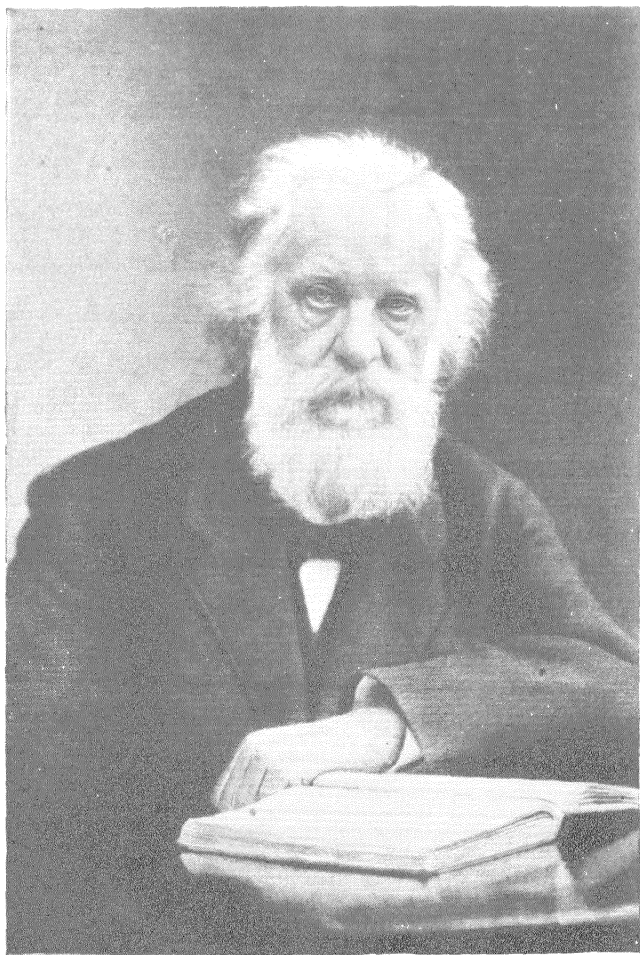


Н.А. УМОВ

ИЗБРАННЫЕ
СОЧИНЕНИЯ



Н. А. УМОВ

**КЛАССИКИ
ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ**



К Л А С С И К И
Е С Т Е С Т В О З Н А Н И Я

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
ФИЗИКА
АСТРОНОМИЯ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА • 1950 • ЛЕНИНГРАД

Н. А. УМОВ

ИЗБРАННЫЕ
СОЧИНЕНИЯ

*Под редакцией
чл.-корр. АН СССР
проф. А. С. Предводителя*



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА • 1950 • ЛЕНИНГРАД

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Издаваемый сборник трудов Н. А. Умова содержит наиболее выдающиеся произведения, в которых Умовым сделаны крупные открытия и которые не утратили интереса до настоящего времени.

Труды снабжены примечаниями редактора, в которых кратко излагается идейное содержание работ и устанавливается их отношение к современному состоянию физической науки.

Сборнику предшествует автобиография Н. А. Умова, написанная им по просьбе известного литературного критика и библиографа С. А. Венгерова и найденная в бумагах Умова в черновом виде. Она дана с некоторыми небольшими сокращениями, не имеющими значения для характеристики его жизни и деятельности.

В дополнение к автобиографии помещена небольшая статья редактора, в которой мы считали необходимым раскрыть значение Н. А. Умова как первого русского физика-теоретика и его роль в научной и общественной жизни.

В этой статье общественная и профессорская деятельность Н. А. Умова освещена более подробно по сравнению с научной. Это обстоятельство продиктовано тем, что в примечаниях к научным работам настоящего сборника деятельность Н. А. Умова как учёного освещена сравнительно подробно.

Таким образом, в автобиографии Н. А. Умова, в примечаниях к его трудам и в очерке его общественной и педагогической деятельности, вместе взятых, вырисовывается образ Умова как замечательного русского учёного и человека.

Не все труды Н. А. Умова в своё время были напечатаны по-русски. Часть их была опубликована на немецком, английском и французском языках. В настоящем издании эти работы представлены в русском переводе.

Перепечатка текста работ Н. А. Умова производилась доподлинно, — исправлялись лишь досадные опечатки. Математическая символика Н. А. Умова не была сохранена, как устарелая, — она заменена современной. В основном идёт речь о замене символов полных и частных производных, которые в старой математической литературе изображались в обратном смысле по сравнению с современной.

В подготовке этого сборника принимал участие проф. Д. Д. Иваненко. В частности, он рекомендовал включить в сборник автобиографию Н. А. Умова и сделал ряд ценных замечаний по содержанию примечаний.

А. С. Предводителев

Н. А. У М О В



АВТОБИОГРАФИЧЕСКИЙ
ОЧЕРК



АВТОБИОГРАФИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Умов Николай Алексеевич родился в г. Симбирске 23 января 1846 года.

Дедом его со стороны отца и родоначальником семьи Умовых был помещик Казанской губернии Павел Михайлович Наумов, который имел от своей крепостной крестьянки Матрёны Тихоновны, не желавшей выйти за него замуж, чтобы не рассорить его с родными, нескольких сыновей и дочерей. По высочайшему повелению одному старшему сыну Ивану было присвоено дворянское звание и всем детям дана фамилия Умовых. П. М. заботился об образовании своих детей. Старший сын, окончив курс по физико-математическому факультету Казанского университета, поступил в военную службу, а по выходе в отставку поселился в своём имении. В 1860 г. И. П. был вызван в Петербург в качестве губернского депутата по разработке положения об освобождении крестьян. После реформы служил членом Губернского по крестьянским делам Присутствия; пользовался, благодаря своему справедливому отношению к людям, всеобщим уважением и, становясь на сторону крестьян в их тяжбах с помещиками, не раз расходился со своими прежними друзьями. Имея хорошую подготовку по математике, он занимался прикладной механикой и изобрёл «горизонтальное водяное колесо», описанное в брошюре того же названия.

Второй сын, отец Н. А., Алексей, получил образование на медицинском факультете Казанского уни-

верситета, который и окончил со званием врача. Здесь под влиянием известного профессора и естествоиспытателя Эверсмана он пристрастился к собиранию чешуекрылых, причём нашёл новый вид, названный в честь его *Bryophila Umovi*. В звании военного врача А. П. пришлось побывать во многих местностях России, благодаря чему ему удалось собрать едва ли не единственную по своей обширности коллекцию чешуекрылых России, заключавшую несколько тысяч экземпляров и разделённую после его смерти между двумя университетами—Новороссийским и Московским, в которых состояли профессорами его сыновья Николай (в первом) и Владимир (во втором). Оставив службу по военному ведомству, А. П. поселился в Симбирске, где впоследствии занял место старшего врача городской больницы и преподавал медицину в епархиальном училище. Здесь же он женился на дочери местного купца, от которой и имел двух сыновей. Мать Н. А. была религиозной женщиной и в этом направлении влияла на детей, читая имевшиеся у неё книги духовного содержания. Н. А. особенно заинтересовался пользовавшейся в то время в духовных сферах известностью книгою Голубинского, в которой впервые прикоснулся к вопросам философского характера.

Отец Н. А. был также большим коллекционером книг, скупал их у антиквариев и в распродававшихся помещичьих библиотеках. Составленное довольно обширное собрание, заключавшее в себе классиков по русской и иностранной литературе, философии, естественной истории, давало обильный материал для чтения сыновьям, когда они достигли гимназического возраста. В то время в обществе существовало очень сильное стремление к образованию, а также обучению детей иностранным языкам. Воспитание детей начиналось под руководством гувернанток, которые выписывались из столиц, а затем к детям приглашались учителя. Особенно благотворное влияние на Н. А. произвели уроки учителя местного уездного училища Фёдора Афа-

насьевича Иванова, пристрастившего его к математике и очень живо преподававшего историю и словесность. А. П. не желал отдавать своих детей в Симбирскую гимназию и под влиянием помещика Тургенева, окончившего курс в Дерптском университете, предполагал везти детей в Дерпт, почему одно время дети изучали все предметы на немецком языке. План не осуществился благодаря несогласию матери, и было решено дать детям образование в Москве.

Забываясь о научном направлении своих детей, А. П. устроил между их сверстниками естественно-историческое общество, в котором детьми читались рефераты; его торжественное открытие состоялось в присутствии приглашённых родителей и родственников. Досуги Н. А., кроме обычных детских игр, наполнялись приготовлением мазей, пилюль — пользуясь небольшим аптечным шкафчиком, подаренным отцом; устройством картонных часов, безуспешным добыванием алюминия из глины, работами в саду под руководством отца — знатока садоводства.

Просветительные стремления того времени находились в резком противоречии с его отрицательными сторонами, значение которых до некоторой степени не ускользало от пытливого детского ума. Тяжёлое впечатление на Н. А. произвёл случай с лакеем (крепостным человеком старшего брата отца), которого за пьянство решено было отдать в солдаты. Лакею для личной передачи воинскому начальнику было вручено письмо с предложением «забрить лоб» подателю. Н. А. был поражён тем, что человек, сам того не зная, нёс в своих руках свою судьбу.

Во время поездок всей семьи А. П. к старшему брату иногда заезжали в имение одного из Наумовых, против чего всегда выступала мать Н. А., который — хотя и смутно — догадывался об унижении, сопровождавшем эти заезды, и в происходившем споре впервые услышал слово «bâtard», которое только впоследствии — через несколько лет — уяснил себе при помощи французского лексикона, при поступлении в гимназию.

Во время таких остановок семья Умова принималась во флигеле управляющего, куда ей присылался обед, а в барский дом допускался только отец.

Дом, в котором жила семья в Симбирске, принадлежал больнице и выходил одной стороной в поле, на котором помещалось и здание арестантских рот. Бывали дни, когда на это поле шли солдаты и собиралось много народа. В квартире А. П. подымалась суматоха, и детям запрещалось подходить к окну, выходящему в поле. Через некоторое время А. П. звали в больницу, откуда он возвращался крайне удручённым; приходили фельдшера и о чём-то докладывали. Детское любопытство раскрыло тайну. Это было наказание шпицрутенами; прислуга объяснила его процедуру и весь его ужас.

В доме отца и его тестя бывали молодые чиновники, являвшиеся глашатаями либеральных идей. В числе их был и Григорий Иванович Амосов, служивший по удельному ведомству, бывший впоследствии, после реформы суда, товарищем прокурора в Кишинёве и в своей судебной практике известный блестящими речами; после смерти любимой жены он окончил жизнь самоубийством. Кроме разговоров о злобах дня, Г. И. читал иногда вслух места из библии в присутствии матери Н. А. и юродивого «дяди домой». Юродивый произносил только эту фразу, наложив на себя обет молчания: он заговорил только после освобождения крестьян. Ходил он в лохмотьях, с посохом, с верхушки которого спускался пучок разноцветных лент. Он жил от доброхотных подаваний; в домах его сажали на почётное место, а объяснялись с ним знаками. Биография этой загадочной личности помещена в одном из русских исторических журналов.

Гуманные идеи были издавна не чужды интеллигенции Симбирска. В нескольких верстах от него лежит Баратаевка, имение известного масона. Оно было посещаемо публикой благодаря красоте парка с речкой, мостами, замаскированными фонтанами и большим гротом, служившим, по рассказам, для ма-

сонских собраний. Дом владельца был замечателен своей внутренней отделкой и украшавшими её малахитовыми колоннами.

Крымская кампания подходила к концу. Дети видели сборы ополченцев, щипание корпии, слышали разговоры о неудачах войны, слова «Колокол» и «Герцен», разговоры и опасения по поводу ожидавшегося освобождения крестьян. После восшествия на престол Александра II было большое ликование во всех слоях населения. Была устроена иллюминация; громадную толпу собрал большой транспарант на небольшом доме поэта Д. Д. Минаева, где рядом с царскими инициалами красовался колокол значительных размеров и надписи, интриговавшие зрителей.

После продолжительного путешествия на перекладных с заездом в монастыри одиннадцатилетний Н. А. с братом были привезены в Москву, где через год были приняты в третий класс 1-й Московской гимназии. При приёме прошения от отца и представлении детей директор гимназии задал вопрос: «Незаконнорожденные?» Последовал отрицательный ответ, но вопрос директора очень смутил Н. А., который сопоставил его со своими прежними переживаниями.

Устроиться в Москве помог А. П. известный церковный библиограф Капитон Иванович Невоструев, к которому имелось рекомендательное письмо от одного духовного лица. К. И. жил в келье Чудовского монастыря, заваленной рукописями и церковными книгами, наполнявшими не только полки, расставленные по стенам, но и наваленными на его ветхой немногочисленной мебели и на полу. К. И. показывал семье все достопримечательности и святыни Москвы. При посещении ризницы Н. А. был поражён беззаботной игрой монаха со старинной чашей, которую он заставлял крутиться около одного из своих пальцев; этот монах проверял входящую благоговейно настроенную публику. К. И. был фанатик, и несколько лет спустя, увидавши в квартире отца немецкую историю религии, которую читал Н. А., швырнул её под стол и сделал его отцу

строгий выговор за то, что он не следит за чтением своих детей. Однажды к А. П. приехал один его дальний родственник, большой жуир. А. П. повёл его смотреть московские святыни и конечно зашёл к К. И. Здесь, в то время как К. И. объяснял А. П. особенности письма какой-то рукописи, приезжий осматривал корешки переплёттов, торчавших с полок, и начал напевать от скуки: «В аду лишь жизнь прямая!» К. И. наострил уши и, разобрав фразу, с гневом выгнал приезжего из своей кельи, чем и окончился предполагавшийся обзор. Подобные столкновения бывали и на квартире А. П. при встрече с посторонними лицами, не знавшими К. И. и свободно выражавшими свои мнения. К. И. скончался от злоупотребления спиртными напитками.

Своим пристрастием к физике Н. А. обязан Якову Игнатьевичу Вейнбергу, талантливо и живо преподававшему этот предмет в гимназии. Что касается естественной истории, то преподаватель её, впоследствии приобретший известность прекрасным руководством по ботанике¹⁾, в то время вёл преподавание крайне утомительно и скучно: это были потерянные часы. Ученик выходил к кафедре и читал по литографированной тетради урок для следующего класса. Тем не менее учитель был очень требователен. К приёмному экзамену в третий класс пришлось изучать по его запискам большую главу о строении глаза, которую дети могли несколько усвоить благодаря объяснениям врача-отца. Ученикам второго класса гимназии объяснялись очень подробно устройство глаза и акт зрения, когда они не имели никакого понятия об оптике!

Интерес к естествознанию в детях поддерживался главным образом летними экскурсиями отца по ловле чешуекрылых, особенно интересными ночью, с фонарём, в камышах подмосковных болот, а также участием в ботанических экскурсиях того же преподавателя, впоследствии — в экскурсиях известного бота-

¹⁾ В. В. Григорьев. (Прим. ред.)

ника Кауфмана, рано умершего, и в геологических экскурсиях преподавателя Константиновского Межевого института Ауэрбаха.

Из преподавателей других предметов благотворное влияние на учеников оказывал преподаватель русской словесности Михаил Иванович Студеников. Особенный интерес был вызываем писанием сочинений, для составления которых рекомендовался ряд книг, чтением этих сочинений перед классом и затем их разбором. Сверх уроков, по некоторым дням, в послеобеденные часы М. И. устраивал беседы с учениками, посвящённые чтению русских классиков, в том числе Белинского. Эти чтения продолжались, однако, недолго: начальство нашло их неудобными в отношении надзора, так как на этих беседах отсутствовал надзиратель. Увлечение словесностью вызвало появление ученического журнала, который трактовал вопросы литературы и ученической жизни.

Из других преподавателей, своими уроками способствовавших развитию учеников, следует отметить преподавателя географии Мюллера и истории — Санчакова.

В то время гимназисты вместо латинского языка могли слушать законоведение, которое преподавалось сначала Сергеевичем (впоследствии профессором Петербургского университета), а затем Н. Л. Дювернуа (бывшим потом профессором Новороссийского и Петербургского университетов). Перед выпуском из гимназии, на одном из последних уроков 7-го класса, Дювернуа по просьбе гимназистов прочёл блестящую лекцию о Беккариа и ожидавшейся реформе суда. Лекция произвела глубокое впечатление на гимназистов.

Братья Умовы слушали латинский язык. Его преподавателем был известный в то время латинист Яков Васильевич Смирнов, уже старик, со многими странностями. Латинский язык не привлекал Н. А., который пользовался помощью брата, в свою очередь пользовавшегося математическими познаниями Н. А. При

присуждении гимназическим советом золотой медали Н. А., Смирнов встал под образ и, поднявши руку вверх, протестовал против этого присуждения.

В первый год поступления Умовых в гимназию произошло печальное событие. В гимназии учились казённые стипендиаты—болгары, люди не только великовозрастные, но и семейные, однако почему-то обязанные её посещать, в то же время бывшие пансионерами и подчинённые всем правилам пансиона. Один из них, лет тридцати, имевший семью и учившийся в третьем классе вместе с мальчиками, повесился, не выдержавши режима. Эти болгары отличались своей малоуспешностью.

Каждую субботу в класс являлся инспектор и вызывал малоуспешных или в чём-либо провинившихся учеников, которых выводили из класса и секли. Одна такая экзекуция кончилась очень печально. Всё это производило отвратительное впечатление.

В то самое время в старших классах гимназии обучались А. И. Кирпичников и кн. Урусов: первый—впоследствии известный профессор, а второй—известный адвокат. Обладая сильной мускулатурой, они делали иногда набег на младшие классы, подвергая их избиению.

Время великих реформ, подъём литературы имели громадное влияние на молодёжь того времени, побуждая её к усиленному чтению и самообразованию. Отец Н. А. давал возможность своим детям знакомиться с текущей литературой и классиками русской и иностранной литературы в оригиналах и переводах. Через знакомого помощника университетского библиотекаря Н. А. получал книги по философии.

Н. А. получил в подарок от отца «Историю новой философии» Куно Фишера, «Астрономию» Араго, зрительную трубу и микроскоп. Пользуясь трубой, Н. А. по ночам изучал звёздное небо через слуховое окно на чердаке и, пользуясь окулярами микроскопа, усиливал увеличение трубы.

В Московский университет оба брата поступили в 1863 г.: Н. А.—на физико-математический факуль-

тет, а его брат—на юридический. В то время студенческой формы не было, и студенты ходили в партикулярном платье. Лекции по физике читал Н. А. Любимов; на последнем курсе несколько месяцев Н. А. слушал математическую физику у молодого А. Г. Столетова, вскоре заболевшего. Практических занятий по физике в то время не было.

На математическом факультете имелся целый ряд блестящих профессоров: А. Ю. Давидов, В. Я. Цингер, Ф. А. Бредихин, Ф. А. Слудский. Слушать первого из них приходили иногда юристы и филологи, ничего не понимавшие в содержании лекций, но увлекавшиеся их чрезвычайным изяществом.

Студентом Н. А. познакомился со студентом юридического факультета А. И. Чупровым, около которого группировалось много молодёжи. А. И. состоял в то время в числе устроителей студенческого клуба самообразования, в котором дебатировались вопросы общественные, научные, философские, например: о свободе воли; по поводу книги Бокля «История цивилизации в Англии». Собрания эти происходили вблизи Сретенского полицейского участка, в доме Клевезаля, по вечерам, иногда заканчивались пирушкой и затягивались до поздней ночи. Группа молодёжи свободно проходила мимо часового участка, не обращая на себя никакого внимания. Высокий интерес возбуждал вопрос о народном образовании; А. И. составил обширную и обстоятельную записку о его настоятельности. Эта интересная записка была отлитографирована, но А. И. по своей скромности не поставил на ней своего имени; подписался на ней его товарищ—добродушный, но несколько тщеславный Василий Иванович Губин (за что впоследствии ему пришлось поплатиться). Предполагалось образовать комитет или общество для распространения образования в народе и привлечь к этому делу не только студентов, но и профессоров. С этой целью записка А. И. Чупрова (к сожалению, утраченная впоследствии) распространялась в аудиториях, и ряд студентов взялся передавать её профессо-

рам; Н. А. исполнил это по отношению к профессорам математического факультета. Записка встретила благосклонное отношение только у профессора чистой математики Н. В. Бугаева, и беседа о ней была первым знакомством Н. А. с Бугаевым, с которым у него установились добрые отношения, продолжавшиеся до самой смерти Н. В. Бугаев принимал живое участие своими советами в направлении научной деятельности Н. А. и в его дальнейшей судьбе.

Профессора не приняли никакого деятельного участия в предполагаемом просветительном плане, и А. И. Чупров сформировал кружок лекторов, который открыл свою деятельность чтением лекций артельщикам Кокоревского подворья (за Москвой-рекой), в номерах которого жил один из членов кружка. Читались лекции по космографии, естественным наукам и истории. Деятельность кружка продолжалась недолго. Покушение на государя Александра II поставило на ноги полицию, и кружок, а также записка были открыты. Её предполагавшийся автор В. И. Губин отсидел несколько месяцев в одном из полицейских участков Москвы, другие члены были подвергнуты надзору полиции, чем дело и кончилось; закрылся также и клуб самообразования.

Местом собраний молодёжи, живущей по преимуществу интеллектуальными вопросами, была большая квартира Арнольда, служившего по постройке Курской железной дороги и бывшего очень близким со строителем этой дороги, генералом В. С. Семичевым, иногда посещавшим эти собрания. Они были открыты для молодёжи, которая являлась на них без приглашения и не зная хозяина. На одном из таких собраний произошло первое публичное выступление Н. А., прочитавшего реферат об утилитаризме.

Н. А. и несколько студентов-математиков образовали математический кружок. В числе членов этого кружка был товарищ Н. А. по курсу, Федор Платонович Никитин, посвящавший себя изучению механики, впоследствии видный земский деятель Херсонской

губернии, а затем занявший высокий пост в министерстве земледелия. Из других следует упомянуть шедшего одним курсом ниже Александра Александровича Ламовского, выдававшегося своими блестящими математическими способностями; на него возлагались большие надежды как товарищами, так и профессорами, которым, к сожалению, не пришлось осуществиться. По окончании курса он женился на Л. Ф. Королёвой, впоследствии небезызвестной писательнице, дочери директора Московского технического училища Ф. Н. Королёва. Затем у Ламовского начало обнаруживаться психическое расстройство, и он застрелился.

Члены студенческого математического кружка посещали Московское математическое общество. В издававшемся Обществом «Математическом Сборнике» была помещена статья одного известного не московского математика. Просматривая эту статью, Н. А. заметил, что она представляет собой плагиат. Вопрос обсуждался в студенческом математическом кружке; была составлена записка с приведением параллельных мест и без подписи отправлена почтой в Математическое общество; она была прочтена в одном из заседаний и произвела сенсацию.

Из своих товарищей Н. А. был особенно близок с Ф. П. Никитиным, который посещал и его семью. Семью посещал и товарищ брата Н. А., образованный, красивый и блестящий юноша, прекрасно владевший речью; предполагалось, что он будет талантливым профессором. Брат Н. А. был человеком консервативных убеждений, и между ним и блестящим студентом происходили споры; между прочим, последний защищал от нападок и превозносил роман Чернышевского «Что делать?». Впоследствии этот юноша занял высокий пост в духовном ведомстве.

Отец Н. А., потерявший значительную долю своего небольшого состояния благодаря тому, что принял участие в одном деле, затеянном тремя известными в то время в Москве капиталистами, должен был искать службы и получил место директора Сиротского дома

на Новой Басманной. Это было среднее учебное заведение, в котором обучались жившие там сироты. Здесь, по поводу происходивших иногда беспорядков, отец Н. А. поручал последнему составлять обращения к надзирателям и воспитанникам; одно из таких обращений представляло собою небольшой трактат о воспитании. При составлении таких обращений Н. А. пользовался статьями Пирогова.

Н. А. и его брат кончили курс в университете в 1867 г. со степенью кандидатов и были оставлены для приготовления к профессорскому званию. В апреле 1868 г. Н. А. поступил преподавателем физики во 2-ю женскую гимназию, а потом читал физику на Лубяньских курсах и преподавал арифметику в народной женской школе, устроенной женой В. В. Семичева.

Отец Н. А. приобрёл небольшое имение в Дмитровском уезде Московской области, близ деревни Селиванова, где семья проводила лето. Здесь Н. А. завёл обучение крестьянских подростков грамоте.

Девушки окрестных сёл занимались шитьём лайковых перчаток, которые раздавались им с одной из московских фабрик дьяконом одного из ближайших сёл. Дьякон уплачивал работницам лишь небольшую долю того, что он получал с фабриканта за каждую сшитую дюжину перчаток. Н. А. собрал в дом отца девушек соседних деревень и объяснил им всю выгоду кооперативного труда и убыточность их работы в тех условиях, при которых она производилась. В результате образовалась перчаточная артель, которая выбрала доверенное лицо для сношения с фабрикантом, а Н. А. из своих небольших сбережений внёс фабриканту залог за отпускаемый товар. Описание устройства этой артели и её деятельности составило содержание его первой печатной статьи, помещённой в одном из номеров недолго существовавшей газеты «Русская летопись» (1870—1871 гг.). Артель просуществовала с небольшим два года, так как после отказа первого доверенного выбранный второй в одну из своих поездок к фабриканту пропил полученные за работу деньги.

Н. А. участвовал также в образовании первого потребительского общества в Москве, которое тоже просуществовало недолго (несмотря на первоначальный громадный успех) благодаря растрате, сделанной главным приказчиком.

Н. А. познакомился с братьями Фишерами—Борисом Борисовичем и Георгием Борисовичем (впоследствии женившимся на Софье Николаевне Вейс, основательнице женской классической гимназии в Москве). Б. Б. Фишер был увлечён вопросом о народном образовании и составил записку о необходимости учреждения в Москве Общества распространения технических знаний. Эта записка обсуждалась совместно с Н. А. и А. И. Чупровым. Она явилась исходной точкой для основания существующего и теперь Общества распространения технических знаний, разнообразно развернувшего свою деятельность. А. С. Семичева передала Обществу свою школу, которая была превращена в женскую ремесленную школу, заведывание которой взял на себя Н. А., прежде в ней преподававший. Впоследствии эта школа была преобразована в среднее учебное заведение, затем закрывшееся. Стараниями Н. А. и Г. Б. Фишера была затем устроена слесарная мастерская, преобразованная впоследствии в среднее техническое учебное заведение. В жизни Общества Н. А. принимал живое участие до своего переселения в Одессу. К сожалению, Общество потом уклонилось от первоначальной цели его учредителей—распространения технических знаний в народе,—преследуя с большим успехом общеобразовательные цели.

В 1870 г. Н. А. сделал первое сообщение в Московском математическом обществе, напечатанное потом в «Сборнике» этого Общества под заглавием: «Законы колебаний в неограниченной среде постоянной упругости», сдал магистерский экзамен и занимался подготовкой магистерской диссертации. В 1871 г. он был избран доцентом в Новороссийский университет по кафедре физики. Это избрание обусловило его переселение в Одессу, где он в течение почти двадцати двух

лет читал теоретическую физику. В 1872 г. он ездил в Москву для защиты магистерской диссертации и здесь женился на классной даме 2-й женской гимназии Елене Леонардовне, дочери пользовавшейся известностью благодаря своему широкому образованию начальницы гимназии Елены Осиповны Новицкой.

В 1874 г. умер отец Н. А., и в том же году Н. А. защитил в Москве докторскую диссертацию под заглавием: «Уравнения движения энергии в телах». Диспут продолжался около шести часов; понятия о движении энергии и её плотности встретили сильные возражения со стороны оппонентов. В настоящее время эти понятия являются ходячими, и Н. А. считается предшественником работ Пойнтинга в том же направлении (см. Auerbach, «Geschichtstafeln der Physik»). Теорема, данная Н. А., связывавшая величину энергии и скорость её движения с давлением, подобная теореме Максвелла о световом давлении, обратила на себя внимание заграничных учёных и—вскоре после опубликования работы на немецком языке—была приложена одним голландским учёным (Grinwis'ом) под названием «Loi de M. Umow» к соударению упругих шаров. Впоследствии, будучи уже профессором Московского университета и присутствуя в 1896 г. на юбилее лорда Кельвина в Глазго, он был избран почётным членом Глазгоского университета, причём в числе мотивов избрания была указана и его работа по движению энергии.

В 1875 г. Н. А. был избран в экстраординарные, а в 1880 г.—в ординарные профессора Новороссийского университета. В последнее звание он был предложен годом раньше, но отказался от баллотировки, присоединяясь к представлению другого кандидата (по кафедре механики), В. Н. Лигина.

Из Одессы Н. А. совершил три заграничных поездки, слушая лекции Кирхгофа и Гельмгольца и участвуя в практических занятиях по физике в Гейдельберге под руководством Кирхгофа. В результате этих поездок явилось устройство практических занятий со студентами в Новороссийском университете.

Во время своего пребывания в Берлине Н. А. сообщил Кирхгофу свою работу о стационарном движении электричества в проводящих поверхностях произвольного вида. Эта работа, с упоминанием имени Н. А. и с изменением математического приёма доказательства, послужила содержанием статьи Кирхгофа в Записках берлинской Академии наук. Ещё ранее Н. А. сообщил Кирхгофу свои идеи о движении энергии в телах, и не исключается возможность, что данное Кирхгофом определение луча¹⁾ было сделано им под влиянием сообщённых ему идей.

Во время своего пребывания в Одессе Н. А. сошёлся с И. М. Сеченовым, И. И. Мечниковым, А. О. Ковалевским, В. Ф. Зеленским и Н. А. Головкинским. Первые два вместе с Н. А. и его женой образовали тесный кружок. Впоследствии Н. А. сошёлся с профессором-экономистом А. С. Постниковым и Н. Л. Дювернуа (перешедшими потом в Петербург). У А. С. Постникова Н. А. познакомился с будущим редактором «Русских ведомостей» В. М. Соболевским.

Кроме чтения лекций в университете Н. А. читал ещё лекции по физике на устроенных в Одессе публичных курсах по естествознанию и был членом Новороссийского Общества естествоиспытателей.

В течение нескольких лет под конец своего пребывания в Одессе Н. А. был членом комитета «Когановских учреждений» и затем его делопроизводителем. Эти учреждения владеют несколькими домами в Одессе и 800 десятинами земли при хуторе Болгарке Ананьевского уезда Херсонской губернии, где имеется богадельня, больница и приют. Учреждения имеют целью предоставлять дешёвые квартиры лицам и семействам, посвящавшим себя труду, но по не зависящим от них обстоятельствам впавшим в бедность. В домах имеются 324 квартиры, вмещающие 582 комнаты, с населением более 1200 душ. Одна кубическая сажень помещения с водою и чистой труб обходится в среднем около

¹⁾ Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen, p. 156 (1822); (Прим. ред.)

3 р. 75 к. в год. Земля сдаётся окрестным землевладельцам по недорогой цене. Эти учреждения управляются комитетом, состав которого сначала был определён учреждением в числе 12 лиц, с правом самопополнения.

Н. А. был также членом Общества призрения porchных детей и в 1891 г. принимал участие в заведывании убежищем. В связи с идеями этого учреждения им напечатан фельетон в «Одесском листке».

Осенью 1893 г. Н. А. был переведён в Москву на кафедру физики, после того как она стала вакантной за выслугой лет проф. А. Г. Столетовым. Здесь он встретил И. М. Сеченова, с которым у него сохранились прежние близкие отношения. Кроме лекций теоретической физики Н. А. читал опытную физику медикам и работал экспериментально в Физиологическом институте университета совместно с ассистентом физиологии А. Ф. Самойловым, впоследствии профессором Казанского университета¹⁾. Позднее проф. А. Г. Столетов, продолжавший свои курсы на физико-математическом факультете, отвёл Н. А. комнату для его занятий в физической лаборатории. После смерти А. Г. Столетова в 1896 г. Н. А. стал читать и часть его курсов по опытной физике студентам физико-математического факультета и получил в своё заведывание часть физической лаборатории.

Улучшившееся материальное положение Н. А. дало ему возможность совершить несколько поездок за границу, имевших целью ознакомление с устройством физических институтов, что дало ему возможность познакомиться с выдающимися представителями западной науки. В поездку 1896 г. он сделал три доклада в заседании (19 июня) Французского физического общества. Тогда же им напечатана в *Revue Scientifique* популярная статья, посвящённая механике Герца, под заглавием «*La mécanique cartésienne*».

Знакомство с устройством физических институтов

¹⁾ После Октябрьской революции А. Ф. Самойлов был профессором биологического факультета Моск. госуд. университета. (Прим. ред.)

на западе дало Н. А. возможность, совместно с проф. А. П. Соколовым и П. Н. Лебедевым, принять деятельное участие в составлении плана и постройке обширного Физического института в Москве. Наблюдение за постройкой и пререкания по её поводу в учреждённой строительной комиссии брали много времени и сил у Н. А.

Незадолго до окончания постройки и переезда в новый обширный Физический институт, от одного из профессоров физики к попечителю учебного округа поступило заявление об отнятии у Н. А. небольшого помещения, которым он заведывал в старой физической лаборатории. Попечитель переслал бумагу в факультет, в котором, несмотря на её поддержку одним из известных профессоров-естественников, она была отвергнута.

В новом институте Н. А. получил в заведывание физический кабинет и небольшую лабораторию, а также, после выхода в отставку проф. В. Ф. Лугинина, и перенесённую туда его термическую лабораторию. Между Н. А. и В. Ф. Лугининым ещё вскоре после перехода в Москву установились близкие отношения, и Н. А. поддерживал мысль о передаче лугининской лаборатории Московскому университету (одно время В. Ф. Лугинин предполагал передать её Киевскому политехникуму).

Несколько физических институтов запада и принципы, положенные в основу их устройства, описаны Н. А. в особой записке, поданной университету и оставшейся неопубликованной¹⁾.

Н. А. был избран постоянным членом Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии, а также членом Московского общества испытателей природы; президентом этого последнего он состоит с 1897 г. Он был в числе учредителей Московского педагогического общества и состоял председателем его физического отделения, а затем, по уходе проф. П. Г. Виногодова, — некоторое время и председателем Общества.

¹⁾ Умов подразумевает здесь «Доклад о сооружении физического института при Московском университете», напечатанный в посмертном издании сочинений Умова, том III, стр. 577—594, М., 1916. (Прим. ред.)

Педагогическое общество устроило съезд преподавателей естественных наук, на котором Н. А. со своим помощником, талантливым И. Ф. Усагиным, устроил выставку физических приборов в таком виде, что присутствующие имели возможность производить опыты и демонстрировать законы природы.

Н. А. сблизился с приват-доцентом университета по метеорологии Георгием Карповичем Рахмановым, который задумал издание научного журнала. Этот журнал под названием «Научное слово» стал выходить с 1903 г. под редакцией Н. А. Издание объединило кружок учёных, но в то время в обществе интерес направлялся по преимуществу к политическим вопросам и задачам, и в момент его наиболее сильного подъёма, в 1906 г., журнал должен был прекратить своё существование, принеся значительные убытки издателю, который под фирму «Издательство Научное Слово» перешёл к изданию отдельных весьма ценных и выдающихся монографий. Издания Г. К. Рахманова отличались и отличаются содержательностью, изяществом и дешевизной.

В 1902 г. к Н. А. по рекомендации проф. И. Х. Озерова обратился за советом Христофор Семенович Леденцов, весьма состоятельный человек, по поводу своей заветной идеи — учредить Общество, которое имело бы своей целью содействие научным открытиям и исследованиям в области естествознания, содействие изобретениям и усовершенствованиям в сфере техники и, наконец, содействие испытанию и проведению в жизнь научных и технических изобретений и усовершенствований. На осуществление подобного Общества Х. С. Леденцов желал пожертвовать своё крупное состояние, простиравшееся, как оказалось после его смерти в 1907 г., до двух миллионов рублей. Обсуждая вопрос, Н. А. и Х. С. Леденцов остановились на мысли объединить в предполагаемом Обществе труды представителей естествознания, техники и общественных кругов и поставить его под покровительство Московского университета и Московского технического учи-

лица. Был составлен черновой проект устава, после чего Н. А. направил Х. С. Леденцова к бывшему в то время директором Технического училища проф. Семену Андреевичу Фёдорову, принявшему живое участие в задуманном деле и его осуществлении. Общество открыло свои действия в 1909 г. Замедление в утверждении устава произошло от необычности существования Общества при двух учреждениях. Н. А. состоит товарищем председателя этого Общества, а с 1910 г.—и редактором его органа—«Временника». Общество оказало значительную поддержку продолжению научных работ профессоров, ушедших из Московского университета весной 1911 г., и их учеников.

В это же время Н. А. устранился от университетской жизни, прекратил свои лекции в университете и отказался от заведывания физическим кабинетом и лабораторией, сохранив за собою лишь заведывание термической лабораторией В. Ф. Лугинина как по своим связям с ним, так и не желая предоставить разрушению труды и жертвы её основателя.

С уходом из университета Н. А. отдался двум Обществам—Испытателей природы и Обществу содействия успехам опытных наук и их практических применений имени Х. С. Леденцова, к которым присоединилось в 1912 г. ещё третье—Общество изучения и распространения физических наук, избравшее Н. А. своим председателем. Кроме того, Н. А. состоит в числе учредителей и членом совета «Общества научного института» в Москве. В декабре 1912 г. Н. А. был председателем 2-го Менделеевского съезда в Петербурге.

Продолжая свои теоретические занятия, Н. А. перенес свои экспериментальные работы в любезно предоставленное ему проф. Петром Петровичем Петровым помещение в лаборатории красильных веществ при Московском техническом училище.

Н. А. пришлось слушать в университете только коротенький курс по электростатике у проф. А. Г. Столетова (практических занятий по физике в то время

не имелось), так что изучение теоретической физики велось им самостоятельно, вначале при указаниях проф. Н. В. Бугаева, по трудам Ламе, Клебша, Клаузиуса; это отразилось на первых его работах, касавшихся вопросов упругости и термодинамики.

Когда Н. А. стал преподавателем теоретической физики, ему пришлось составлять курсы, которые литографировались студентами. Преподавание опытной физики в Московском университете повлекло за собою составление курсов опытной физики, которые сначала литографировались, а затем печатались студентами (в ограниченном числе экземпляров); ему пришлось также переделывать и значительно дополнять первоначально написанные курсы по теоретической физике.

К работам Н. А. в области экспериментальной физики относятся опыты из области света, обратившие на себя внимание; ему принадлежит и введение в употребление металлических экранов. С 1905 г. в течение нескольких лет им разрабатывались экспериментально явления хроматической поляризации, в области которых им установлена связь между абсорбцией света телом и поляризацией света, рассеиваемого его поверхностью. Здесь им выработан метод спектрополярископического определения природы окрашенных тел и указана его приложимость к определению природы несамосветящихся небесных тел.

В своих популярных статьях он обращал внимание на борьбу с предрассудками, незамечаемыми людьми и связанными с представлением о неизменности природной обстановки, в которой живёт человечество. Проводя принцип эволюции, Н. А. развивает мысль, что естественные предложения природы становятся всё более и более недостаточными для жизни человечества, которое должно создавать среди старой новую природу, соответствующую его изменяющимся потребностям.



ИЗБРАННЫЕ
СОЧИНЕНИЯ



ЗАКОНЫ КОЛЕБАНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ ПОСТОЯННОЙ УПРУГОСТИ ¹⁾

Задачи о колебаниях поперечных и продольных в средах постоянной упругости решаются независимо одна от другой. Наглядность и успешность исследования зависят от приведения основных дифференциальных уравнений колебаний к виду, соответствующему условиям вопроса. Если мы будем относить положение точек пространства к тройной системе ортогональных поверхностей, из которых одна есть поверхность волны, то предвидится возможность самым разделением задач упростить основные уравнения и определить произвольные функции или произвольные постоянные, введённые интеграцией, с помощью данного состояния начальной волны.

Чтобы осуществить эти предположения, мы должны были начать с исследования общих свойств волн в средах постоянной упругости и поверхностей, к ним ортогональных. Мы приходим, между прочим, к двум теоремам:

Если выберем за параметр волны отрезок луча между начальным и последующим положением волны, то её дифференциальный параметр первого порядка есть величина постоянная и равная 1 во всём пространстве.

Дифференциальные параметры первого порядка по-

¹⁾ Впервые напечатано в Математическом сборнике, т. 5, 1870 г. (*Прим. ред.*)

верхностей, ортогональных к волне, пропорциональны её радиусам кривизны.

Другая часть исследования касается определения по данному виду волны поперечных колебаний, ею распространяемых. Вводя в основные дифференциальные уравнения колебаний избранные нами криволинейные координаты, мы получаем уравнения для поперечных колебаний, приравнивая нулю: во-первых, колебание, нормальное к касательной плоскости, и, во-вторых, члены, имеющие коэффициентом квадрат скорости продольных колебаний. Приведение найденных выражений к окончательному виду и их интеграция составляют содержание этого отдела.

Между прочим, мы приходим к таким заключениям:

Волновые поверхности могут быть разделены на три группы.

К первой относятся поверхности сферы и круглого цилиндра, допускающие прямолинейную поляризацию по той или другой линии кривизны.

Ко второй относятся поверхности, допускающие прямолинейную поляризацию по одной из линий кривизны. Так, поверхности вращения, за исключением указанных выше, допускают прямолинейную поляризацию в меридиональной плоскости, но не в перпендикулярной. Поверхности цилиндрические, за исключением круглого цилиндра, не допускают прямолинейной поляризации в плоскости, параллельной образующей, но только в перпендикулярной к ней.

К третьей относятся все остальные поверхности, не допускающие прямолинейной поляризации ни по одной из линий кривизны.

Поставленная нами задача решается для среды постоянной упругости и плотности не бесконечно малой. Распространение же найденных выводов на световые колебания при некоторых особых предположениях помещено в конце настоящей статьи.

Третья часть исследования занимается вопросом о продольных колебаниях. Здесь мы пришли к выводам, полученным Пуассоном иным путём.

Наше исследование имеет непосредственное приложение к явлениям звука и к явлениям как колебаний поперечных, так и продольных в средах неограниченных или в телах, ограниченных поверхностями, принадлежащими к одному и тому же семейству волн.

I. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО ВИДА ВОЛН

§ 1. Положение точек пространства, наполненного средою постоянной упругости, мы будем относить к тройной системе ортогональных поверхностей, из которых одна представляет самую поверхность волн.

Параметры трёх семейств ортогональных поверхностей будем означать буквами ρ , ρ_1 , ρ_2 , причём ρ мы будем постоянно считать параметром семейства поверхностей, к которому принадлежит волна.

Означим через H , H_1 , H_2 обратные величины дифференциальных параметров первого порядка поверхностей ρ , ρ_1 , ρ_2 . Означая, далее, через ds_i элемент нормали к поверхности ρ_i , мы имеем¹⁾:

$$ds_i = H_i d\rho_i. \quad (1)$$

Означая, далее, через r_i^i радиус кривизны поверхности ρ_i , соответствующий линии кривизны s_j , мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r'} &= -\frac{1}{HH_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho}, & \frac{1}{r''} &= -\frac{1}{HH_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho}, \\ \frac{1}{r_1'} &= -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1}, & \frac{1}{r_1} &= -\frac{1}{HH_1} \frac{\partial H}{\partial \rho_1}, \\ \frac{1}{r_2} &= -\frac{1}{H_2 H} \frac{\partial H}{\partial \rho_2}, & \frac{1}{r_2'} &= -\frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Кривизна $\frac{1}{\rho_i}$ дуги s_i , ортогональной к поверхности ρ_i , даётся формулой

$$\frac{1}{\rho_i^2} = \frac{1}{(r_i^i)^2} + \frac{1}{(r_j^i)^2}. \quad (3)$$

¹⁾ См. Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes, etc.

Наконец, условие ортогональности выражается следующими шестью уравнениями с частными производными:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 H}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial H}{\rho_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H}{\partial \rho_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1}, \\ \frac{\partial^2 H_1}{\partial \rho_2 \partial \rho} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho} + \frac{1}{H} \frac{\partial H_1}{\partial \rho} \frac{\partial H}{\partial \rho_2}, \\ \frac{\partial^2 H_2}{\partial \rho \partial \rho_1} &= \frac{1}{H} \frac{\partial H_2}{\partial \rho} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} \frac{\partial H}{\partial \rho}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{H} \frac{\partial H_1}{\partial \rho} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H}{\partial \rho_2} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{1}{H} \frac{\partial H_2}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H}{\partial \rho} + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} \frac{\partial H}{\partial \rho_1} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho_2} \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial H_1}{\partial \rho} \frac{\partial H_2}{\partial \rho} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

§ 2. Приложим приведённые выражения к случаю волны, распространяющейся в среде постоянной упругости. Её поступательное движение совершается с постоянной скоростью, следовательно, если представим себе два бесконечно близких положения волны, то отрезки нормалей ds , заключающиеся между ними, будут величинами, постоянными для всех точек волновой поверхности. Итак,

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} (ds) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho_2} (ds) = 0,$$

или, обращаясь к уравнению (1),

$$\frac{\partial H}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \rho_2} = 0. \quad (6)$$

Это — основные уравнения в нашем исследовании. С их

помощью уравнения (2) дадут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r'} &= -\frac{1}{H H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho}, & \frac{1}{r''} &= -\frac{1}{H H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho}, \\ \frac{1}{r_1''} &= -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1}, & \frac{1}{r_1} &= 0, \\ \frac{1}{r_2} &= 0, & \frac{1}{r'} &= -\frac{1}{H_2 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Кривизна $\frac{1}{\rho}$ дуги s будет по уравнениям (3) и (7):

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{(r_1')^2} + \frac{1}{(r_2')^2} = 0. \quad (8)$$

Этот результат известен: линия s , пересечение поверхностей ρ_1 и ρ_2 , есть прямая, нормальная к поверхностям ρ ; эта нормаль имеет здесь значение луча.

