_\mu A_\mu(x) \Phi &= 0 \end{aligned} \quad (10.86a)$$

с учетом (10.85) и (10.70) приводят к уравнению

$$\partial_\mu A_\mu(x) \Psi[\sigma] = \int_\sigma d\sigma' \Delta_p(x-x') \partial'_\nu \partial'_\mu A_\mu(x') \Psi[\sigma]. \quad (10.86b)$$

В уравнении (10.86b)  $x$  не обязательно лежит на  $\sigma$ . Подставляя (10.84) в (10.86b) и учитывая (10.86a), получаем уравнение

$$\partial_\mu A_\mu(x) \Psi[\sigma] = e \int_\sigma d\sigma' \int_\sigma d\sigma'' j_\mu(x'') \Delta_p(x-x') \partial''_\nu \Delta_p(x''-x') \Psi[\sigma],$$

которое приводит к

$$\left[ \partial_\mu A_\mu(x) - e \int_\sigma d\sigma' j_\mu(x') \Delta_p(x-x') \right] \Psi[\sigma] = 0. \quad (10.87)$$

Здесь  $x$  не обязательно лежит на  $\sigma$ . При выводе (10.87) нами использовано следующее соотношение [см. (8.18), (8.19б)]:

$$\int_{\sigma(x'')} d\sigma' \Delta(x-x') \partial''_\nu \Delta(x''-x') = \Delta(x-x'').$$

Уравнение (10.87) является условием Лоренца в представлении взаимодействия. Рассматривая (9.65a) как условие Лоренца в гейзенберговском представлении, можно условие Лоренца в представлении взаимодействия записать в виде

$$\left[ \partial_\mu A_\mu^+(x) - e \int_\sigma d\sigma' j_\mu(x') \Delta_p^+(x-x') \right] \Psi[\sigma] = 0. \quad (10.88)$$

### Пример 3. Электромагнитное взаимодействие в формализме Дуффина — Кеммера

Рассмотрим электромагнитное взаимодействие поля со спином 1 или 0 в теории Дуффина — Кеммера.

На основе (7.105) и (7.69) лагранжиан взаимодействия записывается в виде

$$L' = ie\bar{\varphi}\beta_{\mu}\varphi A_{\mu}. \quad (10.89)$$

Из (8.61) и (10.25) имеем

$$A_{\mu}(x) = A_{\mu}\left[\frac{x}{\sigma}\right], \quad (10.90)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \phi\left[\frac{x}{\sigma}\right] + \frac{i}{2}e \int d^4x' \beta_{\mu}\varphi(x') A_{\mu}(x') [d(\partial), \varepsilon(x-x')] = \\ &= \phi\left[\frac{x}{\sigma}\right] + \frac{i}{x}e(1 + (\beta_{\nu}n_{\nu})^2)\beta_{\mu}A_{\mu}\left[\frac{x}{\sigma}\right]\phi\left[\frac{x}{\sigma}\right], \end{aligned} \quad (10.91)$$

где надо воспользоваться формулой

$$(1 + (\beta_{\nu}n_{\nu})^2)\beta_{\mu}(1 + (\beta_{\nu}n_{\nu})^2) = 0. \quad (10.92)$$

Поэтому (10.29) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} [\varphi(x), H'[x':n]] &= -ed(\partial)\Delta(x-x')S[\sigma]\beta_{\mu}A_{\mu}(x')\varphi(x')S^{-1}[\sigma] = \\ &= -ed(\partial)\Delta(x-x')\beta_{\mu}A_{\mu}(x')\left\{1 + \frac{i}{x}e(1 + (\beta_{\nu}n_{\nu})^2)\beta_{\nu}A_{\nu}(x')\right\}\varphi(x'). \end{aligned}$$

Это приводит к следующему гамильтониану взаимодействия [13]:

$$H'[x:n] = -ie\bar{\varphi}\beta_{\mu}\varphi A_{\mu} + \frac{e^2}{x}\bar{\varphi}\beta_{\mu}(1 + (\beta_{\nu}n_{\nu})^2)\beta_{\nu}\varphi A_{\nu}A_{\nu}. \quad (10.93)$$

Следует заметить, что (10.93) содержит член, пропорциональный  $e^2$ , который не зависит от  $n_{\mu}$  (см. § 2).

#### Пример 4. Ограничения соотношений коммутации, возникающие от взаимодействия

Сейчас мы покажем, что условие (10.29), которое удовлетворяется гамильтонианами взаимодействий, ограничивает возможный вид соотношений коммутации.

Легко видеть, что (10.29) можно записать в виде

$$\begin{aligned} [Q_{\alpha}(x), H'[x':n]] &= i \frac{\partial H'[x':n]}{\partial (D'_{\alpha}Q'_{\alpha}(x'))} d_{\alpha\beta}(\partial) D'_{\alpha}\Delta(x-x') = \\ &= [Q_{\alpha}(x), D'_{\alpha}\bar{Q}_{\alpha}(x')] \frac{\partial H'[x':n]}{\partial (D'_{\alpha}\bar{Q}_{\alpha}(x'))}. \end{aligned} \quad (10.94)$$

На основании (10.94) можно высказать следующую теорему [9, 17, 6]:

**Теорема 1:** Каждый член гамильтониана взаимодействия  $H'[x:n]$  должен содержать четное число операторов поля  $Q^{(1)}, \dots, Q^{(2n)}$ , для которых

$$[Q^{(i)}(x, t), X(x', t)]_{+} = 0.$$

Здесь  $X$  — произвольно выбранное поле, а  $x$  и  $x'$  — две различные точки.

Чтобы доказать эту теорему, разделим компоненты поля, входящие в выражение данного члена гамильтониана  $H'[x:n]$ , на две группы членов  $(Q^{(1)}, \dots, Q^{(m)})$  и  $(Q^{(m+1)}, \dots)$ , удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} [Q^{(i)}(x, t), X(x', t)]_+ &= 0 & \text{для } i \leq m, \\ [Q^{(i)}(x, t), X(x', t)]_- &= 0 & \text{для } i > m \end{aligned} \quad (10.95)$$

( $x$  и  $x'$  — две различные точки). Если  $m$  — нечетное число  $m = 2n + 1$ , то

$$\begin{aligned} & [X, Q^{(1)} \dots Q^{(2n+1)} Q^{(2n+2)} \dots]_- = \\ & = \{ [X, Q^{(1)}]_+ Q^{(2)} \dots \} - \{ Q^{(1)} [X, Q^{(2)}]_+ Q^{(3)} \dots \} + \\ & + \dots - \{ Q^{(1)} \dots Q^{(2n-1)} [X, Q^{(2n)}]_+ Q^{(2n+1)} \dots \} + \\ & + \{ Q^{(1)} \dots Q^{(2n)} [X, Q^{(2n+1)}]_- Q^{(2n+2)} \dots \} + \\ & + Q^{(1)} \dots Q^{(2n+1)} [X, Q^{(2n+2)} \dots]_- . \end{aligned}$$

Появление в (10.95) выражения  $[X, Q^{(2n+1)}]_-$  показывает, что взаимодействие этого вида не может удовлетворять условию (10.94).

Так как все процессы взаимопревращения связаны с взаимодействиями, удовлетворяющими теореме 1, то мы имеем следующую теорему.

**Теорема 2.** В любом процессе взаимодействия должно существовать четное число полей  $(Q^{(1)}, \dots, Q^{(2n)})$ , для которых  $[Q^{(i)}(x, t), X(x', t)]_+ = 0$ .

Здесь  $X$  — произвольно выбранное поле, а  $x$  и  $x'$  — две различные точки.

Ввиду того что всегда существует процесс тормозного излучения

$$P + e \rightarrow P + e + \gamma,$$

из теоремы 2 следует, что  $A_\mu$  должны коммутировать с любым другим полем.

Теперь предположим, что протонное поле  $\psi_p$  и нейтронное поле  $\psi_N$  являются ферми-полями и что поле  $\varphi_\pi$  заряженных  $\pi$ -мезонов является бозе-полем. Другими словами, предположим, что

$$\begin{aligned} [\psi_p(x, t), \bar{\psi}_p(x', t)]_+ &= [\psi_N(x, t), \bar{\psi}_N(x', t)]_+ = \\ &= [\varphi_\pi(x, t), \varphi_\pi^*(x', t)]_- = 0 \end{aligned}$$

(для двух различных точек  $x$  и  $x'$ ).

Тогда по теореме 2, ввиду существования процесса взаимопревращения  $P + P \rightarrow P + N + \pi^+$ , мы заключаем, что должны иметь место соотношения

$$\begin{aligned} [\psi_p, \psi_N]_+ &= 0, \\ [\psi_p, \varphi_\pi]_- &= [\psi_N, \varphi_\pi]_- = 0 \end{aligned} \quad (10.96)$$

или

$$\begin{cases} [\psi_P, \psi_N]_- = 0, \\ [\psi_P, \varphi_\pi]_+ = [\psi_N, \varphi_\pi]_+ = 0. \end{cases} \quad (10.97)$$

Следует заметить, что не все коммутаторы

$$[\psi_P, \psi_N]_-, [\psi_P, \varphi_\pi]_-, [\psi_N, \varphi_\pi]_-$$

могут одновременно быть равными нулю. Процесс  $P + P \rightarrow P + P + \pi^0$  указывает на то, что поле нейтральных  $\pi$ -мезонов ( $\pi^0$ ) должно коммутировать со всеми другими полями (скажем, полем  $X$ ):

$$[\varphi_{\pi^0}, X] = 0, \quad (10.98a)$$

например,

$$\begin{cases} [\psi_{\pi^0}, \varphi_{\pi^0}]_- = 0, \\ [\psi_P, \varphi_{\pi^0}]_- = [\psi_N, \varphi_{\pi^0}]_- = 0. \end{cases} \quad (10.98b)$$

Поэтому если предположить, что заряженные  $\pi$ -мезоны и нейтральные  $\pi$ -мезоны подчиняются перестановочным соотношениям одинакового типа, то для них надо исключить перестановочные соотношения (10.97) и принять соотношения (10.96). По-видимому, этот результат говорит в пользу того воззрения, что протон и нейтрон являются двумя различными состояниями одной частицы (т. е. нуклона).

Таким образом, мы видим, что существование различных процессов накладывает ограничения на возможные типы соотношений коммутации.

### Пример 5. Взаимодействие и отражение времени

Подробное обсуждение вопросов, связанных с отражением времени в квантовой теории поля, было проведено в гл. 8, пример 5. Сейчас мы приведем несколько примеров взаимодействий, которые исключаются требованием инвариантности теории относительно отражений времени.

Из (10.45) с учетом (8.73) получаем

$$i \frac{\delta^2 \Psi[\sigma]}{\delta \sigma(x) \delta \sigma(x')} = (H'[x:n])^{T'} \Psi[\sigma]. \quad (10.99)$$

Поэтому инвариантность уравнения Шредингера (10.45) накладывает на гамильтониан взаимодействия следующее условие:

$$H'[Q_\alpha(x')] = (H'[Q_\alpha(x)])^T. \quad (10.100)$$

Здесь обозначение  $H'[Q_\alpha]$  показывает, что гамильтониан  $H'[x:n]$  построен из операторов поля  $Q_\alpha$ . Условие (10.100) требует, чтобы гамильтониан взаимодействия относительно отражений времени имел положительную четность [см. (8.86)].



Теперь можно доказать, что в случае II, приведенном в гл. 8, пример 5, линейные комбинации скалярных взаимодействий и векторного взаимодействия не могут дать правильных взаимодействий между дираковским полем  $\bar{\psi}$  и *вещественным* (и поэтому нейтральным) скалярным полем  $U$ . Действительно, как это видно из табл. 3 (стр. 171), инвариантность величин  $\bar{\psi}\psi U$  и  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\partial_\mu U$  приводит к неправильному и невозможному заключению, что при этом взаимодействии величины  $U$  и  $\partial_\mu U$  должны вести себя соответственно как четный скаляр и нечетный вектор.

С помощью тех же предпосылок можно доказать, что невозможна также линейная комбинация псевдотензорного и псевдовекторного взаимодействий между дираковским и *вещественным* псевдоскалярными полями [7].

В случае взаимодействий между комплексными бозе-полями и дираковскими полями, или при  $\beta$ -взаимодействиях, константы связи являются комплексными величинами, и поэтому можно заключить, что требование инвариантности относительно отражений времени накладывает ограничение на фазы этих констант [16]. Детерминант матрицы  $\Lambda$  для  $\alpha$ -поля при отражении времени мы будем обозначать через  $\rho_\alpha$ ; абсолютная величина этого детерминанта  $|\rho_\alpha|$  должна быть равна единице [см. (3.20)]. Далее, для вещественного поля величина  $\rho_\alpha$  должна быть вещественной. Однако для комплексных полей эта величина может быть комплексной.

Для случаев взаимодействий между комплексными бозе-полями и нейтральным спинорным полем  $\psi^\alpha$  или заряженным спинорным полем  $\psi^\beta$  имеем

$$f\bar{\psi}^\alpha\psi^\beta U + f^*\bar{\psi}^\beta\psi^\alpha U^* \quad (\text{скалярное взаимодействие}), \quad (10.101a)$$

$$f\bar{\psi}^\alpha\gamma_5\psi^\beta U - f^*\bar{\psi}^\beta\gamma_5\psi^\alpha U^* \quad (\text{псевдоскалярное взаимодействие}), \quad (10.101б)$$

$$f\bar{\psi}^\alpha\gamma_\mu\psi^\beta U_\mu - f^*\bar{\psi}^\beta\gamma_\mu\psi^\alpha U_\mu^* \quad (\text{векторное взаимодействие}), \quad (10.101в)$$

$$if\bar{\psi}^\alpha\gamma_5\gamma_\mu\psi^\beta U_\mu - if^*\bar{\psi}^\beta\gamma_5\gamma_\mu\psi^\alpha U_\mu^* \quad (\text{псевдовекторное взаимодействие}). \quad (10.101г)$$

Из требования инвариантности относительно отражения времени (в случае II) получаются следующие условия:

$$f\rho_\alpha^*\rho_\beta = f^*. \quad (10.102)$$

В том же случае пять  $\beta$ -взаимодействий вида (7.121) при отражении времени дают следующее простое условие:

$$g\rho_a^*\rho_b\rho_c^*\rho_d = g^*. \quad (10.103)$$

Если предположить, что все фазовые множители  $\rho_a, \dots, \rho_d$  равны единице, то это условие требует, чтобы константа связи  $g$  для  $\beta$ -взаимодействия была вещественной.

Пример 6. Спин заряженного  $\pi$ -мезона

Когда взаимодействие инвариантно относительно отражения времени, рассуждения, приведенные в гл. 8, пример 5, и рассуждения, изложенные в предыдущем примере 5, показывают, что матричный элемент  $S$ -матрицы для процесса  $(0 \rightarrow f)$  эквивалентен матричному элементу обратного процесса  $(f \rightarrow 0)$ , если эти матричные элементы усреднить по величинам, которые относительно отражений времени обладают отрицательной четностью. Поэтому отношение вероятности перехода  $d\omega_{f \leftarrow 0}$  к вероятности перехода  $d\omega_{0 \leftarrow f}$ , отнесенных к единице времени и единице энергии конечных состояний, имеет вид

$$\frac{d\omega_{f \leftarrow 0}}{d\omega_{0 \leftarrow f}} = \frac{\rho_{E_f}}{\rho_{E_0}}, \quad (10.104)$$

где  $\rho_{E_0}$  и  $\rho_{E_f}$  — плотности конечных состояний соответствующих процессов, отнесенные к единице энергии.

Рассмотрим случай, когда  $0$ - и  $f$ -состояния являются состояниями системы из  $\pi^+$ -мезона и дейтрона и системы из двух протонов ( $P+P$ ) соответственно. Тогда  $d\omega_{f \leftarrow 0}$  и  $d\omega_{0 \leftarrow f}$  описывают соответственно поглощение  $\pi^+$ -мезона дейтроном и рождение  $\pi$ -мезона и дейтрона при столкновении двух протонов. Обозначая импульс и энергию протона и  $\pi$ -мезона соответственно через  $(\mathbf{p}, E_p)$  и  $(\mathbf{k}, \epsilon_k)$ , будем иметь в системе центра инерции

$$\begin{aligned} \rho_{E_f} &= \frac{2}{(2\pi)^3} p E_p d\Omega_p \\ \rho_{E_0} &= \frac{3(2S+1)}{(2\pi)^3} k \epsilon_k d\Omega_0; \end{aligned} \quad (10.105)$$

здесь  $S$  — спин  $\pi^+$ -мезона, а  $(2S+1)$  — число возможных спиновых состояний  $\pi^+$ -мезонов. Множитель 3 появляется за счет того, что дейтрон находится в  $^3S$ -состоянии; величины  $d\Omega_p$  и  $d\Omega_0$  являются малыми пространственными углами, в которые рассеиваются протоны и  $\pi^+$ -мезоны в конечных состояниях. Поэтому вероятность перехода, отнесенная к единице времени, единице пространственного угла и единице энергии дается выражением [8, 1]

$$\frac{d\omega_{f \leftarrow 0}}{d\Omega_f} \Big/ \frac{d\omega_{0 \leftarrow f}}{d\Omega_0} = \frac{2}{3} \frac{1}{(2S+1)} \frac{\rho_{E_f}}{k \epsilon_k}. \quad (10.106)$$

Сравнение (10.106) с данными эксперимента позволило заключить, что спин  $\pi^+$ -мезона равен нулю [3, 2]. Следовательно, если считать  $\pi^-$ -мезоны и  $\pi^+$ -мезоны различными зарядовыми состояниями поля, то надо считать, что спин  $\pi^-$ -мезона равен также нулю. Далее, экспериментальные данные по поглощению  $\pi^-$ -мезонов

дейтерием, по-видимому, указывают на то, что заряженные  $\pi^-$ -мезоны описываются псевдоскалярным полем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cheston W. B., Phys. Rev., **83**, 1118 (1951).
2. Clark D. L., Roberts A., Wilson R., Phys. Rev., **83**, 649 (1951).
3. Durbin R., Loar H., Steinberger J., Phys. Rev., **83**, 656 (1951).
4. Hayashi C., Prog. Theor. Phys., **10**, 533 (1953).
5. Katayama Y., Prog. Theor. Phys., **10**, 31 (1953).
6. Kinoshita T., Phys. Rev., **96**, 199 (1954).
7. Lüders G., Zs. f. Phys., **133**, 325 (1952).
8. Marshak R. E., Phys. Rev., **82**, 313 (1951).
9. Oneda S., Umezawa H., Prog. Theor. Phys., **9**, 685 (1953).
10. Pauli W., Nuovo Cimento, **10**, 648 (1953).
11. Rayski J., Acta Phys. Polonica, **11**, 109 (1952).
12. Schwinger J., Phys. Rev., **74**, 1439 (1948) (см. перевод в сборнике: Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).
13. Takahashi Y., Umezawa H., Prog. Theor. Phys., **9**, 1 (1953).
14. Tomonaga S., Prog. Theor. Phys., **1**, 27 (1946) (см. перевод в сборнике: Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).
15. Umezawa H., Prog. Theor. Phys., **7**, 551 (1952).
16. Umezawa H., Kametuchi S., Tanaka S., Prog. Theor. Phys., **12**, 383 (1954).
17. Umezawa H., Podolanski J., Oneda S., Proc. Phys. Soc., 1955.
18. Umezawa H., Takahashi Y., Prog. Theor. Phys., **9**, 501 (1953).

# Различные теоремы

## § 1. Калибровочная инвариантность

Квантовая теория поля в гейзенберговском представлении имеет форму, инвариантную относительно калибровочного преобразования (7.66). Однако если это калибровочное преобразование применить к величинам в представлении взаимодействия, то в соотношениях коммутации (8.14а) для заряженных полей появится множитель  $\exp(i e \Lambda(x) - i e \Lambda(x'))$ . Поэтому калибровочное преобразование в представлении взаимодействия можно записать в виде [5,7]

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad \square \Lambda = \theta, \\ \Psi[\sigma] &\rightarrow \Psi'[\sigma] = U^{-1}[\sigma] \Psi[\sigma], \\ U[\sigma] &= \exp \left[ -i e \int d\sigma'_\mu j_\mu(x') \Lambda(x') \right]. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Теперь можно доказать, что квантовая теория поля инвариантна относительно преобразования (11.1) [8]. Используя (10.78а), (10.82а), (10.83а) и (10.83б), имеем

$$\begin{aligned} i U^{-1}[\sigma] \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} U[\sigma] &= i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} + e \partial_\mu (j_\mu(x) \Lambda(x)) + \\ &+ \frac{i}{2} e^2 \int d\sigma'_\mu [j_\mu(x'), j_\nu(x)] \Lambda(x') \partial_\nu \Lambda(x) + \\ &+ \frac{i}{3!} e^3 \int d\sigma'_\mu \int d\sigma''_\nu [j_\rho(x''), [j_\mu(x'), j_\nu(x)]] \Lambda(x'') \Lambda(x') \partial_\nu \Lambda(x) + \dots = \\ &= i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} + e j_\mu(x) \partial_\mu \Lambda(x) - \frac{e^2}{2} \int d\sigma'_\mu \Lambda(x') \cdot \partial_\nu \Lambda(x) \times \\ &\times \partial'_\nu [j_{\rho\nu}[x':n] \cdot \partial'_\mu \Delta(x' - x)] + \frac{i}{3!} e^3 \int d\sigma''_\nu \int d\sigma'_\mu \Lambda(x'') \Lambda(x') \cdot \partial_\nu \Lambda(x) \times \\ &\times \partial'_\nu \{ [j_\rho(x''), j_{\rho\nu}[x':n]] \cdot \partial'_\mu \Delta(x' - x) \} + \dots = \end{aligned} \quad (11.2)$$

$$= i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} + e j_\mu(x) \partial_\mu \Lambda(x) + \frac{1}{2} e^2 j_{\nu\rho}[x:n] \partial_\rho \Lambda(x) \cdot \partial_\nu \Lambda(x),$$

где принята во внимание следующая общая формула:

$$\begin{aligned} & \exp[-F] \frac{\delta}{\delta \sigma} \exp[F] = \\ & = \left\{ 1 - F + \frac{1}{2} F^2 - \frac{1}{3!} F^3 + \dots \right\} \frac{\delta}{\delta \sigma} \left\{ 1 + F + \frac{1}{2} F^2 + \frac{1}{3!} F^3 + \dots \right\} = \\ & = \frac{\delta}{\delta \sigma} + G - \frac{1}{2} [A, G] + \frac{1}{3!} [A, [A, G]] - \dots, \end{aligned}$$

в которой  $G \equiv \delta F / \delta \sigma$ .

С другой стороны, используя (10.75), (10.78a), (10.83a) и (10.83б), получаем

$$\begin{aligned} U^{-1}[\sigma] H'[x:n] U[\sigma] &= -e j_{\mu}(x) A_{\mu}(x) - \frac{1}{2} e^2 j_{\mu\nu}[x:n] A_{\mu}(x) A_{\nu}(x) - \\ & - i e^2 \int_{\sigma} d\sigma'_{\mu} [j_{\mu}(x'), j_{\nu}(x)] \Lambda(x') A_{\nu}(x) - \\ & - \frac{i}{2} e^2 \int_{\sigma} d\sigma'_{\nu} [j_{\nu}(x'), j_{\mu\sigma}[x:n]] \Lambda(x') A_{\mu}(x) A_{\sigma}(x) + \dots = \\ & = -e j_{\mu}(x) A_{\mu}(x) - \frac{1}{2} e^2 j_{\mu\nu}[x:n] A_{\mu}(x) A_{\nu}(x) - e^2 j_{\mu\nu}[x:n] \partial_{\nu} \Lambda(x) \times \\ & \quad \times A_{\mu}(x) = -e j_{\mu}(x) A_{\mu}(x) - \\ & - \frac{1}{2} e^2 j_{\mu\nu}[x:n] \{A_{\mu}(x) + \partial_{\mu} \Lambda(x)\} \{A_{\nu}(x) + \partial_{\nu} \Lambda(x)\} + \\ & \quad + \frac{1}{2} e^2 j_{\mu\nu}[x:n] \partial_{\mu} \Lambda(x) \cdot \partial_{\nu} \Lambda(x). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Так как уравнение Шредингера может быть записано в виде

$$U^{-1}[\sigma] \left\{ i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} - H'[x:n] \right\} U[\sigma] \Psi'[\sigma] = 0,$$

то имеет место уравнение

$$\left\{ i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} - e j_{\mu}(x) A'_{\mu}(x) - \frac{1}{2} e^2 j_{\mu\nu}[x:n] A'_{\mu}(x) A'_{\nu}(x) \right\} \Psi'[\sigma] = 0. \quad (11.4)$$

Это уравнение и (10.75) демонстрируют инвариантность уравнения Шредингера относительно калибровочного преобразования (11.1).

Далее, используя (10.83б), имеем

$$\begin{aligned} U^{-1}[\sigma] \left[ \partial_{\mu} A_{\mu}(x) - e \int_{\sigma} d\sigma'_{\nu} j_{\nu}(x') \Delta_p(x-x') \right] U[\sigma] &= \\ &= \partial_{\mu} A_{\mu}(x) - e \int_{\sigma} d\sigma'_{\nu} j_{\nu}(x') \Delta_p(x-x') = \\ &= \partial_{\mu} A'_{\mu}(x) - e \int_{\sigma} d\sigma'_{\nu} j_{\nu}(x') \Delta_p(x-x'). \end{aligned}$$

Из этих соотношений видно, что условие Лоренца (10.87) инвариантно относительно преобразования (11.1).

## § 2. Соотношение между вещественным векторным полем $U_\mu$ и электромагнитным полем

В этом параграфе будет доказано, что квантовая теория электромагнитного взаимодействия может быть получена в качестве предельного случая ( $\kappa \rightarrow 0$ ) теории векторного взаимодействия вещественного (нейтрального) векторного поля  $U_\mu$  (с массой  $\kappa$ ) [4,8].

Взаимодействие, полученное из лагранжиана свободного заряженного поля  $Q_\alpha$ , мы будем называть векторным взаимодействием, если оно может быть введено в теорию с помощью следующей замены<sup>1)</sup>:

$$\partial_\mu Q_\alpha \rightarrow (\partial_\mu - ifU_\mu)Q_\alpha, \quad \partial_\mu Q_\alpha^* \rightarrow (\partial_\mu + ifU_\mu)Q_\alpha^* \quad (11.5)$$

здесь  $f$  — константа связи.

В отличие от равенства  $A_\mu(x) = A_\mu[x/\sigma]$ , приведенного в гл. 10, пример 2 [см. (10.70)], сейчас имеем равенство

$$U_\mu(x) = S^{-1}[\sigma] \left\{ U_\mu(x) + \frac{1}{x^2} f j_\nu(x) n_\nu(x) n_\mu(x) \right\} S[\sigma], \quad (11.6a)$$

где точка  $x$  расположена на  $\sigma$ . Действительно, (10.25) приводит к равенству

$$U_\mu(x) = U_\mu \left[ \frac{x}{\sigma} \right] - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} f \int d^4 x' J_\nu(x') [\partial_\mu \partial_\nu, \varepsilon(x-x')] \Delta(x-x'), \quad (11.6b)$$

в котором ток  $J_\mu$  определен соотношением

$$f J_\mu \equiv \frac{\partial L'}{\partial U_\mu},$$

и поэтому может быть получен с помощью (7.35a) [см. (11.5)]. Другими словами, величина  $J_\mu$  определяется формулой (7.35б) для электрического тока, но без заряда  $e$ . Поэтому  $J_\mu$  удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_\mu J_\mu(x) = 0. \quad (11.7)$$

Второй член в (11.6б) может быть вычислен с помощью соотношения

$$\begin{aligned} & [\partial_\mu \partial_\nu, \varepsilon(x-x')] \Delta(x-x') = \\ & = \partial_\mu \partial_\nu (\varepsilon(x-x') \cdot \Delta(x-x')) - \varepsilon(x-x') \partial_\mu \partial_\nu \Delta(x-x') = \\ & = \partial_\mu \partial_\nu \varepsilon(x-x') \cdot \Delta(x-x') + \partial_\nu \varepsilon(x-x') \cdot \partial_\mu \Delta(x-x') + \\ & \quad + \partial_\mu \varepsilon(x-x') \cdot \partial_\nu \Delta(x-x'), \end{aligned}$$

причем величина в правой части на основании (8.20г) равна

$$\partial_\mu \varepsilon(x-x') \cdot \partial_\nu \Delta(x-x').$$

<sup>1)</sup> В этой главе мы для обозначения величин в гейзенберговском представлении и представлении взаимодействия пользуемся соответственно жирным и светлым шрифтом.

Используя (10.19), получаем

$$U_\mu(x) = U \left[ \frac{x}{\sigma} \right] + \frac{1}{x^2} f J_\nu(x) n_\mu(x) n_\nu(x).$$

С другой стороны, тем же методом, который был использован при получении (10.78б), можно показать, что

$$S[\sigma(x)] J_\nu(x) S^{-1}[\sigma(x)] n_\nu(x) = j_\nu(x) n_\nu(x).$$

Тем самым мы доказали равенство (11.6а).

В согласии с (10.75) примем, что гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$H'[x:n] = -f j_\mu(x) U_\mu(x) - \frac{1}{2} f^2 j_{\mu\nu}[x:n] U_\mu(x) U_\nu(x) + \\ + \frac{1}{2x^2} f^2 (j_\rho(x) n_\rho(x))^2. \quad (11.8a)$$

Действительно, гамильтониан (11.8а) может быть обоснован для заряженных полей с малой величиной спина ( $S \leq 1$ ). Последний член в (11.8) появляется за счет последнего члена в (11.6а).

В формализме Штюкельберга (см. гл. 7, пример 6), в котором

$$U_\mu(x) \equiv A_\mu(x) + \frac{1}{x} \partial_\mu B(x),$$

гамильтониан (11.8а) может быть представлен в виде

$$H'[x:n] = -f j_\mu \left( A_\mu + \frac{1}{x} \partial_\mu B \right) - \\ - \frac{1}{2} f^2 j_{\mu\nu} \left( A_\mu + \frac{1}{x} \partial_\mu B \right) \left( A_\nu + \frac{1}{x} \partial_\nu B \right) + \frac{1}{2x^2} f^2 (j_\mu n_\mu)^2. \quad (11.8б)$$

Кроме того, мы имеем следующие условия:

$$\{\partial_\mu A_\mu(x) + x B(x)\} \Psi = 0 \quad (11.9)$$

[см. (7.103)].

Уравнения поля для  $A_\mu$  и  $B$  получаются из (7.102) и (11.5) и имеют вид

$$(\square - x^2) A_\mu(x) = -f J_\mu(x), \\ (\square - x^2) B(x) = -f \partial_\mu J_\mu(x) = 0.$$

С помощью (10.30) получаем

$$M(\partial) B(x) = (S[\sigma] M(\partial) B(x) S^{-1}[\sigma])_{x/\sigma}.$$

В частности,

$$B(x) = (S[\sigma] B(x) S^{-1}[\sigma])_{x/\sigma}, \quad (11.6в)$$

$$\partial_\mu B(x) = (S[\sigma] \partial_\mu B(x) S^{-1}[\sigma])_{x/\sigma} \quad (11.6г)$$

Из (10.30) и соотношений коммутации (8.60) следует [см.(10.84)]

$$A_\mu(x) = (S[\sigma] A_\mu(x) S^{-1}[\sigma])_{x/\sigma},$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\mu(x) &= (S[\sigma] \partial_\mu A_\mu(x) S^{-1}[\sigma])_{x/\sigma} + \\ &+ \frac{1}{2\kappa^2} f \int d^4x' S[\sigma] \mathbf{J}_\nu(x') S^{-1}[\sigma] [\partial_\nu, \varepsilon(x-x')] \Delta(x-x') = \\ &= (S[\sigma] \partial_\mu A_\mu(x) S^{-1}[\sigma])_{x/\sigma}, \end{aligned} \quad (11.6д)$$

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial_\mu A_\mu(x) &= (S[\sigma] \partial_\nu \partial_\mu A_\mu(x) S^{-1}[\sigma])_{x/\sigma} + \\ &+ \frac{1}{2\kappa^2} f \int d^4x' S[\sigma] \mathbf{J}'_\nu(x') S^{-1}[\sigma] [\partial_\nu \partial_\mu, \varepsilon(x-x')] \Delta(x-x') = \\ &= (S[\sigma] \partial_\nu \partial_\mu A_\mu(x) S^{-1}[\sigma])_{x/\sigma} + f \int d\sigma'_\mu j_\mu(x') \partial'_\nu \Delta(x'-x). \end{aligned} \quad (11.6е)$$

Эти соотношения будут нами использоваться при выводе условия Лоренца.

С помощью унитарного преобразования

$$\begin{aligned} \Psi[\sigma] &\rightarrow \Psi'[\sigma] = U^{-1}[\sigma] \Psi[\sigma], \\ U[\sigma] &= \exp \left\{ \frac{i}{\kappa} f \int d\sigma'_\mu j_\mu(x') B(x') \right\} \end{aligned} \quad (11.10)$$

уравнение Шредингера можно переписать следующим образом:

$$U^{-1}[\sigma] \left\{ i \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} - H'[x:n] \right\} U[\sigma] \Psi'[\sigma] = 0,$$

откуда следует

$$\left\{ i \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} - f j_\mu(x) A_\mu(x) - \frac{1}{2} f^2 j_{\mu\nu}[x:n] A_\mu(x) A_\nu(x) \right\} \Psi'[\sigma] = 0. \quad (11.11)$$

Вместо того чтобы пользоваться (11.2) и (11.3), это можно получить с помощью соотношений

$$\begin{aligned} iU^{-1}[\sigma] \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} U[\sigma] &= \left\{ i \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} - \frac{1}{\kappa} f j_\mu(x) \partial_\mu B(x) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2\kappa^2} f^2 j_{\nu\rho}[x:n] \partial_\rho B(x) \partial_\nu B(x) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2\kappa^2} f^2 \int d\sigma'_\mu j_\mu(x') j_\nu(x) [B(x'), \partial_\nu B(x)] = \\ &= \left\{ i \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} - \frac{1}{\kappa} f j_\mu(x) \partial_\mu B(x) + \frac{1}{2\kappa^2} f^2 j_{\nu\rho}[x:n] \partial_\rho B(x) \partial_\nu B(x) \right\} - \\ &- \frac{f^2}{\kappa^2} (j_\mu(x) n_\nu(x))^2 \end{aligned} \quad (11.10а)$$



и

$$\begin{aligned}
U^{-1}[\sigma]H[x:n]U[\sigma] = & \left\{ -fj_{\mu}(x) \left( A_{\mu}(x) + \frac{1}{x} \partial_{\mu} B(x) \right) - \right. \\
& - f^2 j_{\mu\nu}[x:n] \left( A_{\mu}(x) + \frac{1}{x} \partial_{\mu} B(x) \right) \left( A_{\nu}(x) + \frac{1}{x} \partial_{\nu} B(x) \right) + \\
& + \frac{1}{2x} f^2 j_{\mu\nu}[x:n] \partial_{\nu} B(x) \cdot \left( A_{\mu}(x) + \frac{1}{x} \partial_{\mu} B(x) \right) + \\
& + \frac{1}{2x} f^2 j_{\mu\nu}[x:n] \left( A_{\nu}(x) + \frac{1}{x} \partial_{\nu} B(x) \right) \partial_{\mu} B(x) \left. \right\} + \\
& + \frac{1}{2x^2} f^2 (j_{\rho}(x) n_{\rho}(x))^2 + \frac{1}{x^2} f^2 \int_{\circ} d\sigma'_{\mu} j_{\mu}(x') j_{\nu}(x) [B(x'), \partial_{\nu} B(x)] = \\
= & \left\{ -fj_{\mu}(x) \left( A_{\mu}(x) + \frac{1}{x} \partial_{\mu} B(x) \right) - \right. \\
& - \frac{1}{2} fj_{\mu\nu}[x:n] \left( A_{\mu}(x) + \frac{1}{x} \partial_{\mu} B(x) \right) \left( A_{\nu}(x) + \frac{1}{x} \partial_{\nu} B(x) \right) + \\
& + \frac{1}{2x} f^2 j_{\mu\nu}[x:n] \partial_{\nu} B(x) \cdot \left( A_{\mu}(x) + \frac{1}{x} \partial_{\mu} B(x) \right) + \\
& + \frac{1}{2x} f^2 j_{\mu\nu}[x:n] \left( A_{\nu}(x) + \frac{1}{x} \partial_{\nu} B(x) \right) \cdot \partial_{\mu} B(x) \left. \right\} - \\
& - \frac{1}{2x^2} f^2 (j_{\mu}(x) n_{\mu}(x))^2 \quad (11.106)
\end{aligned}$$

[см. (8.60)].

Члены в первых скобках в соотношениях (11.10а) и (11.10б) можно получить из (11.2) и (11.3), заменив в них величины  $\epsilon\Lambda(x)$  и  $A_{\mu}(x)$  соответственно величинами

$$\left( -\frac{f}{x} \right) B(x) \quad \text{и} \quad A_{\mu}(x) + \frac{1}{x} B(x).$$

Последние члены в (11.10а) и (11.10б) являются вкладом, связанным с операторными свойствами величин  $B(x)$  и с последним членом в (11.8б).

С другой стороны, можно показать, что

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu} A_{\mu}(x) = & \int_{\circ} d\sigma' \{ \Delta(x-x') \partial'_{\nu} \partial'_{\mu} A_{\mu}(x') - \partial'_{\mu} A_{\mu}(x') \cdot \partial'_{\nu} \Delta(x-x') \}, \\
B(x) = & \int_{\circ} d\sigma' \{ \Delta(x-x') \partial'_{\nu} B(x') - B(x') \partial'_{\nu} \Delta(x-x') \},
\end{aligned}$$

для чего можно воспользоваться тем же методом, который был использован при выводе (10.85). Тогда условия (11.9) с учетом (11.6в) — (11.6е) приводят к условию

$$[\partial_{\mu} A_{\mu}(x) + xB(x) - f \int_{\circ} d\sigma' \int_{\circ} d\sigma''_{\mu} \Delta(x-x') j_{\mu}(x') \partial''_{\nu} \Delta(x''-x')] \Psi[\sigma] = 0.$$

Таким образом, получаем

$$[\partial_\mu A_\mu(x) + \kappa B(x) - f \int_\sigma d\sigma'_\mu j_\mu(x') \Delta(x - x')] \Psi[\sigma] = 0; \quad (11.12)$$

здесь  $x$  не должно обязательно лежать на поверхности  $\sigma$ .

Мы видим, что в предельном случае  $\kappa \rightarrow 0$  (11.12) и (11.11) эквивалентны условию Лоренца (10.87) и уравнению Шредингера квантовой электродинамики. Более того, (11.11) показывает, что компонента  $B$  в представлении взаимодействия не дает никакого вклада в изменение вектора состояния.

### § 3. Векторное взаимодействие вещественного скалярного поля

Уравнение (11.11) показывает, что при  $A_\mu = 0$  вектор состояния  $\Psi[\sigma]$  постоянен. В этом случае векторное взаимодействие, рассмотренное в последнем параграфе, совпадает с взаимодействием между вещественным скалярным полем  $U (= B)$  и заряженными полями  $Q_\alpha$ , а замена (11.5) может быть записана в виде

$$\partial_\mu Q_\alpha \rightarrow \left( \partial_\mu - i \frac{f}{\kappa} \partial_\mu U \right) Q_\alpha, \quad \partial_\mu Q_\alpha^* \rightarrow \left( \partial_\mu + i \frac{f}{\kappa} \partial_\mu U \right) Q_\alpha^*. \quad (11.13)$$

Таким образом, векторное взаимодействие вещественного скалярного поля не приводит ни к каким физическим эффектам.

### § 4. Теорема эквивалентности

Относительно зарядово-независимых взаимодействий между полями  $U^{(i)} (i=1, 2, 3)$ , спин и изотопический спин которых равен соответственно 0 и 1, и дираковскими полями  $\psi$  с изотопическим спином  $1/2$  (см. гл. 7, пример 10) можно высказать приближенную теорему<sup>1)</sup>, аналогичную теореме, установленной в § 3.

Обозначим массы полей  $U^{(i)}$  и  $\psi$  соответственно через  $\kappa$  и  $\mu$ . Для векторного взаимодействия скалярного поля  $U^{(i)}$  имеем [см. (10.66)]

$$H'[x;n] = -i \left( \frac{g}{\kappa} \right) \bar{\psi}_{\gamma\mu} \tau_i \psi \partial_\mu U^{(i)} - \frac{g^2}{2\kappa^2} (\bar{\psi}_{\gamma\mu} \tau_i \psi n_\mu) (\bar{\psi}_{\gamma\rho} \tau_i \psi n_\rho). \quad (11.14)$$

Теперь можно установить следующую теорему, доказательство которой мы не приводим.

<sup>1)</sup> Приближенный характер этой теоремы связан с тем обстоятельством, что некоторые заряды бозе-поля могут превращаться в заряды дираковского поля и поэтому электрический ток дираковского поля не может удовлетворять уравнению непрерывности, которым мы пользовались в § 1, 2 и 3.

В том приближении, в котором можно пренебречь членами со степенями  $g^n$  (при  $n \geq 3$ ), векторное взаимодействие (11.14) приводит к тем же самым физическим эффектам, к которым приводит взаимодействие

$$-\sum_{(1,2,3)} \frac{i}{(2\mu)^2} g^2 \bar{\psi} \gamma_\nu \{ \tau_i (U^{(k)} \partial_\nu U^{(l)} - U^{(l)} \partial_\nu U^{(k)}) \} \psi, \quad (11.15)$$

где  $\sum_{(1,2,3)}$  означает суммирование по значкам  $(i, k, l)$ , пробегающим значения  $(1, 2, 3)$  в циклическом порядке.

В случае псевдоскалярного поля  $U^{(i)}$  мы рассматриваем псевдоскалярное (PS) и псевдовекторное (PV) взаимодействия [см. (10.69)]:

$$H' [x:n] = -i f \bar{\psi} \gamma_5 \tau_i \psi U^{(i)} \quad \text{для (PS)}, \quad (11.16)$$

$$H' [x:n] = -\frac{g}{\chi} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \tau_i \psi \partial_\mu U^{(i)} - \frac{g^2}{2\chi^2} (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \tau_i \psi n_\mu) (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\rho \tau_i \psi n_\rho) \quad \text{для (PV)}. \quad (11.17)$$

Теперь можно высказать следующую теорему.

В том приближении, в котором можно пренебречь членами со степенями  $f^n$  (при  $n \geq 3$ ), псевдоскалярное взаимодействие приводит к тем же самым физическим эффектам, к которым приводит взаимодействие

$$-\frac{i}{2\mu} f (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \tau_i \psi \partial_\mu U^{(i)}) - \frac{1}{2} \frac{1}{(2\mu)^2} f^2 (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \tau_i \psi n_\mu) (\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\rho \tau_i \psi n_\rho) + \frac{f^2}{2\mu} \bar{\psi} \psi U^{(i)} U^{(i)} + \sum_{(1,2,3)} i \frac{1}{(2\mu)^2} f^2 \bar{\psi} \gamma_\nu \{ \tau_i (U^{(k)} \partial_\nu U^{(l)} - U^{(l)} \partial_\nu U^{(k)}) \} \psi. \quad (11.18)$$

Доказательства этих теорем эквивалентности аналогичны доказательствам, проведенным в § 1, 2 и 3, т. е. с помощью унитарного преобразования, зависящего только от поверхности  $\sigma$  [2].

Теорема (11.15) показывает, что если бы  $\pi$ -мезоны описывались заряженным скалярным полем, то их векторное взаимодействие не имело бы никакого эффекта на ядерные силы в приближении, учитывающем члены  $g^2$ . С другой стороны, как это видно из (11.17) и (11.18), если  $\pi$ -мезоны описываются заряженным псевдоскалярным полем, то их псевдовекторное взаимодействие оказывает на ядерные силы тот же эффект, что и псевдоскалярное взаимодействие, константа связи которого равна  $f = -2\mu g/\chi$  [6, 3, 1]. В этих теоремах массы двух спинорных частиц (протонов и нейтронов) предполагались одинаковыми. Поэтому точность теорем эквивалент-

ности в случае взаимодействия  $\pi$ -мезонов и нуклонных полей ввиду разницы масс протона и нейтрона несколько ухудшается. Вклады в вероятность рассеяния  $\pi$ -мезона и нуклона дают третий и четвертый члены в выражении для гамильтониана (11.17).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Case K. M., Phys. Rev., 76, 14 (1949).
2. Drell S. R., Henley E. F., Phys. Rev., 88, 1053 (1952).
3. Dyson F. J., Phys. Rev., 73, 929 (1948).
4. Glauber R. J., Prog. Theor. Phys., 9, 295 (1953).
5. Koba Z., Tati T., Tomonaga S., Prog. Theor. Phys., 2, 101, 108 (1947).
6. Nelson E. C., Phys. Rev., 60, 830 (1941).
7. Schwinger J., Phys. Rev., 74, 1439 (1948) (см. перевод в сборнике: Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).
8. Umezawa H., Prog. Theor. Phys., 7, 551 (1952).

# Квантовая теория поля в гейзенберговском представлении

## § 1. Собственное поле источника

В представлении взаимодействия состояния полей представляют совокупностью свободных частиц, причем эти состояния со временем изменяются в соответствии с видом гамильтониана взаимодействия, входящего в уравнение Шредингера. В гейзенберговском представлении эффекты взаимодействия включены в величины, описывающие поля; эта особенность описания имеет место также в классической теории поля. Пользуясь этим, Гейзенберг [2] разработал теорию излучения в гейзенберговском представлении, в котором интенсивность излучения вычислялась как математическое ожидание от оператора числа фотонов. С движением электрона связано изменение электромагнитного поля вокруг электрона с течением времени. Фотоны высокой энергии излучаются и приводят к явлениям тормозного излучения, а фотоны малой энергии, которые не могут излучаться, приводят к явлениям собственного поля (т. е. поля связанных с электронами фотонов).

В данной главе мы изложим квантовую теорию поля в гейзенберговском представлении в ковариантной форме для случая произвольного поля  $Q_\alpha(x)$ . Все операторы, которыми мы будем пользоваться в этой главе, берутся в гейзенберговском представлении.

Волновые уравнения в гейзенберговском представлении имеют вид [см. (10.20a)]

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial) Q_\beta(x) = J_\alpha(x). \quad (12.1)$$

Мы будем считать, что сходящаяся волна  $Q_\alpha^{(in)}(x)$  вступает во взаимодействие в момент времени, бесконечно отдаленный в прошлое так, что

$$Q_\alpha(x) = Q_\alpha^{(in)}(x), \quad \sigma(x) = -\infty. \quad (12.2)$$

Поэтому величина  $Q_\alpha^{(in)}(x)$  удовлетворяет волновым уравнениям свободных полей

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial) Q_\beta^{(in)}(x) = 0. \quad (12.3)$$

Отсюда легко видеть, что в формулах гл. 10 операторы поля в представлении взаимодействия можно заменить операторами  $Q_\alpha^{(in)}(x)$  в гейзенберговском представлении.

Мы будем пользоваться старыми обозначениями, но с добавлением индекса (*in*) у тех величин, в которых операторы поля в представлении взаимодействия заменены операторами  $Q_\alpha^{(in)}(x)$ .

Соотношения коммутации для  $Q_\alpha^{(in)}(x)$  имеют вид

$$[Q_\alpha^{(in)}(x), Q_\beta^{(in)}(x')] = id_{\alpha\beta}(\partial) \Delta(x - x'). \quad (12.4)$$

Далее, величина  $Q_\alpha(x)$  может быть переписана следующим образом [см. (10.23)]:

$$Q_\alpha(x) = Q_\alpha^{(in)}(x) - \int d^4x' d_{\alpha\beta}(\partial) D'_\alpha \Delta^{ret}(x - x') j_{\beta;a}(x'). \quad (12.5)$$

Пользуясь унитарным оператором  $S[\sigma]$ , удовлетворяющим уравнению

$$i \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} S[\sigma] = H^{(in)}[x;n] S[\sigma], \quad (12.6)$$

мы вводим величину  $Q_\alpha[x, \sigma]$  с помощью равенства [см. (10.4a)] [7]

$$Q_\alpha[x, \sigma] = S^{-1}[\sigma] Q_\alpha^{(in)}(x) S[\sigma]. \quad (12.7)$$

Поэтому мы имеем

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial) Q_\beta[x, \sigma] = 0. \quad (12.8)$$

Соотношения коммутации для  $Q_\alpha[x, \sigma]$  даются соотношениями (10.6). Поэтому  $Q_\alpha(x)$  можно записать в виде [см. (10.25)]

$$Q_\alpha(x) = Q_\alpha \left[ \frac{x}{\sigma} \right] + \frac{1}{2} \int d^4x' \{ [D'_\alpha d_{\alpha\beta}(\partial), \varepsilon(x - x')] \Delta(x - x') \} j_{\beta;a}(x'). \quad (12.9)$$

Второй член в (12.9), зависящий только от операторов поля на поверхности  $\sigma$ , равен нулю, когда  $Q_\alpha(x)$  являются независимыми каноническими переменными [см. (10.44)]. Поэтому (12.9) можно интерпретировать следующим образом: если можно было бы сделать взаимодействие исчезающим на поверхности  $\sigma$ , то частицы, которые были связаны с источником взаимодействием, стали бы свободными частицами и их состояния описывались бы с помощью свободного поля  $Q_\alpha[x, \sigma]$ .

Ввиду того что величины  $Q_\alpha[x, \sigma]$  удовлетворяют уравнениям свободного поля, их можно разделить на части, связанные с положительными и отрицательными частотами; таким образом, можно положить

$$Q_\alpha[x, \sigma] = Q_\alpha^+[x, \sigma] + Q_\alpha^-[x, \sigma], \quad (12.10a)$$

$$Q_\alpha^{(in)}(x) = Q_\alpha^{(in)+}(x) + Q_\alpha^{(in)-}(x), \quad (12.10b)$$

$$Q_\alpha^\pm[x, \sigma] = S^{-1}[\sigma] Q_\alpha^{(in)\pm}(x) S[\sigma]. \quad (12.11)$$

Используя разложение Фурье для  $Q_{\alpha}^{\pm}[x, \sigma]$  и  $Q_{\alpha}^{(in)\pm}(x)$ , данные равенством (9.21), имеем

$$u_r^{\pm}[k, \sigma] = S^{-1}[\sigma] u_r^{(in)\pm}(k) S[\sigma]. \quad (12.12)$$

Величины  $u_r^{(in)\pm}(k_{\mu})$  можно рассматривать как операторы уничтожения и порождения частиц с энергией и импульсом  $k_{\mu}$ .

Так как вакуум  $\Phi_0$  является состоянием с наименьшей энергией, то можно получить следующее равенство [см. (9.36)]:

$$Q_{\alpha}^{+}[x, \sigma] \Phi_0[\sigma] = 0, \quad (12.13)$$

в котором

$$\Phi_0[\sigma] \equiv S[\sigma] \Phi_0.$$

На основе (9.20) можно ввести операторы числа частиц  $N_r[k, \sigma]$  свободных полей  $Q_{\alpha}^{\pm}[x, \sigma]$ . Таким образом,  $N_r[k, \sigma]$  дает число  $(k, r)$ -частиц на поверхности  $\sigma$  [5].

Если через  $N_r^{(in)}(k)$  обозначать оператор числа частиц свободных полей  $Q_{\alpha}^{(in)}(x)$ , то можно написать

$$N_r[k, \sigma] = S^{-1}[\sigma] N_r^{(in)}(k) S[\sigma], \quad (12.14a)$$

$$N_r^{(in)}(k) = u_r^{(in)*}(k) u_r^{(in)+}(k). \quad (12.14b)$$

Математическое ожидание числа  $(k, r)$ -частиц на поверхности  $\sigma$  равно

$$(N_r[k, \sigma])_{\sigma} = \Psi^* N_r[k, \sigma] \Psi = \Psi'^* [\sigma] N_r^{(in)}(k) \Psi'[\sigma], \quad (12.15)$$

где  $\Psi'[\sigma]$  [см. (10.1)] определяется соотношением

$$\Psi'[\sigma] \equiv S[\sigma] \Psi. \quad (12.16)$$

## § 2. Примеры

Прежде всего рассмотрим скалярное взаимодействие  $L' = f \bar{\psi} \psi U$  между скалярным полем  $U(x)$  и дираковским полем  $\psi(x)$ . Мы имеем

$$U[x, \sigma] = U^{(in)}(x) - f \int_{-\infty}^{\sigma} d^4 x' \Delta(x - x') \bar{\psi}(x') \psi(x'). \quad (12.17a)$$

Отсюда следует

$$U^+[x, \sigma] = U^{(in)+}(x) - f \int_{-\infty}^{\sigma} d^4 x' \Delta^+(x - x') \cdot \bar{\psi}(x') \psi(x'). \quad (12.17b)$$

Оператор числа скалярных частиц на поверхности  $\sigma$  имеет вид

$$N[\sigma] = \frac{2}{i} \int_{\sigma} (U^+[x, \sigma])^* \partial_{\mu} U^+[x, \sigma] d\sigma_{\mu}. \quad (12.18)$$

Используя (9.43), легко убедиться, что коэффициенты Фурье величины (12.18) совпадают с (12.14а).

Теперь (12.17а) можно записать в виде

$$U^+ [x, \sigma] = U^{(in)+} (x) + \frac{f}{2} \int d^3k \frac{O(k)}{K_0(K_0 - k_0)} e^{i\{K_\mu x_\mu + (K_0 - k_0)t_\sigma\}}, \quad (12.19)$$

причем  $O(k)$  — коэффициенты Фурье в разложении

$$\bar{\psi}(x) \psi(x) = \int d^4k O(k) e^{ik_\mu x_\mu}, \quad (12.20a)$$

а  $t_\sigma$  — время, характеризующее поверхность  $\sigma$ , которую мы будем считать плоской. В (12.19) величина  $K_0$  имеет значение

$$K_0 \equiv \sqrt{(k_i k_i + x^2)},$$

а четырехмерный вектор  $K_\mu$  определяется как  $K_\mu \equiv (\mathbf{k}, K_0)$ . Из (12.19) и (12.20а) очевидно, что  $k_0$  и  $\mathbf{k}$  описывают изменение энергии и импульса спинорной частицы, вызванное реакцией скалярного поля.

Если считать, что скорость  $v$  спинорной частицы, являющейся источником, заметно не меняется и  $O(k)$  можно рассматривать как  $c$ -число

$$O(k) \approx \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(k_0), \quad (12.20b)$$

то можно написать равенство

$$U^+ \left[ \frac{x}{\sigma} \right] - U^{(in)+} (x) = \frac{f}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{K_0^2} e^{ik_\mu x_i} = \frac{1}{8\pi} f \frac{1}{r} e^{-xr}, \quad (12.21)$$

в котором  $r = \sqrt{x_i x_i}$ . При выводе этого равенства была использована формула

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{ik_i x_i}}{k^2 + x^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} e^{-xr}. \quad (12.22)$$

Из (12.20а) следует, что  $\bar{\psi}(x) \psi(x) \sim \delta(x)$ , и поэтому начало координатной системы расположено в точке нахождения частицы, являющейся источником, а  $r$  — расстояние от этого начала.

Равенство (12.21) описывает собственное поле частицы, являющейся источником, т. е. описывает скалярное поле, индуцированное его взаимодействием с источником. Поэтому величина  $N[\sigma]$  дает число скалярных частиц этого собственного поля. Это собственное поле в пространстве изменяется как  $e^{-xr}/r$ , и поэтому эффективный радиус его действия равен  $a \approx (1/x)$ .



Это обстоятельство физически может быть истолковано следующим образом [6].

В силу закона сохранения энергии-импульса свободная частица не может излучать скалярные частицы. Однако в силу соотношения неопределенностей имеет место некоторая неопределенность энергии, и поэтому может иметь место излучение частиц малых энергий. Мы рассмотрим эксперимент, в котором скалярные частицы, излученные источником, поглощаются в точке  $r$ . Так как это явление происходит в течение промежутка времени  $\approx r/v$  ( $v$  — скорость скалярной частицы), то неопределенность энергии дается выражением<sup>1)</sup>

$$\Delta E \approx \frac{hv}{r} < \frac{hc}{r}. \quad (12.23)$$

Поэтому условие возможности излучения  $n$  скалярных частиц можно записать в виде

$$n\hbar c < \Delta E < \frac{\hbar c}{r},$$

или

$$r < \frac{1}{n\hbar}. \quad (12.24)$$

Таким образом, вероятность наблюдения  $n$  скалярных частиц в области  $r > (1/n\hbar)$  весьма мала. Область, в которой мы можем обнаружить по крайней мере одну скалярную частицу, определяется неравенством  $r < (1/\hbar)$ . Другими словами, область, занимаемая собственным полем, равна  $a = (1/\hbar)$ .

Из предшествующего изложения видно, что если не пользоваться приближением (12.20б), то  $n$  скалярных частиц дают члены вида  $e^{-n\mu r}$ . Далее, рождение пар приводит к появлению собственного дираковского поля частицы, являющейся источником, причем в этом поле  $m$  пар дают члены вида  $e^{-2m\mu r}$  ( $\mu$  — масса дираковской частицы). Условие (12.24) показывает, что в бесконечной близости к источнику имеется бесконечное число частиц высоких энергий, которые приводят к появлению бесконечных значений для различных физических величин (например, полной энергии, полного заряда полей и т. д.). Бесконечная энергия поля приводит к так называемой собственно энергетической расходимости. Эта проблема будет обсуждена нами в последующих главах.

Когда две дираковские частицы  $\psi(x)$  и  $\psi(x')$  приближаются друг к другу, одна из частиц  $\psi(x')$  взаимодействует со скалярным полем  $U[x'/\sigma]$ , окружающим также другую частицу  $\psi(x)$ , причем это взаимодействие описывается членом  $-f\bar{\psi}(x')\psi(x)U[x'/\sigma]$ . Как вид-

<sup>1)</sup>  $c$  — скорость света.

но из (12.21), это приводит к тому, что потенциал взаимодействия между двумя частицами имеет вид

$$V(x, x') = \frac{1}{4\pi} f^2 \frac{1}{r} e^{-\kappa r}; \quad (12.25)$$

здесь  $r$  — расстояние между  $x$  и  $x'$ . Если считать, что эти две частицы и скалярное поле являются соответственно нуклонами и полем  $\pi$ -мезонов, то  $V(x, x')$  является ядерным потенциалом.

Если аналогичные рассуждения применить к системе из двух электронов и электромагнитного поля, то формула (12.25) дает электромагнитный потенциал между двумя электронами. В последнем случае  $V(x, x')$  зависит от  $r$ , как  $1/r$ , и имеет бесконечный радиус действия, так как  $\kappa = 0$ . Это хорошо известное свойство кулоновского поля. Таким образом, собственные поля являются промежуточными для взаимодействия полями, приводящими одновременно и к трудностям с расходимостями.

Эта картина собственных полей недавно была подтверждена успешными предсказаниями квантовой электродинамики. Поэтому можно ожидать, что дальнейшие поиски наблюдаемых эффектов собственного поля будут весьма ценными в формулировке правильной теории элементарных частиц.

Подставляя (12.19) в (12.18), получаем число частиц в собственном поле в виде

$$\begin{aligned} \langle N[\sigma] \rangle &= \int d^3k N(k), \\ N(k) &= \frac{f^2}{2} \frac{1}{K_0(K_0 - k_0)^2} (O^*(k) O(k)). \end{aligned} \quad (12.26)$$

Если считать, что скорость источника остается приблизительно постоянной, то величина изменения энергии источника равна  $k_0 \approx (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^1$ .