Отсюда вытекает естественный выбор параметра ρ . Он может представлять отрезок луча между некоторым начальным и настоящим положением волны.

При таком выборе $ds = d\rho$ и по уравнению (1) имеем $H = 1$.

Итак, мы имеем теорему:

Если принимаем за параметр волны отрезок луча между начальным и последующим положением волны, то её дифференциальный параметр первого порядка есть во всём пространстве величина постоянная и равная 1.

§ 3. Выражения (4) и (5) вследствие уравнений (6) преобразуются в следующие:

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial \rho_2 \partial \rho} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} \frac{\partial H_2}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial^2 H_2}{\partial \rho \partial \rho_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} \frac{\partial H_1}{\partial \rho}, \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \frac{1}{H} \frac{\partial H_1}{\partial \rho}}{\partial \rho} &= 0, & \frac{\partial \frac{1}{H} \frac{\partial H_2}{\partial \rho}}{\partial \rho} &= 0, \\ \frac{\partial \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2}}{\partial \rho_2} + \frac{\partial \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1}}{\partial \rho_1} + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_1}{\partial \rho} \frac{\partial H_2}{\partial \rho} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из двух первых уравнений (10) находим:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \rho} = HP, \quad \frac{\partial H_2}{\partial \rho} = HQ, \quad (11)$$

где P и Q означают функции, не зависящие от ρ . Подставляя эти выражения в формулы (7), находим: $H_1 = -Pr'$, $H_2 = -Qr''$, т. е. дифференциальные параметры первого порядка поверхностей, ортогональных к волне, пропорциональны радиусам кривизны волны.

Интегрируя выражения (11) и означая через P_1 и Q_1 две новые функции, не зависящие от ρ , получаем:

$$H_1 = P \int H d\rho + P_1; \quad H_2 = Q \int H d\rho + Q_1. \quad (12)$$

Подставим выражения (11) в уравнения (9), получим:

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial P}{\partial \rho_2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2}; \quad \frac{1}{P} \frac{\partial Q}{\partial \rho_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1}. \quad (13)$$

Подставляя в эти выражения величины H_1 и H_2 из уравнений (12), мы преобразуем их в следующие:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{\frac{\partial P_1}{\partial \rho_2}}{\frac{\partial P}{\partial \rho_2}}; \quad \frac{P_1}{P} = \frac{\frac{\partial Q_1}{\partial \rho_1}}{\frac{\partial Q}{\partial \rho_1}}. \quad (14)$$

Подставляя выражения (13) в последнее из уравнений (10), мы находим:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2} \frac{1}{Q} \frac{\partial P}{\partial \rho_2} + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{1}{P} \frac{\partial Q}{\partial \rho_1} + PQ = 0. \quad (15)$$

Итак, условия ортогональности рассматриваемой системы поверхностей заключаются в уравнениях (6), (12), (14) и (15).

§ 4. Мы переходим к исследованию некоторых частных видов дифференциальных параметров первого порядка поверхностей ρ , ρ_1 , ρ_2 .

а) Предположим, что поверхность ρ есть *поверхность вращения*. Принимая ось вращения за ось z , называя через r расстояние точки поверхности от оси, через ρ_2 — угол меридиональных плоскостей с постоянною

плоскостью, через ρ_1 — параметр поверхностей, пересекающих поверхности ρ и ρ_2 под прямым углом, мы имеем, полагая ρ постоянным:

$$r = f(\rho_1), \quad x = r \cos \rho_2, \quad y = r \sin \rho_2, \quad z = \varphi(\rho_1).$$

Замечая, что $(ds_1)^2 = (dr)^2 + (dz)^2 = [\varphi'(\rho_1) d\rho_1]^2$, мы находим по уравнению (1):

$$H_1 = \frac{\partial s_1}{\partial \rho_1} = \varphi'(\rho_1).$$

Точно так же имеем:

$$H_2 = \frac{\partial s_2}{\partial \rho_2} = \frac{r}{\rho_2} = r.$$

Следовательно, H_1 и H_2 в поверхностях вращения не зависят от параметра меридиональных плоскостей.

б) Рассмотрим *цилиндрические поверхности*. Возьмём ось z параллельно образующей. Координату z примем за параметр плоскостей, нормальных к оси z . Параметр плоскостей, параллельных оси z и нормальных к поверхности цилиндра, которую принимаем за поверхность ρ , означим через ρ_1 .

Имеем, полагая ρ постоянным:

$$x = f(\rho) \quad y = \varphi(\rho_1), \quad z = \rho_2,$$

откуда находим:

$$H_1 = \varphi'(\rho_1), \quad H_2 = 1.$$

В обоих случаях (а) и (б), как легко видеть, первое из уравнений (14) обращается в тождество, и уравнение (15) сводится к двум последним членам.

Как пример цилиндрической волны рассмотрим эписциклоидальный цилиндр.

Представим себе (рис. 1) в среде постоянной упругости два равных неограниченных круглых цилиндра A и B . Оба цилиндра образуют по линии MZ узкую щель, параллельную их осям и через которую вытекают колебания в пространство, находящееся перед цилиндрами. От этой щели побегут колебания, огибая до

которой точки L один из цилиндров и затем распространяясь по касательной к нему LQ . Таким образом, от MZ побежит цилиндрическая волна, сечение которой, перпендикулярное к образующей, представит кривая PQ . Эту последнюю мы можем себе представить происшедшей от движения конца нити MR , навёрнутой на ци-

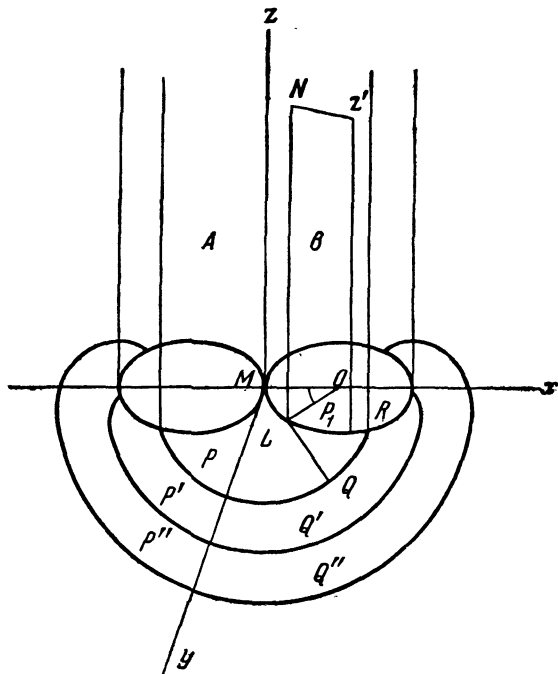


Рис. 1.

линдр B и затем развёртываемой при постоянном натяжении. Длина этой нити может быть принята за параметр ρ , так как все колебания, одновременно вышедшие из MZ , будут одновременно прибывать к различным поверхностям ρ . Для некоторого момента сечение волны будет $P'Q'$, для другого $P''Q''$ и т. д. Если примем радиус цилиндров равным 1, угол MOL — за параметр ρ_1 касательных плоскостей $NLQZ'$, нормаль-

ных к волне, то геометрические свойства волны представляются уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= 1 - \cos \rho_1 + (\rho - \rho_1) \sin \rho_1; \\ y &= \sin \rho_1 + (\rho - \rho_1) \cos \rho_1; \quad z = \rho_2, \end{aligned}$$

откуда

$$H = 1; \quad H_1 = \rho - \rho_1; \quad H_2 = 1.$$

с) Исследуем поверхность, для которой

$$\frac{P_1}{P} = \frac{Q_1}{Q}.$$

Означая это отношение через μ , мы находим из уравнений (14):

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\frac{\partial P_1}{\partial \rho_2}}{\frac{\partial P}{\partial \rho_2}}; \quad \frac{Q_1}{Q} = \frac{\frac{\partial Q_1}{\partial \rho_1}}{\frac{\partial Q}{\partial \rho_1}}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\frac{P_1}{P} = \varphi(\rho_1), \quad \frac{Q_1}{Q} = f(\rho_2),$$

откуда

$$\mu = \varphi(\rho_1) = f(\rho_2).$$

Это равенство возможно, если только μ постоянно.

Поэтому уравнения (12) примут вид:

$$H_1 = P \left[\int H d\rho + \mu \right]; \quad H_2 = Q \left[\int H d\rho + \mu \right].$$

И из уравнений (2) мы находим величину кривизны поверхности ρ :

$$\frac{1}{r'} = -\frac{1}{\int H d\rho + \mu}, \quad \frac{1}{r''} = -\frac{1}{\int H d\rho + \mu},$$

т. е. оба радиуса кривизны равны между собою в каждой точке поверхности ρ и не изменяются при переходе от одной точки к другой. Следовательно, в рассматриваемом случае поверхность ρ есть сфера. Сюда же относится случай

$$\frac{P_1}{P} = \text{const}, \quad \frac{Q_1}{Q} = \text{const},$$

если одно из уравнений (14) не обращается тождественно в нуль, что приводит к круглому цилиндру.

Если мы примем $H = 1$, получим:

$$H_1 = P(\rho + \mu); \quad H_2 = Q(\rho + \mu).$$

Вместо $\rho + \mu$ мы можем поставить просто ρ при условии, что при $\rho = 0$ будет $H_1 = 0$, $H_2 = 0$. Тогда $H_1 = P\rho$, $H_2 = Q\rho$.

Принимая ρ_2 за параметр меридиональных плоскостей, ρ_1 — за параметр конуса широты и ρ — за радиус сферы, мы получаем из выражений (11):

$$H = 1, \quad H_1 = \rho, \quad H_2 = \rho \cos \rho_1.$$

Следовательно,

$$P = 1, \quad Q = \cos \rho_1.$$

d) Исследуем поверхность волны ρ , когда одна из величин P_1 или Q_1 обращается в нуль. Примем $Q_1 = 0$.

Кривизны поверхности ρ определяются из уравнений (7), и мы находим:

$$\frac{1}{r'} = -\frac{P}{P \int H d\rho + P_1}; \quad \frac{1}{r''} = -\frac{1}{\int H d\rho},$$

откуда заключаем, что один радиус кривизны есть величина, постоянная для всех точек поверхности ρ , другой же — величина переменная. Следовательно, поверхность ρ имеет вид канала, образованного движением центра сферы постоянного радиуса r'' по некоторой кривой в пространстве.

Так как $Q_1 = 0$, то из уравнений (14) мы находим, что P_1 не должно зависеть от ρ_2 и Q не должно зависеть от ρ_1 . Поэтому кривизны поверхностей ρ_1 , ρ_2 будут по выражениям (7):

$$\frac{1}{r''_1} = 0, \quad \frac{1}{r_1} = 0, \quad \frac{1}{r_2} = 0, \quad \frac{1}{r'_2} = -\frac{1}{QH_1} \frac{\partial P}{\partial \rho_2}.$$

Отсюда заключаем, что поверхности ρ_1 представляют ряд плоскостей.

е) *Явления диффракции.* При своём движении волна может встречать препятствия, которые она должна огибать, или отверстия, через которые может проникнуть только часть волны. Как в том, так и в другом случае явления изменяются, ибо изменяется самый вид волны.

Предположим (рис. 2), что JJ' представляет поверхность волны в какой-нибудь момент времени.

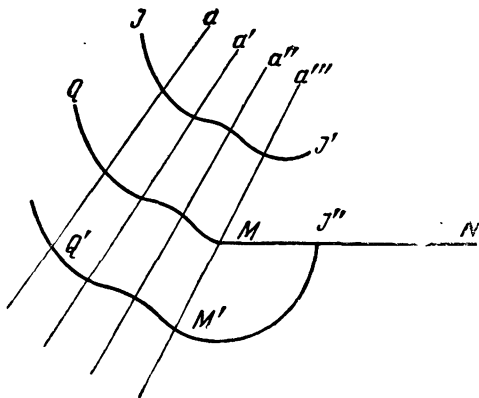


Рис. 2.

MN представляет препятствие. Линии a, a', a'', a''' представляют направление нормалей к волне. В некоторый момент волна принимает положение QM , затем $Q'M'J''$, ибо движение распространилось и в пространстве $M'MN$. Сечение поверхности $M'J''$ плоскостью, нормальною к ребру препятствия MN , есть дуга круга. Следовательно, эта поверхность принадлежит к разряду исследованных в (d). Излагаемая ниже теория поперечных колебаний даёт возможность по данному виду волны определить законы колебаний, происходящих на её поверхности; а следовательно, определяя дифференциальные параметры первого порядка ортогональной системы, включающей поверхность $Q'M'J''$, вставляя их в найденные выше дифференциальные уравнения с частными производными и интегрируя их, мы решим задачу.

Пусть JJ' (рис. 3) представляет снова начальное положение волны и MN — отверстие. Легко видеть, что одним из последующих положений волны будет $OO'O''O'''$, где OO' , $O''O'''$ суть поверхности, определённые в (d). Такой случай решается, как и предыдущий.

Метод изыскания законов диффракции, здесь предложенный, представляет к своему осуществлению многие трудности, заключающиеся преимущественно в разрыв-

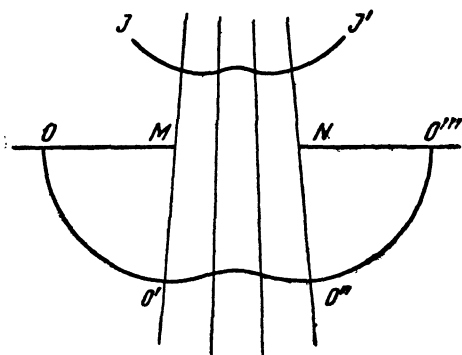


Рис. 3.

ности всех или некоторых дифференциальных параметров первого порядка ортогональной системы. В этой разрывности заключается основной характер явлений диффракции.

§ 5. Мы переходим к исследованию изотермических поверхностей. Предположим, что поверхность волны есть поверхность изотермическая и ρ — её термометрический

параметр. Означая через $\Delta_2 \rho_i = \frac{1}{HN_1N_2} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \frac{H_j H_j'}{H_i}$ дифференциальный параметр второго порядка функции ρ_i , имеем: $\Delta_2 \rho = 0$, так как ρ есть параметр термометрический. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_2 H_1}{H} \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{H_2 H_1}{H} = f(\rho_1, \rho_2).$$

Вставляя в это выражение величины H_2, H_1 из уравнений (12), находим:

$$\left(P \int H d\rho + P_1 \right) \left(Q \int H d\rho + Q_1 \right) = f(\rho_1, \rho_2) H.$$

Это выражение должно существовать для всяких ρ, ρ_1, ρ_2 . Мы можем удовлетворить ему при двух предположениях:

$$1) \int H d\rho = -gH^{\frac{1}{2}}; \quad 2) \int H d\rho = gH,$$

где g постоянное.

Рассмотрим первое предположение. Мы находим:

$$PQ = \frac{f(\rho_1, \rho_2)}{g^2}, \quad PQ_1 + P_1Q = 0, \quad P_1Q_1 = 0.$$

Предполагая, что P и Q не обращаются в нуль, мы находим из двух последних уравнений:

$$P_1 = 0, \quad Q_1 = 0.$$

Следовательно, рассматриваемая поверхность есть сфера. Величина H , выраженная термометрическим параметром, будет:

$$H = \frac{g^2}{(\rho + c)^2},$$

и также

$$H_1 = -\frac{g^2 P}{\rho + c}, \quad H_2 = -\frac{g^2 Q}{\rho + c}.$$

Если же мы примем $P = 0$, то должны будем принять или $P_1 = 0$, то-есть $H_1 = 0$, что невозможно, или $Q = 0$, но тогда равенство $P_1 Q_1 = 0$ даёт или $P_1 = 0$, или $Q_1 = 0$, то-есть опять или $H_1 = 0$ или $H_2 = 0$, что невозможно.

Рассмотрим второе предположение. Оно влечёт за собою

$$PQ=0, \quad PQ_1 + P_1Q = \frac{f(\rho_1, \rho_2)}{g}, \quad P_1Q_1=0.$$

Здесь возможны два случая:

$$P=0, \quad Q_1=0 \quad \text{или} \quad Q=0, \quad P_1=0.$$

Примем последнее. Из уравнений (12) имеем:

$$H_1 = P \int H \, d\rho, \quad H_2 = Q_1.$$

Но

$$H = e^{\frac{\rho+c}{g}}.$$

Следовательно,

$$H_1 = g P e^{\frac{\rho+c}{g}}; \quad H_2 = Q_1.$$

Так как $Q=0$, $P_1=0$, то из уравнений (14) находим:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho_2} = 0, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial \rho_1} = 0,$$

следовательно,

$$\frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} = 0.$$

Обращаясь к уравнениям (7), мы находим следующие выражения для кривизны поверхностей ρ , ρ_1 , ρ_2 :

$$\frac{1}{r'} = -\frac{1}{g e^{\frac{\rho+c}{g}}}, \quad \frac{1}{r''} = 0,$$

$$\frac{1}{r_1''} = 0, \quad \frac{1}{r_1} = 0,$$

$$\frac{1}{r_2} = 0, \quad \frac{1}{r_2'} = 0.$$

Отсюда ясно, что рассматриваемая поверхность есть не что иное, как круглый цилиндр.

Итак, из всех изотермических поверхностей только плоскость, сфера и круглый цилиндр могут быть поверхностями волны.

§ 6. Исследование поверхностей ρ , ρ_1 , ρ_2 , когда две из них, например ρ и ρ_1 , или все три изотермичны, представляя случай более частный, чем предыдущий, не требует более определения вида поверхностей, которые не могут быть иными, чем сфера и круглый цилиндр, но сводится к определению функции P и Q или P и Q_1 , удовлетворяющих новым условиям.

Мы рассмотрим только случай тройной изотермической системы ортогональных поверхностей, параметры которых ρ , ρ_1 , ρ_2 будут термометрическими параметрами. Здесь к условию

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_2 H_1}{H} \right) = 0$$

нам нужно прибавить

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H_2 H}{H_1} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_1 H}{H_2} \right) = 0.$$

Эти условия для сферы примут вид:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{Q}{P} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{P}{Q} \right) = 0.$$

Следовательно, отношение $\frac{Q}{P}$ есть величина постоянная, которую означим через $\frac{1}{p}$. Итак,

$$H_1 = -\frac{g^2 P}{\rho + c}, \quad H_2 = -\frac{g^2}{\rho + c} \cdot \frac{P}{p}.$$

Уравнение (15) будет здесь:

$$p^2 \frac{\partial^2 \ln P}{\partial \rho_2^2} + \frac{\partial^2 \ln P}{\partial \rho_1^2} + P^2 = 0.$$

Частные интегралы этого уравнения будут иметь вид

$$\text{или } \frac{Ae^\xi}{1 + Be^{2\xi}}, \quad \text{или } \frac{a}{\cos b\xi},$$

где ξ есть линейная функция относительно ρ_1 , ρ_2 .

Для полного определения вида функций P , ρ_1 , ρ_2 нам следовало бы заняться интеграцией нового ряда дифференциальных уравнений с частными производными,

выражающими зависимость криволинейных координат от прямолинейных. Но так как подобные вычисления были бы излишни в настоящем исследовании, то мы ограничимся приведением известных результатов.

Означая через r радиус сферы, через φ — широту и ψ — долготу, имеем:

$$\rho = \frac{l}{r}, \quad \rho_1 = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}, \quad \rho_2 = \psi,$$

$$H = \frac{l}{\rho_2}, \quad H_1 = H_2 = \frac{l \cos \varphi}{\rho_1}.$$

Для круглого цилиндра мы имели:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} = 0.$$

При новых условиях, вводимых свойствами тройной изотермической системы, мы получаем ещё:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial \rho_2} = 0.$$

Но

$$H_1 = gPe^{\frac{\rho+c}{\rho}}, \quad H_2 = Q_1,$$

следовательно,

$$P = \text{const}, \quad Q_1 = \text{const}.$$

II. ЗАКОНЫ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

§ 7. Дифференциальные законы колебаний в средах постоянной упругости имеют в криволинейных координатах следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \rho_2} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho_1} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{H_1 H_2}{H} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \frac{\delta}{\mu} H_1 H_2 \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} - \frac{\partial A}{\partial \rho_2} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{H_2 H}{H_1} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} - \frac{\delta}{\mu} H H_2 \frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial A}{\partial \rho_1} - \frac{\partial B}{\partial \rho} &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{H H_1}{H_2} \frac{\partial \theta}{\partial \rho_2} - \frac{\delta}{\mu} H H_1 \frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь R , R_1 , R_2 суть слагающие колебаний по нормальям к поверхностям ρ , ρ_1 , ρ_2 . Величина θ есть куби-

ческое расширение, λ и μ — постоянные коэффициенты, δ — плотность. Кроме того,

$$\theta = \frac{\partial R}{\partial \rho} + \frac{\partial R_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_2} - \frac{1}{q} \left[\frac{\partial q}{\partial \rho} \frac{R}{H} + \frac{\partial q}{\partial \rho_1} \frac{R_1}{H_1} + \frac{\partial q}{\partial \rho_2} \frac{R_2}{H_2} \right], \quad (2)$$

$$q = \frac{1}{HH_1H_2};$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (R_1H_1)}{\partial \rho_2} - \frac{\partial (R_2H_2)}{\partial \rho_1} &= \frac{H_1H_2}{H} A, \\ \frac{\partial (R_2H_2)}{\partial \rho} - \frac{\partial (RH)}{\partial \rho_2} &= \frac{H_2H}{H_1} B, \\ \frac{\partial (RH)}{\partial \rho_1} - \frac{\partial (R_1H_1)}{\partial \rho} &= \frac{HH_1}{H_2} \Gamma. \end{aligned} \right\} (3)$$

Мы начнём с приложения этих уравнений к колебаниям поперечным.

Так как поверхность ρ есть поверхность волны, то для определения законов поперечных колебаний остаётся положить равным нулю продольное колебание R и кубическое расширение θ , чтобы из выражений (1) исчезли члены, зависящие от скорости распространения продольных колебаний.

Означая скорость распространения поперечных колебаний через ω , мы получаем из выражений (1), (2) и (3) следующие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial \rho_2} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho_1} &= 0, & \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} - \frac{\partial A}{\partial \rho_2} &= -\frac{H_2H}{\omega^2} \frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial A}{\partial \rho_1} - \frac{\partial B}{\partial \rho} &= -\frac{HH_1}{\omega^2} \frac{\partial^2 R_2}{\partial t^2}. \end{aligned} \right\} (4)$$

$$0 = \frac{\partial \frac{R_1}{H_1}}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \frac{R_2}{H_2}}{\partial \rho_2} - \frac{1}{q} \left(\frac{\partial q}{\partial \rho_1} \frac{R_1}{H_1} + \frac{\partial q}{\partial \rho_2} \frac{R_2}{H_2} \right), \quad (5)$$

$$q = \frac{1}{HH_1H_2};$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (R_1H_1)}{\partial \rho_2} - \frac{\partial (R_2H_2)}{\partial \rho_1} &= \frac{H_1H_2}{H} A, & \frac{\partial (R_2H_2)}{\partial \rho} &= \frac{H_2H}{H_1} B, \\ -\frac{\partial (R_1H_1)}{\partial \rho} &= \frac{H_1H}{H_2} \Gamma. \end{aligned} \right\} (6)$$

Эти уравнения с частными производными представляют зависимость между видом волны и поперечных колебаний, происходящих на её поверхности.

§ 8. Интегралы предыдущих выражений могут быть даны в виде ряда:

$$R_1 = \sum R_1^\alpha, \quad R_2 = \sum R_2^\alpha, \quad (7)$$

в которых суммирование происходит по индексу α и

$$R_1^\alpha = u_1^\alpha e^{\omega \alpha t} + u_2^\alpha e^{-\omega \alpha t}, \quad R_2^\alpha = v^\alpha e^{\omega \alpha t} + v_2^\alpha e^{-\omega \alpha t} \quad (8)$$

и α может быть действительной или мнимой величиной. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 R_1^\alpha}{\partial t^2} = \omega^2 \alpha^2 R_1^\alpha; \quad \frac{\partial^2 R_2^\alpha}{\partial t^2} = \omega^2 \alpha^2 R_2^\alpha.$$

В этих выражениях R_1^α и R_2^α суть функции, удовлетворяющие уравнениям с частными производными (4), (5), (6).

Подставляя их в эти уравнения вместо R_1 , R_2 , приравнявая нулю коэффициенты при $e^{\omega \alpha t}$ и $e^{-\omega \alpha t}$ и обозначая амплитуды u_i^α , v_i^α вообще через u , v , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_1 u}{\partial \rho_2} - \frac{\partial H_2 v}{\partial \rho_1} &= \frac{H_1 H_2}{H} A'; & \frac{\partial H_2 v}{\partial \rho} &= \frac{H_2 H}{H_1} B'; \\ - \frac{\partial H_1 u}{\partial \rho} &= \frac{H H_1}{H_2} \Gamma'; \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B'}{\partial \rho_2} - \frac{\partial \Gamma'}{\partial \rho_1} &= 0; & \frac{\partial \Gamma'}{\partial \rho} - \frac{\partial A'}{\partial \rho_2} &= -H H_2 \alpha^2 u; \\ \frac{\partial A'}{\partial \rho_1} - \frac{\partial B'}{\partial \rho} &= -H H_1 \alpha^2 v; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u}{\partial \rho_1} + \frac{\partial v}{\partial \rho_2} - \frac{1}{q} \left[\frac{\partial q}{\partial \rho_1} \frac{u}{H_1} + \frac{\partial q}{\partial \rho_2} \frac{v}{H_2} \right]; \\ q &= \frac{1}{H H_1 H_2}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь A' , B' , Γ' суть функции A , B , Γ , в которые вместо R_1 , R_2 подставлены u , v .

§ 9. Дифференцируем уравнения (10) последовательно по ρ , ρ_1 , ρ_2 , замечая, что H не зависит от ρ_1 , ρ_2 , потому складывая их, находим:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} (H_2 u) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} (H_1 v) = 0. \quad (12)$$

Означая через ϕ произвольную функцию от ρ , ρ_1 , ρ_2 , мы находим:

$$H_2 u = -\frac{\partial \phi}{\partial \rho_2}, \quad H_1 v = \frac{\partial \phi}{\partial \rho_1} \quad (13)$$

или

$$u = -\frac{d\phi}{ds_2}, \quad v = \frac{d\phi}{ds_1},$$

где ds_1 , ds_2 суть элементы нормалей к поверхностям ρ_1 , ρ_2 . Следовательно, амплитуды поперечных колебаний представляются производными одной и той же функции по элементам линий кривизны, перпендикулярным к их направлению.

Легко видеть, что эти выражения обращают в тождество уравнение (11), в которое преобразуется уравнение (12), когда заменим $H_2 u$ через $H_2 H_1 \frac{u}{H_1}$, $H_1 v$ через $H_2 H_1 \frac{v}{H_2}$, так что остаются только уравнения (9) и (10). Из последних уравнений только два существенны, в чём легко убедиться, подставляя величины u и v из уравнения (13) и производя надлежащие дифференцирования.

Вследствие выражений (13) уравнения (9) и (10) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_1} \right) &= -\frac{H_1 H_2}{H} A', \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_1} \right) &= \frac{H_2 H}{H_1} B', \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_2} \right) = \frac{H H_1}{H_2} C'; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial B'}{\partial \rho_2} - \frac{\partial C'}{\partial \rho_1} &= 0, \quad \frac{\partial C'}{\partial \rho} - \frac{\partial A'}{\partial \rho_2} = \alpha^2 H \frac{\partial \phi}{\partial \rho_2}, \\ \frac{\partial A'}{\partial \rho_1} - \frac{\partial B'}{\partial \rho} &= -H^2 \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \rho_1}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

и общий вид интегралов будет:

$$R_1 = -\frac{\partial \pi}{\partial s_2}, \quad R_2 = \frac{\partial \pi}{\partial s_1}; \quad (16)$$

$$\pi = \sum_{\alpha} (\phi^{\alpha} e^{\omega \alpha t} + \phi_1^{\alpha} e^{-\omega \alpha t}).$$

§ 10. Мы будем рассматривать уравнения с частными производными (13) и (15) как две системы, интегралы которых должны быть изысканы.

Займёмся определением величин A' , B' , Γ' — интегралов уравнений (15). Так как только два из них существенны, то мы должны составить ещё третье уравнение с частными производными. Его получим, дифференцируя уравнения (14) последовательно по ρ , ρ_1 , ρ_2 и складывая их.

Находим:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_1 H_2}{H} A' \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H_2 H}{H_1} B' \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_1 H}{H_2} \Gamma' \right) = 0. \quad (17)$$

Интегралы уравнений (15) мы можем себе представить состоящими из двух частей. Одна A'' , B'' , Γ'' , предназначенная для удовлетворения этих уравнений, когда вторые части равны нулю, и другая A'_e , B'_e , Γ'_e , назначенная для удовлетворения полных уравнений (15).

Мы находим, означая через F' некоторую функцию от ρ , ρ_1 , ρ_2 :

$$A'' = \frac{\partial F'}{\partial \rho}, \quad B'' = \frac{\partial F'}{\partial \rho_1}, \quad \Gamma'' = \frac{\partial F'}{\partial \rho_2}. \quad (18)$$

Теперь для величин B'_e , Γ'_e , A'_e мы можем выбрать выражения наиболее простые. Примем:

$$B'_e = \frac{\delta \alpha^2}{\mu} \int H \frac{\partial \phi}{\partial \rho_1} d\rho; \quad \Gamma'_e = \frac{\delta \alpha^2}{\mu} \int H \frac{\partial \phi}{\partial \rho_2} d\rho; \quad A'_e = 0. \quad (19)$$

Функции A'' , B'' , Γ'' и независимо от них A'_e , B'_e , Γ'_e должны удовлетворять уравнению (10), откуда получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_1 H_2}{H} \frac{\partial F'}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H_2 H}{H_1} \frac{\partial F'}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_1 H}{H_2} \frac{\partial F'}{\partial \rho_2} \right) = 0. \quad (20)$$

И затем, полагая

$$H\phi = \frac{\partial \Omega}{\partial \rho}, \quad (21)$$

вследствие чего выражения (19) будут:

$$B'_e = \alpha^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1}, \quad \Gamma'_e = \alpha^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2}, \quad A'_e = 0, \quad (22)$$

находим уравнение с частными производными для функции Ω :

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H_2 H}{H_1} \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_1 H}{H_2} \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_2} \right) = 0. \quad (23)$$

Кроме найденных условий, которым должны подчиняться функции F' и Ω , мы имеем ещё другие, которые найдутся, вставляя в уравнение (14) величины A' , B' , Γ' .

Находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_1}{H_2 H} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho \partial \rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_2}{H_1 H} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho \partial \rho_1} \right) &= \\ &= - \frac{H_1 H_2}{H} \frac{\partial F'}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_2}{H_1 H} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho \partial \rho_1} \right) &= \frac{H_2 H}{H_1} \frac{\partial}{\partial \rho_2} (F' + \alpha^2 \Omega), \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_1}{H_2 H} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho \partial \rho_1} \right) &= \frac{H_1 H}{H_2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} (F' + \alpha^2 \Omega). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Если продифференцируем первое из этих уравнений с частными производными по ρ и подставим в него первые части двух последних уравнений (24), оно представит сумму уравнений с частными производными (20) и (23). Итак, из трёх уравнений (24) только два существенны.

Полагая $H = 1$, означая через Δ_2 дифференциальный параметр второго порядка от некоторой функции и через $\bar{\Delta}_2$ — разность этого параметра и его первого члена, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 &= \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(H_1 H_2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) \right] \frac{1}{H_1 H_2}, \\ \bar{\Delta}_2 &= \left[\frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) \right] \frac{1}{H_1 H_2}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

находим следующие уравнения с частными производными, интеграция которых содержит решение исследуемого вопроса:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho \partial \rho_2} \right) &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} (F' + \alpha^2 \Omega), \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho \partial \rho_2} \right) &= \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} (F' + \alpha^2 \Omega), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\Delta_2 F' = 0, \quad \bar{\Delta}_2 \Omega = 0, \quad \phi = \frac{\partial \Omega}{\partial \rho}. \quad (27)$$

Одно из уравнений (26) может быть заменено следующим, получаемым из них обоих:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho \partial \rho_1} \frac{\partial \ln \frac{H_1}{H_2}}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho \partial \rho_2} \frac{\partial \ln \frac{H_1}{H_2}}{\partial \rho} \right] = 0. \quad (28)$$

Общий интеграл уравнения $\bar{\Delta}_2 \Omega = 0$ может быть выражен помощью произвольных функций.

Означим через L_1 и L интегралы дифференциальных уравнений

$$H_2 \sqrt{-1} d\rho_2 - H_1 d\rho_1 = 0; \quad H_2 \sqrt{-1} d\rho_2 + H_1 d\rho_1 = 0 \quad (29)$$

и через Θ , Θ_1 — две произвольные функции; имеем:

$$\Omega = \Theta(\rho, L) + \Theta_1(\rho, L_1). \quad (30)$$

Умножая выражения (29) на интегрирующие множители, приравнявая их dL и dL_1 , находя производные от Ω по переменным ρ и ρ_1 , которые входят через L и L_1 , мы легко убедимся, что уравнение $\bar{\Delta}_2 \Omega = 0$ тождественно равно нулю. Следовательно, интегрируя уравнения $\Delta_2 F' = 0$ и подставляя найденный интеграл вместе с выражением (30) в уравнения (26), мы определим вид функций Θ и Θ_1 .

Частный случай. Приложим найденные формулы к сфере.

Принимая $H = 1$, $H_1 = \rho$, $H_2 = \rho \cos \rho_1$, находим:

$$L = \rho_2 \sqrt{-1} + \tau, \quad L_1 = \rho_2 \sqrt{-1} - \tau, \quad (31)$$

где $\tau = \int \frac{d\rho_1}{\cos \rho_1}$ есть термометрический параметр конусов широты. Следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial L_1}{\partial \rho} = 0. \quad (32)$$

Поэтому подстановка величины Ω в уравнения (26) даст нам, после лёгких преобразований и полагая $\Theta - \Theta_1 = V$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} - \alpha^2 V \right) &= \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial F}{\partial \rho_1}, \\ \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} - \alpha^2 V \right) &= \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial F}{\partial \rho_2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим случай $F = \text{const}$, что по первому из уравнений (24) требует, чтобы и $\bar{\Delta}_2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \right) = 0$.

Уравнения (33) удовлетворяются частным предположением

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} - \alpha^2 V = 0,$$

которое мы распространим отдельно на каждую из функций Θ и Θ_1 .

Означая через $f^{(\alpha)}$, $\psi^{(\alpha)}$, $f_1^{(\alpha)}$, $\psi_1^{(\alpha)}$ произвольные функции, где α есть индекс, по которому производится суммирование, находим интеграцией и обращая внимание на значение функций Θ и Θ_1 :

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= f^{(\alpha)}(L) e^{\alpha \rho} + \psi^{(\alpha)}(L_1) e^{-\alpha \rho}, \\ \Theta_1 &= f_1^{(\alpha)}(L) e^{\alpha \rho} + \psi_1^{(\alpha)}(L_1) e^{-\alpha \rho}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Отсюда

$$\Omega = [f^{(\alpha)}(L) + f_1^{(\alpha)}(L_1)] e^{\alpha \rho} + [\psi^{(\alpha)}(L) + \psi_1^{(\alpha)}(L_1)] e^{-\alpha \rho}, \quad (35)$$

и по уравнениям (13) величина амплитуд будет:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\sqrt{-1}}{\rho} \left[\frac{f^{(\alpha)}(L) + f_1^{(\alpha)}(L_1)}{\cos \rho_1} e^{\alpha\rho} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi^{(\alpha)}(L) + \psi_1^{(\alpha)}(L_1)}{\cos \rho_1} e^{-\alpha\rho} \right], \\ v &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{f^{(\alpha)}(L) - f_1^{(\alpha)}(L_1)}{\cos \rho_1} e^{\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\psi^{(\alpha)}(L) + \psi_1^{(\alpha)}(L_1)}{\cos \rho_1} e^{-\alpha} \right]. \end{aligned} \right\} (36)$$

Итак, в рассматриваемом случае амплитуды колебаний обратно пропорциональны расстоянию от центра сферической волны. Следовательно, живая сила или напряжение колебаний обратно пропорционально квадрату того же расстояния. Величина ρ , входящая в показатель, указывает на зависимость фазы от ρ и при α мнимом войдёт под знаки синуса и косинуса. Коэффициенты при показательной функции указывают на зависимость амплитуды от наклонности луча к двум основным плоскостям.

Положение этих основных плоскостей может определяться какими-нибудь условиями или же остаётся неопределённым.

В последнем случае, представляя себе, что эти плоскости, оставаясь друг к другу нормальными, пробегают в весьма короткое время все азимуты, получим колебания, которые будут совершаться в каждой точке по всем направлениям; мы назовём их естественными в отличие от колебаний поляризованных, имеющих место при определённом положении основных плоскостей.

Действительные и мнимые части выражений (36), удовлетворяя независимо основным дифференциальным уравнениям колебаний, должны быть отделены друг от друга. Ниже мы дадим для сферы выражения более общие, но окончательное их исследование будет предложено во второй статье.

§ 11. Подставляя величины A' , B' , Γ' из уравнений (14) в уравнения (15), мы находим после приведений и сокращений:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho_1} \frac{\partial \ln \frac{H}{H_1}}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho_2} \frac{\partial \ln \frac{H_1}{H_2}}{\partial \rho} \right) = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \frac{1}{H} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial \rho_2} + \frac{\partial \phi}{\partial \rho_2} \frac{\partial \ln \frac{H_1}{H_2}}{\partial \rho} \right] \right\} + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left\{ \frac{H}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_1 \partial \phi}{H_2 \partial \rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H_2 \partial \phi}{H_1 \partial \rho_1} \right) \right] - \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. - \alpha^2 \phi H \right\} = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{H} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial \rho_1} + \frac{\partial \phi}{\partial \rho_1} \frac{\partial \ln \frac{H_2}{H_1}}{\partial \rho} \right) \right] + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left\{ \frac{H}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_1 \partial \phi}{H_2 \partial \rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{H_2 \partial \phi}{H_1 \partial \rho_1} \right) - \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \alpha^2 H \phi \right] \right\} = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Если интеграл этих уравнений будет представлен рядом

$$\phi = \sum_i z^i \varphi^i,$$

где z^i есть функция индекса i от ρ и φ^i есть функция индекса i от ρ_1, ρ_2 , причём каждый член ряда отдельно удовлетворяет уравнениям (37), то первое из них распадается на три уравнения, вообще говоря, не тождественных.

Действительно, замечая, что

$$\frac{\partial \ln \frac{H_1}{H_2}}{\partial \rho} = \frac{P}{H_1} - \frac{Q}{H_2}, \quad (38)$$

означая через Θ величину $\int H d\rho$, через p и q — отношения $\frac{P_1}{P}, \frac{Q_1}{Q}$, мы преобразуем первое из уравнений (37) в следующее:

$$\begin{aligned}
 2 \left[\frac{1}{\Theta+p} - \frac{1}{\Theta+q} \right] \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left[\frac{1}{\Theta+p} - \frac{1}{\Theta+q} \right] \frac{\partial \varphi^i}{\partial \rho} + \\
 + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left[\frac{1}{\Theta+p} - \frac{1}{\Theta+q} \right] \frac{\partial \varphi^i}{\partial \rho_2} = 0. \quad (39)
 \end{aligned}$$

Производя указанные дифференцирования, размещая члены по нисходящим степеням Θ и замечая, что коэффициенты при них не зависят от ρ , заключаем, что каждый из них отдельно обращается в нуль, откуда и получаем следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} 2(p-q) \frac{\partial^2 \rho^i}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + \frac{\partial \rho^i}{\partial \rho_2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} (p-q) + \frac{\partial \rho^i}{\partial \rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_2} (p-q) &= 0, \\ (p-q)(p+q) \frac{\partial^2 \rho^i}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + \frac{\partial \rho^i}{\partial \rho_2} \left[q^2 \frac{\partial p}{\partial \rho_1} + p^2 \frac{\partial q}{\partial \rho_1} \right] + \\ &+ \frac{\partial \rho^i}{\partial \rho_1} \left[q \frac{\partial p}{\partial \rho_2} - p \frac{\partial q}{\partial \rho_2} \right] = 0, \\ 2pq(p-q) \frac{\partial^2 \rho^i}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} + \frac{\partial \rho^i}{\partial \rho_1} \left[q^2 \frac{\partial p}{\partial \rho_1} - p^2 \frac{\partial q}{\partial \rho_1} \right] + \\ &+ \frac{\partial \rho^i}{\partial \rho_2} \left[q \frac{\partial p}{\partial \rho_1} - p \frac{\partial q}{\partial \rho_1} \right] = 0. \end{aligned} \right\} (37')$$

Частный случай. Исследуем условия, при которых предыдущие выражения обращаются в тождество.

Означая через δF частную производную от F по одной из переменных ρ_1, ρ_2 , мы находим из предыдущих уравнений:

$$\delta(p-q) = 2 \frac{q \delta p - p \delta q}{p+q} = q^2 \delta p - p^2 \delta q.$$

Это тройное равенство заключает два различных:

$$(p-q) \delta(p+q) = 0, \quad (p-q) \delta(pq) = 0.$$

Эти последние возможны при двух условиях для p и q :

$$\text{или } p = q, \quad \text{или } p = \text{const.}, \quad q = \text{const.} \quad (40)$$

Как то, так и другое приводят нас к сфере, если ни одно из уравнений (14) не обращается в тождество. Но при последнем из условий (40) можно избежать равенства $p = q$, а следовательно, случая сферы, только когда оба уравнения (14) обращаются тождественно в нуль, и тогда уравнения (15) показывают, что поверхность волны будет в этом случае круглым цилиндром.

Обынтегрируем уравнения (37) для сферы. Первое из них тождественно обращается в нуль, и так как $\frac{\partial \ln \frac{H}{H_1}}{\partial \rho} = 0$, то последние два уравнения по интеграции дают, полагая $H = 1$, заменяя H_1, H_2 их величинами и α через $\alpha \sqrt{-1}$:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2 P Q} \left[\frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{P}{Q} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{Q}{P} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_1} \right) \right] + \alpha^2 \phi = 0. \quad (41)$$

Означая через p число целое, мы удовлетворим этому выражению, полагая

$$\phi = \sum z^{(p)} \varphi^{(p)},$$

где суммирование производится по индексу p и $\varphi^{(p)}$, $z^{(p)}$ суть функции — первая одного ρ , вторая одних ρ_1, ρ_2 , удовлетворяющие дифференциальным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 z^{(p)}}{\partial \rho^2} + z^{(p)} \left(\alpha^2 \frac{p(p+1)}{\rho^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{P}{Q} \frac{\partial z^{(p)}}{\partial \rho_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{Q}{P} \frac{\partial z^{(p)}}{\partial \rho_1} \right) + p(p+1) P Q \varphi^{(p)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Полагая в первом из этих уравнений $z^{(p)} = \rho \cdot f^{(p)}$, где $f^{(p)}$ есть функция одного ρ , мы преобразуем его в следующее:

$$\frac{\partial^2 f^{(p)}}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f^{(p)}}{\partial \rho} + f^{(p)} \left(\alpha^2 - \frac{p(p+1)}{\rho^2} \right) = 0. \quad (43)$$

Интеграл этого уравнения известен. Полагая, именно,

$$J_{(p)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\alpha \rho \sin x) \cos^{2p+1} x \, dx, \quad M = \int \frac{d\rho}{\rho^{2p+2} J_{(p)}^2},$$

имеем, означая через C и B две произвольные постоянные:

$$f = (C + BM) \rho^p J_{(p)}; \quad z^{(p)} = \rho^{p+1} J_{(p)} (C + BM). \quad (44)$$

В § 4 было указано, что для сферы при известном выборе координат

$$P = 1, \quad Q = \cos \rho_1.$$

Подставляя эти выражения во второе из уравнений (42) и означая $\sin \rho_1$ через σ , находим:

$$\frac{\partial(1-\sigma^2) \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial \sigma}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varphi^{(p)}}{1-\sigma^2} + p(p+1)PQ\varphi^{(p)} = 0. \quad (45)$$

В случае полной сферы функция $\varphi^{(p)}$ должна оставаться конечной для всех значений переменных ρ_1, ρ_2 ; она не должна изменяться, когда ρ_2 возрастает на одну или несколько окружностей; переменная ρ_2 должна исчезать при $\rho_1 = \pm \frac{\pi}{2}$. Функция $\varphi^{(p)}$, удовлетворяющая всем этим условиям, известна и имеет вид:

$$\varphi = \sum_0^p P_p^{(i)} \{a_{-i} \cos(p-i)\rho_2 + b_{p-i} \sin(p-i)\rho_2\}, \quad (46)$$

где

$$P_p^{(i)} = (1-\sigma^2)^{\frac{p-i}{2}} \left[\sigma^i - \frac{i(i-1)}{2(2p-1)} \sigma^{i-2} + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2p-1)(2p-3)} \sigma^{i-4} - \dots \right]. \quad (47)$$

Зная $\varphi^{(p)}$ и $z^{(p)}$, мы знаем функцию ϕ , из которой дифференцированием получаем амплитуды u и v .

§ 12. *Интеграция в случае колебаний по одной из линий кривизны.* Существуют многие волновые поверхности, допускающие колебания по одной из линий кривизны, причём на всей волновой поверхности колебания по другой линии кривизны не существуют. Такие колебания мы будем называть прямолинейно поляризованными по одной из линий кривизны, причём плоскость поляризации мы считаем перпендикулярною к плоскости колебаний.

Чтобы отыскать условия, которые должны быть выполнены, нам остаётся положить или R_1 или R_2

равными нулю. Мы примем последнее. Следовательно, в уравнениях (9) и (10) нам нужно положить $v=0$, вследствие чего они преобразуются в следующие:

$$\frac{\partial H_1 u}{\partial \rho_2} = \frac{H_1 H_2}{H} A', \quad 0 = B', \quad -\frac{\partial H_1 u}{\partial \rho} = \frac{H H_1}{H_2} \Gamma'; \quad (48)$$

$$\frac{\partial \Gamma'}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma'}{\partial \rho} - \frac{\partial A'}{\partial \rho_2} = -H H_2 \alpha^2 u, \quad \frac{\partial A'}{\partial \rho_1} = 0; \quad (49)$$

$$0 = \frac{\partial \frac{u}{H_1}}{\partial \rho_1} - \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial \rho_1} \frac{u}{H_1}, \quad q = \frac{1}{H H_1 H_2}. \quad (50)$$

Полагая в этих уравнениях $H=1$ и дифференцируя уравнения (49) — первое по ρ , второе по ρ_1 , третье по ρ_2 , находим:

$$\frac{\partial H_2 u}{\partial \rho_1} = 0.$$

Означая через ϕ функцию ρ_2 и ρ , имеем:

$$u = \frac{1}{H_2} \phi. \quad (51)$$

Подставляя эту величину в уравнение (50), находим, что оно обращается в тождество.

Подставляя величину u в уравнения (48), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{H_1}{H_2} \phi}{\partial \rho_2} = H_1 H_2 A', \quad \text{или} \quad \left[\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial \phi}{\partial \rho_2} + \phi \frac{\partial \frac{H_1}{H_2}}{\partial \rho_2} \right] \frac{1}{H_1 H_2} = A', \\ -\frac{\partial \frac{H_1}{H_2} \phi}{\partial \rho} = \frac{H_1}{H_2} \Gamma', \quad \text{или} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \phi \frac{\partial \ln \frac{H_1}{H_2}}{\partial \rho} = -\Gamma'. \end{aligned} \quad (52)$$

Дифференцируя последнее из этих уравнений по ρ_1 и обращая внимание на первое из уравнений (49), имеем:

$$\frac{\partial^2 \ln \frac{H_1}{H_2}}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0, \quad (53)$$

Вот условие, которому должна удовлетворять поверхность волны, чтобы колебание по нормали к поверхности ρ_1 могло не существовать.

Раскроем это условие. Мы имеем:

$$\frac{\partial \ln \frac{H_1}{H_2}}{\partial \rho} = \frac{PQ_1 - QP_1}{H_1 H_2},$$

или, означая

$$PQ_1 - QP_1 = \psi, \quad (54)$$

имеем:

$$\frac{\partial^2 \ln \frac{H_1}{H_2}}{\partial \rho \partial \rho_1} = \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{\psi}{H_1 H_2} \right) = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial \psi}{\partial \rho_1} - \psi \frac{H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} + H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \rho_1}}{H_1^2 H_2^2} = 0.$$

Или, подставляя вместо H_1 и H_2 их величины,

$$\begin{aligned} & [PQ\rho^2 + (P_1Q + PQ_1)\rho + P_1Q_1] \frac{\partial \psi}{\partial \rho_1} - \\ & - \psi \left[\left(P \frac{\partial Q}{\partial \rho_1} + Q \frac{\partial P}{\partial \rho_1} \right) \rho^2 + \right. \\ & \left. + \left(P_1 \frac{\partial Q}{\partial \rho_1} + Q \frac{\partial P_1}{\partial \rho_1} + P \frac{\partial Q_1}{\partial \rho_1} + Q \frac{\partial P}{\partial \rho_1} \right) \rho + P_1 \frac{\partial Q_1}{\partial \rho_1} + Q_1 \frac{\partial P_1}{\partial \rho_1} \right] = 0. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при различных степенях ρ , находим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial \rho_1} PQ - \psi \frac{\partial PQ}{\partial \rho_1} = 0, \\ & (P_1Q + PQ_1) \frac{\partial \rho}{\partial \rho_1} - \psi \frac{\partial (P_1Q + PQ_1)}{\partial \rho_1} = 0, \\ & P_1Q_1 \frac{\partial \rho}{\partial \rho_1} - \psi \frac{\partial P_1Q_1}{\partial \rho_1} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\partial \rho}{\partial \rho_1} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \rho_1} = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \rho_1} = 0. \quad (55)$$

Означая через λ , μ две функции, зависящие от одного ρ_2 , мы удовлетворим предыдущим уравнениям, полагая

$$P_1 = P\lambda, \quad Q_1 = Q\mu. \quad (56)$$

Но мы видели в § 3, что

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{\frac{\partial P_1}{\partial \rho_2}}{\frac{\partial P}{\partial \rho_2}}; \quad \frac{P_1}{P} = \frac{\frac{\partial Q_1}{\partial \rho_1}}{\frac{\partial Q}{\partial \rho_1}}. \quad (57)$$

Подставляя в эти выражения величины P_1 и Q_1 из уравнений (56), мы находим:

$$\mu = \frac{\frac{\partial P_1}{\partial \rho_2}}{\frac{\partial P}{\partial \rho_2}}; \quad \frac{P_1}{P} = \mu,$$

откуда

$$\frac{P_1}{P} = \frac{Q_1}{Q}. \quad (58)$$

А это свойство, как было доказано выше (§ 4, с), принадлежит одной сфере, если только одно из уравнений (57) не обращается в тождество, например первое, что возможно, когда

$$\frac{\partial P}{\partial \rho_2} = 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial \rho_2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial H_1}{\partial \rho_2} = 0.$$

Но при настоящих условиях равенство $\frac{P_1}{P} = \mu = \frac{Q_1}{Q}$ тем не менее остается, и так как P_1 и P , а следовательно, и $\frac{P_1}{P}$ не зависят от ρ_2 , то $\mu = \text{const.}$, и мы снова приходим к сфере. Чтобы избежать этого частного случая, мы должны предположить, что второе из уравнений (57) обращается в тождество, что возможно, когда

$$\frac{\partial Q}{\partial \rho_1} = 0,$$

ибо второе из уравнений (56) даёт:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \rho_1} = \frac{\partial Q}{\partial \rho_1} \mu; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial \rho_1} = 0.$$

Итак,

$$\frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} = 0.$$

Первое из уравнения (57) даёт нам:

$$\mu = \frac{1}{\frac{\partial \ln P}{\partial \rho_2}} \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_2} + \lambda.$$

Дифференцируя это выражение по ρ_1 , получаем:

$$\frac{\partial^2 \ln P}{\partial \rho_2 \partial \rho_1} = 0, \quad (59)$$

откуда

$$P = f(\rho_2) \varphi(\rho_1). \quad (60)$$

Следовательно, для этих поверхностей мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= f(\rho_2) \varphi[(\rho_1) \rho + \lambda(\rho_2)], \\ H_2 &= \Theta(\rho_2) [\rho + \mu(\rho_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Легко убедиться, что эти выражения обращают в тождество последнее из уравнений (49).

Обращаясь к уравнениям (7), мы находим следующие величины для кривизны ортогональных поверхностей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} &= -\frac{1}{\rho + \lambda(\rho_2)}, & \frac{1}{r''} &= -\frac{1}{\rho + \mu(\rho_2)}, \\ \frac{1}{r_1'} &= 0, & \frac{1}{r_1''} &= 0, \\ \frac{1}{r_2'} &= 0, & \frac{1}{r_2''} &= \frac{f'(\rho_2) [\rho + \lambda(\rho_2)] + f(\rho_2) \lambda'(\rho_2)}{f(\rho_2) [\rho + \lambda(\rho_2)]}. \end{aligned} \quad (62)$$

Следовательно, поверхность с параметром ρ_1 есть плоскость. Ни один из радиусов кривизны других поверхностей не изменяется с переменной ρ_1 . Для всех точек пересечения поверхностей ρ и ρ_2 кривизна этих поверхностей не изменяется.

Итак, поперечные колебания по одной линии кривизны могут совершаться только на поверхности волны, характеризуемой выражениями (61), и притом эти колебания перпендикулярны к плоскостям, параметр которых есть ρ_1 , т. е. поляризованы в этих плоскостях.

К рассматриваемым поверхностям относятся поверхности вращения и цилиндры. Для них

$$\frac{\partial H_1}{\partial \rho_1} = 0; \quad \frac{\partial H_2}{\partial \rho_1} = 0. \quad (63)$$

Следовательно, для цилиндров, за исключением круглого, колебания могут совершаться только параллельно образующей; для поверхностей вращения, за исключением сферы и круглого цилиндра, — только перпендикулярно меридиональным плоскостям.

Чтобы колебания могли совершаться и по другой линии кривизны, необходимо, чтобы одновременно с условиями (63) существовали ещё условия, которые, как легко убедиться, выполняются только сферой или круглым цилиндром.

Отсюда заключаем, что на поверхностях вращения и цилиндрах колебания могут совершаться только по одной линии кривизны, положение которой нами уже указано.

То же самое мы скажем и о поверхностях (61), так как, чтобы колебание могло происходить по другой линии кривизны, мы дошли бы до заключения, что λ и μ должны быть функциями ρ_1 , но они должны быть и функциями ρ_2 , следовательно, $\lambda = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$, и мы впадаем в случай сферы или круглого цилиндра.

Теперь остаётся исследовать самый вид поперечных колебаний.

Подставляя величины A' и B' во второе из уравнений (49), которое одно осталось неудовлетворённым находим, полагая $H = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_1}{H_2} \phi \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left[\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \phi \right) \right] - \alpha^2 \phi = 0. \quad (64)$$

Подставляя в это выражение величины H_1 , H_2 (61), легко видеть, что оно не будет содержать ρ_1 .

Полагая в этом уравнении

$$\frac{H_1}{H_2} \phi = z, \quad (65)$$

преобразуем его в следующее:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_2 \partial z}{H_1 \partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{\partial z}{H_1 H_2} \right) - \alpha^2 \frac{H_2}{H_1} z = 0. \quad (66)$$

Итак, решение вопроса зависит от успешности интеграции этого уравнения с частными производными.

Предыдущее исследование даёт нам возможность разделить все волновые поверхности на три группы:

а) Поверхность волны и соответствующая ей ортогональная система не удовлетворяют условиям (61).

Эти поверхности не допускают прямолинейной поляризации ни по одной из линий кривизны.

б) Изотермические волновые поверхности.

Эти поверхности не допускают прямолинейную поляризацию, безразлично, по той или другой линии кривизны.

в) Поверхности, удовлетворяющие условиям (61), за исключением изотермических.

Эти поверхности допускают прямолинейную поляризацию в плоскостях, принадлежащих семейству ортогональных поверхностей. Прямолинейная поляризация в плоскостях перпендикулярных невозможна.

III. КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНЫЕ

§ 13. Обращаясь к основным дифференциальным уравнениям колебаний в § 7, мы заметим, что когда умножим их на $\frac{\mu}{\delta} = \omega^2$, они будут содержать члены, из которых одни имеют коэффициентом квадрат скорости и поперечных колебаний, другие — квадрат скорости $\Omega = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\delta}}$ продольных колебаний.

Первые члены в случае колебаний продольных должны исчезнуть из уравнений, и мы получаем первую группу:

$$\frac{\partial B}{\partial \rho_2} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho_1} = 0; \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} - \frac{\partial A}{\partial \rho_2} = 0; \quad \frac{\partial A}{\partial \rho_1} - \frac{\partial B}{\partial \rho} = 0. \quad (1)$$

Так как поверхность ρ по нашему выбору есть поверхность волны, то в уравнениях § 7 мы должны удержать одно колебание R и приравнять нулю колебания R_1 и R_2 , совершающиеся в плоскости, касательной к волне. Вследствие этого находим, полагая $H = 1$:

$$\Omega^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_1} = 0; \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_2} = 0. \quad (2)$$

$$A = 0, \quad B = -\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial R}{\partial \rho_2}, \quad \Gamma = \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial R}{\partial \rho_1}. \quad (3)$$

$$\Theta = \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial}{\partial \rho} (R H_1 H_2). \quad (4)$$

Так как $A = 0$, то уравнения (1) примут вид:

$$\frac{\partial B}{\partial \rho_2} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial \rho} = 0. \quad (5)$$

Умножая первое из уравнений (2) на $H_1 H_2$, дифференцируя по ρ и обращая внимание на уравнение (4), находим:

$$\Omega^2 \frac{\partial}{\partial \rho} (H_1 H_2) \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} - H_1 H_2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

Раскрывая его, находим:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho^2} + \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} \frac{\partial (\ln H_1 H_2)}{\partial \rho} - \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Но по уравнениям (2) Θ не зависит ни от ρ_1 , ни от ρ_2 . Следовательно, означая через δF частную производную от функции F по одной из переменных ρ_1, ρ_2 , мы получаем из уравнения (7):

$$\delta \left[\frac{\partial (\ln H_1 H_2)}{\partial \rho} \right] = 0. \quad (8)$$

Подставляя в это выражение величины H_1, H_2 , найденные в § 3, приравнявая нулю коэффициенты при различных степенях ρ , мы находим следующие условия, которым должна удовлетворять волновая

поверхность, распространяющая продольные колебания:

$$\frac{Q}{Q_1^2} \delta \left(\frac{P}{P_1} \right) + \frac{P}{P_1^2} \delta \left(\frac{Q}{Q_1} \right) = 0;$$

$$\frac{Q}{Q_1} \delta \left(\frac{P}{P_1} \right) + \frac{P}{P_1} \delta \left(\frac{Q}{Q_1} \right) = 0; \quad \delta \left(\frac{P}{P_1} \right) + \delta \left(\frac{Q}{Q_1} \right) = 0.$$

Последние два уравнения дают:

$$\frac{P}{P_1} \cdot \frac{Q}{Q_1} = a, \quad \frac{P}{P_1} + \frac{Q}{Q_1} = b,$$

где a и b — величины постоянные; отсюда

$$\frac{P}{P_1} = \text{const.}, \quad \frac{Q}{Q_1} = \text{const.}$$

Но мы знаем, что подобные соотношения имеют место только для сферы, круглого цилиндра и плоскости. Отсюда заключаем, что

одни изотермические волновые поверхности могут распространять колебания продольные.

Итак, если поверхность сотрясения или начальная волна не принадлежат к поверхностям изотермических волн, то вблизи их колебания происходят смешанные; но на значительных расстояниях волна приближается к виду одной из изотермических волн, и в явлении обнаруживаются колебания продольные. Это заключение было выведено иным путём Пуассоном.

Нам остаётся обинтегрировать приведенные дифференциальные уравнения для сферы.

Для сферы в координатах, уже нами употреблённых, мы имеем:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} - \frac{1}{Q^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_2} = 0; \quad (9)$$

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{\cos \rho_1} \frac{\partial R}{\partial \rho_2}, \quad \Gamma = \cos \rho_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1}, \quad \Theta = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (R \rho^2). \quad (10)$$

Подставляя величины B и Γ в уравнение (5), получаем:

$$\frac{1}{\cos \rho_1} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho_2^2} + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\cos \rho_1 \frac{\partial R}{\partial \rho_1} \right) = 0; \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \rho \partial \rho_1} = 0; \quad \frac{\partial^2 R}{\partial \rho \partial \rho_2} = 0. \quad (11)$$

Мы удовлетворим первому из уравнений (9), полагая

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \alpha^2 \Omega^2 \Theta = 0, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} + \alpha^2 \Theta = 0. \quad (12)$$

Эти выражения удовлетворятся, если положим

$$\Theta = \sum \frac{A^{(\alpha)}}{\rho} \cos \alpha (\omega t - \rho + b^{(\alpha)}), \quad (13)$$

где суммирование совершается по индексу α .

Подставляя величину Θ в последнее из уравнений (10), интегрируя и обращая внимание на уравнение (11), находим:

$$R = - \sum \frac{A^{(\alpha)}}{\alpha \rho} \sin \alpha (\omega t - \rho + b^{(\alpha)}) + \\ + \sum \frac{A^{(\alpha)}}{\alpha^2 \rho^2} \cos \alpha (\omega t - \rho + b^{(\alpha)}) + \varphi(\rho_1 \rho_2). \quad (14)$$

Последний член этого выражения должен равняться нулю, ибо при $\rho = \infty$ будет $R = 0$. Второй член второй части выражения R отпадет для ρ различных, и квадрат амплитуды, т. е. напряжение звука, изменится обратно пропорционально квадрату расстояния.

Между тем квадрат амплитуды кубического расширения следует тому же закону для всякого ρ . Все эти выводы были получены Пуассоном иным путём.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРЕДЫДУЩИХ ВЫВОДОВ

§ 14. Найденные нами выводы при некоторых условиях могут быть приложены к случаю, когда две изотропные среды различной плотности и упругости проникают друг в друга.

Первое необходимое условие заключается в том, что одна среда должна обладать весьма малой плотностью и чрезвычайно большой упругостью сравнительно с другою. При такой постановке задачи легко доказать¹⁾, что силы упругости среды более плотной,

¹⁾ Theorie nouvelle des ondes lumineuses, par M. Boussinesq. Journal de Liouville, 1868.

развиваемые колебаниями весьма малой амплитуды среды менее плотной, слишком ничтожны, чтобы оказывать заметное действие.

Второе условие заключается в том, что взаимодействие молекул одной среды на молекулы другой преимущественно заключается в трении смежных молекул, различающихся своими скоростями. Действие этого трения настолько превосходит действие остальных взаимных сил между молекулами одной и другой среды, что последнее может быть опущено. Если означим через u_1, v_1, w_1 перемещения молекул более плотной среды по осям прямоугольных координат x, y, z , то слагающие по осям силы трения, как доказывает Буссинеск, будут $-\rho_1\omega \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, -\rho_1\omega \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, -\rho_1\omega \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}$, где ρ_1 есть плотность среды более плотной и ω — элемент объёма.

Буссинеск называет изотропной среду, для которой уравнения движения не изменяются от вращения осей прямоугольных координат каким бы то ни было образом около их начала.

Симметричною названа среда, для которой уравнения движения не изменяются при перемене направления одной из осей координат на противоположное.

При этих терминах общепринятое название среды изотропной должно быть заменено названием среды изотропно-симметричной.

Означая через A, B, C, D постоянные коэффициенты, Буссинеск находит для среды изотропной, пренебрегая членами высших порядков:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= Au + B \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) + C \frac{\partial \theta}{\partial x} + D \Delta_2 u, \\ v_1 &= Av + B \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + C \frac{\partial \theta}{\partial y} + D \Delta_2 v, \\ w_1 &= Aw + B \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \theta}{\partial z} + D \Delta_2 w. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь u, v, w суть перемещения по осям молекул среды менее плотной и θ — кубическое расширение. Для среды изотропно-симметричной постоянное $B = 0$.

Предполагая, что среда менее плотная, проникающая среду более плотную, весьма мало отличается по своему строению от изотропно-симметричного, которое бы она имела, будучи совершенно свободной, Буссинеск прилагает к ее движению уравнения, данные Ламе для среды постоянной упругости:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu \Delta_2 u + X_0 &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \mu \Delta_2 v + Y_0 &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \mu \Delta_2 w + Z_0 &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

в которых X_0, Y_0, Z_0 должны быть заменены величинами $-\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, -\rho_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, -\rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}$. Развитие уравнений (2) и (1) приводит Буссинеска к весьма простому объяснению явлений светорассеяния, вращательной поляризации и прочего, что побудило его отождествить среду весьма малой плотности и весьма большой упругости с эфиром, среду же конечной плотности и конечной упругости — с весомыми телами, которые им проникаются.

Означая через τ время одного колебания, Буссинеск находит для квадрата скорости распространения поперечных колебаний выражение:

$$\frac{\mu}{\rho + \rho_1 A} \left(1 + \frac{4D\pi^2 \rho_1}{\mu} \frac{1}{\tau^2} \right),$$

что совершенно согласно с приближённой формулой, данной опытом.

Согласие изложенной теории с явлениями света побуждает исследовать вопрос о значении найденных мною выводов в применении к только что изложенной теории световых явлений.

С этую целью мы займёмся преобразованием уравнений (1) и (2) в криволинейные координаты.

Пусть ρ, ρ_1, ρ_2 означают параметры трёх ортогональных поверхностей, $h = \frac{1}{H}, h_1 = \frac{1}{H_1}, h_2 = \frac{1}{H_2}$ — их дифференциальные параметры первого порядка. Означим,

далее, через R , R_1 , R_2 перемещения по нормальям к поверхностям ρ , ρ_1 , ρ_2 и пусть A , B , Γ имеют прежнее значение; F , F_1 , F_2 представляют слагающие по нормальям к ρ , ρ_1 , ρ_2 сил, действующих на молекулу, и δ , δ_1 — плотности эфира и весомого тела. Мы имеем¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{h} \frac{\partial \rho}{\partial x} X_0 + \frac{1}{h} \frac{\partial \rho}{\partial y} Y_0 + \frac{1}{h} \frac{\partial \rho}{\partial z} Z_0; \\ F_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} X_0 + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial y} Y_0 + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} Z_0, \\ F_2 &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} X_0 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial y} Y_0 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial z} Z_0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{h} \frac{\partial \rho}{\partial x} R + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} R_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial x} R_2, \\ v &= \frac{1}{h} \frac{\partial \rho}{\partial y} R + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial y} R_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial y} R_2, \\ w &= \frac{1}{h} \frac{\partial \rho}{\partial z} R + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} R_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial z} R_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Означая через

$$U = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \quad W = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{h_1 h_2}{h} \left(\frac{\partial B}{\partial \rho_2} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho_1} \right), \\ P_1 &= \frac{h_2 h}{h_1} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} - \frac{\partial A}{\partial \rho_2} \right), \\ P_2 &= \frac{h h_1}{h_2} \left(\frac{\partial A}{\partial \rho_1} - \frac{\partial B}{\partial \rho} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

имеем:

$$\left. \begin{aligned} U &= A \frac{\partial \rho}{\partial x} + B \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \Gamma \frac{\partial \rho_2}{\partial x}, \\ V &= A \frac{\partial \rho}{\partial y} + B \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + \Gamma \frac{\partial \rho_2}{\partial y}, \\ W &= A \frac{\partial \rho}{\partial z} + B \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \Gamma \frac{\partial \rho_2}{\partial z}; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

¹⁾ Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes, стр. 259 и след.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} &= P \frac{\partial \rho}{\partial x} + P_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + P_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} &= P \frac{\partial \rho}{\partial y} + P_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial y} + P_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} &= P \frac{\partial \rho}{\partial z} + P_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + P_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \frac{\partial \rho_2}{\partial x}. \quad (9)$$

Колебания молекулы эфира при высказанных выше предположениях представляются уравнениями, данными Ламе для среды постоянной упругости, которые в криволинейных координатах будут:

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} - \mu P + \frac{F}{h} = \frac{\delta}{h} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \\ 0 &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_1} - \mu P_1 + \frac{F_1}{h_1} = \frac{\delta}{h_1} \frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2}, \\ 0 &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_2} - \mu P_2 + \frac{F_2}{h_2} = \frac{\delta}{h_2} \frac{\partial^2 R_2}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь величины F, F_1, F_2 определяются с помощью уравнений (3), в которых X_0, Y_0, Z_0 должны быть заменены через $-\delta_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, -\delta_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}, -\delta_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}$, а эти последние выражаются через u, v, w с помощью уравнений (1).

Определим величину F . Так как $\rho, \rho_1, \rho_2, h, h_1, h_2$ не зависят от времени, то вместо X_0, Y_0, Z_0 мы можем вставить величины $\delta_1 u_1, \delta_1 v_1, \delta_1 w_1$ и взять от конечного результата вторую производную по времени.

Так как

$$\begin{aligned} C \frac{\partial \Theta}{\partial x} + D \Delta_2 u &= (C + D) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + D \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right), \\ C \frac{\partial \Theta}{\partial y} + D \Delta_2 v &= (C + D) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + D \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right), \\ C \frac{\partial \Theta}{\partial z} + D \Delta_2 w &= (C + D) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + D \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

то равенства (1) будут:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= Au + BU + (C + D) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + D \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right), \\ v_1 &= Av + BV + (C + D) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + D \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right), \\ w_1 &= Aw + BW + (C + D) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + D \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} (11)$$

Подставляя эти величины вместо X_0, Y_0, Z_0 в выражение для F с помощью уравнений (4), (5), (6), (7), (8), (9) и замечая, что при различных i, j

$$\sum \frac{\partial \rho_i}{\partial \xi} \frac{\partial \rho_j}{\partial \xi} = 0,$$

где ξ есть прямоугольная координата, и

$$\left(\frac{\partial \rho_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial z} \right)^2 = h_i^2,$$

найдем следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[AR + BhA + (C + D) h \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} + DhP \right], \\ F_1 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[AR_1 + Bh_1B + (C + D) h_1 \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_1} + Dh_1P_1 \right], \\ F_2 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[AR_2 + Bh_2\Gamma + (C + D) h_2 \frac{\partial \Theta}{\partial \rho_2} + Dh_2P_2 \right]. \end{aligned} \right\} (12)$$

Представляя R, R_1, R_2 рядами

$$R = \sum R^\alpha; \quad R_1 = \sum R_1^\alpha; \quad R_2 = \sum R_2^\alpha, \quad (13)$$

в которых суммирование производится по индексу α , и

$$\frac{\partial^2 R^\alpha}{\partial t^2} = \alpha^2 R^\alpha, \quad \frac{\partial^2 R_1^\alpha}{\partial t^2} = \alpha^2 R_1^\alpha, \quad \frac{\partial^2 R_2^\alpha}{\partial t^2} = \alpha^2 R_2^\alpha \quad (14)$$

и предполагая, что каждый член R^α удовлетворяет уравнениям (10), мы найдём также

$$F = \sum F^\alpha, \quad F_1 = \sum F_1^\alpha, \quad F_2 = \sum F_2^\alpha,$$

причем $F^\alpha, F_1^\alpha, F_2^\alpha$ получаются из F, F_1, F_2 заменой в выражениях (12) знака $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ коэффициентом α^2 .

Подставляя R^α , R_1^α , R_2^α , F^α , F_1^α , F_2^α в уравнения (10), найдём:

$$0 = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta^\alpha}{\partial \rho} - \dot{\mu} P^\alpha + \delta_1 \alpha^2 \left[BA^\alpha + (C + D) \frac{\partial \Theta^\alpha}{\partial \rho} + DP^\alpha \right] - \frac{\delta + \delta_1 A}{h} \alpha^2 R^\alpha.$$

Если положим

$$\lambda + 2\mu + \delta_1 \alpha^2 (C + D) = \lambda' + 2\mu', \quad (15)$$

$$-\mu - \delta_1 \alpha^2 D = \mu', \quad (16)$$

$$\delta + \delta_1 A = \delta', \quad (17)$$

уравнения колебаний примут вид:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial \Theta^\alpha}{\partial \rho} - \mu' P^\alpha + \delta_1 \alpha^2 BA - \frac{\delta'}{h} \alpha^2 R^\alpha, \\ 0 &= (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial \Theta^\alpha}{\partial \rho_1} - \mu' P_1^\alpha + \delta_1 \alpha^2 BB - \frac{\delta'}{h_1} \alpha^2 R_1^\alpha, \\ 0 &= (\lambda' + 2\mu') \frac{\partial \Theta^\alpha}{\partial \rho_2} - \mu' P_2^\alpha + \delta_1 \alpha^2 B\Gamma - \frac{\delta'}{h_2} \alpha^2 R_2^\alpha. \end{aligned} \right\} (18)$$

Для среды изотропно-симметрической $B = 0$ и уравнения (18) совершенно совпадают с теми, которые были положены в основу настоящего исследования. Итак, все найденные выводы одинаково применимы к явлениям света в телах однородных и притом в тех пределах приближения, которые имеют место для теории Буссинеска.

Квадрат скорости поперечных колебаний будет:

$$\frac{\mu'}{\delta'} = \frac{\mu}{\delta + \delta_1 A} \left[1 - \frac{\delta_1 \alpha^2 D}{\mu} \right]. \quad (19)$$

Следовательно, каждый из членов разложений (13) будет представлять колебание, распространяющееся с особой, ему только принадлежащей скоростью.



ТЕОРИЯ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ В ТВЁРДЫХ УПРУГИХ ТЕЛАХ

Разнообразие и сложность совершающихся явлений вынуждают разделить действующих причин на отдельные группы с целью специального изучения. Так начинает наука, но как скоро исчерпывается исследование обособленных явлений, представляется возможность с методами частных учений перейти к теории более общей. Только таким путём можно пополнить неизбежно остающиеся пробелы при специальном изучении. Эти пробелы особенно ощутительны в тех случаях, когда требуется опытная поверка теории или опытное определение постоянных величин. Теоретические представления, ставящие известную группу явлений особняком от остальной природы, без сомнения, могут искать в опыте только своего приблизительного подтверждения, потому что теоретически построенная схема опыта в этом случае не может предусмотреть всех действительно осуществляющихся явлений.

Нам кажется, что в настоящую минуту теоретическая разработка явлений упругости и теплопроводности подвинулась достаточно, чтобы набросать теорию, которая, исходя из начала сохранения энергии, подвела бы под одно общее учение явления теплопроводности и упругости в твёрдых телах. Задача слишком обширна и так мало ещё разработана, что в насто-

ящем труде мы могли дать только самые общие очерки.

В трудах Томсона, Клаузиуса и Цейнера встречаются приложения механической теории тепла к явлениям в твёрдых упругих телах. Но эти приложения ограничиваются частным случаем, когда твёрдое тело имеет одинаковую температуру во всех своих частях и все его частицы испытывают одинаковые нормальные давления. Эти теории, основанные на эмпирических формулах, кроме некоторых результатов, имеющих непосредственное приложение, дают только дифференциальные условия для функций, без знания которых вопросы остаются только намеченными.

Обобщение взглядов, лежавших в основе этих приложений, настолько, чтобы дать возможность построить учение, обнимающее собою разнообразие явлений упругости и теплопроводности, и составило нашу задачу. Мы старались, по возможности, избегать гипотетических оснований, и те из них, которые нами допущены, положены уже в основы существующих теорий теплопроводности и упругости. Их методы дали нам возможность, не внося новых допущений, оправдать все общие выводы механической теории тепла и её приложений к телам твёрдым. Теории упругости и теплопроводности в том виде, как они были разработаны, явились частным случаем, достаточным для приближённого решения вопросов.

Рассматривая несколько групп явлений в их совокупности, мы неизбежно должны были прийти к выражениям более сложным, чем те, которые даются частными учениями. Рядом с подобным усложнением, естественно, является и большее затруднение в их разрешении.

Настоящее исследование совершенно не затронуло вопроса об эллипсоидах упругости и теплопроводности, их взаимном соотношении и прочем, и целый ряд вопросов общих и частных, которые на основании излагаемой теории могут быть решаемы.

I. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНЫХ И ТЕПЛОВЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Основания теории. 1. Мы представляем себе твёрдое тело состоящим из материальных частиц, расположенных на некоторых расстояниях друг от друга. Эти частицы настолько малы, что можно рассматривать их массы сосредоточенными в их центрах тяжести. Следовательно, изменения в форме тела происходят от различных перемещений частиц, от изменения расстояний между ними, но пространственные изменения в самих частицах могут быть пренебрегаемы.

Из такого взгляда непосредственно следует, что каковы бы ни были взаимодействия между частицами, мы всегда можем рассматривать их пропорциональными массам, потому что в крайнем случае всегда можно ввести постоянными делителями массы частиц, или, если взаимодействие пропорционально объёмам частиц, то плотность, под знаки тех функций, которые выражают взаимодействие.

Расположение частиц твёрдого упругого тела может изменяться или механическими силами и давлениями или теплотой. Поэтому, исследуя явления термические и механические в их совокупности, мы принимаем, что взаимодействие между материальными частицами тела складывается из двух частей: одно из них не зависит от термического состояния частиц и другое зависит от этого состояния.

Первое из этих взаимодействий мы представляем себе механической силой, действующей по линиям, соединяющим материальные частицы, зависящей только от их взаимного расстояния. Эту силу мы будем называть *молекулярной силой*.

Второе взаимодействие может выражаться в двух явлениях:

термическое состояние частицы обуславливает механические действия; мы приписываем их силе, действующей по линиям, соединяющим материальные частицы, и зависящей от расстояния между ними и от их

температур. Эту силу мы будем называть *тепловой силой*;

термическое состояние частиц обуславливает обмен тепла между ними. Этот обмен совершается по линиям, соединяющим материальные частицы, и зависит от расстояния между ними и от их температур.

Эти три группы взаимодействий совершаются только на расстояниях весьма малых.

Приведённые основания, за исключением предположения о взаимодействии, направленном по линии, соединяющей материальные частицы, и зависящем от расстояния между ними, представляют простое перечисление фактов. Кроме того, высказанные предположения для сил молекулярных и теплового обмена приняты в общеизвестных теориях.

Общее исследование взаимодействий. 2. Прежде чем выразить математически высказанные выше предположения, мы укажем на общие определения и свойства взаимодействий, имеющих место между элементами твёрдого упругого тела. При этом нам придётся упоминать положения, уже известные в науке, и потому мы ограничимся только их указанием.

Мы принимаем вместе с Коши следующее определение силы упругости, испытываемой весьма малой площадью, лежащей внутри тела:

«Сила упругости, действующая на весьма малую площадь внутри тела, есть равнодействующая взаимных сил всех частиц, лежащих с одной стороны площади, на частицы, лежащие с другой, и направления которых пересекают эту площадь».

Из этого определения ясно, что мы с одинаковым правом можем говорить как о молекулярных, так и о тепловых силах упругости.

Относительно упругих сил известны две следующие теоремы Коши.

I. Упругая сила, действующая на весьма малую площадь внутри тела, есть равнодействующая упругих сил, действующих на проложения площади на три

какие-нибудь плоскости, проходящие через её центр тяжести.

II. Если две весьма малые площади внутри тела равны и имеют общий центр тяжести, то слагающая упругой силы, действующей на первую по нормали ко второй, равна слагающей упругой силы, действующей на вторую по нормали к первой.

3. Этими теоремами мы тотчас же и воспользуемся. Представим себе, что через материальную частицу M внутри тела проведены три весьма малых плоских элемента перпендикулярно к осям x , y , z прямоугольных координат. Разлагая силы упругости, действующие на эти элементы, по направлению осей координат и относя их к единице площади, мы получим так называемые нормальные силы

$$P_{xx}, P_{yy}, P_{zz} \quad (1)$$

и тангенциальные

$$P_{xy}, P_{xz}, P_{yx}, P_{yz}, P_{zx}, P_{zy}. \quad (2)$$

Первый буквенный индекс означает координату, к которой элемент перпендикулярен, а второй — координату, по направлению которой берётся слагающая силы упругости. Каждая сторона весьма малого плоского элемента подвержена действию двух противоположных по направлению сил упругости. Рассматривая три какие-нибудь плоские элемента, составляющие трёхгранный угол, мы всегда будем рассматривать только те силы упругости, которые действуют или на внутренние, или на внешние стороны плоскостей, ограничивающих этот угол. Кроме того, силу упругости, направленную к той стороне плоскости, которая рассматривается, мы будем считать положительной (давление); если же сила направлена от этой стороны, то мы будем считать её отрицательной (натяжение). Эти знакоположения, противоположные принятым обыкновенно в теориях упругости, введены нами, применяясь к знакоположениям механической теории тепла.

Будем означать буквами p и t молекулярные и тепловые силы упругости. Будем считать положительной силу, стремящуюся разъединить частицы, и отрицательной — силу, стремящуюся их сблизить.

Так как прилив тепла к телу в большинстве случаев производит расширение, которое должно преодолевать взаимное притяжение между частицами, то величины t мы будем считать положительными, а p — отрицательными. Подобное знакоположение не исключает случая противоположного, так как положительное или отрицательное значение сил зависит, как мы увидим, от знаков постоянных коэффициентов, входящих в математические выражения t и p . Так как силы упругости слагаются из сил тепловых и молекулярных, то мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= t_{xx} - p_{xx}, & P_{yy} &= t_{yy} - p_{yy}, & P_{zz} &= t_{zz} - p_{zz}, \\ P_{xy} &= t_{xy} - p_{xy}, & P_{yx} &= t_{yx} - p_{yx}, & P_{zx} &= t_{zx} - p_{zx}, \\ P_{xz} &= t_{xz} - p_{xz}, & P_{yz} &= t_{yz} - p_{yz}, & P_{zy} &= t_{zy} - p_{zy}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из теоремы II непосредственно следует, что

$$P_{xy} = P_{yx}, \quad P_{yz} = P_{zy}, \quad P_{xz} = P_{zx}, \quad (4)$$

или, подставляя предыдущие величины и замечая, что тепловые и молекулярные силы представляют независимые группы сил, мы находим:

$$\left. \begin{aligned} t_{xy} &= t_{yx}, & t_{yz} &= t_{zy}, & t_{xz} &= t_{zx}, \\ P_{xy} &= P_{yx}, & P_{yz} &= P_{zy}, & P_{xz} &= P_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Так как противоположные стороны одного и того же плоского элемента находятся под действием сил упругости, противоположных по своему направлению, то при дальнейшем исследовании мы всегда будем означать буквой n ту часть нормали к плоскому элементу, которая имеет такое же положение относительно элемента, как и сторона его, на которую вычисляется действие упругой силы.

Если означим через P силу упругости, отнесённую к единице площади и действующую на плоский элемент,

проходящий через точку M , и нормаль которого означим через n , мы найдём по теореме II:

$$\left. \begin{aligned} P \cos (Px) &= \\ &= P_{xx} \cos (nx) + P_{xy} \cos (ny) + P_{xz} \cos (nz), \\ P \cos (Py) &= \\ &= P_{xy} \cos (nx) + P_{yy} \cos (ny) + P_{yz} \cos (nz), \\ P \cos (Pz) &= \\ &= P_{zx} \cos (nx) + P_{zy} \cos (ny) + P_{zz} \cos (nz). \end{aligned} \right\} (6)$$

Разделяя в предыдущих выражениях обе группы входящих в них сил, имеем:

$$\left. \begin{aligned} p \cos (px) &= \\ &= p_{xx} \cos (nx) + p_{xy} \cos (ny) + p_{xz} \cos (nz), \\ p \cos (py) &= \\ &= p_{xy} \cos (nx) + p_{yy} \cos (ny) + p_{yz} \cos (nz), \\ p \cos (pz) &= \\ &= p_{xz} \cos (nx) + p_{yz} \cos (ny) + p_{zz} \cos (nz); \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{aligned} t \cos (tx) &= t_{xx} \cos (nx) + t_{xy} \cos (ny) + t_{xz} \cos (nz), \\ t \cos (ty) &= t_{xy} \cos (nx) + t_{yy} \cos (ny) + t_{yz} \cos (nz), \\ t \cos (tz) &= t_{xz} \cos (nx) + t_{yz} \cos (ny) + t_{zz} \cos (nz). \end{aligned} \right\} (8)$$

4. Мы назовём тепловым током количество тепла, протекающего через плоский элемент вследствие обмена тепла по линиям, соединяющим материальные частицы с той и другой стороны элемента и пересекающим его. Этот тепловой ток в бесконечно малый промежуток времени пропорционален элементу времени $d\tau$.

Назовём через n нормаль к плоскому элементу и будем означать через q_n тепловой ток, протекающий через этот элемент и отнесённый к единице площади и единице времени. Отыщем для какой-нибудь материальной частицы соотношение между q_n , q_x , q_y , q_z .

Чтобы найти это соотношение, представим себе элементарный тетраэдр, образованный плоскими весьма

малыми элементами $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_n$. Углы будем отсчитывать от внешнего конца нормали. Представим себе, что тепловые токи входят в тетраэдр через элементы $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; через элемент же ω_n тетраэдр теряет тепло. Пусть q_x, q, q_z означают тепловые токи соответствующих элементов, протекающие через их общую вершину M , и q_n — тепловой ток, соответствующий элементу ω_n , если бы его центр тяжести совпадал с M .

Тепловые токи через центры тяжести сторон тетраэдра в течение бесконечно малого времени $d\tau$ будут, означая через δ изменение тока при переходе от точки M к центру тяжести элемента, через который проходит ток:

$$\begin{aligned} \omega_x d\tau (q_x + \delta q_x), \quad \omega_y d\tau (q_y + \delta q_y), \\ \omega_z d\tau (q_z + \delta q_z), \quad \omega_n d\tau (q_n + \delta q_n); \end{aligned}$$

первые три входят, а последний выходит из тетраэдра. Разность этих токов представляет избыток тепла, остающийся в тетраэдре отчасти как тепло, отчасти как механическая работа. Этот избыток, очевидно, будет одного порядка с произведением объёма ε элементарного тетраэдра на элемент времени $d\tau$, почему мы и означим его через $B\varepsilon d\tau$, где величина B — одного порядка с q_x, q_y, q_z ¹⁾. Следовательно, сокращая на $d\tau$,

$$\begin{aligned} B\varepsilon = \omega_x q_x + \omega_y q + \omega_z q_z - \\ - \omega_n q_n + \omega_x \delta q_x + \omega_y \delta q_y + \omega_z \delta q_z - \omega_n \delta q_n. \end{aligned}$$

Так как $\delta q_x, \delta q, \delta q_z$ одного порядка с рёбрами тетраэдра, то предыдущее выражение состоит из двух частей — бесконечно малых второго и третьего порядков, которые и должны удовлетворять предыдущему выражению независимо одна от другой. Таким образом, приравнявая нулю сумму членов второго порядка, находим:

$$\omega_x q_x + \omega_y q_y + \omega_z q_z = \omega_n q_n.$$

Но по теории проекций

$$\omega_x = \omega_n \cos(nx), \quad \omega_y = \omega_n \cos(ny), \quad \omega_z = \omega_n \cos(nz),$$

¹⁾ См. § 23, формула (104).

следовательно,

$$q_n = q_x \cos(nx) + q_y \cos(ny) + q_z \cos(nz). \quad (9)$$

Это и есть наше искомое, общеизвестное соотношение.

5. Нетрудно найти выражение сил и тепловых токов в случае перемены координат.

Означим через x' , y' , z' оси новой системы прямоугольных координат, и силы упругости, соответствующие этой новой системе, будем означать прежними буквами, ставя только над ними значки.