Полученные выше результаты можно применить к квантовой электродинамике, если заменить  $O(k)$  величиной  $O_\mu(k)$ , определяемой с помощью соотношения

$$\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) = \int d^4k O_\mu(k) e^{ik_\mu x_\mu}. \quad (12.27)$$

Теперь применим эти результаты к проблеме тормозного излучения фотонов малой энергии электронами, обладающими также малой энергией. Мы будем пользоваться упрощенными методами, однако более строгие методы приводят к тем же результатам [1, 5, 4].

<sup>1)</sup> Если  $p$  — импульс падающей частицы, то

$$k_0 = \sqrt{|\mathbf{p} - \mathbf{k}|^2 + x^2} - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + x^2} \approx \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{k})}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + x^2}} \approx (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}).$$

Как показано с помощью (12.27), величина  $O_\mu$  в нерелятивистском приближении может рассматриваться как

$$O_\mu \approx v_\mu \quad (v_4 \equiv i). \quad (12.28)$$

С другой стороны, выражение (10.24) дает

$$A_\mu^+[x, \sigma] = A_\mu^{(in)+}(x) + \frac{e}{2} \int d^3k \frac{O_\mu(k)}{K_0(K_0 - k_0)} e^{i(K_\mu x_\mu + (K_0 - k_0)t_0)}. \quad (12.29)$$

Электромагнитное поле  $\Delta A_\mu^+[x, \sigma]$ , излученное электроном, представляется разностью электромагнитных полей до и после рассеяния электрона. Поэтому

$$\Delta A_\mu^+[x, \sigma] = \frac{e}{2} \int d^3k \frac{\Delta O_\mu(k)}{K_0 \{K_0 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\}} e^{i(K_\mu x_\mu - (K_0 - k_0)t_0)};$$

здесь через  $\Delta O_\mu$  обозначено изменение величины  $O_\mu$ , обусловленное рассеянием электрона.

Число фотонов электромагнитного поля определяется формулой (12.26) и равно

$$\Delta N(k_\mu) = \frac{e^2}{2} \frac{|\Delta O_\mu(k)|^2}{K_0 \{K_0 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})\}^2}. \quad (12.30)$$

Мы можем получить эффективное сечение рождения фотонов, рассматривая рождение протонов как последовательное повторение актов рождения отдельных фотонов в короткие промежутки времени, связанных с последовательными изменениями состояний электрона. Ввиду того что рождаемые фотоны имеют малую энергию, изменение состояния электрона в результате каждого отдельного акта рождения фотона является малым и может рассматриваться как процесс, независимый от изменений, связанных с другими актами излучения. Другими словами, вероятность рождения  $n$  фотонов описывается приблизительно распределением Пуассона. Поэтому, рассматривая выражение (12.30) как вероятность рождения фотона ( $k_\mu$ ), мы для вероятности рождения  $n_a$  фотонов с энергией и импульсом ( $k^a, k^a + dk^a$ ) ( $a = 1, 2, \dots$ ) получаем выражение

$$d\omega = e^{-\bar{n}} |V|^2 \prod_a \left[ \frac{1}{n_a!} (\Delta N(k^a))^{n_a} d^3k^a \right]; \quad (12.31)$$

здесь  $|V|^2$  — вероятность рассеяния электрона внешним потенциалом, а  $\bar{n}$  определяется выражением

$$\bar{n} = \int d^3k \Delta N(k). \quad (12.32)$$

Область интегрирования в (12.32) определяется законом сохранения энергии-импульса.

Выполняя в (12.31) интегрирование, получаем разумный результат, что вероятность  $\omega$  рассеяния электрона, сопровождаемого

рождением некоторого фотона, равна вероятности рассеяния электрона

$$w = |V|^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-\bar{n}} \bar{n}^n \right\} = |V|^2. \quad (12.33)$$

В гл. 13, пример 4, мы применим эти результаты при рассмотрении вопроса об „инфракрасной катастрофе“. Аналогичный метод применяется для изучения множественного рождения мезонов [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bloch F., Nordsieck A., Phys. Rev., 52, 54 (1937).
2. Heisenberg W., Ann. d. Phys., 5, 339 (1931).
3. Lewis H. W., Oppenheimer J. R., Wouthuysen S. A., Phys. Rev., 73, 127 (1948).
4. Thirring W., Touschek B., Phil. Mag., 42, 244 (1951).
5. Umezawa H., Takahashi Y., Kametuchi S., Phys. Rev., 65, 505 (1952).
6. Wick G. C., Nature, 142, 993 (1938).
7. Yang C. N., Feldman D., Phys. Rev., 79, 972 (1950).

# Теория возмущений

## § 1. Теория возмущений

Под теорией возмущений понимают такие приближенные методы, в которых изменение состояния системы выражается в виде комбинации малых изменений состояний, каждое из которых обусловлено малым эффектом возмущения, причем для сравнения с экспериментом учитываются лишь члены низшего порядка. Такими методами в физике пользуются очень широко.

Для решения уравнения Шредингера в квантовой теории поля использовались различные приближенные методы. Точное решение этого уравнения является трудной задачей, поскольку благодаря операторному характеру взаимодействия гамильтониан становится  $q$ -числом. Наиболее распространенным приближенным методом решения является теория возмущений „слабой связи“, когда система свободных полей (т. е. невозмущенная система) возмущается гамильтонианом взаимодействия  $H' [x:n]$ . Настоящая глава посвящена рассмотрению теории возмущений слабой связи в представлении взаимодействия. Эту теорию можно применять только в том случае, когда вклад от первых членов степенного ряда гамильтониана взаимодействия быстро стремится к определенному пределу. Однако могут существовать и такие взаимодействия, для которых указанное предположение и не соблюдается. Например, как показано в гл. 7, пример 11, константа связи для взаимодействия между  $\pi$ -мезонами и нуклонами, по-видимому, не достаточно мала, чтобы было выполнено указанное условие. Более того, даже в квантовой электродинамике представляется весьма странным, что результаты первых приближений теории возмущений хорошо согласуются с результатами экспериментов, потому что, как указано в примере предыдущей главы, собственные поля обуславливают появление бесконечных членов в высших приближениях теории возмущений. Причина этого странного обстоятельства будет выявлена в последующих главах.

Вектор состояния  $\Psi[\sigma]$  и математическое ожидание оператора  $F(x)$  на поверхности  $\sigma$  определяются с помощью  $S[\sigma]$ , как это показано в (10.46) и (10.48). Применяя к (10.50) метод последова-

тельных приближений, можно  $S[\sigma, \sigma']$  представить в виде

$$S[\sigma, \sigma'] = \sum_{m=0}^{\infty} S^{(m)}[\sigma, \sigma'], \quad (13.1)$$

$$S^{(0)}[\sigma, \sigma'] = 1, \quad (13.2)$$

$$S^{(m)}[\sigma, \sigma'] = (-i)^m \int_{\sigma'}^{\sigma} d^4 x_1 \int_{\sigma'}^{\sigma_1} d^4 x_2 \dots \int_{\sigma'}^{\sigma_{m-1}} d^4 x_m H'[x_1:n] \dots H'[x_m:n],$$

где  $\sigma_m$  — пространственно-подобная поверхность  $\sigma(x_m)$  (проходящая через  $x_m$ ). Соотношения (13.1) и (13.2) приводят к формуле

$$S^{-1}[\sigma(x), \sigma'] F(x) S[\sigma(x), \sigma'] = \sum_{m=0}^{\infty} (i)^m \int_{\sigma'}^{\sigma(x)} d^4 x_1 \int_{\sigma'}^{\sigma_1} d^4 x_2 \dots \int_{\sigma'}^{\sigma_{m-1}} d^4 x_m \times \quad (13.3)$$

$$\times [H'[x_m:n], [H'[x_{m-1}:n], [\dots [H'[x_1:n], F(x)]] \dots].$$

Полагая в (13.1) и (13.3)  $\sigma' = -\infty$ , получаем соответственно  $S[\sigma]$  и

$$S^{-1}[\sigma] F(x) S[\sigma].$$

Вероятность перехода  $w(f, i)$  между двумя состояниями  $\Psi_f$  и  $\Psi_i$  дается с помощью (10.49) и имеет вид

$$w(f, i) = (f | S^*[\sigma] | i) (f | S[\sigma] | i).$$

Если  $\sigma$  — плоская поверхность, характеризующая момент времени  $t$ , то вероятность перехода, отнесенная к единице времени, может быть вычислена по формуле

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w(f, i) &= \left( f \left| \frac{d}{dt} S^*[\sigma] \right| i \right) \left( f | S[\sigma] | i \right) + \\ &+ \left( f | S^*[\sigma] | i \right) \left( f \left| \frac{d}{dt} S[\sigma] \right| i \right). \end{aligned} \quad (13.4)$$

Считая, что в (13.2)  $\sigma$  является плоской поверхностью, характеризующей временем  $t$ , мы видим, что матричный элемент оператора  $S[\sigma]$  равен

$$(f | S[\sigma(t)] | i) = S(E_f, E_i) \int_{-\infty}^t e^{i(E_f - E_i)t'} dt';$$

здесь  $f$  и  $i$  — собственные состояния оператора свободной энергии  $T_0$  с собственными значениями  $E_f$  и  $E_i$ . Используя (8.30б), получаем

$$(f | S[\sigma(t)] | i) = 2\pi S(E_f, E_i) e^{i(E_f - E_i)t} \delta_-(E_f - E_i). \quad (13.5a)$$

Переходя к пределу  $t \rightarrow \infty$ , будем иметь  $S$ -матрицу

$$(f | S[\infty] | i) = 2\pi S(E_f, E_i) \delta(E_f - E_i). \quad (13.5b)$$

Формулы (13.5а) и (13.4) дают вероятность перехода из состояния  $i$  в состояние  $f$ , отнесенную к единице времени [с энергией  $E_f$  заключенной в интервале  $(E_f, E_f + \Delta E)$ ]. В самом деле

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \omega(E_f, E_i) &= 2\pi \int_{\Delta E} |S(E, E_i)|^2 \{\delta_-(E - E_i) + \delta_+(E - E_i)\} \rho_E dE = \\ &= 2\pi \int_{\Delta E} |S(E, E_i)|^2 \delta(E - E_i) \rho_E dE, \end{aligned} \quad (13.6)$$

где  $\rho_E dE$  — число состояний в интервале энергий  $(E_f, E_f + dE)$ .

Энергия возмущения  $\delta W$  системы может быть вычислена согласно соотношению

$$\delta W = (i | S^{-1}[\sigma] T_4 S[\sigma] - T_4^0 | i), \quad (13.7)$$

в котором через  $i$  обозначено невозмущенное состояние  $\Phi_i$ , являющееся собственным состоянием оператора  $T_4^0$

$$T_4^0 \Phi_i = E_i \Phi_i.$$

В следующем параграфе мы представим соотношение (13.7) в виде

$$\delta W = \sum_{m, l=0}^{\infty} \frac{1}{m+l+1} \left( i | S^{(l)*}[\sigma] \int_0^t d^l x H'[\mathbf{x}; n] S^{(m)}[\sigma] | i \right). \quad (13.8)$$

Теперь энергию возмущения можно вычислить по (13.8), используя выражение для  $S[\sigma]$ .

## § 2. Нековариантные формулы

В этом параграфе мы предположим<sup>1)</sup>, что  $\sigma_m$  является плоской поверхностью  $\sigma(t_m)$ , характеризуемой определенным временем  $t_m$ , и что взаимодействие было включено адиабатически в момент бесконечно прошедшего времени. В соответствии с последним предположением гамильтониан взаимодействия  $H'[\mathbf{x}; n]$  в (13.2) заменим на  $H'[\mathbf{x}; n] \exp(-\epsilon' |t|)$ , причем переход к пределу  $\epsilon' \rightarrow 0$  совершим в конце вычислений.

Совершая интегрирование по времени в равенстве (13.2), можно  $n$ -й член в выражении для  $S(E_f, E_i)$  записать следующим образом [см. (10.52)] [16]:

$$\begin{aligned} S^{(m)}(E_f, E_i) &= \sum_{m-1} \dots \sum_1 (f | H'[\sigma(t)] | m-1) \times \\ &\times \left[ \frac{(m-1 | H'[\sigma(t)] | m-2)}{(E_{m-1} - E_i)} \dots \frac{(1 | H'[\sigma(t)] | 1)}{(E_1 - E_i)} \right]. \end{aligned} \quad (13.9)$$

<sup>1)</sup> Таким образом,  $n_\mu$  — постоянный вектор  $(0, 0, 0, t)$ .

Выведем теперь соотношение (13.8). Из (13.3), (8.15) и (10.50) имеем

$$\begin{aligned}
 & S^{-1}[\sigma] T_4^0 S[\sigma] - T_4^0 = \\
 & = \sum_{m=1}^{\infty} i^m \int_{-\infty}^t d^4 x_1 g(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} d^4 x_2 g(t_2) \dots \int_{-\infty}^{t_{m-1}} d^4 x_m g(t_m) \times \\
 & \times [H'[x_m:n], [\dots [H'[x_1:n], T_4^0] \dots]] = \\
 & = \sum_{m=2}^{\infty} (i)^{m+1} \int_{-\infty}^t d^4 x_1 g(t_1) \dots \int_{-\infty}^{t_{m-1}} d^4 x_m g(t_m) \times \\
 & \times [H'[x_m:n], [\dots [H'[x_2:n], \partial_t H'[x_1:n]] \dots]] = \\
 & = - \int_{-\infty}^t d^4 x_1 g(t_1) S^{-1}[\sigma(t_1)] (\partial_t H'[x_1:n]) S[\sigma(t_1)] = \\
 & = -g(t) S^{-1}[\sigma(t)] H'[x:n] S[\sigma(t)] + \\
 & + \int_{-\infty}^t d^4 x_1 (\partial_t g(t_1)) S^{-1}[\sigma(t_1)] H'[x_1:n] S[\sigma(t_1)] - \\
 & - i \int_{-\infty}^t d^4 x_1 (g(t_1))^2 \int_{\sigma(t_1)} d^4 x S^{-1}[\sigma(t_1)] [H'[x_1:n], H'[x:n]] S[\sigma(t_1)],
 \end{aligned}$$

где

$$g(t) = e^{-\epsilon' |t|}, \quad \epsilon' > 0. \quad (13.10)$$

Ввиду условия интегрируемости (10.11) последний член равен нулю<sup>1)</sup>.

Таким образом, с учетом (10.32) имеем

$$S^{-1}[\sigma] T_4^0 S[\sigma] - T_4^0 = \int_{-\infty}^t d^4 x' (\partial_{t'} g(t')) S^{-1}[\sigma(t')] H'[x':n] S[\sigma(t')].$$

Так как величина  $S^{(m)}[\sigma]$  пропорциональна  $(g(t))^m$ , т. е.

$$S^{(m)}[\sigma(t)] = (g(t))^m \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} S^{(m)}[\sigma(t)],$$

<sup>1)</sup>  $\int d^3 x_1 \int d^3 x \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma(x_1)} H'[x:n] - \frac{\partial}{\partial \sigma(x)} H'[x_1:n] \right\} = 0.$



то получаем

$$\begin{aligned}
 & S^{-1}[\sigma] T_4 S[\sigma] - T_4^0 = \\
 & = \sum_{m, l=0}^{\infty} \int_{-\infty}^t d^4 x' (\partial_{\nu} g(t')) (g(t'))^{m+l} \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} (S^{(l)*}[\sigma(x')] H'[x':n] S^{(m)}[\sigma(x')]) = \\
 & = \sum_{m, l=0}^{\infty} \frac{1}{m+l+1} \int_{-\infty}^t d^4 x' \partial_{\nu} \times \\
 & \times (g(t'))^{m+l+1} \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} (S^{(l)*}[\sigma(x')] H'[x':n] S^{(m)}[\sigma(x')]) = \\
 & = \sum_{m, l=0}^{\infty} \frac{1}{m+l+1} \times \\
 & \times (g(t))^{m+l+1} \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} (S^{(l)*}[\sigma(x)] \int_{\sigma(x)} d^4 x H'[x:n] S^{(m)}[\sigma(x')]) - \\
 & - \sum_{m, l=0}^{\infty} \frac{1}{m+l+1} \int_{-\infty}^t d^4 x' (g(t'))^{m+l+1} \times \\
 & \quad \times \partial_{\nu} \left[ \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} (S^{(l)*}[\sigma(x')] H'[x':n] S^{(m)}[\sigma(x')]) \right].
 \end{aligned}$$

Однако последний член не дает вклада в величину  $\delta W$ , потому что при любом регулярном операторе  $F$  имеет место равенство

$$(i | \partial_t F | i) = (E_i - E_i) (i | F | i) = 0.$$

Таким образом, переходя к пределу  $\epsilon' \rightarrow 0$ , получаем

$$\begin{aligned}
 & (i | S^{-1}[\sigma] T_4 S[\sigma] - T_4^0 | i) = \\
 & = \sum_{m, l=0}^{\infty} \frac{1}{m+l+1} (i | S^{(l)*}[\sigma] \int_0^t d^4 x H'[x:n] S^{(m)}[\sigma] | i).
 \end{aligned}$$

Это соотношение приводит к (13.8).

Подстановка (13.9) в (13.8) приводит к

$$\begin{aligned}
 \delta W = & (i | H'[\sigma] | i) - \sum_1 \frac{(i | H'[\sigma] | 1) (1 | H'[\sigma] | i)}{E_1 - E_i} + \\
 & + \sum_1 \sum_2 \frac{(i | H'[\sigma] | 2) (2 | H'[\sigma] | 1) (1 | H'[\sigma] | i)}{(E_2 - E_i)(E_1 - E_i)} - \dots \quad (13.11)
 \end{aligned}$$

Единственными матричными элементами оператора  $H'[\sigma]$ , не равными нулю, являются матричные элементы, соответствующие состояниям с одинаковым импульсом; это обеспечивается пространственными интегрированиями. Другими словами, закон сохранения импульса имеет место даже и для виртуальных состояний. Однако закон сохранения энергии  $E_i$  для виртуальных состояний не соблюдается. Это обстоятельство является следствием принципа

неопределенности, примененного к энергии и времени. Действительно, в соотношении (13.2) величина  $S[\sigma(t)]$  представлена в виде суммы вкладов от состояний в различные моменты времени  $t'$  ( $t' < t$ ), и поэтому энергия состояния  $\Psi[\sigma(t')]$  имеет неопределенность порядка  $(2\pi\hbar/\Delta T)$ , где  $\Delta T$  — разность между временем  $t$  и временем включения возмущения. По той же самой причине необходимо учесть влияние собственных полей, как это указано в гл. 12, § 2. В самом деле, эффекты собственных полей представляются вкладами от виртуальных состояний в члены высшего порядка в разложении  $S$ -матрицы. Трудности с бесконечностями обусловлены собственными полями от этих виртуальных состояний высокой энергии. Однако, как это видно из (13.5б), неопределенность в энергии исчезает при  $t \rightarrow \infty$ .

### § 3. Ковариантная теория возмущений

В предыдущем параграфе мы рассмотрели нековариантную форму теории возмущений, чтобы выяснить некоторые детали физической картины, на которой основывается эта теория. Однако при практических вычислениях более выгодно на каждой стадии вычислений вести запись в явно ковариантной форме.

Матричный элемент оператора  $S[\sigma, -\infty]$ , связывающего состояние  $\Psi[\sigma]$  на некоторой пространственно-подобной поверхности  $\sigma$  с состоянием  $\Psi[-\infty]$ , должен иметь вид

$$\begin{aligned}
 \langle f | S[\sigma, -\infty] | i \rangle &= \Phi_0^* \{ Q_{\alpha_1}^-(k^{(1)}) \dots Q_{\alpha_{m'}}^-(k^{(m')}) \}, \\
 f(k^{(1)} \dots k^{(m')}; k^{(1)} \dots k^{(m)}) &\{ Q_{\beta_1}^+(k_{\beta_1}) \dots Q_{\beta_m}^+(k_{\beta_m}) \} \Phi_0.
 \end{aligned}
 \tag{13.12}$$

Здесь величины  $(\alpha_1 \dots \alpha_{m'})$  и  $(\beta_1 \dots \beta_m)$  характеризуют частицы (их спин, заряд и т. д.) с импульсами  $(k^{(1)} \dots k^{(m')})$  и  $(k^{(1)} \dots k^{(m)})$  соответственно в состояниях  $\Psi[\sigma]$  и  $\Psi[-\infty]$ , а  $\Phi_0$  обозначает состояние вакуума.

Разделяя  $Q_\alpha$  на части с положительными и отрицательными частотами и используя соотношения коммутации (8.14а) и (8.14б) и вакуумные математические ожидания (9.42), можно величину  $f(\dots)$  записать в виде ковариантных интегралов от произведений величин  $\Delta(x)$ ,  $\Delta^{(1)}(x)$  и их производных.

### § 4. Метод $P$ -символа

В соотношении (13.2) поверхности  $\sigma$  и  $\sigma'$  выступают несимметричным образом. С помощью  $P$ -символа, введенного Дайсоном [7], это соотношение можно записать в симметричном виде (относительно  $\sigma$  и  $\sigma'$ ).

Прежде всего введем между  $\sigma$  и  $\sigma'$  семейство  $\{\sigma_i\}$  пространственно-подобных поверхностей так, что для любой точки  $x_i$  между  $\sigma$

и  $\sigma'$  существует только одна поверхность  $\sigma'_i$ , проходящая через  $x_i$ ; далее построим функционал от величин  $F_i[x_i:n]$ , записываемый в виде

$$P[F_1[x_1:n], \dots, F_m[x_m:n]], \quad (13.13)$$

в котором  $P$ -символ означает, что величины  $F_i[x_i:n]$  в скобках расставлены по порядку времени справа налево (от прошедшего к будущему). Ввиду того что величина  $P[H'_1[x_1:n], \dots, H'_m[x_m:n]]$  симметрична относительно точек  $(x_1, \dots, x_m)$ , то интеграл

$$\int_{\sigma'}^{\sigma} dx_1 \dots \int_{\sigma'_i}^{\sigma} dx_m P[H'_1[x_1:n], \dots, H'_m[x_m:n]],$$

отвлекаясь от множителя  $m!$ , равен интегралу от величины  $[H'_1[x_1:n] \dots H'_m[x_m:n]]$  по области между  $\sigma$  и  $\sigma'$ , взятом при условии  $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_m$ .

Таким образом, выражение (13.1) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} S[\sigma, \sigma'] &= \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m \frac{1}{m!} \int_{\sigma'}^{\sigma} dx_1 \dots \int_{\sigma'_i}^{\sigma} dx_m P[H'_1(x_1:n), \dots, H'_m[x_m:n]], \end{aligned} \quad (13.14)$$

т. е. в виде, симметричном относительно  $\sigma$  и  $\sigma'$ . Тогда оператор  $S[\sigma]$  может быть получен при  $\sigma' = -\infty$ .

В задачах рассеяния собственные состояния свободных полей обычно описываются с помощью  $\Psi[\infty]$  и  $\Psi[-\infty]$ , причем принимается, что взаимодействие адиабатически включается и выключается в прошедшем и будущем. В § 2 было указано, что это предположение может быть математически записано с помощью замены константы связи  $g$  величиной  $g(t)$ , зависящей от времени. В § 2 зависимость от времени мы выбрали в виде  $g(t) = g \exp(-\epsilon' |t|)$ . Здесь для облегчения вычислений мы будем считать, что  $g(t)$  имеет вид

$$g(t) = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \frac{g}{2\epsilon'} \int_{-\epsilon'}^{\epsilon'} da e^{-iat}, \quad (13.15a)$$

$$g(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2it} \left( e^{i\frac{t}{T}} - e^{-i\frac{t}{T}} \right) \quad \left( T \equiv \frac{1}{\epsilon'} \right), \quad (13.15b)$$

причем предельный переход  $\epsilon' \rightarrow 0$  будет выполняться после всех вычислений.

Ввиду того что эта процедура обычно приводит к тому же результату, что и расчет при постоянной величине  $g$ , мы обычно будем считать  $g$  постоянной. Однако в примере 5 будет показано, что не во всех случаях величину  $g$  можно считать постоянной, а в некоторых случаях ее необходимо взять в виде (13.15a).

Но (13.15а) не является наиболее общим видом  $g(t)$ . В более общем виде можно написать

$$g(t) = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \frac{2m+1}{2\varepsilon'^{2m+1}} g \int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'} dae^{-iat} a^{2m} \quad (m \geq 0), \quad (13.15в)$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } |t| \gg T \\ g & \text{для } |t| \leq T. \end{cases} \quad (13.15г)$$

При некоторых обстоятельствах вместо (13.15а) оказывается необходимым пользоваться (13.15в) (с  $m > 0$ ).

В том случае, когда гамильтониан взаимодействия состоит из двух членов, т. е.  $H'[x:n] + V[x:n]$ , выражение (13.14) можно записать следующим образом:

$$S[\sigma, \sigma'] = \sum_{l, m=0}^{\infty} (-i)^{l+m} \frac{1}{l!m!} \int_{\sigma'}^{\sigma} dx_1 \dots \int_{\sigma'}^{\sigma} dx_{m+l} \dots \times \\ \times P[V[x_1:n], \dots, V[x_m:n], H'[x_{m+l}:n], \dots, H'[x_{m+l}:n]]. \quad (13.16)$$

Теперь каждой величине  $F^M[x:n]$  поставим в соответствие величину  $F[x:n]$  с помощью соотношения

$$F^M[x:n] \equiv S[\infty] S^{-1}[\sigma(x)] F[x:n] S[\sigma(x)] = \\ = S[\infty, \sigma(x)] F[x:n] S[\sigma(x), -\infty]. \quad (13.17)$$

Используя (13.16), получаем

$$F^M[x:n] = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{m!l!} (-i)^{l+m} \int_{\sigma(x)}^{\infty} dx_1 \dots \int_{\sigma(x)}^{\infty} dx_m \int_{-\infty}^{\sigma(x)} dx_{m+l} \dots \int_{-\infty}^{\sigma(x)} dx_{m+l} \times \\ \times P[F[x:n], H'[x_1:n], \dots, H'[x_{m+l}:n]] = (13.18) \\ = \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m \frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_m P[F[x:n], H'[x_1:n], \dots, H'[x_m:n]].$$

Соотношение

$$\Psi^*[\sigma] F[x:n] \Psi[\sigma] = \Psi^*[\infty] F^M[x:n] \Psi[-\infty] \quad (13.19)$$

показывает, что математическое ожидание величины  $F$  при заданном начальном и конечном состояниях легче вычислять как математическое ожидание величины  $F^M$ . Поскольку векторы состояния с обеих сторон величины  $F^M[x:n]$  в (13.19) принадлежат к различным представлениям, величина  $F^M[x:n]$  называется величиной в „смешанном представлении“ [7]. Отличительной чертой величин в смешанном представлении является то, что они имеют симметричный вид относительно направления времени.

Теперь приступим к вычислению (13.14). Величину (13.18) можно вычислить тем же методом. Для простоты будем считать,

что взаимодействие между полем  $U_\alpha(x)$  с целым спином и спиновым полем  $\psi_\alpha(x)$  с полуцелым спином дается гамильтонианом взаимодействия

$$H[x:n] = C(\alpha\beta\gamma) \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x) U_\gamma(x),$$

в котором  $C(\alpha\beta\gamma)$  — константы. Матрица  $S[\sigma]$  содержит член

$$H[x_1:n] \dots H[x_m:n], \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_m, \quad (13.20)$$

в котором часть операторов  $\psi_\alpha, U_\alpha$  (внешние операторы) играет роль операторов порождения для частиц в конечных состояниях и операторов уничтожения для частиц в начальных состояниях, а остальные операторы (внутренние операторы) дают вклад в величину  $f(\dots)$  в (13.12). Поскольку внутренние операторы играют роль операторов порождения и уничтожения частиц в виртуальных состояниях, то их можно сгруппировать парами, состоящими из операторов уничтожения и порождения одной и той же частицы

$$(U_\alpha^+(k), U_\beta^-(k)), (\psi_\alpha^+(k), \bar{\psi}_\beta^-(k)), (\bar{\psi}_\alpha^+(k), \psi_\beta^-(k)).$$

Эти два оператора каждой пары можно поставить рядом только в результате перестановок операторов частиц в различных состояниях. Так как эти перестановки приводят только к появлению множителя  $\epsilon (\equiv \pm 1)$  [без множителей  $C(\alpha\beta\gamma)$ ], то член (13.20) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} & \epsilon(P[U_{\alpha_1}(x_{r_1}), U_{\alpha'_1}(x_{r'_1})]_0 (P[U_{\alpha_2}(x_{r_2}), U_{\alpha'_2}(x_{r'_2})]_0 \dots \times \\ & \times (\epsilon(s_1, s'_1) P[\psi_{\beta_1}(x_{s_1}), \bar{\psi}_{\beta'_1}(x_{s'_1})]_0 \dots \times (\text{Внешние операторы}), \end{aligned} \quad (13.21)$$

где  $\epsilon(a, b)$  дается равенством

$$\epsilon(a, b) \equiv \epsilon(x_a - x_b) = \begin{cases} +1 & \text{для } \sigma(x_a) > \sigma(x_b) \\ -1 & \text{для } \sigma(x_a) < \sigma(x_b) \end{cases}. \quad (13.22)$$

Операторы с  $P$ -символом в каждой скобке в (13.21) являются парами операторов.

Как видно из (13.20), для любого внешнего оператора  $\psi(x_\alpha)$  существует оператор  $\bar{\psi}(x_\alpha)$ . Если  $\bar{\psi}(x_\alpha)$  является внутренним оператором, то существует некоторый другой оператор  $\psi(x_{\alpha'})$ , который в (13.21) расположен в тех же скобках с  $P$ -символом. Затем всегда можно найти  $\bar{\psi}(x_{\alpha'})$  и т. д. Продолжая этот процесс переходов  $x_\alpha \rightarrow x_{\alpha'} \rightarrow \dots \rightarrow x_\beta$ , придем к внешнему оператору  $\bar{\psi}(x_\beta)$ . После этого внешние операторы  $\bar{\psi}(x_\beta)$  и  $\psi(x_\alpha)$  в (13.21) можно расставить в порядке  $\bar{\psi}(x_\beta) \psi(x_\alpha)$ , учитывая при этом знак постоянной  $\epsilon$ . С другой стороны, ввиду того, что внешние операторы  $U_\alpha$  удовлетворяют соотношениям со знаком „—“, их порядок не имеет значения.

Знаковая постоянная  $\epsilon$  может быть представлена в виде<sup>1)</sup>

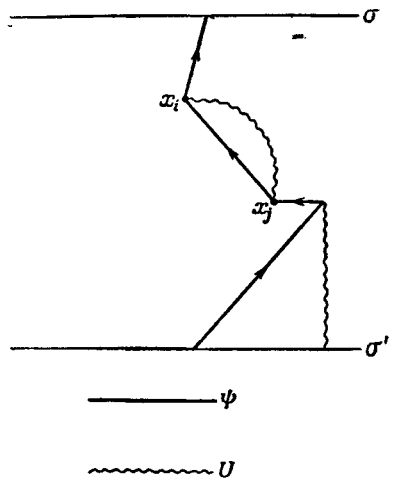
$$\epsilon = (-1)^a, \quad (13.23)$$

где  $a$  — число перестановок операторов поля  $\psi, \bar{\psi}$ , которые необходимо произвести, чтобы перейти от порядка операторов в (13.20) к порядку операторов [см. (13.21), (13.22)]<sup>2)</sup>:

$$U_{x_1}(x_{r_1}) U_{x'_1}(x_{r'_1}) \dots \phi_{\beta_1}(x_{s_1}) \bar{\psi}_{\beta'_1}(x_{s'_1}) \dots \times (\text{Внешние операторы}).$$

Здесь порядок расположения внешних операторов тот же, что и в (13.21).

Указанные выше вычисления могут быть произведены более наглядным способом с помощью диаграмм Фейнмана [11]. Как показано на фиг. 6, мы фиксируем  $m$  точек  $x_1, \dots, x_m$  между двумя линиями, соответствующими начальной и конечной поверхностям  $\sigma'$  и  $\sigma$ , и каждой линии, связывающей две точки, сопоставляем пару внутренних операторов ( $U(x_i), U(x_j)$ ) или ( $\bar{\psi}(x_i), \psi(x_j)$ ); эти линии называются внутренними линиями. Далее, с каждой линией, связывающей точку с  $\sigma'$  или  $\sigma$ , мы сопоставляем внешний оператор уничтожения или порождения частиц; эти линии называются внешними линиями. Для разных полей употребляются различные линии (например, прямые линии, жирные линии, волнистые линии и т. д.). Стрелки на линиях, соответствующих полям с полуцелым спином, направлены от  $\bar{\psi}$  к  $\psi$ . С помощью диаграмм Фейнмана вычисление (13.14) может быть выполнено с помощью следующих правил:



Фиг. 6.

I. Выписываются все возможные диаграммы Фейнмана, соответствующие данному процессу, за исключением диаграмм, содержащих замкнутые графики без внешних линий. Последние диаграммы должны быть отброшены, потому что нам необходимо вычислить вероятность перехода без учета вероятности перехода между вакуумными состояниями, а последняя вероятность перехода дается всеми диаграммами без внешних линий.

1) Постоянная  $\epsilon$  связана со знаковой постоянной  $\epsilon_1$ , введенной Дайсоном [7], соотношением  $\epsilon = (-1)^b \epsilon_1$ , где  $b$  — число внутренних линий.

2) Надо учесть соотношение

$$\epsilon(x_s, x_{s'}) P[\psi_\beta(x_s), \bar{\psi}_{\beta'}(x_{s'})] = \begin{cases} \psi_\beta(x_s) \bar{\psi}_{\beta'}(x_{s'}) & \text{для } \sigma(x_s) > \sigma(x_{s'}) \\ -\bar{\psi}_{\beta'}(x_{s'}) \psi_\beta(x_s) & \text{для } \sigma(x_s) < \sigma(x_{s'}). \end{cases}$$

II. Строятся произведения, соответствующие внутренним линиям, связывающим точки  $(x_i, x_j)$ ; эти произведения состоят из членов

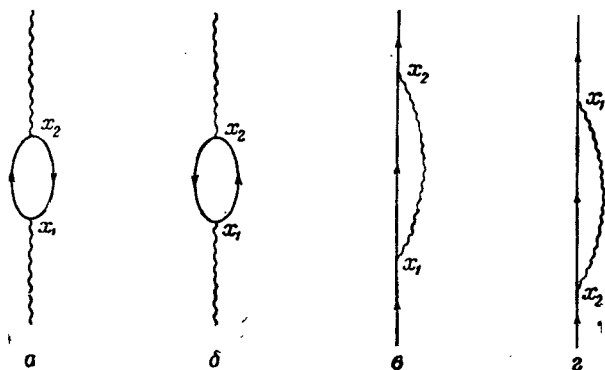
$$\begin{aligned} & (P[U_\alpha(x_i), U_{\alpha'}(x_j)])_0 && \text{для линий поля } U \\ & (\varepsilon(i, j)P[\phi_\alpha(x_i), \bar{\phi}_{\alpha'}(x_j)])_0 && \text{для линий поля } \phi \end{aligned} \quad (13.24a)$$

Когда гамильтониан взаимодействия содержит операторы производных  $D_\alpha^{(i)}$ , действующие на операторы поля  $U_\alpha(x_i)$ ,  $\phi_\alpha(x_i)$  или  $\bar{\phi}_\alpha(x_i)$ , правило (13.24a) должно быть изменено следующим образом:

$$\begin{aligned} & (P[D_\alpha^{(i)}U_\alpha(x_i), D_{\alpha'}^{(j)}U_{\alpha'}(x_j)])_0 && \text{для волнистых линий поля } U \\ & (\varepsilon(i, j)P[D_\alpha^{(i)}\phi_\alpha(x_i), D_{\alpha'}^{(j)}\bar{\phi}_{\alpha'}(x_j)])_0 && \text{для линий со стрелками поля } \phi \end{aligned} \quad (3.24б)$$

III. Строятся произведения внешних операторов  $U_\alpha, \bar{\phi}_\alpha, \phi_\alpha$  (в более общем случае  $D_\alpha U_\alpha, D_\alpha \phi_\alpha, D_\alpha \bar{\phi}_\alpha$ ), соответствующие внешним линиям.

IV. Указанные выше множители располагаются в порядке расположения точек на линиях.



Фиг. 7.

V. Производится умножение на знаковую постоянную  $\varepsilon$  и на множитель  $(-i)^m/m!$  [см. (13.14)].

VI. Берется сумма по всем диаграммам, получающимся в результате всех возможных перестановок точек  $(x_1, \dots, x_m)$  на диаграмме. Диаграммы, которые эквивалентны между собой топологически, называются эквивалентными. Например, диаграммы на фиг. 7, а и б эквивалентны между собой, а в и г не эквивалентны друг другу.

Это правило VI может быть сформулировано следующим образом: если имеется  $g$  диаграмм, эквивалентных данной (например, на фиг. 7, б  $g=2$ ), то вклад от этой диаграммы<sup>1)</sup> следует умножить на множитель  $m!/g$ .

<sup>1)</sup> Относительно определения  $g$  см. работу [5].

VII. Берется сумма всех возможных диаграмм Фейнмана, полученных без учета перестановок точек  $(x_1, \dots, x_m)$ , и проводятся интегрирования по  $(dx_1, \dots, dx_m)$ . Совокупность связанных  $\psi$ -линий (с двумя внешними линиями) называется открытым многоугольником, а диаграмма без внешних  $\psi$ -линий — замкнутой петлей. Точки  $x_1, \dots, x_m$  называются вершинами.

Можно доказать, что

$$\varepsilon = (-1)^a, \quad (13.25)$$

где  $a$  — число замкнутых петель рассматриваемых полей [см. (13.23)].

В соответствии с определением смысла  $P$ -символа мы имеем

$$\begin{aligned} (P[U_\alpha(x_1), U_\beta(x_2)])_0 &= \frac{1}{2} \{1 + \varepsilon(1,2)\} (U_\alpha(x_1) U_\beta(x_2))_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \{1 - \varepsilon(1,2)\} (U_\beta(x_2) U_\alpha(x_1))_0. \end{aligned} \quad (13.26a)$$

Тогда (8.14) и (9.42) дают

$$\begin{aligned} &(P[U_\alpha(x_1), U_\beta(x_2)])_0 = \\ &= \frac{1}{2} \{d_{\alpha\beta}(\partial^{(1)}) \Delta^{(1)}(x_1 - x_2) + i\varepsilon(1,2) d_{\alpha\beta}(\partial^{(1)}) \Delta(x_1 - x_2)\} = \\ &= \frac{1}{2} \bar{d}_{\alpha\beta}(\partial^{(1)}) \Delta_F(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (13.26b)$$

где

$$\partial^{(1)} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Аналогично имеем

$$(\varepsilon(1,2) P[\bar{\psi}_\alpha(x_1), \bar{\psi}_\beta(x_2)])_0 = \frac{1}{2} \bar{d}_{\alpha\beta}(\partial^{(1)}) \Delta_F(x_1 - x_2). \quad (13.27)$$

В (13.26b) и (13.27) оператор  $\bar{d}_{\alpha\beta}(\partial)$  является оператором  $d_{\alpha\beta}(\partial)$ , действующим на  $\Delta^{(1)}$  и  $\Delta$ , но не на величину  $\varepsilon(1,2)$ , содержащуюся в  $\Delta_F$ . Величины  $\Delta_F$  в (13.26b) и (13.27) являются  $\Delta_F$ -функциями  $U$ - и  $\psi$ -полей соответственно.

## § 5. Метод $P^*$ -символа

Вычисление  $S[\sigma]$  может быть упрощено, если воспользоваться фундаментальным условием (10.29), которому должен удовлетворять гамильтониан взаимодействия.

Для простоты рассмотрим приближение второго порядка по константе связи  $g$ . Равенство в этом приближении мы будем обо-



значать через  $\approx$ . Из (10.42), (13.14) и (13.246) следует

$$S[\sigma, \sigma'] \approx -\frac{1}{2} \int_{\sigma'}^{\sigma} d^4 x_1 \int_{\sigma'}^{\sigma} d^4 x_2 P[L'(x_1), L'(x_2)] - i \int_{\sigma'}^{\sigma} d^4 x W_{\mu\nu}(x) n_{\mu} n_{\nu}, \quad (13.28)$$

$$S[\sigma, \sigma'] = -\frac{1}{2} \int_{\sigma'}^{\sigma} d^4 x_1 \int_{\sigma'}^{\sigma} d^4 x_2 P[D_a^{(1)} Q_{\alpha}(x_1), D_b^{(2)} Q_{\beta}(x_2)] j_{\alpha;a}(x_1) j_{\beta;b}(x_2) - \\ - i \int_{\sigma'}^{\sigma} d^4 x W_{\mu\nu}(x) n_{\mu} n_{\nu}, \quad (13.29)$$

где  $D_a^{(1)}$  и  $D_b^{(2)}$  — операторы производных соответственно по  $x_1$  и  $x_2$ , определяемые с помощью (10.22a). В этом равенстве рассматривается матричный элемент оператора  $S[\sigma]$ , соответствующий процессу, в котором  $j_{\alpha;a}$  и  $j_{\beta;b}$  играют роль внешних операторов. Далее необходимо в первом члене, содержащем в скобках  $P$ -символ, произвести усреднение по вакуумному состоянию. Из (8.40б) и (13.26) получаем

$$(P[D_a^{(1)} Q_{\alpha}(x_1), D_b^{(2)} Q_{\beta}(x_2)])_0 = i D_a^{(1)} D_b^{(2)} G_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) + \\ + \frac{i}{2} [\varepsilon(1,2), d_{\alpha\beta}(\partial^{(1)}) D_a^{(1)} D_b^{(2)}] \Delta(x_1 - x_2). \quad (13.30)$$

С другой стороны, выбирая в обеих частях равенства (10.29) члены, пропорциональные  $g^2$ , и принимая во внимание (10.30), найдем

$$[Q_{\alpha}(x), W_{\mu\nu}(x')] n_{\mu}(x') n_{\nu}(x') = \\ = \frac{i}{2} d_{\alpha\beta}(\partial) D_a' \Delta(x - x') [S^{-1}[\sigma] j_{\beta;a}(x') S[\sigma] - j_{\beta;a}(x')] \approx \\ \approx \frac{i}{2} d_{\alpha\beta}(\partial) D_a' \Delta(x - x') \frac{\partial j_{\beta;a}(x')}{\partial (D_b' Q_{\beta}(x'))} \int d^4 x'' [D_b' D_c' d_{\beta\gamma}(\partial'), \\ \varepsilon(x' - x'')] \Delta(x' - x'') j_{\gamma;c}(x''). \quad (13.31)$$

Это следует из того соображения, что член, пропорциональный  $g^2$ , возникает за счет разности между  $D_b Q_{\beta}$  (в  $j_{\beta;a}$ ) и  $S^{-1}[\sigma] D_b Q_{\beta}(x) S[\sigma]$ .

Из (13.31) можно получить соотношение

$$\int d^4 x' W_{\mu\nu}(x') n_{\mu}(x') n_{\nu}(x') = \\ = -\frac{1}{4} \iint d^4 x' d^4 x'' j_{\alpha;a}(x') j_{\beta;b}(x'') [\varepsilon(x' - x''), \\ D_a' D_b' d_{\alpha\beta}(\partial')] \Delta(x' - x''), \quad (13.32)$$

если учесть равенства [см. (10.22б)]

$$\frac{\partial j_{\beta;a}}{\partial (D_b Q_{\beta})} = \frac{\partial^2 L}{\partial (D_a Q_{\beta}) \cdot \partial (D_b Q_{\beta})} = \frac{\partial j_{\beta;b}}{\partial (D_a Q_{\beta})}. \quad (13.33)$$

Подставляя (13.30) и (13.32) в (13.29), получаем соотношение, установленное Умэдзава и Такахачи,

$$S[\sigma, \sigma'] \approx -\frac{i}{2} \int_{\sigma'}^{\sigma} d^4 x_1 \int_{\sigma'}^{\sigma} d^4 x_2 j_{\alpha;a}(x_1) j_{\beta;b}(x_2) D_a^{(1)} D_b^{(2)} G_{F_{\alpha\beta}}(x_1 - x_2). \quad (13.34)$$

Отсюда мы найдем оператор  $S[\infty]$ , если подставим в (13.34)  $\sigma = \infty$  и  $\sigma' = -\infty$ . Сопоставляя (13.34) с (13.29), найдем

$$S[\infty] = \sum_{m=0}^{\infty} i^m \frac{1}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_m P^* [L'(x_1), \dots, L'(x_m)], \quad (13.35)$$

где  $P^*$ -символ приводит к тем же правилам вычисления I—VII (см. стр. 247), за исключением следующего изменения правила II:

II'. Образуются произведения функции Грина

$$iG_{F_{\alpha\alpha'}}(x_i - x_j),$$

соответствующие внутренним линиям  $(x_i, x_j)$ .

В более общем случае, как показано выражением (13.34), когда взаимодействие содержит дифференциальные операторы [см. (13.246)], величины  $P[D_a^{(i)} Q_{\alpha}(x_i), D_b^{(j)} Q_{\alpha'}(x_j)]$ , с которыми мы имели дело в методе  $P$ -символа, заменяются в методе  $P^*$ -символа величиной  $iD_a^{(i)} D_b^{(j)} G_{F_{\alpha\alpha'}}(x_i - x_j)$ .

Существенным преимуществом (13.35) является возможность вычисления  $S[\sigma]$  непосредственно из лагранжиана взаимодействия. Это дает возможность обобщения (13.35) на случаи, когда не существует канонической теории и поэтому не имеется гамильтониана взаимодействия. Следует заметить, что (13.34) не зависит явно от вида какой-либо поверхности  $\sigma_i$  между  $\sigma$  и  $\sigma'$  ( $\sigma > \sigma_i > \sigma'$ ). Это и понятно, ибо гамильтониан взаимодействия удовлетворяет условию интегрируемости [21].

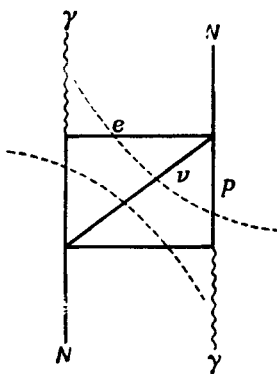
Правило II' в методе  $P^*$ -символа является как раз тем правилом, которое мы использовали в гл. 8, § 2. Распространение взаимодействия между двумя точками описывается с помощью  $G_F(x - x')$  в той формулировке каузальной („причинной“) теории, в которой начальное и конечное состояния рассматриваются симметрично. В самом деле Штюкельберг [36] получил теорию  $S$ -матрицы, эквивалентную теории Дайсона, используя каузальность. В  $S$ -матрице, определенной с помощью каузальных представлений, остается некоторая неопределенность, потому что условие каузальности определяет только порядок распространения взаимодействия между двумя точками, но не определяет его величину как функцию этих точек. Поэтому можно ожидать, что окажется возможным ввести в теорию произвольные локальные взаимодействия таким

образом, чтобы уничтожить бесконечности, связанные с собственным полем. Штюкельберг показал, что этот метод соответствует теории перенормировок, которая будет рассмотрена в следующей главе.

## § 6. Примеры

### Пример 1. Смещенный полюс и интерференционный эффект

Соотношение (8.34) показывает, что величина  $k_\mu$ , удовлетворяющая соотношению  $k_\mu k_\mu + x^2 = 0$ , приводит к появлению величины  $\delta(k_\mu k_\mu + x^2)$  в разложении Фурье для  $\Delta_F(x)$ . Соотношение  $k_\mu k_\mu + x^2 = 0$  предполагает, что  $k_\mu$  является вектором энергии-импульса свободной частицы. Например, в процессе рассеяния нейтрона ( $N$ ) и фотона ( $\gamma$ ) через промежуточные виртуальные состояния с протоном ( $P$ ), электроном ( $e$ ) и нейтрино ( $\nu$ ) (диаграмма



Фиг. 8.

Фейнмана этого процесса дана на фиг. 8) в виртуальных состояниях с учетом естественного распада нейтрона (см. гл. 6, § 5) могут появиться *свободные* протон, электрон и нейтрино. Вкладом в выражение  $S$ -матрицы от этих свободных частиц будут члены вида  $\delta(k_\mu k_\mu + x^2)$ , входящие в  $\Delta_F$ -функции, соответствующие линиям  $P$ ,  $\nu$  и  $e$ . Однако эти полюса  $\Delta_F$ -функции не приводят к трудностям с бесконечностями, потому что они смещены от действительной оси на величину  $i\epsilon'$ , как это видно в (8.35) (см. фиг. 4).

Для ясности рассмотрим простой пример процесса рассеяния (I) двух частиц (1) и (2) (с одинаковой массой  $x$ , спином, равным 0, энергией  $P_0^{(1)} = P_0^{(2)}$  и импульсами  $\mathbf{P}^{(1)} = -\mathbf{P}^{(2)}$  в системе центра инерции), в котором в промежуточном состоянии появляются две другие частицы (3) и (4) с массой  $x'$  и спином, равным 0. Если

$$P_0^{(1)} + P_0^{(2)} = 2\sqrt{(\mathbf{k}^2 + x'^2)} \geq 2x', \quad (13.36)$$

то становится возможным также и процесс (II): (1) + (2) → (3) + (4) (конечное состояние) и течение процесса (I) оказывается нарушенным процессом (II). В (13.36) величина  $\mathbf{k}$  является импульсом (в системе центра инерции) частицы (3) в конечном состоянии. Величина  $(P_0^{(1)} + P_0^{(2)})$ , при которой имеет место равенство правой и левой частей в (13.36), называется *порогом интерференции* двух конкурирующих процессов [8].

В матрице перехода для процесса (I)  $\Delta_F$ -функции частиц (3) и (4) в виртуальных состояниях приводят к следующему интегралу:

$$\lim_{\epsilon' \rightarrow 0} F(P, \epsilon') \equiv \quad (13.37)$$

$$\equiv \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int d^4 k \frac{1}{(k_u k_u + x'^2 - i\epsilon') \{ (P_0^{(1)} + P_0^{(2)} - k_p, P_0^{(1)} - P_0^{(2)} - k_p) + x'^2 - i\epsilon' \}},$$

ибо векторы энергии-импульса частиц (3) и (4) равны соответственно  $k_u$  и  $P_\mu^{(1)} + P_\mu^{(2)} - k_u$ .

Подынтегральное выражение в (13.37) имеет четыре полюса

$$k_0 = \begin{cases} \pm (\sqrt{\mathbf{k}^2 + x'^2} - i\epsilon') \equiv k_0^a(\pm) \\ P_0^{(1)} + P_0^{(2)} \pm (\sqrt{\mathbf{k}^2 + x'^2} - i\epsilon') \equiv k_0^b(\pm) \end{cases} \quad (13.38)$$

В то время как полюсы  $k_0^a(\pm)$  расположены симметрично относительно начала координат, полюсы  $k_0^b(\pm)$  при выполнении условия

$$P_0^{(1)} + P_0^{(2)} \geq \sqrt{\mathbf{k}^2 + x'^2} \quad (13.39)$$

появляются с одной и той же стороны от мнимой оси. В этом случае полюсы  $k_0^b(\pm)$  мы будем называть смещенными (фиг. 9).

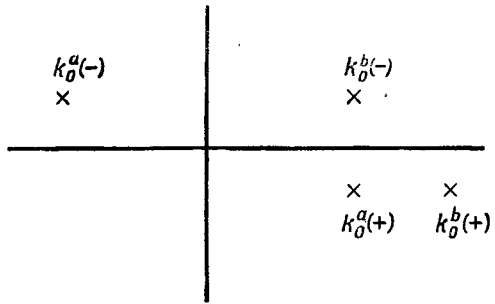
Далее заметим, что если  $\mathbf{k}$  удовлетворяет (13.36), то  $k_0^b(-)$  и  $k_0^a(+)$  расположены симметрично относительно вещественной оси. Поэтому невозможно произвести деформирование контура без пересечения этих сингулярностей. Это характерно для порога интерференции.

Значение величины  $F(P, \epsilon')$  при  $\epsilon' = 0$  мы найдем, пользуясь аналитическим продолжением величины  $F(P, \epsilon')$ , определенной при  $\epsilon' > 0$ . Тогда можно ожидать, что интерференционный эффект, связанный с процессом (II), будет непрерывно увеличиваться от нуля, так как он равен нулю при энергиях, меньших, чем порог интерференции.

Действительно, интегрирование по  $d^4 k$  в (13.37) дает величину [8]

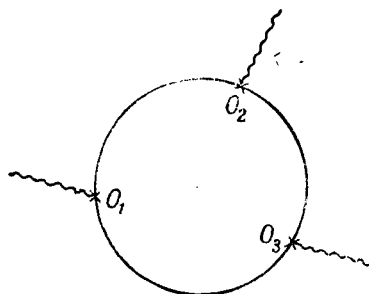
$$A(P) + B(P) \{ (P_0^{(1)} + P_0^{(2)})^2 - 4x'^2 - 4i\epsilon' \}^{1/2} \times \\ \times \ln \left\{ \frac{(P_0^{(1)} + P_0^{(2)}) + \sqrt{(P_0^{(1)} + P_0^{(2)})^2 - 4x'^2 - 4i\epsilon'}}{(P_0^{(1)} + P_0^{(2)}) - \sqrt{(P_0^{(1)} + P_0^{(2)})^2 - 4x'^2 - 4i\epsilon'}} \right\},$$

где  $A(P)$  и  $B(P)$  — аналитические функции от  $P$ . Второй член соответствует эффекту интерференции, обусловленному процессом (II), так как этот член связан с эффектом от полюсов  $k_0^b(\pm)$ . Мы



Фиг. 9.

видим, что на пороге интерференции этот член равен нулю. Второй член показывает, что на пороге интерференции интегралы, выражающие  $S$ -матрицу, имеют точки ветвления.



—  $\psi$     ~~~~~  $U$   
Фиг. 10.

### Пример 2. Теорема Фарри

Рассмотрим матричный элемент перехода, соответствующий диаграмме Фейнмана, состоящей из замкнутой петли дираковского поля  $\psi$ , взаимодействующего с полем  $U$ , имеющим целый спин (фиг. 10). Будем считать, что гамильтонианы взаимодействий в точках  $x_i (i=1, \dots, n)$  описываются соответственно выражениями  $\bar{\psi} O_i \psi U^1$ , в которых с помощью  $O_i$  обозначены произведения матриц  $\gamma_\mu$ .

Тогда матричный элемент перехода содержит множитель<sup>2)</sup>  

$$M = S_P(O_1 S_F(x_1 - x_2) O_2 S_F(x_2 - x_3) O_3 \dots O_n S_F(x_n - x_1)), \quad (13.40)$$

$$S_F(x - x') \equiv 2(\varepsilon(x - x') P[\psi(x), \bar{\psi}(x')])_0 = -(\gamma_\mu \partial_\mu - \kappa) \Delta_F(x - x'). \quad (13.41)$$

Так как шпур произведения нечетного числа матриц  $\gamma_\mu$  равен нулю, то множитель  $M$  инвариантен относительно замены  $\gamma_\mu \rightarrow -\gamma_\mu$ . При этой замене матрица  $O_i$  преобразуется в матрицу

$$\bar{O}_i = (-1)^{a_i} O_i, \quad (13.42)$$

где  $a_i$  — число матриц  $\gamma_\mu$  в выражении для  $O_i$ . Поскольку (13.41) показывает, что при замене  $\gamma_\mu \rightarrow -\gamma_\mu$  происходит замена  $S_F(x_i - x_j) \rightarrow S_F(x_j - x_i)$ , мы имеем

$$M = (-1)^A S_P(O_1 S_F(x_2 - x_1) O_2 S_F(x_3 - x_2) O_3 \dots O_n S_F(x_1 - x_n)), \quad (13.43a)$$

где

$$A \equiv \sum_{i=1}^n a_i. \quad (13.43b)$$

Используя формулу  $S_P(\gamma_i \gamma_j, \dots, \gamma_k) = S_P(\gamma_k \dots \gamma_j \gamma_i)$ , найдем  

$$M = (-1)^B S_P(S_F(x_1 - x_n) O_n \dots O_3 S_F(x_3 - x_2) O_2 S_F(x_2 - x_1) O_1); \quad (13.44)$$
 здесь  $B$  определяется с помощью равенства

$$B \equiv A + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i), \quad (13.45a)$$

<sup>1)</sup> Последующие результаты справедливы даже тогда, когда гамильтонианы взаимодействий содержат производные от  $U$ .

<sup>2)</sup> Используемая здесь величина  $S_F(x)$  эквивалентна величине  $-S_F(-x)$ , использованной Дайсоном.

в котором  $b_i$  определяются соотношением

$$O'_i = (-1)^{b_i} O_i, \quad (13.456)$$

причем  $O'_i$  является произведением матриц  $\gamma_\mu$  в порядке, противоположном тому, в каком эти матрицы следуют в выражении для  $O_i$ .

Равенство (13.44) показывает, что величина  $(-1)^B M$  равна матрице перехода  $M'$ , соответствующей диаграмме Фейнмана, полученной из фиг. 10 с помощью перестановки точек  $x_1, \dots, x_n$  в обратном порядке. Таким образом,

$$M + M' = M'((-1)^B + 1) = 0 \text{ для нечетных } B. \quad (13.46)$$

Поскольку позитронная линия получается из электронной линии простым изменением направления стрелки, то последнее равенство показывает, что при нечетных  $B$  вклады в матричный элемент от электронов и позитронов взаимно уничтожают друг друга.

Например, любая замкнутая петля, построенная из нечетного числа вершин с электромагнитным взаимодействием  $\bar{\psi} \gamma_\mu A_\mu \psi$  ( $a_i = 1$ ,  $b_i = 0$ ), не дает вклада в  $S$ -матрицу. Этот факт был установлен Фарри [14].

Используя (13.46), теорему Фарри можно обобщить следующим образом: *любая замкнутая петля, для которой  $B$  нечетно, не дает вклада в  $S$ -матрицу.*

Когда  $O_i$  являются членами  $(1, \gamma_\mu, \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu, \dots)$ , для каждого  $O_i$  имеем [(см. (3.5)]

$$a_i + b_i = \begin{cases} \text{четно} & \text{для } 1, \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5 \\ \text{нечетно} & \text{для } \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu, \gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu). \end{cases} \quad (13.47)$$

Поэтому  $B$  равно числу вершин при  $O_i = \gamma_\mu, (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$  и  $\gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$ .

В качестве примера применения этой теоремы рассмотрим определение спина  $\pi^0$ -мезона [31]. Если бы  $\pi^0$ -мезон описывался векторным полем, взаимодействующим с протоном посредством векторной связи, то на основании вышеприведенной теоремы он распадался бы не на два фотона, а на три, так как диаграмма Фейнмана процесса  $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$  дается фиг. 10 с  $O_1 = \gamma_\mu, O_2 = \gamma_\mu, O_3 = \gamma_\mu$ . Однако эксперименты показывают, что  $\pi^0$ -мезон распадается с очень коротким временем жизни на два фотона. Далее, с помощью более общих рассуждений можно доказать [45], что если бы  $\pi^0$ -мезон имел спин, равный 1, то он не мог бы распадаться на два фотона. С другой стороны, такого правила отбора для распада  $\pi^0$ -мезона со спином, равным 0, на два фотона не существует.

### Пример 3. Относительные правила отбора

Для взаимодействий между нуклоном  $\psi$  и полями  $U$  с целым спином имеют место теоремы, аналогичные теореме Фарри [13, 23, 25]. Справедливость теоремы Фарри обуславливается зарядовой

симметрией<sup>1)</sup> теории (см. гл. 7, пример 10). Однако зарядовая симметрия не может иметь места, если принять во внимание электромагнитное взаимодействие, потому что электромагнитное поле взаимодействует с протоном, но не взаимодействует с нейтроном. Поэтому приводимые в этом примере правила отбора справедливы только при пренебрежении электромагнитным взаимодействием и различием в массах протона и нейтрона. Эти правила называются относительными правилами отбора.

Здесь мы будем предполагать, что лагранжиан инвариантен относительно  $T$ -преобразования (см. гл. 7, пример 10), т. е. является зарядово-симметричным. С другой стороны, при преобразовании зарядового сопряжения дираковского поля  $\psi \rightarrow \psi' = C\bar{\psi}^T$  [см. (3.40), (3.38)] мы имеем

$$\bar{\psi}'\Omega\psi' = (C^{-1}\psi)^T\Omega C\bar{\psi}^T = -\psi^T C^{-1}\Omega C\bar{\psi}^T = \varepsilon\bar{\psi}\Omega\psi, \quad (13.48a)$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} -1 & \text{для } \Omega = \gamma_\mu, (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \gamma_5 (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu), \tau_2 \\ +1 & \text{для } \Omega = 1, \gamma_5, \gamma_\mu\gamma_5, \tau_1, \tau_3. \end{cases}$$

Преобразование зарядового сопряжения  $U \rightarrow U'$  бозе-поля определяется соотношениями<sup>2)</sup>

$$U' = U^*, \quad U'^* = U \quad (13.48б)$$

или

$$U^{(1)} = U^{(1)}, \quad U^{(2)} = -U^{(2)}, \quad (13.48в)$$

ибо при этом преобразовании электрический ток меняет свой знак [см. (7.46)].

Тогда лагранжиан взаимодействия  $g\bar{\psi}\Omega\tau_i\psi D(\partial)U_{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $D(\partial)$  — операторы дифференцирования) будет инвариантным относительно зарядового сопряжения, если знаки констант связи, относящихся к взаимодействиям с  $\Omega = \gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu, \gamma_5 (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$ , изменяются. Такие константы связи мы называем „нечетными константами связи“, а преобразование зарядового сопряжения с изменением знака констант связи называется  $C$ -преобразованием.

Далее, при  $CT$ -преобразовании (произведение  $C$ - и  $T$ -преобразований) величины  $U^{(k)}$  должны преобразовываться согласно правилу

$$U^{(k)} \rightarrow \varepsilon_k U^{(k)}, \quad (13.49a)$$

$$\varepsilon_k \equiv \begin{cases} -1 & \text{для } k = 3 \\ +1 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (13.49б)$$

[см. (7.151б)].

<sup>1)</sup> Здесь мы опускаем тензорные индексы для бозе-полей. Не следует путать зарядовую симметрию с зарядовой независимостью.

<sup>2)</sup>  $U^{(1)}$  и  $U^{(2)}$  определяются теми же соотношениями, как и (7.47).

Рассмотрим член  $S$ -матрицы перехода, соответствующий диаграмме Фейнмана заданного процесса, в котором в начальном и конечном состояниях присутствуют только частицы полей  $U^{(k)}$  с целым спином. Тогда  $S$  представляется в виде произведения констант связи и внешних операторов, состоящих из компонент поля  $U^{(k)}$  и  $G_F$ -функций<sup>1)</sup>, соответствующих внутренним операторам. Отсюда следует, что при  $CT$ -преобразовании происходит изменение  $S \rightarrow S'$ , причем

$$S' = (-1)^{n(\tau_s) + n(v) + n(t) + n(pt)} S;$$

здесь  $n(\tau_s)$ ,  $n(v)$ ,  $n(t)$  и  $n(pt)$  являются полным числом вершин (в диаграммах Фейнмана) с  $\tau_s$ ,  $\gamma_\mu$ ,  $(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$  и  $\gamma_5 (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$  соответственно. Величины  $n(v)$ ,  $n(t)$  и  $n(pt)$  появляются вследствие изменения знака нечетных констант связи, в то время как  $n(\tau_s)$  появляется за счет преобразования (13.49а).

Величины  $S$  и  $S'$  соответствуют одному и тому же процессу перехода, потому что, как это следует из (13.49а),  $U^{(1)}$  и  $U^{(2)}$  инвариантны, и поэтому зарядовые состояния бозе-полей не меняются при  $CT$ -преобразовании.

Ввиду того что в зарядово-симметричной теории лагранжиан инвариантен относительно  $CT$ -преобразования,  $S$ -матрица также должна быть инвариантной.

Таким образом, получаем следующее правило отбора:

$$S = 0 \text{ для } n(\tau_s) + n(v) + n(t) + n(pt) = \text{Нечетное число.} \quad (13.50)$$

В качестве примера рассмотрим процесс  $B^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ , в котором  $B^+$  — положительно заряженная скалярная частица со скалярным взаимодействием, а  $\pi^+$  и  $\pi^0$  — псевдоскалярные  $\pi$ -мезоны с псевдоскалярным взаимодействием; когда  $\pi^0$  описывается с помощью  $U^{(3)}$  [не с помощью  $U^{(4)}$  в (7.151б)], то, согласно (13.50), этот процесс запрещен.

Если все частицы в начальном и конечном состояниях описываются вещественными волновыми функциями  $U^{(3)}$  и  $U^{(4)}$  с целым спином, то элемент  $S^0$  в  $S$ -матрице после  $T$ -преобразования соответствует тому же самому процессу. Когда лагранжиан инвариантен относительно  $T$ -преобразования, то инвариантным должен также быть элемент  $S$ -матрицы, и мы заключаем [см. (7.151б)], что

$$S^0 = 0 \text{ для нечетного } n(\tau_s). \quad (13.51)$$

В этом случае, используя (13.50), найдем также

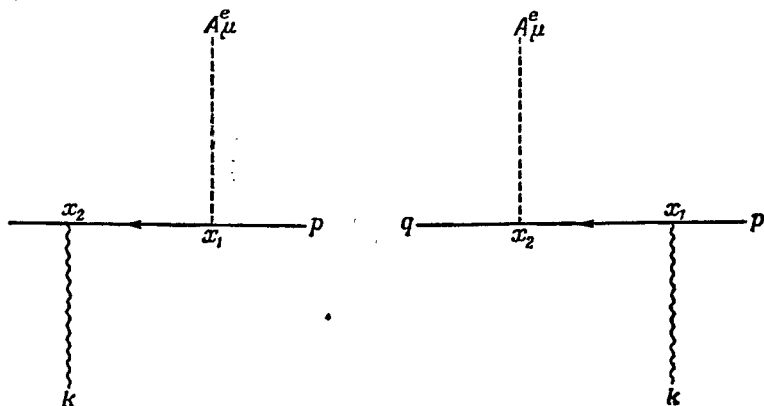
$$S^0 = 0 \text{ для } \begin{cases} n(\tau_s) = \text{Четное число} \\ n(v) + n(t) + n(pt) = \text{Нечетное число.} \end{cases} \quad (13.52)$$

<sup>1)</sup> Частицы и античастицы имеют одинаковые  $G_F$ -функции, потому что они удовлетворяют в представлении взаимодействия одним и тем же волновым уравнениям. Протон и нейтрон также имеют одну и ту же  $G_F$ -функцию, т. е. функцию  $S_F$  в приближении, когда можно пренебречь разностью их масс.



### Пример 4. Тормозное излучение и „инфракрасная катастрофа“

Сейчас мы рассмотрим тормозное излучение фотона электроном, рассеянным с помощью гамильтониана взаимодействия  $-ie\psi\gamma_\mu\bar{\psi}A_\mu^e$ , где  $A_\mu^e$  — векторный потенциал внешнего электромагнитного поля. Векторы энергии-импульса электрона в начальном и конечном состояниях будем обозначать соответственно через  $p_\mu$  и  $q_\mu$ , а фотон — с помощью  $k_\mu$  (фиг. 11).



Фиг. 11.

Член  $S^{(2)}$   $S$ -матрицы, пропорциональный  $e^2$ , имеет вид

$$S^{(2)} = \frac{e^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \bar{\psi}(x_2) \gamma_\mu S_F(x_2 - x_1) \gamma_\nu A_\nu^e(x_1) \psi(x_1) A_\mu(x_2) + \\ + \frac{e^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x_2 \bar{\psi}(x_2) \gamma_\nu A_\nu^e(x_2) S_F(x_2 - x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) A_\mu(x_1), \quad (13.53)$$

так как  $\varepsilon = 1$  и  $g = 1$ .

В этом и последующем примерах функции  $S_F$  и  $\Delta_F$  относятся соответственно к электрону и фотону. Если, как в (13.56), положить

$$(q_\mu, k_\mu | S^{(2)} | p_\mu) = 2\pi M \delta(l_0 + p_0 - q_0 - k_0),$$

то из (9.50) и (9.78) получается

$$M = \frac{ie^2}{\sqrt{2|k|} \sqrt{V^3}} a_r^*(q) \gamma_s \left\{ (\gamma \cdot e) \frac{|i(k_\mu + q_\mu, \gamma_\mu) - x|}{(k_\mu + q_\mu, k_\mu + q_\mu) + x^2 - i\epsilon'} \gamma_\nu A_\nu^e(q + k - p) + \right. \\ \left. + A_\nu^e(q + k - p) \gamma_\nu \frac{|-i(k_\mu - p_\mu, \gamma_\mu) - x|}{(p_\mu - k_\mu, p_\mu - k_\mu) + x^2 - i\epsilon'} (\gamma \cdot e) \right\} a_s(p). \quad (13.54)$$

Здесь  $A_{\mu}^e(l)$  — амплитуда Фурье функции  $A_{\mu}^e(x)$ , определенная соотношением

$$A_{\mu}^e(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{l_0} \int d^3 l A_{\mu}^e(l) \exp(i l_{\mu} x_{\mu}),$$

а  $\mathbf{e}$  — единичный вектор в направлении поляризации фотона. Символом  $\boldsymbol{\gamma}$  обозначен трехмерный вектор  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ . Вероятность перехода  $dw/dt$ , отнесенная к единице времени, дается формулой (13.6) и равна

$$\frac{dw}{dt} = 2\pi |M|^2 d\rho_f, \quad (13.55)$$

причем плотность конечных состояний  $d\rho_f$  есть

$$d\rho_f = \frac{1}{(2\pi)^6} |\mathbf{q}| |\mathbf{k}|^2 E_q d\Omega_q d\Omega_k V^2; \quad (13.56)$$

здесь  $E_q (= (\mathbf{q}^2 + \kappa^2)^{1/2})$  — энергия электрона в конечном состоянии а  $d\Omega_q$  и  $d\Omega_k$  — пространственные углы, в которые рассеиваются электрон и фотон в конечных состояниях. „Эффективное сечение“  $d\Phi$  мы определим с помощью формулы

$$d\Phi \equiv \frac{dw}{dt} \frac{V}{v}, \quad (13.57)$$

в которой  $v$  — скорость падающего электрона

$$v = \frac{|\mathbf{p}|}{E_p}, \quad E_p \equiv (\mathbf{p}^2 + \kappa^2)^{1/2}.$$

Последнее равенство показывает, что величина  $d\Phi$  не зависит от объема  $V$  большого куба периодичности и ее размерность характеризуется второй степенью длины. Говоря более образно,  $d\Phi$  есть вероятность перехода, когда один электрон в единицу времени проходит через единицу площади поверхности, потому что множитель  $d\Phi/(dw/dt)$  может быть интерпретирован как изменение нормировки волновой функции падающего электрона, заключающееся в том, что один электрон должен находиться не в объеме  $V$ , а в объеме  $v$ , так что один электрон должен пересекать поверхность единичной площади в единицу времени.

Интегрируя (13.57) по  $d\Omega_k$ , получаем эффективное сечение  $\Phi_k dk$  излучения фотона с энергией  $k$ . Потеря энергии  $(-dE_p/dx)$  электроном на тормозное излучение, отнесенная к единице длины, происходящая в кулоновском поле ядер вещества, через которое проходит электрон, дается выражением

$$N \int_0^{E_p - \kappa} k \Phi_k dk.$$

Здесь мы предполагаем, что электрон движется в направлении

оси  $x$ . Верхний предел интегрирования  $E_p - x$  определяется максимальной энергией излученного фотона, определяемой из закона сохранения энергии;  $N$  — число атомов, приходящихся на единицу объема. Для электронов очень больших энергий, проходящих через вещество с атомным номером  $Z$ , мы имеем [16]

$$\Phi_k = \frac{2Z^2}{137} \left( \frac{e^2}{x} \right)^2 \frac{E_q}{k} \left\{ \frac{E_p^2 + E_q^2}{E_p E_q} - \frac{2}{3} \right\} \left\{ 2 \ln \frac{2E_p E_q}{xk} - 1 \right\}$$

и

$$-\frac{dE_p}{dx} = 4NE_p \left( \ln \frac{2E_p}{x} - \frac{1}{3} \right) \frac{Z^2}{137} \left( \frac{e^2}{x} \right)^2.$$

Этот теоретический расчет тормозного излучения успешно предвосхитил результаты экспериментального изучения этого вопроса для электронов высоких энергий. В частности, явление каскадных ливней в космических лучах, которое первоначально, казалось, указывало на неудачу квантовой электродинамики при применении к электронам высоких энергий, было теоретически объяснено с помощью представления о повторном рождении тормозных фотонов с последующим образованием фотонами пар (т. е. с помощью каскадной теории) [4,2]. Тем не менее в предыдущих главах мы видели, что квантовая электродинамика обладает серьезными дефектами, связанными с появлением бесконечностей. Анализ этих трудностей мы проведем при рассмотрении „инфракрасной катастрофы“.

Когда энергия  $k$  фотона бесконечно мала, выражение (13.54) может быть представлено в виде

$$M \approx - \frac{e^2}{\sqrt{2|k|V^3}} (a_r^*(q) \gamma_4 \gamma_\nu A_\nu^e(q+k-p) a_s(p)) \left( \frac{q}{q_\mu k_\mu} - \frac{p}{p_\mu k_\mu}, e \right). \quad (13.58a)$$

Это равенство получено с помощью формул [см. (3.33), (3.1)]

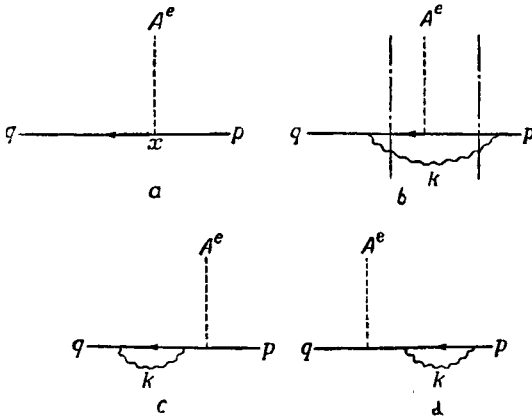
$$\begin{aligned} a_r^*(q) \gamma_4 (iq_\mu \gamma_\mu + x) &= 0, \\ (ip_\mu \gamma_\mu + x) a_s(p) &= 0, \\ q_\mu q_\mu = p_\mu p_\mu &= -x^2. \end{aligned}$$

Для  $\gamma$ -матриц были использованы соотношения коммутации (3.2). Подставляя (13.58a) в (13.55) и интегрируя по  $dk$ , мы получаем в выражении для вероятности перехода множитель  $\int dk/k$ . Этот множитель показывает, что вероятность перехода при бесконечно малых  $k$  имеет логарифмическую расходимость. Это явление называется „инфракрасной катастрофой“.

Однако было бы преждевременным заключить отсюда, что „инфракрасная катастрофа“ представляет собой трудность, свойственную квантовой теории поля, потому что упругое рассеяние

электрона может конкурировать с тормозным излучением фотона нулевой энергии.

Диаграммы Фейнмана упругого рассеяния в  $e^2$ -приближении изображены в виде диаграмм (a) — (d) на фиг. 12. Виртуальное состояние, обозначенное на фиг. 12, b с помощью штрих-пунктирной линии, имеет ту же энергию, что и начальное состояние,



Фиг. 12.

когда  $k=0$ . Поэтому это упругое рассеяние конкурирует с тормозным излучением фотонов нулевой энергии, которое наблюдается так же, как упругое рассеяние. Обозначая матричные элементы  $S$ -матрицы, соответствующие диаграммам Фейнмана [(a) — (d) фиг. 12], через  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$  и  $M_d$ , можно вероятность перехода  $d\omega/dt$  при упругом рассеянии представить в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = 2\pi \{ |M_a + M_b + M_c + M_d|^2 + |M_1 + M_2|^2 \}; \quad (13.59)$$

здесь  $M_1$  и  $M_2$  — вклады, обусловленные соответственно первой и второй диаграммами на фиг. 11:

$$\lim_{k \rightarrow 0} M = M_1 + M_2.$$

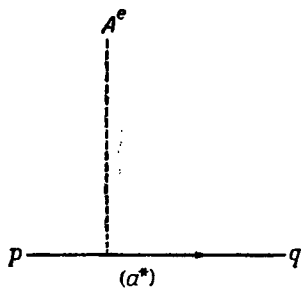
Другими словами,

$$M_1 = - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^2}{\sqrt{2|k|V^3}} (a_r^*(q) \gamma_4 \gamma_\nu A_\nu^e(q+k-p) a_s(p)) \frac{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{e})}{q_\mu k_\mu}, \quad (13.58a)$$

$$M_2 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^2}{\sqrt{2|k|V^3}} (a_r^*(q) \gamma_4 \gamma_\nu A_\nu^e(q+k-p) a_s(p)) \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{e})}{p_\mu k_\mu}. \quad (13.58b)$$

Как показывается с помощью фиг. 14, члены  $M_a^* M_b$ ,  $M_a^* M_c$  и т. д. в (13.59) могут быть записаны путем соединения графиков (b) и ( $a^*$ ), (c) и ( $a^*$ ) и т. д. Символы ( $a^*$ ), ( $b^*$ ), ... означают, что

эти диаграммы являются зеркальными отражениями соответственно диаграмм (a), (b), ..., при которых направления вправо меняются на направление влево, и наоборот. В качестве примера на фиг. 13 приведена диаграмма ( $a^*$ ). Каждая штрих-пунктирная линия на фиг. 14 указывает соединение точек связи двух диаграмм по способу, приведенному под каждой соответствующей диаграммой.



Фиг. 13.

Можно показать, что все диаграммы фиг. 14 (с фотонной линией нулевой энергии) дают конечные добавки в  $d\omega/dt$ , так что „инфракрасная катастрофа“ исчезает. Этот факт следует отнести за счет простого соотношения [17, 19, 1]. В качестве примера рассмотрим член ( $M_a^* M_b$ ), соответствующий первой диаграмме на фиг. 14. Последовательность членов ( $M_1^* M_2$ ) в части диаграммы, обозначенной через  $M_b$ , показывает, что в  $M_b$  содержатся виртуальные состояния той же самой энергии, что и начальное состояние. Сингулярный член в  $M_a^* M_b$  (при  $k=0$ ), обусловленный вышеуказанными виртуальными состояниями, мы обозначим через  $\omega_{M_a^* M_b}^*$  ( $M_1^* M_2$ ). Аналогично показывается, что на той же диаграмме член  $M_1^* M_2$  является сингулярным (при  $k=0$ ) ввиду виртуальных состояний, содержащихся в последовательности  $M_a^* M_b$ . Этот сингулярный член мы будем обозначать через  $\omega_{M_1^* M_2}^*$  ( $M_a^* M_b$ ). Непосредственным прямым подсчетом можно показать, что

$$\omega_{M_a^* M_b}^* (M_1^* M_2) = \omega_{M_1^* M_2}^* (M_a^* M_b) = 0. \quad (13.60)$$

В самом деле элемент  $S$ -матрицы, соответствующий диаграмме (b) на фиг. 12, имеет вид

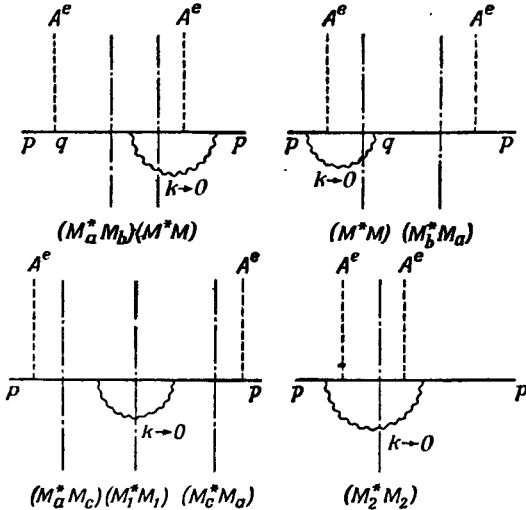
$$-\frac{e^3}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_1 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x_3 \bar{\psi}(x_3) \gamma_\rho S_F(x_3 - x_2) \gamma_\nu A_\nu^e(x_2) \times \\ \times S_F(x_2 - x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) (P[A_\rho(x_3), A_\mu(x_1)])_0.$$

Вклад в величину  $(P[A_\rho(x_3), A_\mu(x_1)])_0$  от фотонов нулевой энергии вычисляется с помощью равенства

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\delta_{\rho\mu}}{2kV} \left\{ \frac{1 + \varepsilon(x_3 - x_1)}{2} e^{i(k, x_3 - x_1)} + \frac{1 - \varepsilon(x_3 - x_1)}{2} e^{i(k, x_1 - x_3)} \right\} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\delta_{\rho\mu}}{2kV}$$

[см. (13.26a)]. Поэтому сингулярный член в  $M_b$ , обусловленный фотоном нулевой энергии, записывается в виде

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^3}{2kV} a_r^*(q) \gamma_4 \gamma_\nu \frac{\{i(q_\mu - k_\mu, \gamma_\mu) - x\}}{(q_\mu - k_\mu, q_\mu - k_\mu) + x^2 - i\epsilon'} \gamma_\nu A_\nu^e(q-p) \times \\ & \times \frac{\{-i(k_\mu - p_\mu, \gamma_\mu) - x\}}{(p_\mu - k_\mu, p_\mu - k_\mu) + x^2 - i\epsilon'} \gamma_\mu a_s(p) = \\ & = - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^3}{2|k|V} (a_r^*(q) \gamma_4 \gamma_\nu A_\nu^e(q-p) a_s(p)) \frac{(q \cdot e)}{(q_\mu k_\mu)} \cdot \frac{(p \cdot e)}{(p_\mu k_\mu)} = \\ & = - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{e}{V \sqrt{2|k|V}} \frac{(q \cdot e)}{(q_\mu k_\mu)} M_2. \end{aligned}$$



Фиг. 14.

С другой стороны, из фиг. 12 очевидно, что

$$M_a = -e a_r^*(q) \gamma_4 \gamma_\nu A_\nu^e(q-p) a_s(p).$$

Таким образом, вклад в  $M_a^* M_b$  от фотонов нулевой энергии дается величиной

$$\omega_{M_a^* M_b} (M_1^* M_2) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{(q \cdot e)}{(q_\mu k_\mu)} \frac{e^2}{V \sqrt{2|k|V}} (a_r^*(q) \gamma_4 \gamma_\nu A_\nu^e(q-p) a_s(p))^* M_2.$$

Эта величина равна  $-M_1^* M_2$ , и поэтому имеет место равенство (13.60). Аналогичное положение имеет место для каждой из диаграмм фиг. 13.

Таким образом, мы видим, что „инфракрасная катастрофа“ оказывается устраненной, если учесть вклады от диаграмм, показанных на фиг. 12.

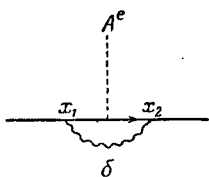
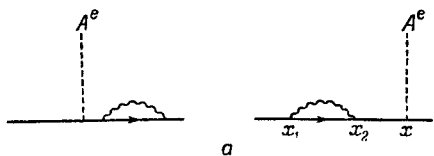
Эта ситуация интуитивно вытекает из (12.31) (стр. 236). Поскольку, как это видно из (12.30) и (12.32), при  $k \rightarrow 0$  число  $\bar{n}$  (т. е. число фотонов с бесконечно малой энергией) логарифмически

расходится, из (12.31) следует, что вероятность конечного числа фотонов нулевой энергии равна нулю и, следовательно, „инфракрасная катастрофа“ исчезает. Ввиду того что, согласно (12.33), вероятность рассеяния излучающего электрона не равна нулю, рассеиваемый электрон должен испускать бесконечное число фотонов бесконечно малой энергии. Это доказательство исчезновения „инфракрасной катастрофы“ было дано Блохом и Нордсиком [3].

Следовательно, мы видим, что учет эффектов собственного поля приводит к устранению „инфракрасной катастрофы“. Однако собственное поле содержит в себе много фотонов высоких энергий, которые приводят часто к трудностям с бесконечностями, о которых говорилось в предыдущей главе. Эти последние бесконечности называются „ультрафиолетовой катастрофой“. Если бы мы устранили эти бесконечности простым игнорированием эффектов собственного поля, то мы бы столкнулись с „инфракрасной катастрофой“. Поэтому очевидно, что надо искать какой-то другой выход.

### Пример 5. „Ультрафиолетовая катастрофа“

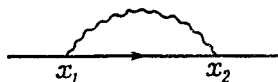
В последнем примере мы рассмотрели только эффекты от фотонов малых энергий собственного поля. Теперь мы рассмотрим вклад в упругое рассеяние электрона внешним электромагнитным



Фиг. 15.

полем  $A_\mu^e(x)$  в  $e^3$ -приближении от всех фотонов собственного поля. Диаграммы Фейнмана этого процесса показаны на фиг. 15.

Прежде всего рассмотрим диаграмму Фейнмана, изображенную на фиг. 16, причем будем считать, что



Фиг. 16.

операторы  $\bar{\psi}(x_2)$  и  $\psi(x_1)$ , соответствующие внешним линиям, не всегда удовлетворяют волновым уравнениям свободного электрона [(3.1) и (3.33)].

Диаграмма, изображенная на фиг. 16, приводит к следующему члену в  $S$ -матрице:

$$\int d^4x \bar{\psi}(x) \Sigma^0 \psi(x) = \\ = \frac{e^2}{4} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \bar{\psi}(x_2) \gamma_\mu S_F(x_2 - x_1) \gamma_\mu \psi(x_1) \Delta_F(x_2 - x_1). \quad (13.61a)$$

Выполняя фактически вычисление и пользуясь двумя бесконечными постоянными  $A^0$  и  $B^0$ , можно представить  $\Sigma^0$  в виде

$$\Sigma^0 = -i \{ A^0 + B^0 (\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa) + \dots \}, \quad (13.62)$$

где (...) означает конечные члены, содержащие множитель  $(\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa)^2$ . Это равенство можно рассматривать как разложение в ряд по степеням  $(i\gamma_\mu p_\mu + \kappa)$  ( $p_\mu$  — вектор энергии-импульса электрона) в импульсном представлении. Мы сейчас покажем, что бесконечности, привносимые каждой из диаграмм, могут появляться только в виде коэффициентов при низших степенях  $(i\gamma_\mu p_\mu + \kappa)$ . Это имеет место потому, что увеличение степени  $(i\gamma_\mu p_\mu + \kappa)$  на единицу означает, что степень  $n$  размерности  $[L]^n$  коэффициента возрастает на единицу, и поэтому порядок бесконечности коэффициента уменьшается на единицу. Это положение можно отчетливо проследить следующим образом: подставляя (13.41) и (8.35) в (13.61a), получаем

$$\begin{aligned} & \int d^4 x \bar{\psi}(x) \Sigma^0 \psi(x) = \\ & = \frac{e^2}{(2\pi)^8} \int d^4 p \int d^4 k \bar{\psi}(-p) \gamma_p \frac{i(\gamma_\mu p_\mu - k_\mu) - \kappa}{\{(p_\mu - k_\mu)^2 p_\mu - k_\mu\} + \kappa^2 - i\epsilon'} \times \\ & \quad \times \frac{1}{(k_\mu k_\mu - i\epsilon')} \gamma_0 \psi(p); \end{aligned} \quad (13.61б)$$

здесь  $\bar{\psi}(p)$  и  $\psi(p)$  — амплитуды Фурье функций  $\bar{\psi}(x)$  и  $\psi(x)$ , определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \psi(p) e^{ip_\mu x_\mu}, \\ \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \bar{\psi}(p) e^{-ip_\mu x_\mu}. \end{aligned}$$

Интеграция по  $\int d^4 k$  в (13.61б) приводит к бесконечным коэффициентам в (13.62). Подынтегральное выражение в (13.61б) является функцией от  $p_\mu - k_\mu$  и  $k_\mu$ . Легко видеть, что каждое дифференцирование  $d/dp$ , применяемое к (13.61б), снижает максимальный порядок бесконечности на единицу. Так как наивысшие степени величины  $k_\mu$  в числителе и знаменателе подынтегрального выражения в (13.61б) равны 1 и 4 соответственно, то порядок бесконечности в  $A^0$  не может быть больше 1. Таким образом, бесконечность в  $B^0$  имеет самое большее логарифмический характер, а оставшиеся члены в (13.62), обозначенные (...), конечны.

Теперь перепишем (13.61б) в форме (13.62). Пользуясь формулой

$$a^{-1} b^{-1} = \int_0^1 du (au + b(1-u))^{-2},$$



будем иметь

$$\begin{aligned} & \int d^4 k \frac{f(k)}{\{p_\mu - k_\mu, p_\mu - k_\mu\} + x^2 - i\epsilon'} \frac{1}{\{k_\mu k_\mu - i\epsilon'\}} = \\ &= \int d^4 k \int_0^1 du \frac{f(k)}{\{k_\mu k_\mu - 2up_\mu k_\mu + up_\mu p_\mu + ux^2 - i\epsilon'\}^2} = \\ &= \int d^4 l \int_0^1 du \frac{f(l + up)}{\{l_\mu l_\mu + u(1-u)p_\mu p_\mu + ux^2 - i\epsilon'\}^2}, \end{aligned}$$

где

$$l_\mu = k_\mu - up_\mu.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \int d^4 x \bar{\phi}(x) \Sigma^0 \phi(x) = \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int_0^1 du \int d^4 p \int d^4 l \bar{\phi}(-p) \gamma_\rho \frac{\{-i(1-u)(\gamma_\nu p_\nu) + i(\gamma_\nu l_\nu) - x\}}{\{l_\mu l_\mu + u(1-u)p_\mu p_\mu + ux^2 - i\epsilon'\}^2} \gamma_\rho \phi(p) = \\ &= \frac{e^2}{(2\pi)^3} \int_0^1 du \int d^4 p \int d^4 l \bar{\psi}(-p) \gamma_\rho \frac{\{-i(1-u)(\gamma_\nu p_\nu) - x\}}{\{l_\mu l_\mu - u(1-u)p_\mu p_\mu + ux^2 - i\epsilon'\}^2} \gamma_\rho \psi(p). \end{aligned} \quad (13.61в)$$

Теперь запишем равенства

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\{l_\mu l_\mu + u(1-u)p_\mu p_\mu + ux^2 - i\epsilon'\}^2} = \\ &= \frac{1}{(l_\mu l_\mu + u^2 x^2 - i\epsilon')^2} - 2 \frac{u(1-u)}{\{l_\mu l_\mu + u^2 x^2 - i\epsilon'\}^3} (p_\mu p_\mu + x^2) + \dots = \\ &= \frac{1}{\{l_\mu l_\mu + u^2 x^2 - i\epsilon'\}^2} - 4x \frac{u(1-u)}{\{l_\mu l_\mu + u^2 x^2 - i\epsilon'\}^3} (i\gamma_\nu p_\nu + x) + \dots \end{aligned}$$

Так как

$$\gamma_\rho \{i(1-u)(\gamma_\nu p_\nu) - u\} \gamma_\rho = -2(1-u)(i\gamma_\nu p_\nu + x) - 2(1+u)x,$$

то можно написать

$$\begin{aligned} & \gamma_\rho \frac{\{-i(1-u)(\gamma_\nu p_\nu) - x\}}{\{l_\mu l_\mu + u(1-u)p_\mu p_\mu + ux^2 - i\epsilon'\}^2} \gamma_\rho = - \frac{2(1+u)x}{\{l_\mu l_\mu + u^2 x^2 - i\epsilon'\}^2} + \\ &+ \left[ \frac{-2(1-u)}{\{l_\mu l_\mu + u^2 x^2 - i\epsilon'\}^2} + 8x^2 \frac{u(1-u^2)}{\{l_\mu l_\mu + u^2 x^2 - i\epsilon'\}^3} \right] (i\gamma_\nu p_\nu + x) + \dots \end{aligned}$$

Подставляя это равенство в (13.61в), получаем (13.62), в котором

$$A^0 = \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 du \int d^4 l \frac{2(1+u)u}{\{l_\mu l_\mu + u^2 x^2 - i\epsilon'\}^2}. \quad (13.61г)$$

Для вычисления этого интеграла удобно воспользоваться формулами

$$\begin{aligned} \int d^4l \frac{1}{\{l_\mu l_\mu + u^2 x^2 - i\epsilon'\}^2} &= \int d^3l \int dl_0 \frac{1}{\{l_0^2 - l^2 - u^2 x^2 + i\epsilon'\}^2} = \\ &= 2\pi^2 i \int_0^\infty dl l^2 \frac{1}{(l^2 + u^2 x^2)^{3/2}}, \quad (l \equiv |l|), \\ \int d^4l \frac{1}{\{l_\mu l_\mu + u^2 x^2 - i\epsilon'\}^3} &= -\frac{3\pi^2 i}{2} \int_0^\infty dl l^2 \frac{1}{(l^2 + u^2 x^2)^{5/2}}. \end{aligned}$$

Эти формулы получаются с помощью подсчета вычетов подынтегрального выражения в полюсах  $l_0 = \pm \{(l^2 + u^2 x^2) - i\epsilon'\}^{1/2}$ . Теперь после интегрирования по  $du$  получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 du \int d^4l \frac{2(1+u)x}{\{l_\mu l_\mu + x^2 u^2 - i\epsilon'\}} &= 4i\pi^2 \int l^2 dl \left\{ \frac{x}{l^2(l^2 + x^2)^{1/2}} + \frac{1}{xl} - \frac{1}{x(l^2 + x^2)^{1/2}} \right\} = \\ &= 2i\pi^2 x \int_0^\infty d\omega \left\{ \frac{1}{1+\omega} + \frac{\omega}{2(1+\omega)} - \frac{\omega^2}{2(1+\omega)^2} \right\} = \\ &= 6i\pi^2 x \left\{ \frac{1}{2} \ln(\omega + 1) - \frac{1}{6} \right\}_{\omega \rightarrow \infty}, \end{aligned}$$

где новая переменная интегрирования  $\omega$  определяется выражением

$$\omega = \frac{2}{x^2} \{l^2 + l(l^2 + x^2)^{1/2}\}.$$

Можно показать, что физический смысл этой переменной интегрирования  $\omega$  состоит в том, что она является четырехмерным скалярным произведением векторов энергии-импульса электрона и фотона  $(-1, E_i; 1, l)$  в виртуальных состояниях (в системе центра инерции), и поэтому эта переменная является лоренц-инвариантной переменной

$$\omega = \frac{2}{x^2} \{(1 \cdot 1) + lE_i\}.$$

Иногда случается, что выбор лоренц-инвариантных переменных упрощает вычисления [27, 39]. Из (13.61г) следует [43]

$$A^0 = \frac{3x}{2\pi} \left( \frac{e^2}{4\pi} \right) \left\{ \frac{1}{2} \ln(\omega + 1) - \frac{1}{6} \right\}_{\omega \rightarrow \infty}. \quad (13.63)$$

Когда внешние операторы  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$  удовлетворяют волновому уравнению свободного электрона, мы получаем

$$\int d^4x \bar{\psi}(x) \Sigma^0 \psi(x) = -iA^0 \int d^4x \bar{\psi}(x) \psi(x). \quad (13.64)$$

Но это есть как раз вклад от лагранжиана взаимодействия

—  $A^0 \bar{\psi}(x) \psi(x)$  в  $S$ -матрицу в  $e^2$ -приближении [см. (7.111)]. Таким образом, мы видим, что диаграмма на фиг. 15 в качестве добавки к массе, обусловленной собственным полем, дает величину  $A^0$  (т. е.  $\kappa \rightarrow \kappa + A^0$ ). Величину  $A^0$  принято называть собственной массой. Лагранжиан взаимодействия  $-A^0 \bar{\psi} \psi$  соответствует гамильтониану взаимодействия  $A^0 \bar{\psi} \psi$ . Пользуясь этим гамильтонианом взаимодействия, можно вычислить энергию возмущения (13.10), обусловленную членом с собственной массой. Для свободного электрона с энергией-импульсом  $(p, E_p)$  [см. (9.75), (9.78)] в  $e^2$ -приближении<sup>1)</sup> мы имеем

$$\Delta E = \frac{1}{2} A^0 (a_r^*(p) \gamma_4 a_r(p)) = \frac{A^0 \kappa}{E_p} = A^0 \left( \frac{\partial}{\partial \kappa} \right) E_p. \quad (13.65)$$

Это изменение энергии  $\Delta E$ , обусловленное эффектами собственного поля, называется собственной энергией. Как это видно из (13.65),  $\Delta E$  соответствует изменению массы электрона (в  $e^2$ -приближении), полученному подстановкой  $\kappa \rightarrow \kappa + A^0$ .

Однако здесь возникает трудность, потому что, с одной стороны, электрон должен иметь конечную массу, но, с другой стороны, собственная энергия является не малой поправкой, а бесконечной величиной. Равенства (10.1) и (10.10) показывают, что взаимодействие (13.64) приводит к появлению в выражении для  $(\Psi[\sigma] = S[\sigma] \Psi[-\infty])_{\sigma \rightarrow \infty}$  фазового множителя  $\exp(i\Delta E t)$  ( $t \rightarrow \infty$ ). Так как  $\Delta E$  — изменение энергии, то этот результат легко понять с точки зрения обычной квантовой механики. Фиг. 16 называется графиком собственной энергии электрона.

В случае элементарных частиц, которые естественным образом распадаются на другие элементарные частицы (например,  $\pi$ -мезоны) с малым временем жизни, мы находим комплексные собственные энергии  $\Delta E = \Delta E_1 + i(\Gamma/2)$ . При этом вещественная и комплексная части в  $\Delta E$  дают соответственно множители  $\exp(i\Delta E_1 t)$  и  $\exp(-\Gamma/2 t)$ . Первый множитель показывает, что  $\Delta E_1$  является изменением энергии, а последний множитель указывает на то, что амплитуда вероятности состояния, в котором находится частица, убывает экспоненциально со временем. Уменьшение амплитуды вероятности описывает естественный распад элементарной частицы со временем жизни  $(1/\Gamma)$ .

Теперь рассмотрим диаграммы Фейнмана, показанные на фиг. 15. Матричный элемент  $S$ -матрицы, изображаемый диаграммой справа на фиг. 15, а, с использованием (13.61а) может быть записан в виде

$$\frac{e}{2} \int d^4 x_1 \int d^4 x \bar{\psi}(x_1) \Sigma^0 S_F(x_1 - x) \gamma_4 \psi(x) A_\mu^e(x). \quad (13.66)$$

<sup>1)</sup> Множитель  $1/2$  в (13.65) появляется за счет усреднения по двум направлениям спина.

Подставляя (13.62) в (13.66), найдем

$$= \frac{e}{2} A^0 \int d^4 x_1 \int d^4 x \bar{\psi}(x_1) S_F(x_1 - x) \gamma_\mu \psi(x) A_\mu^e(x) - \\ - \frac{ie}{2} B^0 \int d^4 x \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\mu^e(x). \quad (13.67)$$

Второй член в (13.67) получается из члена

$$M \equiv \frac{e}{2} B^0 \int d^4 x_1 \int d^4 x \bar{\psi}(x_1) (\gamma_\mu \partial_\mu^1 + \kappa) S_F(x_1 - x) \gamma_\mu \psi(x) A_\mu^e(x). \quad (13.68)$$

Надо заметить, что (13.68) можно было бы записать в виде

$$M = -ie B^0 \int d^4 x \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\mu^e(x),$$

если бы мы воспользовались формулой

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa) S_F(x) = -2i\delta(x).$$

Однако если бы мы провели интегрирование по частям для  $\partial_\mu^1$  и воспользовались волновым уравнением (3.33), то мы бы нашли  $M=0$ . Второй член в (13.67) равен среднему значению из этих двух результатов для  $M$ . В самом деле этот результат для  $M$  можно получить корректно следующим образом.

Подставляя величину  $e(t)$  [определенную с помощью (13.15а)] в  $e$  (входящую в  $B^0$ ), мы имеем

$$M = - \lim_{\epsilon', \epsilon'' \rightarrow 0} \frac{iB^0}{(2\pi)^3} \frac{e}{4\epsilon'\epsilon''} \int_{-\epsilon'}^{\epsilon'} da \int_{-\epsilon''}^{\epsilon''} da' \int d^4 x_1 \int d^4 x \int d^4 p \times \\ \times e^{-iat_1} \bar{\psi}(x_1) (i\gamma_\mu p_\mu - \gamma_4 a' + \kappa) e^{-ia't_1} \frac{1}{(i\gamma_\mu p_\mu - \gamma_4 a' - \gamma_4 a + \kappa)} \gamma_\mu A_\mu^e(x) \times \\ \times e^{i(p \cdot x_1 - x) + i(a+a')(t_1 - t)}.$$

Ввиду того что членами более высоких порядков ( $\geq 2$ ) относительно  $a$  и  $a'$  можно пренебречь, мы получаем

$$\bar{\psi}(p) (i\gamma_\mu p_\mu - \gamma_4 a' + \kappa) \frac{1}{(i\gamma p - \gamma_4 a' - \gamma_4 a + \kappa)} = \\ = \bar{\psi}(x) \gamma_4 a' \frac{(i\gamma p - \gamma_4 a' - \gamma_4 a - \kappa)}{2i\gamma_4 (a' + a)} = \bar{\psi}(p) \frac{a'}{a + a'},$$

причем  $\bar{\psi}$  удовлетворяет уравнениям свободного электрона

$$\psi(p) (i\gamma p + \kappa) = 0.$$

Теперь для  $M$  можно получить выражение

$$M = -ie \lim_{\epsilon', \epsilon'' \rightarrow 0} B^0 \left\{ \frac{1}{4\epsilon'\epsilon''} \int_{-\epsilon'}^{\epsilon'} da \int_{-\epsilon''}^{\epsilon''} da' \frac{a'}{a' + a} e^{-i(a+a')t} \right\} \times \\ \times \int d^4 x \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\mu^e(x) = -\frac{ie}{2} B^0 \int d^4 x \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x).$$

Таким образом получен второй член в (13.67). В следующей главе мы покажем, что этот результат можно также получить, исходя из требования унитарности  $S$ -матрицы. Третий член в (13.62), обозначенный (...), в силу уравнения поля (3.33) не дает добавки в (13.67).

Вклад от диаграммы фиг. 15, б в матричный элемент  $S$ -матрицы может быть представлен в виде

$$ieB \int d^4x \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A_\mu^e(x) + \Lambda, \quad (13.69a)$$

где  $\Lambda$  дается выражением [34]

$$\begin{aligned} \Lambda = & -\frac{e}{3\pi k^2} \frac{e^2}{4\pi} \left( \ln \frac{x}{2k_0} + \frac{11}{24} \right) \int d^4x \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \square A_\mu^e + \\ & + \frac{e}{2\pi k} \left( \frac{e^2}{4\pi} \right) \frac{1}{8} \int d^4x \bar{\psi} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \psi (\partial_\mu A_\nu^e - \partial_\nu A_\mu^e) + \dots \end{aligned} \quad (13.69b)$$

Здесь  $B$  — бесконечная константа, а многоточием обозначены конечные члены, содержащие операторы производных высокого порядка ( $\geq 3$ ), действующие на  $A_\mu^e$ . Выражение (13.69б) можно получить с помощью разложения в ряд внешнего поля  $A_\mu^e$  по изменению импульса. В (13.69б) предполагается, что энергии  $k$  фотонов в виртуальных состояниях имеют некоторую минимальную величину  $k_0$  ( $k \geq k_0$ ). В пределе  $k_0 \rightarrow 0$  (13.69б) приводит к „инфракрасной катастрофе“. Однако, как это показано в предшествующем примере, это обстоятельство не составляет существенной трудности, и поэтому можно продолжать обсуждение рассматриваемого вопроса, не касаясь этого обстоятельства.

Прямым вычислением можно показать

$$B^0 = B. \quad (13.70)$$

Поэтому элемент  $S$ -матрицы, графическое изображение которого дано на фиг. 15, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{e}{2} A^0 \int d^4x_1 d^4x \{ \bar{\psi}(x_1) S_F(x_1 - x) \gamma_\mu \psi(x) A_\mu^e(x) + \\ + \bar{\psi}(x_1) \gamma_\mu S_F(x_1 - x) \psi(x) A_\mu^e(x) \} + \Lambda. \end{aligned} \quad (13.71)$$

Теперь рассмотрим график, изображенный на фиг. 17 (т. е. график собственной энергии фотона). Элемент  $S$ -матрицы, соответствующий этой диаграмме, может быть записан в виде

$$\begin{aligned} & -i \int d^4x A_\mu(x) \Pi_{\mu\nu}^0 A_\nu(x) = \\ & = -\frac{e^2}{8} \int d^4x_1 \int d^4x_2 S_P(S_F(x_1 - x_2) \gamma_\nu S_F(x_2 - x_1) \gamma_\mu) A_\mu(x_1) A_\nu(x_2), \end{aligned} \quad (13.72)$$

где учтено, что  $\varepsilon = -1$  и  $g = 2$  [см. (13.25)]. Проводя разложение в ряд по степеням импульса фотона, имеем

$$\Pi_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2} \left\{ D \delta_{\mu\nu} + C^0 \square \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{15\pi\kappa^2} \frac{e^2}{3\pi} \square^2 \delta_{\mu\nu} + \dots \right\}, \quad (13.73)$$

где многоточием обозначен конечный член, содержащий множитель  $\square^3$ , а  $D$  и  $C^0$  — квадратично и логарифмически расходящиеся константы [6, 15, 28].

По соображениям, аналогичным соображениям, связанным с собственной энергией электрона, мы заключаем, что  $D$  — собственная энергия фотона, обусловленная собственным электронным полем, окружающим фотон. Однако не равное нулю значение  $D$  не согласуется с тем фактом, что масса фотона равна нулю.

Боле того, поскольку первый член в (13.73) приводит к неинвариантному относительно калибровочных преобразований члену в (13.72), оказывается, что неравенство величины  $D$  нулю противоречит требованию калибровочной инвариантности. Используя различные методы вычисления, можно для величины  $D$  получить различные результаты (от нуля до бесконечности). Далее, даже если мы будем пользоваться тем методом вычислений, который приводит к равенству  $D = 0$ , все же оказывается, что при применении к другим случаям этот метод дает противоречивые результаты [18, 12, 36]. В связи со сказанным, проблемой собственной энергии фотона занимались очень многие авторы. Мы рассмотрим эту проблему в следующем примере.

Ввиду того что масса фотона должна быть равной нулю ( $D = 0$ ) и результаты должны быть калибровочно-инвариантными, наиболее подходящим методом рассмотрения проблем, которые могут быть отделены от вопроса о собственной энергии фотона, представляется метод, основывающийся на предположении, что можно предварительно считать, что  $D = 0$ .

Трудности, связанные с бесконечными значениями величин  $D$  и  $C^0$ , являются трудностями, обусловленными так называемой поляризацией вакуума. Прямым вычислением можно показать (см. следующий пример)

$$C^0 = -\frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \ln \frac{P}{x} \right\}_{P \rightarrow \infty} + \text{Конечная константа}. \quad (13.74)$$

Вклад от поляризации вакуума в  $S$ -матрицу графически изображен на фиг. 18 и может быть записан следующим образом:



Фиг. 17.

$$\begin{aligned}
 & i e \int d^4 x_1 \int d^4 x \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \Delta_F(x - x_1) \Pi_{\mu\nu}^0 A_\nu^e(x_1) = \\
 & = -e C^0 \int d^4 x \bar{\psi}(x) \gamma_\mu A_\mu^e(x) \psi(x) + \\
 & + \frac{e}{15\pi\kappa^2} \frac{e^2}{4\pi} \int d^4 x \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \square A_\mu^e(x) + \dots, \quad (13.75)
 \end{aligned}$$

где учтено, что  $\epsilon = -1$  и  $g = 1$ . В (13.75) многоточием обозначен член, содержащий оператор  $\square^2$ , действующий на  $A_\mu^e$ . Последнее соотношение показывает, что электрон во внешнем поле представляется заряженной частицей с зарядом  $e(1 + C^0)$ . Величину  $eC^0$  называют собственным зарядом. Трудность, связанная с представлением о собственном заряде, обусловлена тем обстоятельством, что величина  $C^0$  равна бесконечности. Как это видно из (13.74), действие электрического заряда ослабляется действием со стороны собственного заряда  $C^0$ . Это обстоятельство можно интуитивно



Фиг. 18.

понять на основании теории дырок. В теории дырок электрон необходимо рассматривать пребывающим в поляризуемой среде, т. е. в океане электронно-позитронного вакуума, и поэтому действие электрического заряда электрона должно ослаблять-

ся в соответствии с законом Ленца. Поскольку это объяснение не зависит от спина заряженной частицы, можно ожидать, что собственный заряд  $\delta e$  любой заряженной частицы, обусловленный эффектом поляризации вакуума, является отрицательным. И действительно, это утверждение можно доказать без использования расчетов по теории возмущений [38]<sup>1)</sup>.

Таким образом, мы видели, что бесконечности, обусловленные эффектами собственного поля электрона, проявляются в собственной массе и собственном заряде.

Когда импульсы электрона в конечном и начальном состояниях невелики

$$|\mathbf{p}| \ll \kappa, \quad |\mathbf{q}| \gg \kappa, \quad (13.76)$$

нерелятивистское выражение для величины  $\Lambda$  можно получить [см. (13.696)], пренебрегая высшими степенями ( $\geq 3$ ) членов с  $|\mathbf{P}|$  и  $|\mathbf{q}|$ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
 \Lambda = & -\frac{i}{3\pi\kappa^2} \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \ln \frac{\kappa}{2k_0} + \frac{11}{24} \right\} \int d^4 x \psi^*(x) \Delta \Phi(x) \psi(x) - \\
 & - \frac{i}{4\pi\kappa} \frac{e^2}{4\pi} \int d^4 x \psi^* \gamma_k \psi(x) \partial_k \Phi(x). \quad (13.77)
 \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Однако, когда порядок бесконечности величины  $\delta e$  велик, значения этой величины зависят от способа вычислений и иногда дают результаты, противоречащие общему доказательству. Действительно, можно получить положительное значение  $\delta e$  для заряженной векторной частицы, если воспользоваться специальным методом вычисления (см. [22], а также частное сообщение Катаяма).

Здесь мы вместо полного потенциала  $A_\mu^e(x)$  воспользовались лишь его скалярной частью  $\Phi(x)$  [т. е. в (13.69б) потенциал  $A_\mu^e$  мы взяли в виде  $(0, 0, 0, i\Phi)$ ].

### Пример 6. Поляризация вакуума

Рассмотрим в  $e^2$ -приближении ток  $\delta J_\mu$ , индуцированный внешним электромагнитным полем  $A_\mu^e$ . Из (10.77) и (13.3) имеем

$$\delta J_\mu(x) = ie^2 \int_{-\infty}^{\sigma(x)} d^4x' ([j_\mu(x), j_\nu(x')])_0 A_\nu^e(x') + e^2 (j_{\mu\nu}[x:n])_0 A_\nu^e(x), \quad (13.78)$$

где символом  $( )_0$  обозначено усреднение по вакууму.

Прямое вычисление дает

$$\delta J_\mu(x) = - \int d^4x' \{ DA_\mu^e(x') + C^0(\square' \delta_{\mu\nu} - \partial'_\mu \partial'_\nu) A_\nu^e(x') + f(\square')(\square' \delta_{\mu\nu} - \partial'_\mu \partial'_\nu) A_\nu^e(x') \} \delta(x - x'). \quad (13.79)$$

Теперь на основе (10.74) можно заключить, что первый член в (13.79) можно рассматривать как ток, полученный из лагранжиана взаимодействия  $L' = -(1/2) DA_\mu^e A_\mu^e$ . Так как лагранжиан  $L + L'$ , где  $L$  — лагранжиан (7.51) свободного поля, приводит к уравнению

$$(\square - D) A_\mu = 0,$$

то величину  $D^{\mu\nu}$  можно рассматривать как собственную массу фотона. Калибровочная инвариантность требует, чтобы величина  $\delta J_\mu$  была инвариантна относительно преобразования  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ , т. е. чтобы

$$D = 0. \quad (13.80)$$

Это требование калибровочной инвариантности можно выразить и другим способом. Равенство (13.78) с учетом лоренцовой инвариантности может быть записано в виде

$$\delta J_\mu(x) = -4e^2 \int d^4x' K_{\mu\nu}(x - x') A_\nu(x'). \quad (13.81)$$

Калибровочная инвариантность требует, чтобы величина  $K_{\mu\nu}$  удовлетворяла уравнению

$$\partial_\nu K_{\mu\nu}(x) = 0. \quad (13.82a)$$

Сопоставляя равенство (13.79) с (13.81), заключаем, что

$$\partial_\nu K_{\mu\nu}(x) = D \partial_\mu \delta(x). \quad (13.82b)$$

Вычисления приводят к следующим выражениям  $K_{\mu\nu}$  для различных заряженных полей:



Для заряженного поля с нулевым спином

$$K_{\mu\nu}^{(s)} = -\frac{1}{4} \{ \partial_\mu \bar{\Delta} \cdot \partial_\nu \Delta^{(1)} + \partial_\nu \bar{\Delta} \cdot \partial_\mu \Delta^{(1)} - \bar{\Delta} \cdot \partial_\mu \partial_\nu \Delta^{(1)} - \\ - \Delta^{(1)} \cdot \partial_\mu \partial_\nu \Delta + \partial_{\mu\nu} (\Delta^{(1)} \square \bar{\Delta} + \bar{\Delta} \square \Delta^{(1)} - 2x^2 \Delta^{(1)} \bar{\Delta}) \}. \quad (13.83)$$

Для спина  $1/2$

$$K_{\mu\nu}^{(1/2)} = \partial_\mu \bar{\Delta} \cdot \partial_\nu \Delta^{(1)} + \partial_\nu \bar{\Delta} \cdot \partial_\mu \Delta^{(1)} - \partial_{\mu\nu} (\partial_\rho \bar{\Delta} \cdot \partial_\rho \Delta^{(1)} + x^2 \bar{\Delta} \Delta^{(1)}). \quad (13.83a)$$

Для спина 1

$$K_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{3}{4} \{ \partial_\mu \bar{\Delta} \cdot \partial_\nu \Delta^{(1)} + \partial_\nu \bar{\Delta} \cdot \partial_\mu \Delta^{(1)} - \bar{\Delta} \cdot \partial_\mu \partial_\nu \Delta^{(1)} - \Delta^{(1)} \cdot \partial_\mu \partial_\nu \bar{\Delta} + \\ + \partial_{\mu\nu} (\Delta^{(1)} \square \bar{\Delta} + \bar{\Delta} \square \Delta^{(1)} - 2x^2 \Delta^{(1)} \bar{\Delta}) \} - \\ - \frac{1}{2x^2} \{ \partial_\mu \partial_\nu \Delta^{(1)} \cdot \square \bar{\Delta} + \square \Delta^{(1)} \cdot \partial_\mu \partial_\nu \bar{\Delta} - \partial_\mu \partial_\rho \Delta^{(1)} \cdot \partial_\nu \partial_\rho \bar{\Delta} - \\ - \partial_\nu \partial_\rho \Delta^{(1)} \cdot \partial_\mu \partial_\rho \bar{\Delta} + \partial_{\mu\nu} (\partial_\rho \partial_\sigma \Delta^{(1)} \cdot \partial_\rho \partial_\sigma \bar{\Delta} - \square \Delta^{(1)} \cdot \square \bar{\Delta}) \}, \quad (13.83b)$$

причем  $\Delta^{(1)}$ - и  $\bar{\Delta}$ -функции являются функциями для заряженных полей [10]. Из этих соотношений можно получить равенство [26,32]

$$\partial_\nu K_{\mu\nu}(x) = \frac{n}{2} \delta(x) \partial_\mu \Delta^{(1)}(x), \quad (13.84a)$$

в котором

$$n = - \begin{cases} 1 & \text{для спина } 0 \\ -2 & \text{для спина } 1/2 \\ 3 & \text{для спина } 1. \end{cases} \quad (13.84b)$$

Как это видно из (8.25a), функция  $\Delta^{(1)}$  имеет очень сильную сингулярность на световом конусе. Действительно,

$$\Delta^{(1)}(x) = \frac{1}{2\pi^2(x_u x_u)} + \frac{x^2}{8\pi^2} \ln |(x_u x_u)| + \Delta_{\text{рег.}}^{(1)},$$

где  $\Delta_{\text{рег.}}^{(1)}$  — регулярная функция от  $(x_u x_u)$ . Отсюда имеем

$$\partial_\mu \Delta^{(1)}(x) = -\frac{x_\mu}{\pi^2 (x_u x_u)^2} + \frac{x^2}{4\pi^2} \frac{x_\mu}{x_u x_u} + 2x_\mu \frac{d}{d(x_u x_u)} \Delta_{\text{рег.}}^{(1)}.$$

Это приводит к соотношению

$$\partial_\nu K_{\mu\nu}(x) = -\frac{n}{2} \frac{x_\mu}{\pi^2 (x_u x_u)^2} \delta(x) + \frac{n}{2} \frac{x^2}{4\pi^2} \frac{x_\mu}{(x_u x_u)} \delta(x), \quad (13.85)$$

которое является совершенно неопределенным. В самом деле, практические вычисления величины  $D^{(1)}$  показывают, что эта величина не всегда равна нулю, а зависит от метода вычислений [42]. Эту трудность называют проблемой собственной энергии фотона. Соот-

<sup>1)</sup> Пропорциональной  $n$ . — Прим. ред.

ношения (13.82 б) и (13.85) показывают, что собственная масса фотона состоит из двух членов<sup>1)</sup> — один пропорционален  $n$ , а второй —  $n\kappa^2$ .

Предположим, что существует  $k$  заряженных полей  $U^1, \dots, U^k$  со спином 0,  $l$  заряженных полей  $\psi^1, \dots, \psi^l$  со спином  $1/2$  и  $m$  заряженных полей  $U_\mu^1, \dots, U_\mu^m$  со спином 1 с массами  $(\kappa_1^{(s)}, \dots, \kappa_k^{(s)}), (\kappa_1^{(f)}, \dots, \kappa_l^{(f)}), (\kappa_1^{(v)}, \dots, \kappa_m^{(v)})$  и что

$$k - 2l + 3m = 0,$$

$$\sum_{i=1}^k (\kappa_i^{(s)})^2 - 2 \sum_{i=1}^l (\kappa_i^{(f)})^2 + 3 \sum_{i=1}^m (\kappa_i^{(v)})^2 = 0.$$

Тогда (13.85) показывает, что собственная энергия становится равной нулю и какая-либо неопределенность, обусловленная методом вычислений, отсутствует [29, 41].

В самом деле, соотношение (13.85) приводит к равенству

$$d_\nu K_{\mu\nu}(x) = 0.$$

Однако полного согласия относительно сделанных предположений не существует. Паули и Вилларс [26] с более общей точки зрения развили формалистическую смешанную теорию, теорию регуляризации. В этой теории временно вводится ряд вспомогательных полей  $U^i, \psi^i, U_\mu^i$ , массы которых в конце вычислений устремляются к бесконечности, чтобы результаты вычислений не зависели от этих вспомогательных масс.