Означим через ξ_i , η_i , ζ_i косинусы углов новых осей со старыми, как это показывает следующая таблица:

	x'	y'	z'
x	ξ_1	ξ_2	ξ_3
y	η_1	η_2	η_3
z	ζ_1	ζ_2	ζ_3

Между этими косинусами существуют, как известно, следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 &= 1, \\ \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 &= 1, \\ \xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2 &= 1, \\ \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2 &= 0, \\ \xi_1 \xi_3 + \eta_1 \eta_3 + \zeta_1 \zeta_3 &= 0, \\ \xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3 + \zeta_2 \zeta_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 &= 1, \\ \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 &= 1, \\ \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 &= 1, \\ \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 &= 0, \\ \xi_1 \zeta_1 + \xi_2 \zeta_2 + \xi_3 \zeta_3 &= 0, \\ \eta_1 \zeta_1 + \eta_2 \zeta_2 + \eta_3 \zeta_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

По теореме II § 2 и по формулам (6) мы имеем следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned}
 \xi_1 P'_{xx} + \xi_2 P'_{xy} + \xi_3 P'_{xz} &= \xi_1 P_{xx} + \eta_1 P_{xy} + \zeta_1 P_{xz}, \\
 \eta_1 P'_{xx} + \eta_2 P'_{xy} + \eta_3 P'_{xz} &= \xi_1 P_{xy} + \eta_1 P_{yy} + \zeta_1 P_{yz}, \\
 \zeta_1 P'_{xx} + \zeta_2 P'_{xy} + \zeta_3 P'_{xz} &= \xi_1 P_{xz} + \eta_1 P_{yz} + \zeta_1 P_{zz}, \\
 \xi_1 P'_{xy} + \xi_2 P'_{yy} + \xi_3 P'_{yz} &= \xi_2 P_{xx} + \eta_2 P_{xy} + \zeta_2 P_{xz}, \\
 \eta_1 P'_{xy} + \eta_2 P'_{yy} + \eta_3 P'_{yz} &= \xi_2 P_{xy} + \eta_2 P_{yy} + \zeta_2 P_{yz}, \\
 \zeta_1 P'_{xy} + \zeta_2 P'_{yy} + \zeta_3 P'_{yz} &= \xi_2 P_{xz} + \eta_2 P_{yz} + \zeta_2 P_{zz}, \\
 \xi_1 P'_{xz} + \xi_2 P'_{yz} + \xi_3 P'_{zz} &= \xi_3 P_{xx} + \eta_3 P_{xy} + \zeta_3 P_{xz}, \\
 \eta_1 P'_{xz} + \eta_2 P'_{yz} + \eta_3 P'_{zz} &= \xi_3 P_{xy} + \eta_3 P_{yy} + \zeta_3 P_{yz}, \\
 \zeta_1 P'_{xz} + \zeta_2 P'_{yz} + \zeta_3 P'_{zz} &= \xi_3 P_{xz} + \eta_3 P_{yz} + \zeta_3 P_{zz}.
 \end{aligned} \right\} (12)$$

Совершенно аналогичные выражения, как видно из формул (6) и (7), имеют место и для сил $t_{xx}, t_{xy}, \dots, p_{xx}, p_{xy}, \dots$. Обращая внимание на выражения (10) и (11), мы найдём из предыдущих формул:

$$\left. \begin{aligned}
 P'_{xx} &= \xi_1^2 P_{xx} + \eta_1^2 P_{yy} + \zeta_1^2 P_{zz} + \\
 &\quad + 2\eta_1 \zeta_1 P_{yz} + 2\zeta_1 \xi_1 P_{xz} + 2\eta_1 \xi_1 P_{xy}, \\
 P'_{yy} &= \xi_2^2 P_{xx} + \eta_2^2 P_{yy} + \zeta_2^2 P_{zz} + \\
 &\quad + 2\eta_2 \zeta_2 P_{yz} + 2\zeta_2 \xi_2 P_{xz} + 2\eta_2 \xi_2 P_{xy}, \\
 P'_{zz} &= \xi_3^2 P_{xx} + \eta_3^2 P_{yy} + \zeta_3^2 P_{zz} + \\
 &\quad + 2\eta_3 \zeta_3 P_{yz} + 2\zeta_3 \xi_3 P_{xz} + 2\eta_3 \xi_3 P_{xy},
 \end{aligned} \right\} (13)$$

$$\left. \begin{aligned}
 P'_{yz} &= \xi_2 \xi_3 P_{xx} + \eta_2 \eta_3 P_{yy} + \zeta_2 \zeta_3 P_{zz} + \\
 &\quad + (\eta_2 \zeta_3 + \eta_3 \zeta_2) P_{yz} + (\zeta_2 \xi_3 + \zeta_3 \xi_2) P_{xz} + \\
 &\quad + (\xi_2 \eta_3 + \xi_3 \eta_2) P_{xy}, \\
 P'_{xz} &= \xi_3 \xi_1 P_{xx} + \eta_3 \eta_1 P_{yy} + \zeta_3 \zeta_1 P_{zz} + \\
 &\quad + (\eta_3 \zeta_1 + \eta_1 \zeta_3) P_{yz} + (\zeta_3 \xi_1 + \zeta_1 \xi_3) P_{xz} + \\
 &\quad + (\xi_3 \eta_1 + \xi_1 \eta_3) P_{xy}, \\
 P'_{xy} &= \xi_1 \xi_2 P_{xx} + \eta_1 \eta_2 P_{yy} + \zeta_1 \zeta_2 P_{zz} + \\
 &\quad + (\eta_1 \zeta_2 + \eta_2 \zeta_1) P_{yz} + (\zeta_1 \xi_2 + \zeta_2 \xi_1) P_{xz} + \\
 &\quad + (\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1) P_{xy}.
 \end{aligned} \right\} (14)$$

Совершенно аналогичные выражения мы получим и для t_{xx} , p_{xx} и пр.

Впоследствии нам придётся относить к новым осям и самые перемещения частиц. Преобразование в этом случае очень просто, и если через u , v , w означим перемещения частицы по осям координат, через u' , v' , w' — те же величины для новых осей, то исходной точкой преобразований должны быть соотношения:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \xi_1 u + \eta_1 v + \zeta_1 w, \\ v' &= \xi_2 u + \eta_2 v + \zeta_2 w, \\ w' &= \xi_3 u + \eta_3 v + \zeta_3 w. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Что касается величины тепловых токов в новых прямоугольных координатах, то выражения (9) непосредственно дают:

$$\left. \begin{aligned} q'_x &= \xi_1 q_x + \eta_1 q_y + \zeta_1 q_z, \\ q'_y &= \xi_2 q_x + \eta_2 q_y + \zeta_2 q_z, \\ q'_z &= \xi_3 q_x + \eta_3 q_y + \zeta_3 q_z. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Математическое выражение взаимодействий. 6. Для отыскания математических выражений упругих сил нам достаточно определить наиболее сложную из них, именно силу тепловую, действующую на весьма малый плоский элемент. Молекулярная сила получится затем рядом упрощений и изменением постоянных коэффициентов.

Совершенно достаточно вывести выражения для двух сил t_{xx} , t_{xy} ; остальные напишутся по аналогии. Тепловая сила есть функция расстояния между частицами, т. е. $\varphi(r_1)$, и функция их температур, $\psi(t', t'')$.

Частицы, лежащие по одну сторону плоского элемента, на который вычисляются тепловые силы, будем означать через m' ; по другую — через m'' ; давая те же обозначения их массам, мы найдём согласно § 1, что тепловая сила, действующая между ними, представится выражением

$$m' m'' \varphi(r_1) \psi(t', t''). \quad (17)$$

Функция $\psi(t', t'')$ должна быть симметрична относительно t', t'' , так как всегда действие равно противодействию. Слагающие этой силы по осям x и y будут:

$$\left. \begin{aligned} m' m'' \varphi(r_1) \psi(t', t'') \cos(r_1 x), \\ m' m'' \varphi(r_1) \psi(t', t'') \cos(r_1 y). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Этим выражениям дадим иной вид.

Будем означать через x, y, z координаты центра тяжести элементарного параллелепипеда, три непараллельные стороны коего означим через $\omega_x, \omega_y, \omega_z$; через $x', y', z', x'', y'', z''$ — координаты частиц m', m'' , лежащих по ту и по другую сторону плоского элемента ω_x , и через r означим расстояние между ними, когда тело находилось в начальном состоянии равновесия. Под этим начальным состоянием мы разумеем такое, при котором тело или не испытывало никаких внешних давлений, или же было равномерно сжато, а температура его везде была одинакова и равна t_0 .

Примем, что вследствие новых термомеханических условий изменилось расположение частиц тела и их температуры. Означим через u, v, w перемещения по осям координат x, y, z центра тяжести элементарного параллелепипеда и через $u', v', w', u'', v'', w''$ — перемещения частиц m', m'' . Величины r изменятся точно так же в $r + \Delta r = r_1$, и температуры частиц будут t', t'' ; температуру же центра тяжести элементарного параллелепипеда будем означать через t . Перемещения частиц мы принимаем весьма малыми, и так как расстояния, на которых могут совершаться исследуемые взаимодействия, также весьма малы, то величины r_1 и их проложения $x' - x, x'' - x, x'' - x'$ и прочие также очень малы. Кроме того, перемещения и температуры мы можем рассматривать как непрерывные функции времени τ и координат, рассматривая геометрические точки, находящиеся в промежутках между частицами, как перемещающиеся.

Пренебрегая степенями перемещений выше первой, мы находим:

$$\Delta r = \frac{(x'' - x')(u'' - u') + (y'' - y')(v'' - v') + (z'' - z')(w'' - w')}{r}, \quad (19)$$

и точно так же

$$\cos(r_1 x) = \frac{x'' - x' + u'' - u'}{r}, \quad \cos(r_1 y) = \frac{y'' - y' + v'' - v'}{r_1}. \quad (20)$$

Обращая внимание на незначительность расстояния, на котором совершаются взаимодействия, величины перемещений u'' , u' могут быть выражены через перемещения центра тяжести элементарного параллелепипеда, разлагая их по строке Тейлора и ограничиваясь её первыми членами:

$$\left. \begin{aligned} u'' &= u + (x'' - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (y'' - y) \frac{\partial u}{\partial y} + (z'' - z) \frac{\partial u}{\partial z}, \\ v'' &= v + (x'' - x) \frac{\partial v}{\partial x} + (y'' - y) \frac{\partial v}{\partial y} + (z'' - z) \frac{\partial v}{\partial z}, \\ w'' &= w + (x'' - x) \frac{\partial w}{\partial x} + (y'' - y) \frac{\partial w}{\partial y} + (z'' - z) \frac{\partial w}{\partial z} \\ \text{и} \\ u' &= u + (x' - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (y' - y) \frac{\partial u}{\partial y} + (z' - z) \frac{\partial u}{\partial z}, \\ v' &= v + (x' - x) \frac{\partial v}{\partial x} + (y' - y) \frac{\partial v}{\partial y} + (z' - z) \frac{\partial v}{\partial z}, \\ w' &= w + (x' - x) \frac{\partial w}{\partial x} + (y' - y) \frac{\partial w}{\partial y} + (z' - z) \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} u'' - u' &= (x'' - x') \frac{\partial u}{\partial x} + (y'' - y') \frac{\partial u}{\partial y} + (z'' - z') \frac{\partial u}{\partial z}, \\ v'' - v' &= (x'' - x') \frac{\partial v}{\partial x} + (y'' - y') \frac{\partial v}{\partial y} + (z'' - z') \frac{\partial v}{\partial z}, \\ w'' - w' &= (x'' - x') \frac{\partial w}{\partial x} + (y'' - y') \frac{\partial w}{\partial y} + (z'' - z') \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Затем

$$\left. \begin{aligned} t'' &= t + (x'' - x) \frac{\partial t}{\partial x} + (y'' - y) \frac{\partial t}{\partial y} + \\ &\quad + (z'' - z) \frac{\partial t}{\partial z} = t + \Delta'' t, \\ t' &= t + (x' - x) \frac{\partial t}{\partial x} + (y' - y) \frac{\partial t}{\partial y} + \\ &\quad + (z' - z) \frac{\partial t}{\partial z} = t + \Delta' t. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Кроме того,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varphi(r_1)}{r_1} &= F(r_1) = F(r) + \Delta r F'(r), \\ \psi(t', t'') &= \psi(t) + (\Delta' t + \Delta'' t) \psi_1(t), \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где

$$\psi_1(t) = \left| \begin{array}{l} t'' = t' = t \\ \frac{\partial \psi(t', t'')}{\partial t''} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} t' = t'' = t \\ \frac{\partial \psi(t', t'')}{\partial t'} \end{array} \right|. \quad (25)$$

При помощи этих соотношений находим из формулы (19):

$$\begin{aligned} \Delta r &= \frac{1}{r} \left\{ (x'' - x')^2 \frac{\partial u}{\partial x} + (y'' - y')^2 \frac{\partial v}{\partial y} + (z'' - z')^2 \frac{\partial v}{\partial z} + \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) (y'' - y') (z'' - z') + \\ &\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) (x'' - x') (z'' - z') + \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (x'' - x') (y'' - y') \right\}, \quad (26) \end{aligned}$$

и выражения сил (18) будут:

$$\left. \begin{aligned} m' m'' [F(r) + \Delta r F'(r)] [\psi(t) + (\Delta' t + \Delta'' t) \psi_1(t)] \times \\ \quad \times (x'' - x' + u'' - u'), \\ m' m'' [F(r) + \Delta r F'(r)] [\psi(t) + (\Delta' t + \Delta'' t) \psi_1(t)] \times \\ \quad \times (y'' - y' + v'' - v'). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Чтобы найти равнодействующую этих сил на плоский

элемент ω_x , перпендикулярный к оси x , т. е. найти силы $\omega_x t_{xx}$, $\omega_x t_{xy}$, нам нужно суммировать предыдущие выражения для частиц m' , m'' , лежащих по ту и другую сторону элемента, линия соединения которых его пересекает и не более радиуса теплового взаимодействия.

Обращая внимание на выражения (22), (23) и (26), мы замечаем, что производные от t , u , v , w и функции $\psi(t)$, $\psi_1(t)$ могут быть вынесены за знаки сумм. Эти же суммы будут заключать произведения из $F(r)$, $F'(r)$ на разности $x'' - x$, $x' - x$ и пр. в различных степенях и сочетаниях. Так как эти суммы относятся к начальному состоянию, одинаковому для всех частей тела, то мы можем заменить их постоянными коэффициентами. Следовательно, и силы тепловые, отнесённые к единице площади, т. е. t_{xx} и t_{xy} , представятся подобными же суммами выражений (27).

Опуская произведения производных перемещений, обращая внимание на строение Δr (26) и полагая

$$\left. \begin{aligned} \Omega_i^j &= A_i^{0j} + A_i^{1j} \frac{\partial u}{\partial x} + A_i^{2j} \frac{\partial u}{\partial y} + A_i^{3j} \frac{\partial u}{\partial z} + A_i^{4j} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ &+ A_i^{5j} \frac{\partial v}{\partial z} + A_i^{6j} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + A_i^{7j} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &+ A_i^{8j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \bar{\Omega}_i^j &= B_i^{0j} + B_i^{1j} \frac{\partial v}{\partial x} + B_i^{2j} \frac{\partial v}{\partial y} + B_i^{3j} \frac{\partial v}{\partial z} + B_i^{4j} \frac{\partial u}{\partial x} + \\ &+ B_i^{5j} \frac{\partial w}{\partial z} + B_i^{6j} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + B_i^{7j} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &+ B_i^{8j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} (28)$$

где A_i^{0j} , A_i^{1j} , ..., B_i^{0j} , B_i^{1j} , ... суть постоянные коэффициенты, мы можем написать для t_{xx} , t_{xy} следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \psi(t) \Omega + \left[\Omega_1 \frac{\partial t}{\partial x} + \Omega_2 \frac{\partial t}{\partial y} + \Omega_3 \frac{\partial t}{\partial z} \right] \psi_1(t), \\ t_{xy} &= \psi(t) \bar{\Omega} + \left[\bar{\Omega}_1 \frac{\partial t}{\partial x} + \bar{\Omega}_2 \frac{\partial t}{\partial y} + \bar{\Omega}_3 \frac{\partial t}{\partial z} \right] \psi_1(t). \end{aligned} \right\} (29)$$

Эти выражения выведены нами, не делая никаких предположений относительно строения среды. Они значительно упрощаются, когда строение среды более или менее симметрично. Но выражение для силы t_{yx} упрощается и в общем случае.

Рассматривая t_{xy} как силу t_{yx} , действующую на элемент ω_y параллельно оси x , мы заключаем, что t_{yx} должна иметь вид, одинаковый с суммой членов вида

$$m'm'' [F(r) + \Delta r F'(r)] [\psi(t) + (\Delta't + \Delta''t)\psi_1(t)] \times \\ \times (x'' - x' + u'' - u'); \quad (30)$$

этот член сходен с первым из выражений (27), и потому t_{yx} будет составлено при помощи выражений, аналогичных с Ω_i , а именно с помощью выражений:

$${}^j\Omega = C_i^{0j} + C_i^{1j} \frac{\partial u}{\partial x} + C_i^{2j} \frac{\partial u}{\partial y} + C_i^{3j} \frac{\partial u}{\partial z} + C_i^{4j} \frac{\partial v}{\partial y} + C_i^{5j} \frac{\partial w}{\partial z} + \\ + C_i^{6j} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + C_i^{7j} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + C_i^{8j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (31)$$

Так как $t_{xy} = t_{yx}$, то ${}^j\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^j$. Сравнивая их, мы находим:

$$B_i^{1j} = B_i^{3j} = 0, \quad C_i^{2j} = C_i^{3j} = 0;$$

остальные коэффициенты при одинаковых производных соответственно равны.

Следовательно, в выражении тангенциальной силы t_{xy} величины $\bar{\sigma}^j$ будут иметь вид:

$$\bar{\sigma}^j = B_i^{0j} + B_i^{2j} \frac{\partial v}{\partial y} + B_i^{4j} \frac{\partial u}{\partial x} + B_i^{5j} \frac{\partial u}{\partial z} + B_i^{6j} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ + B_i^{7j} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_i^{8j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (32)$$

Мы не будем приводить выражения для других тепловых сил в рассматриваемом общем случае. Весьма легко составить их, замечая, что тангенциальные силы

будут отличаться только коэффициентами, а нормальные ещё тем, что в первой строке выражения Ω_i^j (28) нужно поменять u, x на v, y и обратно для ω_y , и u, x на w, z и обратно для ω_z .

Выражения для сил молекулярных p будут отличаться от предыдущих тем, что, не завися от температур, они не будут заключать функций температуры и её производных. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= \mathcal{Q}', \\ p_{xy} &= \mathcal{S}'. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

7. Легко найти и выражения для тепловых токов. Замечая, что тепловых токов, т. е. прилива и отлива тепла, нет, если материальные частицы имеют равные температуры, и что разность температур на расстояниях, на которых совершаются взаимодействия, весьма мала, мы можем принять за математическое выражение теплового тока между двумя частицами m', m'' в течение бесконечно малого времени $d\tau$ величину ¹⁾

$$m' m'' \varphi(t) \Phi(r_1) (t'' - t') d\tau \quad (34)$$

или, заменяя $t'' - t'$ через $\Delta''t - \Delta't$ (формула 23), разлагая $\Phi(r_1)$ и относя тепловой ток к единице времени, находим вместо выражения (34) следующее:

$$m' m'' \varphi(t) [\Phi(r) + \Delta r \Phi'(r)] [\Delta''t - \Delta't]. \quad (35)$$

Величина $\omega_x q_x$ представится суммой подобных членов, распространённой на все частицы m', m'' , лежащие по обе стороны элемента ω_x на расстояниях не далее радиуса теплового взаимодействия и линии соединения коих пересекают элемент ω_x . Здесь также можно вынести за знаки сумм производные перемещения и тем-

¹⁾ В нашем выражении $\varphi(t)$ показывает закон изменения теплопроводности с температурой. В общепринятой теории теплопроводности на эту зависимость не обращается внимания, почему обмен тепла представляется просто выражением $m' m'' \Phi(r_1) (t'' - t') d\tau$.

пературы, а также $\varphi(t)$. Самые же суммы могут быть заменены постоянными коэффициентами. Точно такой же вид будут иметь, следовательно, и величины q_x, q_y, q_z , и потому, обращая внимание на выражение Δr (формула 26) и означая

$$\Omega_i^r = C_i + C_i^1 \frac{\partial u}{\partial x} + C_i^2 \frac{\partial v}{\partial y} + C_i^3 \frac{\partial w}{\partial z} + C_i^4 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + C_i^5 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + C_i^6 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (36)$$

находим:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \left[\Omega_1^r \frac{\partial t}{\partial x} + \Omega_2^r \frac{\partial t}{\partial y} + \Omega_3^r \frac{\partial t}{\partial z} \right] \varphi(t), \\ q_y &= \left[\Omega_4^r \frac{\partial t}{\partial x} + \Omega_5^r \frac{\partial t}{\partial y} + \Omega_6^r \frac{\partial t}{\partial z} \right] \varphi(t), \\ q_z &= \left[\Omega_7^r \frac{\partial t}{\partial x} + \Omega_8^r \frac{\partial t}{\partial y} + \Omega_9^r \frac{\partial t}{\partial z} \right] \varphi(t). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

В этих выражениях можно заменить величину t другой величиной T из соотношения:

$$\int \varphi(t) dt = T.$$

Исследование взаимодействий при различном молекулярном строении тел. 8. Найденные выше математические выражения для взаимодействий значительно упрощаются, предполагая, что строение среды более или менее симметрично.

Предположим, например, что среда симметрично расположена около плоскостей, перпендикулярных к оси x .

В этом случае при перемене x на $-x$ постоянные коэффициенты в выражениях сил упругости не должны изменяться. Рассмотрим, какие вытекают отсюда следствия для сил тепловых, например для t_{xx}, t_x .

Уравнения (13) и (14) показывают, что в этом случае

$$t_{xx}, t_{yy}, t_{zz}, t_{yz}$$

сохраняют свой знак и свою величину, между тем как

$$t_{xy}, t_{xz}$$

меняют знак, сохраняя величину. Точно так же выражения

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial z}$$

удержат свою величину и не изменят знака, между тем как

$$\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}$$

удержат свою величину, но изменят знак. Чтобы согласить эти условия, необходимо принять, что коэффициенты в t_{xx} при членах, изменивших свой знак, равны нулю для данного строения среды; в выражении же для t_{xy} равны нулю коэффициенты при членах, не изменивших своего знака. Следовательно, вместо выражений (28) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= A + A^1 \frac{\partial u}{\partial x} + A^4 \frac{\partial v}{\partial y} + A^5 \frac{\partial w}{\partial z} + A^6 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \Omega_1 &= A_1^2 \frac{\partial u}{\partial y} + A_1^3 \frac{\partial u}{\partial z} + A_1^7 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + A_1^8 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \Omega_2 &= A_2 + A_2^1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2^4 \frac{\partial v}{\partial y} + A_2^5 \frac{\partial w}{\partial z} + A_2^6 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \Omega_3 &= A_3 + A_3^1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_3^4 \frac{\partial v}{\partial y} + A_3^5 \frac{\partial w}{\partial z} + A_3^6 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} (38)$$

причём по выражениям (29)

$$t_{xx} = \psi(t) \Omega + \left[\Omega_1 \frac{\partial t}{\partial x} + \Omega_2 \frac{\partial t}{\partial y} + \Omega_3 \frac{\partial t}{\partial z} \right] \psi_1(t). \quad (39)$$

Точно так же вместо выражений (32) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Omega} &= B^7 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B^8 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \bar{\Omega}_1 &= B_1 + B_1^2 \frac{\partial v}{\partial y} + B_1^4 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1^5 \frac{\partial w}{\partial z} + B_1^6 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \bar{\Omega}_2 &= B_2^7 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_2^8 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \bar{\Omega}_3 &= B_3^7 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_3^8 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} (40)$$

причём по выражениям (29)

$$t_{xy} = \psi(t) \bar{\sigma} + \left[\bar{\sigma}_1 \frac{\partial t}{\partial x} + \bar{\sigma}_2 \frac{\partial t}{\partial y} + \bar{\sigma}_3 \frac{\partial t}{\partial z} \right] \psi_1(t). \quad (41)$$

Нетрудно найти выражения и для остальных тепловых сил, а также и для сил молекулярных. Из последних, очевидно,

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= \Omega', \\ p_{xy} &= \bar{\sigma}', \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

где Ω' , $\bar{\sigma}'$ суть величины Ω , $\bar{\sigma}$, в которых постоянные коэффициенты заменены другими.

9. Если тело симметрично и около плоскостей, перпендикулярных к y и z , то формулы ещё более упрощаются. Рассмотрим случай симметрии около плоскостей, перпендикулярных к оси y . Тогда коэффициенты в выражениях тепловых сил не должны меняться при перемене y на $-y$.

Соотношения (13) и (14) показывают, что t_{xx} не изменит своего знака и величины, а t_{xy} изменит только знак. Выражения

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial z}$$

не изменят ни знака, ни величины; но

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}$$

изменяют свой знак. Поэтому, удерживая в t_{xx} коэффициенты только тех членов, знаки которых не изменились, и в t_{xy} тех, которые изменили свой знак, находим вместо выражений (38) следующие:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= A + A^1 \frac{\partial u}{\partial x} + A^4 \frac{\partial v}{\partial y} + A^5 \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \Omega_1 &= A_3^1 \frac{\partial u}{\partial z} + A_3^1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \Omega_2 &= A_2^6 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \Omega_3 &= A_3 + A_3^1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_3^4 \frac{\partial v}{\partial y} + A_3^5 \frac{\partial v}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

причём

$$t_{xx} = \Omega \dot{\psi}(t) + \left[\Omega_1 \frac{\partial t}{\partial x} + \Omega_2 \frac{\partial t}{\partial y} + \Omega_3 \frac{\partial t}{\partial z} \right] \dot{\psi}_1(t). \quad (44)$$

Точно так же вместо выражений (40) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Theta} &= B^7 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \bar{\Theta}_1 &= B_1^6 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \bar{\Theta}_2 &= B_2^8 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \bar{\Theta}_3 &= B_3^7 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

причём

$$t_{xy} = \dot{\psi}(t) \bar{\Theta} + \left(\bar{\Theta}_1 \frac{\partial t}{\partial x} + \bar{\Theta}_2 \frac{\partial t}{\partial y} + \bar{\Theta}_3 \frac{\partial t}{\partial z} \right) \dot{\psi}_1(t). \quad (46)$$

10. Примем теперь, что тело симметрично также относительно плоскостей, перпендикулярных к z . В этом случае t_{xx} , t_{xy} сохраняют свои величины и знаки. Выражения

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y}$$

также сохраняют свои величины и знаки; но

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial t}{\partial z}$$

меняют свой знак. Поэтому мы удерживаем в t_{xx} и t_{xy} коэффициенты в членах, не изменивших своего знака. Таким образом, вместо выражений (43) находим:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= A + A^1 \frac{\partial u}{\partial x} + A^4 \frac{\partial v}{\partial y} + A^5 \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \Omega_1 &= 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

следовательно,

$$t_{xx} = \dot{\psi}(t) \Omega. \quad (48)$$

Точно так же вместо выражений (45) находим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma} &= B^7 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \bar{\sigma}_1 &= 0, \quad \bar{\sigma}_2 = 0, \quad \bar{\sigma}_3 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

причём

$$t_{xy} = \psi(t) \bar{\sigma}. \quad (50)$$

Мы видим, таким образом, что в телах, строение которых симметрично относительно тройной системы взаимно перпендикулярных плоскостей, выражения тепловых сил, отнесённые к этим плоскостям, принятым за систему прямоугольных координат, не зависят от производных температуры по координатам.

По аналогии с выражениями (48) и (50) можно написать величины и других тепловых сил для тел с тройной симметрией. Мы дадим выражениям этих сил следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \left[A + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial v}{\partial y} + A_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right] \psi(t), \\ t_{yy} &= \left[B + B_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial v}{\partial y} + B_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right] \psi(t), \\ t_{zz} &= \left[C + C_1 \frac{\partial u}{\partial x} + C_2 \frac{\partial v}{\partial y} + C_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right] \psi(t), \\ t_{xy} &= D_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \psi(t), \\ t_{xz} &= D_2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \psi(t), \\ t_{yz} &= D_1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \psi(t). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Подобные же преобразования должны быть совершены и над молекулярными силами, с тем различием, что они вовсе не содержат величин, зависящих от температур.

Эти силы мы можем поэтому представить выражениями:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= A' + A'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A'_2 \frac{\partial v}{\partial y} + A'_3 \frac{\partial w}{\partial z}, \\ p_{yy} &= B' + B'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B'_2 \frac{\partial v}{\partial y} + B'_3 \frac{\partial w}{\partial z}, \\ p_{zz} &= C' + C'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + C'_2 \frac{\partial v}{\partial y} + C'_3 \frac{\partial w}{\partial z}, \\ p_{xy} &= D'_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ p_{xz} &= D'_2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ p_{yz} &= D'_1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

11. Мы продолжим упрощения выражений тепловых сил. Предположим, что тело симметрично около линий, параллельных известному направлению, например оси x . В этом случае найденные выражения сил должны сохранять те же коэффициенты, если мы повернём оси z и y около оси x на весьма малый угол ε . В этом случае по формулам преобразования координат (13) и (14) мы найдём, замечая, что

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1, & \xi_2 &= 0, & \xi_3 &= 0, \\ \eta_1 &= 0, & \eta_2 &= 1, & \eta_3 &= -\varepsilon, \\ \zeta_1 &= 0, & \zeta_2 &= \varepsilon, & \zeta_3 &= 1, \end{aligned}$$

следующие соотношения:

$$\begin{aligned} t'_{xx} &= t_{xx}, & t'_{yy} &= t_{yy} + 2t_{yz} \varepsilon, & t'_{zz} &= t_{zz} - 2t_{yz} \varepsilon, \\ t'_{yz} &= t_{yz} + (t_{zz} - t_{yy}) \varepsilon, & t'_{zx} &= t_{zx} - t_{xy} \varepsilon, & t'_{xy} &= t_{xy} + t_{zx} \varepsilon, \end{aligned}$$

и кроме того, как легко видеть,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial x'} &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial v'}{\partial y'} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), & \frac{\partial w'}{\partial z'} &= \frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + 2\varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial y'} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Чтобы согласить эти условия, необходимо допустить следующие равенства:

$$A_2 = A_3, \quad B = C, \quad B_1 = C_1, \quad B_3 = C_2, \quad D_3 = D_2, \\ B_2 = C_3 = 2D_1 + C_2 = 2D_1 + B_3,$$

вследствие чего формулы (51) будут:

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \left[A + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \psi(t), \\ t_{yy} &= \left[B + B_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial v}{\partial y} + (B_2 - 2D_1) \frac{\partial w}{\partial z} \right] \psi(t), \\ t_{zz} &= \left[B + B_1 \frac{\partial u}{\partial x} + (B_2 - 2D_1) \frac{\partial v}{\partial y} + B_2 \frac{\partial w}{\partial z} \right] \psi(t), \\ t_{xy} &= D_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \psi(t), \\ t_{zx} &= D_2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \psi(t), \\ t_{zy} &= D_1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \psi(t). \end{aligned} \right\} (53)$$

Подобным же образом должно изменить и выражения (52).

12. Если тело симметрично и около линий, параллельных оси y , то коэффициенты, входящие в выражения сил, не должны измениться при повороте осей x и z на весьма малый угол около оси y . В этом случае мы найдём, очевидно, следующие равенства:

$$A = B, \quad A_1 = B_2, \quad A_2 = B_1 = B_2 - 2D_1, \quad D_1 = D_2.$$

Следовательно, выражения (53) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \left[A + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \psi(t), \\ t_{yy} &= \left[A + A_1 \frac{\partial v}{\partial y} + A_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \psi(t), \\ t_{zz} &= \left[A + A_1 \frac{\partial w}{\partial z} + A_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \psi(t), \\ t_{xy} &= \frac{A_1 - A_2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \psi(t), \\ t_{xz} &= \frac{A_1 - A_2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \psi(t), \\ t_{yz} &= \frac{A_1 - A_2}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \psi(t). \end{aligned} \right\} (54)$$

Эти выражения показывают, что в рассматриваемом случае среда симметрична и около линий, параллельных оси z . Кроме того, легко видеть, что выражения (54) сохраняют свой вид при всяком выборе осей координат. Следовательно, рассматриваемая среда симметрична относительно всякого направления. Подобную среду мы назовём *средой с постоянной упругостью* или *изотропной*. Выражения сил молекулярных для такой среды будут сходны с выражениями (54), за исключением величин, зависящих от температуры.

Полагая

$$A_i = \lambda_i, \quad A_2^i = k_i, \quad A_1^i - A_2^i = \kappa_i, \quad (55)$$

мы представим тепловые силы следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \psi(t) \left[\lambda_1 + (k_1 + \kappa_1) \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right], \\ t_{yy} &= \psi(t) \left[\lambda_1 + (k_1 + \kappa_1) \frac{\partial v}{\partial y} + k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right], \\ t_{zz} &= \psi(t) \left[\lambda_1 + (k_1 + \kappa_1) \frac{\partial w}{\partial z} + k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], \\ t_{xy} &= \frac{\kappa_1 \psi(t)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ t_{xz} &= \frac{\kappa_1 \psi(t)}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ t_{yz} &= \frac{\kappa_1 \psi(t)}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} (56)$$

Молекулярные силы для тел изотропных мы представим выражениями:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= \lambda + (k + \kappa) \frac{\partial u}{\partial x} + k \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ p_{yy} &= \lambda + (k + \kappa) \frac{\partial v}{\partial y} + k \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ p_{zz} &= \lambda + (k + \kappa) \frac{\partial w}{\partial z} + k \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ p_{xy} &= \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ p_{xz} &= \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ p_{yz} &= \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} (57)$$

13. Теперь мы перейдём к упрощению выражений тепловых токов. Рассмотрим величину q_x .

Если среда симметрична относительно плоскостей, перпендикулярных к оси x , то коэффициенты в выражениях тепловых токов должны оставаться без изменения при перемене x на $-x$. Но при этом, как показывают выражения (16), величина q_x изменяет свой знак, сохраняя величину. Обращая внимание на знаки производных перемещений и температуры (§ 8), мы заключаем, что только те коэффициенты в выражении q_x должны быть удержаны, которые входят в члены, изменившие свои знаки. Поэтому выражения (36) в рассматриваемом случае будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1'' &= C_1 + C_1^1 \frac{\partial u}{\partial x} + C_1^2 \frac{\partial v}{\partial y} + C_1^3 \frac{\partial w}{\partial z} + C_1^6 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \Omega_2'' &= C_2^4 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + C_2^5 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \Omega_3'' &= C_3^4 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + C_3^5 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

причём

$$q_x = \left[\Omega_1'' \frac{\partial t}{\partial x} + \Omega_2'' \frac{\partial t}{\partial y} + \Omega_3'' \frac{\partial t}{\partial z} \right] \varphi(t). \quad (59)$$

14. Если среда симметрична относительно плоскостей, перпендикулярных к y , то при перемене y на $-y$ коэффициенты в выражениях тепловых токов должны оставаться без изменения. Но q_x не меняет при этом своего знака, а потому в его выражении мы должны удержать коэффициенты в членах, не изменивших своего знака. Обращая внимание на знаки производных перемещений и температуры (§ 9), выражения (58) приводятся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1'' &= C_1 + C_1^1 \frac{\partial u}{\partial x} + C_1^2 \frac{\partial v}{\partial y} + C_1^3 \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \Omega_2'' &= C_2^4 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \Omega_3'' &= C_3^5 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

причём

$$q_x = \left[\Omega_1'' \frac{\partial t}{\partial x} + \Omega_2'' \frac{\partial t}{\partial y} + \Omega_3'' \frac{\partial t}{\partial z} \right] \varphi(t). \quad (61)$$

Если, кроме того, среда симметрична и около плоскостей, перпендикулярных к оси z , то легко из рассмотрения предыдущих выражений написать величины тепловых токов для среды с тройной симметрией. Именно, вводя новые обозначения для постоянных, находим:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \varphi(t) \left[A + A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial v}{\partial y} + A_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right] \frac{\partial t}{\partial x} + \\ &+ \varphi(t) A_4 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial t}{\partial y} + \varphi(t) A_5 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial t}{\partial z}, \\ q_y &= \varphi(t) \left[B + B_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial v}{\partial y} + B_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right] \frac{\partial t}{\partial y} + \\ &+ \varphi(t) B_4 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial t}{\partial z} + \varphi(t) B_5 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial t}{\partial x}, \\ q_z &= \varphi(t) \left[C + C_1 \frac{\partial u}{\partial x} + C_2 \frac{\partial v}{\partial y} + C_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right] \frac{\partial t}{\partial z} + \\ &+ \varphi(t) C_4 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial t}{\partial x} + \varphi(t) C_5 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial t}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

15. Если среда симметрична около линий, параллельных известному направлению, например оси x , то коэффициенты тепловых токов не должны измениться при повороте осей y, z на весьма малый угол ε около оси x . Обращая внимание на знаки производных перемещений и температуры (§ 11) и на следующие соотношения:

$$\frac{\partial t}{\partial x'} = \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial t}{\partial y'} = \frac{\partial t}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial t}{\partial z}, \quad \frac{\partial t}{\partial z'} = \frac{\partial t}{\partial z} - \varepsilon \frac{\partial t}{\partial y},$$

$$q_{x'} = q_x, \quad q_{y'} = q_y + \varepsilon q_z, \quad q_{z'} = q_z - \varepsilon q_y,$$

мы находим, что для удовлетворения всех этих условий необходимо допустить следующие равенства, аналогичные с найденными для сил упругости в тех же условиях:

$$A_2 = A_3, \quad A_4 = A_5, \quad B = C, \quad B_1 = C_1, \quad B_4 = C_5,$$

$$B_3 = C_2, \quad B_2 = C_3 = 2B_4 + B_3, \quad B_5 = C_4.$$

Если среда симметрична и около линий, параллельных оси y , то, как легко видеть, к предыдущим равен-

ствам нужно прибавить ещё следующие:

$$B_1 = B_3, \quad B_4 = B_5, \quad A = C, \quad A_2 = C_2, \quad A_5 = C_4, \\ A_3 = C_1, \quad A_1 = C_3 = 2A_5 + A_3, \quad A_4 = C_5.$$

Из этих равенств и выведенных выше вытекают следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} A_1 = B_2 = C_3 = 2A_4 + A_2, \\ A_2 = A_3 = B_1 = B_3 = C_1 = C_2, \\ A_4 = A_5 = B_4 = B_5 = C_4 = C_5, \\ A = B = C. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Эти выражения показывают, что в данном случае среда в тепловом отношении будет симметрична и около линий, параллельных оси z . Рассматриваемый случай имеет, следовательно, место для среды *изотропной*.

Выражения, найденные выше, указывают на совершенно сходное строение формул тепловых токов и тепловых сил. Мы не будем останавливаться далее на этой аналогии, которая может иметь глубокое физическое значение. Чтобы сделать её более очевидной, мы введём те же обозначения для постоянных, как и в выражениях тепловых сил, только с иными индексами.

Полагая

$$A = \lambda_2, \quad A_2 = k_2, \quad A_4 = \frac{\kappa_2}{2}, \quad (64)$$

мы находим из выражений (62) с помощью соотношений (63):

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \left[\lambda_2 + (k_2 + \kappa_2) \frac{\partial u}{\partial x} + k_2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \varphi(t) \frac{\partial t}{\partial x} + \\ &+ \frac{\kappa_2}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \varphi(t) \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\kappa_2}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \varphi(t) \frac{\partial t}{\partial z}; \\ q_y &= \left[\lambda_2 + (k_2 + \kappa_2) \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \varphi(t) \frac{\partial t}{\partial y} + \\ &+ \frac{\kappa_2}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \varphi(t) \frac{\partial t}{\partial z} + \frac{\kappa_2}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \varphi(t) \frac{\partial t}{\partial x}; \\ q_z &= \left[\lambda_2 + (k_2 + \kappa_2) \frac{\partial w}{\partial z} + k_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \varphi(t) \frac{\partial t}{\partial z} + \\ &+ \frac{\kappa_2}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right] \varphi(t) \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\kappa_2}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \varphi(t) \frac{\partial t}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

В этих выражениях мы можем подставить вместо t величину S из соотношения:

$$\int \varphi(t) dt = S. \quad (66)$$

II. ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕЛАХ ПОСТОЯННОЙ УПРУГОСТИ

Введение удлинений и скольжений. 16. Представим себе внутри тела, когда оно находится в начальном состоянии равновесия, три весьма малые линии Mx , My , Mz , параллельные осям прямоугольных координат и проходящие через одну и ту же точку M . При изменении термомеханических условий взятые нами линии примут новые положения M_1x_1 , M_1y_1 , M_1z_1 , весьма мало наклонённые одна к другой.

Означим чрез

$$d_x, d_y, d_z \quad (67)$$

удлинения весьма малых линий Mx , My , Mz , отнесённые к единице длины.

Положим также углы

$$\left. \begin{aligned} y_1 M_1 z_1 &= \frac{\pi}{2} - g_{yz}, \\ z_1 M_1 x_1 &= \frac{\pi}{2} - g_{zx}, \\ x_1 M_1 y_1 &= \frac{\pi}{2} - g_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

где g_{yz} , g_{zx} , g_{xy} суть весьма малые величины, на которые изменились прямые углы между взятыми нами линиями. Эти величины мы будем называть *скольжениями*; они показывают, насколько сближаются между собой линии, лежащие в одной и той же плоскости. Величины скольжений положительны в том случае, когда соответственные углы уменьшаются.

Найдём соотношения между указанными величинами и производными перемещений u , v , w .

Координаты точки M до перемещения означим через x, y, z ; после перемещения они будут $x+u, y+v, z+w$.

Означим через $x+\Delta x, y, z$ координаты точки N , лежащей на другой оконечности весьма малой линии Mx . После перемещения эти координаты будут:

$$x+u+\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x, \quad y+v+\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x, \quad z+w+\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x.$$

С другой стороны, расстояние MN , равное Δx , после перемещения сделалось равным величине

$$\Delta x(1+d_x);$$

следовательно,

$$(1+d_x)^2 = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2. \quad (69)$$

Координаты точки N_1 , лежащей на другом конце весьма малой линии My , были до перемещений $x, y+\Delta y, z$; после же перемещений они будут:

$$x+u+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y, \quad y+v+\Delta y+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y, \quad z+w+\frac{\partial w}{\partial y}\Delta y.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2}-g_{xy}\right) &= g_{xy} = \\ &= \frac{1+\frac{\partial u}{\partial x}}{1+d_x} \cdot \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{1+d_y} + \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{1+d_x} \cdot \frac{1+\frac{\partial v}{\partial y}}{1+d_y} + \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1+d_x} \cdot \frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{1+d_y}. \end{aligned} \quad (70)$$

Так как u, v, w очень малы, то, пренебрегая их произведениями, мы находим из выражений (69) и (70) и им подобных следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} d_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & g_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ d_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & g_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ d_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & g_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Теперь нетрудно определить и величину кубического расширения θ . Элементарный параллелепипед, объём которого до перемещений был $dx dy dz$, после перемещений будет:

$$dx dy dz (1 + \theta) = dx (1 + d_x) dy (1 + d_y) dz (1 + d_z),$$

или, пренебрегая произведениями величин весьма малых и делая сокращения, находим:

$$\theta = d_x + d_y + d_z. \quad (72)$$

17. Подставим найденные величины удлинений и скольжений в выражения сил (56) и (57).