Для величин  $C^0$  и  $f(\square)$  в (13.79) мы получаем следующие выражения [10, 40]:

$$C^0 = \int_0^1 dv G(v) =$$

$$= \begin{cases} \frac{e^2}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{12\pi} \ln \frac{2v}{\kappa^2} + \frac{1}{18\pi} \right\}_{v \rightarrow \infty} & \text{для скалярного типа} \\ \frac{e^2}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{3\pi} \ln \frac{2v}{\kappa^2} + \frac{5}{9\pi} \right\}_{v \rightarrow \infty} & \text{для спинорного типа} \\ \frac{e^2}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{6\pi} \frac{v}{2\kappa^2} + \frac{1}{4\pi} \ln \frac{2v}{\kappa^2} \right\}_{v \rightarrow \infty} & \text{для векторного типа} \end{cases}, \quad (13.86)$$

<sup>1)</sup> Это обстоятельство наглядно можно показать следующим образом: энергии вакуумных частиц во внешнем поле  $A_\mu^e(x)$  грубо можно представить следующим образом:

$$\frac{n}{(2\pi)^3} \int d^3p \{ (\mathbf{p} - eA^e)^2 + \kappa^2 \}^{1/2} - eA_0^e.$$

Разлагая это выражение в ряд по степеням  $e$ , мы в качестве первого члена получаем нулевую энергию вакуума, а вторым членом будет величина  $(D, 2) |A^e|^2$ . Последний член можно рассматривать как член собственной энергии фотона. Действительно, коэффициент  $D$  в этом члене, который пропорционален  $n$ , как раз совпадает с  $D$  в (13.79). Следует заметить, что множитель  $n$  в  $D$  пропущен за счет весов различных заряженных частиц в нулевой энергии.

$$f(\square) = \frac{1}{4x^2} \int_0^1 dv G(v) \frac{1-v^2}{1 - \frac{\square}{4x^2} (1-v^2)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{e^2}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{120\pi x^2} - \frac{\square}{1630\pi x^4} + \dots \right\} & \text{для скалярного типа} \\ \frac{e^2}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{15\pi x^2} - \frac{\square}{140\pi x^4} + \dots \right\} & \text{для спинорного типа,} \\ \frac{e^2}{4\pi} \left[ -\left\{ \frac{1}{12\pi x^2} \ln \frac{2v}{x} - \frac{71}{360\pi x^2} \right\} v \rightarrow \infty \right. & \\ \left. - \frac{17}{1680\pi x^4} \square + \dots \right] & \text{для векторного типа} \end{cases} \quad (13.87)$$

где

$$G(v) \equiv \begin{cases} -\frac{e^2}{4\pi} \frac{v^4}{6\pi(1-v^2)} & \text{для скалярного типа} \\ -\frac{e^2}{4\pi} \frac{v^2}{\pi(1-v^2)} \left(1 - \frac{v^2}{3}\right) & \text{для спинорного типа} \\ -\frac{e^2}{4\pi} \left\{ \frac{v^4}{2\pi(1-v^2)} + \frac{2v^4}{3\pi(1-v^2)^2} \right\} & \text{для векторного типа.} \end{cases} \quad (13.88)$$

Эти формулы могут быть получены в результате подстановки (8.32) и (8.33) в (13.83), (13.83 а), (13.83 б) и замены переменных интегрирования <sup>1)</sup>  $(\alpha, \beta \rightarrow v, w)$  по формулам [34]

$$\alpha = \frac{w}{2x^2} (1-v), \quad \beta = \frac{w}{2x^2} (1+v).$$

Величины  $G(v)$  в (13.88) получаются как результаты интегрирования по  $w$ .

Вторые строчки в (13.86) и (13.87) дают второй и третий члены эффектов поляризации вакуума (13.73) электронного поля. В случае заряженного векторного поля расходится не только  $C^0$ , но и  $f(\square)$ . Как показано в гл. 15, последняя расходимость составляет серьезную трудность для теории ренормализации.

### Пример 7. Собственное натяжение элементарной частицы

Рассмотрим среднее значение тензора энергии-импульса  $T_{\alpha\nu}$  элементарной частицы в состоянии с энергией-импульсом  $p_\alpha$  и массой  $\mu$  ( $p_\alpha p_\nu + x^2 = 0$ ). В релятивистской теории поля тензор энергии-импульса  $T_{\alpha\nu}$  должен подчиняться закону преобразования

<sup>1)</sup> С другой стороны, в нековариантной теории возмущения (см. § 2) переменная  $v$  связана со скалярным произведением  $(p_\mu p'_\mu)$  векторов энергии-импульса  $p, p'$  ( $p_\alpha p_\alpha + x^2 = p'_\mu p'_\mu + x^2 = 0$ ) заряженных частиц и их античастиц в виртуальном состоянии следующим образом [40]:

$$2 \left\{ p_\mu p'_\mu + x^2 \right\} = \frac{4x^2}{1-v^2}.$$

тензора 2-го ранга<sup>1)</sup>

$$E_p \equiv (p | \int d^3 x' T'_{44}(x') | p) = \\ = \frac{1}{V(1-\beta^2)} (p = 0, \mu | \int d^3 x T_{44}(x) - \beta^2 \int d^3 x T_{11}(x) | p = 0, \mu). \quad (13.89)$$

Здесь  $T_{\mu\nu}$  и  $T'_{\mu\nu}$  — тензоры энергии-импульса в системе координат  $(x'_\nu)$ , покоящейся относительно частицы, и в системе координат  $(x_\nu)$ , движущейся в направлении оси  $x_1$  со скоростью  $v = \beta = p_1/p_0$ . В (13.89) символами  $(p_\mu |$  и  $| p_\mu)$  обозначены состояния частицы с энергией-импульсом  $p_\mu$ . С другой стороны, величина  $E$  должна обладать свойствами преобразования энергии частицы

$$E_p = \frac{\mu}{V\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{V\sqrt{1-\beta^2}} (p = 0, \mu | \int d^3 x T_{44}(x) | p = 0, \mu). \quad (13.90)$$

Преобразования (13.89) и (13.90) показывают, что величина, называемая собственным натяжением частицы,

$$(p = 0, \mu | \int d^3 x T_{11}(x) | p = 0, \mu),$$

должна быть равна нулю.

Доказательство равенства нулю этого собственного натяжения можно провести следующим формальным путем [37]. Прежде всего рассмотрим спинорное поле  $\psi$ , взаимодействующее с некоторыми бесспиновыми полями  $U^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots$ ). Лагранжиан имеет вид

$$L = -\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + \mu)\psi - \frac{1}{2} \sum_\alpha (\partial_\nu U^{(\alpha)} \cdot \partial_\nu U^{(\alpha)} + (x^{(\alpha)})^2 U^{(\alpha)} U^{(\alpha)}) + L', \quad (13.91a)$$

$$L' = \sum_\alpha f^{(\alpha)} \bar{\psi} O^{(\alpha)} \psi U^{(\alpha)} + \sum_\alpha g^{(\alpha)} \bar{\psi} O_\mu^{(\alpha)} \psi \partial_\mu U^{(\alpha)}, \quad (13.91b)$$

где  $O^{(\alpha)}$  и  $O_\mu^{(\alpha)}$  — произведения матриц  $\gamma$ , а  $g^{(\alpha)}$  — константы связи, имеющие размерность длины  $[g^{(\alpha)}] = [L]$ . Из (7.36) с помощью уравнений поля для  $U^{(\alpha)}$  и  $\psi$  получаем

$$T_{\mu\mu} = \mu \bar{\psi} \psi + \sum_\alpha \{ (x^{(\alpha)})^2 U^{(\alpha)} U^{(\alpha)} - f^{(\alpha)} \bar{\psi} O^{(\alpha)} \psi U^{(\alpha)} \} + T, \quad (13.92)$$

$$T \equiv \sum_\alpha (\partial_\nu U^{(\alpha)} \cdot \partial_\nu U^{(\alpha)} + (x^{(\alpha)})^2 U^{(\alpha)} U^{(\alpha)}). \quad (13.93)$$

Тензор энергии-импульса в представлении взаимодействия можно получить из тензора  $T_{\mu\nu}$  с помощью унитарного оператора  $S[\sigma]$ . Такой тензор энергии-импульса в представлении взаимодействия по сравнению с (13.92) имеет некоторые дополнительные члены. Однако, как показано в § 5, на эти члены можно не обращать внимания, если пользоваться в вычислениях методом  $P^*$ -символа.

<sup>1)</sup> Здесь мы пользуемся хорошо известным соотношением Лоренца

$$d^3 x' = \sqrt{1-\beta^2} d^3 x.$$

Тогда величину  $(\mathbf{p}=0, \mu | T_{\mu\mu} | \mathbf{p}=0, \mu)$  можно вычислить, подставляя (13.92) в выражение для  $F[x:n]$  в (13.18) и рассматривая  $\psi$  и  $U^{(z)}$  как операторы в представлении взаимодействия. Хотя в (13.89) предусмотрена только трехмерная пространственная интеграция по  $d^3x$ , все же можно провести интегрирование по всему четырехмерному пространству и в конце интеграл по времени не учитывать, потому что нам необходимо выделить матричный элемент (от  $\int d^3x T_{\mu\mu}$ ), для которого имеет место закон сохранения энергии

$$\left( \mathbf{p}' \left| \int_{-\infty}^{\infty} d^4x T_{\mu\mu}(x) \right| \mathbf{p} \right) = 2\pi \left( \mathbf{p}' \left| \int d^3x T_{\mu\mu}(x) \right| \mathbf{p} \right) \delta(p'_0 - p_0) \delta_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$$

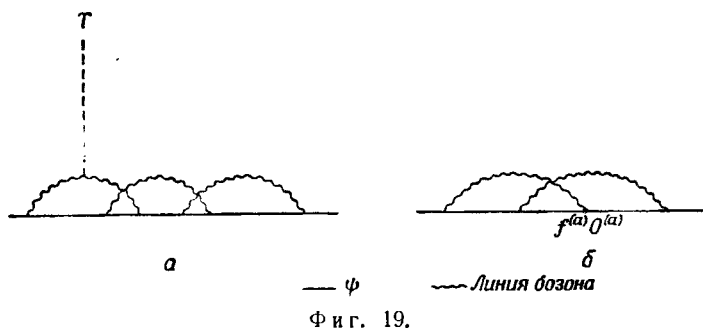
Математическое ожидание

$$\left( \mathbf{p}=0, \mu \left| \int_{-\infty}^{\infty} d^4x T \right| \mathbf{p}=0, \mu \right)$$

можно получить с помощью подстановки члена<sup>1)</sup>

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \frac{1}{4} \{ \partial_{\mu} \Delta_F^{(z)}(x' - x) \cdot \partial_{\mu} \Delta_F^{(z)}(x - x'') + \\ + (x^{(z)})^2 \Delta_F^{(z)}(x' - x) \cdot \Delta_F^{(z)}(x - x'') \}$$

в произвольно выбранную линию  $\alpha$ -бозона  $(1/2) \Delta_F^{(z)}(x' - x'')$  в графике собственной энергии фермиона  $\psi$  (см. фиг. 19, а).



Фиг. 19.

Из (8.37) имеем

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \frac{1}{4} \{ \partial_{\mu} \Delta_F^{(z)}(x' - x) \cdot \partial_{\mu} \Delta_F^{(z)}(x - x'') + (x^{(z)})^2 \Delta_F^{(z)}(x' - x) \times \\ \times \Delta_F^{(z)}(x - x'') = -2i \left( \frac{1}{2} \right) \Delta_F^{(z)}(x' - x''). \quad (13.94)$$

<sup>1)</sup> Величина  $\Delta_F^{(z)}$  является  $\Delta_F$ -функцией поля  $U^{(z)}$ .

Таким образом, мы видим, что одно включение в график оператора  $T$  приводит к появлению члена  $-2\delta\mu$ , где  $\delta\mu$  — собственная энергия фермиона.

Ввиду того что при вычислении собственной энергии фермиона существует  $n/2$  способов включения оператора  $T$  в график, мы заключаем, что

$$\left( \mathbf{p} = 0, \mu \left| \int d^3 x T \right| \mathbf{p} = 0, \mu \right) = - \sum_{n=0}^{\infty} n \delta\mu^{(n)}. \quad (13.95a)$$

Здесь  $\delta\mu^{(n)}$  — член  $n$ -го порядка в выражении для собственной энергии  $\delta\mu$ , вычисляемой по теории возмущений. Этот член имеет вид

$$\delta\mu^{(n)} = \sum^{(n)} \left\{ \prod_{\alpha} (g^{(\alpha)})^{m_{\alpha}} (f^{(\alpha)})^{l_{\alpha}} \right\} F(m_1 \dots m_{\alpha} \dots; l_1 \dots l_{\alpha} \dots), \quad (13.95b)$$

где  $\sum^{(n)}$  — сумма по всем возможным значениям  $m_{\alpha}$  и  $l_{\alpha}$ , удовлетворяющим условию

$$\sum_{\alpha} (m_{\alpha} + l_{\alpha}) = n.$$

Функции  $F(\dots; \dots)$  не зависят от констант связи. Далее, из (13.95a) и (13.95b) получается равенство

$$\left( \mathbf{p} = 0, \mu \left| \int d^4 x T \right| \mathbf{p} = 0, \mu \right) = - \sum_{\alpha} \left\{ f^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial f^{(\alpha)}} \delta\mu + g^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial g^{(\alpha)}} \delta\mu \right\}. \quad (13.96)$$

Член

$$\left( \mathbf{p} = 0, \mu \left| f^{(\alpha)} \int d^3 x \bar{\psi} O^{(\alpha)} \psi U^{(\alpha)} \right| \mathbf{p} = 0, \mu \right)$$

можно также вычислить с помощью графика собственной энергии фермиона, в котором каждая вершина со взаимодействием  $f^{(\alpha)} \bar{\psi} O^{(\alpha)} \psi U^{(\alpha)}$  рассматривается как вершина с

$$f^{(\alpha)} \bar{\psi} O^{(\alpha)} \psi U^{(\alpha)}$$

в выражении для  $T_{\mu\mu}$  (см. фиг. 19, б). Так как каждый член в (13.95 б) в вычислении по теории возмущений состоит из  $m_{\alpha}$  таких вершин, мы имеем

$$\begin{aligned} & \sum^{(n)} \left( \mathbf{p} = 0, \mu \left| f^{(\alpha)} \int d^3 x \bar{\psi} O^{(\alpha)} \psi U^{(\alpha)} \right| \mathbf{p} = 0, \mu \right) = \\ & = \sum^{(n)} m_{\alpha} (f^{(\alpha)})^{m_{\alpha}} (g^{(\alpha)})^{l_{\alpha}} F(\dots; \dots) = - \sum_{\alpha} f^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial f^{(\alpha)}} \delta\mu. \end{aligned} \quad (13.97)$$

С другой стороны, из (8.37) и (13.41) получаются соотношения

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} S_F(x-x') = -\frac{i}{2} \mu \int d^4 x'' S_F(x-x'') S_F(x''-x'), \quad (13.97a)$$

$$x^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} \Delta_F^{(\alpha)}(x-x') = -i x^2 \int d^4 x'' \Delta_F^{(\alpha)}(x-x'') \Delta_F^{(\alpha)}(x''-x'). \quad (13.97b)$$

Эти соотношения показывают, что применения операции  $\mu \partial / \partial \mu$  к внутренней линии фермиона или операции  $x^{(\alpha)} \partial / \partial x^{(\alpha)}$  к линии  $\alpha$ -бозона эквивалентны включению в эти линии соответственно величин  $-i \mu \bar{\psi} \psi$  и  $-i (x^{(\alpha)})^2 U^{(\alpha)} U^{(\alpha)}$ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{p} = 0, \mu \left| \mu \int d^3 x \bar{\psi} \psi \right| \mathbf{p} = 0, \mu \right) &= \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \delta \mu, \\ \left( \mathbf{p} = 0, \mu \left| (x^{(\alpha)})^2 \int d^3 x U^{(\alpha)} U^{(\alpha)} \right| \mathbf{p} = 0, \mu \right) &= x^{(\alpha)2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} \delta \mu. \end{aligned} \quad (13.98)$$

Из (13.92) следует, что

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{p} = 0, \mu \left| \int d^3 x T_{\mu\mu} \right| \mathbf{p} = 0, \mu \right) &= \\ &= \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_{\alpha} x^{(\alpha)2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} - \sum_{\alpha} g^{(\alpha)2} \frac{\partial}{\partial g^{(\alpha)}} \right) \delta \mu + \mu. \end{aligned} \quad (13.99)$$

Так как оператор энергии  $\int d^3 x T_{44}$  должен дать собственную энергию  $\delta \mu$  в соответствии с формулой

$$\left( \mathbf{p} = 0, \mu \left| \int d^3 x T_{44} \right| \mathbf{p} = 0, \mu \right) = \mu + \delta \mu,$$

то мы имеем<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{p} = 0, \mu \left| \int d^3 x T_{kk} \right| \mathbf{p} = 0, \mu \right) &= \\ &= \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_{\alpha} x^{(\alpha)2} \frac{\partial}{\partial x^{(\alpha)}} - \sum_{\alpha} g^{(\alpha)2} \frac{\partial}{\partial g^{(\alpha)}} - 1 \right) \delta \mu. \end{aligned} \quad (13.100)$$

Ввиду того что в системе покоя фермиевской частицы ( $\mathbf{p} = 0, p_0 = \mu$ ) должно иметь место равенство

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{p} = 0, \mu \left| \int d^3 x T_{11} \right| \mathbf{p} = 0, \mu \right) &= \left( \mathbf{p} = 0, \mu \left| \int d^3 x T_{22} \right| \mathbf{p} = 0, \mu \right) = \\ &= \left( \mathbf{p} = 0, \mu \left| \int d^3 x T_{33} \right| \mathbf{p} = 0, \mu \right), \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> При вычислении величины  $(T_{\mu\mu})$  появляется ряд диаграмм, в которых оператор  $T_{\mu\mu}$  действует на замкнутые петли, связанные с остальной частью диаграммы единственной линией с нулевым импульсом (фиг. 20). Вклад от этих диаграмм называется поляризацией вакуума. При обычных вычислениях собственной энергии  $\delta \mu$  этой величиной вообще пренебрегают. Однако  $\delta \mu$  в равенствах (13.100) и (13.101) должна включать этот вклад. В квантовой электродинамике на основании теоремы Фарри этот вклад равен нулю [33, 9, 37].

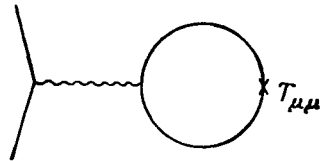
из (13.100) следует

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{p} = 0, \mu \left| \int d^3x T_{11} \right| \mathbf{p} = 0, \mu \right) = \\ & = \frac{1}{3} \left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_{\alpha} \kappa^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \kappa^{(\alpha)}} - \sum_{\alpha} g^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial g^{(\alpha)}} - 1 \right) \delta \mu. \end{aligned} \quad (13.101)$$

Аналогичные результаты получаются в более общем случае. Допустим, что имеются некоторые поля  $Q^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots$ ), взаимодействующие друг с другом посредством гамильтонианов  $H^{(\alpha)}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots$ ), константы связи в которых имеют размерности  $[g^{(\alpha)}] = [L^{n^{(\alpha)}}]$ . Тогда имеем [37]

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{p} = 0, \kappa^{(1)} \left| \int d^3x T_{11} \right| \mathbf{p} = 0, \kappa^{(1)} \right) = \\ & = \frac{1}{3} \left[ \sum_{\alpha} \kappa^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial \kappa^{(\alpha)}} - \sum_{\alpha} n^{(\alpha)} g^{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial g^{(\alpha)}} - 1 \right] \delta \kappa^{(1)}, \end{aligned} \quad (13.102)$$

где  $\kappa^{(\alpha)}$  — масса покоя частиц поля  $Q^{(\alpha)}$ ;  $\delta \kappa^{(1)}$  — собственная энергия частицы ( $\alpha = 1$ );  $\langle \mathbf{p} = 0, \kappa^{(1)} |^{\alpha}$  — усреднение по состоянию частицы ( $\alpha = 1$ ), находящейся в состоянии покоя. Это соотношение впервые было получено Пайсом и Эпштейном [24] на простом примере электрона и электромагнитного поля, для которых  $g^{(a)} = 0$ , а  $\kappa^{(a)} = 0$  и  $m$  — соответственно массы фотона и электрона.



Фиг. 20.

В силу того что величина  $\delta \kappa^{(1)}$  имеет размерность  $[\delta \kappa^{(1)}] = [L^{-1}]$ , она должна иметь вид

$$\delta \kappa^{(1)} = \sum_{m_{\alpha}, l_{\alpha}} a(m_{\alpha}, l_{\alpha}) \prod_{\alpha, a} (\kappa^{(\alpha)})^{m_{\alpha}} (g^{(\alpha)})^{l_{\alpha}}, \quad (13.103)$$

причем

$$\sum_{\alpha} n^{(\alpha)} l_{\alpha} - \sum_{\alpha} m_{\alpha} = -1.$$

Здесь безразмерные коэффициенты  $a(m_{\alpha}, l_{\alpha})$  могут зависеть от  $\ln(\kappa^{(\alpha)}/\kappa^{(1)})$ . Подставляя (13.103) в (13.102), получаем

$$\left( \mathbf{p} = 0, \kappa^{(1)} \left| \int d^3x T_{11}(x) \right| \mathbf{p} = 0, \kappa^{(1)} \right) = 0. \quad (13.104)$$

Однако практические вычисления иногда приводят к ненулевому значению собственного натяжения. Это обстоятельство можно усмотреть из (13.102). Когда собственная энергия  $\delta \kappa^{(1)}$  бесконечна, она вместо (13.103) должна выражаться формулой

$$\delta \kappa^{(1)} = \lim_{P \rightarrow \infty} \delta \kappa^{(1)}(P). \quad (13.105)$$

Другими словами, появляется новая константа  $P$  ( $\rightarrow \infty$ ) с размерностью  $[L^{-1}]$ . Здесь  $P$  — верхний предел интегрирования при вычислении собственной энергии. Таким образом, проведенное выше



рассмотрение размерностей без учета  $P$  не остается справедливым и мы находим ненулевое значение собственного натяжения. Эту трудность называют проблемой собственного натяжения.

Например, собственное натяжение электрона, взаимодействующего с электромагнитным полем, может быть получено из выражения для его собственной энергии (13.63)

$$\delta x = \lim_{P \rightarrow \infty} \left[ a x \ln \frac{P}{x} - b x \right].$$

Здесь  $a$  и  $b$  — безразмерные конечные величины ( $a = 3e^2/8\pi^2$ ,  $b = 3e^2/48\pi^2$ ). Ввиду того что заряд  $e$  безразмерен, (13.102) дает

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{p} = 0, x \left| \int d^3 x T_{11} \right| \mathbf{p} = 0, x \right) &= \frac{1}{3} \left( x \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right) \delta x = \\ &= -\frac{a}{3} x = -\frac{e^2}{2\pi(4\pi)} x. \end{aligned} \quad (13.106)$$

Это согласуется с результатами практических вычислений. Однако, если бы величина  $\delta x$  была конечной, ее единственным видом был бы вид

$$\delta x = c x \quad (13.107)$$

с безразмерной константой  $c$ , потому что  $x$  — единственная размерная константа квантовой электродинамики. Если подставить это выражение в (13.102), то получим

$$\left( \mathbf{p} = 0, x \left| \int d^3 x T_{11} \right| \mathbf{p} = 0, x \right) = \frac{1}{3} \left( x \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right) \delta x = 0.$$

Равенство (13.104) показывает, почему в методе регуляризации Паули — Вилларса (см. работу [32]) или смешанной теории [46] удалось получить нулевое значение собственного натяжения. Это связано с тем, что эти теории приводят к конечной величине собственной энергии электрона. С другой стороны, в рамках теории ренормализации трудность с собственным натяжением не может быть разрешена, потому что в этой теории, как это будет показано в следующей главе, сама собственная энергия не является конечной величиной.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bethe H. A., Oppenheimer J. R., Phys. Rev., 70, 451 (1946).
2. Bhabha H. J., Heitler W., Proc. Phys. Soc., 159, 432 (1936).
3. Bloch F., Nordsieck A., Phys. Rev., 52, 54 (1937).
4. Carlson J. F., Oppenheimer J. R., Phys. Rev., 51, 220 (1936).
5. Coester E., Phys. Rev., 83, 1066 (1951).
6. Dirac P. A. M., Proc. Camb. Phil. Soc., 30, 150 (1934).
7. Dyson F. J., Phys. Rev., 75, 486 (1949).

8. Eden R. J., Proc. Roy. Soc., A210, 388 (1952).
9. Epstein S. T., Prog. Theor. Phys., 6, 441 (1951).
10. Feldman D., Phys. Rev., 76, 1367 (1949).
11. Feynman R. P., Phys. Rev., 76, 749 (1949) (см. перевод в сборнике: Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).
12. Fukuda H., Kinoshita T., Prog. Theor. Phys., 5, 1024 (1950).
13. Fukuda H., Miyamoto Y., Prog. Theor. Phys., 4, 389 (1950).
14. Furry W. H., Phys. Rev., 51, 135 (1937).
15. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 90, 209 (1934).
16. Heitler W., The Quantum Theory of Radiation, First Edition, Oxford, 1935 (см. перевод третьего издания: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения ИЛ, 1956).
17. Ito D., Prog. Theor. Phys., 6, 1023 (1951).
18. Katayama Y., Prog. Theor. Phys., 5, 272 (1950).
19. Kinoshita T., Prog. Theor. Phys., 5, 1045 (1950).
20. Koba Z., Prog. Theor. Phys., 5, 696 (1950).
21. Lüders G., Zs. Naturforsch., 7a, 206 (1952).
22. McConnell J., Phys. Rev., 81, 275 (1951).
23. Nishijima K., Prog. Theor. Phys., 6, 814 (1951).
24. Pais A., Epstein S. T., Rev. Mod. Phys., 21, 445 (1949).
25. Pais A., Jost R., Phys. Rev., 87, 871 (1952).
26. Pauli W., Villars F., Rev. Mod. Phys., 21, 434 (1949).
27. Pauli W., Rose M. E., Phys. Rev., 49, 462 (1936).
28. Peierls R. E., Proc. Roy. Soc., 146, 420 (1934).
29. Rayski J., Acta Phys. Polonica, 9, 142 (1948).
30. Röhrlich F., Phys. Rev., 77, 357 (1950).
31. Sakata S., Tanikawa Y., Phys. Rev., 57, 548 (1940).
32. Sakata S., Umezawa H., Prog. Theor. Phys., 5, 682 (1950).
33. Sawada K., Prog. Theor. Phys., 6, 117 (1950).
34. Schwinger J., Phys. Rev., 76, 790 (1949) (см. перевод в сборнике: Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).
35. Stueckelberg E. C. G., Green T. A., Helv. Phys. Acta, 24, 153 (1951).
36. Takahashi Y., Prog. Theor. Phys., 11, 251 (1954).
37. Takahashi S., Umezawa H., Prog. Theor. Phys., 8, 193 (1952).
38. Umezawa H., Kametuchi S., Prog. Theor. Phys., 6, 543 (1951).
39. Umezawa H., Kawabe R., Prog. Theor. Phys., 4, 420 (1949).
40. Umezawa H., Kawabe R., Prog. Theor. Phys., 4, 423, 443 (1949).
41. Umezawa H., Yukawa J., Yamada E., Prog. Theor. Phys., 4, 25, 113 (1949).
42. Wentzel G., Phys. Rev., 74, 1070 (1948).
43. Weisskopf V., Phys. Rev., 56, 72 (1939).
44. Wick G. C., Phys. Rev., 80, 268 (1950) (см. перевод в сборнике: Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).
45. Yang C. N., Phys. Rev., 77, 242 (1950).
46. Yukawa J., Umezawa H., Prog. Theor. Phys., 4, 468 (1949).

# Теория перенормировок в квантовой электродинамике

## § 1. Теория перенормировок

В современной квантовой электродинамике серьезные трудности происходят от существования собственного поля. Однако, ввиду того что „инфракрасная катастрофа“ может быть устранена только при учете собственного поля, пренебрегать собственным полем нельзя. В этом случае было бы трудно понять экспериментальный успех квантовой электродинамики. Разрешение этой трудности можно найти путем исследования наблюдаемых эффектов собственных полей.

Прежде всего еще раз рассмотрим „ультрафиолетовую катастрофу“, о которой говорилось в предыдущей главе. В проблеме упругого рассеяния электрона в  $e^2$ -приближении эффекты собственного электромагнитного поля (т. е. так называемые радиационные поправки) приводят к бесконечным значениям изменений  $\delta x$  и  $\delta e$  массы и заряда электрона. Так как мы наблюдаем не голый электрон, а электрон с собственным полем, наблюдаемые величины массы и заряда электрона должны быть равны  $x' \equiv x + \delta x$  и  $e' \equiv e + \delta e$ .

Член, связанный с массой в лагранжиане, может быть записан в виде

$$-x\bar{\psi}\psi = -x'\bar{\psi}\psi + \delta x\bar{\psi}\psi. \quad (14.1)$$

Если воспользоваться представлением взаимодействия, в котором  $\psi$  удовлетворяет волновому уравнению свободного электрона с массой  $x'$  [ $x \rightarrow x'$  в (7.110)], то второй член в (14.1) приводит к следующему гамильтониану взаимодействия:

$$H'_m(x) = -\delta x\bar{\psi}(x)\psi(x). \quad (14.2)$$

Беря  $\delta x = A^0$ , можно устранить эффект, связанный с (13.64). Аналогично, записывая электромагнитное взаимодействие в виде

$$e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu = e_1\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu - \delta e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A_\mu \quad (14.3)$$

$$e_1 \equiv e + \delta e \quad (14.4)$$

и рассматривая  $e^2/4\pi$  как наблюдаемое значение  $1/137$  величины

элементарного заряда, можно с помощью второго члена в (14.3) (с  $\delta e = eC^0$ ) уничтожить первый член в (13.75). Такого рода процедуры называются перенормировками массы и заряда [8, 22, 15, 5]. Так как с помощью указанной процедуры можно в  $e^2$ -приближении получить определенные конечные результаты, то можно провести сравнение этих результатов с экспериментом.

Например, эта теория предсказывает существование в статическом магнитном поле дополнительного аномального магнитного момента электрона величиной  $0,00117(-e/2m)$ , обусловленного собственным полем [22]. Здесь  $-e/2m$  — магнетон Бора для электрона. Аналогичным путем можно прийти к заключению, что собственное поле влияет на энергетические уровни электрона в кулоновском поле водородоподобного атома: энергетический уровень  $2^2S_1$ , (который в случае пренебрежения радиационными поправками должен совпадать с энергетическим уровнем  $2^2P_{1/2}$ ) сдвигается вверх на величину около  $1000 \text{ мзгц}$  относительно уровня  $2^2P_{1/2}$ . На это обстоятельство уже давно указывалось на основании результатов некоторых экспериментов [19].

Окончательные экспериментальные данные, касающиеся энергетических уровней атома водорода и аномального магнитного момента электрона, были получены Лэмбом и Ризерфордом [12] и группой Раби [18]; эти результаты впоследствии были успешно объяснены теорией перенормировок.

Это показывает, что представление о собственном поле имеет реальный смысл и что теория перенормировок справедлива по крайней мере при некоторых условиях. Однако чтобы доказать непротиворечивость рассматриваемой теории, необходимо доказать справедливость двух следующих положений: 1) положение о том, что теория перенормировок квантовой электродинамики не приводит к бесконечностям ни в каком приближении теории возмущений; 2) перенормированный ряд теории возмущений сходится к определенному конечному результату.

Первая проблема, детально исследованная Дайсоном [2], будет рассмотрена в последующих параграфах.

## § 2. Прimitивно расходящиеся диаграммы

Рассмотрим теперь, какие виды бесконечности встречаются в квантовой электродинамике. Диаграмма называется прimitивно расходящейся [2], когда матричный элемент, соответствующий этой диаграмме, бесконечен, но эта бесконечность появляется лишь за счет последнего интегрирования по четырехмерному импульсу, т. е. результат  $n-1$  ( $n$  — число внутренних линий), интегрированный по четырехмерным импульсам, которые мы проводим первыми, является конечным. Другими словами, диаграмма, получаемая в результате разрыва любой внутренней линии прimitивно

расходящейся диаграммы, приводит к диаграмме, которой соответствует конечный элемент  $S$ -матрицы.

Теперь выясним, какие примитивно расходящиеся диаграммы встречаются в квантовой электродинамике.

Легко видеть, что для примитивно расходящихся диаграмм должно иметь место следующее соотношение:

$$N = \begin{array}{l} \text{(Наибольший порядок незави-} \\ \text{симых переменных в числите-} \\ \text{ле)} \end{array} - \begin{array}{l} \text{(Наибольший порядок незави-} \\ \text{симых переменных в знаме-} \\ \text{нате)} \end{array} \geq 0. \quad (14.5)$$

Независимые переменные выбираются здесь следующим образом: часть переменных интегрирования исключается с помощью  $\delta$ -функций<sup>1)</sup>, сопоставленных каждой вершине за счет закона сохранения энергии-импульса, а остающиеся переменные рассматриваются как независимые.

Неравенство (14.5) можно рассматривать как условие расходимости только тогда, когда знаменатели подынтегральных выражений не приводят к сингулярностям. В самом деле, знаменатели можно переписать в положительно определенном виде, если контур интегрирования по переменной  $k_0$  сместить с вещественной оси на мнимую ось<sup>2)</sup>. Как это видно на фиг. 9, это может быть сделано без пересечения несмещенных полюсов. Более того, вклад за счет смещенных полюсов оказывается конечным, так как область интегрирования по импульсам ограничена неравенством (13.39).

Рассмотрим примитивно расходящуюся диаграмму, в которой числа внешних и внутренних электронных линий равны соответственно  $E_e$  и  $I_e$ , числа внешних и внутренних фотонных линий равны соответственно  $E_p$  и  $I_p$ , а число вершин равно  $n$  [из этого числа  $n_s$  соответствует взаимодействию (14.2)]. Выражения (8.35) и (13.24а) показывают, что каждая электронная или фотонная внутренняя линия добавляет во второй член в (14.5) 1 или 2. В числителе мы имеем  $4I$  переменных интегрирования ( $d^4k_1 \dots d^4k_p$ ,  $I \equiv I_e + I_p$ ). Однако  $4(n-1)$  из этих переменных исключаются вследствие наличия  $\delta$ -функций, сопоставленных каждой вершине. С другой стороны, принимая во внимание, что в случае взаимодействия (14.3) в каждой вершине сходится три линии, легко можно доказать следующие соотношения<sup>3)</sup>:

$$\begin{aligned} 2I_p + E_p &= n - n_s, \\ 2I_e + E_e &= 2n. \end{aligned} \quad (14.6)$$

<sup>1)</sup> Эти  $\delta$ -функции возникают за счет интегрирований  $\int_{-\infty}^{\infty} d^4x$ , сопоставленных каждой вершине.

<sup>2)</sup> Тогда  $k_\mu^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - k_0^2$  принимает вид  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + |k_0|^2$ .

<sup>3)</sup> Каждой вершине соответствует одна внешняя фотонная линия или половина внутренней фотонной линии.

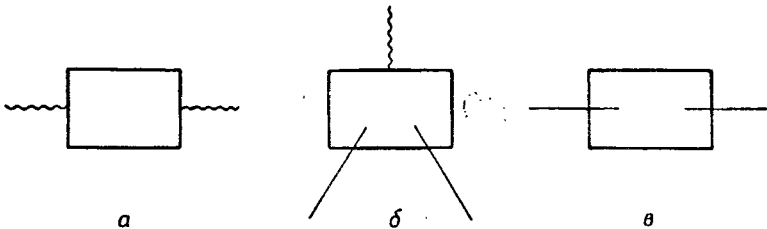
Таким образом, имеем

$$N = 4(I - n + 1) - I_e - 2I_p = 4 - \frac{3}{2}E_e - E_p - n_s. \quad (14.7)$$

Поэтому условие (14.5) того, что диаграмма является примитивно расходящейся, может быть записано в виде [2]

$$4 - \frac{3}{2}E_e - E_p - n_s \geq 0. \quad (14.8)$$

Число  $N$  является наибольшей степенью бесконечностей примитивно расходящихся диаграмм, причем число  $N=0$  понимается как логарифмическая расходимость.



Фиг. 21.

Существует шесть случаев, в которых удовлетворяется неравенство (14.8):

- а)  $E_p=0, E_e=2$ ; б)  $E_p=1, E_e=2$ ; в)  $E_p=2, E_e=0$ ;  
 г)  $E_p=4, E_e=0$ ; д)  $E_p=3, E_e=0$ ; е)  $E_p=1, E_e=0$ .

Однако в случаях (д) или (е) по теореме Фарри (см. гл. 13, пример 2) матричные элементы равны нулю; случай (г) приводит к логарифмически расходящемуся элементу  $S$ -матрицы вида  $A_u A_v A_p A_c$ . Этот элемент, в силу калибровочной инвариантности теории, мы будем принимать равным нулю точно так же, как принимается равной нулю собственная энергия фотона.

Диаграммы, представленные на фиг. 21, а — в, называются соответственно диаграммами собственной энергии фотона, вершинной части и собственной энергии электрона. Поэтому указанные выше результаты могут быть сформулированы следующим образом: любая примитивно расходящаяся диаграмма должна быть диаграммой вида (а), (б) или (в)<sup>1)</sup>.

### § 3. Выделение бесконечностей

Рассмотрим примитивно расходящуюся диаграмму  $G(E_p, E_e)$  с  $E_e$  электронными и  $E_p$  фотонными внешними линиями. Если эта примитивно расходящаяся диаграмма содержится в некоторой

<sup>1)</sup> Однако расходимости диаграмм (а), (б) или (в) не всегда являются примитивными.

диаграмме Фейнмана более общего вида, то импульсы  $t^{(m)}$  ( $m=1, \dots, n$ ) ее внешних линий могут и не удовлетворять волновым уравнениям свободного поля. Обозначая все внешние импульсы символом  $t$ , можно матричный элемент  $S$ , соответствующий  $G(E_p, E_e)$ , записать следующим образом:

$$\int d^4k R(k, t). \quad (14.9)$$

Так как рассматриваемая диаграмма является примитивно расходящейся, то  $R(k, t)$  не содержит бесконечностей. Интегрирование в (14.9) называется окончательным интегрированием.

Введем в рассмотрение импульсы  $t^{0(m)}$  (соответствующие  $t^{(m)}$ ) свободных электронов и фотонов с помощью следующих определений:

$$\begin{aligned} i\gamma_\mu t^{0(m)} + \alpha' &= 0, \text{ когда } t^{(m)} \text{ описывает импульс электро-} \\ &\text{нной линии,} \\ t_\mu^{0(m)} t_\mu^{0(m)} &= 0, \text{ когда } t^{(m)} \text{ описывает импульс фотонной} \\ &\text{линии.} \end{aligned} \quad (14.10)$$

Обозначая  $(t^{0(1)} \dots t^{0(n)})$  посредством  $t^0$ , выражение (14.9) можно записать в виде [2]

$$\begin{aligned} \int d^4k R(k, t) &= \int d^4k R(k, t^0) + \\ &+ \sum_m (t_\mu^{(m)} - t_\mu^{0(m)}) \int d^4k \left[ \frac{\partial}{\partial t_\mu^{(m)}} R(k, t) \right]_{t=t^0} + \\ &+ \sum_{m, l} (t_\mu^{(m)} - t_\mu^{0(m)})(t_\nu^{(l)} - t_\nu^{0(l)}) \int d^4k \left[ \frac{\partial^2}{\partial t_\mu^{(m)} \partial t_\nu^{(l)}} R(k, t) \right]_{t=t^0} + \\ &+ \dots + \frac{1}{N!} \sum (t_{\mu_1}^{(m_1)} - t_{\mu_1}^{0(m_1)}) \dots (t_{\mu_N}^{(m_N)} - t_{\mu_N}^{0(m_N)}) \times \\ &\times \int d^4k \left[ \frac{\partial}{\partial t_{\mu_1}^{(m_1)}} \dots \frac{\partial}{\partial t_{\mu_N}^{(m_N)}} R(k, t) \right]_{t=t^0} + \text{(Некоторая ограниченная} \\ &\text{функция переменной } t). \end{aligned} \quad (14.11)$$

Легко видеть, что наибольшие степени бесконечностей первого, второго, ... членов в (14.11) равны соответственно  $N, N-1, \dots$  [число  $N$  определяется посредством (14.5)]. Таким образом, с помощью (14.11) [см. (13.62)] можно бесконечные члены отделить от конечных членов. Для больших  $t$  (т. е. когда  $t^{(1)} \dots t^{(n)}$  велики по сравнению с массами частиц) последний член в (14.11) может быть приближенно записан в виде суммы членов, являющихся произведениями  $(t^{(m_1)} \dots t^{(m_N)})$ , умноженными на постоянные множители.

Член, порядковый номер которого  $(l+1)$ , мы будем обозначать как  $G(E_p, E_e, l)$ -член. Наивысший порядок бесконечности в

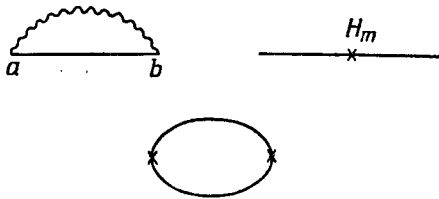
$G(E_p, E_e, l)$ -члене равен  $(N-l)$ , причем  $N-l=0$  приводит к логарифмической расходимости.

Ясно, что каждая диаграмма, которая приводит к расходящемуся матричному элементу  $S$ -матрицы, содержит некоторые примитивно расходящиеся диаграммы.

#### § 4. Неприводимые диаграммы

Диаграмма, которая получается из данной диаграммы путем замены в ней всех частей собственной энергии и вершинных частей линиями и вершинами, не содержащими радиационных поправок, называется скелетной диаграммой. Диаграмма называется неприводимой, если она совпадает со своей скелетной диаграммой. Других неприводимых диаграмм собственной энергии электрона и фотона, кроме указанных на фиг. 22, не существует.

Диаграмма называется собственной диаграммой, если она не может быть разделена на две части разрывом лишь одной внутренней линии.



Фиг. 22.

#### § 5. Константы перенормировки

Обозначим все вклады от диаграмм собственной энергии электрона и фотона и вершинных частей соответственно через  $S'_F(t)$ ,  $\Delta'_F(t)$  и  $\Gamma_\mu(t^1, t^2)$ ;  $t$  — энергия-импульс внешней линии диаграмм собственной энергии, а  $(t^1, t^2)$  — энергия-импульсы внешних линий электрона у вершинных частей. Все вклады от собственных диаграмм собственных энергий электрона и фотона обозначим через  $\bar{\Psi}\Sigma^*\psi$  и  $A_\mu\Pi_\mu^*A_\nu$ , соответственно. Они получаютс с помощью суммирования по всем вкладам от всех возможных диаграмм, полученных с помощью включения внутренних линий в соответствующие неприводимые диаграммы (см. фиг. 22). Другими словами, они получаютс из элементов  $S$ -матрицы соответствующих неприводимых диаграмм с помощью замены в них функций  $S_F$ ,  $\Delta_F$  и  $\gamma_\mu$  в точках  $a$  на фиг. 22 через функции  $S'_F$ ,  $\Delta'_F$  и  $\Gamma_\mu$ . Следует заметить, что в точках  $b$  на фиг. 22  $\gamma_\mu$  не надо заменять на  $\Gamma_\mu$ . Действительно, диаграмма, получаемая включением внутренней линии „вблизи“ точки  $b$ , т. е. вершина в точке  $b$ , эквивалентна диаграмме, получаемой включением внутренней линии „вблизи“ точки  $a$ , т. е. вершина в точке  $a$  (фиг. 23).

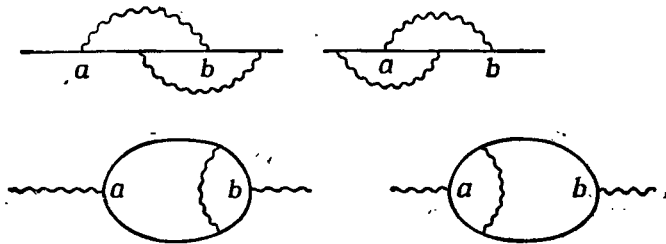


Таким образом, мы видим, что  $\Sigma^*$  и  $\Pi_{\mu\nu}^*$  могут быть записаны в виде

$$\Sigma^* = e^2 \int d^4k \gamma_\mu S'_F(t-k) \Delta'_F(k) \Gamma_\mu(t-k, t) - 2\pi i \delta x, \quad (14.12a)$$

$$\Pi_{\mu\nu}^* = e^2 \int d^4k S_P(S'_F(t-k) \gamma^\mu S'(k) \Gamma_\nu(t-k, t)). \quad (14.12б)$$

Ввиду того что любая диаграмма собственной энергии может быть представлена путем соединения диаграммы собственной



Ф и г. 23.

энергии и собственной диаграммы собственной энергии, можно написать [2]

$$S'_F = S_F + S_F \Sigma^* S'_F \quad (14.13a)$$

$$\Delta'_F = \Delta_F + \Delta_F \Pi^* \Delta'_F \quad (14.13б)$$

где следует понимать, что все величины в обеих частях равенства относятся к одним и тем же импульсам. Функции  $S_F(k)$  и  $\Delta_F(k)$  являются амплитудами Фурье функций  $S_F(x)$  и  $\Delta_F(x)$  соответственно

$$\Delta_F(k) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{k_\mu k_\nu}, \quad (14.13в)$$

$$S_F(k) = \frac{1}{2\pi i} \frac{i\gamma_\mu k_\mu - \kappa'}{(k_\mu k_\mu + \kappa'^2)}.$$

Величины  $S'_F$  и  $\Delta'_F$  могут быть вычислены с помощью (14.13a) и (14.13б).

Теперь примем, что величины  $S'_F$ ,  $\Delta'_F$  и  $\Gamma'_\mu$  имеют вид

$$\begin{aligned} S'_F &= Z_2 S'_{F_1}(e_1), \\ \Delta'_F &= Z_3 \Delta'_{F_1}(e_1), \\ \Gamma'_\mu &= Z_1^{-1} \Gamma_{\mu_1}(e_1). \end{aligned} \quad (14.14)$$

Здесь  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  — постоянные, которые должны быть определены таким образом, чтобы  $S'_{F_1}$ ,  $\Delta'_{F_1}$  и  $\Gamma_{\mu_1}$  не содержали бесконечностей. Наблюдаемый заряд  $e_1$  является конечным и таким, что

$$e_1 = j e \quad (14.15)$$

(величина  $f$  — постоянная). Это равенство можно рассматривать как обобщение выражения для перенормировки заряда (14.4).

Подставляя (14.14) в (14.12 а) и (14.12 б), получаем

$$\Sigma^* = Z_1^{-1} Z_2 Z_3 e^2 \int d^4 k \gamma_\mu S'_{F_1}(e_1) \Delta'_{F_1}(e_1) \Gamma_{\mu_1}(e_1) - 2\pi i \delta x, \quad (14.16 \text{ а})$$

$$\Pi_{\mu\nu}^* = Z_2^2 Z_1^{-1} e^2 \int d^4 k S_P(S'_{F_1}(e_1) \gamma_\mu S'_{F_1}(e_1) \Gamma_{\mu_1}(e_1)). \quad (14.16 \text{ б})$$

Равенства (14.13), пользуясь правилами операционного исчисления, можно записать следующим образом:

$$S'_{F_1}(e_1) = \frac{S_F}{Z_2 - Z_2 S_F \Sigma^*}, \quad (14.17 \text{ а})$$

$$\Delta'_{F_1}(e_1) = \frac{\Delta_F}{Z_3 - Z_3 \Delta_F \Pi^*}. \quad (14.17 \text{ б})$$

С другой стороны, в следующем параграфе мы покажем

$$\begin{aligned} \int d^4 k \gamma_\mu S'_{F_1}(e_1) D'_{F_1}(e_1) \Gamma_{\mu_1}(e_1) = \\ = -Z_1^{-1} \{ A(e_1) - iB(e_1)(\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa') + \dots \}, \end{aligned} \quad (14.18)$$

$$\int d^4 k S_P(S'_{F_1}(e_1) \gamma_\mu S'_{F_1}(e_1) \Gamma_{\mu_1}(e_1)) = Z_1^{-1} \{ -C(e_1) \square + \dots \}, \quad (14.19)$$

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu + Z_1^{-1} \{ L(e_1) \gamma_\mu + \dots \}, \quad (14.20)$$

где  $A(e_1)$ ,  $B(e_1)$ ,  $C(e_1)$  и  $L(e_1)$  — некоторые постоянные. Члены, обозначенные многоточием в (14.18) — (14.20), являются конечными и содержат соответственно множители  $(\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa')$ ,  $\square^2$  и  $\partial_\rho$ . Из (14.16 а) и (14.16 б) получаем

$$Z_2 S_F \Sigma^* = (Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e^2) \left\{ A(e_1) S_F + \frac{1}{2\pi} B(e_1) + \dots \right\} - 2\pi i Z_2 \delta x S_F, \quad (14.21)$$

$$Z_3 \Delta_F \Pi^* = (Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} e^2) \left\{ \frac{1}{2\pi} C(e_1) + \dots \right\}. \quad (14.22)$$

Подставляя эти соотношения в (14.17 а) и (14.17 б) и принимая во внимание, что при  $e_1 \rightarrow 0$  [см. (14.13 в)] должно быть  $S'_{F_1} \rightarrow S_F$ ,  $\Delta'_{F_1} \rightarrow \Delta_F$ ,  $\Gamma_{\mu_1} \rightarrow \gamma_\mu$ , мы видим, что  $S'_{F_1}$ ,  $\Delta'_{F_1}$  и  $\Gamma_{\mu_1}$  не содержат бесконечностей только тогда, когда постоянные выбраны таким образом, что соблюдаются равенства

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{1}{2\pi i} Z_2^{-1} e_1^2 A(e_1), \\ Z_1 &= 1 - L(e_1), \\ Z_2 &= 1 + \frac{1}{2\pi} e_1^2 B(e_1), \\ Z_3 &= 1 + \frac{1}{2\pi} e_1^2 C(e_1), \\ f &= Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2}. \end{aligned} \quad (14.23)$$

Это и есть „константы перенормировки“.

## § 6. Окончательное интегрирование

Сейчас мы установим равенства (14.18) — (14.20). Некоторая собственная диаграмма [равенство (14.5) определяет число  $N$  для этой диаграммы] собственной энергии электрона может содержать примитивно расходящиеся диаграммы  $G_1, G_2, \dots$  [равенство (14.5) дает числа  $N_1, N_2, \dots$  для этих диаграмм]. Бесконечности в диаграммах  $G$  могут быть отделены с помощью (14.11). Опуская эти бесконечные члены, можно получить конечный член, который приблизительно пропорционален  $N_F$ -ой степени внешнего импульса  $t_\mu$  примитивно расходящейся диаграммы  $G_i$ , если только эти последние импульсы велики. Эти импульсы становятся внутренними импульсами для примитивно расходящейся диаграммы, в которой вышеупомянутые конечные члены для всех  $G_i$  подставляются во внутреннюю линию или вершину, соответствующую прежним примитивно расходящимся диаграммам [т. е.  $G_i$ , ( $i=1, 2, \dots$ )]. Отделяя бесконечные члены этого интегрирования с помощью (14.11), опуская их и повторяя эту операцию, мы, с учетом (14.12 а), получаем „окончательное интегрирование“ в диаграмме собственной энергии электрона в виде

$$\int d^4 k \gamma_\mu S'_{F_1}(e) \Delta'_{F_1}(e) \Gamma_{\mu_1}(e). \quad (14.24)$$

Это последовательное отделение бесконечностей подробно обсуждено в § 9. Здесь можно сказать, что оно определяет величины ( $S'_{F_1}, \Delta'_{F_1}, \Gamma_{\mu_1}$ ) и ( $A, B, C, L$ ); последние величины с помощью (14.23) позволяют определить константы перенормировки ( $\delta\kappa, Z_1, Z_2, Z_3, f$ ).

Следует заметить, что (14.24) записано в виде функции от  $e$ , а не от  $e_1$ . Из приведенных выше рассуждений мы видим, что наибольший порядок бесконечностей в (14.24) равен величине  $N$ , определяемой с помощью (14.5) [и поэтому также с помощью (14.7)]. Беря  $E_p=0$  и  $E_e=2$ , мы видим, что (14.24) содержит линейную и логарифмическую бесконечности. Поэтому, используя (14.11), можно (14.24) представить в виде

$$\int d^4 k S'_{F_1}(e) \gamma_\mu \Delta'_{F_1}(e) \Gamma_{\mu_1}(e) = Z_1^{-1} \{ A(e) - iB(e) \gamma_\mu \partial_\mu + \kappa' \} + \dots \}. \quad (14.25)$$

Здесь  $A(e)$  и  $B(e)$  — постоянные, расходящиеся самое большое соответственно <sup>1)</sup> линейно и логарифмически.

Множитель  $Z_1^{-1}$  в (14.25) появляется по следующей причине. Хотя величина  $\Gamma_{\mu_1}$  заменяет величину  $\gamma_\mu$  только в вершине  $a$ , а не в вершине  $b$ , мы должны ожидать, что окончательный

<sup>1)</sup> Можно доказать, что собственная энергия электрона расходится логарифмически [27].

результат должен быть симметричным относительно двух вершин  $a$  и  $b$ . Поэтому выражения (14.14) показывают, что множитель  $Z_1^{-1}$  должен присутствовать также и в вершине  $b$ . Доказательство этого положения, которое мы дадим в § 9, было дано Саламом [21]. Бесконечность  $Z_1^{-1}$  в вершине  $b$  называется  $b$ -бесконечностью.

Заменяя величину  $e$  в (14.25) на  $e_1$ , мы получаем (14.18). Равенства (14.19) и (14.20) могут быть установлены аналогичным способом.

С помощью указанного процесса последовательного отделения бесконечностей можно получить конечные результаты при вычислении матричных элементов  $S$ -матрицы.

## § 7. Перенормировка внешних линий

Суммы всех возможных внешних линий, сопоставленных  $\phi$ ,  $\bar{\phi}$  и  $A_\mu$  вместе с соответствующими внутренними линиями, мы будем обозначать соответственно через  $\psi'$ ,  $\bar{\psi}'$  и  $A'_\mu$ . Когда  $\phi$ ,  $\bar{\phi}$  и  $A_\mu$  являются операторами свободных полей, мы имеем

$$\psi' = Z_2^{1/2} \psi, \quad \bar{\psi}' = Z_2^{1/2} \bar{\psi}, \quad A'_\mu = Z_3^{1/2} A_\mu. \quad (14.26)$$

В самом деле, в диаграмме  $S^{-1}[\infty] S[\infty]$  (которая с учетом унитарности  $S[\infty]$  равна единице) некоторые внешние линии операторов  $S[\infty]$  и  $S^{-1}[\infty]$  соединены друг с другом, что приводит к появлению внутренних линий. Эти единицы встречаются с бесконечными коэффициентами, даваемыми выражениями (14.14). Другими словами, формулы (14.26) дают такую перенормировку величин  $\psi'$ ,  $\bar{\psi}'$  и  $A'_\mu$ , при которой оператор  $S[\infty]$  является унитарным.

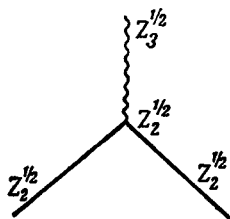
Действительно, используя соотношения, аналогичные (14.13 а) и (14.13 б), с  $\psi'$ ,  $\bar{\psi}'$  и  $A'_\mu$

$$\begin{aligned} \psi' &= \phi + \psi \Sigma^* S'_F \\ A'_\mu &= A_\mu + A_\nu \Pi_{\nu\mu}^* \Delta'_F \end{aligned}$$

можно вычислить эти бесконечные коэффициенты. Однако эти результаты не могут быть однозначными. Для однозначного определения этих коэффициентов необходимо воспользоваться унитарностью  $S[\infty]$ . Это положение уже проиллюстрировано на примере вычисления величины  $B^0$  в (13.67) [см. рассуждения, следующие за выражением (13.67)]. Как было там показано, однозначность определения коэффициентов в (14.26) может быть также достигнута за счет предположения об адиабатическом включении и выключении константы взаимодействия [3,16].

## § 8. Перенормировка

В § 4 мы видели, что матричный элемент  $S$ -матрицы можно получить, если величины  $S_F$ ,  $\Delta_F$  и  $\gamma_\mu$ , соответствующие электронным и фотонным внутренним линиям и вершинам всевозможных неприводимых диаграмм, заменить соответственно величинами  $S'_F$ ,  $\Delta'_F$  и  $\Gamma_\mu$ . Тогда все бесконечности могут быть записаны в виде множителя  $Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2}$  при каждой вершине (фиг. 24), где  $Z_2$  и  $Z_1^{-1}$



Фиг. 24.

даются соответственно двумя электронными линиями и одной фотонной линией, сходящимися к вершине [см. (14.14)], а  $Z_1^{-1}$  появляется за счет замены  $\gamma_\mu \rightarrow \Gamma_\mu$ . Однако этот бесконечный множитель можно включить в наблюдаемую величину заряда  $e_1 = fe$  [см. (14.23)]. Таким образом, мы видим, что в теории  $S$ -матрицы квантовой электродинамики, основанной на теории возмущений, никаких бесконечностей не возникает. Так как можно доказать соотношение [26]

$$Z_1 = Z_2, \quad (14.27a)$$

то имеем

$$e_1 = Z_3^{1/2} e, \quad f = Z_3^{1/2}. \quad (14.28)$$

Соотношение (14.27a) соответствует соотношению (13.70) в  $e^2$ -приближении.

Доказательство соотношения (14.27a) выглядит следующим образом. Равенство

$$\frac{\partial}{\partial k_\mu} S_F(k) = -2\pi S_F(k) \gamma_\mu S_F(k) \quad (14.27б)$$

показывает, что дифференцированию по  $k_\mu$  соответствует прибавление к диаграмме фотонной линии с нулевым вектором энергии-импульса. Поэтому мы имеем

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial k_\mu} \Sigma^*(k) \quad \text{для } l=0, \quad (14.27в)$$

где  $l$  — вектор энергии-импульса фотона, представленного внешней линией вершинной части. Подставляя (14.16a) и (14.20) в (14.27в), получаем

$$-Z_1^{-1} L(e_1) = \frac{1}{2\pi} Z_2^{-1} e_1^2 B(e_1),$$

откуда с учетом (14.23) следует

$$Z_1^{-1} (1 - Z_1) = Z_2^{-1} (1 - Z_2).$$

Это приводит к (14.27a). Использованное нами в доказательстве

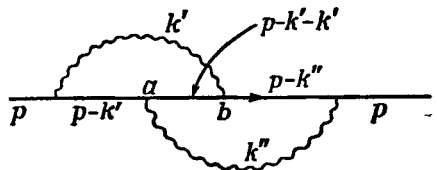
свойство величины  $S_F$ , выражаемое равенством (14.276), является следствием калибровочной инвариантности теории, которая требует, чтобы электромагнитное взаимодействие, т. е.  $-ie \bar{\psi} \gamma_\mu A_\mu \psi$ , входило в теорию только в комбинации  $\bar{\psi}(\gamma_\mu \partial_\mu - ie A_\mu) \psi$ .

Равенство (14.28) показывает, что перенормировка заряда зависит только от множителя  $Z_3$ , входящего в  $\Delta'_F$  (внутренняя фотонная линия). Этот результат справедлив не только для системы электронов с электромагнитным взаимодействием, но для системы любых заряженных полей, потому что (14.27) является следствием только калибровочной инвариантности [26,10]. С другой стороны, как это показано в гл. 13, пример 6, изменение  $\delta e$  величины заряда индуцируется поляризацией вакуумных частиц всех заряженных полей, обусловленной падающим фотоном. Таким образом, величина  $Z_3$  должна включать вклады от всех заряженных полей и поэтому не должна зависеть от свойств определенного заряженного поля. Это обстоятельство согласуется с тем фактом, что каждая заряженная частица имеет один и тот же элементарный заряд  $e_1/\sqrt{2\pi} = 1/\sqrt{137}$ .

## § 9. Выделение бесконечностей

Существуют различные методы последовательного выделения бесконечностей, к которым приводит некоторая заданная диаграмма [26,21]. Здесь мы приведем метод, принадлежащий Саламу. Прежде всего рассмотрим диаграмму, изображенную на фиг. 25. Это — часть диаграмм собственной энергии электрона в  $e^4$ -приближении.

Элемент  $S$ -матрицы, задаваемый этой диаграммой, содержит интеграл



Фиг. 25.

$$M = \int d^4 k' \int d^4 k'' F(p, k') G(p, k', k'') H(p, k''). \quad (14.29)$$

Интегрирование по  $d^4 k'$  приводит к логарифмической расходимости в вершинной части в точке  $a$ , а интегрирование по  $d^4 k''$  приводит к аналогичной бесконечности в точке  $b$ . Ввиду того что  $G(p, k', k'')$  не является произведением функции от  $k'$  и функции от  $k''$ , мы не можем записать  $M$  в виде произведения двух расходящихся интегралов; поэтому говорят, что такая диаграмма содержит „перекрывающиеся бесконечности“.

В общем случае интегрирование по переменным  $(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ , выбранным из переменных  $(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ , называется  $(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ -субинтегрированием (subintegration). При  $(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ -субинтегрировании интегрирование производится во всех множителях, содер-

жащих в подынтегральном выражении переменные  $(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ . Интегрирование указанных выше выражений, в которых все переменные, отличные от  $(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ , заменены импульсами свободных полей, мы будем обозначать посредством  $D(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$  [импульсы свободных полей будут обозначаться верхним индексом 0, т. е.  $\Lambda_{\alpha\beta}(it_\mu^0) = 0$  в (8.2a)]. Например, из (14.29) имеем

$$\begin{aligned} D(k') &= \int d^4 k' F(p^0, k') G(p^0, k', k^{0n}), \\ D(k'') &= \int d^4 k'' G(p^0, k^{0'}, k'') H(p^0, k''). \end{aligned} \quad (14.30)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} M &= D(k') \int d^4 k'' H(p, k'') + D(k'') \int d^4 k' F(p, k') + \\ &+ \int d^4 k' \int d^4 k'' R(p, k', k''), \end{aligned} \quad (14.31)$$

где

$$\begin{aligned} R(p, k', k'') &\equiv \\ &\equiv \{F(p, k') G(p, k', k'') - F(p^0, k') G(p^0, k', k'')\} H(p, k'') - \\ &- F(p, k') G(p^0, k^{0'}, k'') H(p^0, k''). \end{aligned} \quad (14.32)$$

Бесконечные величины в третьем члене в (14.31) отделяются с помощью (14.11)

$$\int d^4 k' \int d^4 k'' R(p, k', k'') = T(p) + I_c(p), \quad (14.33)$$

где

$$\begin{aligned} T(p) &\equiv \int d^4 k' \int d^4 k'' \left\{ R(p^0, k', k'') + \right. \\ &\left. + (p_\mu - p_\mu^0) \left( \frac{\partial}{\partial p_\mu} R(p, k', k'') \right)_{p=p^0} \right\}, \end{aligned} \quad (14.34)$$

а величина  $I_c(p)$  конечна.

Доказательство (14.33) проводится следующим образом. Интегрирование по  $dk'$  члена в первых скобках в (14.32) не приводит к расходящемуся результату, а его интегрирование по  $dk''$  приводит к линейной расходимости в наиболее сильно расходящихся членах [см. обсуждение величины  $N$ , следующее за (14.24)], которые с помощью (14.11) могут быть выделены в форме (14.33). Интегрирование последнего члена в (14.32) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} &- \int d^4 k' \int d^4 k'' F(p, k') G(p^0, k^{0'}, k'') H(p^0, k'') = \\ &= - \int d^4 k' \left\{ F(p, k') - F(p^0, k') - (p_\mu - p_\mu^0) \left( \frac{\partial}{\partial p_\mu} F(p, k') \right)_{p=p^0} \right\} \times \\ &\quad \times \int d^4 k'' G(p^0, k^{0'}, k'') H(p^0, k'') - \\ &- \int d^4 k' F(p^0, k') \int d^4 k'' G(p^0, k^{0'}, k'') H(p^0, k'') - \\ &- (p_\mu - p_\mu^0) \int d^4 k' \left( \frac{\partial}{\partial p_\mu} F(p, k') \right)_{p=p^0} \int d^4 k'' G(p^0, k^{0'}, k'') H(p^0, k''). \end{aligned}$$

Первый член в этом выражении при интегрировании по  $dk'$  не является расходящимся, а при интегрировании по  $dk''$  расходится логарифмически; эта бесконечность может быть выделена в форме (14.33). Второй и третий члены в рассматриваемом выражении имеют вид соответственно первого и второго членов в (14.34).

Таким образом, мы видим, что  $M$  может быть записано в виде

$$M = T(k') \int d^4 k'' H(p, k'') + T(k'') \int d^4 k' F(p, k') + T(k', k'') + I_c(p),$$

где (14.35)

$$T(k) \equiv D(k), \quad T(k', k'') \equiv T(p). \quad (14.36)$$

Первый член в (14.35) является произведением бесконечной константы  $T(k')$  и интеграла, соответствующего диаграмме, получаемой из фиг. 25, если на ней не учитывать внутреннюю линию  $k'$ . Как это видно на фиг. 25, величина  $T(k')$  равна  $Z_1^{-1}$ ; эта бесконечность может быть исключена с помощью перенормировки вершинной части в точке  $a$  [вторая строчка в (14.23)]. Аналогично второй член в (14.35) имеет вид произведения  $T(k'')$  на соответствующую диаграмму, упрощенную аналогичным указанным выше способом, но уже относительно внутренней линии  $k''$ . Эта бесконечность исключается с помощью перенормировки вершинной части в точке  $b$ . Мы видим, что  $T(k'')$  является как раз  $b$ -расходимостью  $Z_1^{-1}$ , о которой говорилось в связи с (14.25). Этот факт показывает, что хотя диаграмма на фиг. 25 построена из диаграммы на фиг. 22 с помощью добавления линии, обходящей лишь одну точку, все же окончательное интегрирование содержит две величины  $Z_1^{-1}$  в двух точках и поэтому симметрично относительно правой и левой стороны. Это положение можно установить в любом порядке теории возмущений<sup>1)</sup>. Третий член в (14.35) может быть исключен с помощью перенормировки массы  $\delta x$  и перенормировки, связанной с константой  $Z_2$ , в  $\epsilon^4$ -приближении, в результате чего мы придём к конечному результату  $I_c$ .

Для получения величин  $Z_1, Z_2, Z_3, \delta x$  этот метод можно распространить на любое приближение теории возмущений следующим образом [17]. Элемент  $S$ -матрицы, связанный с диаграммой собственной энергии или вершинной частью, в котором независимыми переменными интегрирования являются  $(k^{(1)}, \dots, k^{(n)})$ , обозначим через  $M$ , а диаграмму, получаемую из указанных выше исключением внутренних линий с импульсами  $(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ , будем называть  $(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ -редуцированной диаграммой. Выделим из  $M$  [с помощью (14.11)] все возможные произведения  $T(k^{(i)}) \times k^{(i)}$ -редуцированные диаграммы, где  $T(k^{(i)})$  — бесконечные константы,

<sup>1)</sup> В этом доказательстве Салам ввел представление о „категории“. Это представление затем было распространено на другие случаи [23].



получаемые в результате  $k^{(i)}$ -субинтегрирований ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Остающиеся части не расходятся относительно  $k^{(i)}$ -интегрирований. Затем выполняем  $(k^{(i)}k^{(j)})$  ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \neq j$ )-субинтегрирования указанных частей.

Эти интегрирования приводят к бесконечным членам в виде произведений  $T(k^{(i)}k^{(j)}) \times (k^{(i)}k^{(j)})$ -редуцированные диаграммы, где  $T(k^{(i)}k^{(j)})$ —бесконечные константы, получаемые в результате  $(k^{(i)}, k^{(j)})$ -субинтегрирований. Повторяя аналогичные методы выделения и отбрасывания бесконечностей, можно получить конечный результат. Бесконечная константа  $T(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ , к которой мы придем на последней стадии исключения бесконечностей в результате  $(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ -субинтегрирования, называется истинной расходимостью  $(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ -субинтегрирования.

Поскольку расходимости  $T(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ , появляющиеся в указанном выше методе, входят множителями при  $(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ -редуцированных диаграммах, они включаются в величины  $Z_1, Z_2, Z_3$  и  $\delta x$  более низких порядков приближения, за исключением случая, когда  $T(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$  является истинной расходимостью, к которой мы приходим на последней стадии рассматриваемой процедуры. Эта истинная расходимость должна быть исключена с помощью величин  $Z_1, Z_2, Z_3$  и  $\delta x$  в том же приближении, что и рассматриваемая диаграмма. Тогда мы получим бесконечный результат  $I_c$

$$I_c = [1 - T(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})] \Phi_c, \quad (14.37)$$

в котором

$$\begin{aligned} \Phi_c &\equiv [1 - T(k^{(1)}, \dots, k^{(n-1)}) - T(k^{(2)}, \dots, k^{(n)}) - \dots] \equiv \\ &\equiv [1 - T(k^{(1)}, \dots, k^{(n-2)}) - T(k^{(2)}, \dots, k^{(n-1)}) - \dots] \dots \equiv \\ &\equiv [1 - T(k^{(1)}) - T(k^{(2)}) - \dots] M. \end{aligned} \quad (14.38)$$

Обозначение „ $-T(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ “ указывает на операцию отбрасывания расходимостей  $T(k^{(1)}, \dots, k^{(m)})$ .

## § 10. Примеры

### Пример 1. Лэмбовский сдвиг и наглядное истолкование Вельтона

Обозначим электрическую напряженность собственного поля вокруг электрона через  $E(x)$ . Уравнение Ньютона для движения электрона имеет вид

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = eE(x), \quad (14.39)$$

где  $x$ —трехмерный вектор, характеризующий положение электрона. Используя амплитуду Фурье  $E(l)$  функции  $E(x)$

$$E(x) = \sum_l E(l) e^{i(l \cdot x - lt)} \quad (l \equiv |l|), \quad (14.40)$$

можно решение уравнения (14.39) при условии, что  $x=0$  при  $E=0$ , записать следующим образом:

$$x = - \sum_1 \frac{e}{m} \frac{1}{l^2} E(l) e^{i(l \cdot x - lt)}. \quad (14.41)$$

Другими словами, координаты, характеризующие положение электрона, испытывают флуктуации величиной  $x$ , обусловленные наличием собственного поля электрона. В последующем изложении вместо  $x$  будем писать  $\delta x$ , так как эта величина описывает флуктуации положения.

В низшем порядке теории возмущений величину  $E$  можно рассматривать как электрическую напряженность поля, связанную с потенциалом  $A_\mu^{(n)}(x)$  в (12.29). Поэтому, используя (7.64) и (9.50), получаем

$$((E(l) \cdot E(l'))_0 = \frac{1}{2lV} \{(l, l) - 3l^2\} \delta_{l, l'} = -\frac{l}{V} \delta_{l, l'}. \quad (14.42)$$

Здесь символом  $( )_0$  обозначено усреднение по состоянию, в котором отсутствуют фотоны.

Подставляя (14.41) в (14.42), найдем

$$(\delta x \cdot \delta x)_0 = \frac{1}{V} \sum_1 \frac{e^2}{m^2} \frac{1}{l^3} = \frac{e^2}{(2\pi)^3 m^3} \int d^3 l \frac{1}{l^3} = \frac{e^2}{2\pi^2 m^2} \int \frac{dl}{l}. \quad (14.43)$$

Когда электрон вместе со своим собственным полем движется во внешнем потенциале  $\Phi(x)$ , его движение представляется в виде суперпозиции медленного перемещения, обусловленного внешним полем, и быстрых флуктуаций  $\delta x$ , обусловленных реакцией излучения. Если пренебречь высшими порядками ( $> 2$ ) малой величины  $\delta x$ , то можно написать

$$\Phi(x + \delta x) \approx \Phi(x) + \delta x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi(x) + \frac{1}{2} \delta x_k \delta x_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \Phi(x).$$

Так как три направления  $\delta x$  ( $k=1, 2, 3$ ) между собой с физической точки зрения равноправны, то имеем

$$(\Phi(x + \delta x))_0 \approx \Phi(x) + \frac{1}{2} (\delta \bar{x})^2 \Delta \Phi(x), \quad (14.44)$$

где

$$(\delta \bar{x})^2 = \frac{1}{3} ((\delta x \cdot \delta x))_0.$$

В задаче об электроне в атоме водорода потенциал  $\Phi(x)$  является кулоновским потенциалом, образованным протоном, и имеет вид

$$\Phi(x) = -\frac{e^2}{4\pi r} \quad (r \equiv |x|), \quad (14.45)$$

где предполагается, что начало координат совпадает с местонахож-

дением протона. Отсюда мы видим, что изменение в энергии, обусловленное реакцией излучения, равно

$$\begin{aligned} \Delta E &= (\psi^* \{ \Phi(x + \delta x) - \Phi(x) \} \psi)_0 = \frac{1}{2} (\psi^* (\delta \bar{x})^2 \psi \cdot \Delta \Phi) = \\ &= \frac{1}{2} (\delta \bar{x})^2 |\psi(0)|^2, \end{aligned} \quad (14.46)$$

где учтено соотношение

$$\Delta \frac{1}{4\pi r} = -\delta^3(x).$$

Подставляя (14.43) в (14.46), получаем

$$\Delta E = \frac{e^4}{12\pi^2 m^2} \int \frac{dl}{l} \cdot |\psi(0)|^2. \quad (14.47)$$

С другой стороны, мы знаем, что

$$|\psi(0)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{\pi n^3 a^3} & \text{для электрона в } S\text{-состоянии} \\ 0 & \text{для электрона в } P\text{-состоянии} \end{cases}, \quad (14.48a)$$

где

$$a = \frac{4\pi}{m e^2}, \quad (14.48b)$$

а  $n$  — главное квантовое число. Таким образом, для электрона в  $2S$ -состоянии имеем выражение

$$\Delta E = \frac{e^4}{96\pi^3 m^2 a^3} \int \frac{dl}{l}, \quad (14.49)$$

полученное Вельтоном [28] указанным полуклассическим методом.

Несмотря на то, что в собственном электромагнитном поле имеется много фотонов высоких энергий, можно ограничиться нерелятивистским вычислением, ввиду того что главный вклад от таких фотонов может быть включен в наблюдаемую массу электрона (т. е. учитывается перенормировкой массы). Поэтому область интегрирования по импульсам  $l$  в (14.49) можно ограничить условием

$$l \leq m. \quad (14.50a)$$

Легко видеть, что (14.49) содержит в себе „инфракрасную катастрофу“. Однако, как мы видели в гл. 13, пример 4, это не является существенной трудностью квантовой теории поля и поэтому можно поступить следующим образом.

Как хорошо известно из нерелятивистской квантовой механики электрона, электрон в  $2S$ -состоянии атома водорода имеет энергию  $(2\pi R_y/4)$  [ $R_y$  — постоянная Ридберга, равная  $m e^4/(4\pi)^2$ ]. Другими словами, этот электрон обладает частотой  $(R_y/4)$ . Поэтому можно принять предположение о том, что при рассмотрении эффекта флуктуаций, обусловленных фотонами, можно пренебречь фотонами с импульсами, меньшими чем  $2\pi R_y/4$ . Отсюда импульсы  $l$  в (14.49)

должны удовлетворять неравенству

$$l \geq \frac{2\pi R_y}{4}. \quad (14.50б)$$

Тогда получаем

$$\Delta E = \frac{e^4}{96\pi^3 m^2 a^3} \ln \left( \frac{4m}{2\pi R_y} \right) = \frac{m}{6\pi} \left( \frac{e^2}{4\pi} \right) \ln \left\{ \frac{8(4\pi)^2}{e^2} \right\}. \quad (14.51)$$

Это равенство дает  $\Delta E = 1600$  мзгц. Учитывая, что проведенные вычисления являются лишь грубой оценкой, основывающейся на интуитивном представлении о собственном поле, мы можем заключить, что этот результат находится в приблизительном согласии с экспериментальной величиной 1057,77 мзгц, установленной Лэмбом и Ризерфордом [12].

### Пример 2. Лэмбовский сдвиг и аномальный магнитный момент электрона

Сейчас мы проведем более корректное вычисление величины лэмбовского сдвига.

Уравнение Шредингера в представлении взаимодействия записывается в виде

$$i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \Psi[\sigma] = \{ H'[x:n] + \psi^*(x) \Phi(x) \psi(x) \} \Psi[\sigma],$$

где  $H'[x:n]$  — сумма хорошо известных электромагнитного взаимодействия электронного поля и контрчленов, связанных с массой и зарядом, а  $\psi^* \Phi \psi$  — внешний потенциал.

Вводя преобразование

$$\Psi[\sigma] = v^{-1}[\sigma] S^{-1}[\sigma] \Psi[\sigma]$$

с помощью операторов  $S[\sigma]$  и  $v[\sigma]$ , удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{aligned} i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} S[\sigma] &= H'[x:n] S[\sigma], \\ i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} v[\sigma] &= \psi^*(x) \Phi(x) \psi(x) v[\sigma], \end{aligned}$$

найдем

$$i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \Psi[\sigma] = \{ \Psi^*(x) \Phi(x) \Psi(x) - \varphi^*(x) \Phi(x) \varphi(x) \} \Psi[\sigma]. \quad (14.52a)$$

Операторы  $\Psi$ ,  $\varphi$  и  $A_\mu$  определяются равенствами

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= v^{-1}[\sigma] S^{-1}[\sigma] \phi(x) S[\sigma] v[\sigma], \\ A_\mu(x) &= v^{-1}[\sigma] S^{-1}[\sigma] A_\mu(x) S[\sigma] v[\sigma], \\ \varphi(x) &= v^{-1}[\sigma] \phi(x) v[\sigma]. \end{aligned}$$

С помощью (6.5а) легко доказать, что  $\varphi$  удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \{\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m + \Phi(x) \gamma_4\} \varphi(x) &= 0, \\ \partial_{\mu} \bar{\varphi}(x) \gamma_{\mu} - \bar{\varphi}(x) \{m + \gamma_4 \Phi(x)\} &= 0. \end{aligned} \quad (14.52б)$$

Так как (14.52а) имеет вид уравнения Шредингера с гамильтонианом взаимодействия

$$\boldsymbol{\psi}^*(x) \Phi(x) \boldsymbol{\psi}(x) - \varphi^*(x) \Phi(x) \varphi(x),$$

то оператор энергии  $T_4^2$  в гейзенберговском представлении может быть записан в виде

$$\begin{aligned} T_4^2 &= U^{-1} [\sigma] (T_4 + \int d^3x \{ \boldsymbol{\psi}^*(x) \Phi(x) \boldsymbol{\psi}(x) - \\ &\quad - \varphi^*(x) \Phi(x) \varphi(x) \}) U[\sigma]. \end{aligned} \quad (14.52в)$$

Здесь  $T_4$  — оператор энергии (определенный как оператор смещения для  $\boldsymbol{\psi}$ ,  $\hat{A}_{\mu}$ ) в  $\Psi$ -представлении, а  $U[\sigma]$  — преобразование, связывающее гейзенберговское представление с  $\Psi$ -представлением. Соотношение (14.52в) может быть получено с помощью соображений, аналогичных тем, которые были использованы при выводе (10.32).

Вводя в рассмотрение вектор  $\Phi_e$ , являющийся собственным вектором оператора  $T_4$ , можно энергию возмущения  $\Delta E$ , обусловленную внешним потенциалом, представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta E &= (U^{-1} [\sigma] [T_4 + \int d^3x \{ \boldsymbol{\psi}^*(x) \Phi(x) \boldsymbol{\psi}(x) - \\ &\quad - \varphi^*(x) \Phi(x) \varphi(x) \}] U[\sigma] - T_4), \end{aligned}$$

где символ  $( )$  означает усреднение по невозмущенному состоянию  $\Phi_e$ . Уравнение для  $U[\sigma]$  выводится из (14.52а) и имеет вид

$$i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} U[\sigma] = \{ \boldsymbol{\psi}^*(x) \Phi(x) \boldsymbol{\psi}(x) - \varphi^*(x) \Phi(x) \varphi(x) \} U[\sigma].$$

Точно тем же способом, каким было доказано равенство (13.8), можно показать

$$\Delta E = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{1}{n+m+1} (U^{(n)}[-\infty, \sigma] \int d^3x \times$$

$$\times \{ \boldsymbol{\psi}^*(x) \Phi(x) \boldsymbol{\psi}(x) - \varphi^*(x) \Phi(x) \varphi(x) \} U^{(m)}[\sigma, -\infty]), \quad (14.53а)$$

где  $U^{(l)}[\sigma, -\infty]$  — член  $l$ -го порядка в разложении внешнего потенциала  $\Phi$  в  $U[\sigma]$ , или

$$U[\sigma] = \sum_l U^{(l)}[\sigma, -\infty].$$

Равенство (14.53а) может быть записано в виде [см. (13.11)]:

$$\Delta E = (i | \int d^3x V^e(x) | i) + \sum_l \frac{(l | \int d^3x V^e(x) | v) (v | \int d^3x V^e(x) | i)}{\omega_l - \omega_v}, \quad (14.53б)$$

где  $\omega_i$  и  $\omega_v$  — энергии соответственно начального состояния  $\Phi_i$  и виртуального состояния  $\Phi_v$  и

$$V^e(x) = \psi^*(x) \Phi(x) \psi(x) - \varphi^*(x) \Phi(x) \varphi(x) = \\ = v^{-1} [\sigma] \{ S^{-1} [\sigma] \psi^*(x) \Phi(x) \psi(x) S[\sigma] - \\ - \varphi^*(x) \Phi(x) \varphi(x) \} v[\sigma]. \quad (14.54)$$

Оператор в скобках описывает как раз радиационную поправку в матрице перехода, описывающей упругое рассеяние электрона  $\psi$ . Таким образом, ее член, пропорциональный  $e^2$ , равен сумме выражений (13.71), (13.75) (см. гл. 13, пример 5) и вклада от контрчленов, связанных с массой и зарядом [см. (14.2) и (14.3)]. Последние контрчлены компенсируют соответствующие бесконечные члены (т. е. члены  $A^0$  и  $C^0$ ). Оператор преобразования  $v[\sigma]$  может быть исключен с помощью замены  $\psi \rightarrow \varphi$ . Таким образом, для члена  $V^{(2)}(x)$  в выражении для  $V^{(e)}(x)$ , пропорционального  $e^2$ , имеем<sup>1)</sup>

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x V^{(2)}(x) = \\ = \Lambda + \frac{i}{15\pi m^2} \frac{e^2}{4\pi} \int d^4x \varphi^*(x) \square \Phi(x) \varphi(x) + \dots \quad (14.55)$$

Когда внешний потенциал  $\Phi(x)$  постоянен по времени, в нерелятивистском приближении получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3x V^{(2)}(x) = \frac{1}{3\pi m^2} \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \ln \frac{m}{2k_0} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right\} \int d^3x \varphi^* \varphi \Delta \Phi + \\ + \frac{1}{4\pi m} \frac{e^2}{4\pi} \int d^3x (\varphi^* \gamma \varphi \cdot \partial \Phi) \quad (14.56)$$

[см. (13.77)].

Член  $V^{(1)}(x)$  в (14.54), пропорциональный  $e$ , дает в лэмбовский сдвиг вклад следующей величины:

$$\Delta E^{(1)} = \sum_v \frac{(i | \int d^3x V^{(1)}(x) | v) (i | \int d^3x V^{(1)}(x) | v)}{\omega_i - \omega_v}, \quad (14.57)$$

где

$$\omega_i = E_i, \\ \omega_v = E_v + k. \quad (14.58)$$

В этом выражении  $E_v$  и  $k$  — энергии электрона и фотона в виртуальном состоянии, а  $E_i$  — энергия электрона в начальном состоянии.

<sup>1)</sup> Потенциал  $\Phi(x)$  соответствует (14.45).

Величина  $V^{(1)}(x)$  получается с помощью (13.58а) и в нерелятивистском приближении имеет вид

$$\begin{aligned} V^{(1)}(x) &= v^{-1}[\sigma] \left\{ \frac{e}{m} \sum_{\mathbf{k}, r} \frac{1}{k \sqrt{2kV}} \psi^*(x) \psi(x) (\mathbf{e}^{(r)} \cdot \partial \Phi(x)) \right\} v[\sigma] = \\ &= \frac{e}{m} \sum_{\mathbf{k}, r} \frac{1}{k \sqrt{2kV}} \varphi^*(x) \varphi(x) (\mathbf{e}^{(r)} \cdot \partial \Phi(x)). \end{aligned} \quad (14.59)$$

Так как каждый фотон может быть поляризован по двум направлениям ( $r=1, 2$ ), то величину  $\sum_r (\mathbf{e}^{(r)} \cdot \partial \Phi)^2$  в (14.57) можно заменить величиной  $(\partial \Phi \cdot \partial \Phi)$ . Подставляя (14.59) в (14.57), находим

$$\begin{aligned} \Delta E^{(1)} &= -\frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2} \sum_{\nu} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k^3 (k + E_{\nu} - E_i)} \times \\ &\times \left( i \left| \int d^3 x \varphi^*(x) \varphi(x) \partial_k \Phi(x) \right| v \right) \left( v \left| \int d^3 x \varphi^*(x) \varphi(x) \partial_k \Phi(x) \right| i \right). \end{aligned} \quad (14.60)$$

Эти вычисления могут быть произведены следующим образом. Уравнения (14.52б) приводят к равенствам

$$\begin{aligned} \left( v \left| \int d^3 x \varphi^* \varphi \partial_k \Phi \right| i \right) &= \\ &= - \left( v \left| \int d^3 x \bar{\varphi} (\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m + \Phi \gamma_4) \partial_k \varphi \right| i \right) = \\ &= \left( v \left| \int d^3 x \{ \partial_{\mu} \bar{\varphi} \gamma_{\mu} - \bar{\varphi} (m + \Phi \gamma_4) \} \partial_k \varphi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \partial_4 \bar{\varphi} \gamma_4 \partial_k \varphi - \bar{\varphi} \gamma_4 \partial_4 \partial_k \varphi \right| i \right) = \\ &= i \frac{\partial}{\partial t} \left( v \left| \int d^3 x \varphi^* \partial_k \varphi \right| i \right) = \\ &= (E_i - E_{\nu}) \left( v \left| \int d^3 x \varphi^* \partial_k \varphi \right| i \right). \end{aligned} \quad (14.61)$$

Подставляя (14.61) в (14.60), будем иметь

$$\Delta E^{(1)} = - \sum_{\nu} \sum_{l=1,2} \frac{e^2}{6\pi^2 m^2} \int_{k_0}^{\infty} \frac{dk}{k} \frac{(E_l - E_{\nu})^2}{(k + E_{\nu} - E_l)} \left| \left( v \left| \int d^3 x \varphi^* \partial_l \varphi \right| i \right) \right|^2, \quad (14.62)$$

$$\Delta E^{(1)} = - \frac{e^2}{6\pi^2 m^2} \sum_{\nu} \sum_{l=1,2,3} (E_{\nu} - E_l) \left| \left( v \left| \int d^3 x \varphi^* \partial_l \varphi \right| i \right) \right|^2 \ln \frac{E_{\nu} - E_l}{k_0}. \quad (14.63)$$

Выражение (14.63) мы перепишем с помощью равенства [1]

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} (E_{\nu} - E_l) \left| \left( v \left| \int d^3 x \varphi^* \partial_k \varphi \right| i \right) \right|^2 \ln (E_{\nu} - E_l) &= \\ = \ln (E_{\nu} - E_l)_{\text{ср.}} \sum_{\nu} (E_{\nu} - E_l) \left| \left( v \left| \int d^3 x \varphi^* \partial_k \varphi \right| i \right) \right|^2. \end{aligned} \quad (14.64)$$

Среднее значение  $\ln(E_\sigma - E_i)_{\text{ср.}}$  равно 17,8 Ry, если только состояние, обозначенное индексом  $i$ , является  $2S$ -состоянием. Используя равенство [1]

$$\sum_{\sigma} \sum_i (E_\sigma - E_i) \left| \left( v \left| \int d^3 x \varphi^* \partial_i \varphi \right| i \right) \right|^2 = \frac{1}{2} \left( i \left| \int d^3 x \varphi^* \varphi \Delta \varphi \right| i \right), \quad (14.65)$$

можно выражение (14.63) записать следующим образом:

$$\Delta E^{(1)} = -\frac{e}{12\pi^2 m^2} \left( i \left| \int d^3 x \varphi^* \varphi \Delta \varphi \right| i \right) \ln \frac{(E_\sigma - E_i)_{\text{ср.}}}{k_0}. \quad (14.66)$$

Величина лэмбовского сдвига  $\Delta E$  с учетом членов, пропорциональных  $e^2$ , равна  $\Delta E^{(1)} + \Delta E^{(2)}$ , где

$$\Delta E^{(2)} = \left( i \left| \int d^3 x V^{(2)}(x) \right| i \right). \quad (14.67)$$

Используя (14.56), найдем

$$\begin{aligned} \Delta E = & \frac{1}{3\pi m^2} \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \ln \frac{m}{2(E_\sigma - E_i)_{\text{ср.}}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right\} \left( i \left| \int d^3 x \varphi^* \varphi \Delta \Phi \right| i \right) + \\ & + \frac{1}{4\pi m} \frac{e^2}{4\pi} \left( i \left| \int d^3 x (\varphi^* \gamma_\varphi \cdot \partial \Phi) \right| i \right). \end{aligned} \quad (14.68)$$

Следует заметить, что в (14.68) нет никакой „инфракрасной катастрофы“ при  $k_0 \rightarrow 0$ . Это обстоятельство является иллюстрацией общих соображений, изложенных в гл. 13, пример 5.

Последний член в (14.68) можно вычислить следующим способом:

$$\begin{aligned} & \left( i \left| \int d^3 x (\varphi^* \gamma_\varphi \cdot \partial \Phi) \right| i \right) = \\ & = \frac{1}{2m} \left( i \left| \int d^3 x \bar{\varphi} \{ \gamma_4 \gamma_k (m + \gamma_4 \Phi) - (m + \gamma_4 \Phi) \gamma_k \gamma_4 \} \varphi \cdot \partial_k \Phi \right| i \right) = \\ & = -\frac{1}{2m} \left( j \left| \int d^3 x \{ \partial_\mu \bar{\varphi} \gamma_\mu \gamma_k \gamma_4 \varphi + \bar{\varphi} \gamma_4 \gamma_k \gamma_\mu \partial_\mu \varphi \} \partial_k \Phi \right| i \right) = \\ & = \frac{1}{2m} \partial_4 \left( i \left| \int d^3 x \bar{\varphi} \gamma_k \varphi \partial_k \Phi \right| i \right) - \\ & - \frac{1}{2m} \left( i \left| \int d^3 x (\partial_i \varphi^* \gamma_i \gamma_k \varphi + \varphi^* \gamma_k \gamma_i \partial_i \varphi) \cdot \partial_k \Phi \right| i \right) = \\ & = \frac{1}{2m} \left( i \left| \int d^3 x \varphi^* \varphi \Delta \Phi - 2i \int d^3 x \varphi^* (\sigma \cdot \mathbf{grad} \Phi, \mathbf{grad}) \varphi \right| i \right), \end{aligned} \quad (14.69)$$

где учтены уравнения (14.52б), соотношения (3.49) и равенство

$$\partial_4 \left( i \left| \int d^3 x \bar{\varphi} \gamma_k \varphi \cdot \partial_k \Phi \right| i \right) = (E_i - E_i) \left( i \left| \int d^3 x \bar{\varphi} \gamma_k \varphi \cdot \partial_k \Phi \right| i \right) = 0. \quad (14.70)$$

Когда  $\Phi$  — центрально-симметричный потенциал, мы имеем

$$[\mathbf{grad} \Phi, \mathbf{grad}] = i \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{L}, \quad (14.71)$$



где

$\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{grad}]$  (оператор момента количества движения),  
а  $r = |\mathbf{x}|$ .

Подставляя (14.69) в (14.68), получаем

$$\Delta E = \frac{1}{3\pi m^2} \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \ln \frac{m}{2(E_v - E)_{\text{ср.}}} + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right\} \left( i \left| \int d^3 x \psi^* \varphi \cdot \Delta \Phi \right| i \right) + \\ + \frac{1}{4\pi m^2} \frac{e^2}{4\pi} \left( i \left| \int d^3 x \psi^* (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{L}) \varphi \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right| i \right). \quad (14.72)$$

Далее выражение  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{L})$  может быть записано в виде

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{L}) = \left( \mathbf{L} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \right)^2 - \mathbf{L}^2 - \frac{1}{4} \boldsymbol{\sigma}^2.$$

Обозначая полный и орбитальный моменты количества движения в состоянии, характеризуемом индексом  $i$ , соответственно через  $j$  и  $l$ , можно для величины  $q \equiv (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{L})$  получить следующие значения:

$$q = j(j+1) - l(l+1) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) = \\ = \begin{cases} l & \text{для } j = l + \frac{1}{2} \\ -l - 1 & \text{для } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (14.73)$$

В задаче об электроны в атоме водорода  $\Phi(x)$  является кулоновским потенциалом (14.45) и поэтому

$$\Delta E = \frac{e^2}{3\pi m^2} \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \ln \frac{m}{2(E_v - E)_{\text{ср.}}} + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right\} |\varphi_i(0)|^2 + \\ + \frac{e^2}{16\pi^2 m^2} \frac{e^2}{4\pi} q \int d^3 x \frac{1}{r^3} |\varphi_i(x)|^2, \quad (14.74)$$

где  $\varphi_i$  — волновая функция электрона в состоянии, характеризуемом индексом  $i$ .

Когда индексом  $i$  характеризуется  $S$ -состояние, то  $q = 0$  и поэтому  $\Delta E$  дается первым членом выражения (14.74). С другой стороны, когда состояние, характеризуемое индексом  $i$ , не является  $S$ -состоянием, мы имеем  $|\varphi_i(0)| = 0$  и поэтому  $\Delta E$  дается вторым членом в выражении (14.74). В последнем случае имеем

$$\Delta E = \frac{e^2}{16\pi^2 m^2} \frac{e^2}{4\pi} \frac{q}{n^2 a^2 l(l+1) (l + 1/2)}, \quad (14.75)$$

где  $a$  определяется с помощью (14.48б).

Для  $S$ -состояния выражение (14.74) дает

$$\Delta E = \frac{e^4}{12\pi^2 m^2} \frac{1}{\pi n^3 a^3} \left\{ \ln \frac{m}{2(E_v - E)_{\text{ср.}}} + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} \right\}. \quad (14.76)$$

Разница в сдвигах уровней между  $2S$ -состоянием и  $2P_{1/2}$ -состоянием равна

$$\begin{aligned} \Delta E (n=2, l=0) - \Delta E \left( n=2, l=1, j=l-\frac{1}{2} \right) = \\ = \frac{m}{6\pi} \left( \frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \left\{ \ln \frac{m}{2(E_0 - E_j)_{\text{ср.}}} + \frac{5}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \right\}, \end{aligned} \quad (14.77)$$

или численно  $1050 \text{ мггц}$ . Этот результат находится в блестящем согласии с экспериментом.

Теперь рассмотрим аномальный магнитный момент электрона. Второй член в (13.696) показывает, что в  $e^2$ -приближении радиационная поправка к магнитному моменту равна [см. (7.114)]

$$\delta\mu = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^2}{4\pi} \right) \mu, \quad (14.78)$$

где

$$\mu = -\frac{e}{2m}. \quad (14.79)$$

В этом выражении  $\mu$  — хорошо известный собственный магнитный момент электрона. Величина (14.78) находится в хорошем согласии с экспериментальным результатом  $(\delta\mu/\mu) = 0,00114$ .

С учетом этих успехов теории перенормировок можно сказать, что собственные поля приводят к реально наблюдаемым эффектам и что теория перенормировок является, по-видимому, шагом в направлении, которое в один прекрасный день приведет к построению последовательной теории элементарных частиц.

## § 11. Различные проблемы в теории перенормировок<sup>1)</sup>

С помощью метода перенормировок можно устранить все бесконечности, встречающиеся в  $S$ -матрице квантовой электродинамики. Тем не менее, чтобы рассматривать успех квантовой электродинамики в объяснении экспериментальных данных как успех теории перенормировок, следует построить непротиворечивую квантовую теорию поля, основывающуюся на теории перенормировок.

Выше мы видели, что метод перенормировок приводит к калибровочно-инвариантной квантовой электродинамике и что наблюдаемый заряд имеет определенную величину  $e$ , независимо от типа заряженных полей, если только мы исходим из одной и той же величины  $e$  истинного (а не наблюдаемого) заряда всех заряженных полей (см. § 8).

<sup>1)</sup> *Примечание при корректуре.* Рекомендуется сравнить этот параграф с примечанием при корректуре, добавленном к гл. 18 (стр. 366), где пересмотрен конец § 11 настоящей главы в соответствии с последними успехами теории перенормировок.

Чтобы теория была полностью последовательной, необходимо потребовать, чтобы ряд теории возмущений сходил к определенному конечному результату. Обозначим через  $N_M(n)$  число диаграмм Фейнмана в  $n$ -ом порядке теории возмущений, описывающих некоторый переход  $M$ . В общем случае получено<sup>1)</sup>, что число  $f_M(n) = N_M(n+2)/N_M(n)$  быстро возрастает с ростом  $n$ . Поэтому маловероятно, что члены более высоких порядков, для которых  $f_M(n) > 137$ , дадут лишь малый вклад в  $S$ -матрицу. Следовательно, представляется очень сомнительным, что ряд теории возмущений с перенормированными членами является сходящимся. Такого рода сомнения высказывались многими авторами [4,11]. Более того, рядом авторов было показано, что перенормированный ряд теории возмущений расходится даже в простом случае скалярного поля  $U$  с взаимодействием вида  $\lambda U^3$  (и в области энергий, в которой невозможно рождение свободных частиц)<sup>2)</sup> [6, 7, 24, 25, 20].

Если расходимость перенормированного ряда теории возмущений имеет место также и в квантовой электродинамике, то снова возникает вопрос о причине блестящего согласия между экспериментальными данными и результатами вычислений с учетом лишь низших порядков теории возмущений. Не доказано, но возможно, что это согласие проистекает из того факта, что разложение в ряд  $S$ -матрицы является асимптотическим разложением по константе связи  $e_1$ , которая достаточно мала и поэтому обуславливает лишь малую величину ошибки в первых членах теории возмущений. Если это так, то точка  $e_1 = 0$  должна быть точкой сингулярности  $S$ -матрицы и величина ошибки должна до некоторого порядка теории возмущений уменьшаться, а затем снова возрастать.

Представляется неразумным ожидать, что теория перенормировок должна основываться обязательно на разложении в ряд теории возмущений. Было сделано много попыток сформулировать теорию перенормировок независимо от ряда теории возмущений [9, 14]. Теория функций распространения в гейзенберговском представлении, которую мы обсудим в гл. 18, также представляет интересные возможности переформулировки вопросов перенормировки в виде, независимом от ряда теории возмущений.

Даже если бы нам удалось сформулировать теорию перенормировок без каких-либо приближений, все же было бы необходимо пользоваться некоторыми приближениями, чтобы такого рода теорию применить к сложным системам (таким, как системы квантовой электродинамики, мезонные и нуклонные поля и т. д.). Поэтому следовало бы построить такую модель, которая была бы

<sup>1)</sup> См. вычисление  $N_M(n)$  в работе Херста [6, 7].

<sup>2)</sup> Это ограничение введено для того, чтобы избежать вклада от порога интерференции (см. гл. 13, пример 1).

достаточно простой, чтобы к ней можно было применить теорию перенормировок без каких-либо приближений. Такую простую модель предложил Ли [13]. Перенормировка, проводимая на примере этой модели, приводит к некоторой трудности, которая подробно будет обсуждена в гл. 18. Там будет показано, что эту трудность можно устранить, отбросив эффекты, связанные с частицами высоких энергий в собственном поле, и сделав перенормированные константы конечными, а также если константы связи достаточно малы. Таким образом, хотя теория перенормировок была введена для устранения „ультрафиолетовой катастрофы“, мы для получения непротиворечивой теории должны сделать константы связи конечными. Если бы мы в квантовой электродинамике сталкивались с трудностью, аналогичной трудности в случае модели Ли, мы должны были бы снова объяснить хорошо известный успех теории перенормировок квантовой электродинамики. Одним из возможных объяснений является следующее. Очевидно, что в области высоких энергий эффекты, связанные с различными частицами, тесно переплетены между собой и поэтому систему электронов и фотонов нельзя реально рассматривать как замкнутую систему. Если различные частицы играют роль частиц дополнительных полей, т. е. уменьшают число частиц высоких энергий в собственном поле, то перенормированные константы могут быть конечными. Тогда, ввиду малости электрического заряда, трудность, с которой мы встречаемся в модели Ли, может и не появиться в квантовой электродинамике<sup>1)</sup>.

В данной главе мы рассмотрели только квантовую электродинамику. В следующей главе мы рассмотрим теорию перенормировок других полей.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bethe H. A., Phys. Rev., 72, 339 (1947) (см. перевод в сборнике: Сдвиг уровней атомных электронов, ИЛ, 1950).
2. Dyson F. J., Phys. Rev., 75, 485, 1736 (1949) (см. перевод в сборниках: Сдвиг уровней атомных электронов и Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).
3. Dyson F. J., Phys. Rev., 83, 608 (1951).
4. Dyson F. J., Phys. Rev., 85, 631 (1952).
5. Epstein S. T., Phys. Rev., 73, 177 (1948).
6. Hurst C. A., Proc. Cambr. Phil. Soc., 48, 625 (1952).
7. Hurst C. A., Proc. Roy. Soc., A214, 44 (1952).
8. Ito D., Koba Z., Tomonaga S., Prog. Theor. Phys., 2, 216 (1947).

<sup>1)</sup> Вопросы, связанные с трудностями квантовой теории поля и возможными путями их устранения, подробно рассмотрены в статьях и монографии Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова [29—32].— *Прим. ред.*

9. Källén G., *Helv. Phys. Acta*, **25**, 417 (1952).
10. Kamefuchi S., Umezawa H., *Prog. Theor. Phys.*, **8**, 579 (1952).
11. Katayama Y., Yamazaki K., *Prog. Theor. Phys.*, **7**, 601 (1952).
12. Lamb W. E., Retherford R. C., *Phys. Rev.*, **72**, 241 (1947).
13. Lee T. D., *Phys. Rev.*, **95**, 1329 (1954).
14. Lehmann H., *Nuovo Cimento*, **11**, 342 (1954).
15. Lewis H. W., *Phys. Rev.*, **73**, 173 (1948).
16. Lüders G., *Zs. Naturforsch.*, **7a**, 206 (1952).
17. Mathews P. T., Salam A., *Rev. Mod. Phys.*, **23**, 311 (1951).
18. Nafe E., Nelson E. B., Rabi I. I., *Phys. Rev.*, **71**, 914 (1947).
19. Pasternack S., *Phys. Rev.*, **54**, 1113 (1938).
20. Petermann A., *Helv. Phys. Acta*, **26**, 731 (1953).
21. Salam A., *Phys. Rev.*, **82**, 216 (1951).
22. Schwinger J., *Phys. Rev.*, **74**, 1439 (1948) (см. перевод в сборнике: Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).
23. Takeda G., *Prog. Theor. Phys.*, **7**, 359 (1952).
24. Thirring W., *Helv. Phys. Acta*, **26**, 33 (1953).
25. Utiyama R., Imamura T., *Prog. Theor. Phys.*, **9**, 431 (1953).
26. Ward J. C., *Phys. Rev.*, **84**, 497 (1951).
27. Weisskopf V., *Phys. Rev.*, **56**, 81 (1939).
28. Welton T. A., *Phys. Rev.*, **74**, 1157 (1948).
- 29\*. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., *Успехи физич. наук*, **55**, 149 (1955).
- 30\*. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., *Успехи физич. наук*, **57**, 3 (1955).
- 31\*. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., *Nuovo Cimento*, **3**, 845 (1955).
- 32\*. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., *Введение в теорию квантованных полей*, М.—Л., 1957.

# Общий случай теории перенормировок

## § 1. Область применимости теории перенормировок

Теория перенормировок, основанная на использовании релятивистски ковариантного формализма квантовой теории волновых полей, имеет своей задачей переформулировку теории в ее несингулярной форме<sup>1)</sup>. Эффекты реакции собственных полей могут быть разделены на две части: наблюдаемую и ненаблюдаемую<sup>2)</sup>. Расходимости, появляющиеся в последней части, устраняются с помощью процедуры перенормировок с тем, чтобы получить определенные конечные результаты, которые могут быть сравнены с экспериментом. В этой связи великолепное согласие первых приближений теории возмущений с экспериментом можно понять лишь тогда, когда теория перенормировок приводит к несингулярной форме квантовой теории поля не только для квантовой электродинамики, но также и для других теорий, которые описывают поведение иных элементарных частиц. Отсюда возникает важная проблема об области применимости теории перенормировок.

В теории перенормировок существует много вопросов, которые имеют двойственное толкование. Это, по-видимому, связано с переходящим характером теории перенормировок. В существующей квантовой теории мы исходим из взаимодействий (т. е. из исходных первоначальных взаимодействий), которые играют важную роль в высших приближениях теории возмущений; эти эффекты наблюдаются так, как будто они обуславливаются непосредственно некоторыми взаимодействиями (т. е. вторичными взаимодействиями), без посредства виртуальных состояний<sup>3)</sup>. В теории перенормировок эти вторичные взаимодействия частично объединяются с некоторыми из первичных взаимодействий и приводят к конечным результатам. В настоящее время не существует критериев

<sup>1)</sup> Мы будем говорить о „несингулярной теории“ или „замкнутой теории“, когда все бесконечности в ней могут быть устранены с помощью конечного числа контрчленов в гамильтониане взаимодействия.

<sup>2)</sup> Например, собственная масса  $\delta x$  включается в наблюдаемую массу  $x' = x + \delta x$ . Интересной проблемой является выяснение вопроса о том, возможно ли в принципе экспериментальное наблюдение величины  $\delta x$ .

<sup>3)</sup> Вспомним член с массой (14.2), обусловленный эффектом собственной энергии.

разграничения того, какие взаимодействия являются первичными, а какие взаимодействия являются лишь следствием этих первичных взаимодействий. Таким образом, например, аномальный магнитный момент электрона может быть объяснен с помощью предположения о существовании первичного взаимодействия  $F_{\mu\nu}$ -типа, хотя он не может быть объяснен в рамках теории перенормировок, исходя из первичного взаимодействия  $A_\mu$ -типа. Эта неоднозначность в теории перенормировок проистекает из того обстоятельства, что с современной квантовой теорией совместимы все релятивистски- и калибровочно-инвариантные взаимодействия. Другими словами, эта проблема связана с проблемой ответа на вопрос „почему в природе существуют именно те или иные конкретные элементарные частицы, именно с теми или иными конкретными взаимодействиями“. К настоящему времени удовлетворительного ответа на этот вопрос не существует. Мы теперь исследуем условия применимости теории перенормировок при различных видах взаимодействия.

## § 2. Анализ размерностей

Предположим, что лагранжианы взаимодействия  $g_i L_i$  полей  $Q_\alpha^{(a)}$  (где  $a=1, 2, \dots$  обозначает различные поля, а  $\alpha=1, 2, \dots$  — пронумеровывает компоненты полей) таковы, что имеет место равенство

$$L' = \sum_i g_i L_i. \quad (15.1)$$

Величины  $Q_\alpha^{(a)}$  удовлетворяют соотношениям коммутации (8.14а) и (8.14б). Обозначим операторы производных, входящие в соотношения коммутации для  $a$ -поля, через  $d^{(a)}(\partial)$ . Наибольший порядок  $b^{(a)}$  оператора производных  $d^{(a)}(\partial)$  определяется спином  $a$ -поля, как показано в (8.52а) и (8.52б).

Для больших импульсов  $k \gg \kappa^{(a)}$  имеет место следующее приближенное равенство:

$$d^{(a)}(ik) \sim k^{b^{(a)}}. \quad (15.2)$$

Лагранжианы взаимодействия  $g_i L_i$  содержат величины  $Q^{(a)}(x)$  в комбинации<sup>1)</sup>  $D^{(a)}(\partial) Q^{(a)}(x)$ , где  $D^{(a)}(\partial)$  — операторы производных. Пользуясь истинными порядками  $t^{(a)}$  операторов  $D^{(a)}(\partial)$  (см. гл. 8, пример 6), мы приближенно можем записать (для больших  $k$ )

$$D^{(a)}(ik) D^{(a)}(ik) d^{(a)}(ik) \sim k^{b^{(a)} + 2t^{(a)}}. \quad (15.3)$$

Для удобства последующего изложения мы введем в рассмотрение ряд величин, характеризующих различный вид взаимо-

<sup>1)</sup> Суммировать по  $a$  не надо.

действий  $g_i L_i$ :

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_a t^{(a)} \lambda_i^{(a)}, \\ B_i &= \sum_a b^{(a)} \lambda_i^{(a)}, \\ C_i &= \sum_a i_i^{(a)}, \end{aligned} \quad (15.4)$$

где  $\lambda_i^{(a)}$  — число операторов поля  $Q^{(a)}$ , входящих в  $L_i$ . Другими словами;  $A_i$  — полная сумма величин истинных порядков операторов производных в  $L_i$ ;  $B_i$  — полная сумма величин  $b$  для операторов поля в  $L_i$ ;  $C_i$  — число операторов поля в  $L_i$ .

Используя (8.52а) и (8.52б), можно записать  $B_i$  в виде членов, характеризующих спин  $S^{(a)}$  поля; эта запись имеет вид

$$B_i = \sum_{a'} 2S^{(a')} \lambda_i^{(a')} + \sum_{a''} \lambda_i^{(a'')}. \quad (15.5)$$

Здесь величины  $(a')$  означают поля с ненулевыми массами покоя  $x^{(a')} \neq 0$  и спинами  $S^{(a')}$ , а  $a''$  — поля с нулевыми массами  $x^{(a'')} = 0$  и полуцелыми спинами. Так как каждое взаимодействие содержит четное число операторов поля с полуцелым спином, то из (15.5) можно заключить, что величина  $B_i$  всегда четная.

Введем в рассмотрение постоянные

$$\eta_i = A_i + \frac{B_i}{2} + C_i - 4 \quad (15.6)$$

(смысл постоянных  $\eta_i$  будет выяснен в следующем параграфе). Можно считать, что нормировка величин, характеризующих поле, выполнена таким образом, что операторы  $d^{(a)}$  имеют вид

$$d^{(a)}(\partial) = a_0 \partial^{(a)} + a_1 x^{(a)} \partial^{(a-1)} + \dots, \quad (15.7)$$

где  $a_0, a_1, \dots$  — безразмерные постоянные<sup>1)</sup>. В этом представлении в задачах с большими импульсами  $k \gg x^{(a)}$  оператор  $d^{(a)}(ik)$  не содержит величин размерности<sup>2)</sup>  $[L^n]$  ( $n \neq 0$ ), кроме  $k_\mu$ . Определим также константы связи  $g_i$  таким образом, чтобы коэффициенты операторов производных наивысшего порядка в  $D^{(a)}(\partial)$  в выражении для

$$L_i = \{\text{Произведение } D^{(a)}(\partial) Q^{(a)}(x)\} \quad (15.8)$$

были безразмерными. Тогда в выражении для  $S$ -матрицы при больших импульсах не должно быть других величин с ненулевой размерностью, кроме величин  $g_i$  и  $k_\mu$ .

<sup>1)</sup> Так, в случае векторного поля  $U_\mu$  (для которого  $d_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - (1/x^2) \delta_\mu \delta_\nu$ ), используя вместо  $U_\mu$  в качестве оператора поля величину  $V_\mu \equiv x U_\mu$ , получаем оператор  $d_{\mu\nu} = x^2 \delta_{\mu\nu} - \delta_\mu \delta_\nu$ , который имеет вид (15.7).

<sup>2)</sup> Символ  $[L^n]$  означает размерность  $n$ -ой степени длины.



### § 3. Размерности констант связи

Сейчас мы докажем, что размерности констант связи  $g_i$  равны  $[L^{\eta_i}]$ .

Так как  $g_i \int d^3 x L_i(x)$  имеет размерность энергии (т. е.  $[L^{-1}]$ ), то размерность  $L_i(x)$  есть  $[L^{-4}]$ . С другой стороны, (15.3), (8.14а) и (8.14б) показывают, что размерность величины  $D^{(a)}(\partial) Q^{(a)}(x)$  равна

$$[L^{-\{t^{(a)} + (b^{(a)}/2) + 1\}}]. \quad (15.9)$$

Таким образом, мы видим, что

$$[g_i] = [L^{\eta_i}]. \quad (15.10)$$

Поэтому величины  $\eta_i$  характеризуют размерности констант связи.

### § 4. S-матрица

Поскольку мы исходим из лагранжиана взаимодействия, для наших целей удобно взять S-матрицу в виде (13.35) [а не в виде (13.14)]. Надо заметить, что хотя выражение (13.35) было получено из (13.14), далеко не очевиден тот факт, что гамильтониан взаимодействия  $H'[x:n]$  все же существует, когда лагранжиан взаимодействия содержит производные высоких порядков. Тем не менее мы примем выражение (13.35) даже тогда, когда лагранжиан взаимодействия содержит производные высоких порядков, как это было сделано многими исследователями.

### § 5. Условие для примитивно расходящихся диаграмм

Рассмотрим некоторую диаграмму Фейнмана. Из (15.3) или (15.9) легко заключить, что каждая величина  $D^{(a)}(\partial) Q^{(a)}(x)$  дает вклад величиной  $t^{(a)} + (b^{(a)}/2) + 1$  в выражение для  $N$ , определенное с помощью (14.5).

Величину  $N$  можно вычислить с помощью метода, аналогичного тому, который был использован при выводе (14.5). С помощью интегрирований по внутренним импульсам можно выразить рассматриваемую диаграмму через члены с вторичным взаимодействием  $L_s$ , которое напоминает взаимодействие, приводящее в первом порядке теории возмущений к соответствующему переходу. Сейчас мы покажем, что с помощью (14.11) величине  $L_s$  можно придать вид

$$L_s = \sum_i g_s^{(i)} L_s^{(i)}.$$

Характерная для  $L_s^{(i)}$  константа  $\eta_s^{(i)}$  на основании (15.6) дается выражением

$$\eta_s^{(i)} = A_s^{(i)} + \frac{B_s}{2} + C_s - 4, \quad (15.11a)$$

в котором

$$\begin{aligned} A_s^{(a)} &= \sum_a (N^{(a)} + M_i^{(a)}) E^{(a)}, \\ B_s &= \sum_a b^{(a)} E^{(a)}, \\ C_s &= \sum_a E^{(a)}, \end{aligned} \quad (15.116)$$

здесь  $E^{(a)}$  — число внешних линий для  $a$ -полей, а  $N^{(a)}$  и  $M_i^{(a)}$  определяются следующим образом. Каждый внешний оператор  $Q^{(a)}$  содержит операторы производных с истинным порядком  $t^{(a)}$ . Поэтому рассматриваемую диаграмму Фейнмана можно обозначить  $G(E^{(a)}, N^{(a)})$ , где  $N^{(a)}$  — сумма  $\sum t^{(a)}$  истинных порядков внешних операторов  $a$ -полей. Далее, в результате интегрирований по внутренним импульсам  $G(E^{(a)}, N^{(a)})$  распадается на ряд независимых диаграмм, обозначаемых через  $G(E^{(a)}, N^{(a)} + M_i^{(a)})$ . Эти диаграммы содержат новые операторы производных, действующие на  $Q^{(a)}$ , полное число которых равно  $M_i^{(a)} = 0, 1, 2, \dots$ . Это разложение  $G(E^{(a)}, N^{(a)})$  на  $G(E^{(a)}, N^{(a)} + M_i^{(a)})$  получается с помощью использования разложения интеграла (14.11), в котором порядок произведения величин  $t^{(m)}$  дает вклад в  $M_i^{(a)}$ . Легко видеть, что бесконечности наибольшего порядка возникают тогда, когда  $M_i^{(a)} = 0$ . Каждая диаграмма  $G(E^{(a)}, N^{(a)} + M_i^{(a)})$  соответствует вторичному взаимодействию  $L_s^{(i)}$ ; его характеристическая константа  $\eta_s^{(i)}$  дается формулой (15.6), приводящей к (15.11а). Расходящийся интеграл появляется в виде множителя при константе связи  $g_s^{(i)}$ . Так как

$g_i \int d^4x L_i(x)$  является безразмерной величиной и размерность  $g_i$  есть

$[L^{\eta_i}]$ , то каждая величина  $\int d^4x L_i(x)$  имеет размерность  $[L^{-\eta_i}]$  и поэтому в наивысшую степень импульса в выражении для  $S[\infty]$  дает вклад величиной  $\eta_i$ . Таким образом, наибольшая степень импульсов (включая произведение  $d^4k$ ) в выражении для  $S^{(m)}[\infty]$  равна  $\sum n_i \eta_i$ , где  $n_i$  — число вершин взаимодействия  $L_i$ . Так как размерность  $g_s^{(i)}$  есть  $[L_{\eta_s}^{(i)}]$ , то наибольшая степень внутренних импульсов в выражении для  $S^{(m)}[\infty]$  равна

$$N = \sum_i n_i \eta_i - \eta_s^{(i)}. \quad (15.12)$$

Теперь на основании (15.12) можно заключить, что число примитивно расходящихся диаграмм должно удовлетворять следующему условию [9, 8]:

$$\sum_i n_i \eta_i \geq \eta_s^{(i)}. \quad (15.13)$$

Следует заметить, что это условие выражено через величины  $\tau_{li}$  и  $\tau_{ls}^{(i)}$ . Порядок расходимости такой диаграммы равен числу  $N$ , определенному равенством (15.12) (причем  $N=0$  означает логарифмическую расходимость).

### § 6. Условие применимости перенормировки

Последнее равенство показывает, что условие конечности числа примитивно расходящихся диаграмм  $G(E^{(a)}, N^{(a)} + M_i^{(a)})$  в любом порядке теории возмущений имеет вид

$$\tau_{li} \leq 0 \quad (\text{для всех } l). \quad (15.14)$$

Прежде всего рассмотрим тот случай, для которого условие (15.14) выполнено. Тогда, поскольку  $b^{(a)} \geq 0$ , из (15.11б) можно заключить, что все диаграммы, удовлетворяющие условию

$$4 < C_s, \quad (15.15)$$

не содержат бесконечностей. Поэтому можно ввести в рассмотрение такое определенное число  $j$ , зависящее только от числа полей, принимающих участие в рассматриваемом взаимодействии<sup>1)</sup>, что число примитивно расходящихся диаграмм не будет превышать  $j$ . Расходимости в  $G(E^{(a)}, N^{(a)} + M_i^{(a)})$  можно устранить, вводя в лагранжиан в начальной точке величину  $-g_s^{(i)}L_s^{(i)}$ . Следует заметить, что на основании (15.13) и (15.14)  $\tau_{ls}^{(i)} \leq 0$  и поэтому  $-g_s^{(i)}L_s^{(i)}$  можно ввести, не нарушая условия (15.14). Таким образом, при выполнении условия (15.14) все бесконечности могут быть устранены введением конечного числа ( $\leq j$ ) контрчленов. Теории, в которых выполнено условие (15.14), называются „перенормируемыми“. Характер методов отделения бесконечностей и методов перенормировок тот же самый, что и в квантовой электродинамике (в гл. 14).