Находим:

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \psi(t) [\lambda_1 + (k_1 + x_1) d_x + k_1 (d_y + d_z)], \\ t_{yy} &= \psi(t) [\lambda_1 + (k_1 + x_1) d_y + k_1 (d_x + d_z)], \\ t_{zz} &= \psi(t) [\lambda_1 + (k_1 + x_1) d_z + k_1 (d_x + d_y)], \\ t_{xy} &= \frac{x_1 \psi(t)}{2} g_{xy}, \\ t_{xz} &= \frac{x_1 \psi(t)}{2} g_{xz}, \\ t_{yz} &= \frac{x_1 \psi(t)}{2} g_{yz}, \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

и

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= \lambda + (k + x) d_x + k (d_y + d_z), \\ p_{yy} &= \lambda + (k + x) d_y + k (d_x + d_z), \\ p_{zz} &= \lambda + (k + x) d_z + k (d_x + d_y), \\ p_{xy} &= \frac{x}{2} g_{xy}, \\ p_{xz} &= \frac{x}{2} g_{xz}, \\ p_{yz} &= \frac{x}{2} g_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Этим выражениям можно дать ещё иной вид, вводя величину кубического расширения θ , а именно:

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \psi(t) [\lambda_1 + k_1\theta + \alpha_1 d_x], & t_{xy} &= \frac{\alpha_1 \gamma(t)}{2} g_{xy}, \\ t_{yy} &= \psi(t) [\lambda_1 + k_1\theta + \alpha_1 d_y], & t_{xz} &= \frac{\alpha_1 \gamma'(t)}{2} g_{xz}, \\ t_{zz} &= \psi(t) [\lambda_1 + k_1\theta + \alpha_1 d_z], & t_{yz} &= \frac{\alpha_1 \gamma'(t)}{2} g_{yz}, \end{aligned} \right\} (75)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= \lambda + k\theta + \alpha d_x, & p_{xy} &= \frac{\alpha}{2} g_{xy}, \\ p_{yy} &= \lambda + k\theta + \alpha d_y, & p_{xz} &= \frac{\alpha}{2} g_{xz}, \\ p_{zz} &= \lambda + k\theta + \alpha d_z, & p_{yz} &= \frac{\alpha}{2} g_{yz}. \end{aligned} \right\} (76)$$

Замечая, что величины, на которые умножается функция $\psi(t)$ в выражениях тепловых сил, могут быть получены из выражений (76), ставя только индексы у постоянных, мы представим тепловые силы ещё в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \psi(t) p'_{xx}, & t_{xy} &= \psi(t) p_{xy}, \\ t_{yy} &= \psi(t) p'_{yy}, & t_{xz} &= \psi(t) p'_{xz}, \\ t_{zz} &= \psi(t) p'_{zz}, & t_{yz} &= \psi(t) p'_{yz}. \end{aligned} \right\} (77)$$

Определение вида функции $\psi(t)$. 18. Уравнения (6) указывают на соотношение между силами упругости и внешним давлением на поверхность тела. Действительно, это давление должно уравновешивать силы упругости, действующие у поверхности тела; означая поэтому внешнее давление через P , причём это последнее может быть различно на различных частях поверхности, мы находим из соотношений (6) и (3):

$$\left. \begin{aligned} P \cos(Px) &= (t_{xx} - p_{xx}) \cos(nx) + \\ &+ (t_{xy} - p_{xy}) \cos(ny) + (t_{xz} - p_{xz}) \cos(nz), \\ P \cos(Py) &= (t_{xy} - p_{xy}) \cos(nx) + \\ &+ (t_{yy} - p_{yy}) \cos(ny) + (t_{yz} - p_{yz}) \cos(nz), \\ P \cos(Pz) &= (t_{xz} - p_{xz}) \cos(nx) + \\ &+ (t_{yz} - p_{yz}) \cos(ny) + (t_{zz} - p_{zz}) \cos(nz). \end{aligned} \right\} (78)$$

Предыдущие соотношения дают возможность определить значение некоторых постоянных коэффициентов, входящих в выражение сил.

Посмотрим, во что обратятся соотношения (78) при начальном состоянии равновесия тела. В этом случае тело испытывает на своей поверхности начальное нормальное давление P_0 , и величины перемещений u , v , w равны нулю. Замечая, что направление давления P_0 совпадает с нормалью на поверхности, все три выражения (78) приводятся к одному следующему:

$$P_0 = \lambda_1 \psi(t_0) - \lambda. \quad (79)$$

Следовательно, присутствие коэффициентов λ_1 и λ обуславливается тем, что исходным начальным состоянием тела мы принимаем такое, при котором тело было равномерно сжато во всех своих частях давлением, нормальным и одинаковым на всей поверхности, причём температура тела была равномерна.

Выражение (79) указывает также, какими единицами измеряются постоянные коэффициенты, входящие в выражение сил.

Они должны быть выражаемы теми же единицами, как и силы. К этому же заключению мы можем прийти из рассматривания соотношений (75) и (76), замечая, что величины удлинений и скольжений представляют отвлечённые числа.

Переходя от этих соображений к выражениям тепловых токов, казалось бы, что так как входящие в них постоянные коэффициенты представляются суммами, сходными с теми, которые вошли в выражения сил, эти коэффициенты тоже должны выражаться единицами сил. Между тем выбор единицы зависит от выбора тех единиц, которыми измеряется напряжение теплового обмена между двумя массами, равными единице, на расстоянии, равном единице, при разности температур, равной единице, и в течение единицы времени. Это напряжение теплового тока мы будем предполагать измеренным количеством единиц тепла, и, следовательно, коэф-

коэффициенты, входящие в выражение тепловых токов, будут измеряться теми же единицами.

19. После предыдущих замечаний мы приступим к определению функции $\psi(t)$. Мы будем исходить из того факта, что всякое твердое тело может быть нагрето до произвольной и равномерной температуры под одним и тем же давлением. Мы предположим, кроме того, что температура не настолько повышается, чтобы изменить физическое состояние тела.

Рассмотрим, какие вытекают условия для соотношений (78), если, не изменяя давления P_0 , под которым находится тело, мы повысим температуру окружающей его среды до величины t и будем сообщать этой среде столько тепла, чтобы повысить температуру тела во всех его частях до той же величины t . Когда наступит равновесие, все части тела будут одинаково расширены, и, означая через a_t коэффициент линейного расширения тела для температуры t , весьма малый, как показывает опыт, мы будем иметь:

$$d_x = d_y = d_z = a_t (t - t_0).$$

С другой стороны, так как мы предполагаем, что тело не находится под действием каких-либо внешних сил, все скольжения обращаются в нуль, ибо тело, расширяясь, остаётся, как показывает опыт, себе подобным. Вследствие этого выражения (78) приведется к одному следующему:

$$P_0 = \psi(t) [\lambda_1 + (3k_1 + \alpha_1) a_t (t - t_0)] - [\lambda + (3k + \alpha) a_t (t - t_0)]. \quad (80)$$

Отсюда

$$\psi(t) = \frac{P_0 + \lambda + (3k + \alpha) a_t (t - t_0)}{\lambda_1 + (3k_1 + \alpha_1) a_t (t - t_0)}.$$

Пренебрегая квадратом величины коэффициента линейного расширения a_t и полагая

$$b = \frac{3k + \alpha}{\lambda_1} - \frac{P_0 + \lambda}{\lambda_1} \cdot \frac{3k_1 + \alpha_1}{\lambda_1}, \quad (81)$$

находим:

$$\psi(t) = \frac{P_0 + \lambda}{\lambda_1} + ba_t(t - t_0). \quad (82)$$

Опыты показывают, что коэффициент линейного расширения a_t с достаточной точностью представляется выражением

$$a_t = \alpha + \alpha_1 t,$$

где α_1 — величина, очень малая сравнительно с α . Поэтому $\psi(t)$ можно ещё представить следующим образом:

$$\psi(t) = \left[\frac{P_0 + \lambda}{\lambda_1} - b\alpha t_0 \right] + b(\alpha - \alpha_1 t_0)t + b\alpha_1 t^2. \quad (82')$$

Мы будем представлять функцию $\psi(t)$ в виде:

$$\psi(t) = N + N_1 t, \quad (83)$$

где

$$N = \frac{P_0 + \lambda}{\lambda_1} - ba_t t_0, \quad N_1 = ba_t. \quad (83')$$

Величины N_1 и N мы можем рассматривать весьма мало изменяющимися с температурой, по малости величины α_1 . Кроме того, они представляют отвлечённые числа, и величина N_1 — одного порядка с коэффициентом линейного расширения a_t .

Неопределённые уравнения равновесия и движения частиц. 20. Отыщем уравнения равновесия бесконечно малого параллелепипеда внутри тела, внешняя поверхность которого находится под действием упругих сил. Параллельные стороны этого параллелепипеда находятся под действием сил, противоположных по направлению и отличающихся бесконечно малыми величинами одного порядка с рёбрами параллелепипеда.

Так, силы, действующие на параллелепипед параллельно оси x , будут:

на обе стороны, перпендикулярные к оси x :

$$P_{xx} dy dz \quad \text{и} \quad - \left(P_{xx} + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz;$$

на стороны, перпендикулярные к y :

$$P_{yx} dx dz \quad \text{и} \quad - \left(P_{yx} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz;$$

на стороны, перпендикулярные к z :

$$P_{zx} dx dy \quad \text{и} \quad - \left(P_{zx} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy.$$

Для равновесия параллелепипеда необходимо, чтобы сумма этих сил и слагающей $-\rho X dx dy dz$ внешних сил, действующих на параллелепипед по оси x , равнялась нулю. Таким образом найдём первое из следующих уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0, \\ \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0, \\ \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} + \rho Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Последние два уравнения также получаются, приравнявая нулю слагающие по осям y, z сил, действующих на параллелепипед. Здесь Y, Z означают слагающие внешних сил по осям y, z , действующие на единицу массы, и ρ означает плотность. Чтобы из найденных выражений получить уравнения движения, нужно по правилу д'Аламберта заменить силы X, Y, Z потерянными, т. е. вставить

$$X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Другие три уравнения равновесия, именно уравнения моментов, сами собою удовлетворяются вследствие соотношений (4), пренебрегая бесконечно малыми величинами третьего порядка пред величинами второго.

Раскрывая выражения (84), мы можем придать им различный вид. Во-первых, они могут быть представлены таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0, \\ \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0, \\ \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \rho Z &= 0. \end{aligned} \right\} (85)$$

Этим выражениям можно дать ещё такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \psi(t) \left[\frac{\partial p'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p'_{xz}}{\partial z} \right] + \\ + N_1 \left[p'_{xx} \frac{\partial t}{\partial x} + p'_{xy} \frac{\partial t}{\partial y} + p'_{xz} \frac{\partial t}{\partial z} \right] - \\ - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0, \\ \psi(t) \left[\frac{\partial p'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p'_{yz}}{\partial z} \right] + \\ + N_1 \left[p'_{xy} \frac{\partial t}{\partial x} + p'_{yy} \frac{\partial t}{\partial y} + p'_{yz} \frac{\partial t}{\partial z} \right] - \\ - \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0, \\ \psi(t) \left[\frac{\partial p'_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p'_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p'_{zz}}{\partial z} \right] + \\ + N_1 \left[p'_{xz} \frac{\partial t}{\partial x} + p'_{yz} \frac{\partial t}{\partial y} + p'_{zz} \frac{\partial t}{\partial z} \right] - \\ - \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \rho Z &= 0. \end{aligned} \right\} (86)$$

Эти выражения могут быть преобразованы ещё далее, заменяя величины p' и p из выражений (75) и (76). Означая, именно, дифференциальный параметр второго порядка через Δ_2 , т. е.

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

Мы находим:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\psi}(t) \left[\left(k_1 + \frac{x_1}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{x_1}{2} \Delta_2 u \right] + \\
 + N_1 \left[p'_{xx} \frac{\partial t}{\partial x} + p'_{xy} \frac{\partial t}{\partial y} + p'_{xz} \frac{\partial t}{\partial z} \right] - \\
 - \left(k + \frac{x}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{x}{2} \Delta_2 u + \rho X = 0, \\
 \dot{\psi}(t) \left[\left(k_1 + \frac{x_1}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{x_1}{2} \Delta_2 v \right] + \\
 + N_1 \left[p'_{xy} \frac{\partial t}{\partial x} + p'_{yy} \frac{\partial t}{\partial y} + p'_{yz} \frac{\partial t}{\partial z} \right] - \\
 - \left(k + \frac{x}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{x}{2} \Delta_2 v + \rho Y = 0, \\
 \dot{\psi}(t) \left[\left(k_1 + \frac{x_1}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{x_1}{2} \Delta_2 w \right] + \\
 + N_1 \left[p'_{xz} \frac{\partial t}{\partial x} + p'_{yz} \frac{\partial t}{\partial y} + p'_{zz} \frac{\partial t}{\partial z} \right] - \\
 - \left(k + \frac{x}{2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{x}{2} \Delta_2 w + \rho Z = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Определение работы молекулярных и тепловых сил. 21. Чтобы отыскать работу сил упругости при изменении перемещений u, v, w на весьма малые величины $\delta u, \delta v, \delta w$, мы приведём сначала силы, входящие в уравнения равновесия, к их действительным величинам, умножая на элемент объёма $dx dy dz$, и затем умножим их соответственно на $\delta u, \delta v, \delta w$ и возьмём от суммы полученных таким образом выражений тройной интеграл, распространённый на весь объём, занимаемый телом.

Производя эти действия над выражениями (84), мы найдём:

$$\iiint \left\{ \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} \right) \delta u + \rho X \delta u + \right. \\
 + \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z} \right) \delta v + \rho Y \delta v + \\
 \left. + \left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right) \delta w + \rho Z \delta w \right\} dx dy dz = 0. \quad (88)$$

Интегрируя это выражение по частям, находим:

$$\begin{aligned}
 & \int \int \int_0^1 (P_{xx} dy dz + P_{xy} dx dz + P_{xz} dy dx) \delta u - \\
 & - \int \int \int \left(P_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + P_{xy} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + P_{xz} \frac{\partial \delta u}{\partial z} \right) dx dy dz + \\
 & + \int \int \int_0^1 (P_{xy} dy dz + P_{yy} dx dz + P_{yz} dy dx) \delta v - \\
 & - \int \int \int \left(P_{xy} \frac{\partial \delta v}{\partial x} + P_{yy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + P_{yz} \frac{\partial \delta v}{\partial z} \right) dx dy dz + \\
 & + \int \int \int_0^1 (P_{xz} dy dz + P_{yz} dx dz + P_{zz} dy dx) \delta w - \\
 & - \int \int \int \left(P_{xz} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + P_{yz} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + P_{zz} \frac{\partial \delta w}{\partial z} \right) dx dy dz + \\
 & + \int \int \int (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) \rho dx dy dz = 0. \quad (89)
 \end{aligned}$$

Означая через n внешний конец нормали к поверхности тела, через $d\sigma$ — элемент этой поверхности, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned}
 dy dz &= \mp d\sigma \cos(nx), & dx dz &= \mp d\sigma \cos(ny), \\
 dy dx &= \mp d\sigma \cos(nz);
 \end{aligned} \right\} (90)$$

поэтому, замечая, что подстановка \int_0^1 в выражении (89) означает, что величины, которым она предшествует, должны быть взяты для последовательных пределов переменной, по которой совершена интеграция, мы заключаем, что при подстановке величин (90) в уравнение (89) нижний отрицательный знак, соответствующий низшему пределу переменной, будет уничтожаться таким же отрицательным знаком при совершении подстановки \int_0^1 . Таким образом, двойные интегралы, входящие в выражение (89), заменятся интегралами, распространёнными на всю поверхность тела и имеющими вид:

$$\begin{aligned}
 & \int \int [P_{xx} \cos(nx) + P_{xy} \cos(ny) + P_{xz} \cos(nz)] \delta u d\sigma + \\
 & + \int \int [P_{xy} \cos(nx) + P_{yy} \cos(ny) + P_{yz} \cos(nz)] \delta v d\sigma + \\
 & + \int \int [P_{xz} \cos(nx) + P_{yz} \cos(ny) + P_{zz} \cos(nz)] \delta w d\sigma.
 \end{aligned}$$

Означая через P давление на поверхность тела, эти выражения с помощью соотношений (6) примут следующий простой вид:

$$\iint [P \cos (Px) \delta u + P \cos (Py) \delta v + P \cos (Pz) \delta w] d\sigma, \quad (90')$$

представляющий работу внешних давлений при изменении перемещений на δu , δv , δw . Величину (90') будем представлять выражением

$$\iint \delta L d\sigma, \quad (91)$$

где δL означает приращение работы внешних давлений на элемент поверхности.

Переставляя в выражении (89) знаки d и δ , вводя удлинения и скольжения и вставляя вместо сил упругости их выражения в молекулярных и тепловых силах из равенств (3), мы представим тройные интегралы, входящие в выражение (89), в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \iiint (p_{xx} \delta d_x + p_{yy} \delta d_y + p_{zz} \delta d_z + p_{xy} \delta g_{xy} + \\ & \quad + p_{xz} \delta g_{xz} + p_{yz} \delta g_{yz}) dx dy dz, \quad (92) \\ - & \iiint (t_{xx} \delta d_x + t_{yy} \delta d_y + t_{zz} \delta d_z + t_{xy} \delta g_{xy} + \\ & \quad + t_{xz} \delta g_{xz} + t_{yz} \delta g_{yz}) dx dy dz. \quad (93) \end{aligned}$$

Первое из этих выражений, очевидно, есть не что иное, как работа молекулярных сил, т. е. та внутренняя работа, которая совершается, побеждая частичные силы. Выражение (92), как легко видеть, представляет точный дифференциал от функции $\iiint J_m dx dy dz$:

$$\begin{aligned} J_m = & \lambda (d_x + d_y + d_z) + \frac{\kappa + k}{2} (d_x^2 + d_y^2 + d_z^2) + \\ & + k (d_x d_y + d_x d_z + d_y d_z) + \frac{\kappa}{4} (g_{xy}^2 + g_{yz}^2 + g_{xz}^2). \quad (94) \end{aligned}$$

Выражение же (93) есть не что иное, как приращение работы сил тепловых. Эта работа не есть точный

дифференциал, но, обращая внимание на соотношение (77) и означая через J_t функцию, получаемую из (94), ставя индексы у постоянных, мы можем представить выражение (93) в следующем виде:

$$- \int \int \int \psi(t) \delta J_t dx dy dz. \quad (95)$$

Итак, мы приходим к заключению, что, переходя от всего тела к его элементу, приращение работы молекулярных сил в элементе представится выражением

$$\delta J_m dx dy dz;$$

приращение же работы сил тепловых — через

$$- \psi(t) \delta J_t dx dy dz.$$

Выражения J_m и, следовательно, J_t принимают вид более простой в том случае, когда элемент испытывает со всех сторон равные нормальные давления. В этом случае $d_x = d_y = d_z = \frac{\theta}{3}$ и $g_{xy} = g_{yz} = g_{xz} = 0$. Следовательно,

$$J_m = \lambda \theta + \frac{3k + x}{2 \cdot 9} \theta^2. \quad (96)$$

Итак, означая ещё через δL_1 работу внешних сил в элементе, выражение (89) примет следующий упрощённый вид:

$$\int \int \delta L dz + \int \int \int \delta L_1 dx dy dz + \int \int \int \delta J_m dx dy dz - \\ - \int \int \int \psi(t) \delta J_t dx dy dz = 0. \quad (97)$$

Неопределённое уравнение термического движения и равновесия. 22. Отыщем математическое выражение количества тепла, приливающего к элементарному параллелепипеду. Тепловые токи, притекающие к одной его стороне и вытекающие через другую, ей параллельную, имеют одинаковые знаки и отличаются бесконечно малыми величинами одного порядка с рёб-

рами параллелепипеда. Таким образом, тепловые токи, проходящие через стороны, перпендикулярные к оси x , в течение бесконечно малого времени $d\tau$, будут:

$$q_x dy dz d\tau \quad \text{и} \quad \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy dz d\tau;$$

через стороны, перпендикулярные к y :

$$q_y dx dz d\tau \quad \text{и} \quad \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx dz d\tau;$$

через стороны, перпендикулярные к z :

$$q_z dx dy d\tau \quad \text{и} \quad \left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \right) dx dy d\tau.$$

Следовательно, количество тепла, остающееся в элементе и которое мы означим через $qd\tau dx dy dz$, будет по разделении на $d\tau dx dy dz$:

$$q = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}; \quad (98)$$

величина q отнесена здесь к единице объёма и единице времени.

Выражения входящих сюда тепловых токов (65) могут быть упрощены точно так же, как и выражения тепловых сил. Замечая, в самом деле, что коэффициенты у производных по времени величины t отличаются от выражений (57) только постоянными и фактором $\varphi(t)$, мы можем представить тепловые токи в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \varphi(t) \left[p''_{xx} \frac{\partial t}{\partial x} + p''_{xy} \frac{\partial t}{\partial y} + p''_{xz} \frac{\partial t}{\partial z} \right], \\ q_y &= \varphi(t) \left[p''_{xy} \frac{\partial t}{\partial x} + p''_{yy} \frac{\partial t}{\partial y} + p''_{yz} \frac{\partial t}{\partial z} \right], \\ q_z &= \varphi(t) \left[p''_{xz} \frac{\partial t}{\partial x} + p''_{yz} \frac{\partial t}{\partial y} + p''_{zz} \frac{\partial t}{\partial z} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (98')$$

23. Теперь нам нужно исследовать, что происходит с количеством тепла, которое удерживается элементом. При этом исследовании нам нужно установить условия, в которых оно будет произведено.

Во-первых, мы принимаем, как в §§ 20, 21, что противодействие, оказываемое телом близ поверхности, равно внешним давлениям на ту же поверхность.

Во-вторых, мы принимаем, что внешние силы не подействовали на тело вдруг, но если они постоянны, то действовали и в том состоянии равновесия, в котором находилось тело до того процесса изменений, который изучается.

В-третьих, поверхности тела не было вначале сообщено никаких сотрясений или вообще живой силы, путём ли механическим или мгновенным приведением значительного количества тепла.

Только при этих предположениях величины перемещений и приращений температуры могут быть рассматриваемы как непрерывные функции координат, что составляло существенное условие при выводе найденных нами основных уравнений и математических выражений взаимодействий.

Теперь начнём с изучения термомеханического процесса во всем теле и затем перейдём к тому же процессу в элементе. Означим через $Q\delta t$ количество тепла, притекающего к телу из окружающей его среды. Количество тепла, притекающее к элементу, мы будем считать положительным, отдаваемое же — отрицательным.

Через δW означим приращение в элементе живой силы незаметного молекулярного движения, называемого теплотой. Следовательно, приращение во всём теле того количества тепла, которое не изменит своего состояния, не перейдёт в механическую работу, представится в виде

$$\iiint \delta W \, dx \, dy \, dz.$$

Затем определим приращение дисгрегационной работы в элементе. Это название мы даём работе, истрачиваемой теплотой при изменении расположения частиц в теле. При этом теплота должна преодолевать, с одной стороны, молекулярные силы, с другой — внешние силы и давления. Работа тепла должна при этом равняться

сумме работ частичных сил, внешних сил и давлений, за исключением живой силы заметного движения частиц.

Заметим, что тепловые силы не должны входить в вычисление дисгрегации, в вычисление тех сопротивлений, которые должны быть побеждены теплом, потому именно, что этими тепловыми силами теплота и совершает механическую работу.

Будем считать работу сил сопротивляющихся отрицательной, а работу сил движущих — положительной. Работа сил, сопротивляющихся расширительному действию тепла, будет по предыдущему:

$$- \left\{ \iiint \delta J_m dx dy dz + \iint \delta L dz + \iiint \delta L_1 dx dy dz \right\}.$$

Механическая работа, совершаемая теплотой, будет равна этому выражению, взятому с противным знаком, или же по соотношению (97) представится величиной

$$\iiint \psi(t) \delta J_t dx dy dz,$$

откуда мы заключаем, что дисгрегационная работа в элементе пропорциональна функции $\psi(t)$ или абсолютной температуре¹⁾.

По первому закону механической теории тепла, закону сохранения энергии, имеем, означая через A

¹⁾ Если означим через v среднюю скорость частицы в периодическом движении, ощущаемом нами как тепло, и назовём через m массу частицы, то можно принять $T = \frac{mv^2}{2}$, где T есть абсолютная температура. По выражению (24) величина $\psi(t) \Big|_{t=t'=t''} = \psi(t', t'')$, причём функция $\psi(t', t'')$ симметрична относительно t' и t'' . Поэтому, обращая внимание на выражение (83), всего естественнее предположить, что $\psi(t', t'') = \sqrt{N + N_1 t'} \sqrt{N + N_1 t''} = N_1 \sqrt{T' T''} = N_1 \sqrt{\frac{m' m''}{2}} v' v''$, т. е. тепловая сила между двумя частицами пропорциональна произведению средних скоростей периодического движения, составляющего сущность тепла.

обратную величину механического эквивалента тепла:

$$\frac{Q\delta\tau}{A} = \iiint \delta W \, dx \, dy \, dz + \iiint \psi(t) \delta J_t \, dx \, dy \, dz. \quad (99)$$

Если не были соблюдены условия, выставленные в начале этого параграфа, то мы пришли бы к иному заключению.

Положим, например, что тело находится в соприкосновении с источником тепла, в то время как давления на его поверхность быстро уменьшились на конечные величины. Очевидно, что количество тепла, которое получит тело из окружающей среды, будет меньше, чем в случае, когда давление на поверхность уменьшалось бы постепенно и теплота была бы вынуждена совершить большую работу, причём её прилив подчинялся бы уравнению (99). Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\frac{Q\delta\tau}{A} < \iiint \delta W \, dx \, dy \, dz + \iiint \psi(t) \delta J_t \, dx \, dy \, dz. \quad (100)$$

Пока мы будем рассматривать только первый случай и от выражения (99), имеющего место для всего тела, перейдём к элементу. Найденное таким путём выражение первого закона механической теории тепла мы выведем ещё иными приёмами, которые дадут также возможность определить величину δW .

Определим сначала величину Q . Мы обратимся к выражению (9), т. е. к

$$q_n = q_x \cos(nx) + q_y \cos(ny) + q_z \cos(nz). \quad (101)$$

Это выражение показывает количество тепла, проходящего через элемент, нормаль которого обозначена буквой n . Следовательно, подобным же выражением представится количество тепла, входящего в тело через элемент его поверхности, нормаль которого есть n . Следовательно, означая элемент поверхности через $d\tau$ и суммируя выражение (101) для всей поверхности, находим:

$$Q = \iint [q_x \cos(nx) + q_y \cos(ny) + q_z \cos(nz)] \, d\tau. \quad (102)$$

Обращая же внимание на соотношения (90), мы можем представить величину Q в следующем виде:

$$Q = \int \int \Big|_0^1 q_x dy dz + \int \int \Big|_0^1 q_y dx dz + \int \int \Big|_0^1 q_z dx dy;$$

но

$$\int \int \Big|_0^1 q_x dy dz = \int \int \int \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz,$$

$$\int \int \Big|_0^1 q_y dx dz = \int \int \int \frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy dz,$$

$$\int \int \Big|_0^1 q_z dx dy = \int \int \int \frac{\partial q_z}{\partial z} dx dy dz,$$

следовательно,

$$Q = \int \int \int \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] dx dy dz,$$

или, обращая внимание на соотношение (98),

$$Q = \int \int \int q dx dy dz. \quad (103)$$

Подставляя эту величину в выражение (100), находим:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{A} \int \int \int q dx dy dz &= \\ &= \int \int \int \delta W dx dy dz + \int \int \int \psi(t) \delta J_t dx dy dz; \end{aligned}$$

переходя к элементу, находим, по сокращении на $dx dy dz$:

$$\frac{q \delta \tau}{A} = \delta W + \psi(t) \delta J_t. \quad (104)$$

Это и есть искомое неопределённое термическое уравнение. Мы выведем его ещё иными путями. Выведем его непосредственно.

Представим себе, что к элементу тела существует приток тепла, и элемент расширяется, побеждая сопротивления, т. е. силы, на него действующие. Неравномерное распределение сил, действующих на поверхность

элемента, заставляет его, расширяясь, принимать тот или другой вид.

Во всяком случае это расширение совершается за счёт прилившего тепла, часть которого идёт на механическую работу, действуя как сила тепловая, и эта часть представляется, следовательно, в единицах работы выражением

$$\psi(t) \delta J_t dx dy dz;$$

другая же часть идёт на повышение температуры элемента, оставаясь в форме тепла. Её мы означим через $\delta W dx dy dz$. Следовательно, по первому закону механической теории тепла

$$\frac{q \delta \tau}{A} = \delta W + \psi(t) \delta J_t. \quad (104')$$

Умножая это выражение на $dx dy dz$ и распространяя на всё тело, мы придём к соотношению (99).

24. Рассматривая элемент независимо от остальных частей тела, мы замечаем, что величины $t, d_x, d_y, d_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz}$ могут быть изменяемы независимо одна от другой. Поэтому выражение (104) представляет, в сущности, количество тепла, поглощаемого элементарным параллелепипедом при весьма малых изменениях независимых переменных $t, d_x, d_y, d_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz}$, и выражение (98) для величины q имеет место только в том случае, когда элемент рассматривается в связи с остальными частями тела.

Будем рассматривать элемент независимо от остального тела и заменим величину $q \delta \tau$ в выражении (104) через q .

Так как $t, d_x, d_y, d_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz}$ в настоящем случае должны быть рассматриваемы как независимые переменные, величины которых вполне определяют как термическое, так и механическое состояние элемента, мы можем представить величину δW в следующем наиболее общем виде:

$$\begin{aligned} \delta W = \varphi_1 \delta t + \varphi_2 \delta d_x + \varphi_3 \delta d_y + \varphi_4 \delta d_z + \\ + \varphi_5 \delta g_{xy} + \varphi_6 \delta g_{yz} + \varphi_7 \delta g_{xz}, \quad (105) \end{aligned}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ суть некоторые функции независимых переменных. Подставляя эту величину в выражение (104) и заменяя работу тепловых сил $\psi(t)\delta J_t$ другим её выражением из (93), находим:

$$\frac{\delta q}{A} = \varphi_1 \delta t + (\varphi_2 + t_{xx}) \delta d_x + (\varphi_3 + t_{yy}) \delta d_y + (\varphi_4 + t_{zz}) \delta d_z + \\ + (\varphi_5 + t_{xy}) \delta g_{xy} + (\varphi_6 + t_{yz}) \delta g_{yz} + (\varphi_7 + t_{xz}) \delta g_{xz}. \quad (106)$$

Если элемент не испытывает никаких изменений в форме, то, полагая вариации удлинений и скольжений равными нулю, находим, что количество тепла, принимаемого элементом, есть

$$A\varphi_1 \delta t;$$

следовательно, величина $A\varphi_1$ есть не что иное, как истинная теплоёмкость при постоянном объёме. Её мы означим через c_v . Следовательно,

$$c_v = A\varphi_1. \quad (107)$$

Если же элемент принимает тепло, не изменяя своей температуры, то, полагая в выражении (106) величину δt равной нулю, находим:

$$\frac{\delta q}{A} = (\varphi_2 + t_{xx}) \delta d_x + (\varphi_3 + t_{yy}) \delta d_y + (\varphi_4 + t_{zz}) \delta d_z + \\ + (\varphi_5 + t_{xy}) \delta g_{xy} + (\varphi_6 + t_{yz}) \delta g_{yz} + (\varphi_7 + t_{xz}) \delta g_{xz}. \quad (108)$$

Но, с другой стороны, тепло, приливающее к телу, не повышая его температуры, должно целиком переходить в механическую работу, действуя как сила тепловая. Следовательно, δq должно переходить в работу сил тепловых, потому что через их посредство теплота может совершать механическую работу. Итак,

$$\frac{\delta q}{A} = t_{xx} \delta d_x + t_{yy} \delta d_y + t_{zz} \delta d_z + t_{xy} \delta g_{xy} + t_{xz} \delta g_{xz} + t_{yz} \delta g_{yz}.$$

Сравнивая это выражение с (108), мы находим:

$$\varphi_2 \delta d_x + \varphi_3 \delta d_y + \dots + \varphi_6 \delta g_{yz} + \varphi_7 \delta g_{xz} = 0.$$

Но так как входящие сюда вариации не зависят друг от друга, то

$$\varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0, \dots, \varphi_6 = 0, \varphi_7 = 0.$$

Следовательно, из выражений (105) и (107) находим:

$$\delta W = \frac{c_v}{A} \delta t. \quad (109)$$

Уравнение (104) будет, следовательно:

$$\delta q = c_v \delta t + A\psi(t) \delta J_t. \quad (110)$$

25. Выражение (110) можно получить ещё иным путём, причём мы раскроем некоторые свойства величины c_v .

Будем означать через δU внутреннюю работу, т. е. ту работу, которая совершается внутри элемента; часть этой работы существует в виде живой силы тепла. Рассматривая элемент независимо от остальных частей тела, мы должны принимать, что на его поверхность действуют внешние давления $-P_{xx}$, $-P_{yy}$ и прочие, противоположные силам упругости. Поэтому внешняя работа элемента, или противодействие его внешним давлениям, представится выражением:

$$\begin{aligned} \delta L = P_{xx} \delta d_x + P_{yy} \delta d_y + P_{zz} \delta d_z + P_{xy} \delta g_{xy} + \\ + P_{xz} \delta g_{xz} + P_{yz} \delta g_{yz}. \end{aligned} \quad (111)$$

По первому закону механической теории тепла мы имеем:

$$\frac{\delta q}{A} = \delta U + P_{xx} \delta d_x + P_{yy} \delta d_y + P_{zz} \delta d_z + \dots + P_{yz} \delta g_{yz}. \quad (112)$$

Что касается внутренней работы U , то она вполне определяется начальным и конечным состоянием тела. Следовательно, δU должно быть точным дифференциалом некоторой функции независимых переменных $t, d_x,$

$d_y, d_z, g_{xy}, g_{yz}, g_{xz}$. Поэтому выражение (112) мы можем представить ещё в таком виде:

$$\frac{\delta q}{A} = \frac{\partial U}{\partial t} \delta t + \left(\frac{\partial U}{\partial d_x} + P_{xx} \right) \delta d_x + \left(\frac{\partial U}{\partial d_y} + P_{yy} \right) \delta d_y + \dots + \left(\frac{\partial U}{\partial g_{yz}} + P_{yz} \right) \delta g_{yz}. \quad (113)$$

Если элемент не изменяет своего вида, то вариации удлинений и скольжений равны нулю и, следовательно,

$$\delta q = A \frac{\partial U}{\partial t} \delta t,$$

откуда заключаем, что

$$c_v = A \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (114)$$

Если температура элемента остаётся неизменной, то вся внутренняя работа δU заключается в молекулярной работе, в преодолении частичных сил. Следовательно, при $\delta t = 0$ величина δU принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{\partial U}{\partial d_x} \delta d_x + \frac{\partial U}{\partial d_y} \delta d_y + \dots + \frac{\partial U}{\partial g_{xz}} \delta g_{xz} = \\ &= p_{xx} \delta d_x + p_{yy} \delta d_y + \dots + g_{xz} \delta g_{xz}. \end{aligned}$$

Так как это выражение должно иметь место для всяких значений входящих в него вариаций, то должны существовать равенства:

$$p_{xx} = \frac{\partial U}{\partial d_x}, \quad p_{yy} = \frac{\partial U}{\partial d_y}, \quad \dots, \quad p_{xz} = \frac{\partial U}{\partial g_{xz}}.$$

Следовательно, полное выражение величины δU будет:

$$\begin{aligned} \delta U &= \frac{c_v}{A} \delta t + p_{xx} \delta d_x + p_{yy} \delta d_y + p_{zz} \delta d_z + p_{xy} \delta g_{xy} + \\ &+ p_{yz} \delta g_{yz} + p_{xz} \delta g_{xz}. \quad (115) \end{aligned}$$

Подставляя эту величину в выражение (112) и обращая внимание на соотношение (3), находим:

$$\begin{aligned} \delta q &= c_v \delta t + A [t_{xx} \delta d_x + t_{yy} \delta d_y + t_{zz} \delta d_z + t_{xy} \delta g_{xy} + \\ &+ t_{xz} \delta g_{xz} + t_{yz} \delta g_{yz}], \quad (104'') \end{aligned}$$

которое и есть искомое термическое уравнение.

Выражение (115) указывает некоторые свойства величины c_v . Так как δU есть полный дифференциал, то

$$\frac{1}{A} \frac{\partial c_v}{\partial d_x} = \frac{\partial p_{xx}}{\partial t}, \quad \frac{1}{A} \frac{\partial c_v}{\partial d_y} = \frac{\partial p_{yy}}{\partial t}, \quad \dots, \quad \frac{1}{A} \frac{\partial c_v}{\partial d_z} = \frac{\partial p_{zz}}{\partial t}.$$

Но молекулярные силы, как показывают выражения (74), не зависят от температуры t . Следовательно, величина c_v , т. е. истинная теплоёмкость при постоянном объёме, не зависит от удлинений и скольжений, а может быть только функцией температуры.

Рассматривая же элемент как часть всего тела, величина c_v настолько будет зависеть от удлинений и скольжений, насколько от них зависит температура.

26. Предыдущие исследования тотчас же приводят нас к следствию, которое есть не что иное, как так называемый второй закон механической теории тепла. Рассматривая термическое уравнение (110), мы заключаем, что вторая его часть, а следовательно и δq , не есть точный дифференциал. Между тем, разделяя это выражение на функцию

$$\psi(t) = N + N_1 t,$$

мы находим:

$$\frac{\delta q}{A\psi(t)} = \frac{c_v \delta t}{A\psi(t)} + \delta J_t. \quad (116)$$

Так как c_v есть функция одной температуры t , то вторая часть выражения (116) есть точный дифференциал. Следовательно, функция $\psi(t)$, зависящая от одной температуры, и притом линейным образом, есть интегрирующий делитель термического уравнения (110). В существовании подобного делителя и заключается, как известно, второй закон механической теории тепла. В нашей теории он является не более как следствием основных предположений и для своего вывода не требует никаких новых допущений.

Второй закон механической теории тепла выводится из предположения, что нельзя перевести тепло из тела более холодного в тело более тёплое без затраты работы.

Отсюда выводят, что интегрирующий делитель должен представляться функцией температуры, общей для всех тел; из сравнения с явлениями, представляемыми некоторыми газами, эта функция даётся в виде $T = a + t$, где $a = 273$, и величина T называется абсолютной температурой. Найденная нами функция $\psi(t)$ может быть представлена в виде:

$$\psi(t) = ba_t \left[\frac{P_0 + \lambda}{b\lambda_1 a_t} - t_0 + t \right].$$

Если пренебречь изменением, в действительности весьма малым, коэффициента линейного расширения a_t с температурой, то $\psi(t)$ отличалась бы от выражения T постоянным множителем. Тогда, полагая

$$T = \frac{P_0 + \lambda}{b\lambda_1 a_t} - t_0 + t = \frac{N}{N_1} + t, \quad (117)$$

это выражение представило бы также абсолютную температуру, ибо тепловые силы перестали бы существовать при $t = -\frac{N_1}{N}$. Кроме того, мы могли бы положить $\frac{N}{N_1} = 273$. Однако мы настаиваем на этих результатах, так как мы изучаем такие процессы, при которых физическое состояние тел не изменяется. К решительным результатам могло бы привести исследование процессов, в которых одновременно участвовали бы упругие твёрдые и газообразные тела, процессов, к которым можно было бы приложить указанное выше основание второго закона механической теории тепла. Заметим, что ниже мы будем пренебрегать, большей частью, зависимостью величины a_t от температуры.

Различные виды основного термического уравнения. 27. Мы будем рассматривать элементарный параллелепипед независимо от остальных частей тела. Преобразовывая различным образом основное термическое уравнение, мы придём к результатам, представляющим обобщение найденных Клаузиусом и Томсоном. Из выражений (3), (73) и (74) мы заключаем, обращая вни-

вание на обозначение (117):

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= T \frac{\partial P_{xx}}{\partial T}, & t_{yy} &= T \frac{\partial P_{yy}}{\partial T}, & t_{zz} &= T \frac{\partial P_{zz}}{\partial T}, \\ t_{xy} &= T \frac{\partial P_{xy}}{\partial T}, & t_{yz} &= T \frac{\partial P_{yz}}{\partial T}, & t_{xz} &= T \frac{\partial P_{xz}}{\partial T}. \end{aligned} \right\} (118)$$

Вследствие этих соотношений термическому уравнению (104") мы можем дать такой вид:

$$\frac{\delta q}{A} = \frac{c_v}{A} \delta t + T \frac{\partial P_{xx}}{\partial T} \delta d_x + T \frac{\partial P_{yy}}{\partial T} \delta d_y + \dots + T \frac{\partial P_{xz}}{\partial T} \delta g_{xz}. \quad (119)$$

Величины t_{xx} , t_{yy} , ..., t_{xz} имеют, кроме указанного нами значения, ещё другое, дающее возможность определять их путём опыта. Произведения этих величин на A суть не что иное, как количество скрытой теплоты, поглощаемой при удлинении или скольжении, равном единице. Например, если изменяется в элементе только d_x , то $A \cdot t_{xx} \cdot 1$ есть предел отношения $\frac{\Delta q}{\Delta d_x}$; следовательно, работа, производимая тепловой силой при удлинении или скольжении на единицу, есть соответствующая скрытая теплота.

28. Примем за независимые переменные величины t , P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} , P_{xy} , P_{yz} , P_{xz} . Прежде чем мы выразим в них основное термическое уравнение, отыщем производные удлинений и скольжений по новым независимым переменным.

Означая

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 \psi(t) - \lambda &= A, & (k_1 + x_1) \psi(t) - (k + x) &= B, \\ k_1 \psi(t) - k &= D, & \frac{x_1}{2} \psi(t) - \frac{x}{2} &= E, \end{aligned} \right\} (120)$$

мы находим из выражений (73) и (74):

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= A + B d_x + D (d_y + d_z), \\ P_{yy} &= A + B d_y + D (d_x + d_z), \\ P_{zz} &= A + B d_z + D (d_x + d_y), \end{aligned} \right\} (121)$$

$$g_{xy} = \frac{P_{xy}}{E}, \quad g_{yz} = \frac{P_{yz}}{E}, \quad g_{xz} = \frac{P_{xz}}{E}. \quad (122)$$

Из выражений (121) мы находим:

$$\left. \begin{aligned} d_x &= -\frac{A}{B+2D} + \frac{(B+D)P_{xx} - D(P_{yy} + P_{zz})}{(B-D)(B+2D)}, \\ d_y &= -\frac{A}{B+2D} + \frac{(B+D)P_{yy} - D(P_{xx} + P_{zz})}{(B-D)(B+2D)}, \\ d_z &= -\frac{A}{B+2D} + \frac{(B+D)P_{zz} - D(P_{xx} + P_{yy})}{(B-D)(B+2D)}. \end{aligned} \right\} (123)$$

Так как мы принимаем величины P_{xx} , P_{yy} и пр. а величину t за независимые переменные, то из выражений (123) и (122) мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial d_x}{\partial P_{xx}} &= \frac{\partial d_y}{\partial P_{yy}} = \frac{\partial d_z}{\partial P_{zz}} = \frac{B+D}{(B-D)(B+2D)}, \\ \frac{\partial d_x}{\partial P_{yy}} &= \frac{\partial d_x}{\partial P_{zz}} = \frac{\partial d_y}{\partial P_{xx}} = \frac{\partial d_y}{\partial P_{zz}} = \frac{\partial d_z}{\partial P_{xx}} = \frac{\partial d_z}{\partial P_{yy}} = \\ &= -\frac{D}{(B-D)(B+2D)}, \\ \frac{\partial g_{xy}}{\partial P_{xy}} &= \frac{\partial g_{xz}}{\partial P_{xz}} = \frac{\partial g_{yz}}{\partial P_{yz}} = \frac{1}{E}. \end{aligned} \right\} (124)$$

Остальные производные удлинений и скольжений по силам упругости равны нулю.

Теперь определим производные по температуре. Дифференцируя первое из выражений (121) по t , находим:

$$\begin{aligned} \Theta &= \lambda_1 N_1 + N_1(k_1 + \alpha_1) d_x + k_1(d_y + d_z) + \\ &+ B \frac{\partial d_x}{\partial t} + D \left(\frac{\partial d_y}{\partial t} + \frac{\partial d_z}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с первым из (73) и (77), мы находим первое из следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} -N_1 p'_{xx} &= B \frac{\partial d_x}{\partial t} + D \left(\frac{\partial d_y}{\partial t} + \frac{\partial d_z}{\partial t} \right), \\ -N_1 p'_{yy} &= B \frac{\partial d_y}{\partial t} + D \left(\frac{\partial d_x}{\partial t} + \frac{\partial d_z}{\partial t} \right), \\ -N_1 p'_{zz} &= B \frac{\partial d_z}{\partial t} + D \left(\frac{\partial d_x}{\partial t} + \frac{\partial d_y}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} (125)$$

Сравнивая эти выражения с (121), мы заключаем, что производные от удлинений по температуре получатся из выражений (123), заменяя в них этими производными удлинения, величины P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} заменяя соответственно первыми членами соотношений (125) и полагая $A = 0$.