С другой стороны, если существует по меньшей мере одно взаимодействие, для которого

$$\tau_{li} > 0, \quad (15.16)$$

то некоторая диаграмма  $G(E^{(a)}, N^{(a)} + M_i^{(a)})$  расходится в высших порядках теории возмущений, если только число  $n_i$  достаточно велико. В этом случае невозможно (за исключением некоторых случаев, которые будут рассмотрены в следующей главе) исключить это бесконечное число расходимостей с помощью введения конечного числа контрчленов, потому что при переходе к более высоким порядкам теории возмущений у нас один за другим

<sup>1)</sup> Например, в качестве  $j$  можно взять число диаграмм, имеющих меньше 5 внешних операторов.

будут появляться новые расходящиеся члены, которые являются топологически независимыми. Поэтому невозможно устранить все бесконечности введением только конечного числа локальных взаимодействий. Такая теория называется неперенормируемой [9].

### § 7. Классификация взаимодействий

В предыдущем параграфе мы видели, что условие перенормируемости гласит:

$$\begin{aligned} \eta_l \leq 0 & \text{ для всех взаимодействий} \rightarrow \text{теория перенормируема,} \\ \eta_l > 0 & \text{ хотя бы для одного} \rightarrow \text{теория неперенормируема.} \end{aligned} \quad (15.17)$$

взаимодействия

Взаимодействия, которые удовлетворяют условиям (15.14) или (15.16), мы будем называть соответственно взаимодействиями 1-го и 2-го рода.

В том случае, когда все реализующиеся в природе взаимодействия являются взаимодействиями 1-го рода, теория перенормировок может в рамках существующей квантовой теории привести к замкнутой несингулярной теории.

Сейчас мы рассмотрим, какие типы полей могут приводить к взаимодействиям 1-го рода [14]. Так как  $A_l \geq 0$  и  $C_l \geq 0$ , то мы видим, что поле, для которого

$$b^{(a)} > 4, \quad (15.18)$$

не может приводить к взаимодействиям 1-го рода. Принимая во внимание (8.52а), мы заключаем, что поля со спином  $S \geq 2$  и массой  $\kappa \neq 0$  никогда не могут иметь взаимодействий 1-го рода.

Для поля  $U_{\mu\nu}$  с  $S=2$  и  $\kappa \neq 0$  взаимодействие с наименьшей величиной  $\eta_l$  есть

$$L_l = U_{\mu\nu} B_{\mu\nu} \quad (\eta_l = 0), \quad (15.19)$$

где  $B_{\mu\nu}$  — поле с  $S=2$  и  $\kappa=0$ . Все прочие взаимодействия являются взаимодействиями 2-го рода.

Для поля  $x_\mu$  с  $S=3/2$  и  $\kappa \neq 0$  взаимодействие с наименьшей величиной  $\eta_l$  есть

$$L_l = x_\mu \omega_\mu \quad (\eta_l = 0), \quad (15.20)$$

где  $\omega_\mu$  — поле с  $S=3/2$  и  $\kappa=0$ . Все остальные взаимодействия являются взаимодействиями 2-го рода.

Для поля  $U_\mu$  с  $S=1$  и  $\kappa=0$  взаимодействиями 1-го рода являются взаимодействия

$$F_{\mu\nu} F'_{\mu\nu}, \quad U_\mu U'_\mu, \quad U_\mu \partial_\mu U' \quad (\eta_l = 0), \quad (15.21)$$

$$U_\mu C_{\mu\nu\dots}^{(1)} C_{\nu\dots}^{(2)} \quad (\eta_l = 0), \quad (15.22)$$

где  $U'_\mu$  и  $U'$  — поля соответственно с  $S=1$  и  $S=0$ . Здесь  $C_{\mu\nu\dots}^{(1)}$  и  $C_{\nu\dots}^{(2)}$  означают поля с  $\kappa=0$ . Следует заметить, что каждое взаимодействие в (15.21) построено только из двух операторов поля. Для вещественного вектора  $U_\mu$  векторное взаимодействие со спинорным полем  $\psi(S=1/2)$  и со скалярным полем  $U$  является также взаимодействиями 1-го рода

$$g_i L_i = i g_i (\partial_\mu U^* \cdot U - U^* \cdot \partial_\mu U) U_\mu - g_i^2 U_\mu U_\mu U^* U \quad (\eta_i = 0), \quad (15.23)$$

$$g_i L_i = i g_i \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \cdot U_\mu \quad (\eta_i = 0). \quad (15.24)$$

На первый взгляд (15.23) и (15.24) представляются взаимодействиями 2-го рода, потому что для поля  $U_\mu$  величина  $b^{(a)}=2$ . Однако  $B$ -компонента величины  $U_\mu = A_\mu + (1/\kappa)\partial_\mu B$ , как показано в гл. 11, не имеет физического значения и в качестве величины  $b^{(a)}$  в  $A_\mu$  мы должны взять не значение  $b^{(a)}=2$ , а значение  $b^{(a)}=0$ . Поэтому в случае (15.23) или (15.24) получается значение  $\eta_i=0$ .

Как показано в гл. 11, такое положение обуславливается калибровочной инвариантностью теории [см. (7.101)]. Это служит примером того, что различного рода инвариантности теории приводят к появлению таких соотношений между некоторыми диаграммами, в результате которых происходит взаимоуничтожение вкладов от этих диаграмм. Другой пример такого положения был приведен при обсуждении вопроса об истинных порядках в гл. 8, пример 6, где было сказано, что релятивистская инвариантность теории может уменьшить истинный порядок и поэтому уменьшить порядок расходимостей.

Поля с  $S < 1$  имеют различные взаимодействия 1-го рода.

Взаимодействия  $A_\mu$ - или  $F_{\mu\nu}$ -типа между электромагнитным полем и комплексным полем  $\psi$  с  $S=1/2$  принадлежат соответственно к 1-му или 2-му роду.

Взаимодействие  $A_\mu$ -типа между электромагнитным полем и комплексным полем  $\psi$  с  $S=0$  является взаимодействием 1-го рода. В этом случае появляются примитивно расходящиеся диаграммы с четырьмя внешними операторами поля  $U$ , которые приводят к вторичному взаимодействию вида  $L_s^{(i)} = U^* U U^* U$ .

Следовательно, для устранения этих бесконечностей необходимо в полный лагранжиан ввести взаимодействие  $-g_s^{(i)} L_s^{(i)}$  [5, 6, 7, 10].

Скалярное или псевдоскалярное взаимодействия между спинорным полем и полем  $U$  с  $S=0$  принадлежат к взаимодействиям 1-го рода ( $\eta_i=0$ ). В этих случаях для получения несингулярной теории необходимо ввести контрчлены вида  $gU^3$  ( $\eta_i=-1$ ) и  $gU^4$  ( $\eta_i=0$ ). Из соображений релятивистской инвариантности теории и закона сохранения заряда легко заключить, что член  $gU^3$  вводит в теорию необходимо лишь в том случае, когда  $U$  является вещественным скаляром. Таким образом, для поля  $U$  со

спином 0 взаимодействия 1-го рода строятся из членов вида

$$UU' (\eta_{1i} = -2), UU'U'' (\eta_{1i} = -1), UU'U''U''' (\eta_{1i} = 0), \quad (15.25)$$

$$\partial_\mu U \partial_\mu U' (\eta_{1i} = 0), \bar{\psi} O \psi' U (\eta_{1i} = 0)$$

и векторного взаимодействия (15.23) с вещественным векторным полем  $U_\mu$  (включая электромагнитное поле). Здесь через  $U', U'', U'''$  обозначены поля со спином 0, а через  $\psi$  и  $\psi'$  — поля со спином  $1/2$ .

Векторное или псевдовекторное взаимодействия между спинорным полем и скалярным или псевдоскалярным полями являются взаимодействиями 2-го рода ( $\eta_{1i} = 1$ )<sup>1)</sup>. Прямые взаимодействия  $(\bar{\psi}^a O \psi^b)(\bar{\psi}^c O' \psi^d)$  ( $O$  и  $O'$  являются произведениями матриц  $\gamma_\mu$ ) между спинорными полями принадлежат к взаимодействиям 2-го рода ( $\eta_{1i} = 2$ ).

Для поля  $\psi$  со спином  $1/2$  взаимодействия 1-го рода строятся из членов вида

$$\bar{\psi}' O \psi (\eta_{1i} = -1), \quad \bar{\psi}' O \psi U (\eta_{1i} = 0) \quad (15.26)$$

совместно с векторным взаимодействием (15.24) с вещественным векторным полем  $U_\mu$  (включая электромагнитное поле).

Особенности важных взаимодействий между различными полями указаны в табл. 5.

Таблица 5

|         | $U$                                 |                                     | $U_\mu$                    |  | $\psi$                         |             |
|---------|-------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------|--|--------------------------------|-------------|
|         | Заряженное                          | Нейтральное                         | Заряженное                 | Нейтральное  | Заряженное                     | Нейтральное |
| $A_\mu$ | $V(0)$ 1-го<br>[ $U^* U U^* U(0)$ ] |                                     | $V(1)$ 2-го<br>$T(2)$ 2-го |  | $V(0)$ 1-го<br>$T(1)$ 2-го     |             |
| $\psi$  | $S(0)$ 1-го<br>[ $U^* U U^* U(0)$ ] | $S(0)$ 1-го<br>[ $U^4(0), U^3(0)$ ] | $V(1)$ 2-го                | $V(0)$ для $v$<br>1-го<br>$V(1)$ для $p\psi$<br>2-го | Прямое взаимодействие (2) 2-го |             |
|         | $V(1)$ 2-го                         | $V(1)$ 2-го<br>для $p\psi$          |                            | $T(1)$ 2-го  |                                |             |

Символами  $S, V$  и  $T$  обозначены соответственно скалярное, векторное и тензорное взаимодействия. Числа в скобках показывают значения величин  $\eta_{1i}$  для соответствующих взаимодействий. Контрчлены, которые необходимо ввести для осуществления перенормировки, выписаны в квадратных скобках [ ]. Символы  $s, p\psi, v$  и  $p\psi$  означают соответственно скалярное, псевдоскалярное, векторное и псевдовекторное поля.

<sup>1)</sup> Однако, как это показано в гл. 11, векторное взаимодействие между вещественным скалярным и спинорным полями не приводит к каким-либо физическим эффектам.

## § 8. Физический смысл классификации взаимодействий

Сейчас мы на основе анализа размерностей укажем физический смысл классификации взаимодействий, проведенный в § 7 [9].

При рассмотрении процессов с высокими энергиями, когда „высокие энергии“ грубо выражаются с помощью членов  $(1/\lambda)$  ( $\lambda$  — длина волны), отношение  $n$ -го и  $(n+1)$ -го членов  $(S^{(n)}, S^{(n+1)})$   $S$ -матрицы может быть записано в виде

$$\frac{S^{(n+1)}}{S^{(n)}} \sim \frac{g_l}{\lambda^{\tau_l}}. \quad (15.27)$$

Но размерность  $g_l$  есть  $[L^{\tau_l}]$ . Отсюда мы заключаем, что при  $\tau_l > 0$  члены  $S$ -матрицы более высокого порядка дают при рассмотрении процессов высоких энергий ( $\lambda^{\tau_l} \ll g_l$ ) более значительные вклады даже в том случае, когда константа связи  $g_l$  очень мала.

Это обстоятельство показывает, что при  $\tau_l > 0$  реакция собственного поля приобретает очень большое значение. В связи с этим часто говорилось [1—4] о том, что должна существовать некоторая фундаментальная длина  $r_0$ , введенная Гейзенбергом, и что соотношение (15.27) в области энергий, при которых  $\lambda \ll r_0$ , должно быть изменено. С этой точки зрения  $r_0$  следует рассматривать как радиус элементарной частицы, и  $\lambda \approx r_0$  является пределом применимости существующей квантовой теории поля. Такой подход к делу оправдывается следующими соображениями. Если мы с помощью метода перенормировок попытаемся построить несингулярную теорию для взаимодействий 2-го рода, то мы приходим к необходимости одновременного существования бесконечного числа взаимодействий (т. е. контрвзаимодействий), которые также являются взаимодействиями 2-го рода. Такая совокупность взаимодействий эквивалентна нелокальному взаимодействию, соответствующему протяженной модели элементарных частиц<sup>1)</sup>. Однако явлений, которые бы существенно зависели от величины  $r_0$ , неизвестно. По всем данным теория  $\beta$ -распада требует введения взаимодействий 2-го рода, хотя имеются возможности объяснить  $\beta$ -распад с помощью взаимодействий 1-го рода [14, 12, 11]. Теория возмущений не может быть применена для изучения явлений, связанных с мезонами (т. е. рождения мезонов при  $\pi$ -,  $\gamma$ - или нуклон-нуклонных столкновениях, рассеяние мезонов на нуклонах и т. д.), поскольку константа связи для мезон-нуклонного взаимодействия не настолько мала, чтобы было справедливо применение теории возмущений. Далее, недавние эксперименты, по-видимому, указывают на наличие изобарных уровней (для системы нуклон—мезон), существование которых можно было ожидать на основе теорий силь-

<sup>1)</sup> Взаимодействия между операторами поля в различных точках пространства называются нелокальными взаимодействиями.

ной [15] и промежуточной [13] связи. Это обстоятельство затрудняет определение типа взаимодействия мезон — нуклон. Так как эффекты высших порядков в случае взаимодействия 2-го рода дают более значительные вклады в рассматриваемые явления, то можно ожидать одновременного рождения многих мезонов при нуклон — нуклонных столкновениях. Недавние эксперименты подтверждают наличие множественного рождения мезонов. Однако из этих данных еще нельзя сделать заключения о том, что взаимодействие мезон — нуклон принадлежит к взаимодействиям 2-го рода.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **101**, 533 (1936).
2. Heisenberg W., Zs. f. Phys., **110**, 251 (1938).
3. Heisenberg W., Solvay Berichte Report, 1939.
4. Heisenberg W., Zs. f. Rphys., **113**, 61 (1939).
5. Röhrlich F., Phys. Rev., **80**, 666 (1950).
6. Mathews P. T., Phil. Mag., **41**, 185 (1950).
7. Mathews P. T., Phys. Rev., **91**, 936 (1951).
8. Petermann A., Stueckelberg E. C. G., Phys. Rev., **82**, 548 (1951).
9. Sakata S., Umezawa H., Kamefuchi S., Prog. Theor. Phys., **7**, 377 (1952).
10. Salam A., Phys. Rev., **82**, 217 (1951).
11. Tanaka S., Ito M., Prog. Theor. Phys., **9**, 169 (1953).
12. Tanikawa Y., Prog. Theor. Phys., **10**, 232, 361 (1953).
13. Tomonaga S., Prog. Theor. Phys., **1**, 83 (1946).
14. Umezawa H., Prog. Theor. Phys., **7**, 551 (1952).
15. Wentzel G., Helv. Phys. Acta, **13**, 269 (1940).



# Теория затухания

## § 1. Уравнения теории затухания

В теории затухания учитываются члены высшего порядка ряда теории возмущений.

Для простоты возьмем<sup>1)</sup> плоскую поверхность в момент времени  $t$ . Оператор  $\bar{S}(t, t_1)$ , характеризующий движение системы в шредингеровском представлении, мы получим из оператора в представлении взаимодействия с помощью следующего преобразования [см (10.56)]:

$$\bar{S}(t, t_1) = \exp[-iT^0 t] S[\sigma(t), \sigma(t_1)] \exp[iT^0 t_1].$$

Учитывая (10.57), найдем

$$i \frac{\partial}{\partial t} \bar{S}(t, t_1) = (H_0 + H') \bar{S}(t, t_1) \quad \text{для } t > t_1, \quad (16.1)$$

где  $H_0 + H'$  — оператор полной энергии в шредингеровском представлении, выражение которого дается с помощью (10.58) и (10.59).

Оператор  $\bar{S}(t, t_1)$  можно получить в качестве решения уравнения (16.1) с начальным условием

$$\bar{S}(t, t_1) = 1 \quad \text{для } t = t_1. \quad (16.2)$$

Оператор  $\bar{S}(t, t_1)$  можно записать в виде разложения Фурье

$$\bar{S}(t, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dE S(E, t, t_1), \quad (16.3)$$

причем  $S(E, t, t_1)$  имеет вид

$$S(E, t, t_1) = \exp\{iE(t - t_1)\} S(E).$$

Поэтому уравнение (16.1) приводит к равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE (E - H^0 - H') S(E, t, t_1) = 0 \quad \text{для } t > t_1. \quad (16.4)$$

<sup>1)</sup> Относительно ковариантной формулировки теории затухания см. работу [2].

Рассмотрим случай, в котором гамильтониан взаимодействия  $H'$  распадается на две части и имеет вид

$$H' = H'' + \Phi, \quad (16.5)$$

и примем то представление, в котором оператор

$$H = H^0 + \Phi \quad (16.6)$$

диагонален<sup>1)</sup>.

Легко видеть, что равенство (16.4) удовлетворяется решением уравнения

$$(E - H - H'')S(E, t, t_1) = -\frac{i}{2\pi} \exp\{-iE(t - t_1)\}. \quad (16.7)$$

Предположим, что  $S(E, t, t_1)$  имеет вид [1]

$$S(E, t, t_1) = \{1 - 2\pi i \delta_+(E - H)U(E)\} \lambda(E, t, t_1). \quad (16.8)$$

Тогда с помощью (8.30а) левую часть уравнения (16.7) можно записать в виде

$$(E - H - H'')\{1 - 2\pi i \delta_+(E - H)U(E)\} \lambda(E, t, t_1) = \\ = [E - H + U(E) - \{H'' - 2\pi i H'' \delta_+(E - H)U(E)\}] \lambda(E, t, t_1). \quad (16.9)$$

Предполагая, что  $U(E)$  является некоторой матрицей, диагональные элементы которой равны нулю, мы из (16.7) получаем уравнения

$$U(E) = \{H'' - 2\pi i H'' \delta_+(E - H)U(E)\}_{n.d.}, \quad (16.10)$$

$$\lambda(E, t, t_1) = -\frac{i}{2\pi} \left\{ E - H + \frac{i}{2} \Gamma(E) \right\}^{-1} \exp\{-iE(t - t_1)\}, \quad (16.11)$$

$$\Gamma(E) \equiv 2i \{H'' - 2\pi i H'' \delta_+(E - H)U(E)\}_d. \quad (16.12)$$

Здесь матрица  $\{ \}_d$  получается из матрицы  $\{ \}$ , если в последней все недиагональные матричные элементы положить равными нулю, а для получения матрицы  $\{ \}_{n.d.}$  надо положить равными нулю все диагональные элементы матрицы.

Таким образом, мы видим, что (16.10) и (16.11) являются теми уравнениями, на основании которых должен быть найден оператор  $S(t, t_1)$ . Уравнение (16.10) представляет собой основу теории затухания Гайтлера [3, 6]<sup>2)</sup>.

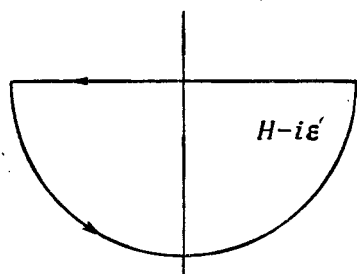
<sup>1)</sup> Например, в задаче об электроном в атоме водорода  $\Phi$  можно рассматривать как кулоновский потенциал, обусловленный наличием протона.

<sup>2)</sup> См. также работу [7]. В дальнейшем теория затухания была развита в работах [8] для исследования упругого рассеяния дираковских и бесспиновых частиц произвольным короткодействующим силовым центром.— *Прим. ред.*

Разложение (16.3) показывает, что

$$\begin{aligned} \bar{S}(t, t_1) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE \{1 - 2\pi i \delta_+(E - H) U(E)\} \times \\ &\quad \times \left\{ E - H + \frac{i}{2} \Gamma(E) \right\}^{-1} \exp\{-iE(t - t_1)\} = \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} dE \delta_+(E - H) \exp\{-iE(t - t_1)\} - \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dE \delta_+(E - H) \left\{ U(E) - \frac{i}{2} \Gamma(E) \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ E - H + \frac{i}{2} \Gamma(E) \right\}^{-1} \exp\{-iE(t - t_1)\}. \end{aligned} \quad (16.13)$$

При  $t > t_1$  в первом члене можно проводить интегрирование по большой полуокружности ниже вещественной оси в комплексной  $E$ -плоскости (фиг. 26), в результате чего получается равенство



Фиг. 26.

$$\begin{aligned} \bar{S}(t, t_1) &= \\ &= e^{-iH(t-t_1)} \times -\int_{-\infty}^{\infty} dE \delta_+(E - H) \\ &\quad \times \left\{ U(E) - \frac{i}{2} \Gamma(E) \right\} \left\{ E - H + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} \Gamma(E) \right\}^{-1} \exp\{-iE(t - t_1)\} \\ &\quad \text{для } t > t_1. \end{aligned} \quad (16.14)$$

Можно показать [1], что если оператор  $\bar{S}(t, t_1)$  дается выражением (16.14), то он удовлетворяет начальному условию (16.2).

При вычислении вероятности перехода  $w_{if}$  между двумя собственными  $(i, f)$ -состояниями невозмущенного оператора энергии  $H$  можно вместо  $\bar{S}(t, t_1)$  пользоваться оператором  $S'(t, t_1)$ , задаваемым равенством

$$S'(t, t_1) = e^{iH(t-t_1)} \bar{S}(t, t_1). \quad (16.15)$$

Действительно, если  $E_i$  и  $E_f$  являются собственными значениями энергии в  $i$ - и  $f$ -состояниях оператора  $H$ , то

$$\begin{aligned} w_{if} &= |(f | \bar{S}(t, t_1) | i)|^2, \\ w_{if} &= |(f | S'(t, t_1) | i)|^2. \end{aligned} \quad (16.16)$$

Подставляя (16.14) в (16.15), получаем

$$S'(t, t_1) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} dE \exp\{-i(E-H)(t-t_1)\} \times \\ \times \delta_+(E-H) \left\{ U(E) - \frac{i}{2} \Gamma(E) \right\} \left\{ E - H + \frac{i}{2} \Gamma(E) \right\}^{-1}. \quad (16.17)$$

Можно доказать [1], что при  $\Phi=0$  и, следовательно, при  $H=T^0$  разложение в ряд величины (16.17) совпадает с  $S$ -матрицей Дайсона (13.14).

Равенство (16.17) дает

$$S'[t, -\infty] = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dE \delta(E-H) \times \\ \times \left\{ U(E) - \frac{i}{2} \Gamma(E) \right\} \left\{ E - H + \frac{i}{2} \Gamma(E) \right\}^{-1}, \quad (16.18)$$

где учтено соотношение

$$-\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iat} \delta_+(a) = -\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} d\beta e^{i(a\beta+t)} = \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\beta e^{i a \beta} = \delta(a). \quad (16.19)$$

Следует заметить, что соотношения (16.19) имеют место при интегрировании

$$-\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} da e^{iat} \delta_+(a) f(a) = f(0)$$

только тогда, когда  $f(a)$  — аналитическая функция.

Из (16.18) имеем

$$(f | S'(t, -\infty) | i) = \frac{(f | U(E_f) | i)}{E_f - E_i + \frac{i}{2} \Gamma_0(E_f)} \quad \text{для } f \neq i, \quad (16.20)$$

$$(i | S'(t, -\infty) | i) = 0 \quad (\text{когда } \Gamma_0(E_i) \neq 0), \quad (16.21)$$

где

$$\Gamma_0(E) \equiv (i | \Gamma(E) | i). \quad (16.22)$$

Вероятность того, что  $f$ -состояние лежит в области  $(E_f, E_f + dE_f)$ , равна

$$\omega_{if} dE_f = \frac{|(f | U(E_f) | i)|^2}{(E_f - E_i - \frac{1}{2} \Gamma_0^{(i)}(E_f))^2 + \frac{1}{4} (\Gamma_0^{(R)}(E_f))^2} dE_f, \quad (16.23)$$

где  $\Gamma_0^{(R)}$  и  $\Gamma_0^{(i)}$  — вещественная и мнимая части величины  $\Gamma_0$ , так что

$$\Gamma_0(E) = \Gamma_0^{(R)}(E) + i \Gamma_0^{(i)}(E). \quad (16.24)$$

## § 2. Эффекты затухания

Прежде всего рассмотрим физический смысл величины  $\Gamma_0^{(i)}$ . Равенство (16.23) показывает, что энергия конечного состояния имеет максимальную вероятность для  $E_f = E_i + (1/2)\Gamma_0^{(i)}(E_f)$ . Другими словами, система, которая первоначально была в  $i$ -состоянии, под влиянием возмущения, обусловленного различными состояниями, связанными взаимодействием с  $i$ -состоянием, изменяет свою энергию на величину  $(1/2)\Gamma_0^{(i)}(E_f)$ . Например, если  $\Phi = 0$  и  $i$ -состояние является состоянием свободной частицы, то величина  $(1/2)\Gamma_0^{(i)}(E_f)$  равна собственной энергии. Поэтому в качестве наблюдаемой величины энергии свободной частицы в теории перенормировок мы должны взять величину  $E_f = E_i + (1/2)\Gamma_0^{(i)}(E_f)$ , хотя эта величина и бесконечна. Когда  $i$ -состояние является состоянием электрона в атоме водорода, величина  $(1/2)\Gamma_0^{(i)}(E_f)$  описывает смещение уровней энергии, обусловленное радиационными поправками. Разница между указанными смещениями и собственной энергией электрона дает лэмбовский сдвиг.

Теперь рассмотрим физический смысл величины  $\Gamma_0^{(R)}$ .

В классической теории электрона ускоренно движущийся электрон теряет энергию на излучение. Это приводит к появлению силы реакции величины  $(2/3)e^2(d^3x/dt^3)x$ , действующей на сам электрон. Поэтому уравнение движения электрона, колеблющегося с собственной частотой  $\nu_0$ , обусловленной внешней силой, имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\nu_0^2 x + \frac{2}{3} e^2 \frac{d^3 x}{dt^3}, \quad (16.25)$$

где опущены члены с высшими производными ( $\geq 3$ ) и члены, зависящие от радиуса электрона.

Так как при  $\nu_0 > 1/r_0$  ( $r_0$  — классический радиус электрона  $e^2/m$ ) длина волны меньше радиуса электрона, то мы не можем пользоваться уравнением (16.25), поскольку в нем отброшены члены, зависящие от структуры электрона. Поэтому необходимо, чтобы удовлетворилось условие

$$\nu_0 r_0 \ll 1,$$

приводящее к условию

$$\nu_0 \gg \gamma, \quad (16.26)$$

в котором

$$\gamma \equiv \frac{2e^2}{3m} \nu_0^2 = \frac{2}{3} \nu_0^2 r_0.$$

При условии (16.26) решение уравнения (16.25) может быть приближенно представлено в виде

$$x \approx x_0 e^{-(\gamma/2)t} e^{i\nu_0 t}. \quad (16.27)$$

Это показывает, что напряженность электромагнитного поля  $E$ , индуцированного электроном, также затухает по закону  $\exp(-\gamma t/2)$ :

$$E = E_0 e^{-(\gamma/2)t} e^{i\nu_0 t}. \quad (16.28)$$

Разложение в ряд Фурье выражения (16.28) имеет вид

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu E(\nu) e^{\nu t},$$

$$E(\nu) = \frac{i}{2\pi} E_0 \frac{1}{(\nu_0 - \nu) + i(\gamma/2)}. \quad (16.29)$$

Таким образом, получаем следующую интенсивность излучения:

$$I = I_0 \frac{\gamma}{2\pi} \frac{1}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma^2/4)}, \quad (16.30)$$

где  $I_0$  — постоянная, не зависящая от  $\nu$ . Член  $(\gamma^2/4)$  в знаменателе проистекает за счет радиационной поправки [второй член в (16.25)] и обуславливает в распределении интенсивности излучения по частотам ширину линии величиной  $\gamma/2$  около максимума при  $\nu = \nu_0$ . Величина  $\gamma/2$  называется естественной шириной линии.

Мы видим, что соотношения (16.23) и (16.30) весьма сходны и что величину  $(1/2)\Gamma_0^{(R)}(E_f)$  можно рассматривать как ширину линии в распределении вероятностей (16.23).

Из (16.12) имеем

$$\Gamma^{(R)}(E) = 2\pi (U^*(E) \delta(E - H) U(E))_d. \quad (16.31)$$

В самом деле, (16.12) и (16.10) дают

$$\begin{aligned} \Gamma^{(R)}(E) &= \frac{1}{2} (\Gamma(E) + \Gamma^*(E)) = \\ &= 2\pi \{H'' \delta_+(E - H) U(E) + U^*(E) \delta_-(E - H) H''\}_d = \\ &= 2\pi \{H''_{nd} \delta_+(E - H) U(E) + U^*(E) \delta_-(E - H) H''_{nd}\}_d = \\ &= 2\pi \{U^*(E) \delta_+(E - H) U(E) + U^*(E) \delta_-(E - H) U(E)\}_d = \\ &= 2\pi (U^*(E) \delta(E - H) U(E))_d. \end{aligned}$$

С другой стороны, из (16.17) находим

$$\frac{d}{dt} (f | S'(t, t_1) | i) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{-i(E - E_f)(t - t_1)} \frac{(f | U(E) | i)}{E - E_i + \frac{i}{2} \Gamma_0(E)} \quad \text{для } f \neq i.$$

Равенство (16.23) показывает, что при малых значениях  $\Gamma_0^{(R)}$  для большинства конечных состояний имеем

$$E_f \approx E_i + \frac{1}{2} \Gamma_0^{(R)}(E_f).$$

Для таких случаев получается

$$\frac{d}{dt}(f|S'(t, t_1)|i) \approx -i \int_{-\infty}^{\infty} dE e^{i(E-E_f)(t-t_1)} \delta_+(E-E_f) (f|U(E)|i).$$

Отсюда, с учетом (16.19), следует

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f|S'(t, -\infty)|i) &= i \int_{-\infty}^{\infty} dE \delta(E-E_f) (f|U(E)|i) = \\ &= i(f|U(E_f)|i) \quad \text{для } f \neq i. \end{aligned} \quad (16.32)$$

Далее (16.20) приводит к соотношению

$$(f|S'(t, -\infty)|i) \approx -2\pi i (f|U(E_f)|i) \delta_+(E_f - E_i - \frac{1}{2} \Gamma_0^{(i)}(E_f)).$$

Подставляя это соотношение и (16.32) в (13.4), найдем, что вероятность перехода, отнесенная к единице времени, равна

$$\frac{d}{dt} \omega_{if} \approx 2\pi |(f|U(E_f)|i)|^2 \delta\left(E_f - E_i - \frac{1}{2} \Gamma_0^{(i)}(E_f)\right). \quad (16.33)$$

Сравнивая (16.31) и (16.33), получаем

$$\Gamma_0^{(R)}(E_f) \approx \sum_f \frac{d}{dt} \omega_{if}. \quad (16.34)$$

Другими словами, величина  $\Gamma_0^{(R)}(E_f)$  приблизительно равна сумме вероятностей перехода (отнесенных к единице времени) из  $i$ -состояния во все другие состояния. Поэтому величину  $1/\Gamma_0^{(R)}(E_f)$  можно рассматривать как время жизни  $i$ -состояния. Это заключение согласуется с рассуждениями гл. 13, где было сказано, что мнимые части величин собственной энергии дают обратную величину времени жизни относительно естественного распада. Из (16.23) и (16.34) мы видим, что вероятность перехода в какое-либо  $f$ -состояние уменьшается вследствие осуществляющихся переходов ( $\Gamma_0^{(R)}$ ) из  $i$ -состояния в другие  $f$ -состояния.

Это обстоятельство, заключающееся в том, что ширина спектральных линий увеличивается, когда возрастают вероятности переходов с этих линий, показывает, что уровни невозмущенных состояний возмущаются со стороны состояний, сильно связанных с ними посредством возмущающей энергии взаимодействия.

В качестве примера рассмотрим два уровня  $a$  и  $b$  электрона в атоме. Пусть здесь  $a$  будет основным состоянием, так что ширина этого уровня равна нулю. Так как электрон с уровня  $b$  может с испусканием  $\gamma$ -кванта перейти на уровень  $a$ , то уровень  $b$  имеет большую ширину. Более того, если происходят частые столкновения атомов между собой (как в газе), то ширина уровня  $b$  еще больше возрастает ввиду увеличения вероятностей перехода за

счет столкновений. Поэтому эксперименты по определению ширины линий должны выполняться на газах под малым давлением. Результаты относительно ширины линий, полученные впервые Вайскопфом и Вигнером [5], были впоследствии подтверждены экспериментально.

Следует заметить, что хотя в случае взаимодействий 2-го рода для процессов с высокими энергиями числитель в (16.23) становится очень большим, тем не менее величина  $\Gamma_0^{(R)}$  в знаменателе компенсирует этот эффект и можно ожидать, что вероятность перехода не может стать слишком большой. Ввиду унитарности  $S$ -матрицы этот результат представляется очень разумным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Arnous E., Zienau S., *Helv. Phys. Acta*, **24**, 279 (1951).
2. Fukuda H., Miyazima T., *Prog. Theor. Phys.*, **5**, 849 (1950).
3. Heitler W., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **37**, 291 (1941).
4. Weisskopf V., Wigner E., *Zs. f. Phys.*, **63**, 54 (1930).
5. Weisskopf V., Wigner E., *Zs. f. Phys.*, **65**, 18 (1930).
6. Wilson A. H., *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **37**, 301 (1941).
- 7\*. Соколов А. А., *Journ. of Phys. (СССР)*, **5**, 231 (1941).
- 8\*. Соколов А., Керимов Б., *ДАН СССР*, **105**, 961 (1955); **108**, 611 (1956); *ЖЭТФ*, **31**, 1080 (1956); *Nuovo Cimento*, **5**, 921 (1957).



# Теория $S$ -матрицы

## § 1. Наблюдаемые величины

Поскольку существующая квантовая теория поля содержит много трудностей, связанных с бесконечными значениями различных физических величин, ее следует рассматривать как предварительную теорию. Последовательной же теории элементарных частиц мы все еще не имеем. Пытаясь сформулировать такого рода теорию, Гейзенберг [4, 5] рассмотрел феноменологические соотношения между наблюдаемыми величинами в надежде установить некоторое соответствие между существующей теорией и последовательной теорией будущего.

Наблюдаемыми величинами, принятыми Гейзенбергом в качестве основных величин теории элементарных частиц, были энергия-импульс свободных частиц и следующие величины: 1) дискретные собственные значения для связанных состояний, 2) асимптотический вид (сдвиг фаз) падающих и рассеянных волн в большом отдалении от рассеивающего центра.

Ввиду того что в задачах рассеяния эффективные сечения могут быть определены только по асимптотическому виду волновых функций на больших расстояниях от точек взаимодействия, величины 2) можно рассматривать как наблюдаемые.

Так как связанные состояния можно рассматривать как случай нулевой расходящейся волны при стационарном рассеянии, то можно ожидать наличия более тесной связи между величинами 1) и 2).

Асимптотический вид расходящихся волн может быть определен через продолжительный промежуток времени после взаимодействия, и поэтому такое определение возможно с помощью  $S$ -матрицы. Гейзенберг исследовал, могут ли величины 1) и 2) быть определены с помощью  $S$ -матрицы [4, 5].

## § 2. $S$ -матрица

Для простоты рассмотрим плоские поверхности  $\sigma(t)$  в момент времени  $t$ . Из (10.1) и (10.50) имеем

$$\Psi[\sigma] = S[\sigma] \Psi[-\infty], \quad (17.1)$$

$$S[-\infty] = 1, \quad (17.2)$$

$$S[\sigma] = 1 - i \int_{-\infty}^t dt' H'[\sigma(t')] S[\sigma(t')]. \quad (17.3)$$

Вероятность обнаружения  $\Phi_b$ -состояния в момент времени  $t = \infty$ , если в момент времени  $t = -\infty$  было  $\Phi_a$ -состояние, равна<sup>1)</sup>

$$\omega_{b,a} = |(\Phi_b S[\infty] \Phi_a)|^2 \equiv |S_{ba}|^2. \quad (17.4)$$

Введем в рассмотрение  $R$ -матрицу с помощью равенства

$$S = 1 + R; \quad (17.5)$$

здесь  $S$ -матрица является матрицей  $[S_{ba}]$ . Так как  $S$  — унитарная матрица, то мы имеем

$$R^* R = -(R + R^*). \quad (17.6)$$

Тогда для  $a \neq b$  равенства (17.5) и (17.4) приводят к

$$\omega_{b,a} = |R_{ba}|^2. \quad (17.7)$$

С другой стороны, (17.3) дает

$$\begin{aligned} R_{ba} &= -i \int_{-\infty}^{\infty} dt (\Phi_b, H'[\sigma(t)] S[\sigma(t)] \Phi_a) = \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} dt (\Phi_b, e^{iH^0 t} H' e^{-iH^0 t} S[\sigma(t)] \Phi_a), \end{aligned} \quad (17.8)$$

где  $H^0$  — оператор свободной энергии (10.59), а  $H'$  — гамильтониан взаимодействия (10.58) в шредингеровском представлении. Считая, что взаимодействие включается и выключается соответственно в моменты времени  $t = -\infty$  и  $t = +\infty$ , мы в качестве собственных функций оператора  $H^0$  можем взять функции  $\Phi_a$  и  $\Phi_b$

$$\begin{aligned} H^0 \Phi_a &= E_a \Phi_a, \\ H^0 \Phi_b &= E_b \Phi_b. \end{aligned} \quad (17.9)$$

Затем в выражении  $H'$  необходимо ввести экспоненциальный множитель  $\exp(-\varepsilon'|t|)$  [см. (13.10)], в котором  $\varepsilon'$  означает бесконечно малую положительную постоянную. Теперь можно записать (17.8) в виде

$$R_{ba} = -i (\Phi_b, H' \Psi_a^{(+)}(E_b)), \quad (17.10)$$

где

$$\Psi_a^{(+)}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E-H^0)t} e^{-\varepsilon'|t|} S[\sigma(t)] \Phi_a. \quad (17.11)$$

<sup>1)</sup>  $(\Phi_a, A\Phi_b) \equiv \Phi_a^* A\Phi_b$ .

Используя (8.30а), (17.3) и (17.11), мы видим, что  $\Psi_a^+(E)$  удовлетворяет уравнению <sup>1)</sup>

$$\Psi_a^+(E) = 2\pi\delta(E - E_a)\Phi_a + \frac{1}{E - H^0 + i\epsilon} H' \Psi_a^+(E). \quad (17.12)$$

Вводя в рассмотрение  $\Psi_a^+$  с помощью равенства

$$\Psi_a^{(+)}(E) = 2\pi\delta(E - E_a)\Psi_a^+, \quad (17.13)$$

из (17.12) получаем

$$\Psi_a^+ = \Phi_a + \frac{1}{E_a - H^0 + i\epsilon} H' \Psi_a^+. \quad (17.14а)$$

Вероятность перехода в  $\Phi_b$ -состояние в момент времени  $t$  из  $\Phi_a$ -состояния при  $t = -\infty$ , отнесенная к единице времени, равна [см. (13.4)]

$$\frac{d}{dt} w_{a,b} = \frac{d}{dt} |(\Phi_b, S[\sigma(t)] \Phi_a)|^2. \quad (17.15)$$

Для  $b \neq a$ , с учетом (17.3), это дает равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w_{b,a} &= i(H'[\sigma(t)] S[\sigma(t)] \Phi_a, \Phi_b) (\Phi_b, S[\sigma(t)] \Phi_a) + \text{К.С.} = \\ &= e^{i(E_b - H^0)t} S[\sigma(t)] \Phi_a, H' \Phi_b \int_{-\infty}^t dt' (\Phi_b, H' e^{i(E_b - H^0)t'} S[\sigma(t')] \Phi_a) + \text{К.С.}, \end{aligned} \quad (17.16)$$

где К.С. — величина, комплексно-сопряженная к предшествующему члену.

Используя (17.10), (17.13) и соотношение

$$e^{-iH^0 t} S[\sigma(t)] \Phi_a = e^{-iE_a t} \Psi_a^+,$$

которое можно получить из (17.11), запишем (17.16) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w_{ba} &= |R_{ba}|^2 \int_{-\infty}^t dt' e^{i(E_a - E_b)(t-t')} + \text{К.С.} = \\ &= 2\pi |R_{ba}|^2 \delta(E_a - E_b). \end{aligned} \quad (17.17)$$

Здесь  $R_{ba}$  определено как

$$R_{ba} = -2\pi i \delta(E_a - E_b) R_{ba}. \quad (17.18а)$$

Из (17.18) получаем [12]

$$R_{ba} = (\Phi_b, H' \Psi_a^+). \quad (17.18б)$$

<sup>1)</sup> Здесь использовано соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' f(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{t'}^{\infty} dt f(t, t').$$

С другой стороны, выражение (17.14а) с помощью (8.30а) можно записать в виде

$$\Psi_a^+ = \Phi_a - 2\pi i \delta_+(E_a - H^0) H' \Psi_a^+. \quad (17.14б)$$

Как показывает наличие  $\delta_+$ -функции, выражение (17.14б) имеет вид решения задачи рассеяния с соблюдением „условия излучения“<sup>1)</sup>.

Так как первый член в (17.14б) имеет вид падающей волны, то второй член можно рассматривать как рассеянную волну.

Введем в рассмотрение матрицу  $\Psi = [\Psi_{ba}]$

$$\Psi_{ba} \equiv (b | \Psi | a) \equiv (\Phi_b, \Psi_a^+).$$

Тогда (17.14б) можно записать в виде

$$\Psi = 1 + \Psi^{sc}, \quad (17.14в)$$

где

$$\Psi_{ab}^{sc} = -2\pi i \delta_+(E_a - E_b) (\Phi_b, H' \Psi_a^+) = -2\pi i \delta_+(E_a - E_b) R_{ba}. \quad (17.19)$$

Величина  $\Psi^{sc}$  является матрицей рассеянной волны [16.17].

Теперь укажем на важную в волновой теории теорему.

Равенство (17.6) посредством зависящих от  $R$  членов может быть записано в виде

$$4\pi^2 \sum_b \delta(E_a - E_b) R_{ba}^* \delta(E_b - E_c) R_{bc} = 2\pi i \delta(E_a - E_c) (R_{ac} - R_{ca}^*).$$

Опуская в обеих частях равенства функцию  $\delta(E_a - E_c)$  и полагая  $a=c$ , получаем

$$\sum_b \frac{d}{dt} w_{ba} = -2I_m(R_{aa}). \quad (17.20)$$

Левую часть равенства (17.20) можно рассматривать как полную вероятность перехода из  $a$ -состояния во всевозможные другие  $b$ -состояния ( $b \neq a$ ). Поэтому (17.20) показывает, что эта полная вероятность может быть выражена с помощью „рассеяния вперед“ (т. е. рассеяния из  $a$ -состояния в это же  $a$ -состояние). Другими словами, уменьшение интенсивности волны, распространяющейся в среде, является результатом интерференции между падающей волной и рассеянной волной [11].

### § 3. Задачи рассеяния

Применим основное уравнение (17.14в) к изучению процесса рассеяния, в котором принимают участие две частицы со спином 0 (и массами  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ ). Обозначим координаты и энергии-импульсы

<sup>1)</sup> В общем случае, когда  $\Phi_a$  описывает состояние многих частиц, пространственное представление, соответствующее  $\delta_+(E - H_0)$ , может быть асимптотически записано в виде произведения расходящихся волн.

этих частиц соответственно через  $(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{k}^{(1)})$  и  $(\mathbf{r}^{(2)}, \mathbf{k}^{(2)})$ . Тогда полный и относительный импульсы  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{k}$  равны

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)}, \\ \mathbf{k} &= \frac{1}{2}(\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{k}^{(2)}), \end{aligned} \quad (17.21)$$

а полная энергия  $E$  представляется в виде

$$E = \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{1}{2}\mathbf{K} - \mathbf{k}, \frac{1}{2}\mathbf{K} - \mathbf{k}\right)} + \sqrt{x_2^2 + \left(\frac{1}{2}\mathbf{K} + \mathbf{k}, \frac{1}{2}\mathbf{K} + \mathbf{k}\right)}. \quad (17.22)$$

Любое состояние двух частиц можно определить с помощью набора переменных  $(\mathbf{K}, E, \zeta, \varphi)$ , где переменные  $\zeta$  и  $\varphi$  есть

$$\zeta = \cos \theta = \frac{k_2}{k}, \quad \varphi = \arctg \frac{k_2}{k_1}. \quad (17.23)$$

Если  $(\mathbf{K}, E, \eta)$  — набор „констант рассеяния“, то (17.14в) можно записать в смешанном относительно  $(\mathbf{K}, E, \zeta, \varphi)$  и  $(\mathbf{K}, E, \eta)$  представлении

$$\begin{aligned} (E', \zeta', \varphi' | \Psi | E, \eta) &= \delta_-(E - E')(\zeta', \varphi' | \eta) + \\ &+ \delta_+(E - E')(E', \zeta', \varphi' | -2\pi i \mathbf{R} | E, \eta), \end{aligned} \quad (17.24a)$$

где множитель  $\delta$ , учитывающий сохранение полного импульса, опущен. Поэтому равенство (17.24a) справедливо лишь для  $\mathbf{K} = \mathbf{K}'$ .

Последнее равенство может быть записано в виде

$$\begin{aligned} (E', \zeta', \varphi' | \Psi | E, \eta) &= \delta_-(E - E')(\zeta', \varphi' | \eta) + \\ &+ \delta_+(E - E')(E', \zeta', \varphi' | A | E, \eta), \end{aligned} \quad (17.24б)$$

где

$$(E', \zeta', \varphi' | A | E, \eta) = (\zeta', \varphi' | \eta) + (E', \zeta', \varphi' | -2\pi \mathbf{R} | E, \eta). \quad (17.25a)$$

Из (17.25a) получаем

$$\begin{aligned} (E, \zeta', \varphi' | A | E, \eta) &= \int d\zeta'' d\varphi'' \{ \delta(\zeta' - \zeta'') \delta(\varphi' - \varphi'') + \\ &+ (E, \zeta', \varphi' | -2\pi i \mathbf{R} | E, \zeta'', \varphi'') \} (\zeta'', \varphi'' | E, \eta) = \\ &= S^0(\zeta', \varphi' | \eta) \quad \text{для } E' = E, \end{aligned} \quad (17.25б)$$

где  $S^0$  определяется таким образом, чтобы  $S^0 \delta(E' - E)$  было собственным значением  $S$ , соответствующим  $(\mathbf{K}, E, \zeta', \varphi')$ -состоянию.

Теперь преобразуем (17.24б) в координатное представление. В системе центра инерции ( $\mathbf{K} = 0$ ) в качестве констант  $\eta$  можно взять моменты количества движения  $l$  и их компоненты  $m$  на направление оси  $x_2$ . Если падающая волна записывается в виде  $\exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , то

имеем

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{\pi}}{irk} \sum_l \sqrt{2l+1} i^l \left\{ -e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right)} + e^{i\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right)} S^0 \right\} Y_l^0(\cos \theta), \quad k \equiv |\mathbf{k}|, \quad r \equiv |\mathbf{r}|, \quad (17.26a)$$

где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{r}$  и направлением импульса  $\mathbf{k}$ .

Последнее равенство может быть получено следующим образом. Координатное представление для  $\Psi$  получается, во-первых, в результате изменения представления в (17.24б) от  $(E', \zeta', \varphi)$  к  $\mathbf{k}'$  и, во-вторых, в результате последующего интегрирования по  $d^3k'$  после умножения соответствующего выражения на  $(1/2\pi)^{3/2} \exp(i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) d^3k'$ . Изменение представления от  $(E', \zeta', \varphi)$  к  $(\mathbf{k}')$  выполняется с помощью умножения  $\Psi$  на нормировочный множитель  $1/\sqrt{\Delta}$ . Этот множитель обеспечивает сохранение нормировки волновой функции при изменении представления и поэтому определяется равенством

$$\int \frac{1}{\Delta} dE' d\zeta' d\varphi' e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} = \int d^3k' e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} = \int k'^2 dk' d\zeta' d\varphi' e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})}.$$

Другими словами,  $k'^2 \Delta$  является якобианом<sup>1)</sup>  $\Delta = \partial E' / \partial k'$ .

Таким образом, координатное представление  $\Psi$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \sum_{l, m} \int \frac{dE'}{\sqrt{\Delta}} d\zeta' d\varphi' e^{i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} (E', \zeta', \varphi' | \Psi | E, l, m) = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \sum_{l, m} \int \frac{dE'}{\sqrt{\Delta}} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' e^{ik'r \cos \theta'} (E', \zeta', \varphi' | \Psi | E, l, m), \end{aligned}$$

где  $(\varphi', \theta')$  — углы между  $\mathbf{k}'$  и направлением  $\mathbf{r}$ . Интегрируя по  $d\varphi' d\theta'$  и пренебрегая членами высших порядков ( $\geq 2$ ) относительно величины  $(1/k'r)$ , получаем следующее асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &\approx \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \sum_{l, m} \int dE' \frac{2\pi}{i\sqrt{\Delta} k' r} \{ e^{ik'r} (E', \zeta' = 1 | \Psi | E, l, m) - \\ &- e^{-ik'r} (E', \zeta' = -1 | \Psi | E, l, m) \}. \end{aligned} \quad (17.26б)$$

С другой стороны, известно, что для любой регулярной функции

<sup>1)</sup> Например, когда  $x_1 = x_2 = x$ , величина  $\Delta$  дается на основании (17.22) и (17.23) в виде

$$\Delta = \frac{2}{k' V \sqrt{x^2 + k'^2}}.$$

$f(k)$  имеют место равенства

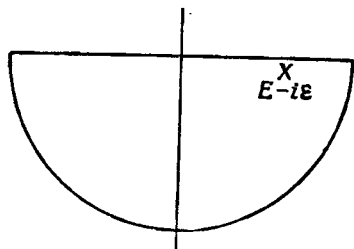
$$\int_{-\infty}^{\infty} dE' \delta_-(E - E') e^{-ik'r} f(k') = e^{-ikr} f(k),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE' \delta_+(E - E') e^{ik'r} f(k') = e^{ikr} f(k),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE' \delta_-(E - E') e^{ik'r} f(k') = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE' \delta_+(E - E') e^{-ik'r} f(k') = 0.$$

Первое равенство выводится следующим путем:



Фиг. 27.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dE' \delta_-(E - E') e^{-ik'r} f(k') &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dE' \frac{1}{E - E' - i\epsilon'} e^{-ik'r} f(k') = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C dE' \frac{1}{E - E' - i\epsilon'} e^{-ik'r} f(k'), \end{aligned}$$

где контур  $C$  состоит из действительной оси и полуокружности ниже действительной оси (фиг. 27). Вычет в полюсе  $E' = E - i\epsilon'$  равен  $(-)$   $e^{-ikr} f(k)$ . Таким образом, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE' \delta_-(E - E') e^{-ik'r} f(k') = e^{-ikr} f(k).$$

Другие равенства доказываются аналогичным способом.

Теперь, подставляя (17.24б) и (17.25б) в (17.26б), получаем

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &= \left(\frac{1}{2\pi\Delta}\right)^{1/2} \frac{1}{ikr} \{-e^{-ikr} (\zeta = -1 | \eta) + e^{ikr} (E, \zeta = 1 | A | E, \eta)\} = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\Delta}\right)^{1/2} \frac{1}{ikr} \{-e^{-ikr} (\zeta = -1 | \eta) + S^0 e^{ikr} (\zeta = 1 | \eta)\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, плоскую падающую волну  $\Psi_{in}$  можно разложить по сферическим гармоникам, так что

$$\begin{aligned} \Psi_{in} = e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} &\approx \frac{\sqrt{\pi}}{ikr} \sum_i \sqrt{2l+1} i^l \{-e^{-i(kr - \frac{\pi}{2}l)} + \\ &+ e^{i(kr - \frac{\pi}{2}l)}\} Y_l^0(\cos \theta) \quad \text{для больших } r. \quad (17.27) \end{aligned}$$

Ввиду того что  $\Psi(\mathbf{r})$ -функция при  $S^0 = 1$  должна свестись к падающей волне, мы видим, что

$$\left(\frac{1}{2\pi\Delta}\right)^{1/2} (\zeta = 1 | l, m) = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2l+1} e^{i\frac{\pi}{2}l} Y_l^0(\cos\theta), \quad (17.28)$$

$$\left(\frac{1}{2\pi\Delta}\right)^{1/2} (\zeta = -1 | l, m) = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{2l+1} e^{-i\frac{\pi}{2}l} Y_l^0(\cos\theta)$$

для  $m = 0$ , и  $(\zeta = 1 | l, m) = (\zeta = -1 | l, m) = 0$  для  $m \neq 0$ . Эти соотношения приводят к (17.26а).

Амплитуда рассеянной волны  $(1|r)f(\theta)$ , полученная как разность между (17.27) и (17.26а), равна

$$\frac{1}{r} f(\theta) = \frac{\sqrt{\pi}}{kr} \sum_l i^{l-1} \sqrt{2l+1} R^0 Y_l^0(\cos\theta) e^{i(kr - \frac{\pi}{2}l)}, \quad (17.29a)$$

где

$$R^0 \equiv 1 - S^0. \quad (17.29б)$$

Отсюда следует, что дифференциальное и полное эффективные сечения равны

$$d\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2 d\Omega, \quad (17.30a)$$

$$\sigma = \int d\Omega d\sigma(\theta) = \frac{\pi}{k^2} \sum (2l+1) |R^0|^2. \quad (17.30б)$$

Первое из этих выражений получается следующим способом. Число падающих частиц в единице объема равно единице, потому что

$$\int d^3x |\Psi_{in}(\mathbf{r})|^2 = \int d^3x = 1,$$

где область интегрирования ограничивается единичным объемом [см. (17.27)]. Поэтому число частиц, падающих на единицу поверхности в единицу времени, равно  $v$  ( $v$  — скорость падающих частиц). С другой стороны, число рассеянных частиц, пересекающих в единицу времени маленькую площадку величиной  $ds$ , положение которой характеризуется радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , равно  $vd\sigma(\theta) = v ds r^{-2} |f(\theta)|^2$ . Поэтому для эффективного сечения имеем выражение

$$d\sigma(\theta) = v ds r^{-2} \frac{|f(\theta)|^2}{v} = |f(\theta)|^2 d\Omega.$$

Так как оператор  $S$  унитарен, он может быть записан в виде  $\exp(i\eta)$ , причем эрмитова матрица  $\eta$  называется матрицей фазы.

Сейчас рассмотрим случай, когда единственным возможным процессом является рассеяние (поглощения нет). Тогда оператор  $S^0$  должен удовлетворять соотношению

$$|S^0|^2 = 1. \quad (17.31)$$



Таким образом,  $S^0$  можно записать в виде

$$S^0 = e^{2i\delta}, \quad (17.32)$$

где  $\delta$  —  $c$ -число.

Подставляя (17.32) в (17.26а), мы видим, что  $2\delta$  является разностью фаз сходящихся волн. Более того, легко видеть, что падающая волна (17.27) и расходящаяся волна (17.29а) имеют разность в фазах величиной  $\delta$ .

Используя (17.32), можно (17.30б) записать в виде

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta. \quad (17.30в)$$

#### § 4. Связанные состояния

Сейчас мы обсудим соотношения, существующие между теорией  $S$ -матрицы и теорией связанных состояний, взяв в качестве примера  $S$ -состояние ( $l=0$ ). Величина  $S(k)$ , собственное значение  $S^0$  для  $(k, l)$ -состояния с  $l=0$ , может быть определена в комплексной плоскости переменного  $k$  с помощью аналитического продолжения.

Для  $k = -i|k|$  члены в скобках в (17.26а) могут быть записаны в виде

$$\Psi_{-i|k|}(\mathbf{r}) \sim \{ -e^{-|k|r} + e^{i|k|r} S(-i|k|) \}. \quad (17.33)$$

Первый и второй из этих членов обращаются в нуль и при  $r \rightarrow \infty$  соответственно становятся бесконечными. Поэтому, когда  $\Psi_{-i|k|}(\mathbf{r})$  описывает связанное состояние, величина  $S(-i|k|)$  должна быть равна нулю. Таким образом, имеем

$$S(k) = 0, \quad k = -i|k| \quad (17.34)$$

для связанного состояния, энергия которого в нерелятивистском приближении равна

$$E = \frac{1}{2\alpha} k^2 = -\frac{|k|^2}{2\alpha}. \quad (17.35а)$$

Теперь исследуем вопрос о том, может ли условие (17.34) всегда обеспечить появление связанных состояний. Уравнение Шредингера для частицы в центральном поле с потенциалом  $\Phi(r)$  имеет вид

$$\Delta \Psi(\mathbf{r}) + 2\alpha \{ E - \Phi(r) \} \Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (17.36а)$$

Если  $l=0$ , можно ввести величину  $\varphi$  с помощью равенства  $r\Psi(\mathbf{r}) = \varphi(r)$  и записать (17.36а) в виде

$$\varphi''(r) + k^2 \varphi(r) = \Phi(r) \varphi(r), \quad (17.36б)$$

где

$$\begin{aligned} k^2 &= 2\alpha E, \\ \varphi'' &= \frac{d^2}{dr^2} \varphi. \end{aligned} \quad (17.35б)$$

Прежде всего возьмем потенциал в виде [2]

$$\Phi(r) = -2\alpha\Phi_0 e^{-r/a}, \quad (17.37)$$

где  $\Phi_0$  и  $a$  — положительные величины. Когда  $k^2 > 0$ , решения уравнения (17.366) могут быть выражены через бесселевы функции

$$J_{\pm i\rho} \left( \alpha \exp \left( -\frac{r}{2a} \right) \right);$$

здесь

$$\rho = 2ak, \quad \alpha = 2a\sqrt{2\pi\Phi_0}.$$

Решение, обращающееся в нуль при  $r=0$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_k(r) = & \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\Gamma(i\rho + 1)}{J_{i\rho}(\alpha)} \right| \times \\ & \times \left\{ J_{-i\rho}(\alpha) J_{i\rho} \left( \alpha \exp \left( -\frac{r}{2a} \right) \right) - J_{i\rho}(\alpha) J_{-i\rho} \left( \alpha \exp \left( -\frac{r}{2a} \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (17.38a)$$

Асимптотический вид решения (17.38a) при  $r \rightarrow \infty$  представляется формулой

$$\begin{aligned} \psi_k(r) \approx & \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\Gamma(i\rho + 1)}{J_{i\rho}(\alpha)} \right| \times \\ & \times \left\{ \frac{J_{-i\rho}(\alpha) (\alpha/2)^{i\rho}}{\Gamma(i\rho + 1)} e^{-ikr} - \frac{J_{i\rho}(\alpha) (\alpha/2)^{-i\rho}}{\Gamma(-i\rho + 1)} e^{ikr} \right\}. \end{aligned} \quad (17.38б)$$

Сравнивая (17.38б) с (17.26a), получаем  $S^0$  в виде

$$S(k) = \frac{J_{i\rho}(\alpha) \Gamma(i\rho + 1)}{J_{-i\rho}(\alpha) \Gamma(-i\rho + 1)} \left( \frac{\alpha}{2} \right)^{-2i\rho}. \quad (17.39a)$$

Это равенство показывает, что  $S(k) = 0$ , когда: 1)  $J_{i\rho}(\alpha) = 0$  или 2)  $\Gamma(-i\rho + 1)$  — бесконечность. Поскольку все нули функции  $J_{i\rho}(\alpha)$  ниже действительной оси находятся на мнимой оси, условие 1) можно записать в виде

$$J_{|\rho|}(\alpha) = 0. \quad (17.40)$$

В этих нулевых точках  $k = k_n$  ( $\rho = \rho_n$ ) волновая функция (17.38a) обращается в функцию

$$\varphi_n(r) = C_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(|\rho_n| + 1) \left( \frac{2}{\alpha} \right)^{|\rho_n|} J_{|\rho_n|} \left( \alpha \exp \left( -\frac{r}{2a} \right) \right), \quad (17.38в)$$

причем  $C_n$  — нормировочная постоянная [2].