Таким образом получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial d_x}{\partial t} &= -N_1 \frac{(B+D) p'_{xx} - D(p_{yy} + p'_{zz})}{(B-D)(B+2L)}, \\ \frac{\partial d_y}{\partial t} &= -N_1 \frac{(B+D) p'_{yy} - D(p'_{zz} + p'_{xx})}{(B-L)(B+2L)}, \\ \frac{\partial d_z}{\partial t} &= -N_1 \frac{(B+D) p'_{zz} - D(p'_{xx} + p'_{yy})}{(B-D)(B+2L)}, \end{aligned} \right\} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{xy}}{\partial t} &= -N_1 \frac{p_{xy}}{E}, & \frac{\partial g_{tz}}{\partial t} &= -N_1 \frac{p'_{yz}}{E}, \\ \frac{\partial g_{zs}}{\partial t} &= -N_1 \frac{p_{xz}}{E}. \end{aligned} \quad (127)$$

Основное термическое уравнение, взятое в форме (110), в новых независимых переменных будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta q &= \left[c_v + A\psi(t) \frac{\partial J_t}{\partial t} \right] \delta t + \\ &+ A\psi(t) \left[\frac{\partial J_t}{\partial P_{xx}} \delta P_{xx} + \frac{\partial J_t}{\partial P_{yy}} \delta P_{yy} + \frac{\partial J_t}{\partial P_{zz}} \delta P_{zz} + \right. \\ &\left. + \frac{\partial J_t}{\partial P_{xy}} \delta P_{xy} + \frac{\partial J_t}{\partial P_{xz}} \delta P_{xz} + \frac{\partial J_t}{\partial P_{yz}} \delta P_{yz} \right]. \end{aligned} \quad (128)$$

Если силы, действующие на поверхность элемента, остаются неизменными, то вариации их обращаются в нуль, и следовательно,

$$\delta q = \left[c_v + A\psi(t) \frac{\partial J_t}{\partial t} \right] \delta t.$$

Величина, стоящая в скобках, может быть рассматриваема как теплоёмкость при данных постоянных силах, действующих на поверхность элемента. Мы означим её через c_p , и она представляет величину: с более

общим значением, чем теплоёмкость при постоянном давлении. Следовательно,

$$c_p = c_v + A\psi(t) \frac{\partial J_t}{\partial t}. \quad (129)$$

К этому выражению мы вернёмся ещё впоследствии. Согласно с тем, что было сказано выше,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_t}{\partial P_{xx}} &= p'_{xx} \frac{\partial d_x}{\partial P_{xx}} + p'_{yy} \frac{\partial d_y}{\partial P_{xx}} + p'_{zz} \frac{\partial d_z}{\partial P_{xx}}, \\ \frac{\partial J_t}{\partial P_{xy}} &= p'_{xy} \frac{\partial g_{xy}}{\partial P_{xy}}. \end{aligned}$$

Подставляя в эти выражения величины производных из соотношений (124) и сравнивая найденные результаты с производными по температуре t (126) и (127), мы находим:

$$\frac{\partial J_t}{\partial P_{xx}} = -\frac{1}{N_1} \frac{\partial d_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial J_t}{\partial P_{xy}} = -\frac{1}{N_1} \frac{\partial g_{xy}}{\partial t}. \quad (130)$$

Точно так же преобразуются и другие коэффициенты вариаций в выражении (128), так что это последнее мы можем представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta q = c_p \delta t - AT \left[\frac{\partial d_x}{\partial T} \delta P_{xx} + \frac{\partial d_y}{\partial T} \delta P_{yy} + \frac{\partial d_z}{\partial T} \delta P_{zz} + \right. \\ \left. + \frac{\partial g_{xy}}{\partial T} \delta P_{xy} + \frac{\partial g_{xz}}{\partial T} \delta P_{xz} + \frac{\partial g_{yz}}{\partial T} \delta P_{yz} \right]. \quad (131) \end{aligned}$$

Нам придётся указать ниже связь между излагаемой теорией и исследованиями уже известными. В видах этих указаний нам нужно будет отыскивать дифференциальные соотношения между коэффициентами при вариациях в основном термическом уравнении. Эти соотношения в существовавших до сего времени исследованиях представлялись условиями, между тем как здесь они тождественно удовлетворяются.

Дадим выражению (131) следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta q = c_p \delta t + H_{xx} \delta P_{xx} + H_{yy} \delta P_{yy} + H_{zz} \delta P_{zz} + H_{xy} \delta P_{xy} + \\ + H_{yz} \delta P_{yz} + H_{xz} \delta P_{xz}. \quad (132) \end{aligned}$$

Мы имеем по выражению (128):

$$\frac{\partial c_p}{\partial P_{xx}} = A\dot{\psi}(t) \frac{\partial^2 J_t}{\partial P_{xx} \partial t},$$

$$\frac{\partial H_{xx}}{\partial t} = AN_1 \frac{\partial J_t}{\partial P_{xx}} + A\dot{\psi}(t) \frac{\partial^2 J_t}{\partial t \partial P_{xx}},$$

откуда

$$\frac{\partial c_p}{\partial P_{xx}} - \frac{\partial H_{xx}}{\partial t} = -AN_1 \frac{\partial J_t}{\partial P_{xx}}. \quad (133)$$

Точно так же найдём:

$$\frac{\partial c_p}{\partial P_{xy}} - \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} = -AN_1 \frac{\partial J_t}{\partial P_{xy}}. \quad (134)$$

Соотношения (133) и (134) упрощаются с помощью выражений (130) и принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial c_p}{\partial P_{xx}} - \frac{\partial H_{xx}}{\partial t} &= A \frac{\partial d_x}{\partial T}, \\ \frac{\partial c_p}{\partial P_{xy}} - \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} &= A \frac{\partial g_{xy}}{\partial T}. \end{aligned} \right\} \quad (135)$$

Подобные же тождественные дифференциальные соотношения получаются для c_p и других коэффициентов вариаций. Выражения (135) доказывают, что вторая часть основного термического уравнения не есть точный дифференциал.

29. Примем теперь за независимые переменные изменение объёма θ (или объём, ибо он равен $1 + \theta$, следовательно, его переменная часть есть θ) и силы P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} , P_{xy} , P_{xz} , P_{yz} . В рассматриваемом случае мы представим основное термическое уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta q = L_\theta \delta \theta + L_{xx} \delta P_{xx} + L_{yy} \delta P_{yy} + L_{zz} \delta P_{zz} + L_{xy} \delta P_{xy} + \\ + L_{yz} \delta P_{yz} + L_{xz} \delta P_{xz}. \end{aligned} \quad (136)$$

Выражения для коэффициентов легко получить из уравнения (132). С этой целью нужно выразить величину t в функции выбранных нами независимых пере-

менных и, подставив в выражение (132) вариацию δt , выраженную в вариациях новых переменных, сравнить найденный результат с соотношением (136).

Складывая выражения (121), мы находим одно соотношение между t , θ , P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} :

$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} = 3A + (B + 2D)\theta, \quad (137)$$

откуда заключаем, что t не зависит от сил, производящих скольжение в данном случае. Подставляя поэтому в соотношение (132) величину

$$\delta t = \frac{\partial t}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial t}{\partial P_{xx}} \delta P_{xx} + \frac{\partial t}{\partial P_{yy}} \delta P_{yy} + \frac{\partial t}{\partial P_{zz}} \delta P_{zz}$$

и сравнивая найденный результат с уравнением (136), находим:

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= c_p \frac{\partial t}{\partial \theta}, \\ L_{xx} &= H_{xx} + c_p \frac{\partial t}{\partial P_{xx}}, & L_{xy} &= H_{xy}, \\ L_{yy} &= H_{yy} + c_p \frac{\partial t}{\partial P_{yy}}, & L_{xz} &= H_{xz}, \\ L_{zz} &= H_{zz} + c_p \frac{\partial t}{\partial P_{zz}}, & L_{yz} &= H_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

Отыщем дифференциальные соотношения между этими коэффициентами. Мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0}{\partial P_{xx}} &= \left(\frac{\partial c_p}{\partial P_{xx}} \right) \frac{\partial t}{\partial \theta} + \frac{\partial c_p}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial P_{xx}} \frac{\partial t}{\partial \theta} + c_p \frac{\partial^2 t}{\partial \theta \partial P_{xx}}, \\ \frac{\partial L_{xx}}{\partial \theta} &= \frac{\partial H_{xx}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \theta} + \frac{\partial c_p}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \theta} \frac{\partial t}{\partial P_{xx}} + c_p \frac{\partial^2 t}{\partial \theta \partial P_{xx}}. \end{aligned}$$

Здесь производные, поставленные в скобки, показывают, что они берутся по переменным, непосредственно входящим. Вычитая найденные выражения, находим следующее тождество:

$$\frac{\partial L_0}{\partial P_{xx}} - \frac{\partial L_{xx}}{\partial t} = \left[\left(\frac{\partial c_p}{\partial P_{xx}} \right) - \frac{\partial H_{xx}}{\partial t} \right] \frac{\partial t}{\partial \theta}. \quad (139)$$

Но по тождеству (135) коэффициент у $\frac{\partial t}{\partial \theta}$ равен

$$A \frac{\partial d_x}{\partial T},$$

и так как по соотношениям (123) удлинения зависят от θ только через температуру t , мы находим:

$$\frac{\partial L_\theta}{\partial P_{xx}} - \frac{\partial L_{xx}}{\partial \theta} = A \frac{\partial d_x}{\partial \theta}. \quad (140)$$

Это выражение есть не что иное, как обобщённое первое главное уравнение механической теории тепла.

Из выражений (138) мы находим также:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_\theta}{\partial P_{xy}} &= \left(\frac{\partial c_p}{\partial P_{xy}} \right) \frac{\partial t}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial L_{xy}}{\partial \theta} &= \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Вычитая эти выражения и обращая внимание на соотношения (135), находим:

$$\frac{\partial L_\theta}{\partial P_{xy}} - \frac{\partial L_{xy}}{\partial \theta} = \frac{\partial g_{xy}}{\partial \theta}. \quad (141)$$

Мы найдём тождественные соотношения между L_θ и другими коэффициентами вариаций, совершенно сходные с выражениями (140) и (141).

30. Для последующих изысканий нам необходимо подробнее исследовать выражение (137). Решая его относительно θ , находим:

$$\theta = \frac{P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} - 3[\lambda_1 \psi(t) - \lambda]}{(3k_1 + \kappa_1) \psi(t) - (3k_1 + \kappa_1)}. \quad (142)$$

Но величина t , какова бы она ни была, всегда удовлетворяет тождественному соотношению (80); последнее же даёт нам:

$$\lambda_1 \psi(t) - \lambda = P_0 - [(3k_1 + \kappa_1) \psi(t) - (3k_1 + \kappa_1)] a(t - t_0).$$

Подставляя это выражение в величину (142), находим:

$$\theta = \frac{P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} - 3P_0}{(3k_1 + \alpha_1) \psi(t) - (3k + \alpha)} + 3a(t - t_0). \quad (143)$$

Заметим, что величина $3a$ есть коэффициент кубического расширения под постоянным давлением P_0 . Предыдущее выражение можно упростить ещё более, исследуя физическое значение входящих в него величин.

Представим себе, что величины давлений P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} равны между собой и величине P и что тело растягивается при постоянной температуре t ; из выражения (143) мы находим:

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = \frac{3}{(3k_1 + \alpha_1) \psi(t) - (3k + \alpha)} = 3\beta, \quad (144)$$

где величина 3β есть коэффициент кубического растяжения. Мы уже заметили выше, при выводе термического уравнения для элемента, что для равновесия последнего мы должны принимать, что внешние силы, действующие на его поверхность, противоположны силам упругости, действующим на ту же поверхность. Так как силы упругости P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} мы принимали положительными, т. е. рассматривали их как давление, то внешние силы, действующие на поверхность элемента, должны быть натяжениями. Наоборот, если внешние силы будут давлениями, то силы упругости должны быть снабжены отрицательным знаком, и

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = -3\beta. \quad (145)$$

Вводя величину 3β в выражение (143), находим:

$$\theta = 3a(t - t_0) + \beta(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} - 3P_0) \quad (146)$$

или

$$\theta = [a(t - t_0) + \beta(P_{xx} - P_0)] + [a(t - t_0) + \beta(P_{yy} - P_0)] + [a(t - t_0) + \beta(P_{zz} - P_0)]. \quad (147)$$

Из этого выражения мы заключаем, что кубическое расширение равно алгебраической сумме расширений,

производимых теплотой и силами упругости по трём взаимно перпендикулярным направлениям.

Из выражения (146) мы находим величину полного дифференциала от θ :

$$d\theta = \left[3a + \frac{\partial \beta}{\partial t} (P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} - 3P_0) \right] dt + \beta [dP_{xx} + dP_{yy} + dP_{zz}]. \quad (148)$$

Уравнения Клаузиуса. 31. До сих пор исследования механической теории тепла касались таких процессов в телах, при которых температура оставалась одинаковой во всех частях тела и поверхность его испытывала во всех своих частях равные нормальные давления. Мы введём эти условия в неопределённое термическое уравнение для элемента тела и получим те же самые соотношения между коэффициентами вариаций и виды термического уравнения, которые найдены до сего времени. Причина, по которой мы сравниваем уравнения, выведенные для всего тела, с выведенными для элемента, заключается в том, что при нашей точке зрения предполагать температуру одинаковой во всех частях тела — значит рассматривать случай слишком частный.

Таким образом, в найденных нами выше выражениях остаётся положить

$$\begin{aligned} P_{xx} &= P_{yy} = P_{zz} = P, \\ P_{xy} &= P_{yz} = P_{zx} = 0. \end{aligned}$$

Вследствие этого выражение (136) примет следующий вид:

$$\delta q = L_\theta \delta \theta + L_P \delta P, \quad (149)$$

причём

$$L_\theta = c_p \frac{\partial t}{\partial \theta}, \quad L_P = L_{xx} + L_{yy} + L_{zz} = -AT \frac{\partial \theta}{\partial t} + c_p \frac{\partial t}{\partial P}, \quad (150)$$

или, представляя выражение (132) в таком виде:

$$\delta q = c_p \delta t + H \delta P, \quad \text{где } H = -AT \frac{\partial \theta}{\partial T}, \quad (151)$$

мы имеем из выражений (150):

$$L_{\theta} = c_p \frac{\partial t}{\partial \theta}, \quad L_p = H + c_p \frac{\partial t}{\partial p}. \quad (152)$$

Выражение (128) даёт нам также:

$$c_p = c_v + A\psi(t) \frac{\partial J_t}{\partial t}, \quad H = A\psi(t) \frac{\partial J_t}{\partial P}. \quad (153)$$

С помощью этих соотношений мы находим:

$$\frac{\partial c_p}{\partial P} - \frac{\partial H}{\partial t} = -AN_1 \frac{\partial J_t}{\partial P}. \quad (154)$$

Замечая же, что по выражениям (130)

$$\frac{\partial J_t}{\partial P} = \left| \begin{array}{l} P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = P \\ \left(\frac{\partial J_t}{\partial P_{xx}} \frac{\partial P_{xx}}{\partial P} + \frac{\partial J_t}{\partial P_{yy}} \frac{\partial P_{yy}}{\partial P} + \frac{\partial J_t}{\partial P_{zz}} \frac{\partial P_{zz}}{\partial P} \right) \end{array} \right| = -\frac{1}{N_1} \frac{\partial \theta}{\partial t},$$

мы преобразуем тождество (154) в следующее:

$$\frac{\partial c_p}{\partial P} - \frac{\partial H}{\partial t} = A \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (155)$$

Переходя теперь к величинам (152), мы найдём:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{\theta}}{\partial P} &= \left(\frac{\partial c_p}{\partial P} \right) \frac{\partial t}{\partial \theta} + \frac{\partial c_p}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial P} \frac{\partial t}{\partial \theta} + c_p \frac{\partial^2 t}{\partial \theta \partial P}, \\ \frac{\partial L_p}{\partial \theta} &= \frac{\partial H}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \theta} + \frac{\partial c_p}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial P} \frac{\partial t}{\partial \theta} + c_p \frac{\partial^2 t}{\partial \theta \partial P}. \end{aligned}$$

Здесь производные, поставленные в скобки, показывают, что они берутся по переменным, непосредственно входящим. Вычитая найденные выражения и обращая внимание на соотношение (155), найдём:

$$\frac{\partial L_{\theta}}{\partial P} - \frac{\partial L_p}{\partial \theta} = A. \quad (156)$$

Это—так называемое первое главное уравнение механической теории тепла, показывающее, что вторая часть термического уравнения (149) не есть точный дифференциал, ибо величина A не равна нулю.

Уравнения Томсона. 32. Если разделить вторую часть выражения (149) на $\psi(t)$, она должна обратиться в точный дифференциал. Следовательно,

$$\frac{\partial \frac{L_\theta}{\psi(t)}}{\partial P} = \frac{\partial \frac{L_P}{\psi(t)}}{\partial \theta}.$$

Раскрывая это выражение и обращая внимание на соотношение (150), мы дадим ему вид:

$$AT = L_\theta \frac{\partial T}{\partial P} - L_P \frac{\partial T}{\partial \theta}. \quad (157)$$

Это — так называемое второе главное уравнение механической теории тепла. Легко видеть, что вследствие соотношений (152) и величины H (151) оно обращается в тождество.

Основное термическое уравнение легко представляется в следующих двух видах, данных Томсоном.

Именно, из выражения (119) находим:

$$\delta q = c_v \delta t + AT \frac{\partial P}{\partial T} \delta \theta, \quad (158)$$

и из (131)

$$\delta q = c_p \delta t - AT \frac{\partial \theta}{\partial T} \delta P. \quad (159)$$

33. Преобразуем теперь при рассматриваемых условиях первое из выражений (153):

$$c_p - c_v = A\psi(t) \frac{\partial J_t}{\partial t}.$$

Замечая, что при настоящих условиях величина J_m , а следовательно, и J_t , как показывает выражение (96), есть функция одного θ , мы находим:

$$c_p - c_v = A\psi(t) \frac{\partial J_t}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (160)$$

Но второе из выражений (153) и второе из (151) дают нам:

$$H = A\psi(t) \frac{\partial J_t}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial P} = -\frac{A\psi(t)}{N_1} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (161)$$

откуда

$$\frac{\partial J_t}{\partial \theta} = -\frac{1}{N_1} \cdot \frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial P}} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial T}. \quad (162)$$

Следовательно, выражение (160) примет следующий вид:

$$c_p - c_v = -AT \cdot \frac{1}{\frac{\partial \theta}{\partial P}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2. \quad (163)$$

Относя это выражение к случаю, когда внешние силы, действующие на поверхность элемента, суть давления, мы находим из (148), полагая $P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = P$ и меняя знаки сил упругости:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 3a - 3 \frac{\partial \beta}{\partial t} (P - P_0),$$

и из (145)

$$\frac{\partial \theta}{\partial P} = -3\beta.$$

Подставляя эти величины в выражение (163), получаем:

$$c_p - c_v = \frac{AT \left\{ 3a - 3 \frac{\partial \beta}{\partial t} (P - P_0) \right\}^2}{3\beta}. \quad (164)$$

Найденное нами соотношение между обеими теплоемкостями представляет обобщение уже известного в механической теории тепла, в которой до сих пор, в приложении к телам твёрдым, принималось $\frac{\partial \beta}{\partial t} = 0$. Но мы получим то же самое выражение для начала процесса, когда разность $P - P_0$ бесконечно мала. Имеем в этом случае:

$$c_p - c_v = \frac{AT(3a)^2}{3\beta}. \quad (165)$$

Приложение основного термического уравнения к некоторым термомеханическим процессам, 34, МД

переходим к изучению некоторых общих процессов, которым могут следовать термомеханические изменения в телах твёрдых.

Второй закон механической теории тепла даёт возможность вывести две теоремы для случая, когда твёрдое тело, испытав целый ряд процессов, возвращается снова в своё первоначальное состояние, т. е. когда все изменения составляют так называемый *круговой процесс*.

Процессы, для которых имеет место основное термическое уравнение (104), мы будем называть *процессами первого рода*. Разделяя уравнение (104) на функцию $\psi(t)$ и замечая, что вторая его часть обращается при этом в точный дифференциал, мы находим, интегрируя его от момента τ_1 , соответствующего началу процесса, до момента τ_2 , когда тело совершило *круговой процесс*:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\delta q}{\psi(t)} = 0. \quad (166)$$

Процессами второго рода мы будем называть такие, для которых имеет место только неравенство (100). Поступая с ним, как с выражением (99), мы перейдём от него к элементу, так что для всякого элемента тела будем иметь:

$$\delta q > c_v \delta t + A\psi(t) \delta J_t. \quad (167)$$

Разделяя это выражение на $\psi(t)$, замечая, что вторая часть есть точный дифференциал, и интегрируя от начала до конца кругового процесса, находим:

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\delta q}{\psi(t)} > 0. \quad (168)$$

Найденные нами выражения имеют место для элемента; но, распространяя их на всё тело, находим для круговых процессов первого рода:

$$\iiint dx dy dz \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\delta q}{\psi(t)} = 0 \quad (169)$$

и второго рода:

$$\iiint dx dy dz \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\delta q}{\psi(t)} > 0. \quad (170)$$

Оба эти выражения представляют обобщение соответственных выводов механической теории тепла и переходят в них, предполагая, что температура одинакова во всех частях тела.

Мы переходим теперь к характеристике наиболее замечательных термомеханических процессов.

35. Процессом *адиабатическим* называется обыкновенно ряд изменений, совершающихся в теле, когда к нему не приводится и от него не отводится теплота. Удерживая это определение для процессов, совершающихся во всём теле, мы дадим другое определение для процесса, совершающегося в элементе. Мы примем, что адиабатический процесс элемента заключается в том, что к элементу столько же приливает, сколько и отливает тепла.

Обращаясь к выражению (104), мы находим для характеристики этого процесса следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} q &= 0, \\ c_v \delta t + A\psi(t) \delta J_t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Принимая вместе с Клаузиусом, что истинная теплоёмкость при постоянном объёме есть величина постоянная, или же полагая, что она весьма мало изменяется с температурой, мы находим, интегрируя выражение (171) по разделении его на $\psi(t)$:

$$\frac{c_r}{AN_1} \ln(N + N_1 t) = -J_t + k. \quad (172)$$

Замечая, что величина N_1 одного порядка с коэффициентом линейного расширения тел и что, следовательно, величина $N_1 t$ для средних колебаний температуры очень мала, мы можем представить предыдущее выражение следующей приближённой величиной:

$$\frac{c_r}{AN_1} \left[\ln N + \frac{N_1 t}{N} - \frac{N_1^2 t^2}{2N^2} \right] = -J_t + k. \quad (173)$$

Чтобы определить величину k , нам нужно знать температуру t и величину J_t для начала процесса. Означая их значками, находим:

$$\frac{c_v}{AN_1} \ln(N + N_1 t') = -J'_t + k. \quad (174)$$

Вычитая одно из другого выражения (173) и (174), находим:

$$\frac{c_v}{AN_1} \ln \frac{N + N_1 t}{N + N_1 t'} = J'_t - J_t, \quad (175)$$

откуда

$$\frac{T}{T'} = e^{\frac{AN_1}{c_v} (J'_t - J_t)}. \quad (176)$$

Первое из выражений (171) даёт для определённого момента закон распределения температур; выражение же (176) даёт зависимость между возрастом температуры, от начала процесса до взятого момента, и изменением перемещений.

Рассмотрим частный случай адиабатического процесса, когда все давления равны и нормальны. В этом случае по выражению (96) имеем:

$$J_t = \lambda_1 \theta + \frac{3k_1 + x_1}{2 \cdot 9} \theta^2. \quad (177)$$

Подставляя это выражение в величину (176), мы найдём соотношение между температурой t и кубическим расширением θ — соотношение, которое может быть представлено плоской кривой, принимая за координаты t и θ . Мы определим приближённый вид этой кривой, пользуясь выражением (173). Исключая из него k с помощью соотношения (174), находим:

$$\frac{c_r}{AN_1} \left[\frac{N_1}{N} (t - t') - \frac{N_1^2}{2N^2} (t^2 - t'^2) \right] = J'_t - J_t; \quad (178)$$

подставляя сюда величину J_t из выражения (177) и группируя известным образом члены, находим:

$$\begin{aligned} \frac{3k_1 + x_1}{2 \cdot 9} \theta^2 - \frac{c_r N_1}{2AN^2} t^2 + \lambda_1 \theta + \frac{c_r}{AN} t = \lambda_1 \theta' + \frac{3k_1 + x_1}{2 \cdot 9} \theta'^2 + \\ + \frac{c_r}{AN} t' - \frac{c_r N_1}{2AN^2} t'^2. \end{aligned} \quad (179)$$

Если мы примем за прямоугольные координаты величины θ и t , то предыдущее выражение представит собой гиперболу, координаты центра которой θ_1 , t_1 будут величины

$$\theta_1 = -\frac{9\lambda_1}{3k_1 + \alpha_1}, \quad t_1 = \frac{N}{N_1}.$$

Заметим, что величина N_1 очень мала, и, следовательно, в абсолютной величине $t_1 > \theta_1$.

Так как формула (173) верна только пока

$$-1 < \frac{N_1}{N} t < 1,$$

то, следовательно, только те части ветвей гиперболы приблизительно совпадают с кривой (176), для которых

$$-t_1 < t < t_1.$$

Мы займёмся теперь вопросом о повышении или понижении температуры с изменением давления в процессе адиабатическом. Этот вопрос имеет интерес в тех случаях, когда тело настолько быстро сжимается или растягивается, что между частицами тела и между телом и окружающей средой не успеет произойти обмен тепла.

Из выражения (159) мы находим, вводя в него условие $\delta q = 0$:

$$c_p \delta t - AT \frac{\partial \theta}{\partial t} \delta P = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial t}{\partial P} = \frac{AT}{c_p} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (180)$$

Но из соотношения (148) мы находим, полагая в нём все давления равными:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 3a + \frac{\partial (3\beta)}{\partial t} (P - P_0);$$

следовательно,

$$\frac{\partial t}{\partial P} = \frac{AT}{c_p} \left[3a + \frac{\partial (3\beta)}{\partial t} (P - P_0) \right]. \quad (181)$$

Это выражение показывает, что пока разность $P - P_0$ ниже известного предела, величина $\frac{\partial t}{\partial P}$ имеет одинаковый знак с коэффициентом кубического расширения 3α . Итак, если 3α положительно, т. е. тело от тепла расширяется, то $\frac{\partial t}{\partial P}$ тоже положительно; следовательно, с возрастанием давления возрастает температура, и обратно.

Вообще говоря, существует предельная величина давления или растяжения, для которой выражение (181) обращается в нуль, и при давлениях или растяжениях, больших или меньших предельной величины, изменения температуры будут обратны.

36. Такой ряд изменений тела, при котором температура каждого из его элементов остаётся неизменной, называется *процессом изотермическим*. Этот процесс характеризуется тем, что $\delta t = 0$; следовательно, из выражения (104) мы находим:

$$\delta q = A\psi(t) \delta J_t. \quad (182)$$

Вопрос об изотермическом процессе есть не что иное, как вопрос о стационарном распределении тепла; но в нашей теории этот вопрос ставится гораздо общее, чем в общепринятой. В самом деле, в последней стационарное распределение тепла непременно предполагает $\delta q = 0$.

Означая через Q всё количество тепла, притекшего к элементу от начала процесса до его конца, имеем:

$$Q = A\psi(t) (J_t - J_t^0). \quad (183)$$

37. Ряд изменений тела, при котором внутренняя работа остаётся неизменной, называется *процессом изодинамическим*.

Приравнивая нулю выражение (115), представляющее изменение внутренней работы, находим, замечая, что J_m представляет работу сил молекулярных:

$$-c_v \delta t + A\delta J_m = 0. \quad (184)$$

Интегрируя это выражение и означая через t_0 и J_m^0 начальные величины температуры и молекулярной работы, получим:

$$c_v(t - t_0) + A(J_m - J_m^0) = 0. \quad (185)$$

Основное же термическое уравнение (112) примет вид:

$$\frac{\delta q}{A} = P_{xx} \delta d_x + P_y \delta d_y + P_{zz} \delta d_z + P_{xy} \delta g_{xy} + P_{xz} \delta g_{xz} + P_{yz} \delta g_{yz}. \quad (186)$$

Вставляя в основное термическое уравнение (104) величину из выражения (185), находим:

$$\frac{\delta q}{A} = -\delta J_m + \psi \left(\frac{c_v t_0 + A(J_m^0 - J_m)}{c_v} \right) \delta J_t, \quad (187)$$

откуда

$$\int_{A'} \frac{\delta q}{\left[\frac{c_v t_0 + A(J_m^0 - J_m)}{c_v} \right]} = \frac{c_v}{AN_1} \ln \psi \left[\frac{c_v t_0 + A(J_m^0 - J_m)}{c_v} \right] + J_t + \text{const}. \quad (188)$$

Приложим найденные нами выражения к случаю, когда элемент находится под действием равных и нормальных сил.

Подставляя величину J_m из выражений (96) в выражение (185), находим, группируя известным образом члены:

$$c_v t + A\lambda\theta + A \frac{3k+x}{2 \cdot 9} \theta^2 = c_v t_0 + AJ_m^0. \quad (189)$$

Принимая t и θ за прямоугольные координаты, это выражение представит параболу, ось которой параллельна оси координат t и положение которой определяется величиной

$$\theta_1 = -\frac{9\lambda}{3k+x},$$

аналогичной с величиной θ_1 , определяющей положение мнимой оси гиперболы, представляющей адиабатический

процесс. Координата же t'_1 вершины параболы определяется величиной

$$t'_1 = t_0 + \frac{A}{c_v} \left[J_m^0 - \frac{9\lambda}{2(3k+x)} \right].$$

Эта величина может быть положительной или отрицательной.

Подставляя в выражение (187) величины J_t и J_m из (177) и (96) и означая через Q количество тепла, поглощённое элементом от начала процесса до рассматриваемого момента, легко найдём:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{A} = & -J_m + \left[N + N_1 t_0 + \frac{N_1 A}{c_v} J_m^0 \right] J_t - \\ & - \frac{N_1 A \theta^2}{c_v} \left[\lambda \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{3k_1 + x_1}{3 \cdot 9} \theta \right) + \right. \\ & \left. + \frac{3k+x}{2 \cdot 9} \left(\frac{\lambda_1 \theta}{3} + \frac{3k_1 + x_1}{4 \cdot 9} \theta^2 \right) \right]. \quad (190) \end{aligned}$$

38. Если, начиная с некоторого момента, частицы тела удерживают неизменную температуру и не перемещаются более, то такое состояние тела мы будем называть *термомеханическим равновесием*. В этом случае для всех последующих моментов величины δt и δJ_t равны нулю, и, следовательно, термическое уравнение (104) принимает вид:

$$q = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0. \quad (191)$$

III. ПРИЛОЖЕНИЕ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ К ПРИБЛИЖЁННОМУ РЕШЕНИЮ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ

39. Основным уравнениям может быть дан иной вид, более удобный в приложениях, если мы припомним степень приближения, которой мы придерживались при выводе всех наших заключений. С одной стороны, мы пренебрегали произведениями удлинений и скольжений, с другой — квадратами коэффициента кубического рас-

ширения (3а) и величин одного с ним порядка. Это даёт нам право пренебрегать точно так же произведениями величин порядка a на удлинения и скольжения. Так как подобного же порядка будет величина N_1 , входящая в функцию $\psi(t)$, то, означая через t' переменную часть температуры t , мы можем написать:

$$\psi(t) = N_2 + N_1 t',$$

где

$$N_2 = N + N_1 t_0,$$

и если переменная часть t' невелика, то произведения $N_1 t'$ на удлинения и скольжения могут быть пренебрегаемы нами при приближительных решениях вопросов. Ниже мы удержим за переменной частью температуры прежнее означение t и за частью функции $\psi(t)$, не зависящей от изменений температуры, удержим означение N .

40. Преобразуем выражения сил упругости (3), например величин P_{xx} и P_{xy} :

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= \psi(t) [\lambda_1 + (k_1 + \alpha_1) d_x + k_1 (d_y + d_z)] - \\ &\quad - [\lambda + (k + \alpha) d_x + k (d_y + d_z)], \\ P_{xy} &= \left[\frac{\alpha_1 \psi(t)}{2} - \frac{\alpha}{2} \right] g_{xy}. \end{aligned} \right\} (192)$$

Представим себе, что нами отысканы с помощью основных уравнений величины удлинений и температуры t . Тогда мы всегда можем найти такие величины d'_x, d'_y, d'_z , которые удовлетворяют равенствам:

$$\begin{aligned} d_x &= d'_x + a(t - t_0), & d_y &= d'_y + a(t - t_0), \\ d_z &= d'_z + a(t - t_0). \end{aligned} \quad (193)$$

Подставляя эти выражения в первое из соотношений (192) и обращая внимание на соотношение (80), имеющее место для всякой температуры t , находим:

$$\begin{aligned} P_{xx} &= P_0 + \psi(t) [(k_1 + \alpha_1) d'_x + k_1 (d'_y + d'_z)] - \\ &\quad - [(k + \alpha) d'_x + k (d'_y + d'_z)]. \end{aligned} \quad (194)$$

Подобным же образом можно преобразовать и остальные две нормальные силы упругости, что даёт возможность вводить в решение вопроса только разности $P_{xx} - P_0$, $P_{yy} - P_0$, $P_{zz} - P_0$.

41. Пренебрегая в выражении (194) произведениями $N_1 d_x$, $N_1 d_y$, $N_1 d_z$ и во втором из выражений (192) — величиной $N_1 g_{xy}$, мы находим:

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= P_0 + [N(k_1 + \varkappa_1) - (k + \varkappa)]d'_x + \\ &\quad + (Nk_1 - k)(d'_y + d'_z), \\ P_{xy} &= \frac{N\varkappa_1 - \varkappa}{2} g_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

Полагая

$$Nk_1 - k = \alpha, \quad N\varkappa_1 - \varkappa = \alpha_1, \quad (196)$$

находим:

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= P_0 + (\alpha + \alpha_1) d'_x + \alpha (d'_y + d'_z), \\ P_{yy} &= P_0 + (\alpha + \alpha_1) d'_y + \alpha (d'_x + d'_z), \\ P_{zz} &= P_0 + (\alpha + \alpha_1) d'_z + \alpha (d'_x + d'_y), \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

$$P_{xy} = \frac{\alpha_1}{2} g_{xy}, \quad P_{xz} = \frac{\alpha_1}{2} g_{xz}, \quad P_{yz} = \frac{\alpha_1}{2} g_{yz}. \quad (198)$$

Эти выражения совпадают с общезвестными формулами для среды постоянной упругости, когда она подвержена начальному давлению P_0 .

Введём ещё новые обозначения. Положим:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= (\alpha + \alpha_1) d_x + \alpha (d_y + d_z), & Y_x &= X_y = \frac{\alpha_1}{2} g_x, \\ Y_y &= (\alpha + \alpha_1) d_y + \alpha (d_x + d_z), & Z_x &= X_z = \frac{\alpha_1}{2} g_{xz}, \\ Z_z &= (\alpha + \alpha_1) d_z + \alpha (d_x + d_y), & Y_z &= Z_y = \frac{\alpha_1}{2} g_{yz}. \end{aligned} \right\} \quad (199)$$

Вследствие этого выражения (197) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= P_0 + X_x, & P_{xy} &= X_y = Y_x, \\ P_{yy} &= P_0 + Y_y, & P_{xz} &= X_z = Z_x, \\ P_{zz} &= P_0 + Z_z, & P_{yz} &= Y_z = Z_y. \end{aligned} \right\} \quad (200)$$

Следовательно, основные уравнения (84) перейдут в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X &= 0, \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y &= 0, \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \rho Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

Условия для поверхности тела (78) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} P \cos(Px) - P_0 \cos(nx) &= \\ &= X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz), \\ P \cos(Py) - P_0 \cos(ny) &= \\ &= Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz), \\ P \cos(Pz) - P_0 \cos(nz) &= \\ &= Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz). \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

Членам, зависящим от X_x , Y_x и пр., в выражениях (201) могут быть даны различные формы в видах облегчения интеграции. Эти преобразования могут быть найдены в курсах теории упругости.

42. Перейдём теперь к рассмотрению основного термического уравнения. Выводя выражение (35) для обмена тепла, мы предполагали, что этот обмен, а следовательно, теплопроводность, зависит от некоторой функции температуры $\varphi(t)$. Между тем в теории теплопроводности зависимость теплопроводности от температуры опускается, и получаются всё-таки результаты, довольно близкие к истине, как, например, в опытах над распределением тепла в тонких стержнях. За неимением опытных данных это даёт нам право принять, что

$$\varphi(t) = n + n_1 t, \quad (203)$$

где величина n конечная, а n_1 — величина одного порядка с коэффициентом линейного расширения a .

Пренебрегая в выражениях (62) произведениями $n_1 d_x$, $n_1 d_y$ и пр. и обращая внимание на выражения (98'), находим:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= n \left(p''_{xx} \frac{\partial t}{\partial x} + p''_{xy} \frac{\partial t}{\partial y} + p''_{xz} \frac{\partial t}{\partial z} \right) + n_1 \lambda_2 t \frac{\partial t}{\partial x}, \\ q_y &= n \left(p''_{xy} \frac{\partial t}{\partial x} + p''_{yy} \frac{\partial t}{\partial y} + p''_{yz} \frac{\partial t}{\partial z} \right) + n_1 \lambda_2 t \frac{\partial t}{\partial y}, \\ q_z &= n \left(p''_{xz} \frac{\partial t}{\partial x} + p''_{yz} \frac{\partial t}{\partial y} + p''_{zz} \frac{\partial t}{\partial z} \right) + n_1 \lambda_2 t \frac{\partial t}{\partial z}. \end{aligned} \right\} (204)$$

Заметим, что в этих выражениях следующие члены преобладают над все и остальными:

$$n \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial x}, \quad n \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial y}, \quad n \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial z};$$

эти члены входят в величины $n p''_{xx}$, $n p''_{yy}$, $n p''_{zz}$; все остальные члены имеют коэффициентами удлинения, скольжения и величину n_1 . Поэтому, предполагая, что температура t состоит из двух частей — одной конечной t , и другой t' , порядка коэффициента линейного расширения a , — мы представим уравнения (204) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= n \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial x} + n \lambda_2 \frac{\partial t'}{\partial x} + \\ &+ n \left[(p''_{xx} - \lambda_2) \frac{\partial t}{\partial x} + p''_{xy} \frac{\partial t}{\partial y} + p''_{xz} \frac{\partial t}{\partial z} \right] + n_1 \lambda_2 t \frac{\partial t}{\partial x}, \\ q_y &= n \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial y} + n \lambda_2 \frac{\partial t'}{\partial y} + \\ &+ n \left[p''_{xy} \frac{\partial t}{\partial x} + (p''_{yy} - \lambda_2) \frac{\partial t}{\partial y} + p''_{yz} \frac{\partial t}{\partial z} \right] + n_1 \lambda_2 t \frac{\partial t}{\partial y}, \\ q_z &= n \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial z} + n \lambda_2 \frac{\partial t'}{\partial z} + \\ &+ n \left[p''_{xz} \frac{\partial t}{\partial x} + p''_{yz} \frac{\partial t}{\partial y} + (p''_{zz} - \lambda_2) \frac{\partial t}{\partial z} \right] + n_1 \lambda_2 t \frac{\partial t}{\partial z}, \end{aligned} \right\} (205)$$

или, означая через q'_x , q'_y , q'_z сумму членов порядка a , входящих в предыдущие выражения, за исключением

величин $n\lambda_2 \frac{\partial t'}{\partial x}$, $n\lambda_2 \frac{\partial t'}{\partial y}$, $n\lambda_2 \frac{\partial t'}{\partial z}$, мы находим:

$$\left. \begin{aligned} q_x &= n\lambda_2 \frac{\partial t}{\partial x} + n\lambda_2 \frac{\partial t'}{\partial x} + q'_x, \\ q_y &= n\lambda_2 \frac{\partial t}{\partial y} + n\lambda_2 \frac{\partial t'}{\partial y} + q'_y, \\ q_z &= n\lambda_2 \frac{\partial t}{\partial z} + n\lambda_2 \frac{\partial t'}{\partial z} + q'_z. \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

Означая через Δ_2 дифференциальный параметр второго порядка, мы можем представить основное термическое уравнение (131) в следующем виде:

$$\begin{aligned} n\lambda_2 \Delta_2 t + n\lambda_2 \Delta_2 t' + \frac{\partial q'_x}{\partial x} + \frac{\partial q'_y}{\partial y} + \frac{\partial q'_z}{\partial z} = \\ = c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} + c_p \frac{\partial t'}{\partial \tau} - \frac{A\psi(t)}{N_1} \left(N_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \right), \end{aligned} \quad (207)$$

где

$$N_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} = \frac{\partial d_x}{\partial t} \frac{\partial P_{xx}}{\partial \tau} + \frac{\partial d_y}{\partial t} \frac{\partial P_{yy}}{\partial \tau} + \dots + \frac{\partial g_{yz}}{\partial t} \frac{\partial P_{yz}}{\partial \tau}. \quad (208)$$

Заметим, что производные от скользящих и удлинений по температуре должны быть вставлены в предыдущее выражение из соотношений (126) и (127). Обращая внимание на состав этих соотношений, мы заключаем, что Ω не может быть ниже порядка величин удлинений и скользящих. Поэтому, вводя условие, чтобы члены разных порядков, входящие в выражение (207), удовлетворяли ему независимо один от другого, находим:

$$n\lambda_2 \Delta_2 t = c_p \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (209)$$

$$n\lambda_2 \Delta_2 t' = c_p \frac{\partial t'}{\partial \tau} - AN \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} - \frac{\partial q'_x}{\partial x} - \frac{\partial q'_y}{\partial y} - \frac{\partial q'_z}{\partial z}. \quad (210)$$

Первое из этих уравнений совпадает с тем, которое даётся в теории теплопроводности. Эти выражения вместе с (201) дают возможность определять приближённо термомеханические процессы в твёрдых упругих телах при различных условиях. Заметим, что в выраже-

ниях (201) величина t не должна быть заменяема суммой $t + t'$, ибо она множится на величину a , и t' того же порядка или же порядка удлинений и скольжений.

Теперь нам остаётся ещё найти термические условия для поверхности. Если температура какого-нибудь элемента поверхности тела есть t , а окружающей его среды t_1 , то, означая через ε коэффициент лучеиспускания, мы находим приближённо, что количество тепла, входящее в тело и отнесённое к единице поверхности и единице времени, при незначительной разности температур может быть представлено в виде:

$$\varepsilon (t_1 - t).$$

Но эта величина есть не что иное, как q_n в выражении (101). Следовательно,

$$q_x \cos(nx) + q_y \cos(ny) + q_z \cos(nz) + \varepsilon (t - t_1) = 0. \quad (211)$$

Подставляя в это выражение величины q_x , q_y , q_z тепловых токов (206) и отделяя члены разных порядков, мы найдём два условия для поверхности, которым должны удовлетворять величины t и t' :

$$\left. \begin{aligned} n\lambda_2 \left[\frac{\partial t}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial t}{\partial y} \cos(ny) + \frac{\partial t}{\partial z} \cos(nz) \right] + \\ + \varepsilon (t - t_1) = 0, \\ \left[n\lambda_2 \frac{\partial t'}{\partial x} + q'_x \right] \cos(nx) + \\ + \left[n\lambda_2 \frac{\partial t'}{\partial y} + q'_y \right] \cos(ny) + \\ + \left[n\lambda_2 \frac{\partial t'}{\partial z} + q'_z \right] \cos(nz) + \varepsilon t' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (212)$$



УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ТЕЛАХ

I. ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕМЕНТЕ ОБЪЁМА СРЕДЫ

§ 1. Определения и задача исследования. Элемент объёма, произвольно взятый внутри какой-нибудь среды, частицы коей находятся в движении, заключает в данный момент времени определённое количество энергии. Эта энергия складывается из двух частей: из живой силы движения частиц элемента объёма и потенциальной энергии, т. е. работы, которая может быть отдана этими частицами при возвращении их из данного положения в некоторое начальное, соответствующее устойчивому равновесию. Под энергией элемента я буду разуметь сумму живых сил частиц элемента и его потенциальной энергии, определённой, как было сказано выше.

Законы перехода энергии с одного элемента среды на другой определялись до сих пор только для частных форм движений. Задача настоящего труда заключается в установлении на общих началах учения о движении энергии в средах.

Раскрытие общей связи между распределением и движением энергии в средах и перемещениями их частиц, независимо от частных форм движений, должно дать возможность из известных законов движения и распределения энергии в теле выводить заключения о роде движений его частиц. Задачи подобного рода

имеют важность ввиду стремления современной физики сводить все явления природы на явления движения.

Простейшие опытные данные, на которые могли бы опереться теоретические изыскания современной физики, идущие в указанном направлении, представляют распределения и движения энергии в различных явлениях природы. Орудия опытного исследования не настолько, однако, усовершенствованы, чтобы давать возможность определять законы каждой из составных частей энергии в отдельности. Поэтому важно отыскать метод, который давал бы возможность перейти от определённых путём опыта законов движения энергии к дифференциальным уравнениям движения частиц тела, которое, по предположению, даёт место наблюдаемому явлению.

§ 2. Уравнение сохранения энергии в элементе тела. Представим себе однородную среду с определёнными границами, конечными или бесконечно большими. Пусть на частицы этой среды не действуют внешние силы и прилив энергии к частицам обуславливается принятием или отдачей энергии средой через её границы.

Если мы выделим мысленно элемент объёма, изменение его энергии (т. е. суммы его живой силы и потенциальной энергии) по закону сохранения энергии может совершиться только на счёт прибыли или убыли последней в смежных элементах. Математическое выражение связи приращения количества энергии в элементе объёма с её потерями в смежных элементах и будет математическим выражением элементарного закона сохранения энергии в средах.

Математическое выражение указанной связи может быть нами почерпнуто из явления иного рода, опирающегося на закон, аналогичный закону сохранения энергии. Распределение вещества при движениях непрерывной сжимаемой среды подчиняется закону сохранения вещества. Насколько движение энергии и движение сжимаемого вещества обуславливаются за-

коном их сохранения, настолько мы имеем право уподоблять движение энергии движению подвижного и сжимаемого вещества.

Количество энергии в элементе объёма среды, отнесённое к единице объёма, может быть названо плотностью энергии в данной точке среды.

Мы можем следить за изменениями, происходящими в количестве энергии и её скоростях в одной и той же точке пространства или же в одном и том же движущемся количестве (массе) энергии.

Означим буквой \mathcal{E} плотность энергии в произвольной точке среды, т. е. частное из количества энергии, заключённого внутри бесконечно малого элемента объёма, на этот элемент. Назовем через l_x, l_y, l_z слагающие по прямоугольным осям координат x, y и z скорости, с которой энергия движется в рассматриваемой точке среды.

Вообразим себе элемент объёма $dx dy dz$. При введённых нами обозначениях количества энергии, входящие и выходящие через различные стороны элемента, будут:

$$\left. \begin{array}{l} \text{через сторону } dy dz \text{ и ей параллельную:} \\ \mathcal{E} l_x dy dz \text{ и } - \left(\mathcal{E} l_x + \frac{\partial \mathcal{E} l_x}{\partial x} dx \right) dy dz; \\ \text{через сторону } dx dz \text{ и ей параллельную:} \\ \mathcal{E} l_y dx dz \text{ и } - \left(\mathcal{E} l_y + \frac{\partial \mathcal{E} l_y}{\partial y} dy \right) dx dz; \\ \text{через сторону } dx dy \text{ и ей параллельную:} \\ \mathcal{E} l_z dx dy \text{ и } - \left(\mathcal{E} l_z + \frac{\partial \mathcal{E} l_z}{\partial z} dz \right) dx dy. \end{array} \right\} (1)$$

Сумма этих величин, представляющих токи энергии, даёт нам отнесённое к единице времени изменение количества энергии $\mathcal{E} dx dy dz$ в элементе объёма со временем t . Следовательно, делая сокращения,

$$-\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{E} l_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E} l_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E} l_z}{\partial z}. \quad (1)$$

Здесь $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ есть частная производная от \mathcal{E} по времени. Выражение (I), аналогичное с выражением закона сохранения вещества в гидродинамике, есть выражение элементарного закона сохранения энергии в телах.

Означая через $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ полную производную от \mathcal{E} по времени, мы находим следующее выражение для изменения плотности энергии со временем в одной и той же движущейся массе энергии:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} l_x + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} l_y + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} l_z. \quad (2)$$

Соединяя выражение (2) с (I), находим:

$$-\frac{1}{\mathcal{E}} \cdot \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\partial l_x}{\partial x} + \frac{\partial l_y}{\partial y} + \frac{\partial l_z}{\partial z}. \quad (I')$$

Аналогия между дифференциальными законами движения энергии и движения вещества, вообще, не простирается далее сходства уравнений (I) и (I') с соответственными уравнениями гидродинамики.

Выражение (I) открывает связь между количеством энергии, отнесённым к единице времени, втекающим в среду через её границы, и изменением количества энергии в среде. Мы находим:

$$\iiint \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dx dy dz + \iint \mathcal{E} l_n d\sigma = 0, \quad (3)$$

где тройной интеграл распространяется на весь объём среды, $d\sigma$ представляет элемент её границы и l_n есть скорость движения энергии по внешней нормали n к элементу границы, т. е.

$$l_n = l_x \cos(nx) + l_y \cos(ny) + l_z \cos(nz). \quad (4)$$

§ 3. Связь законов движения энергии с законами частичных движений сред. Дифференциальные законы движений частиц различных сред дают, как известно, возможность установить математическое выражение, представляющее закон сохранения энергии для всей

среды. Если через δJ означим приращение живой силы в элементе объёма среды, через δW — приращение работы частичных сил элемента и через δL — приращение работы давлений на элементе $d\sigma$ поверхности тела, причём все эти приращения отнесены к единице времени, мы всегда имеем возможность по основным дифференциальным законам движений частиц среды составить следующее выражение, причём предполагается, что внешние силы не действуют на частицы среды:

$$\iiint (\delta J + \delta W) d\omega + \iint \delta L d\sigma = 0. \quad (5)$$

В этом выражении $d\omega$ представляет элемент объёма среды, тройной интеграл распространяется на всю среду, а двойной — на её поверхность. Выражение (5) представляет не что иное, как закон сохранения энергии для всей среды.

Для данной среды подобное выражение может быть составлено ещё другим образом, исходя из уравнения (I). Умножая обе части этого уравнения на элемент объёма $d\omega$ и интегрируя на всю среду, мы находим:

$$\iiint \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} d\omega + \iiint \left[\frac{\partial (\mathcal{E}l_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\mathcal{E}l_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\mathcal{E}l_z)}{\partial z} \right] d\omega = 0, \quad (6)$$

или, преобразовывая второй тройной интеграл,

$$\iiint \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} d\omega + \iint \mathcal{E}l_n d\sigma = 0. \quad (7)$$

Тройной интеграл, входящий в это выражение, представляющее закон сохранения энергии для всей среды, должен быть тождествен с тройным интегралом, входящим в выражение (5). Но двойной интеграл, входящий в выражение (7), преобразуется во второй тройной интеграл выражения (6); следовательно, и двойной интеграл, входящий в выражение (5), должен преобразоваться в тройной интеграл, тождественный со вторым тройным интегралом, входящим в выраже-

ние (6). Математическое выражение этого тождества и приведёт к выражениям, связывающим законы движения и распределения энергии с частичными движениями сред.

II. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭНЕРГИИ В РАЗЛИЧНЫХ ТЕЛАХ

§ 4. Уравнения движения энергии в твёрдых телах постоянной упругости. Означим через u, v, w перемещения по осям прямоугольных координат центра тяжести элемента объёма, через p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} — нормальные и через p_{xy}, p_{yz}, p_{xz} — тангенциальные силы упругости, действующие на стороны бесконечно малого параллелепипеда (причём натяжения принимаются положительными, а давления отрицательными), и через ρ — плотность в какой-нибудь точке среды. Полагая, далее,

$$\delta u = \frac{du}{dt} = u', \quad \delta v = \frac{dv}{dt} = v', \quad \delta w = \frac{dw}{dt} = w', \quad (8)$$

мы найдём следующее выражение закона сохранения энергии для всего упругого тела:

$$\begin{aligned} & \iiint \frac{\rho}{2} \delta (u'^2 + v'^2 + w'^2) d\omega + \iiint \left[p_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + p_{yy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \right. \\ & \quad + p_{zz} \frac{\partial \delta w}{\partial z} + p_{yz} \left(\frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + p_{xz} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial z} \right) + \\ & \quad \left. + p_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \right] d\omega - \\ & - \iint \{ \delta u [p_{xx} \cos(nx) + p_{xy} \cos(ny) + p_{xz} \cos(nz)] + \\ & \quad + \delta v [p_{xy} \cos(nx) + p_{yy} \cos(ny) + p_{yz} \cos(nz)] + \\ & \quad + \delta w [p_{xz} \cos(nx) + p_{yz} \cos(ny) + p_{zz} \cos(nz)] \} d\sigma = 0. \quad (9) \end{aligned}$$

Первые два тройных интеграла представляют приращение энергии, отнесённое к единице времени, во всей упругой среде. Двойной интеграл распространяется на всю поверхность среды и представляет работу внешних

давлений. Мы опускаем действие внешних сил на элементы упругой среды. Обращая внимание на значение величин δu , δv и δw по формуле (8), мы замечаем, что двойной интеграл выражения (9) преобразуется в следующий тройной интеграл:

$$\iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (p_{xx}u' + p_{yx}v' + p_{zx}w') + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} (p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w') + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} (p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w') \right\}. \quad (10)$$

Так как первые два тройных интеграла выражения (9) тождественны с первым тройным интегралом выражения (6), то двойной интеграл, входящий в выражение (9), взятый с тем знаком, с которым он входит в это выражение, или тождественный с ним тройной интеграл (10), взятый с отрицательным знаком, должен быть тождествен со вторым тройным интегралом, входящим в выражение (6); следовательно, подинтегральная функция тройного интеграла (10), взятая с отрицательным знаком, должна быть тождественна подинтегральной функции второго тройного интеграла выражения (6), или, что всё равно, второй части уравнения (I). Это заключение легко поверяется при помощи основных уравнений упругости, дающих возможность преобразовать сумму подинтегральных функций первых двух тройных интегралов, входящих в выражение (9), тождественную с $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$, в отрицательную подинтегральную функцию выражения (10). Из тождества этой последней со второй частью уравнения (I) вытекают следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} -\partial l_x &= p_{xx}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w', \\ -\partial l_y &= p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w', \\ -\partial l_z &= p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w', \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

откуда заключаем: *количество энергии, протекающее*

через бесконечно малый плоский элемент в бесконечно малое время, равно отрицательной работе сил упругости, действующих на этот элемент.

Найденные выражения (11) представляют связь законов движения энергии с законами частичных движений твёрдого тела постоянной упругости. К правым частям этих выражений не прибавлены функции, зависящие только от координат (y, z) , (z, x) , (x, y) , ибо левые части должны обращаться в нуль, когда $u' = v' = w' = 0$.

§ 5. Для выяснения найденных нами заключений приложим формулы (10) к определению скорости распространения в упругой среде плоских волн с продольными и поперечными колебаниями.

Рассмотрим колебания продольные. Пусть несущие их плоские волны перпендикулярны к оси x . Следовательно,

$$v = 0, \quad w = 0. \quad (12)$$

Положим, кроме того,

$$u = A \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{\Omega} \right), \quad (13)$$

где Ω есть искомая скорость распространения продольных колебаний. Пользуясь выражениями сил упругости, данными Ламе, мы имеем в нашем случае:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x}, & p_{yz} &= 0, \\ p_{yy} &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x}, & p_{xy} &= 0, \\ p_{zz} &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x}, & p_{xz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Кроме того, мы имеем:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + p_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (15)$$

Интегрируя это выражение по времени, имеем:

$$\mathcal{E} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\lambda + 2\mu}{2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (16)$$

Вставляя сюда величину u , находим:

$$\partial = \frac{2\pi^2 A^2}{T^2} \left(\rho + \frac{2\lambda + \lambda}{\Omega^2} \right) \sin^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{\Omega} \right). \quad (17)$$

С другой стороны, подставляя (13) и (14) в (11), находим:

$$\left. \begin{aligned} -\partial l_x &= -(\lambda + 2\mu) \frac{4\pi^2 A^2}{\Omega T^2} \sin^2 \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{\Omega} \right), \\ -\partial l_y &= 0, \\ -\partial l_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Последние два соотношения дают $l_y = 0$, $l_z = 0$. Следовательно, $l_x = \Omega$, и первое из соотношений (18) по сокращении общих факторов даёт соотношение:

$$\Omega \left(\rho + \frac{2\lambda + \lambda}{\Omega^2} \right) = \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\Omega}, \quad (19)$$

откуда получается известный результат:

$$\Omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}. \quad (20)$$

В случае распространения плоской волны с колебаниями поперечными мы нашли бы точно так же известное выражение для скорости распространения поперечных колебаний.

Выражения (11) дают возможность найти общие соотношения между формой волн, несущих продольные или поперечные колебания, и движениями частиц упругого тела.

Известно, что скорость распространения тех или других волн постоянна и что волны, исходящие из одной и той же поверхности сотрясения, имеют общие нормали. Означая через c скорость распространения волны, мы имеем, следовательно,

$$l_x = \frac{c \frac{\partial B}{\partial x}}{\Delta_1 B}, \quad l_y = \frac{c \frac{\partial B}{\partial y}}{\Delta_1 B}, \quad l_z = \frac{c \frac{\partial B}{\partial z}}{\Delta_1 B}, \quad (21)$$

где

$$B = \text{const.} \quad (22)$$

есть уравнение какой-нибудь волновой поверхности, а $\Delta_1 B$ — её дифференциальный параметр первого порядка.

Мною было показано («Законы колебаний в неограниченной среде постоянной упругости»), что, выбирая за параметр B волны отрезок луча между некоторым начальным положением волны и последующим, мы имеем:

$$\Delta_1 B = 1. \quad (23)$$

Принимая последнее выражение и подставляя (21) в (11), находим:

$$\left. \begin{aligned} -\partial c \frac{\partial B}{\partial x} &= p_{xx} u' + p_{xy} v' + p_{xz} w', \\ -\partial c \frac{\partial B}{\partial y} &= p_{xy} u' + p_{yy} v' + p_{yz} w', \\ -\partial c \frac{\partial B}{\partial z} &= p_{xz} u' + p_{yz} v' + p_{zz} w'. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Эти выражения показывают, что

$$\left. \begin{aligned} -\frac{p_{xx} u' + p_{xy} v' + p_{xz} w'}{\partial c}, \\ -\frac{p_{xy} u' + p_{yy} v' + p_{yz} w'}{\partial c}, \\ -\frac{p_{xz} u' + p_{yz} v' + p_{zz} w'}{\partial c} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

суть выражения косинусов углов нормали в какой-нибудь точке волны с осями координат. Так как по закону общих нормалей все элементы нормалей, проведённые в соответствующих точках одной и той же волны в различных её положениях, лежат на одной прямой, носящей название луча, то выражения (25) остаются неизменными на протяжении одного и того же луча.

Выражения (25) показывают также, что, воображая себе в какой-нибудь точке луча линию, равную по величине произведению из энергии на скорость её распространения, величины

$$\left. \begin{aligned} -(p_{xx} u' + p_{xy} v' + p_{xz} w'), \\ -(p_{xy} u' + p_{yy} v' + p_{yz} w'), \\ -(p_{xz} u' + p_{yz} v' + p_{zz} w') \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

представят её проложения на оси координат.

Возвышая выражения (24) в квадрат и складывая, находим:

$$\mathcal{E}^2 c^2 = (p_{xx}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w')^2 + (p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w')^2 + (p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w')^2. \quad (27)$$

Умножая выражения (24) соответственно на l_x , l_y , l_z , складывая и обращая внимание на соотношения (21), находим следующее выражение:

$$\mathcal{E}c^2 + (p_{xx}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w')l_x + (p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w')l_y + (p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w')l_z = 0. \quad (28)$$

Величина $\mathcal{E}c^2$ может быть названа двойной живой силой движения энергии.

§ 6. Закон энергии для волновых поверхностей произвольного вида. Вставляя в уравнение (I) выражения (21) и принимая в соображение (23), найдём:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{E} \frac{\partial B}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{E} \frac{\partial B}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathcal{E} \frac{\partial B}{\partial z} \right) = 0. \quad (29)$$

Это соотношение даёт связь между энергией и формой волновой поверхности, которая приводится по отношению к энергии к дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка. Мы находим, раскрывая выражение (29):

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathcal{E} \Delta_2 B + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial z} = 0. \quad (30)$$

Здесь Δ_2 означает дифференциальный параметр второго порядка.

Введём ортогональные координаты, причём параметры двух систем поверхностей, ортогональных между собой и к волновой поверхности B , означим через ρ_1 , ρ_2 . Принимая во внимание условия ортогональности, мы представим выражение (30) в следующем виде:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mathcal{E} \Delta_2 B + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial B} = 0. \quad (31)$$

Это выражение интегрируется при помощи совместных дифференциальных уравнений:

$$-\frac{d\mathcal{E}}{\partial \Delta_2 B} = c dt = dB. \quad (32)$$

Означая через f произвольную функцию, находим:

$$\mathcal{E} = e^{-\int \Delta_2 B dB} f(ct - B, \rho_1, \rho_2). \quad (33)$$

Таково общее выражение энергии для колебаний в одной и той же точке среды, несомых волной произвольного вида B . $\int \Delta_2 B dB$ можно взять в общем виде, как показано будет ниже [формула (46)]. Рассмотрим случай волны цилиндрической. Пусть ось цилиндра параллельна оси z и координаты точки её пересечения с плоскостью xy суть $a, 0, 0$. Мы имеем в данном случае:

$$B = r, \quad r^2 = (x - a)^2 + y^2. \quad (34)$$

Следовательно,

$$\Delta_2 B = \frac{1}{r}, \quad (35)$$

и выражение (33) даёт нам:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{r} f(ct - r, z, \varphi), \quad (36)$$

где φ есть параметр плоскостей, проходящих через ось цилиндра.

Для волны сферической, центр которой имеет координаты a, b, c , мы имеем:

$$B = r, \quad r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2. \quad (37)$$

Отсюда

$$\Delta_2 B = \frac{2}{r}, \quad (38)$$

и выражение (33) даёт:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{r^2} f(ct - r, \psi, \varphi). \quad (39)$$

Подобные результаты были известны для живой силы колебательных движений; здесь они даны для всей энергии движения, не определяя в подробности его формы.

Из выражения (33) мы можем заключить о законе энергии в точке волны по мере её движения вместе с волной. Я предпочитаю, однако, вывести этот закон непосредственно из основного уравнения (I'). Обращая внимание на указанный выше выбор параметра B волны, мы имеем:

$$B = ct + c_1, \quad (40)$$

где c и c_1 суть постоянные.

Подставляя в уравнение (I') величины (21) и принимая в соображение (23), находим:

$$\frac{1}{\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} + c \Delta_2 B = 0, \quad (41)$$

откуда

$$\vartheta = e^{-c \int \Delta_2 B dt} f(\rho_1, \rho_2). \quad (42)$$

Из (40) имеем:

$$c dt = dB. \quad (43)$$

Кроме того, означая через h , h_1 , h_2 дифференциальные параметры первого порядка волновой поверхности и ортогональных к ней поверхностей ρ_1 , ρ_2 , мы имеем (Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes, 1859):

$$\Delta_2 B = h h_1 h_2 \frac{d \frac{h}{h_1 h_2}}{dB}. \quad (44)$$

Замечая, что в нашем случае $h = 1$, имеем:

$$\Delta_2 B = - \frac{d \ln h_1 h_2}{dB}. \quad (45)$$

Подставляя (43) и (45) в (42) и производя интеграцию, находим:

$$\vartheta = h_1 h_2 f(\rho_1, \rho_2). \quad (46)$$

Но элемент объёма будет, так как $h = 1$,

$$d\omega = \frac{dB d\rho_1 d\rho_2}{h_1 h_2}. \quad (47)$$

Умножая выражение (46) на (47), находим:

$$\mathcal{E} \cdot d\omega = f(\nu_1, \nu_2) dB d\rho_1 d\nu_2. \quad (48)$$

Так как во всё время движения энергии вдоль одного и того же луча величины ν_1 и ν_2 остаются неизменными, то из выражения (48) заключаем, что энергия целиком переносится волной от одной точки луча к другой.

§ 7. Я закончу настоящий отдел несколькими общими соображениями относительно законов движения энергии, не ограничиваясь случаем, когда она распространяется во всех направлениях с постоянной скоростью. Вообразим себе внутри упругого тела бесконечно малый плоский элемент, нормаль коего обозначим через n . Пусть сила упругости, действующая на элемент, будет P . Мы имеем по известным формулам теории упругости соотношения:

$$\left. \begin{aligned} P \cos(Px) &= p_{xx} \cos(nx) + p_{xy} \cos(ny) + p_{xz} \cos(nz), \\ P \cos(Py) &= p_{xy} \cos(nx) + p_{yy} \cos(ny) + p_{yz} \cos(nz), \\ P \cos(Pz) &= p_{xz} \cos(nx) + p_{yz} \cos(ny) + p_{zz} \cos(nz). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Умножая эти выражения на u' , v' , w' и складывая, находим:

$$Pi \cos(iP) = -\mathcal{E} e \cos(en). \quad (50)$$

Здесь i есть скорость центра рассматриваемого нами бесконечно малого плоского элемента, e — скорость движения энергии в этом центре. Означая через i_p слагающую скорости элемента по направлению силы упругости и через l_n — слагающую скорости энергии по нормали к элементу, выражение (50) может быть написано в следующем виде:

$$Pi_p = -\mathcal{E} l_n. \quad (51)$$

Мы видим из этого выражения, что сила упругости, взятая с отрицательным знаком, пропорциональна коли-

честву протекающей через элемент в единицу времени энергии и обратно пропорциональна слагающей скорости частиц самого элемента по направлению силы упругости.

В каждой точке M упругого тела всегда существуют три взаимно перпендикулярных плоских элемента, испытывающих одни только нормальные силы упругости. Воображая себе в точке M оси прямоугольных координат проведёнными таким образом, что плоскости координат параллельны указанным трём плоским элементам, мы имеем по формуле (51):

$$\left. \begin{aligned} -\partial l_x &= p_{xx} u', \\ -\partial l_y &= p_{yy} v', \\ -\partial l_z &= p_{zz} w'. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Выражения (11), (51) и (52) показывают, что *сумма из количества энергии, протекающей через произвольный плоский элемент, и работы сил упругости на элемент равна нулю*. Уравнение (51), будучи справедливым для каждого плоского элемента внутри среды, имеет место на границах среды. Оно даёт, следовательно, возможность по давлению, испытываемому границами среды, определить количество входящей в неё энергии, зная при этом скорость движения частиц на границах. Точно так же, зная количество энергии q , входящей в среду в единицу времени, и зная скорость частиц на границах, мы можем определить давление или натяжение, соответствующее этому переходу. Заметим, что q имеет знак положительный, когда энергия выходит из тела, и отрицательный, когда энергия входит в тело. Следовательно, из (51) мы находим:

$$P = -\frac{q}{i_p}. \quad (53)$$

Если дано q и P , то найдём отсюда i_p ; соотношение (53) показывает именно, что скорость движения частиц тела на границе по направлению силы P равна частному из количества энергии, прошедшей через весьма малый плоский элемент, центр коего совпадает с частицей,

и отнесённого к единице площади и времени, на давление или натяжение P .

Возьмём числовой пример. Пусть давление P , испытываемое элементом границы тела, нормально к его поверхности и в данный момент времени равно давлению атмосферы. Давление P , отнесённое на квадратный метр поверхности, есть 10 334 кг. Пусть количество энергии, протекающее в данный момент времени через бесконечно малый элемент поверхности, отнесённое к 1 сек. и к квадратному метру, есть 1 килограммометр в 1 сек. Тогда для данного момента скорость i_p движения частиц взятого элемента поверхности будет по формуле (53):

$$i_p = \frac{1}{10\,334} \text{ м/сек} = 0,096 \text{ мм/сек.}$$

Возьмём ещё другой пример. Положим, что теплота, сообщаемая упругому телу, заключается в энергии его частичных движений, удовлетворяющих уравнениям упругости. Положим, что температура 1 кг тела повышена на 1° С в 1 сек. Означим плотность тела через ∂ , его теплоёмкость под давлением атмосферы — через γ и положим, что тело имеет кубическую форму. Объём тела будет $\frac{1}{1000 \partial} \text{ м}^3$, поверхность $s = 6 \left(\frac{1}{1000 \partial} \right)^{\frac{2}{3}}$; количество энергии, прошедшее в 1 сек. через 1 м поверхности, есть $\frac{\gamma \cdot 425}{s} \text{ кгм.}$ По формуле (53) вычисляется средняя скорость i_p частиц его поверхности при давлении одной атмосферы, т. е. 10 344 кг/м²:

$$i_p = 0,687 \cdot \gamma \cdot \partial^{\frac{2}{3}} \text{ м/сек.}$$

Отсюда вычисляются:

железо	0,3 м/сек,
платина	1,8 м/сек.

Формула (53) приводит нас еще к следующему заключению: скорости i_p граничных частиц всех упругих

тел при одном и том же давлении или натяжении и при одном и том же количестве энергии, проходящем через них в бесконечно малый элемент времени, равны.

§ 8. Уравнения движения энергии в телах жидких. Рассмотрим сначала жидкости, не обращая внимания на так называемое внутреннее трение частиц жидкости. Означая через u , v , w скорости движения частиц жидкости в одной и той же точке пространства, через p — давление и ρ — плотность, мы имеем следующие уравнения гидродинамики:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Мы снова опускаем случай действия внешних сил на частицы жидкости. Кроме приведённых соотношений, мы имеем ещё следующие:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Умножая выражения (54) соответственно на $u dt$, $v dt$, $w dt$, складывая, деля на dt и интегрируя для всего объёма среды, находим:

$$\begin{aligned} &\iiint \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^2 + v^2 + w^2) d\omega + \\ &\quad + \frac{1}{2} \iiint \left[\rho u \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) + \right. \\ &\quad + \rho v \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2 + w^2) + \rho w \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2 + w^2) \left. \right] d\omega + \\ &\quad + \iiint \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) d\omega = 0. \end{aligned} \quad (56)$$

Первая часть этого выражения после интегриации по частям представится в виде:

$$\begin{aligned} & \iiint \left\{ \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} - p\theta \right\} d\omega + \\ & + \iiint \left[\rho \frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{2} + p \right] [u \cos(nx) + v \cos(ny) + \\ & \qquad \qquad \qquad + w \cos(nz)] d\sigma = 0, \quad (57) \end{aligned}$$

где $d\sigma$ есть элемент границ и θ — кубическое расширение. Это выражение может быть написано ещё в таком виде:

$$\begin{aligned} & \iiint \left[\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \right\} - p\theta \right] d\omega + \\ & + \iiint \left[\rho \frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{2} + p \right] [u \cos(nx) + \\ & \qquad \qquad \qquad + v \cos(ny) + w \cos(nz)] d\sigma = 0. \quad (58) \end{aligned}$$

Тройной интеграл, входящий в это выражение, представляет сумму изменений энергии во всех элементах пространства, занятого средой. Действительно, первый член подинтегральной функции тройного интеграла представляет изменение живой силы со временем в одном и том же элементе объёма среды; второй же член той же подинтегральной функции представляет изменение работы давлений в одном и том же элементе, взятое с надлежащим знаком. Отсюда следует, что двойной интеграл выражения (58) представляет количество энергии, входящее в среду через её границы. Следовательно, выражение (58) представляет закон сохранения энергии для всей жидкой среды, и потому оно тождественно с уравнением (7). Двойной интеграл уравнения (58) должен быть тождествен с двойным интегралом уравнения (7) и, следовательно, должен преобразовываться в тройной интеграл, тождественный со вторым тройным интегралом выражения (6). Действительно, двойной интеграл выраже-

ния (58) может быть преобразован в тройной интеграл следующего вида:

$$\iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[u \left(p + \frac{\rho(u^2 + v^2 + \omega^2)}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[v \left(p + \frac{\rho(u^2 + v^2 + \omega^2)}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left[\omega \left(p + \frac{\rho(u^2 + v^2 + \omega^2)}{2} \right) \right] \right\} d\omega. \quad (59)$$

Подинтегральная функция, входящая в это выражение, представляет уже количество энергии, проникающей в единицу времени в один и тот же элемент объёма жидкости. Справедливость этого заключения может быть поверена непосредственно, преобразовывая подинтегральную функцию тройного интеграла выражения (58) при помощи приведённых выше уравнений гидродинамики. Итак, подинтегральная функция выражения (59) тождественна с подинтегральной функцией второго тройного интеграла выражения (7) или со второй частью основного уравнения (I). Из этого тождества вытекают следующие соотношения между законами энергии и законами частичных движений жидких сред:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= u \left(p + \frac{\rho i^2}{2} \right), \\ \mathcal{E}_y &= v \left(p + \frac{\rho i^2}{2} \right), \\ \mathcal{E}_z &= \omega \left(p + \frac{\rho i^2}{2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

где i есть скорость движения частицы жидкости, т. е.

$$i^2 = u^2 + v^2 + \omega^2. \quad (61)$$

Из выражений (60) следует, означая через c скорость движения энергии, т. е.

$$c^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2, \quad (62)$$

что

$$\mathcal{E}c = i \left(p + \frac{\rho i^2}{2} \right), \quad (63)$$

т. е. количество движения энергии равно произведению скорости движения жидкости на сумму гидростатического давления и живой силы. Деля каждое из уравнений (60) на (63), находим:

$$\frac{l_x}{c} = \frac{u}{i}, \quad \frac{l_y}{c} = \frac{v}{i}, \quad \frac{l_z}{c} = \frac{w}{i}; \quad (64)$$

иными словами, направление движения энергии одинаково с направлением движения жидкости. Отсюда вытекает заключение, что внутри жидких тел невозможны такие формы движений, при которых направление движения частиц не совпадает с направлением движения энергии. Так, например, в жидких телах невозможно распространение волн с колебаниями поперечными. Выражение (63) существует и на поверхности жидкости; подобно выражению (53) оно даёт возможность вычислять скорости частиц у поверхности жидкости по давлению на этой поверхности и количеству энергии, входящей в тело.

§ 9. Случай несжимаемой жидкости. Для жидкости несжимаемой величина энергии равна живой силе движения частиц жидкости. Следовательно,

$$\mathcal{E} = \frac{\rho i^2}{2}. \quad (65)$$

Подставляя эту величину в выражение (63), мы находим:

$$i^2 - ic + \frac{2p}{\rho} = 0, \quad (66)$$

откуда

$$c = i + \frac{2p}{\rho i} \quad (67)$$

и

$$i = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{2p}{\rho}}. \quad (68)$$

Последнее выражение показывает нам, во-первых, что для всех форм движения, возможных внутри несжимае-

мой жидкости, подкоренная величина выражения (68) должна оставаться положительной, т. е.

$$\frac{c^2}{4} \geq \frac{2p}{\rho}. \quad (69)$$

Во-вторых, оно показывает, что всегда

$$i < c. \quad (70)$$

Скорость i равна скорости c только при $p=0$. Выражение (69) даёт возможность определить минимум скорости движения энергии под данным давлением в несжимаемой жидкости. Этот минимум будет:

$$c_m = \sqrt{\frac{8p}{\rho}}. \quad (71)$$

Означая через n число атмосфер, под давлением которых находится частица жидкости, через ∂ — плотность жидкости относительно воды при 4°C , принимая, далее, за единицу длины метр и за единицу времени секунду, мы находим:

$$\left. \begin{aligned} p &= 10\,334 \cdot n \text{ кг,} \\ \rho &= \frac{P}{g} \cdot \partial, \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

где P есть вес кубического метра воды при 4°C , т. е. 1000 кг , и g — ускорение тяжести, равное приблизительно 10 м . Вставляя величины (72) в (71), находим:

$$c = 28,752 \sqrt{\frac{n}{\partial}} \text{ м.} \quad (73)$$

Следовательно, для воды наименьшая возможная скорость движения энергии в частях жидкости, находящихся под давлением одной атмосферы, есть $28,752 \text{ м}$. Формула (73) показывает, что для жидкостей различной плотности минимум скорости энергии понижается с увеличением плотности; для одной и той же жидкости минимум скорости движения энергии повышается с увеличением давления.

Из выражения (66) мы находим:

$$-\frac{P}{\rho} = \frac{i(i-c)}{2}. \quad (74)$$

Подставляя эту величину в уравнения гидродинамики (54), мы приведём их к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 2 \frac{\partial u}{\partial t} + v \zeta - w \eta + \frac{\partial ci}{\partial x}, \\ 0 &= 2 \frac{\partial v}{\partial t} + w \xi - u \zeta + \frac{\partial ci}{\partial y}, \\ 0 &= 2 \frac{\partial w}{\partial t} + u \eta - v \xi + \frac{\partial ci}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} &= 2\xi, \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} &= 2\eta, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 2\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Величины ξ , η и ζ представляют вращения элемента объёма около осей x , y , z . Если в жидкости вращательные движения не существуют, то выражения (75) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 2 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial ci}{\partial x}, \\ 0 &= 2 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial ci}{\partial y}, \\ 0 &= 2 \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial ci}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Если φ есть потенциал скоростей, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{ci}{2}, \quad (78)$$

т. е. отрицательная частная производная от потенциала скоростей по времени равна половине произведения скорости движения энергии на скорость движения частиц. Функция времени, которая должна быть прибавлена к выражению (78), подразумевается под знаком φ .

§ 10. Уравнения движения энергии в жидкостях с трением. Более общие дифференциальные законы движения жидкостей получаются, как известно, принимая существование давлений, направленных косвенно к плоскому элементу внутри жидкости, стороны коего параллельны плоскостям координат; мы означим слагающие косвенных давлений, испытываемых тремя сторонами элемента, ближайшими к началу координат, через p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , p_{xy} , p_{yz} , p_{zx} ; значение употреблённых здесь индексов известно. Мы имеем следующие дифференциальные уравнения с частными производными, предполагая, что внешние силы не действуют на элементы жидкости:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) &= \\ = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \\ -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \right) &= \\ = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \\ -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) &= \\ = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Кроме этих выражений, для трущихся жидкостей остаются в силе соотношения (55).

Закон сохранения энергии для всей массы жидкости будет:

$$\begin{aligned} & \iiint \left\{ \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2} \left[\rho u \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \rho v \frac{\partial}{\partial y} (u^2 + v^2 + w^2) + \rho w \frac{\partial}{\partial z} (u^2 + v^2 + w^2) \right] \right\} d\omega + \\ & + \iiint \left[u \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} \right) + \right. \\ & \quad \left. + w \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) \right] d\omega = 0. \quad (80) \end{aligned}$$

Интегрируя это выражение по частям, находим:

$$\begin{aligned}
 & \iiint \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{ \rho (u^2 + v^2 + w^2) \} - p_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - p_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} - p_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} - \right. \\
 & - p_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - p_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - p_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left. \right] d\omega + \\
 & + \iint \left\{ \cos(nx) \left[\frac{\rho u (u^2 + v^2 + w^2)}{2} + p_{xx}u + p_{xy}v + p_{xz}w \right] + \right. \\
 & + \cos(ny) \left[\frac{\rho v (u^2 + v^2 + w^2)}{2} + p_{xy}u + p_{yy}v + p_{yz}w \right] + \\
 & + \cos(nz) \left[\frac{\rho w (u^2 + v^2 + w^2)}{2} + p_{xz}u + \right. \\
 & \left. \left. + p_{yz}v + p_{zz}w \right] \right\} d\sigma = 0. \quad (81)
 \end{aligned}$$

Простой интеграл, входящий в это выражение, представляет изменение энергии всей жидкой массы, отнесенное к единице времени; двойной же интеграл, распространённый на элементы поверхности жидкой массы, представляет количество энергии, входящей в жидкость извне. Этот двойной интеграл может быть представлен в форме тройного интеграла следующего вида:

$$\begin{aligned}
 & \iiint \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[u \frac{\rho (u^2 + v^2 + w^2)}{2} + p_{xx}u + p_{xy}v + p_{xz}w \right] + \right. \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left[v \frac{\rho (u^2 + v^2 + w^2)}{2} + p_{xy}u + p_{yy}v + p_{yz}w \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left[w \frac{\rho (u^2 + v^2 + w^2)}{2} + p_{xz}u + \right. \\
 & \left. \left. + p_{yz}v + p_{zz}w \right] \right\} d\omega. \quad (82)
 \end{aligned}$$

Подинтегральная функция этого выражения представляет количество энергии, проникающее в один и тот же элемент объёма жидкости от смежных частей жидкости. Путём заключений, сходных с употреблёнными в предыдущих параграфах, мы убедимся, что эта подинтегральная функция тождественна со второй частью

основного уравнения (I). Математическое выражение этого тождества представится следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_x &= u \frac{\rho(u^2 + v^2 + w^2)}{2} + p_{xx}u + p_{xy}v + p_{xz}w, \\ \mathcal{E}_y &= v \frac{\rho(u^2 + v^2 + w^2)}{2} + p_{xy}u + p_{yy}v + p_{yz}w, \\ \mathcal{E}_z &= w \frac{\rho(u^2 + v^2 + w^2)}{2} + p_{xz}u + p_{yz}v + p_{zz}w. \end{aligned} \right\} (83)$$

Законы движения энергии представляют в данном случае средину между законами, имеющими место для тела упругого и для тела жидкого.

III. ПЕРЕХОД ОТ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ЭНЕРГИИ К ЧАСТИЧНЫМ ДВИЖЕНИЯМ, ОБУСЛОВЛИВАЮЩИМ ЯВЛЕНИЯ

В предыдущем отделе было найдено выражение закона сохранения энергии для бесконечно малого элемента непрерывной среды, частицы которой находятся в движении. Затем для ряда различных сред были найдены соотношения, связывающие законы движения и распределения энергии в среде с законами её частичных движений. Результаты, нами найденные, с одной стороны, служили оправданием той формы элементарного закона сохранения энергии, которая была положена в основание исследования, с другой — дали метод отыскания связи между законами движения и распределения энергии в какой-нибудь среде и её частичными движениями. В настоящем отделе я постараюсь, основываясь на добытых результатах, наметить путь, которому должно следовать теоретическое изыскание, ставящее себе задачей объяснение явлений природы частичными движениями.

При поверхностном взгляде все явления природы могут быть разделены на две группы, как будто

стоящие особняком друг от друга: группа первая — явления, наблюдаемые в средах непрерывных; группа вторая — явления, наблюдаемые над телами разрозненными, не находящимися в непосредственном соприкосновении друг с другом. К первой группе относятся явления, требующие для своего существования какой-нибудь среды, как, например, эфир для световых явлений, твёрдое тело, проводящее теплоту, для явлений теплопроводности, проводник для явлений гальванического тока, проводник или изолятор для электростатических явлений и пр. Ко второй группе относятся явления, обуславливаемые так называемым взаимодействием различных деятелей природы на конечных расстояниях. Из этих двух групп вторая будет нами рассмотрена подробнее, чем первая.

§ 11. Способ сведения явлений первой группы на частичные движения сред. Из предыдущего отдела вытекает следующий весьма простой метод объяснения явления природы, происходящего в какой-нибудь среде, частичными движениями этой среды. Представим дифференциальные уравнения с частными производными, управляющие движениями частиц внутри среды, в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= 0, \\ F_y &= 0, \\ F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Здесь функция F зависит только от ускорений частиц, скоростей, перемещений и их производных по координатам. При помощи этих уравнений мы найдём связь между законами движения и распределения энергии в среде и законами частичных движений — связь, которая представится соотношениями следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \partial l_x &= \Phi_x, \\ \partial l_y &= \Phi_y, \\ \partial l_z &= \Phi_z, \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

где функции Φ зависят от скоростей, перемещений и их производных по координатам. Если нам известны путём опыта величины \mathcal{E} , l_x , l_y , l_z для каждой точки среды, то весь вопрос приводится к чисто математической задаче: требуется обинтегрировать уравнения (84), причём найденные интегралы должны удовлетворять условиям (85), в которых левые части даны наперёд. Таким образом, в этой форме успех решения задачи обуславливается силами одного математического анализа.

Приведение задачи к указанной простой форме представляет, однако, немаловажные затруднения, которые могут быть устранены отчасти путём опыта и анализа его результатов. Возможность приведения задачи к указанной простой форме предполагает знание среды, в которой происходит явление, и знание законов распределения и движения энергии в данном явлении.

Определение среды, служащей местом явлению, представляет большие трудности. Все тела природы предполагаются проникнутыми световым эфиром, и в большинстве случаев нельзя сказать утвердительно — весомые частицы тела служат местом явлению, или окружающий их эфир, или, наконец, то и другое вместе.

Орудия опытного исследования дают возможность определять характер явления только за известные, весьма малые, но не бесконечно малые промежутки времени. Поэтому закон энергии, находимый нами путём опыта, представляет некоторый интегральный закон. Означая через τ наименьший промежуток времени, за который орудия опытного исследования могут дать отчёт о происходящем явлении, означая через \mathcal{E} величину энергии, существующую в каждой точке среды в каждый момент времени, мы находим из опытных данных величину энергии \mathcal{E}' :

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \mathcal{E} dt. \quad (86)$$

В формулы (85) должна быть подставлена величина \mathcal{E} , но не величина \mathcal{E}' , даваемая опытом. Поэтому является задача определения величины \mathcal{E} по \mathcal{E}' из соотношения (86).

Эта задача может быть, однако, обойдена или облегчена в некоторых специальных случаях:

а) явление может быть приведено в такую форму, для которой энергия изменяется только в пространстве, но не во времени; в этом случае

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}. \quad (87)$$

Это соотношение имеет место в явлениях интерференции. Так как в этом случае величина \mathcal{E} известна с достоверностью, то первый успех объяснения явления путём частичных движений предстоит явлениям, для которых возможна интерференция производящих их движений. В этом заключается одна из причин успешной разработки теории световых явлений;

б) если закон энергии, найденный из опыта, носит характер настолько общий, что может быть принят справедливым для моментов времени, бесконечно близких друг к другу; примером такого закона может служить закон обмена тепла между двумя бесконечно близкими частицами тел, служащий основанием теории теплопроводности. Здесь величина \mathcal{E}' не может быть, однако, приравнена величине \mathcal{E} .

В последнем случае, так же как и в остальных, мы должны решить соотношения (86) по отношению к \mathcal{E} . Эта задача облегчается тем условием, что мы наблюдаем явления, энергия коих вместе со временем приближается в каждой точке среды к некоторому пределу. В данном случае мы можем представить величину \mathcal{E} следующим рядом:

$$\mathcal{E} = \sum f(x, y, z) \cdot \varphi(t) \cdot e^{-kt}. \quad (88)$$

Здесь f есть функция координат, φ —периодическая функция времени, k —постоянная. Подставляя эту ве-

личину в выражение (86), мы определим отчасти коэффициенты разложения из соотношения

$$\mathcal{E}' = \frac{1}{\tau} \sum A e^{-kt} f(x, y, z). \quad (89)$$

§ 12. Определение законов движения и распределения энергии в явлениях взаимодействия на расстояниях конечных. Я постараюсь теперь решить часть вопросов, связанных с объяснением явлений второй группы, т. е. взаимодействий на расстояниях конечных, из частичных движений. Эти движения должны происходить, в общем случае, как во взаимодействующих телах, так и в среде, в которую последние погружены. Эту среду я буду называть промежуточной средой. Определению формы частичных движений должно предшествовать, по указанному выше методу, определение законов энергии в промежуточной среде, определение закона обмена энергии между телами и промежуточной средой и, наконец, определение законов энергии в самих телах. Я буду разделять энергию тел на две части: на энергию бесконечно малых частичных движений этих тел, или внутреннюю энергию тел, и на энергию, представляемую живой силой их явных движений, приписываемых обыкновенно взаимодействию на расстояниях конечных. Энергия промежуточной среды состоит, вообще, из двух частей, значение которых определяется следующими соображениями.

Представим себе, что взаимодействующие тела удерживались в покое какими-нибудь внешними силами. По истечении бесконечно малого времени после устранения этих сил тела приобретут скорости, и каждое из них будет обладать некоторым количеством живой силы. Приобретение последней может совершиться только на счёт энергии, заключавшейся, до момента устранения внешних сил, в движениях промежуточной среды. Это заключение справедливо и в тех случаях, когда приращение живой силы явного движения тел сопровождается уменьшением их внутренней энергии. В самом деле, признавши раз необходимость участия

промежуточной среды в явлениях взаимодействия на расстояниях конечных, мы отвергали бы, в сущности, эту гипотезу, если бы допустили, что приращение живой силы явных движений тел совершается непосредственно на счёт убыли внутренней энергии тел, без участия среды. Допуская же это участие, мы находим для него одно только возможное толкование: после устранения внешних сил первый акт явления заключается в приращении живой силы явных движений тел на счёт убыли энергии частичных движений промежуточной среды, и второй акт явления, непосредственно следующий за первым, — пополнение убыли энергии промежуточной среды из внутренней энергии тел.

Означим через $\sum \delta Q$ количество энергии, сообщаемое всем взаимодействующим телам в бесконечно малый элемент времени. Через $\sum \delta W$ обозначим сумму изменений внутренних энергий тел за тот же промежуток времени. Через δH означим изменение энергии промежуточной среды. Если взаимодействующие тела удерживаются в покое внешними силами или удалены друг от друга на громадные расстояния, то мы имеем соотношение:

$$\sum \delta Q = \sum \delta W + \delta H. \quad (90)$$

Нам известно, что в том случае, когда частичные движения тел достигли некоторого стационарного состояния, т. е. когда наблюдаемые нами явления в телах стационарны, величина $\delta H = 0$ (например, в случае стационарного гальванического тока работа химических сил в элементах цепи идёт исключительно на развитие тепла в цепи). Следовательно,

$$\sum \delta Q = \sum \delta W. \quad (91)$$

Этот закон, как показывает опыт, имеет место во всё время, в течение коего явления остаются стационарны; сравнивая его с законом (90), мы видим, что некоторое количество энергии должно было быть отдано промежуточной среде, прежде чем явление достигло стационарного состояния.