Условие 2) означает равенство

$$\Gamma(-i\rho + 1) = \infty, \quad (17.41a)$$

которое имеет место при

$$i\rho = |\rho| = 1, 2, 3, \dots \quad (17.41б)$$

Однако для этих значений величины  $\rho$  волновые функции равны нулю, так как имеет место соотношение

$$J_m(\alpha) = (-1)^n J_{-n}(\alpha) \quad \text{для } n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, нули, получаемые из равенства (17.41а), не обусловлены обязательным существованием связанных состояний. Эти нули называются „лишними нулями“ и были впервые обнаружены Ма [13 — 15].

Теперь рассмотрим более подробно эти лишние нули. Предположим, что потенциал центрально-симметричного поля удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} dr |\Phi(r)| = \text{Конечная величина.} \quad (17.42)$$

Существуют два независимых решения уравнения (17.36б)  $f(k, r)$  и  $f(-k, r)$  [8]

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} e^{ikr} f(k, r) &= 1, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-ikr} f(-k, r) &= 1. \end{aligned} \quad (17.43)$$

Введем в рассмотрение величины  $f(k)$  и  $f(-k)$ , определяемые равенствами

$$f(k) \equiv f(k, 0), \quad f(-k) \equiv f(-k, 0). \quad (17.44)$$

Если выполнено условие (17.42), то можно доказать, что  $f(k, r)$  и  $f(-k, r)$  для действительных ненулевых значений  $k$  являются комплексно-сопряженными величинами, непрерывными по  $k$  и  $r$ ; это означает, что  $f(k) \neq 0$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(k) = 1$ . Кроме того, если по-

тенциал удовлетворяет более сильному [чем (17.42)] условию

$$\int_0^{\infty} dr r |\Phi(r)| = \text{Конечная величина,} \quad (17.45)$$

то можно доказать, что функция  $f(k, r)$  непрерывна даже в точке  $k=0$ . Решение уравнения (17.36б), обращающееся в нуль при  $r=0$ , можно записать в виде

$$\varphi(r) = \frac{i}{2|f(k)|} \{f(-k)f(k, r) - f(k)f(-k, r)\}, \quad (17.46)$$

причем постоянный множитель опущен.

Далее, (17.26а) показывает, что

$$S(k) = e^{2i\delta(k)} = \frac{f(k)}{f(-k)}. \quad (17.47)$$

Ввиду того что для  $k = -i|k|$  функция  $f(k, r)$  при  $r \rightarrow \infty$  обращается экспоненциально в нуль, мы видим, что эта величина описывает связанное состояние. Поэтому условие того, что (17.46) описывает связанное состояние, записывается в виде

$$f(k) = 0 \text{ для } k = -i|k|. \quad (17.48)$$

Следует заметить, что связанные состояния при  $k=0$  (т. е.  $E=0$ ) не могут быть определены равенством  $f(0)=0$ , поскольку  $f(k, r)$  и  $f(-k, r)$  равны между собой и потому не являются при  $k=0$  независимыми. Для построения решения  $\varphi$  при  $k=0$  мы должны найти другое независимое решение. Однако можно доказать [1], что при выполнении условия (17.45) связанных состояний с нулевой энергией ( $E=0$ ) не существует.

Резюмируя, можно сказать, что, когда выполнено условие (17.45), сдвиги фаз  $\delta(k)$  и дискретные уровни энергий связанных состояний определяются величиной  $f(k)$ . Однако обратное утверждение не имеет места, т. е.  $\delta(k)$  не дает возможности определить  $f(k)$ , а позволяет определить только  $S(k)$ . Далее,  $S(k)=0$  не всегда соответствует связанному состоянию, потому что равенство  $f(-k)=\infty$  также дает  $S(k)=0$ .

Конкретную иллюстрацию полученных выше результатов мы дадим на уже использованном нами примере (17.37). В этом примере  $f(k, r)$  и  $f(k)$  равны

$$f(k, r) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-ip} \Gamma(ip+1) J_{ip} \left( \alpha \exp\left(-\frac{r}{2a}\right) \right), \quad (17.49a)$$

$$f(k) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{-ip} \Gamma(ip+1) J_{ip}(\alpha). \quad (17.49b)$$

Условие 1) [т. е. (17.40)] эквивалентно условию (17.48), приводящему к связанным состояниям. Однако условие 2) [т. е. (17.41)] дает равенство  $f(-k)=\infty$ , которое указывает на лишние нули.

Эти результаты указывают на то обстоятельство, что могут существовать многие потенциалы, которые приводят к одинаковым сдвигам фаз, но различным уровням энергии связанных состояний. Действительно, такого рода пример указал Баргманн [1], который рассмотрел два потенциала

$$\Phi_1(r) = \frac{\rho\sigma\{4\rho\sigma + (\rho - \sigma)^2 \operatorname{ch}((\rho + \sigma)r - 2\theta) - (\rho + \sigma)^2 \operatorname{ch}((\rho - \sigma)r)\}}{\{\sigma \operatorname{sh}(\rho r - \theta) - \rho \operatorname{sh}(\sigma r - \theta)\}^2}, \quad (17.50a)$$

$$\Phi_2(r) = \frac{\rho\sigma\{4\rho\sigma + (\rho - \sigma)^2 \operatorname{ch}((\rho + \sigma)r) - (\rho + \sigma)^2 \operatorname{ch}((\rho - \sigma)r + 2\theta)\}}{\{\sigma \operatorname{sh}(\rho r + \theta) - \rho \operatorname{sh}(\sigma r + \theta)\}^2}, \quad (17.50b)$$

в которых  $\rho > \sigma > 0$  и  $\theta > 0$ .

Величины  $f(k)$ , связанные с  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , обозначим через  $f_1(k)$  и  $f_2(k)$  соответственно. Тогда

$$f_1(k) = \frac{2k + i(\rho + \sigma)}{2k - i(\rho - \sigma)}, \quad (17.51)$$

откуда для связанного состояния получается условие

$$k = -\frac{i}{2}(\rho + \sigma),$$

а энергия связанного состояния равна

$$E_1 = -\frac{1}{8\alpha}(\rho + \sigma)^2. \quad (17.52)$$

С другой стороны, величина  $f_2(k)$  дается равенством

$$f_2(k) = \frac{2k + i(\rho - \sigma)}{2k - i(\rho + \sigma)}, \quad (17.53)$$

которое для связанного состояния дает значение  $k = -(i/2)(\rho - \sigma)$ . Поэтому энергия связанного состояния равна

$$E_2 = -\frac{1}{8\alpha}(\rho - \sigma)^2. \quad (17.54)$$

Однако (17.47), (17.51) и (17.53) показывают, что  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  приводят к одной и той же величине  $S(k)$ , т. е.

$$S_1(k) = S_2(k) = \frac{(2k + i(\rho - \sigma))(2k + i(\rho + \sigma))}{(2k - i(\rho - \sigma))(2k - i(\rho + \sigma))}. \quad (17.55)$$

Далее, поскольку  $\Phi_1(r)$  зависит от  $\theta$ , а  $f_1(k)$  и  $S_1(k)$  от  $\theta$  не зависят, то существует много потенциалов, зависящих непрерывно от  $\theta$ , которые приводят к одному и тому же сдвигу фаз (т. е. одинаковой величине  $S$ ). Это утверждение справедливо также и для  $\Phi_2$ .

Из этих вычислений следует, что с помощью только сдвигов фаз [или  $S(k)$ ] нельзя однозначно найти потенциал. В самом деле, можно доказать, что разность двух потенциалов, приводящих к одинаковому сдвигу фаз и одинаковым собственным значениям  $k$ , может быть представлена в виде

$$\Phi_1(r) - \Phi_2(r) = \sum_m a_m Z_m(r), \quad (17.56)$$

где  $a_m$  — постоянные, а  $Z_m$  определены равенством  $Z_m = \varphi_m^{(1)} \varphi_m^{(2)}$ . Функции  $\varphi_m^{(1)}$  (или  $\varphi_m^{(2)}$ ) являются решениями уравнения (17.36 б) с  $k_m = -i|k|$  для потенциала  $\Phi_1$  (или  $\Phi_2$ ) [6].

Однако можно показать [1], что если два потенциала  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  удовлетворяют условию (17.45) и условию

$$\Phi(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \geq 0 \quad (\text{для некоторых } l \text{ и произвольных } r)$$

и для „каждого“ момента количества движения  $l$  приводит к одинаковым сдвигам фаз, то эти два потенциала должны быть равны <sup>1)</sup> (т. е.  $\Phi_1(r) = \Phi_2(r)$ ).

Теперь обсудим условия, при которых лишние нули отсутствуют. Поскольку лишние нули появляются за счет равенства  $f(-k) = \infty$ , то мы не будем иметь лишних нулей тогда, когда  $f(k, r)$  является регулярной функцией на всей плоскости комплексного переменного  $k$ . В этом случае одинаковые функции  $S(k)$  приводят к одинаковым энергиям связанных состояний.

Можно показать, что достаточное условие того, что потенциал приводит к регулярной функции  $f(k, r)$ , имеет вид [1]

$$I(\alpha) \equiv \int_0^{\infty} e^{-\alpha r} |\Phi(r)| dr = \begin{array}{l} \text{Конечная (для всех} \\ \text{положительных } \alpha). \end{array} \quad (17.57)$$

Однако для существующей квантовой теории это условие является слишком сильным; например, потенциал Юкава (12.25) не может удовлетворить этому условию.

Указанное выше утверждение мы проиллюстрируем на предыдущем примере (17.37). Прежде всего потенциал (17.37) модифицируем в точке  $r=R$  так, чтобы он удовлетворял условию (17.57), положив [14–15]

$$\Phi(r) \begin{cases} = -2\kappa\Phi_0 e^{-r/a} & \text{для } 0 < r < R \\ = 0 & \text{для } r > R \end{cases}. \quad (17.58)$$

Решение  $\varphi(r)$  уравнения (17.36б) соответственно пропорционально выражению  $\sin(kr + \delta)$  для  $r > R$  и выражению (17.38а) для  $r < R$ . Коэффициенты должны быть определены из условия непрерывности  $\varphi$  и ее первой производной при  $r=R$ . Далее, для  $S(k)$  получается выражение

$$S(k) = -e^{-2ikR} \frac{J_{-i\rho}(\alpha) J_{i\rho+1}(\alpha \exp(-R/2a)) + J_{i\rho}(\alpha) J_{-i\rho-1}(\alpha \exp(-R/2a))}{J_{-i\rho}(\alpha) J_{i\rho-1}(\alpha \exp(-R/2a)) + J_{i\rho}(\alpha) J_{-i\rho+1}(\alpha \exp(-R/2a))}. \quad (17.39 б)$$

Условие  $S(k) = 0$  дает равенство

$$J_{-i\rho}(\alpha) J_{i\rho+1}(\alpha \exp(-R/2a)) + J_{i\rho}(\alpha) J_{-i\rho-1}(\alpha \exp(-R/2a)) = 0, \quad (17.59)$$

которое эквивалентно условию (17.40) при  $R \rightarrow \infty$ . Таким образом, избежать лишних нулей удастся при вычислении дискретного спектра энергий для потенциала, который исчезает при  $r > R$ , причем мы устремляем  $R \rightarrow \infty$ .

Более подробный анализ соотношения между  $S(k)$  и связанными состояниями провел Ванкампиен [10]. Определим  $f(k)$  и  $S(k)$  на всей плоскости комплексного переменного  $E$  с помощью аналитического

<sup>1)</sup> Весьма удобный метод построения потенциалов по фазовым сдвигам был дан Иостом и Коном [9].

продолжения. Через  $\Gamma$  мы обозначим всю область комплексного переменного  $E$ , за исключением действительной оси, а через  $f(E, r)$  — значения величины  $f(k, r)$  в  $\Gamma$  (асимптотический вид этой величины есть  $\exp(iE^{1/2}r)$ ; корень квадратный  $E^{1/2}$  определен так, что  $\text{Im}(E^{1/2}) > 0$  [см. (17.35а)], с тем, чтобы было  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(E, r) \rightarrow 0$ ).

При этих условиях можно доказать, что  $f(E, r)$  является в  $\Gamma$  однозначной функцией и что функция  $f(E) \equiv f(E, 0)$  аналитична в  $\Gamma$ ; следовательно, нули этой функции расположены на „отрицательной“ действительной оси  $E$  [10]. Функция  $S(E)$  может быть записана в виде

$$S(E) = \frac{f(E_+)}{f(E_-)} \quad \text{для действительных } E, \quad (17.60)$$

где  $f(E_{\pm})$  — значения функции  $f(E)$ , полученные как ее пределы при стремлении к действительной положительной оси сверху или снизу. Например, в области ниже действительной оси,  $\text{Im}(E_-) < 0$ , и поэтому  $E_-^{1/2}$  равно не  $k + i\epsilon'$ , а величине  $-k + i\epsilon'$  ( $k > 0$ ). Таким образом,  $f(E_-) = f(-k)$ . Аналогичным путем имеем  $f(E_+) = f(k)$ . Из (17.47) получаем (17.60).

Из (17.60) следует

$$\ln f(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} dE' \frac{\ln S(E')}{E' - E} + \sum_m \ln \left( 1 - \frac{E_m}{E} \right), \quad (17.61)$$

где  $E_m$  — нули функции  $f(E)$ , а логарифмы определены на подходящих ветвях.

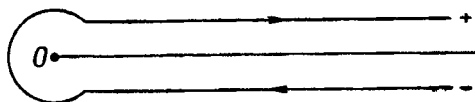
Доказательство (17.61) выглядит следующим образом. Так как функция

$$g(E) \equiv \ln \left\{ f(E) \prod_m \frac{E}{E - E_m} \right\} = \ln f(E) - \sum_m \ln \left( 1 - \frac{E_m}{E} \right)$$

аналитична в области  $\Gamma$ , то теорема Коши дает равенство

$$g(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_L dE' \frac{g(E')}{E' - E},$$

в котором через  $L$  обозначен контур, показанный на фиг. 28.



Фиг. 28.

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
 g(E) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} dE' \frac{g(E'_+) - g(E'_-)}{E' - E} = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} dE' \frac{1}{E' - E} \ln \frac{f(E'_+)}{f(E'_-)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} dE' \frac{\ln S(E')}{E' - E},
 \end{aligned}$$

а это приводит к (17.61).

Указанное равенство показывает, что функция  $f(E)$  не может быть определена только с помощью функции  $S(E)$ , заданной на действительной положительной оси  $E$ , а требует для своего определения знания величин  $E_m$ ; оно показывает также, что даже, когда функция  $S(E)$  задана, величины  $E_m$  можно сделать произвольными с помощью модификаций функции  $f(E)$ , которые не нарушают (17.61) (см. также работы [18] и [7]).

Резюмируя изложенное выше, можно сказать, что  $S$ -матрица может определить энергии связанных состояний только в случае отсутствия лишних нулей и что исключение лишних нулей требует более детального знания волновой функции, чем только ее асимптотический вид.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bargmann V., Rev. Mod. Phys., 21, 488 (1949).
2. Bethe H. A., Bacher R. F., Rev. Mod. Phys., 8, 83 (1936) (см. перевод: Г. Бете, Р. Бечер, Физика ядра, т. I, Устойчивые состояния ядер, Харьков, 1938).
3. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, 3-d ed., 1947 (см. перевод второго издания: П. А. М. Дирак, Основы квантовой механики, М.—Л., 1937).
4. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 120, 513 (1943).
5. Heisenberg W., Zs. f. Phys., 120, 673 (1943).
6. Holmberg B., Nuovo Cimento, 9, 597 (1952).
7. Hu N., Phys. Rev., 74, 131 (1948).
8. Jost R., Helv. Phys. Acta, 20, 256 (1947).
9. Jost R., Kohn W., Phys. Rev., 87, 977 (1952).
10. Van Kampen N. G., Phil. Mag., 42, 851 (1951).
11. Lax M., Phys. Rev., 78, 306 (1950).
12. Lippman B. A., Schwinger J., Phys. Rev., 79, 769 (1950).
13. Ma S. T., Phys. Rev., 69, 668 (1946).
14. Ma S. T., Phys. Rev., 71, 159 (1947).
15. Ma S. T., Phys. Rev., 71, 210 (1947).
16. Møller C., Kgl. Danske Vid. Selsk., 23, No. 1 (1945).
17. Møller C., Kgl. Danske Vid. Selsk., 24, No. 9 (1946).
18. Wildermuth K., Zs. f. Phys., 27, 85 (1950).



# Теория функций распространения

## § 1. Введение

В гл. 12 мы рассмотрели теорию гейзенберговского представления, в которой основными величинами были свободные поля  $Q_\alpha^{(in)}(x)$ , описывающие падающие частицы. Однако такая теория не описывает достаточно точно реального положения вещей, при котором падающие и уходящие частицы окружены собственными полями. Можно ожидать, что в теории, в которой не будет голых частиц, перенормировка массы и заряда будет осуществляться автоматически. В последующих параграфах будет изложено первое приближение к такого рода теории. В гл. 14 было показано, что в теории перенормировок квантовой электродинамики нормировка внешних операторов электронного и фотонного полей должна быть изменена добавлением соответственно множителей  $Z_2$  и  $Z_3$ . Это не противоречит нормировке внутренних операторов, для которых константы  $Z_2$  и  $Z_3$  могут быть включены в константы связи (см. фиг. 24, стр. 294). Однако между внешними и внутренними операторами не может существовать какого-либо существенного различия; в самом деле, приходящие и уходящие частицы могут наблюдаться с помощью некоторых электромагнитных взаимодействий и, таким образом, изменение в нормировке внешних операторов может быть скомпенсировано перенормировкой констант связи внешних электромагнитных взаимодействий. Другими словами, записав внешнее электромагнитное взаимодействие  $ie\bar{\psi}\gamma_\mu A_\mu\psi$  для падающего электрона как  $\lambda\bar{\psi}\eta$  ( $\lambda\eta = ie\gamma_\mu A_\mu\psi$ ), можно рассматривать изменение в нормировке  $\psi$  как изменение величины константы связи  $\lambda$  внешнего поля. Продолжая это рассмотрение, мы обсудим вопрос о перенормировке независимо от ряда теории возмущений. В § 6 будет показано, что перенормированная теория связана с неперенормированной теорией посредством некоторого преобразования — преобразования перенормировки.

В § 8 обсуждается более общий случай, чем квантовая электродинамика, — обсуждаются общие вопросы перенормировки одночастных функций распространения. Метод перенормировок, изложенный в гл. 14 и в § 7 данной главы, распро-

страняется на случаи, в которых частицы каждого поля имеют одно стабильное массовое состояние <sup>1)</sup>. Однако иногда случается так, что наличие собственного поля приводит к более, чем одному массовому состоянию частицы. Перенормировка в этом последнем случае обсуждается в § 8.

## § 2. Формулировка теории

Рассмотрим <sup>2)</sup> электронно-позитронное поле  $\psi(x)$ ,  $\bar{\psi}(x)$ , взаимодействующее с электромагнитным полем  $A_\mu(x)$ .

Внешние источники этих полей мы будем обозначать через  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$  и  $J_\mu$  соответственно<sup>3)</sup>. Мы будем пользоваться представлением (свободным от источников), в котором уравнения поля имеют вид

$$F(x)\psi(x) \equiv (\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa - ie\gamma_\mu A_\mu(x))\psi(x) = 0, \quad (18.1a)$$

$$\bar{F}(x)\bar{\psi}(x) \equiv (\gamma_\mu^T \partial_\mu - \kappa + ie\gamma_\mu^T A_\mu(x))\bar{\psi}(x) = 0, \quad (18.1b)$$

и

$$\square A_\mu(x) = -j_\mu(x) \equiv -i\frac{e}{2}\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) + \text{К.С.} \quad (18.1v)$$

Если через  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $A_\mu$  обозначить те же поля в гейзенберговском представлении, то уравнения поля для них имеют вид

$$F(x)\psi(x) = \lambda\eta(x), \quad (18.2a)$$

$$\bar{F}(x)\bar{\psi}(x) = -\lambda\bar{\eta}(x), \quad (18.2b)$$

$$\square A_\mu(x) = -j_\mu(x) - \lambda'J_\mu(x), \quad (18.2v)$$

где  $\lambda$  и  $\lambda'$  — константы связи внешних источников. Этому соответствует следующий, введенный Швингером [13], лагранжиан взаимодействия, обусловленный источниками

$$L_s(x) = \lambda\bar{\psi}(x)\eta(x) + \lambda\bar{\eta}(x)\psi(x) + \lambda'J_\mu(x)A_\mu(x). \quad (18.3)$$

Как показано в гл. 10, пример 4, каждый член в плотности гамильтониана взаимодействия должен включать четное число операторов, которые антикоммутируют с любым заданным оператором поля. Беря в качестве пробных операторов последовательно операторы  $\psi$ ,  $A_\mu$ ,  $\eta$  и  $J_\mu$ , мы из (18.3) получаем

$$[\eta(x), \bar{\psi}(x')]_+ = [\eta(x), \psi(x')]_+ = [\eta(x), \eta(x')]_+ = 0, \quad (18.4a)$$

$$[\eta(x), A_\mu(x')]_- = [\eta(x), J_\mu(x')]_- = 0, \quad (18.4b)$$

$$[J_\mu(x), \bar{\psi}(x')]_- = [J_\mu(x), \psi(x')]_- = 0, \quad (18.4v)$$

$$[J_\mu(x), A_\nu(x')]_- = [J_\mu(x), J_\nu(x')]_- = 0. \quad (18.4g)$$

<sup>1)</sup> То есть состояние с определенным значением массы частицы. — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Здесь мы ограничиваемся квантовой электродинамикой. Относительно функций распространения мезонной теории см. работу Эдвардса [1].

<sup>3)</sup> Теорию функций распространения в представлении взаимодействия также сформулировал Нишияма [9].

Эти перестановочные соотношения доказаны лишь для случая, когда четырехвектор  $x - x'$  является пространственно-подобным. Однако, не входя в противоречие с уравнениями поля, можно считать эти перестановочные соотношения справедливыми для произвольных двух точек  $x, x'$ , так как они коммутируют с гамильтонианом в произвольной точке.

Унитарное преобразование  $U$ , связывающее векторы  $\Psi$  и  $\Psi$  в представлении, свободном от источников, и в гейзенберговском представлении, приводит к равенству

$$\Psi[\sigma] = U[\sigma, \sigma_1, \eta, J] \Psi[\sigma_1], \quad (18.5a)$$

в котором

$$U[\sigma, \sigma_1, \eta, J] = 1, \quad (18.5b)$$

а операторы поля в этих двух представлениях связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \phi(x) &= U[\sigma(x), \sigma_1, \eta, J] \psi(x) U^{-1}[\sigma(x), \sigma_1, \eta, J], \\ A_\mu(x) &= U[\sigma(x), \sigma_1, \eta, J] A_\mu(x) U^{-1}[\sigma(x), \sigma_1, \eta, J]. \end{aligned}$$

Можно доказать, что оператор преобразования  $U$  удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} U[\sigma, \sigma_1, \eta, J] = H_s(x) U[\sigma, \sigma_1, \eta, J]. \quad (18.6a)$$

Здесь гамильтониан взаимодействия (в представлении, свободном от источников) имеет вид

$$H_s(x) = -\lambda \bar{\psi}(x) \eta(x) - \lambda \bar{\eta}(x) \psi(x) - \lambda' J_\mu(x) A_\mu(x). \quad (18.6b)$$

Действительно, из (6.5a), (18.2a) и (18.6a) следует

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \partial_\mu \phi(x) &= \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \int d\sigma'_\mu U[\sigma, \sigma_1, \eta, J] \psi(x') U^{-1}[\sigma, \sigma_1, \eta, J] = \\ &= U[\sigma, \sigma_1, \eta, J] \left\{ \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) - \lambda \gamma_\mu \int d\sigma'_\mu [\bar{\psi}(x), \psi(x')]_+ \eta(x) \right\} \times \\ &\quad \times U^{-1}[\sigma, \sigma_1, \eta, J] = \\ &= U[\sigma, \sigma_1, \eta, J] \left\{ \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) - \lambda \eta(x) \right\} U^{-1}[\sigma, \sigma_1, \eta, J] = \\ &= ie \gamma_\mu A_\mu(x) \phi(x) - \kappa \phi(x), \end{aligned}$$

что приводит к (18.1a). Аналогичным путем доказывается, что оператор  $U$  преобразует (18.2в) в (18.1в).

Если оператор энергии в представлении, свободном от источников, обозначить через  $T_4$ , то собственные состояния  $\Psi_n$  этого оператора определяются уравнением

$$T_4 \Psi_n = E_n \Psi_n. \quad (18.7)$$

Преимущество рассматриваемого представления заключается в том, что  $\Psi_n$ -состояния не зависят от источников. Состояние вакуума  $\Psi_0$  определяется<sup>1)</sup> как состояние с наименьшей энергией  $E_0$ .

Матрица перехода между состояниями  $\Psi[\sigma_2]$ ,  $\Psi[\sigma_1]$  на двух пространственно-подобных поверхностях  $\sigma_2$  и  $\sigma_1$  задается с помощью оператора  $U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J]$ . Этот оператор можно разложить в функциональный ряд Тэйлора. В частности, вакуумное математическое ожидание может быть записано следующим образом<sup>2)</sup>:

$$\begin{aligned} & (U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0 = \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^{m+n+l}}{m!n!l!} \int \bar{\eta}(\xi_1) \dots \bar{\eta}(\xi_n) G_{\mu_1, \dots, \mu_l}^{(n,m)} \times \\ & \times (\xi_1 \dots \xi_n; \xi'_1 \dots \xi'_m; \zeta_1 \dots \zeta_l) \eta(\xi'_1) \dots \eta(\xi'_m) J_{\mu_1}(\zeta_1) \dots J_{\mu_l}(\zeta_l). \end{aligned} \quad (18.8)$$

Символ  $(\ )_0$  означает вакуумное математическое ожидание. Так как каждая приходящая (уходящая) частица должна пройти через внешние поля на поверхности  $\sigma_1$  ( $\sigma_2$ ), в результате чего определится состояние соответствующей частицы, то коэффициенты  $G_{\mu_1, \dots, \mu_l}^{(n,m)}$  в (18.8) должны быть связаны с матричными элементами перехода. Поэтому функции распространения

$$G_{\mu_1, \dots, \mu_l, \mu'_1, \dots, \mu'_l}^{(n,m)}(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_m, z_1 \dots z_l, z'_1 \dots z'_l)$$

(где  $x_1 \dots x_n, z_1 \dots z_l$  расположены на  $\sigma_2$ , а  $x'_1 \dots x'_m, z'_1 \dots z'_l$  — на  $\sigma_1$ ) пропорциональны матричным элементам перехода между состояниями с  $n$  электронами на  $\sigma_2$  и с  $m$  электронами на  $\sigma_1$  с одновременным испусканием  $l$  фотонов на  $\sigma_2$  и поглощением  $l'$  фотонов. Величины  $G_{\mu_1, \dots, \mu_l}^{(n,m)}$  называются функциями распространения, и сейчас мы исследуем их свойства.

Величины  $G_{\mu_1, \dots, \mu_l}^{(n,m)}$  можно получить из величин<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Следует заметить, что вакуум определяется как состояние  $\Psi_0$  с наименьшей энергией взаимодействующих полей, а не свободных полей. Гелл-Манн и Лоу [3] ввели соотношение между вакуумными состояниями ( $\Psi_0, \Phi_0$ ) взаимодействующих и свободных полей.

<sup>2)</sup> Здесь и в последующем мы производим интегрирование по всем переменным, обозначенным греческими буквами ( $\xi, \zeta$ ), и соответствующие дифференциалы писать в этой главе не будем.

<sup>3)</sup> Функциональные производные определяются соотношением

$$\begin{aligned} F[\eta + \delta\eta, \bar{\eta} + \delta\bar{\eta}, J + \delta J] &= F[\eta, \bar{\eta}, J] + \int d^4\xi \frac{\delta}{\delta\eta(\xi)} F[\eta, \bar{\eta}, J] \delta\eta(\xi) + \\ &+ \int d^4\xi \delta\bar{\eta}(\xi) \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(\xi)} F[\eta, \bar{\eta}, J] + \int d^4\xi \frac{\delta}{\delta J_{\mu}(\zeta)} F[\eta, \bar{\eta}, J] \delta J_{\mu}(\zeta), \end{aligned}$$

в котором приращения считаются бесконечно малыми.

$$G_{\mu_1, \dots, \mu_l}^{(n, m)}[\eta, J; x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_m, z_1 \dots z_l] \equiv (i)^{-n-l-m} \times \\ \times \left( \frac{\delta_{\mu_1}^{n_1} \dots \delta_{\mu_l}^{n_l}}{\delta \bar{\eta}_i(x_1) \dots \delta \bar{\eta}_i(x_n) \delta \eta_i(x'_1) \dots \delta \eta_i(x'_m) \delta J_{\mu_1}(z_1) \dots \delta J_{\mu_l}(z_l)} U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J] \right)_0, \quad (18.9)$$

если перейти к пределу  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\bar{\eta}_i \rightarrow 0$ ,  $J_\mu \rightarrow 0$ .

Уравнение (18.6а) может быть заменено интегральным уравнением

$$U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J] = 1 - i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4 x' H_s(x') U[\sigma', \sigma_1, \eta, J], \quad (18.10)$$

где поверхность  $\sigma'$  проходит через точку  $x'$ . Изменим величину  $H_s$  на бесконечно малую величину  $\delta H$  и найдем соответствующее изменение  $\delta U$ .

В самом общем случае, если два оператора  $U$  и  $U_1$  удовлетворяют операторным уравнениям

$$U = 1 + (K_1 + K_2)U, \\ U_1 = 1 + K_1 U_1,$$

то можно доказать, что

$$U - U_1 = U_1 K_2 U.$$

Отсюда при пренебрежении высшими степенями  $\delta H$  следует

$$iU[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J] = -i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4 x' U[\sigma_2, \sigma', \eta, J] \delta H(x') U[\sigma', \sigma_1, \eta, J]. \quad (18.11)$$

Теперь определим  $\delta H$  как изменение, обусловленное изменением источников,

$$\delta H(x) = -\lambda(\bar{\psi}(x) \delta \eta(x) + \delta \bar{\eta}(x) \psi(x)) - \lambda' \delta J_\mu(x) A_\mu(x),$$

где  $\delta \eta$ ,  $\delta \bar{\eta}$ ,  $\delta J_\mu$  обладают теми же свойствами коммутации, что и  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $J_\mu$ . Тогда (18.11) приводит к

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \eta(x')} (U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0 = \lambda(\sigma_2, \bar{\psi}(x'), \sigma_1)_0, \quad (18.12a)$$

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} (U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0 = \lambda(\sigma_2, \psi(x), \sigma_1)_0, \quad (18.12б)$$

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu(z)} (U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0 = \lambda'(\sigma_2, A_\mu(z), \sigma_1)_0, \quad (18.12в)$$

где обозначения могут быть пояснены следующим примером:

$$(\sigma_2, A(x)B(x'), \sigma_1)_0 = \\ = (U[\sigma_2, \sigma(x), \eta, J] A(x) U[\sigma(x), \sigma(x'), \eta, J] B(x') U[\sigma(x'), \sigma_1, \eta, J])_0, \quad (18.13)$$

в котором операторы  $A(x)$ ,  $B(x)$  — произвольны. Из (18.4а), (18.12а) и (18.13) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2}{\delta \bar{\eta}_i(x) \delta \eta_j(x')} (U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0 &= \\ &= \begin{cases} \lambda^2(\sigma_2, \psi(x) \bar{\psi}(x'), \sigma_1) & \text{для } \sigma(x) > \sigma(x') \\ -\lambda^2(\sigma_2, \psi(x') \bar{\psi}(x), \sigma_1) & \text{для } \sigma(x) < \sigma(x') \end{cases} = (18.14) \\ &= \varepsilon(x, x') \lambda^2(\sigma_2, P[\psi(x) \bar{\psi}(x')], \sigma_1). \end{aligned}$$

Таким способом можно вывести соотношения

$$\begin{aligned} G_{\mu_1, \dots, \mu_l}^{(n, m)}[\eta, J; x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_m, z_1 \dots z_l] &= \lambda^{n+m} \lambda^l \varepsilon(x_1 \dots x_n, \\ x'_1 \dots x'_m) \times (\sigma_2, P[\psi(x_1) \dots \psi(x_n) \bar{\psi}(x'_1) \dots \bar{\psi}(x'_m) A_{\mu_1}(z_1) \dots A_{\mu_l}(z_l)], \sigma_1)_0, & (18.15) \end{aligned}$$

в которых буквой  $P$  обозначен хронологизирующий оператор (время возрастает справа налево), а  $\varepsilon(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_m)$  есть произведение всех величин  $\varepsilon(x_i, x_j)$  ( $i > j$ ),  $\varepsilon(x'_i, x'_j)$  ( $i > j$ ) и  $\varepsilon(x_i, x'_j)$ . В качестве примеров (18.15) можно выписать следующие соотношения:

$$G^{(0, 1)}[\eta, J; x'] = \lambda(\sigma_2, \bar{\psi}(x'), \sigma_1)_0, \quad (18.16а)$$

$$G^{(1, 0)}[\eta, J; x] = \lambda(\sigma_2, \psi(x), \sigma_1)_0, \quad (18.16б)$$

$$G_{\mu}[\eta, J; z] = \lambda'(\sigma_2, A_{\mu}(z), \sigma_1)_0, \quad (18.16в)$$

$$\begin{aligned} G^{(n, m)}[\eta, J; x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_m] &= \\ = \lambda^{n+m} \varepsilon(x_1 \dots x_n, x'_1 \dots x'_m) (\sigma_2, P[\psi(x_1) \dots \psi(x_n) \bar{\psi}(x'_1) \dots \bar{\psi}(x'_m)], \sigma_1)_0, & (18.17а) \end{aligned}$$

$$G_{\mu_1 \dots \mu_l}[\eta, J; z_1 \dots z_l] = \lambda^l (\sigma_2, P[A_{\mu_1}(z_1) \dots A_{\mu_l}(z_l)], \sigma_1)_0. \quad (18.17б)$$

Предел функционала  $F[\eta, J; x \dots]$  для  $\bar{\eta} = \eta = 0$  или  $J_{\mu} = 0$  мы будем обозначать в виде

$$F[J; x \dots] \equiv F[\eta = 0, J; x \dots], \quad (18.18а)$$

$$F[\eta; x \dots] \equiv F[\eta, J = 0; x \dots], \quad (18.18б)$$

$$F(x \dots) \equiv F[\eta = 0, J = 0; x \dots]. \quad (18.18в)$$

Поскольку лагранжиан с  $\eta = \bar{\eta} = 0$  инвариантен относительно преобразования  $\psi \rightarrow e^{i\alpha} \psi$ , то инвариантными относительно этого преобразования должны быть также и функционалы  $G^{(n, m)}$  и  $G_{\mu \dots \mu}^{(n, m)}$ , поэтому величины  $G^{(m, n)}[J; \dots]$  и  $G_{\mu \dots \mu}^{(n, m)}[J; \dots]$  с различным числом содержащихся в них операторов  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , т. е. при  $m \neq n$ , должны равняться нулю.

Далее, для  $\eta = \bar{\eta} = J_{\mu} = 0$  лагранжиан инвариантен относительно зарядового сопряжения  $\psi$ -поля с одновременной заменой  $A_{\mu} \rightarrow -A_{\mu}$ . Поэтому функционал  $G_{\mu \dots \mu}(\dots)$ , сконструированный из нечетного числа величин  $A_{\mu}$ , должен быть равным нулю<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Следует заметить, что это положение выражает собой теорему Фарри (см. гл. 13, пример 2).

Далее следует заметить, что оператор  $U [\sigma_2, \sigma_1, \eta, J]$  является производящим оператором для функций распространения, как это следует из (18.9) [15].

### § 3. Уравнения для функций распространения. Нормированные функции распространения

Из (18.12a) — (18.12b)<sup>1)</sup> можно вывести следующие уравнения [15, 14]:

$$\begin{aligned} \left( \gamma_\mu \partial_\mu + x - e_1 \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) \frac{\delta}{\delta \eta(x)} (U [\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0 = \\ = i\lambda^2 \eta(x) (U [\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0, \end{aligned} \quad (18.19a)$$

$$\begin{aligned} \square \frac{\delta}{\delta J_\mu(z)} (U [\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0 = i\lambda'^2 J_\mu(z) (U [\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0 + \\ + i \left( \frac{\lambda'}{\lambda} \right)^2 e_1 \text{Sp} \left( G^{(1,1)} [J; z, z] \gamma_\mu \right)_0; \end{aligned} \quad (18.19b)$$

здесь

$$e_1 = \frac{e}{\lambda'}. \quad (18.20)$$

Вывод уравнения (18.19a) выглядит следующим образом: из (18.12a) и (6.5a) получаем

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu \partial_\mu) \frac{\delta}{\delta \eta(x)} (U [\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0 = \\ = i\lambda \left( \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta \sigma(x)} \right) \int_{\sigma(x)} d\sigma'_\mu (U [\sigma_2, \sigma(x), \eta, J] \psi(x') U [\sigma(x), \sigma_1, \eta, J])_0 = \\ = i\lambda (U [\sigma_2, \sigma(x), \eta, J] \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x) U [\sigma(x), \sigma_1, \eta, J])_0 + \\ + i\lambda^2 (U [\sigma_2, \sigma(x), \eta, J] \int_{\sigma(x)} [\psi(x'), \bar{\psi}(x)]_+ d\sigma'_\mu U [\sigma(x), \sigma_1, \eta, J])_0 \eta(x), \end{aligned}$$

что, с учетом (18.1a), равно

$$\begin{aligned} = -i\lambda x (U [\sigma_2, \sigma(x), \eta, J] \psi(x) U [\sigma(x), \sigma_1, \eta, J])_0 - \\ - i e \gamma_\mu (U [\sigma_2, \sigma(x), \eta, J] A_\mu(x) \psi(x) U [\sigma(x), \sigma_1, \eta, J])_0 + \\ + i\lambda^2 (U [\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0 \eta(x). \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Попытка решения этих уравнений была предпринята Симанчиком [14].

Это приводит к (18.19а); аналогичным способом доказывается и (18.19б)<sup>1)</sup>.

Уравнения (18.19а) и (18.19б) являются производящими уравнениями для многочастичных функций распространения; последовательным применением к ним операций  $\delta/\delta\eta$ ,  $\delta/\delta\bar{\eta}$  и  $\delta/\delta J_\mu$  можно вывести уравнения для всех возможных функций распространения. В последующем изложении это выполнено для одноэлектронной и однофотонной и двухэлектронной функций распространения.

Беря от (18.19а) функциональную производную по  $\eta(x')$ , получаем уравнение для  $G^{(1,1)}[\eta, J; x, x']$ :

$$i\left(\gamma_\mu \partial_\mu + x - e_1 \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)}\right) G^{(1,1)}[\eta, J; x, x'] = \\ = \lambda^2 \delta(x - x')(U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0 + i\lambda^2 \eta(x) \frac{\delta}{\delta \eta(x')} (U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0. \quad (18.21a)$$

<sup>1)</sup> *Примечание при корректуре.* Заметим, что решение фундаментальных уравнений (18.19а) и (18.19б) может быть записано в виде, напоминающем интеграл Фейнмана по путям частиц. Используя функциональное преобразование Фурье, будем искать решение уравнений (18.19а) и (18.19б) в следующем виде:

$$U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J]_0 = \int \bar{a}^\delta a \delta b_{1\dots} \delta b_4 u[a, \bar{a}, b, \sigma_2, \sigma_1] \times \\ \times \exp\left\{-i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} [\bar{\eta}(\xi) a(\xi) + \bar{a}(\xi) \eta(\xi) + b_\mu(\xi) J_\mu(\xi)] d\xi\right\}; \quad (1)$$

здесь  $b_\mu$  рассматривается как  $c$ -численное поле, а любые из величин  $a$ ,  $\bar{a}$ ,  $\eta$  и  $\bar{\eta}$  антикоммутируют друг с другом. Подстановка (1) в (18.19а) и (18.19б) приводит к уравнениям

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + x - ie_1 \gamma_\mu b_\mu(x)) u[a, \bar{a}, b, \sigma_2, \sigma_1] = i\lambda^2 \frac{\delta}{\delta a(x)} u[a, \bar{a}, b, \sigma_2, \sigma_1], \\ i \square b_\mu(z) u[a, \bar{a}, b, \sigma_2, \sigma_1] = \lambda^2 \frac{\delta}{\delta b_\mu(z)} u[a, \bar{a}, b, \sigma_2, \sigma_1] - \\ - \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^2 e_1 \text{Sp}(\bar{a}(z) \gamma_\mu a(z)) u[a, \bar{a}, b, \sigma_2, \sigma_1].$$

Решение этих уравнений имеет вид

$$u[a, \bar{a}, b, \sigma_2, \sigma_1] = \frac{1}{N} \exp\left(i \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d^4\xi L[\xi]\right), \quad (2)$$

где

$$L[\xi] = -\frac{1}{\lambda^2} \bar{a}(\xi) \{\gamma_\mu \partial_\mu + x - ie_1 \gamma_\mu b_\mu(\xi)\} a(\xi) + \frac{1}{2\lambda'^2} b(\xi) \square b(\xi). \quad (3)$$

Следует заметить, что (3) имеет вид плотности лагранжиана для электромагнитного поля  $A_\mu = b_\mu/\lambda'$  и спинорного поля  $\psi = a/\lambda$  с зарядом  $e = e_1 \lambda'$ . Так как  $U[\sigma_2, \sigma_1, \eta = 0, \bar{\eta} = 0] = 1$ , то для  $N$  получается выражение

$$N = \int \bar{a}^\delta a b_{1\dots} \delta b_4 u[a, \bar{a}, b, \sigma_2, \sigma_1]. \quad (4)$$

Подставляя производящий оператор (1) со значениями величин из (2) и (4) в (18.9), можно получить многочастичные функции распространения.



Нормированную функцию распространения мы определим как прежнюю функцию распространения, но разделенную на среднее значение по вакууму от  $U$

$$G_N^{(1,1)}[\eta, J; x, x'] \equiv \frac{G^{(1,1)}[\eta, J; x, x']}{(U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0}. \quad (18.22)$$

Следует заметить, что при  $\eta$  и  $J$ , равных нулю, при указанной выше нормировке функции распространения не меняются, так как

$$(U[\sigma_2, \sigma_1, \eta=0, J=0])_0 = 1.$$

Полагая  $\eta=0$ , в (18.21a) найдем<sup>1)</sup>, <sup>2)</sup>

$$i \left( \gamma_\mu \partial_\mu + x - ie_1 \gamma_\mu G_{\mu N}[J; x] - e_1 \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) G_N^{(1,1)}[J; x, x'] = \lambda^2 \delta(x - x'). \quad (18.21б)$$

Применение операции  $\delta^3/\delta\bar{\eta}_1(x_2) \delta\eta(x'_1) \delta\eta(x'_2)$  к уравнению (18.19a) приводит к уравнению для двухэлектронной функции распространения (с  $\eta=0$ )

$$i \left( \gamma_\mu \partial_\mu + x - ie_1 \gamma_\mu G_{\mu N}[J; x] - e_1 \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right) G_N^{(2,2)}[J; x x_2, x'_1 x'_2] = \lambda^2 \delta(x - x'_1) G_N^{(1,1)}[J; x_2, x'_2] - \lambda^2 \delta(x - x'_2) G_N^{(1,1)}[J; x_2, x'_1]. \quad (18.23)$$

Аналогичным способом из (18.19б) можно вывести уравнение для однофотонной функции распространения.

#### § 4. Вершинная часть, оператор массы и свободные „одетые“ частицы

Поскольку во всем последующем изложении мы будем пользоваться только нормированными функциями распространения, то индекс  $N$  у них мы будем опускать. Для производных от сложного функционала мы имеем следующие формулы [13]:

$$-i \frac{\delta}{\delta J_\mu(z)} G^{(1,1)}[J; x, x'] = -i \int \frac{\delta}{\delta G_\nu[J; \zeta]} G^{(1,1)}[J; x, x'] \times \\ \times \frac{\delta}{\delta J_\mu(z)} G_\nu[J; \zeta] = \int \bar{G}_{\nu\mu}[J; \zeta z] \frac{\delta}{\delta G_\nu[J; \zeta]} G^{(1,1)}[J; x, x'], \quad (18.24)$$

где

$$\bar{G}_{\nu\mu}[J; z z'] \equiv G_{\nu\mu}[J; z z'] - G_\nu[J; z] G_\mu[J; z']. \quad (18.25)$$

Следует заметить, что при  $J=0$  функция распространения  $\bar{G}_{\nu\mu}$  совпадает с однофотонной функцией распространения  $G_{\nu\mu}$ .

<sup>1)</sup>  $\frac{\delta}{\delta J_\mu(z)} F_N[\eta, J] \equiv \frac{\delta}{\delta J_\mu(z)} \frac{F[\eta, J]}{(U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0} = \frac{1}{(U[\sigma_2, \sigma_1, \eta, J])_0} \frac{\delta}{\delta J_\mu(z)} F[\eta, J] - i G_{\mu N}[\eta, J; z] \cdot F_N[\eta, J].$

<sup>2)</sup> Интересный метод решения уравнения (18.21б) дали Эдвардс и Пайерлс [2].

Чтобы выразить величину  $\delta G^{(1,1)}/\delta G$ , через вершинную часть  $\Gamma_v$ , предположим, что существует функция распространения, обратная функции распространения  $G^{(1,1)}[J; x, x']$ , удовлетворяющая соотношению

$$\int G^{(1,1)-1}[J; x, \xi] G^{(1,1)}[J; \xi, x'] = \delta(x-x'), \quad (18.26)$$

и определим вершинную часть равенством [13]

$$\Gamma_v[J; z, x, x'] \equiv \frac{1}{e_1} \frac{\delta}{\delta \bar{U}_v[J; z]} G^{(1,1)-1}[J; x, x'], \quad (18.27a)$$

$$\begin{aligned} & \Gamma_v[J; z, x, x'] = \\ & = - \int G^{(1,1)-1}[J; x, \xi] \cdot \frac{1}{e_1} \frac{\delta}{\delta \bar{U}_v[J; z]} G^{(1,1)}[J; \xi, \xi'] G^{(1,1)-1}[J; \xi', x']. \end{aligned} \quad (18.27b)$$

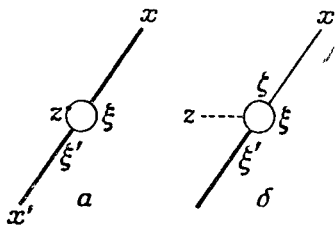
Равенство (18.27b) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e_1} \frac{\delta}{\delta \bar{U}_v[J; z]} G^{(1,1)}[J; x, x'] = \\ & = - \int G^{(1,1)}[J; x, \xi] \Gamma_v[J; z, \xi, \xi'] G^{(1,1)}[J; \xi', x']. \end{aligned} \quad (18.28)$$

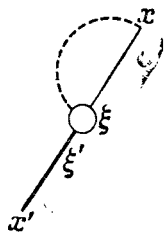
Окончательно из (18.24) имеем

$$\begin{aligned} & i \frac{\delta}{\delta J_\mu(z)} G^{(1,1)}[J; x, x'] = \\ & = e_1 \int G^{(1,1)}[J; x, \xi] \Gamma_v[J; z, \xi, \xi'] G^{(1,1)}[J; \xi', x'] \bar{G}_{\nu\mu}[J; \zeta z]. \end{aligned} \quad (18.29)$$

Соотношения (18.28) и (18.29) имеют графическую интерпретацию, данную на фиг. 29, где сплошные и пунктирные линии соот-



Ф и г. 29.



Ф и г. 30.

ветствуют одноэлектронной и однофотонной функциям распространения. Операция  $\delta/\delta J_\mu(z)$  означает создание фотона (в точке  $z$ ) источником  $J_\mu(z)$ . Этот фотон должен быть поглощен в некоторой точке на диаграмме, ибо мы всегда рассматриваем средние по вакууму от операторов. Поэтому из (18.24) очевидно, что операция

$\delta/\delta G_\mu[J; z]$  означает добавление фотонной линии в точке  $z$ . Если  $z = x$ , то фиг. 29,б сводится к фиг. 30. В соответствии с этой диаграммой введем оператор массы с помощью равенства [13]

$$[J; x, x'] = ie^2 \int \gamma_\mu G^{(1,1)}[J; x, \xi] \Gamma_\nu [J; \xi, x'] \bar{G}_{\mu\nu} [J; x, \xi]. \quad (18.30)$$

Соотношение (18.29) принимает вид

$$-e_1 \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\nu(x)} G^{(1,1)} [J; x, x'] = \int M [J; x, \xi] G^{(1,1)} [J; \xi, x']. \quad (18.31)$$

Теперь (18.21б) можно записать следующим образом:

$$i(\gamma_\mu \partial_\mu - ie_1 \gamma_\mu G_\mu [J; x] + \kappa) \cdot G^{(1,1)} [J; x, x'] + i \int M [J; x, \xi] G^{(1,1)} [J; \xi, x'] = \lambda^2 \delta(x - x'). \quad (18.32)$$

Для  $J_\mu = 0$  и  $t > t'$  уравнение (18.32) принимает вид

$$i(\gamma_\mu \partial_\mu + \kappa) G^{(1,1)}(x, x') + i \int M(x, \xi) G^{(1,1)}(\xi, x') = 0. \quad (18.33a)$$

Поскольку теория инвариантна относительно неоднородного преобразования Лоренца, функция распространения  $G^{(1,1)}(x, x')$  и оператор массы  $M(x, x')$  должны быть функциями от  $x - x'$ . Их амплитуда Фурье зависит только от импульса  $p$ . В частности, амплитуда Фурье от величины  $M$  (являющейся скаляром) должна быть функцией от  $\gamma_\mu p_\mu$ ; эту трансформанту мы обозначаем через  $M(-i\gamma p)$ .

С учетом сказанного уравнения (18.33a) для  $t' = -\infty$  можно записать в виде

$$\{i\gamma_\mu p_\mu + \kappa + M(-i\gamma p)\} G_f^{(1,1)}(p) = 0. \quad (18.33б)$$

Здесь через  $G_f^{(1,1)}(p)$  обозначена амплитуда Фурье функции  $G^{(1,1)}(x, x')$  с  $t' = -\infty$ .

С другой стороны, в соответствии с (18.17a), имеем

$$G^{(1,1)}(x, x') = (\text{Vac} | \phi(x) \bar{\psi}(x') | \text{Vac}) \quad \text{для } t > t'.$$

Это приводит к равенству [7]

$$G(x, x') = \sum_{(a)} (\text{Vac} | \phi(x) | p^{(a)}) (p^{(a)} | \bar{\psi}(x') | \text{Vac}) \quad \text{для } t > t';$$

здесь через  $|p^{(a)}\rangle$  обозначено собственное состояние полного гамильтониана, а суммирование производится по всем таким состояниям.

Пользуясь амплитудами Фурье величин  $\phi$  и  $\bar{\psi}$

$$\phi(x) = \sum_p \frac{1}{\sqrt{V}} \phi(p) e^{ip_\mu x_\mu} \quad \text{и т. д.}$$

( $V$  — основной объем), получаем

$$G(x, x') = \sum_{(a)} (\text{Vac} | \psi(p^{(a)}) | p^{(a)}) (p^{(a)} | \bar{\psi}(p^{(a)}) | \text{Vac}) \times \\ \times \exp \{i(p^{(a)}, x - x')\}. \quad (18.34)$$

Собственные значения  $p_0^{(a)}$  мы запишем в виде

$$p_0^{(a)} = \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + c^{(a)2}}.$$

Сравнивая (18.34) с (18.33а), мы видим, что соотношение

$$-\alpha + x + M(\alpha) = 0 \quad (18.35a)$$

может иметь место только для  $\alpha = c^{(a)}$ . Другими словами, корни уравнения (18.35а) расположены в точках  $\alpha = m^{(1)}, m^{(2)}, \dots, m^{(n)}$ . Величина  $M(\alpha)$  имеет комплексные значения для  $\alpha \geq c$ . Здесь предполагается, что частица имеет наблюдаемые массы  $m^{(1)}, \dots, m^{(n)}$  и постоянная  $c$  определена таким образом, что неравенство  $\alpha \geq c$  соответствует состояниям с числом частиц, большим чем одна. Величины

$$m^{(i)} - x = M(m^{(i)}) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (18.35б)$$

называются собственными энергиями.

Если точку  $x'$  в  $G^{(1,1)}(x, x')$  считать расположенной на начальной поверхности  $\sigma' = -\infty$ , то из (18.33б) и (18.35б) следует, что падающие частицы, описываемые функцией распространения  $G^{(1,1)}(x, x')$ , имеют массы  $m^{(1)}, \dots, m^{(n)}$ . Эти частицы мы называем свободными „одетыми“ частицами. Аналогичное положение справедливо и для уходящих частиц (т. е. частиц, прибывающих на поверхность  $\sigma_2$ ).

## § 5. Двухчастичные функции распространения

Сейчас мы покажем, что уравнение (18.23) для двухэлектронной функции распространения эквивалентно уравнениям [15]

$$G^{(2,2)}[J; x_1, x_2, x'_1, x'_2] = G^{(1,1)}[J; x_1, x'_1] G^{(1,1)}[J; x_2, x'_2] - \\ - ie_1 \int G^{(1,1)}[J; x_1, \xi] v_p[J; \zeta, \xi, \xi'] I_p[J; \zeta, \xi, x_2, x'_2] - \\ - (x'_1 \leftrightarrow x'_2), \quad (18.36)$$

где

$$v_u[J; z, x, x'] \equiv i\Gamma_u[J; \zeta, x, \xi] G^{(1,1)}[J; \xi, x'] \bar{G}_{p,u}[J; \zeta, z] \quad (18.37)$$

и  $I_u$  удовлетворяет уравнению

$$I_u[J; z, x_1, x_2; x'_1, x'_2] = \delta(x_1 - x'_1) \frac{\delta}{\delta G_u[J; z]} G^{(1,1)}[J; x_2, x'_2] + \\ + e_1 \int V_{u\rho}[J; z, x_1, \zeta, \xi_1] I_\rho[J; \zeta, \xi_1, x_2, x'_2] \quad (18.38)$$

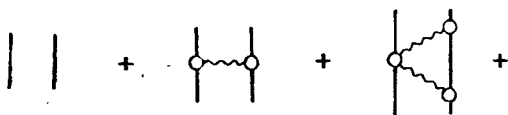
$$c \quad V_{up}[J; z, x, z', x'] \equiv v_0[J; z', x, x'] \frac{\delta}{\delta G_{..}[J; z]}. \quad (18.39)$$

В (18.36) скобки ( $x'_1 \leftrightarrow x'_2$ ) означают все вписанные перед этим члены, но с заменой  $x'_1$  на  $x'_2$ , и наоборот. Эти уравнения мы будем называть „перенормированными уравнениями“, потому что можно показать (см. § 6 и 7), что они приводят к перенормированным решениям.

Прежде чем выводить (18.36), выясним физический смысл этого уравнения. Последовательное итерирование (18.38) приводит к равенству

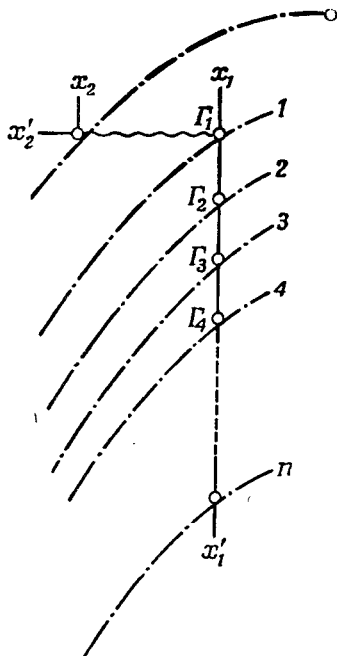
$$\begin{aligned} I_u[J; z, x, x_2, x'_1, x'_2] = & \\ = -e_1 \delta(x_1 - x'_1) \int G^{(1,1)}[J; x_2, \xi_2] \Gamma_0[J; z, \xi_2, \xi'_2] G^{(1,1)}[J; \xi'_2, x'_2] + & \\ + \sum_{n=1}^{\infty} (-e_1)^{n+1} \int V_{1,0n}[J; z, x_1, \zeta_n, \xi_n] \times & \\ \times V_{0n,0n-1}[J; \zeta_n, \xi_n, \zeta_{n-1}, \xi_{n-1}] \dots V_{02,01}[J; \zeta_2, \xi_2, \zeta_1, x'_1] G^{(1,1)}[J; x_2, \xi] \times & \\ \times \Gamma_0[J; \zeta_1, \xi', \xi] G^{(1,1)}[J; \xi, x'_2]. & \quad (18.40) \end{aligned}$$

Подставляя это равенство в (18.36), получаем двухчастичную функцию распространения, которая графически изображена на фиг. 31.



Фиг. 31.

Член номера  $n$  в этом ряду может быть представлен фиг. 32, на которой показано, что фотон, рожденный в вершине  $\Gamma_n$ , может быть поглощен на электронных линиях, фотонных линиях и вершинах только в области выше границы, изображенной пунктирной линией  $n-2$ . Из рассмотрения фиг. 32 можно заключить, что у нас нет диаграмм собственной энергии и диаграмм исправленных вершин. Поэтому эта диаграмма состоит из всех возможных неприводимых диаграмм (т. е. скелетных графиков). Этот результат согласуется с результатом, указанным в гл. 14, где мы отождествили  $G^{(1,1)}$ ,  $G_{uv}$  и  $\Gamma_u$  соответственно с  $S'_{F1}$ ,  $\Delta'_{F1}$  и  $\Gamma_{u1}$ . Однако



Фиг. 32.

следует заметить, что приведенное здесь доказательство не связано с применением теории возмущений.

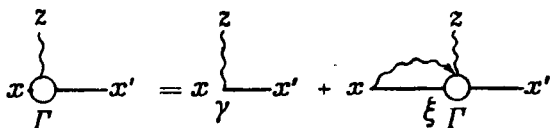
Вывод (18.36) выглядит следующим образом. Уравнение (18.216) дает уравнение

$$\begin{aligned} \left( \gamma_p \partial_p + \kappa - ie_1 \gamma_p G_p[J; x] - e_1 \gamma_p \frac{\delta}{\delta J_u(x)} \right) \frac{\delta}{\delta J_u(z)} G^{(1,1)}[J; x, x'] = \\ = e_1 \gamma_p \bar{G}_{\rho\mu}[J; xz] G^{(1,1)}[J; x, x'], \end{aligned} \quad (18.41)$$

которое, с учетом (18.29), принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda^2 e_1 \int \Gamma_p[J; \zeta, x, \xi] \bar{G}_{\rho\mu}[J; \zeta z] G^{(1,1)}[J; \xi, x'] = \\ = -e_1 \gamma_p \bar{G}_{\rho\mu}[J; xz] G^{(1,1)}[J; x, x'] + \\ + ie_1^2 \gamma_p \int G^{(1,1)}[J; x, \xi] \frac{\delta}{\delta J_p(x)} \{ \Gamma_\sigma[J; \zeta, \xi, \xi'] G^{(1,1)}[J; \xi', x'] \bar{G}_{\rho\mu}[J; \zeta z] \}. \end{aligned} \quad (18.42)$$

На фиг. 33 дано графическое изображение уравнения (18.42). На втором графике в правой части показано, что фотон, созданный в



Фиг. 33.

точке  $x$ , может быть поглощен в любой части диаграммы, за исключением электронной линии, связывающей точки  $x$  и  $\xi$ . С помощью (18.38) и (18.42) можно показать, что (18.36) удовлетворяет (18.23); подставляя (18.36) в (18.23), получаем

$$\begin{aligned} ie_1 \gamma_u G^{(1,1)}[J; x_1, x'_1] \frac{\delta}{\delta J_u(x_1)} G^{(1,1)}[J; x_2, x'_2] + \\ + e_1 \lambda^2 \int \bar{G}_{\nu\mu}[J; \zeta, \zeta'] \Gamma_\nu[J; \zeta', x_1, \xi_1] G^{(1,1)}[J; \xi_1, \xi'_1] \times \\ \times I_\nu[J; \zeta, \xi'_1, x_2, x'_1, x'_2] + ie_1 \gamma_u \int G^{(1,1)}[J; x_1, \xi_1] \frac{\delta}{\delta J_u(x_1)} \times \\ \times \{ \Gamma_\nu[J; \zeta, \xi_1, \xi'_1] \bar{G}_{\rho\nu}[J; \zeta', \zeta] G^{(1,1)}[J; \xi'_1, \xi''_1] I_\rho[J; \zeta', \xi''_1, x_2, x'_1, x'_2] \} + \\ + (x'_1 \leftrightarrow x'_2) = 0, \end{aligned} \quad (18.43)$$

что, с учетом (18.42), может быть записано в виде

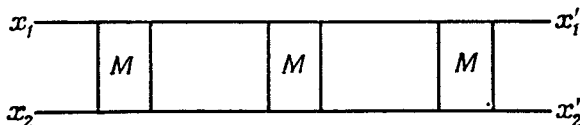
$$\begin{aligned} ie_1 \gamma_u G^{(1,1)}[J; x_1, x'_1] \frac{\delta}{\delta J_u(x_1)} G^{(1,1)}[J; x_2, x'_2] + \\ + e_1 \gamma_p \int \bar{G}_{\rho\mu}[J; x_1, \zeta'] G^{(1,1)}[J; x_1, \xi_1] I_\mu[J; \zeta', \xi_1, x_2, x'_1, x'_2] + \\ + ie_1 \gamma_\mu \int G^{(1,1)}[J; x_1, \xi_1] \Gamma_\mu[J; \zeta, \xi_1, \xi'_1] \bar{G}_{\rho\nu}[J; \zeta', \zeta] \times \\ \times G^{(1,1)}[J; \xi'_1, \xi''_1] \frac{\delta}{\delta J_u(x_1)} I_\nu[J; \zeta', \xi''_1, x_2, x'_1, x'_2] = 0. \end{aligned} \quad (18.44)$$

Это соотношение будет удовлетворено, если имеет место (18.38). Двухэлектронные функции распространения можно вычислить, подставляя решения уравнения (18.38) в (18.36).

Теперь мы видим, что уравнение двухчастичной функции распространения может быть записано в форме

$$G^{(2,2)}(x_1, x_2, x'_1, x'_2) = G^{(1,1)}(x_1, x'_1) G^{(1,1)}(x_2, x'_2) - \\ - G^{(1,1)}(x_1, x'_2) G^{(1,1)}(x_2, x'_1) + \\ + \int G^{(1,1)}(x_1, \xi_1) G^{(1,1)}(x_2, \xi_2) M(\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2) G^{(2,2)}(\xi'_1, \xi'_2, x'_1, x'_2). \quad (18.45)$$

Здесь двухчастичный оператор массы  $M(x_1, x_2, x'_1, x'_2)$  дается полусобственными неприводимыми диаграммами для мёллеровского рассеяния, причем под полусобственными диаграммами мы понимаем такие, которые не могут быть разделены на две отдельные части



Фиг. 34.

с помощью разрезов по двум электронным линиям. В самом деле, лестницы, построенные из полусобственных неприводимых диаграмм, дают все возможные неприводимые диаграммы для мёллеровского рассеяния (фиг. 34). Уравнение вида (18.45) называется уравнением Бете — Сальпетера <sup>1)</sup> [12, 3, 8, 5].

Другие многочастичные функции распространения можно рассматривать аналогичным способом. Например, функция распространения для системы „один электрон — один фотон“ (комптоновское рассеяние) может быть получена из (18.19а)

$$i(\gamma_0 \partial_0 + \alpha - ie_1 \gamma_0 G_0[J; x] - e_1 \gamma_0 \frac{\delta}{\delta J_0(x)}) G_{\mu\nu}^{(1,1)}[J; x, x', z_1, z_2] = \\ = \lambda^2 \delta(x - x') (\bar{G}_{\mu\nu}[J; z_1, z_2] + G_u[J; z_1] G_\nu[J; z_2]). \quad (18.46)$$

С помощью (18.42) уравнение (18.46) можно переписать в виде

$$G_{\mu\nu}^{(1,1)}[J; x, x', z_1, z_2] = \\ = G^{(1,1)}[J; x, x'] \{\bar{G}_{\mu\nu}[J; z_1, z_2] + G_u[J; z_1] G_\nu[J; z_2]\} + \\ + e_1 \int G^{(1,1)}[J; x, \xi] v_\sigma[J; \zeta, \xi', \xi] I_{\sigma\mu\nu}[J; \zeta, \xi, x', z_1, z_2], \quad (18.47)$$

<sup>1)</sup> На примере простого ядра  $M$  Вика [17], Салама и Кеммера [11] выяснили некоторые свойства уравнения Бете — Сальпетера для связанных состояний из двух фермионов.

где  $I_{\sigma\mu\nu}$  является решением уравнения

$$\begin{aligned}
 I_{\sigma\mu\nu}[J; z, x, x', z_1, z_2] = & \delta(x - x') \left\{ \frac{\delta}{\delta \bar{G}_\sigma[J; z]} \bar{G}_{\mu\nu}[J; z_1, z_2] + \right. \\
 & + \delta(z - z_1) \delta_{\sigma\mu} G_\nu[J; z_2] + \delta(z - z_2) \delta_{\sigma\nu} G_\mu[J; z_1] \left. \right\} + \\
 & + e_1 \int V_{\sigma\rho}[J; z, x, \zeta, \xi] I_{\rho\mu\nu}[J; \zeta, \xi, x', z_1, z_2].
 \end{aligned} \quad (18.48)$$

Применяя к (18.48) последовательные подстановки, можно показать, что  $G_{\mu\nu}^{(1,1)}(x, x', z_1, z_2)$  дается всеми возможными неприводимыми диаграммами для комптоновского рассеяния.

## § 6. Перенормировочная инвариантность

Преобразование

$$\lambda \rightarrow C\lambda, \quad \lambda' \rightarrow C'\lambda', \quad (18.49)$$

эквивалентное преобразованию

$$e_1 \rightarrow \frac{e_1}{C}, \quad (18.50)$$

приводит к следующему изменению одночастичной функции распространения:

$$G^{(1,1)}(x, x') \rightarrow C^2 G^{(1,1)}(x, x'), \quad \bar{G}_{\mu\nu}(z, z') \rightarrow C'^2 \bar{G}_{\mu\nu}(z, z') \quad (18.51)$$

и к аналогичным изменениям многочастичных функций распространения. Преобразование вида (18.49) мы будем называть *перенормировочным преобразованием*, поскольку оно изменяет нормировочные множители функций распространения.

Заметим, что (18.36), (18.38), (18.46) и (18.48) не содержат ни  $\lambda$ , ни  $\lambda'$ , и поэтому являются инвариантными относительно преобразования (18.49); они *инвариантны относительно перенормировочных преобразований* [15]. С физической точки зрения представляется разумным, что величина заряда зависит от нормировки функций распространения; действительно, если напряженность электромагнитного поля умножается на  $C'$ , то заряд должен быть разделен на ту же величину. Когда  $\lambda' = 1$  и  $\lambda = 1$ , то мы говорим о перенормированной теории. Однако существует одно условие, которому должны удовлетворять постоянные  $\lambda, \lambda'$ : нормировки функций распространения для свободных „одетых“ электрона и фотона должны быть аналогичны нормировкам  $S_F$  и  $\Delta_F$  функций соответственно. Перенормировкой мы называем определение величин  $\lambda$  и  $\lambda'$  с помощью указанного условия.



### § 7. Нормировочные постоянные

Рассмотрим уравнение (18.32) для одноэлектронной функции распространения при  $J=0$ . Импульсное представление этого уравнения записывается следующим образом:

$$i(i\gamma_\mu p_\mu + \kappa + \mathbf{M}(-i\gamma p)) G^{(1,1)}(p) = \lambda^2. \quad (18.52)$$

Принцип каузальности требует, чтобы функция  $G(x, x')$  содержала только положительные (отрицательные) частоты для  $t > t'$  ( $t < t'$ ) (см. гл. 8, § 2):

$$G^{(1,1)}(x, x') = \begin{cases} G^{(1,1)-}(x, x') & \text{для } t < t' \\ G^{(1,1)+}(x, x') & \text{для } t > t'. \end{cases} \quad (18.53)$$

Такая функция распространения получается из (18.52)

$$G^{(1,1)}(x, x') = \frac{-i\lambda^2}{(2\pi)^4} \int d^3p \int_L dp_0 e^{i(p, x - x')} \frac{1}{i\gamma_\mu p_\mu + \kappa + \mathbf{M}(-i\gamma p)}. \quad (18.54)$$

Путь интегрирования  $L$  выбирается таким образом, чтобы удовлетворить условиям (18.53).

В последующем изложении мы будем считать, что электрон может обладать только одной величиной массы  $m$ . Из (18.35а) видно, что знаменатель может быть записан в виде

$$a(-i\gamma p)(i\gamma_\mu p_\mu + m), \quad (18.55)$$

где  $a(\alpha)$  — некоторая функция, которая в области  $\alpha < c$  не обращается в нуль. Связанную с собственным значением массы  $m$  константу  $Z_2$  мы определим равенством

$$\frac{1}{Z_2} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha - \mathbf{M}(\alpha))|_{\alpha = m}, \quad (18.56)$$

$$\frac{1}{Z_2} = a(m). \quad (18.57)$$

Тогда (18.56) можно представить в виде

$$G^{(1,1)}(x, x') = -\frac{i\lambda^2}{(2\pi)^3} Z_2 \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int d^3p \int_L dp_0 e^{i(p, x - x')} \frac{1}{i\gamma_\mu p_\mu + m - i\epsilon' a(-i\gamma p)} \frac{a(m)}{a(-i\gamma p)}, \quad (18.58a)$$

$$G^{(1,1)}(x, x') = \frac{i\lambda^2}{(2\pi)^3} Z_2 \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int d^3p \int dp_0 e^{i(p, x - x')} \frac{i\gamma_\mu p_\mu - m}{p_\mu p_\mu + m^2 - i\epsilon' a(-i\gamma p)} \frac{a(m)}{a(-i\gamma p)}. \quad (18.58б)$$

Для  $t > t'$  интегрирование по  $p_0$  в (18.58б) выполняется по пути интегрирования, который замыкается по полуокружности вниз от действительной оси. Отсюда видно, что вклады в (18.58б) (для  $t > t'$ ) дают точки сингулярности снизу от действительной оси,

т. е. точки  $p_0 = p_0^{(m)} \equiv \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + m^2}$ , и интерференционные эффекты в области  $p_0 \geq \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + c^2}$ . Полюс  $p_0 = p_0^{(m)}$  дает вклад в (18.58б) посредством члена, осциллирующего с частотой  $p_0^{(m)}$ . Этот член вычисляется путем нахождения вычета в (18.58б) при  $p_0 = p_0^{(m)}$  и оказывается равным

$$\begin{aligned} & - \frac{\lambda^2 Z_2}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{i\gamma_u p_\nu^{(m)} - m}{2p_0^{(m)}} e^{i(p^{(m)}, x - x')} = \\ & = \frac{\lambda^2 Z_2}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{p_0^{(m)} + H}{2p_0^{(m)}} \gamma_4 e^{i(p^{(m)}, x - x')}, \end{aligned} \quad (18.58в)$$

где

$$p_\mu^{(m)} \equiv (\mathbf{p}, p_0^{(m)}).$$

Здесь мы использовали соотношение

$$(i\gamma_u p_\nu^{(m)} - m)(i\gamma_u p_\nu^{(m)} + m)^n = 0 \quad (n - \text{целое}),$$

из которого следует, что

$$\frac{(i\gamma_u p_\nu^{(m)} - m)}{a(-i\gamma p^{(m)})} = \frac{(i\gamma_u p_\nu^{(m)} - m)}{a(-i\gamma p^{(m)} - m + m)} = \frac{1}{a(m)}(i\gamma_u p_\nu^{(m)} - m).$$

Оператор  $H$  в (18.59а) определяется следующим образом:

$$H = \gamma_4(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) + m\gamma_4 = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m\beta.$$

Поскольку для состояний с положительной энергией  $(p_0^{(m)} + H)/2p_0^{(m)} = 1$ , то выражение (18.58в) показывает, что функция распространения свободной „одетой“ частицы имеет нормировочный множитель  $\lambda^2 Z_2$ . Поэтому для перенормировки функции распространения свободного „одетого“ электрона мы должны положить

$$\lambda^2 = \frac{1}{Z_2}. \quad (18.59)$$

Из (18.55) и (18.57) получаем

$$i\gamma_u p_\nu + x + M(-i\gamma p) = \frac{1}{Z_2} (i\gamma_u p_\nu + m)(1 + M_1(-i\gamma p)), \quad (18.60а)$$

где, согласно (18.55),

$$M_1(-i\gamma p) = \frac{a(-i\gamma p)}{a(m)} - 1, \quad (18.60б)$$

так что

$$M_1(m) = 0.$$

Из (18.54) и (18.60а) находим

$$G^{(1,1)}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_L d^4 p e^{i(p, x - x')} \frac{1}{i\gamma_u p_\nu + m} \frac{1}{1 + M_1(-i\gamma p)}. \quad (18.61)$$

Однофотонная функция распространения может быть рассмотрена аналогичным способом. В частности, нормировочная константа  $\lambda'$  определяется аналогично  $\lambda$ .

Из (18.61) можно получить уравнение

$$(i\gamma_\mu p_\mu + m)(1 + M_1(-i\gamma p)) G^{(1,1)}(p) = 1, \quad (18.62)$$

в котором  $m$  — экспериментальная масса. Теперь из (18.60a) можно заключить, что  $M_1(-i\gamma p)$  и  $Z_2$  соответствуют конечной части оператора массы  $\Sigma^*$  и величине  $Z_2$  в теории Дайсона. Поэтому мы видим, что  $G^{(1,1)}(p)$  является перенормированной функцией распространения.

С помощью формулы (18.27a) можно показать, что  $\Gamma_\mu$  соответствует перенормированной вершинной части  $\Gamma_{\mu 1}$ , определенной в гл. 14. Поскольку в § 5 было показано, что функции распространения могут быть даны только с помощью *неприводимых диаграмм*, построенных из  $G^{(1,1)}$ ,  $G_\mu$  и вершин (с наблюдаемым зарядом  $e_1$ ), мы можем заключить, что получаемая при этом теория является перенормированной.

### § 8. Перенормировка и спектр масс

В предыдущем параграфе мы занимались рассмотрением случаев, в которых частицы каждого поля могли находиться в состояниях лишь с одним значением массы. Сейчас мы рассмотрим некоторые особенности одночастичных функций распространения для спинорных частиц, которые могут иметь конечное число различных стабильных состояний массы

$$m^{(1)}, \dots, m^{(n)} \quad (m^{(1)} < m^{(2)} < \dots < m^{(n)}).$$

В последующем изложении мы не будем ограничивать себя лишь областью квантовой электродинамики.

Уравнение для одночастичной функции распространения может быть записано в виде<sup>1)</sup>

$$i(i\gamma_\mu p_\mu + \alpha + M(-i\gamma p)) G(p) = 1. \quad (18.63)$$

Значения массы частицы даются дискретным набором корней  $\alpha = m^{(1)}, \dots, m^{(n)}$  уравнения (18.35a), т. е.

$$\alpha - \alpha - M(\alpha) = 0 \quad (18.64)$$

в области

$$\alpha \leq c. \quad (18.65)$$

Для простоты мы будем предполагать, что эти значения массы соответствуют простым корням уравнения (18.64). Таким образом,

<sup>1)</sup> Здесь величина  $\lambda$  равна единице.

оператор

$$h(-i\gamma p) \equiv (-i\gamma_\mu p_\mu - \kappa - M(-i\gamma p)) \quad (18.66)$$

можно записать в виде

$$h(-i\gamma p) = a(-i\gamma p) \prod_{j=1}^n (-i\gamma_\mu p_\mu - m^{(j)}); \quad (18.67)$$

здесь  $a(\alpha)$  — функция, не обращающаяся в нуль при  $\alpha < c$ .

Поставим в соответствие каждому значению массы  $m^{(j)}$  константы  $Z^{(j)}$  с помощью определения

$$\frac{1}{Z^{(j)}} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha - M(\alpha)) \Big|_{\alpha=m^{(j)}}, \quad (18.68)$$

$$\frac{1}{Z^{(j)}} = a(m^{(j)}) \prod_{k \neq j} (m^{(j)} - m^{(k)}). \quad (18.69)$$

Тогда на основании (18.63) можно показать, что [16]

$$G(p) = \sum_{(j)} Z^{(j)} \frac{i}{-i\gamma_\mu p_\mu - m^{(j)} + i\epsilon'} \frac{a(m^{(j)})}{a(-i\gamma p)}. \quad (18.70)$$

Равенство (18.70) показывает, что константа  $Z^{(j)}$  является как раз нормировочным множителем для функции распространения частицы, масса которой равна  $m^{(j)}$ . Определение (18.68) можно рассматривать как обобщение определения (18.56) для  $Z_2$  на случай наличия многих уровней массы.

Для выяснения физического смысла констант  $Z^{(j)}$  мы найдем функцию распространения

$$\begin{aligned} G(x, x') &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p G(p) e^{i(p_\mu \cdot x_\mu - x'_\mu)} = \\ &= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \sum_{(j)} \frac{iZ^{(j)}}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{1}{-i\gamma_\mu p_\mu - m^{(j)} + i\epsilon'} \frac{a(m^{(j)})}{a(-i\gamma p)} e^{i(p_\mu \cdot x_\mu - x'_\mu)} = \\ &= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \sum_{(j)} \frac{iZ^{(j)}}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{i\gamma_\mu p_\mu - m^{(j)}}{p_\mu p_\mu + m^{(j)2} - i\epsilon'} \frac{a(m^{(j)})}{a(-i\gamma p)} e^{i(p_\mu \cdot x_\mu - x'_\mu)} \quad (18.71) \end{aligned}$$

для  $t > t'$ . Поскольку рассматривается случай  $t > t'$ , то при выполнении в (18.71) интегрирования по  $p_0$  можно в качестве пути интегрирования выбрать полуокружность снизу от действительной оси. Это показывает, что в этом случае вклады в интеграл (18.71) будут проистекать за счет сингулярных точек, расположенных снизу от действительной оси, т. е. от точек  $p_0 = p_0^{(j)} \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^{(j)2}}$  для всех  $j$  и за счет интерференционных эффектов в области  $p_0 \geq \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + c^2}$ . Полюс  $p_0 = p_0^{(j)}$  дает вклад в (18.71) посредством осциллирующего с частотой  $p_0^{(j)}$  члена. Этот член получается в результате вычисления вычета подынтегрального выражения в

(18.71) в точке  $p_0^{(j)}$  и оказывается равным

$$\begin{aligned} & -\frac{Z^{(j)}}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{i\gamma_\mu p_\mu^{(j)} - m^{(j)}}{2p_0^{(j)}} e^{i(p^{(j)}, x - x')} = \\ & = \frac{Z^{(j)}}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p_0^{(j)} + H^{(j)}}{2p_0^{(j)}} \gamma_4 e^{i(p^{(j)}, x - x')} \end{aligned} \quad (18.72)$$

с

$$p_\mu^{(j)} \equiv (\mathbf{p}, p_0^{(j)})$$

и

$$H^{(j)} = i\gamma_4 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) + m^{(j)} \gamma_4 = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m^{(j)} \beta.$$

С другой стороны, из (18.34) получим

$$\begin{aligned} G(x, x') \gamma_4 = & \sum_{(j)} \int d^3p (\text{Vac} | \phi(p^{(j)}) | p^{(j)}) (p^{(j)} | \phi^*(p^{(j)}) | \text{Vac}) e^{i(p_\mu^{(j)}, x_\mu - x'_\mu)} + \\ & + \int_c^\infty dp_0 \int d^3p \rho(\mathbf{p}, p_0) e^{i(p_\mu, x_\mu - x'_\mu)} \quad \text{для } t > t'. \end{aligned} \quad (18.73)$$

Последний член в (18.73) дает вклад от собственных состояний в области  $\alpha \geq c$ . Сравнивая (18.73) с (18.72) и учитывая, что для состояний с положительной энергией  $(p_0^{(j)} + H^{(j)})/2p_0^{(j)} = 1$ , имеем

$$Z^{(j)} = (\text{Vac} | \phi(p^{(j)}) | p^{(j)}) (p^{(j)} | \phi^*(p^{(j)}) | \text{Vac}). \quad (18.74)^1$$

<sup>1)</sup> *Примечание при корректуре.* Соотношение (18.74) указывает на то, что перенормировочный множитель  $Z$  в общем случае является положительным, если гамильтониан взаимодействия эрмитов. С другой стороны, в гл. 13, пример 5, было указано, что для однофотонной функции распространения  $Z_3 \leq 1$  [18]. В ряде работ [7, 19] было проведено обобщение указанного положения на более общие случаи. В качестве примера рассмотрим бесспиновое поле  $U(x)$ . Одночастичная функция распространения для этого поля может быть получена способом, аналогичным случаю электромагнитного поля, и имеет вид

$$G(x, x') = \lambda^2 (P[U(x), U^*(x')])_0. \quad (1)$$

Эта функция распространения при  $\lambda^2 = 1/Z$  (см. § 7) является нормированной. Используя условие каузальности (см. гл. 8, § 2), Леман показал, что эта функция распространения может быть записана в виде

$$G(x, x') = \frac{1}{2} \int d\alpha^2 \rho(\alpha^2) \Delta_F(x, x', \alpha); \quad (2)$$

здесь  $\Delta_F(x, x', \alpha)$  является  $\Delta_F$ -функцией для массы  $\alpha$ . Далее, из (8.51) и (8.47) получается соотношение

$$G(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \left( \frac{1 + \varepsilon(k)}{2} \right) \rho(-k^2) e^{ik_\mu x_\mu}. \quad (3)$$

Вводя собственные состояния  $\Phi(k)$  оператора полной энергии-импульса в представлении, свободном от источников, мы можем состояние  $U^*(x) \Phi_0$  предста-

Поскольку функция  $a(\alpha)$  не имеет нулей для  $\alpha < c$ , она не обращается в нуль для  $\alpha < m^{(n)}$ . Таким образом, считая, что эта функция не имеет в этой области изменения  $\alpha$  сингулярностей, мы заключаем, что функция  $a(\alpha)$  является либо положительно, либо отрицательно определенной. Предположим на время, что это условие выполнено. Тогда из (18.69) можно заключить, что знак величины  $Z^{(j)}$  с ростом  $j$  изменяется [16]

$$\frac{Z^{(j)}}{Z^{(j-2m+1)}} < 0 \quad (m - \text{целое}). \quad (18.75)$$

вить в виде следующего разложения в ряд [см. (18.7)]:

$$U^*(x) \Phi_0 = \sum_k \Phi(k) e^{ik_\mu x^\mu}. \quad (4)$$

Сравнение (3) с (4) при условии  $t > t'$  приводит к заключению, что  $Z\rho(\alpha^2)$  есть вероятность состояний  $\Phi(k)$  с  $k^2 = -\alpha^2$ :

$$Z\rho(\alpha^2) = \sum \Phi^*(k) \Phi(k), \quad (5)$$

где суммирование производится по всем состояниям с  $k^2 = -\alpha^2$ . Соотношение (5) показывает, что при эрмитовом гамильтониане взаимодействия величина  $\rho(\alpha^2)$  является положительно определенной. В сумме (4) одночастичное состояние появляется с наблюдаемой массой  $m$ , а многочастичные состояния — с массами  $k^2 \geq c^2$  (см. § 4). Согласно результатам обсуждения (в § 7) нормировки функций распространения для свободных „одетых“ частиц, одночастичное состояние должно появляться с единичной нормировкой

$$\rho(\alpha^2) = \delta(\alpha^2 - m^2) + \sigma(\alpha^2), \quad (6)$$

где

$$\sigma(\alpha^2) = 0 \quad \text{для} \quad \alpha^2 < c^2.$$

Соотношения (5) и (7) показывают, что перенормировочный множитель  $Z$  является вероятностью одночастичного состояния (с массой  $m$ ), появляющегося в состоянии (4). С другой стороны, канонические перестановочные соотношения приводят к соотношению

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t'} \left\{ \frac{d}{dt} G(x, x')_{t > t'} - \frac{d}{dt} G(x, x')_{t < t'} \right\} &= \frac{1}{Z} \left( \left[ \frac{d}{dt} U(x, t), U^*(x', t) \right]_0 \right) = \\ &= -i \frac{1}{Z} \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (7)$$

Подстановка (2) в левую часть (7) приводит к равенству

$$Z \int d\alpha^2 \rho(\alpha^2) = 1. \quad (8)$$

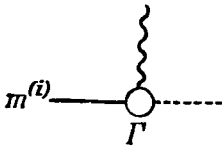
Это равенство совместно с (6) показывает, что  $Z \leq 1$  при эрмитовом гамильтониане взаимодействия. Таким образом, в этом случае имеем

$$0 \leq Z \leq 1. \quad (9)$$

Аналогичным способом неравенство (9) можно доказать для спинорных полей и для фотонного поля. Существует некоторое исключение; перенормировочные постоянные заряженных полей зависят от калибровки электромагнитного поля и поэтому не обязательно удовлетворяют условию (9).

Теперь мы укажем на одну полезную теорему. Записав перенормированную функцию распространения  $\hat{G}(k)$  для скалярного поля и  $G(p)$  для спинор-

Другими словами, одна половина величин  $Z^{(j)}$  обладает отрицательными знаками, а другая половина — положительными. Принимая во внимание (18.74), приходим к странному выводу, что матричный элемент  $(\text{Vac}|\phi|p^{(j)})$  комплексно сопряжен к матричному элементу  $(p^{(j)}|\phi^*|\text{Vac})$  лишь для тех значений  $j$ , для которых константы  $Z^{(j)}$  положительны. Таким образом, гамильтониан взаимодействия  $H(x)$ , содержащий  $\phi$ , не может быть эрмитов; если матричный элемент  $(a|H(x)|p^{(j)})$  [ $a$  — собственное состояние полного гамильтониана] комплексно сопряжен к матричному элементу  $(p^{(j)}|H(x)|a)$  для  $Z^{(j)} > 0$  ( $Z^{(j)} < 0$ ), то это не имеет места для  $Z^{(j)} < 0$  ( $Z^{(j)} > 0$ ). Поэтому можно ожидать, что  $S$ -матрица не является унитарным оператором.



Ф и г. 35.

Это положение приводит к возникновению следующей трудности. Если мы имеем некоторые процессы, в результате которых в вершине  $\Gamma$  (фиг. 35), в которой, по предположению, для всех состояний массы спинорных частиц перенормировочный множитель имеет одинаковое значение, происходит превращение спинорной частицы в другую частицу, то наблюдаемые константы связи  $g^{(j)}$  удовлетворяют

ного поля в виде

$$G(k) = \Delta_F(k) \frac{1}{Z^R(-k^2, g_1) + iZ^I(-k^2, g_1)}, \quad (10)$$

$$G(p) = S_F(k) \frac{1}{Z^R(-j(p, g_1) + iZ^I(-i(p, g_1))}, \quad (11)$$

можно доказать, что

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z^R(\Lambda^2, g_1) = Z, \quad (12a)$$

$$Z^I(\alpha^2, g_1) = 0 \text{ для } \alpha \leq c, \quad (13a)$$

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} Z^R(\Lambda, g_1) = Z, \quad (12b)$$

$$Z^I(\alpha, g_1) = 0 \text{ для } \alpha \leq c. \quad (13b)$$

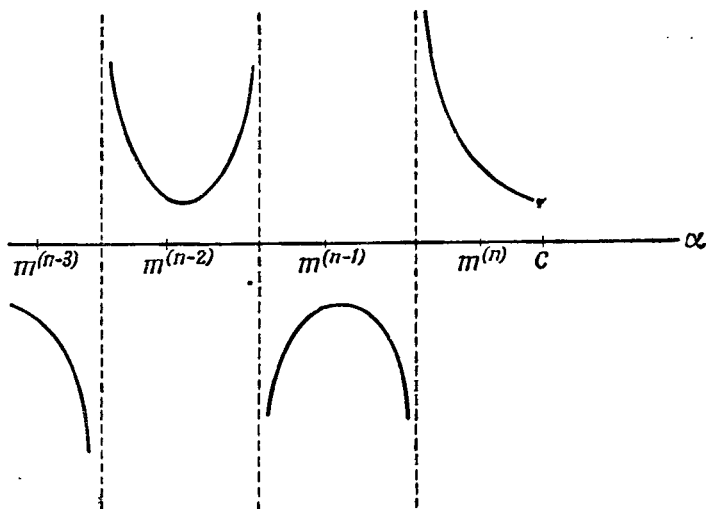
Константа  $Z$  является перенормировочным множителем,  $Z^R$  и  $Z^I$  являются вещественными функциями и  $g_1$  есть перенормированная константа связи. Если многочастичные состояния  $\Phi(k)$  ( $-k^2 \geq c^2$ ) обладают положительными вероятностями (т. е.  $\sigma(\alpha^2) \geq 0$ ), то сравнение мнимой части выражения (10) с мнимой частью выражения (2) показывает, что функция  $Z^I$  является положительно определенной функцией. Можно показать, что  $Z^R(\Lambda^2, g_1)$  и  $Z^R(\Lambda, g_1)$  являются перенормировочными константами, полученными методом обрезания, ( $c$  энергией обрезания, равной  $\Lambda$ ). Функция  $Z^I$  появляется за счет смещенных полюсов в диаграммах собственной энергии (или за счет интерференционных эффектов между многочастичными и одночастичными процессами, см. гл. 13, пример 1 и гл. 14, § 2) и поэтому не содержит бесконечностей. Следует заметить, что теоремы (10), (11), (12a) и (12b) имеют место только в случае взаимодействий 1-го рода (см. гл. 15).

соотношениям (см. фиг. 24)

$$\frac{g^{(i)}}{g^{(j)}} = \left( \frac{Z^{(i)}}{Z^{(j)}} \right)^{1/2}. \quad (18.76)$$

Здесь константа связи  $g^{(i)}$  соответствует процессу превращения из состояния спинорной частицы с массой  $m^{(i)}$ . Отсюда мы заключаем, что некоторые из отношений констант связи являются мнимыми и поэтому  $S$ -матрица не является унитарной.

Унитарную  $S$ -матрицу можно получить лишь тогда, когда все  $Z^{(j)}$  положительны.



Фиг. 36.

Определение (18.69) показывает, что все величины  $Z^{(i)}$  могут оказаться положительными лишь при весьма специальном распределении сингулярностей функции  $a(\alpha)$ ; функция  $a(\alpha)$  должна иметь по крайней мере одну сингулярную точку в каждой из областей  $m^{(1)} < \alpha < m^{(2)}$ ,  $m^{(2)} < \alpha < m^{(3)}$ , ...,  $m^{(n-1)} < \alpha < m^{(n)}$ , как это показано на фиг. 36.

## § 9. Простая модель

Так как точно вычислить одночастичную функцию распространения и вершинную часть  $\Gamma_\mu$  в квантовой электродинамике весьма затруднительно, то мы рассмотрим простую модель, к которой можно без использования каких-либо приближенных методов применить результаты § 7 и 8.



Мы будем исходить из гамильтониана для двух спинорных полей  $\psi$ ,  $\varphi$  и одного скалярного поля  $U$  [6]

$$\bar{H} = \int d^3x H, \quad (18.77a)$$

$$H = x\bar{\psi}\psi + M\bar{\varphi}\varphi + \frac{1}{2} \left\{ \partial_k U \cdot \partial_k U + \mu^2 U^2 \right\} + g (\bar{\psi}\varphi U^+ + \bar{\varphi}\psi U^-). \quad (18.77b)$$

В (18.77b) через  $x$ ,  $M$  и  $\mu$  обозначены механические массы соответственно  $\psi^-$ ,  $\varphi^-$  и  $U$ -частиц, а  $U^+$  и  $U^-$  означают положительно частотные и отрицательно частотные части оператора  $U$ .

Обозначая операторы поля в представлении взаимодействия жирными буквами, уравнения поля для  $\psi$ -и  $\varphi$ -полей можно записать в виде

$$(\partial_4 + x)\psi = 0,$$

$$(\partial_4 + M)\varphi = 0.$$

Отсюда следует, что  $\psi$  и  $\varphi$  являются как раз положительно частотными операторами, т. е. операторами уничтожения. Поэтому операторами порождения являются операторы  $\bar{\psi}$  и  $\bar{\varphi}$ .

Из (18.77b) видно, что  $\varphi$ -частицы ( $U$ -частицы) не могут породить  $U$ -частицы (пары спинорных частиц). Поэтому операторы массы  $\varphi$ - и  $U$ -частиц равны нулю; далее отсюда следует, что одночастичная функция распространения для  $\varphi$ -частицы является как раз  $S_F$ -функцией, удовлетворяющей уравнению

$$(p_0 - M)S_F(p) = 1, \quad (18.78)$$

а одночастичная функция распространения для  $U$ -частицы есть функция  $\Delta_F$ , определенная в гл. 8.

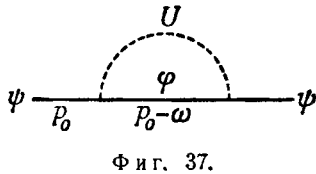
С другой стороны, оператор массы  $M(p_0)$  для  $\psi$ -частицы можно вычислить из рассмотрения процесса, изображенного на фиг. 37. Других каких-либо диаграмм, которые давали бы вклад в  $M(p_0)$ , не существует. Используя (18.78) и (8.35), можно для  $M(p_0)$  получить выражение

$$M(p_0) = -\frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega(\omega - p_0 \mp M)}, \quad (18.79)$$

в котором

$$\omega = \sqrt{k^2 + \mu^2}.$$

В соответствии с (18.63) уравнение для одночастичной функции распространения  $G(p)$  для  $\psi$ -частицы записывается следующим



Фиг. 37.

образом:

$$i(-p_0 + \kappa + M(p_0))G(p) = 1.$$

Функцию  $(p_0 - \kappa - M(p_0))$  мы будем обозначать через  $h(p_0)$ .

В соответствии со сказанным в § 8, стабильные уровни масс могут появляться для  $p_0 < c = M + \mu$ . Поскольку величины масс  $m_i$  определяются нулями функции  $h(p_0)$

$$h(m_i) = 0, \quad (18.80)$$

то

$$\begin{aligned} h(p_0) &= h(p_0) - h(m_i) = p_0 - m_i - M(p_0) + M(m_i) = \\ &= (p_0 - m_i) \left\{ 1 + \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega(\omega - p_0 + M)(\omega - m_i + M)} \right\}. \end{aligned} \quad (18.81)$$

На основании (18.68) константы  $Z_i$  можно определить равенствами

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_i} &= \frac{\partial}{\partial p_0} (p_0 - M(p_0)) \Big|_{p_0=m_i} = \\ &= 1 + \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega(\omega - m_i + M)^2}. \end{aligned} \quad (18.82)$$

Легко показать, что вершинная часть  $\Gamma$  дается равенством  $\Gamma = 1$ . Таким образом, наблюдаемый заряд  $g_i$ , соответствующий процессу перехода из состояния  $\psi$ -частицы с массой  $m_i$  в состояние  $\rightarrow \psi$ -частица +  $U$ -частица, дается равенством

$$g_i = g^2 Z_i. \quad (18.83)$$

Из (18.82) и (18.83) получаем

$$\frac{1}{g_i^2} = \frac{1}{g^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega(\omega - m_i + M)^2}. \quad (18.84)$$

Это показывает, что для конечности  $g_i^2$  необходимо, чтобы величина  $g^2$  была отрицательной.

Если величина  $g^2$  отрицательна, то гамильтониан (18.77б) не может быть эрмитовым. Кроме того, можно показать, что, когда величина  $g^2$  отрицательна, возникают два значения массы и один из двух  $Z$ -множителей ( $Z_1, Z_2$ ) является отрицательным. Соотношение (18.81) приводит к следующему условию для двух масс  $m_1$  и  $m_2$ :

$$1 + \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega(\omega - m_1 + M)(\omega - m_2 + M)} = 0. \quad (18.85)$$

Позднее мы покажем, что соотношение (18.85) может быть удовлетворено и что, следовательно, существуют два уровня массы.

С помощью (18.81) и (18.85) функция  $h(p_0)$  может быть представлена в виде

$$h(p_0) = (p_0 - m_1)(p_0 - m_2) a(p_0), \quad (18.86)$$

где

$$a(p_0) = \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega(\omega - p_0 + M)(\omega - m_1 + M)(\omega - m_2 + M)}. \quad (18.87)$$

Из (18.87) очевидно, что функция  $a(p_0)$  не обращается в нуль при значениях  $p_0 < M + \mu$ , при которых она отрицательна. Это показывает, что функция  $a(p_0)$  не обладает свойствами функции, изображенной на фиг. 36. Далее, согласно сказанному в § 8, один из  $Z_i$ -множителей ( $i=1,2$ ) должен быть отрицательным. Действительно, используя (18.69), мы получаем

$$\frac{1}{Z_1} = a(m_1)(m_1 - m_2), \quad (18.88a)$$

$$\frac{1}{Z_2} = a(m_2)(m_2 - m_1). \quad (18.88б)$$

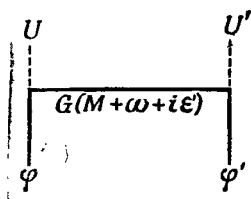
Эти соотношения показывают, что

$$\frac{Z_1}{Z_2} < 0.$$

Из (18.83) следует, что одна из двух наблюдаемых констант связи  $g_1, g_2$  должна быть мнимой.

Из (18.87) видно, что обе величины  $a(m_1)/g^2$  и  $a(m_2)/g^2$  конечны и что поэтому отношение  $(Z_1/Z_2)$  конечно. Таким образом, обе величины  $g_1$  и  $g_2$  также можно считать конечными.

В качестве примера процесса рассеяния мы вычислим сдвиг фазы  $\delta$  для процесса  $\varphi + U \rightarrow \varphi' + U'$ . Импульсы полей  $U$  и  $U'$  равны соответственно  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  ( $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ ). Существует лишь одна диаграмма (фиг. 38),



Фиг. 38.

описывающая этот процесс. Элемент  $S$ -матрицы дается равенством

$$\begin{aligned} (\varphi', U' | S | \varphi, U) &= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \frac{g^2}{2V\omega} G(M + \omega + i\epsilon') = \\ &= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \frac{1}{2V\omega} \sum_{j=1,2} g_j^2 a(m_j) \frac{1}{(\omega + M - m_j + i\epsilon')} \frac{1}{a(\omega + M + i\epsilon')}, \end{aligned}$$

в котором

$$\omega = \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + \mu^2} = \sqrt{\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' + \mu^2}.$$

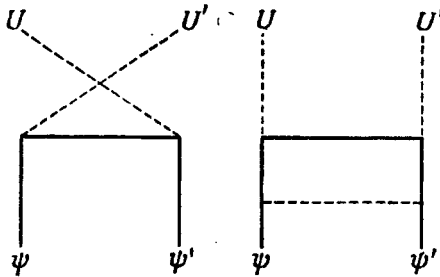
С другой стороны, (18.88a) и (18.88б) приводят к соотношению

$$g_1^2 a(m_1) + g_2^2 a(m_2) = 0.$$

Сдвиг фаз  $\delta$  может быть вычислен с помощью равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{1}{i} \frac{(\varphi', U' | S | \varphi, U) - (\varphi', U' | S | \varphi, U)^*}{(\varphi', U' | S | \varphi, U) + (\varphi', U' | S | \varphi, U)^*} = \\ &= \frac{\pi |k|}{(\omega + M - m_1)(\omega + M - m_2) P \int_0^\infty dk' \frac{k'^2}{\omega'(\omega' - \omega)(\omega' + M - m_1)(\omega' + M - m_2)}} \end{aligned} \quad (18.89)$$

[см. (17.32)]. Не следует удивляться тому, что правая часть равенства (18.89) не зависит явно от  $g_1$  или  $g_2$ , потому что эти постоянные однозначным образом связаны со значениями масс  $m_1$  и  $m_2$ . Для процесса  $\psi + U \rightarrow \psi' + U'$  существует две диаграммы (фиг. 39). Здесь под  $\psi$  и  $\psi'$  можно понимать любое из двух состояний массы.



Фиг. 39.

Теперь исследуем соотношение (18.85). Равенство (18.82) приводит к равенству

$$Z_i = 1 - \frac{g_i^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega(\omega - m_1 + M)^2}. \quad (18.90)$$

Соотношение (18.85) с учетом равенств

$$\begin{aligned} Z_1 \left( 1 + \frac{g_1^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega(\omega - m_1 + M)(\omega - m_2 + M)} \right) &= \\ &= Z_1 + \frac{g_1^2}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega(\omega - m_1 + M)(\omega - m_2 + M)} = \\ &= 1 - \frac{g_1^2}{(2\pi)^2} (m_1 - m_2) \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega(\omega - m_1 + M)^2(\omega - m_2 + M)}. \end{aligned}$$

может быть выражено через величину  $g_1$  следующим образом:

$$1 - \frac{g_1^2}{(2\pi)^2} (m_1 - m_2) \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega(\omega - m_1 + M)^2(\omega - m_2 + M)} = 0. \quad (18.91a)$$

Соотношение (18.85) также можно выразить и через величину  $g_2$

$$1 - \frac{g_2^2}{(2\pi)^2} (m_2 - m_1) \int_0^\infty dk \frac{k^2}{\omega(\omega - m_1 + M)(\omega - m_2 + M)^2} = 0. \quad (18.91b)$$

Интересно заметить, что (18.91a) и (18.91b) можно с помощью (18.88a) и (18.88b) получить также из (18.83).

Сейчас мы рассмотрим условия (18.91a) и (18.91b) для двух случаев

а)  $g_1^2 > 0$  и поэтому  $g_2^2 < 0$

б)  $g_1^2 < 0$  и поэтому  $g_2^2 > 0$ .

В случае „а“ условия (18.91a) и (18.91b) приводят к неравенству  $m_2 < m_1$ . Тогда (18.88a) и (18.88b) показывают, что  $Z_1 < 0$ ,  $Z_2 > 1$  и поэтому  $g^2 < 0$ . Заменяя в этих рассуждениях величины  $(g_1, Z_1, m_1)$  величинами  $(g_2, Z_2, m_2)$ , можно получить результаты для случая „б“. Эти результаты подытожены в табл. 6. В последующем изложении наибольшее и наименьшее значение масс мы будем обозначать через  $m_1$  и  $m_2$  соответственно.

Таблица 6

|                 | Наибольшая масса | Наименьшая масса |
|-----------------|------------------|------------------|
| Множитель $Z_i$ | $< 0$            | $> 1$            |
| $g_i$           | Вещественно      | Мнимо            |
| $g^2$           | Отрицательно     |                  |

Сейчас мы ограничим область интегрирования по  $k$  условием  $0 \leq k \leq K$  ( $K \gg \mu$ ). Тогда условия (18.91a) и (18.91b) принимают вид

$$1 - \frac{g_i^2}{(2\pi)^2} (m_1 - m_2) \int_0^K dk \frac{k^2}{\omega(\omega - m_1 + M)^2(\omega - m_2 + M)}. \quad (18.92)$$

Используя равенства

$$A(m_1, m_2) \equiv (m_1 - m_2) \int_0^K dk \frac{k^2}{\omega(\omega - m_1 + M)^2(\omega - m_2 + M)} > 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial m_2} A(m_1, m_2) < 0,$$

$$\lim_{m_2 \rightarrow -\infty} A(m_1, m_2) = \int_0^K dk \frac{k^2}{\omega(\omega - m_1 + M)^2}.$$

можно показать, что для  $g_1$  существует нижний предел

$$g_{\text{крит.}} = \frac{(2\pi)^2}{\int_0^K dk \frac{k^2}{\omega(\omega - m_1 + M)^2}},$$

удовлетворяющий условию (18.92). Этот результат для случая  $m_1 = M$  был получен Челленом и Паули [4]. На основании (18.90), (18.91б) и (18.92) можно показать, что при стремлении нижнего уровня массы к  $-\infty$  и фиксированном верхнем уровне массы, наблюдаемые константы связи, множители  $Z$  и перенормированные константы связи ведут себя так, как это показано в табл. 7.

Таблица 7

|                 | Наибольшая масса                     | Наименьшая масса      |
|-----------------|--------------------------------------|-----------------------|
| $g_1^2$         | $\rightarrow g_{\text{крит.}}^2 > 0$ | $\rightarrow -\infty$ |
| Множитель $Z_1$ | $0 \leftarrow$                       | $\rightarrow 1$       |
| $g^2$           |                                      | $\rightarrow -\infty$ |

$\rightarrow a$  — убывание к  $a$ .  
 $a \leftarrow$  — возрастание к  $a$ .

Когда величина  $g_1$  становится меньше  $g_{\text{крит.}}$ , то на основании (18.90) величина  $Z_1$  оказывается положительной, положительной также оказывается и  $g^2$ ; в этом случае все трудности с наимизшим уровнем массы исчезают.

Объединяя полученные выше результаты, можно сказать, что, обрезая интегрирования в пространстве импульсов и выбирая величину  $g^2$  положительной, мы приходим к положительным и конечным множителям  $Z$  и константам связи, которые являются вещественными и меньшими  $g_{\text{крит.}}$ . Другими словами, теория перенормировок может привести к разумным результатам только тогда, когда в теории не содержится „ультрафиолетовой катастрофы“ до выполнения перенормировок.

Интересно еще раз вернуться к схеме перенормировки в квантовой электродинамике. Хотя и не было проведено полного вычисления перенормировочного множителя  $Z_3$  для фотонной функции распространения, все же вычисления низших порядков теории возмущений всегда приводили к значению  $Z_3 = -\infty$ . Если бы  $Z_3$

была действительно отрицательной величиной, то было бы затруднительно понять успех процедуры перенормировки в квантовой электродинамике. Один из возможных ответов на этот вопрос может быть получен на основе результатов предыдущих параграфов. В области высоких энергий к рассматриваемым явлениям примешиваются эффекты различных других заряженных частиц, и поэтому систему из электрона и электромагнитного поля нельзя рассматривать как изолированную систему. Если предположить, что такого рода эффекты могут привести к конечному оператору массы электрона и фотона, то может выявиться некоторое критическое значение константы связи, именно такое значение, что для значений электрического заряда, меньших чем эта критическая величина, существует только один уровень массы. В этом случае все множители  $Z$  были бы положительными. Поскольку мы не имеем более точного представления об этих дополнительных взаимодействиях при высоких энергиях, мы не можем указать путь проверки указанного предположения. Однако можно было бы применить эти рассуждения к некоторой упрощенной модели. Например, вместо использования обрезания в случае модели Ли, можно было бы ввести некоторое дополнительное поле, которое позволило бы сделать оператор массы  $\phi$ -поля конечным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Edwards S. F., Phys. Rev., 90, 284 (1953).
2. Edwards S. F., Peierls R. E., Proc. Roy. Soc., A224, 24 (1954).
3. Gell-Mann M., Low F., Phys. Rev., 84, 350 (1951).
4. Källén G., Pauli W., в печати (1955).
5. Kita H., Prog. Théor. Phys., 7, 217 (1952).
6. Lee T. D., Phys. Rev., 95, 1329 (1954).
7. Lehmann H., Nuovo Cimento, 11, 342 (1954).
8. Nambu Y., Prog. Theor. Phys., 5, 614 (1950).
9. Nishijima K., Prog. Theor. Phys., 12, 279 (1954).
10. Peierls R. E., Proc. Roy. Soc., A214, 143 (1952).
11. Salam A., Kemmer N., в печати (1955).
12. Salpeter E. E., Bethe H. A., Phys. Rev., 84, 1232 (1951) (см. перевод в сборнике. Новейшее развитие квантовой электродинамики, ИЛ, 1954).
13. Schwinger J., Proc. Nat. Acad. Sci., 37, 452, 455 (1951).
14. Symanski K., Zs. Naturforsch., 10a, 809 (1954).
15. Umezawa H., Visconti A., Nuovo Cimento, 1, 1079 (1955).
16. Umezawa H., Visconti A., Nuclear Phys., 1, No. 1 (1955).
17. Wick G., Phys. Rev., 96, 1124 (1954).
18. Umezawa H., Kametuchi, Prog. Theor. Phys., 6, 543 (1951).
19. Källén G., Helv. Phys. Acta, 25, 417 (1952).

|   |           |
|---|-----------|
| Предисловие редактора перевода . . . . .  | 5         |
| Предисловие к английскому изданию . . . . .   | 9         |
| Обозначения . . . . .   | 11        |
| <b>Глава 1. Историческое введение . . . . .</b>   | <b>13</b> |
| § 1. Исследования по теории элементарных частиц . . . . .                                     | 13        |
| § 2. Теория элементарных частиц . . . . .   | 14        |
| § 3. Мезоны . . . . .   | 17        |
| § 4. Краткий обзор известных элементарных частиц . . . . .                                    | 19        |
| § 5. Квантовая теория поля и ее трудности . . . . .   | 23        |
| § 6. Наблюдаемые эффекты собственных полей . . . . .  | 28        |
| § 7. Развитие теории перенормировок . . . . .   | 33        |
| Литература . . . . .  | 38        |
| <b>Глава 2. Релятивистское волновое уравнение . . . . .</b>                                   | <b>43</b> |
| § 1. Релятивистское волновое уравнение . . . . .  | 43        |
| § 2. Свободное поле . . . . .   | 44        |
| <b>Глава 3. Уравнение Дирака . . . . .</b>  | <b>48</b> |
| § 1. Уравнение . . . . .  | 48        |
| § 2. Поведение матриц $\gamma$ при преобразованиях Лоренца . . . . .                          | 51        |
| § 3. Поведение волновой функции при преобразовании Лоренца.<br>Зарядовое сопряжение . . . . . | 53        |
| § 4. Волновая функция свободного электрона . . . . .  | 55        |
| § 5. Преобразование Фолди — Воутхаузена — Тани . . . . .                                      | 58        |
| § 6. Заряженные частицы в электромагнитном поле. Теория дырок . . . . .                       | 60        |
| § 7. Теория Майорана частиц со спином $1/2$ . . . . .   | 63        |
| § 8. Спиноры . . . . .  | 65        |
| § 9. Псевдоспиноры . . . . .  | 68        |
| Литература . . . . .  | 70        |
| <b>Глава 4. Общий вид релятивистского волнового уравнения (I) . . . . .</b>                   | <b>71</b> |
| § 1. Спиноры . . . . .  | 71        |
| § 2. Преобразование Лоренца . . . . .   | 75        |



|  |            |
|--|------------|
| § 3. Общий вид релятивистских волновых уравнений . . . . .                             | 78         |
| § 4. Полуцелый спин и отрицательная энергия . . . . .                                  | 85         |
| § 5. Свойства известных элементарных частиц . . . . .                                  | 87         |
| Л и т е р а т у р а . . . . .  | 89         |
| <b>Глава 5. Общая теория релятивистских волновых уравнений (II)</b> . . . . .          | <b>90</b>  |
| § 1. Общий вид релятивистского волнового уравнения . . . . .                           | 90         |
| § 2. Теория Дuffина — Кеммера . . . . .  | 98         |
| Л и т е р а т у р а . . . . .  | 104        |
| <b>Глава 6. Предварительные замечания о квантовании</b> . . . . .                      | <b>105</b> |
| § 1. Квантовая электродинамика . . . . .   | 105        |
| § 2. Квантовая теория для любых полей . . . . .  | 106        |
| Л и т е р а т у р а . . . . .  | 109        |
| <b>Глава 7. Релятивистская квантовая теория поля</b> . . . . .                         | <b>110</b> |
| § 1. Релятивистская квантовая теория поля . . . . .                                    | 110        |
| § 2. Комплексные поля и поля заряженных частиц . . . . .                               | 115        |
| § 3. Примеры . . . . .   | 117        |
| Л и т е р а т у р а . . . . .  | 150        |
| <b>Глава 8. Квантовая теория свободных полей (I). Соотношения коммутации</b> . . . . . | <b>152</b> |
| § 1. Квантовая теория свободных полей . . . . .  | 152        |
| § 2. Инвариантные $\Delta$ -функции, функции Грина и условие причинности . . . . .     | 156        |
| § 3. Соотношения коммутации и спин . . . . .   | 162        |
| § 4. Примеры . . . . .   | 165        |
| Л и т е р а т у р а . . . . .  | 174        |
| <b>Глава 9. Квантовая теория свободных полей (II). Поля и частицы</b> . . . . .        | <b>175</b> |
| § 1. Квантование . . . . .   | 175        |
| § 2. Четырехмерный вектор энергии-импульса и определение вакуума . . . . .             | 180        |
| § 3. Примеры . . . . .   | 183        |
| Л и т е р а т у р а . . . . .  | 195        |
| <b>Глава 10. Квантовая теория взаимодействующих полей</b> . . . . .                    | <b>196</b> |
| § 1. Представление взаимодействия . . . . .  | 196        |
| § 2. Вывод гамильтониана взаимодействия . . . . .                                      | 200        |
| § 3. Связи с обычной канонической теорией . . . . .                                    | 206        |
| § 4. Основные уравнения . . . . .  | 206        |
| § 5. Шредингеровское представление . . . . .   | 207        |
| § 6. Примеры . . . . .   | 208        |
| Л и т е р а т у р а . . . . .  | 220        |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Глава 11. Различные теоремы</b> . . . . .   | 221 |
| § 1. Калибровочная инвариантность . . . . .  | 221 |
| § 2. Соотношение между вещественным векторным полем и электромагнитным полем . . . . . | 223 |
| § 3. Векторное взаимодействие вещественного скалярного поля . . . . .                  | 227 |
| § 4. Теорема эквивалентности . . . . .   | 227 |
| Литература . . . . .   | 229 |
| <b>Глава 12. Квантовая теория поля в гейзенберговском представлении</b>                | 230 |
| § 1. Собственное поле источника . . . . .  | 230 |
| § 2. Примеры . . . . .   | 232 |
| Литература . . . . .   | 237 |
| <b>Глава 13. Теория возмущений</b> . . . . .   | 238 |
| § 1. Теория возмущений . . . . .   | 238 |
| § 2. Нековариантные формулы . . . . .  | 240 |
| § 3. Ковариантная теория возмущений . . . . .  | 243 |
| § 4. Метод $P$ -символа . . . . .  | 243 |
| § 5. Метод $P^*$ -символа . . . . .  | 249 |
| § 6. Примеры . . . . .   | 252 |
| Литература . . . . .   | 282 |
| <b>Глава 14. Теория перенормировок в квантовой электродинамике</b> . . . . .           | 284 |
| § 1. Теория перенормировок . . . . .   | 284 |
| § 2. Примитивно расходящиеся диаграммы . . . . .                                       | 285 |
| § 3. Выделение бесконечностей . . . . .  | 287 |
| § 4. Неприводимые диаграммы . . . . .  | 289 |
| § 5. Константы перенормировки . . . . .  | 289 |
| § 6. Окончательное интегрирование . . . . .  | 292 |
| § 7. Перенормировка внешних линий . . . . .  | 293 |
| § 8. Перенормировка . . . . .  | 294 |
| § 9. Выделение бесконечностей . . . . .  | 295 |
| § 10. Примеры . . . . .  | 298 |
| § 11. Различные проблемы в теории перенормировок . . . . .                             | 307 |
| Литература . . . . .   | 309 |
| <b>Глава 15. Общий случай теории перенормировок</b> . . . . .                          | 311 |
| § 1. Область применимости теории перенормировок . . . . .                              | 311 |
| § 2. Анализ размерностей . . . . .   | 312 |
| § 3. Размерности констант связи . . . . .  | 314 |
| § 4. $S$ -матрица . . . . .  | 314 |
| § 5. Условие для примитивно расходящихся диаграмм . . . . .                            | 314 |
| § 6. Условие применимости перенормировки . . . . .                                     | 316 |
| § 7. Классификация взаимодействий . . . . .  | 317 |
| § 8. Физический смысл классификации взаимодействий . . . . .                           | 320 |
| Литература . . . . .   | 321 |

|  |     |
|--|-----|
| Глава 16. Теория затухания . . . . .   | 322 |
| § 1. Уравнения теории затухания . . . . .  | 322 |
| § 2. Эффекты затухания . . . . .   | 326 |
| Литература . . . . .   | 329 |
| Глава 17. Теория $S$ -матрицы . . . . .  | 330 |
| § 1. Наблюдаемые величины . . . . .  | 330 |
| § 2. $S$ -матрица . . . . .  | 330 |
| § 3. Задачи рассеяния . . . . .  | 333 |
| § 4. Связанные состояния . . . . .   | 338 |
| Литература . . . . .   | 345 |
| Глава 18. Теория функций распространения . . . . .   | 346 |
| § 1. Введение . . . . .  | 346 |
| § 2. Формулировка теории . . . . .   | 347 |
| § 3. Уравнения для функций распространения. Нормирование функции распространения . . . . . | 352 |
| § 4. Вершинная часть, оператор массы и свободные „одетые“ частицы . . . . .                | 354 |
| § 5. Двухчастичные функции распространения . . . . .                                       | 357 |
| § 6. Перенормировочная инвариантность . . . . .  | 361 |
| § 7. Нормировочные постоянные . . . . .  | 362 |
| § 8. Перенормировка и спектр масс . . . . .  | 364 |
| § 9. Простая модель . . . . .  | 369 |
| Литература . . . . .   | 376 |

**Х. Умедзава**  
**КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ**  
**ПОЛЯ**

Редактор *Л. В. ГЕССЕН*

Художник *Б. Н. Гладков*

Технический редактор *М. П. Грибова*

Сдано в производство 25-IX 1957 г.

Подписано к печати 26/II 1958 г.

Бумага  $60 \times 92\frac{1}{16} = 12,0$  бум. л.,

24,0 печ. л. Уч.-изд. л. 22,2.

Изд. № 2/3566, Цена 17 р. 55 к.

Зак. 1045.

---

**ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ**  
**ЛИТЕРАТУРЫ**

Москва, Ново-Алексеевская, 52.

---

Первая Образцовая типография  
имени А. А. Жданова Московского  
городского совнархоза  
Москва, Ж-54, Валуевая, 28.