Означим через $\sum \delta i^2$ приращение живой силы явных движений взаимодействующих тел. Рассматривая такие тела, для взаимодействия коих существует потенциал, который я обозначу через Π , мы имеем в первый момент взаимодействия:

$$\sum \delta i^2 + \delta \Pi = 0. \quad (92)$$

Для последующего момента величина Π может видоизмениться не только вследствие изменения относительного расположения тел, но и вследствие изменения частичных движений самих тел. Соображения, приведённые нами выше, показывают, что изменение энергии промежуточной среды равняется величине $-\delta \Pi$. Опыт показывает, с другой стороны, что существует целый класс явлений, в которых приращение живой силы явных движений взаимодействующих тел связано с уменьшением внутренней энергии самих тел. Для этих явлений за первым актом, характеризующимся соотношением (92), следует второй, характеризующийся соотношением

$$\sum \delta Q = \delta W - \delta \Pi. \quad (93)$$

Пополнение убыли энергии в промежуточной среде из внутренней энергии тел, связанное, как показывает опыт, с временным нарушением стационарности явления в телах, может иметь основание в том, что стационарность этих явлений обуславливается существованием определённого количества энергии в среде. Мы не имеем, однако, никаких данных для того, чтобы утверждать, тождественна ли форма движений, приобретаемых средой при пополнении убылей её энергии вследствие постепенного изменения живой силы явных движений взаимодействующих тел, с той формой движения, которая вызывается в среде при сообщении ей энергии телами до того момента, когда происходящие в них явления достигнут состояния стационарного и когда они удалены друг от друга на бесконечно большие расстояния.

Я займусь подробным рассмотрением только некоторых вопросов из указанных мною выше и именно тех, о которых можно рассуждать с наибольшей достоверностью. С наибольшей ясностью выступает для нас значение величин Π и $\sum i^2$ и их взаимные превращения. Если мы вычисляем для каждого относительного положения тел величину Π , оставляя без внимания временную нестационарность явления, могущую происходить в телах во время их перемещения, то соотношение (92) остаётся справедливым при перемещении тел из всякого относительного их положения, если вначале тела удерживались в нём в покое. Отсюда мы заключаем, что энергия среды, способная в каждый отдельный момент времени превращаться в живую силу явных движений тел, а также энергия среды, в которую способна превращаться в каждый момент времени живая сила движений тел, представляется величиною

$$\Pi + \text{const.} \quad (94)$$

(см. также мою статью: «Ein Theorem über die Wechselwirkungen» и пр., § 12, Zeitschrift f. Mathematik und Physik, XIX, 2, 1874). Наша задача будет заключаться в отыскании закона распределения энергии внутри промежуточной среды, при котором сумма энергий всех элементов пространства, занятого средою, представляется величиною (94). Затем мы должны будем определять закон движения энергии в среде.

Законы, которые могут быть нами при этом найдены, по причинам, изложенным в § 11, будут некоторые интегральные законы; тем не менее, основной закон энергии (I) остаётся справедливым, потому что при его выводе не было сделано никаких условий для того промежутка времени, за который определяются величины энергии и её скорости. Означая, следовательно, через $\bar{\mathcal{E}}$ среднюю величину энергии за некоторый весьма малый промежуток времени, через \bar{l}_x , \bar{l}_y , \bar{l}_z —средние скорости энергии за тот же самый весьма

малый промежуток времени, мы имеем следующие две основные формулы:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{E} l_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{E} l_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{E} l_z}{\partial z} = 0, \quad (95)$$

$$\frac{1}{\mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial l_x}{\partial x} + \frac{\partial l_y}{\partial y} + \frac{\partial l_z}{\partial z} = 0. \quad (96)$$

§ 13. Превращение величины $\Pi + \text{const.}$ в тройной интеграл, распространённый на всю промежуточную среду. Величина Π в том виде, как она входит в уравнение живых сил в явлениях взаимодействия на расстояниях конечных, зависит от относительного положения взаимодействующих тел и от их формы. По отношению к промежуточной среде эти тела определяют положение и форму границ промежуточной среды. Если я означу через \mathcal{E} количество энергии в элементе промежуточной среды, то эта последняя должна быть найдена из условия:

$$\Pi + \text{const.} = \iiint \mathcal{E} d\omega, \quad (97)$$

где тройной интеграл распространяется на всю промежуточную среду.

Мы решим соотношение (97) для специальных случаев, которыми исчерпываются все известные нам роды взаимодействий на конечных расстояниях.

Случай первый. Взаимодействие весомых, электрических и магнитных масс. Для взаимодействия этих масс потенциал V во всём внешнем пространстве, не заключающем действующих масс, т. е. для всех точек промежуточной среды, удовлетворяет уравнению Лапласа. Мы решим вопрос для взаимодействия двух масс m_1, m_2 , которые вообразим себе сосредоточенными в двух точках a, b , находящихся на расстоянии R друг от друга. Означая через V_{ab} потенциал обеих масс друг на друга, мы имеем:

$$\Pi = V_{ab}. \quad (98)$$

Здесь

$$V_{ab} = + \frac{m_1 m_2}{R}. \quad (99)$$

Положительный знак должен быть взят в случае отталкивания, а отрицательный — в случае притяжения. Означим через V_1 , V_2 потенциалы масс m_1 и m_2 в какой-нибудь точке промежуточной среды. Мы имеем по теореме Грина:

$$\begin{aligned} \iiint V_2 \Delta_2 V_1 d\omega + \iiint d\omega \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) = \\ = - \iint V_2 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} d\tau_1 - \iint V_2 \frac{\partial V_1}{\partial n_2} d\tau_2, \quad (100) \end{aligned}$$

где знак Δ_2 представляет дифференциальный параметр второго порядка, тройной интеграл распространяется на всю промежуточную среду, т. е. на пространство, ограниченное с одной стороны поверхностью бесконечно большой сферы, с другой — двумя бесконечно малыми сферами, окружающими точки a и b . Двойные интегралы распространяются на поверхности этих сфер, и dn_1 , dn_2 представляют элементы нормалей к этим сферам, направленные внутрь промежуточной среды. Первый двойной интеграл, входящий во вторую часть предыдущего выражения, будет

$$+ 4\pi V_{ab}. \quad (101)$$

Второй же двойной интеграл будет величиной бесконечно малой. Следовательно, по (98)

$$\begin{aligned} + 4\pi\Pi = \iiint V_2 \Delta_2 V_1 d\omega + \\ + \iiint \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) d\omega. \quad (102) \end{aligned}$$

Точно так же имеем:

$$\begin{aligned} + 4\pi\Pi = \iiint V_1 \Delta_2 V_2 d\omega + \\ + \iiint \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) d\omega \quad (103) \end{aligned}$$

Складывая эти выражения, находим:

$$8\pi\Pi = \int \int \int [V_2 \Delta_2 V_1 + V_1 \Delta_2 V_2] d\omega + \\ + 2 \int \int \int \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial V_2}{\partial z} \right) d\omega. \quad (104)$$

Подинтегральная функция этого выражения может быть весьма просто преобразована. Собирая члены, содержащие производные по x , имеем:

$$V_2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + V_1 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial V_2}{\partial x},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x} \right),$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (V_1 V_2). \quad (105)$$

Подобное преобразование может быть произведено и над другими членами. Мы получаем таким образом:

$$4\pi\Pi = \frac{1}{2} \int \int \int \Delta_2 (V_1 V_2) d\omega. \quad (106)$$

Ближайшей нашей задачей будет определение постоянной, которая должна быть прибавлена к величине Π , чтобы иметь всю энергию среды. Эта постоянная представляет количество энергии, которая была бы заключена в среде, когда в последней было бы погружено только одно из взаимодействующих тел. Величину этой энергии легко найти из выражения (106), замечая, что она должна быть вдвое меньше той энергии, которая вычислится по формуле (106) для того случая, когда массы m_1 и m_2 , равные друг другу и тождественные, совпадут. В этом случае мы должны положить $V_1 = V_2$, и из (106) находим, означая через Π_a и Π_b части энергии среды, обуславливаемые в ней каждой массой m_1

и m_2 в отдельности:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\Pi_a &= \frac{1}{4} \iiint \Delta_2 V_1^2 d\omega, \\ 4\pi\Pi_b &= \frac{1}{4} \iiint \Delta_2 V_2^2 d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Величины Π_a и Π_b представляют количества энергии, которыми обладала бы среда, если бы в ней находилась или только масса m_1 , или только масса m_2 .

Полная энергия среды есть, следовательно, по (97):

$$\iiint \mathcal{E} d\omega = \Pi + \text{const.} = \Pi + \Pi_a + \Pi_b. \quad (108)$$

Подставляя сюда найденные выше величины Π , Π_a , Π_b , находим:

$$\iiint \mathcal{E} d\omega = \frac{1}{16\pi} \iiint \Delta_2 (V_1 + V_2)^2 d\omega. \quad (109)$$

Следовательно,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{16\pi} \Delta_2 (V_1 + V_2)^2. \quad (110)$$

Означая через ρ параметр поверхностей равного потенциала в среде, имеем: $V_2 + V_1 = \rho$; следовательно,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{16\pi} \Delta_2 \rho^2. \quad (111)$$

Этому выражению мы можем дать ещё иной вид. Означим через h дифференциальный параметр первого порядка от параметра ρ , т. е.

$$h = \sqrt{\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial V_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)^2}. \quad (112)$$

Величина h представляет силу, с которой действовали бы массы m_1 и m_2 на массу, равную единице и помещённую в какой-нибудь точке промежуточной среды. Замечая, что по условию во всех точках промежуточной среды функции V_1 , V_2 удовлетворяют уравнению Лапласа, мы можем дать выражению (111) следующую форму:

$$\mathcal{E} = \frac{h^2}{8\pi}, \quad (113)$$

т. е. количество энергии в каждой точке промежуточной среды пропорционально квадрату силы, с которой массы m_1 и m_2 действовали бы на массу, равную единице, помещённую в этой точке промежуточной среды.

В том случае, когда массы притягиваются, мы должны брать потенциалы V_1 и V_2 с противными знаками; в случае же, когда они отталкиваются, — со знаками одинаковыми. Это знакоположение вытекает из соотношения (99). Отсюда следует, что энергия среды в случае притягивающихся масс будет наибольшей, когда эти массы находятся в бесконечном удалении друг от друга. По мере сближения масс энергия среды превращается постепенно в живую силу их явного движения. В случае масс, отталкивающих друг друга, их бесконечному удалению соответствует наименьшая величина энергии среды.

Выражения (111) и (113) имеют место не только для действующих масс, сосредоточенных в двух точках, но и для произвольного количества произвольно расположенных масс. Эти же выражения имеют место и для взаимодействия замкнутого тока на магнитный полюс, ибо, заменяя первый магнитными поверхностями, мы приходим к случаю только что разобранным.

§ 14. Закон энергии в случае взаимодействия двух замкнутых токов друг на друга. Этот случай приводится к предыдущему, заменяя взаимодействующие замкнутые токи магнитными поверхностями и разумея под величиной V потенциал магнитных масс, лежащих на одной из этих поверхностей, на северный полюс с количеством магнетизма, равным единице, лежащий в какой-нибудь точке среды. Вопрос этот может быть решён ещё иначе. Потенциал двух замкнутых токов друг на друга в том случае, когда напряжения токов измеряются электромагнитными единицами, есть

$$\Pi = -ii_1 \iint \frac{ds_1 ds_2}{r} \cos(ds_1 ds_2). \quad (114)$$

Здесь ds_1 и ds_2 представляют элементы токов a и b , а r — расстояние между ними. Этот двойной интеграл может быть преобразован в тройной, распространённый на всю промежуточную среду, при помощи следующих соображений, аналогичных употреблённым выше. Каждый из замкнутых токов заменяем двумя бесконечно близкими поверхностями, обложенными противоположными магнитными жидкостями. Означим через V_1 и V_2 потенциалы замкнутых токов на магнитный полюс с северным магнетизмом, количество коего равно единице и который лежит в какой-нибудь точке промежуточной среды. Во всей части среды, ограниченной с одной стороны поверхностью бесконечно большой сферы, с другой — магнитными поверхностями, заменяющими токи, потенциалы V_1 и V_2 удовлетворяют уравнению Лапласа. Для указанной части среды имеет место соотношение (100). Двойные интегралы, в него входящие, распространяются на элементы магнитных поверхностей. Эти двойные интегралы равны $4\pi\Pi$ (см. статью Кирхгофа «Über die Kräfte, welche zwei unendlich dünne, starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können», Crelle, 1870). Отыскивая методом предыдущего параграфа постоянное, которое должно быть прибавлено к величине Π , чтобы получить выражение полной энергии среды, мы найдём, как легко видеть, снова:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{16\pi} \Delta_{2r}{}^2 \quad (115)$$

или

$$\mathcal{E} = \frac{h^2}{8\pi}, \quad (116)$$

где ρ есть параметр поверхностей равного потенциала в точках промежуточной среды с указанными выше границами, причём под потенциалом разумеется потенциал обоих токов на северный магнитный полюс с количеством магнетизма, равным единице. Величина h есть дифференциальный параметр первого порядка от пара-

метра ρ . Относительно величины \mathcal{E} мы вправе сделать те же заключения, как и в предыдущем параграфе.

§ 15. Исследование законов энергии в случае, когда для взаимодействия тел существует потенциал. Для этого случая выражение величины энергии найдено в предыдущих параграфах. Оно есть:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{16\pi} \Delta_2 \rho^2 \quad (117)$$

или

$$\mathcal{E} = \frac{h^2}{8\pi}, \quad (118)$$

где ρ есть параметр поверхностей равного потенциала, проведённых мысленно в промежуточной среде. Здесь потенциалом может быть функция, совершенно отличная от потенциала самих взаимодействующих тел друг на друга. Например, в случае замкнутых токов величина ρ представляет потенциал этих токов на магнитные полюсы, которыми мы должны мысленно наполнить среду.

Для рассмотренных нами явлений имеет место соотношение

$$\Delta_2 \rho = 0. \quad (119)$$

Вообразим себе в промежуточной среде тройную систему ортогональных поверхностей, коих параметры означим через ρ, ρ_1, ρ_2 . Мы имеем (Lamé, Leçon sur les coordonnées curvilignes):

$$\Delta_2 \rho = h h_1 h_2 \frac{d}{d\rho} \frac{h}{h_1 h_2}, \quad (120)$$

где h, h_1, h_2 суть дифференциальные параметры первого порядка от параметров ρ, ρ_1, ρ_2 . Вследствие соотношения (119) имеем:

$$\frac{d}{d\rho} \frac{h}{h_1 h_2} = 0. \quad (121)$$

Но элемент объёма в ортогональных координатах есть

$$\frac{d\rho d\rho_1 d\rho_2}{hh_1h_2}. \quad (122)$$

Умножая элемент объёма на величину энергии \mathcal{E} , мы найдём количество энергии, заключённое в элементе объёма. По (118) и (122) оно будет:

$$\frac{1}{8\pi} \frac{h_1 h_2}{h} d\rho d\rho_1 d\rho_2. \quad (123)$$

Сечение поверхностей ρ_1 и ρ_2 представляет кривую линию, носящую название силовой линии. Вообразим себе на одной из поверхностей ρ бесконечно малый прямоугольник, две стороны коего составлены из элементов ds_1 и ds_2 нормалей к поверхностям ρ_1, ρ_2 . Здесь

$$ds_1 = \frac{1}{h_1} d\rho_1, \quad ds_2 = \frac{1}{h_2} d\rho_2. \quad (124)$$

Проведём через периферию этого четырёхугольника все возможные силовые линии. Они выделяют из среды бесконечно тонкий объём криволинейного вида, который я назову (по аналогии с одним термином, введённым Гельмгольцем) *силовой нитью*. Изменяя один параметр ρ , оставляя постоянными ρ_1, ρ_2 , мы двигаемся вдоль силовой нити, площадь сечения коей в каждой точке равна ds_1, ds_2 . Прилагая к выражению (123) соотношение (121), мы видим, что количество энергии, заключённое в каждом элементе объёма, остаётся неизменным вдоль силовой нити. Но выражение (123) может быть представлено в виде:

$$\frac{h^2}{8\pi} ds ds_1 ds_2. \quad (125)$$

Отсюда заключаем, что *вдоль силовой нити плотность энергии изменяется обратно пропорционально сечению нити*.

Обратимся теперь к отысканию скоростей движения энергии в промежуточной среде.

Изменение энергии со временем в одном и том же элементе объёма будет по (118):

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial h^2}{\partial t}. \quad (126)$$

Время может входить в величину h^2 только через величины, определяющие положения взаимодействующих тел. Если взаимодействующие тела удерживаются в покое, мы имеем:

$$\frac{\partial h^2}{\partial t} = 0, \quad (127)$$

а следовательно, количество энергии во всей среде остаётся неизменным.

Вообразим себе в промежуточной среде *одну* только массу m_1 , сосредоточенную в одной точке a . Пусть эта точка двинулась в направлении l вследствие сообщённого ей внешнего толчка. Найдём изменение энергии среды в рассматриваемом случае. По сделанному замечанию имеем:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial h^2}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial t}, \quad (128)$$

и изменение энергии во всей среде представится величиной

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial l}{\partial t} \iiint \frac{\partial h^2}{\partial l} \frac{d\rho}{hh_1h_2} d\rho_1 d\rho_2 \quad (129)$$

или

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial l}{\partial t} \iiint \frac{h}{h_1h_2} d\rho d\rho_1 d\rho_2 \frac{\partial h}{\partial l}. \quad (130)$$

В данном случае поверхности равного потенциала суть концентрические сферы; силовые линии совпадают с радиусами этих сфер. Означая через φ широту, через r — радиус одной из сфер, имеем:

$$\frac{h}{h_1h_2} = m_1 \cos^2 \varphi. \quad (131)$$

Но на одной и той же сфере для одного и того же φ (изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$) существуют, очевидно, две

точки, для которых $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{2m}{r^3} \frac{\partial r}{\partial t}$ имеет величины равные, но противоположные по знаку. На такие парные величины, уничтожающие друг друга, разложится всё выражение (130). Следовательно, оно равно нулю.

Отсюда заключаем, что при движении массы m_1 , сосредоточенной в одной точке, когда нет других масс, энергия среды остаётся неизменной, т. е. масса m_1 не отдает живой силы своего движения среде и не приобретает. Неизменность энергии среды при движении массы m_1 в указанных условиях есть только иное выражение закона инерции. Мы получим, очевидно, тот же результат и в случае произвольного числа масс, обладающих движением, при котором их относительные положения не изменяются. Рассмотрим теперь случай, когда взаимодействующие тела описывают произвольные пути. Мы находим по выражению (117):

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{\partial^2 \frac{\partial \rho^2}{\partial t}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{\partial \rho^2}{\partial t}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{\partial \rho^2}{\partial t}}{\partial z^2} \right\}. \quad (132)$$

Это выражение представляет элементарный закон сохранения энергии и должно быть тождественно с соотношением (95). Условия тождества будут:

$$\left. \begin{aligned} -\partial l_x &= \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \rho^2}{\partial t} \right), \\ -\partial l_y &= \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \rho^2}{\partial t} \right), \\ -\partial l_z &= \frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \rho^2}{\partial t} \right). \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Эти выражения дают нам величины скоростей l_x , l_y , l_z , так как величина \mathcal{E} известна. Руководствуясь соображениями, изложенными в § 11, соотношения (133) должны быть поставлены исходными пунктами при изыскании форм частичных движений промежуточных сред.

Я представлю выражения (133) в несколько ином виде. В правых частях выражений (133) производная

от $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ берётся постольку, поскольку время t входит в функцию ρ через величины, определяющие положение взаимодействующих тел в пространстве. В этом смысле величина

$$J = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{h} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

представляет скорость по направлению ds , с которой перемещается точка пересечения поверхностей ρ , ρ_1 , ρ_2 в пространстве при изменении относительного положения взаимодействующих тел. Эту скорость не должно смешивать со скоростью энергии в направлении нормали ds к поверхности ρ в той же точке. Означим через E величину hs' или $\frac{\partial \rho}{\partial t}$; выражения (133) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} -\mathcal{E}l_x &= \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} (\rho E), \\ -\mathcal{E}l_y &= \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial y} (\rho E), \\ -\mathcal{E}l_z &= \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial z} (\rho E). \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Означим через s , s_1 , s_2 скорости движения энергии по направлениям элементов нормалей ds , ds_1 , ds_2 к поверхностям ρ , ρ_1 , ρ_2 .

Соотношение (95), представленное в ортогональных координатах, будет:

$$-\frac{1}{hh_1h_2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\mathcal{E}s}{h_1h_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left[\frac{\mathcal{E}s_1}{hh_2} \right] + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left[\frac{\mathcal{E}s_2}{hh_1} \right]. \quad (135)$$

Выражение (132), преобразованное в ортогональные координаты, будет, заменяя $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ через E :

$$\frac{1}{hh_1h_2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{h}{h_1h_2} \frac{\partial (\rho E)}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{h_1}{hh_2} \frac{\partial (\rho E)}{\partial \rho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{h_2}{hh_1} \frac{\partial (\rho E)}{\partial \rho_2} \right) \right\}. \quad (136)$$

Вторая часть получается из известного преобразования в ортогональные координаты дифференциального параметра второго порядка.

Сравнивая выражения (136) и (135), находим:

$$\left. \begin{aligned} \partial s &= -\frac{\partial(\rho E)}{\partial s}, \\ \partial s_1 &= -\frac{\partial(\rho E)}{\partial s_1}, \\ \partial s_2 &= -\frac{\partial(\rho E)}{\partial s_2}. \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

§ 16. Закон энергии для взаимодействия двух элементов тока. При выводе закона энергии в данном случае я употреблю метод, обратный употреблённому в предыдущих параграфах. Полученный результат будет служить оправданием нашего способа. Я предположу, что и в данном случае мы имеем соотношение (118), т. е.

$$\mathcal{E} = c \frac{h^2}{8\pi}. \quad (138)$$

Здесь c постоянное, h есть сила, с которой действуют два элемента тока ds_1 и ds_2 , центры коих лежат в точках a и b , на северный магнитный полюс с количеством магнетизма, равным единице, лежащий в точке промежуточной среды, для которой берётся величина \mathcal{E} .

Означая через $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2$ и γ_2 углы элементов ds_1 и ds_2 с осями координат, величины слагающих сил, с которыми эти элементы действуют на магнитный полюс, помещённый в какой-нибудь точке среды, будут:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{(y-y_1) \cos \gamma_1 - (z-z_1) \cos \beta_1}{r_1^3} i_1 ds_1, \\ Y_1 &= \frac{(z-z_1) \cos \alpha_1 - (x-x_1) \cos \gamma_1}{r_1^3} i_1 ds_1, \\ Z_1 &= \frac{(x-x_1) \cos \beta_1 - (y-y_1) \cos \alpha_1}{r_1^3} i_1 ds_1, \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

$$\left. \begin{aligned} X_2 &= \frac{(y-y_2) \cos \gamma_2 - (z-z_2) \cos \beta_2}{r_2^3} i_2 ds_2, \\ Y_2 &= \frac{(z-z_2) \cos \alpha_2 - (x-x_2) \cos \gamma_2}{r_2^3} i_2 ds_2, \\ Z_2 &= \frac{(x-x_2) \cos \beta_2 - (y-y_2) \cos \alpha_2}{r_2^3} i_2 ds_2. \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

Величины i_1, i_2 суть напряжения токов, протекающих через элементы, в электромагнитных единицах; $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ — координаты точек a и b , с которыми совпадают центры элементов ds_1, ds_2 ; x, y, z — координаты какой-нибудь точки среды, r_1 и r_2 — её расстояния от точек a и b .

Составляя по выражениям (139) и (140) величину h^2 , умножая её на элемент объёма и интегрируя на всю промежуточную среду, т. е. на всё пространство, лежащее между бесконечно отдалённой сферой и бесконечно малыми сферами, окружающими элементы ds_1 и ds_2 , мы должны получить, если наше предположение справедливо, величину энергии среды, т. е. $\Pi + \text{const.}$, где Π есть потенциал элементов ds_1 и ds_2 друг на друга.

Для простоты примем за ось x линию, соединяющую оба элемента ds_1, ds_2 , и середину этой линии — за начало координат. Тогда $y_1 = z_1 = y_2 = z_2 = 0$, и пусть $x_1 = -\frac{R}{2}$, $x_2 = +\frac{R}{2}$.

Легко видеть, что члены, входящие в тройной интеграл, представляющий величину $\Pi + \text{const.}$, и содержащие одну из координат в нечётной степени, будут попарно уничтожаться. Нам остаётся поэтому рассмотреть выражение.

$$\begin{aligned} \frac{8\pi}{c} [\Pi + \text{const.}] = & K + i_1 i_2 ds_1 ds_2 \left\{ \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \iiint \frac{y^2 d\omega}{r_1^3 r_2^3} + \right. \\ & + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \iiint \frac{z^2 d\omega}{r_1^3 r_2^3} + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \iiint \frac{z^2 d\omega}{r_1^3 r_2^3} + \\ & + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \iiint \frac{x^2 - \frac{R^2}{4}}{r_1^3 r_2^3} d\omega + \\ & + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \iiint \frac{x^2 - \frac{R^2}{4}}{r_1^3 r_2^3} d\omega + \\ & \left. + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \iiint \frac{y^2 d\omega}{r_1^3 r_2^3} \right\}. \end{aligned} \quad (141)$$

Величина K поставлена на место тех членов, которые содержат координаты одного только из элементов ds_1, ds_2 и, следовательно, по интеграции дадут величину постоянную. Форма этих членов для нас не существенна, так как оправдание нашего способа мы можем найти только в результате, который получится для величины Π , представляющей часть энергии среды, зависящую от положения обоих элементов.

Я замечу, что сумма членов, стоящая между скобками в выражении (141), всегда конечна. В самом деле, она всегда меньше суммы входящих в неё тройных интегралов, так как стоящие перед ними факторы меньше единицы. Сумма же этих тройных интегралов есть конечная величина $8\pi\Pi$, где Π имеет то же значение, как в § 13 формулы (98), (102).

Вследствие полной симметрии около оси X мы имеем:

$$\iiint \frac{y^2 d\omega}{r_1^3 r_2^3} = \iiint \frac{z^2 d\omega}{r_1^3 r_2^3}. \quad (142)$$

Означая через (ds_1, ds_2) угол между обоими элементами ds_1, ds_2 , мы находим, рассматривая только члены, зависящие от относительного положения элементов ds_1 и ds_2 , т. е. вычитая из (141) величину

$$\frac{8\pi}{c} \text{const.} = K, \quad (143)$$

формулу

$$\frac{8\pi}{c} \Pi = i_1 i_2 ds_1 ds_2 \left\{ \cos(ds_1, ds_2) \iiint \frac{y^2 d\omega}{r_1^3 r_2^3} + \right. \\ \left. + \{ \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \} \iiint \frac{x^2 - \frac{R^2}{4}}{r_1^3 r_2^3} d\omega \right\}. \quad (144)$$

Чтобы найти окончательное выражение для Π , мы должны определить входящие сюда тройные интегралы. С этой целью вместо прямоугольных координат введём три системы ортогональных поверхностей (Betti, Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton, Pisa, 1865):

1) меридиональные плоскости, проходящие через ось X ; параметр ρ этих плоскостей изменяется от 0 до 2;

2) поверхности вращения, дающие в пересечении с меридиональными плоскостями круги, проходящие через точки a и b . Уравнение этих кругов будет:

$$x^2 + \left(\rho - \frac{R}{2 \operatorname{tg} v} \right)^2 = \left(\frac{R}{2 \sin v} \right)^2. \quad (145)$$

Здесь $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$, и v есть параметр кругов, изменяющийся от 0 до π ;

3) поверхности вращения, дающие в меридиональных плоскостях круги, проходящие через две мнимые точки, лежащие на оси X , на расстояниях от начала координат, равных

$$\pm \frac{R}{2} \sqrt{-1}. \quad (146)$$

Уравнение этих кругов будет:

$$\left(X + \frac{R}{2 \operatorname{th} u} \right)^2 + \rho^2 = \left(\frac{R}{2 \operatorname{sh} u} \right)^2. \quad (147)$$

Здесь u есть параметр этих кругов, изменяющийся от $-\infty$ до $+\infty$; th , sh , ch суть гиперболические тангенсы, синусы и косинусы.

Уравнения для перехода от прямоугольных координат x , y , z к введённым суть следующие:

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{R \operatorname{sh} u}{2 (\operatorname{ch} u - \cos v)}, \\ y &= \frac{R \sin v \sin \varphi}{2 (\operatorname{ch} u - \cos v)}, \\ z &= \frac{R \sin v \cos \varphi}{2 (\operatorname{ch} u - \cos v)}. \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

Кроме того, элемент объёма будет:

$$d\omega = \frac{R^3}{6} \cdot \frac{du \cdot dv \cdot d\varphi \cdot \sin v}{(\operatorname{ch} u - \cos v)^3}. \quad (149)$$

Выражая подинтегральные функции тройных интегралов выражения (144) в криволинейных координатах, мы видим, что числители подинтегральных функций будут содержать постоянный фактор R^5 , а знаменатели — R^6 , где R есть расстояние точек a и b . Следовательно, за знаки тройных интегралов может быть вынесен по-

стоянный фактор $\frac{1}{R}$. Под знаками же интегралов будут стоять выражения, зависящие исключительно от u, v, φ . Тройные интегралы не будут, следовательно, зависеть от положения элементов, а только от пределов. Означая через λ и μ две постоянные и замечая, что

$$\begin{aligned} \cos(R ds_1) &= \cos \alpha_1, & \cos(R ds_2) &= \cos \alpha_2, \\ \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_1 &= \\ &= \cos(ds_1, ds_2) - \cos(R ds_1) \cos(R ds_2), \end{aligned}$$

выражение (144) представится в следующем виде:

$$\Pi = \frac{c}{8\pi} \frac{i_1 i_2 ds_1 ds_2}{R} \{ \lambda \cos(ds_1, ds_2) - \mu \cos(R ds_1) \cos(R ds_2) \}. \quad (150)$$

Это выражение для потенциала двух элементов тока друг на друга отличается от потенциала Гельмгольца только постоянными факторами, что и служит оправданием справедливости предположения (138).

§ 17. Общий метод определения законов взаимодействий на расстояниях конечных. Приведённые выше исследования потенциальной энергии двух взаимодействующих тел, в предположении существования промежуточной среды, дают нам право считать следующую теорему оправданной для известных нам взаимодействий:

если известен закон взаимодействия на расстояниях конечных между однородными деятелями природы α , α_1 с третьим однородным или разнородным с ними деятелем β , то выражение потенциальной энергии для взаимодействия деятелей α и α_1 друг на друга будет:

$$\Pi = a \iiint \{ X_{\alpha\beta} X_{\sigma_1\beta} + Y_{\alpha\beta} Y_{\alpha_1\beta} + Z_{\alpha\beta} Z_{\alpha_1\beta} \} d\omega, \quad (151)$$

где a есть постоянный фактор и $X_{\alpha\beta} X_{\alpha_1\beta}$ и пр. представляют слагающие сил, с которыми деятели α и α_1 действуют на деятелей β , которыми мысленно непрерывно наполняется пространство, окружающее деятелей α и α_1 . Тройной интеграл распространяется на всё пространство, лежащее между поверхностью

бесконечно большой сферы и двумя другими поверхностями, бесконечно близко облегающими деятелей α и α_1 .

Если деятели α и α_1 суть весомые, магнитные или электрические массы, то деятель β есть соответственно весомая масса, магнитная масса или элемент тока и, наконец, электрическая масса.

Если деятели α и α_1 суть замкнутые гальванические токи или элементы токов, то β суть магнитные полюсы или элементы токов, таким образом расположенных в пространстве, что сами по себе они не вызывают движения ни одного из деятелей α , α_1 (последнее оправдано для частных случаев в упомянутой мною выше статье «Ein Theorem и пр.»). Справедливость этих заключений вытекает, как легко видеть, из предыдущих параграфов.

Хотя теорема, здесь приведённая, доказана только для известных нам взаимодействий на расстояниях конечных, тем не менее я считаю возможным видеть в ней выражение неизвестного нам физического соотношения или сродства между деятелями природы, действующими друг на друга на расстояниях конечных.

Из приведённой теоремы вытекает следующее заключение: *однородные функции координат, представляющие силы, с которыми деятели природы действуют друг на друга на расстояниях конечных, должны быть второй степени.*

Пусть силы, с которыми однородные деятели α , α_1 действуют на β , представляются однородными функциями m -й степени от координат, причём коэффициенты, входящие в функцию, могут зависеть от различных условий, определяемых самим характером деятелей. В данном случае произведения $X_{\alpha\beta} X_{\alpha_1\beta}$ и пр. будут однородными функциями $2m$ -й степени. Выражая прямоугольные координаты в криволинейных, употреблённых уже нами в § 16, мы вынесем за знак тройного интеграла выражения (155) величину R^{2m+3} , где R есть расстояние между деятелями α и α_1 , которые предполагаются занимающими бесконечно малые объёмы. Означая через M некоторое постоянное, мы получим,

следовательно:

$$\Pi = MR^{2m+3}. \quad (152)$$

Мы находим отсюда выражение силы:

$$-\frac{d\Pi}{dR} = -(2m+3)MR^{2m+2}. \quad (153)$$

Если деятель β однороден с α и α_1 , то степень m однородных функций, представляющих силы, с которыми α и α_1 действует на β , должна быть одинакова со степенью расстояния R в предыдущем выражении, представляющем силу, с которой α и α_1 действуют друг на друга, т. е.

$$m = 2m + 2, \quad (154)$$

откуда

$$m = -2, \quad (155)$$

чем и оправдывается наша теорема для взаимодействия деятелей однородных.

Если α и α_1 попрежнему суть деятели однородные, а β — с ними разнородный деятель, то, по только что доказанному, степень величины R в выражении (153) должна равняться -2 , т. е.

$$-2 = 2m + 2, \quad (156)$$

откуда степень m однородных функций, представляющих силы, с которыми взаимодействуют разнородные деятели, есть

$$m = -2, \quad (157)$$

чем и доказывается наше положение для случая взаимодействия разнородных деятелей. Заметим, что для данного случая положение доказано независимо от направления силы взаимодействия разнородных деятелей.



ПРИБАВЛЕНИЕ К СТАТЬЕ «УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ТЕЛАХ»

1. В статье «Уравнения движения энергии в телах» было показано, что для тел постоянной упругости мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial x} (p_{xx}u' + p_{yx}v' + p_{xz}w') + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w') + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w'), \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathcal{E} означает плотность энергии в точке упругого тела, p — натяжения, u, v, w — перемещения частицы по осям, u', v', w' — соответственные скорости.

Выражение (1) показывает, что всегда существуют три функции ρ_x, ρ_y, ρ_z , обладающие тем свойством, что сумма их первых производных по осям x, y, z даёт уменьшение плотности энергии в единицу времени в данной точке тела. Эти функции суть:

$$\left. \begin{aligned} -\rho_x &= p_{xx}u' + p_{yx}v' + p_{xz}w', \\ -\rho_y &= p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w', \\ -\rho_z &= p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w'; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

функции ρ_x, ρ_y, ρ_z могут быть названы *токами энергии* по осям прямоугольных координат x, y, z .

Отыщем соотношение между током энергии ρ_σ через какую-нибудь бесконечно малую площадку σ внутри тела и токами ρ_x , ρ_y , ρ_z . С этой целью вообразим себе элементарный тетраэдр, вершина коего находится в какой-нибудь точке тела, координаты которой суть x , y , z , три ограничивающие плоскости параллельны осям координат, а четвёртая есть бесконечно малая площадь σ . Выражение (9) упомянутой статьи, представляющее сохранение энергии в упругом теле, справедливо для произвольно взятой его части, причём тройные интегралы должны быть распространены на её объём, двойные — на её поверхность. Относя выражение (9) к элементарному тетраэдру, мы находим, заменяя δu , δv , δw через u' , v' , w' :

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{\partial \Theta}{\partial t} d\omega - [u' (p_{xx}\alpha + p_{xy}\beta + p_{xz}\gamma) + \\
 & + v' (p_{xy}\alpha + p_{yy}\beta + p_{yz}\gamma) + w' (p_{xz}\alpha + p_{yz}\beta + p_{zz}\gamma)]_\sigma + \\
 & + [p_{xx}u' + p_{xy}v' + p_{xz}w']_x dy dz + \\
 & + [p_{xy}u' + p_{yy}v' + p_{yz}w']_y dx dz + \\
 & + [p_{xz}u' + p_{yz}v' + p_{zz}w']_z dx dy. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Значки σ , x , y , z , поставленные внизу скобок, показывают, что стоящие в них выражения должны быть взяты для центров тяжестей соответственных площадей. Величины α , β , γ суть косинусы углов внешней нормали к элементу σ с осями координат.

Предыдущее выражение может быть ещё написано в таком виде:

$$\begin{aligned}
 0 = & \frac{\partial \Theta}{\partial t} d\omega + \sigma (\alpha\rho_x + \beta\rho_y + \gamma\rho_z)_\sigma - \\
 & - \rho_x dy dz - \rho_y dx dz - \rho_z dx dy. \quad (4)
 \end{aligned}$$

С другой стороны, принимая положительными токи, входящие в тетраэдр, мы должны иметь следующее выражение сохранения энергии в элементарном тетраэдре:

$$0 = \frac{\partial \Theta}{\partial t} d\omega + \rho_\sigma \sigma - \rho_x dy dz - \rho_y dx dz - \rho_z dx dy. \quad (5)$$

Сравнивая тождественные выражения (4) и (5), находим:

$$\rho_{\sigma} = \alpha\rho_x + \beta\rho_y + \gamma\rho_z. \quad (6)$$

Это соотношение представляет искомую связь между током энергии через произвольно взятую элементарную площадь σ и токами через три взаимно перпендикулярные элементарные площади, пересекающиеся в центре тяжести площади σ .

Займёмся теперь определением направления движения энергии. С этой целью обратимся к выражению (2). Положим:

$$Q^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2. \quad (7)$$

Вообразим себе в какой-нибудь точке M тела линию l , делающую с осями координат углы, коих косинусы суть

$$\frac{\rho_x}{Q}, \quad \frac{\rho_y}{Q}, \quad \frac{\rho_z}{Q}. \quad (8)$$

Докажем, что через всякую элементарную площадку, проведённую в точке M параллельно линии l , энергия не передаётся; каждая такая площадка, так сказать, непроницаема для энергии. Воображая себе в точке M линию s , перпендикулярную к l , мы должны доказать, что ток энергии через весьма малую площадку, перпендикулярную к линии s , будет

$$\rho_s = 0.$$

Если α , β , γ суть косинусы углов, делаемых линией s с осями координат, то по условию перпендикулярности линий l и s

$$\alpha\rho_x + \beta\rho_y + \gamma\rho_z = 0. \quad (9)$$

Но по выражению (6) это есть не что иное, как ρ_s . Следовательно,

$$\rho_s = 0, \quad (10)$$

что и требовалось доказать. Воображая себе в точке M бесконечно тонкий и бесконечно короткий цилиндр, параллельный линии l , мы заключаем из предыдущего,

что через боковую поверхность цилиндра не будет передаваться энергия. Объёму, заключённому внутри цилиндра, энергия будет передаваться (входить) через одно основание цилиндра, а отдаваться (выходить) смежным частям — через другое основание. Направление оси этого цилиндра, или направление, определяемое косинусами (8), я назову направлением движения энергии в точке M . Количество движущейся энергии в точке M , или ток энергии через площадку, перпендикулярную к линии l и проходящую через точку M , будет

$$\rho_l = \rho_x \frac{\rho_x}{Q} + \rho_y \frac{\rho_y}{Q} + \rho_z \frac{\rho_z}{Q} = Q. \quad (11)$$

Величина Q есть величина полного тока энергии в данной точке M . Эти выводы не зависят, очевидно, от частной формы (2) токов энергии.

2. Новый метод определения частичных движений упругих тел. Выше было показано, что энергия распространяется по линиям, касательные к которым в данной точке пространства делают с осями координат углы, коих косинусы суть

$$\frac{\rho_x}{Q}, \frac{\rho_y}{Q}, \frac{\rho_z}{Q}, \quad (12)$$

где

$$Q^2 = \rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2.$$

Направление движения энергии вообще не совпадает с направлением линий, нормальных к поверхностям равной энергии или к поверхностям изодинамическим.

Условие движения энергии по нормальям к изодинамическим поверхностям есть

$$\frac{\rho_x}{Q} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\Delta_1 \partial x}, \quad \frac{\rho_y}{Q} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\Delta_1 \partial y}, \quad \frac{\rho_z}{Q} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\Delta_1 \partial z}, \quad (13)$$

где $\Delta_1 \mathcal{E}$ есть дифференциальный параметр первого порядка от функции \mathcal{E} .

Если в упругом теле движения распространяются волнами, то условие движения энергии по нормальям к волновым поверхностям заключается в совпадении волновых и изодинамических поверхностей, — условие всегда возможное.

Явления волнообразных движений суть простейшие и легко поддаются теоретическим изысканиям. Причина заключается в том, что геометрическая система — волна и луч, характеризующая рассматриваемое движение, принадлежит к простейшим геометрическим комбинациям поверхностей и линий.

Мы можем теперь ввести понятия более сложные, но в то же время и более общие, которые, характеризуя явления частичных движений упругого тела, могут быть положены в основание их теоретического исследования.

Луч есть частный вид линий, по которым движется в теле энергия, — линий, делающих с осями координат углы, коих косинусы представляются выражениями (13). Эти линии я назову *динамическими линиями*. Поверхности, к ним нормальные, я назову *статическими поверхностями*, так как по ним нет движения энергии.

Преобразуем уравнения движения частиц упругого тела в ортогональные координаты, причём одно из семейств ортогональных поверхностей образуется статическими поверхностями, соответствующими искомому движению в теле данной формы и с данными условиями на поверхности. Из выражений трёх токов энергии только одно, представляющее ток ρ_s по динамической линии, будет отлично от нуля; остальные два выражения будут нули.

Для каждого элемента поверхности тела должны быть даны три условия, чтобы задача о движении его частиц была совершенно определённая. Обыкновенно такими условиями даются: величина давления или натяжения для каждого момента времени и два угла, определяющие их направление. Вместо этих условий могут быть даны величины токов энергии ρ_x , ρ_y , ρ_z для каждого элемента поверхности или, что всё равно, полная величина тока энергии через элемент поверхности

этого тела и его направление, т. е. направление элемента динамической линии для каждой точки поверхности тела.

Так как знание трёх токов энергии по трём данным направлениям достаточно для определённости задачи, то, задавшись наперёд видом ортогональных поверхностей ρ , ρ_1 , ρ_2 и величиной ρ_s на поверхности, мы будем иметь все необходимые условия для изыскания движений, для которых линии пересечения данных поверхностей ρ_1 , ρ_2 суть динамические линии.

Бесконечно тонкий объём, ограниченный бесконечно близко лежащими динамическими линиями, я назову *динамической нитью*. Воображая себе нить произвольной формы, предполагая, что её частицы не имеют конечных движений, мы можем ставить вопрос о форме движений, при которых энергия не отдавалась бы боковыми частями нити, словом, чтобы нить была динамической нитью. Здесь достаточно знания величины ρ_s на всём протяжении нити и на её концах. Мы можем также дать ρ_s только для концов нити и величину давления на её боковой поверхности. Наконец, если дана величина ρ_s для каждой точки тела, то вместо рассмотрения явлений в целом теле мы можем ограничиться изучением явлений в динамической нити.

Путь, предположенный выше, приводит к выражениям токов довольно сложным. Здесь же я укажу на другой метод, сходный с предыдущим. Я введу особые поверхности — псевдостатические, и особые линии — псевдинамические.

Параметр псевдостатических поверхностей означим буквой ρ , а псевдинамические линии — буквой s , причём

$$ds = H d\rho. \quad (14)$$

Пусть ρ , ρ_1 , ρ_2 будут параметры ортогональных поверхностей и

$$\frac{1}{H}, \frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2}$$

— их дифференциальные параметры первого порядка;

R, R_1, R_2 суть перемещения частицы упругого тела по нормальям s, s_1, s_2 к поверхностям ρ, ρ_1, ρ_2 .

Уравнения движения частиц упругого тела будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial B}{\partial \rho} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \rho_1} \right) - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{H} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \delta \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\mu}{H H_2} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \rho} - \frac{\partial A}{\partial \rho_2} \right) - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{H_1} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} + \delta \frac{\partial^2 R_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\mu}{H H_1} \left(\frac{\partial A}{\partial \rho_1} - \frac{\partial B}{\partial \rho} \right) - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{H_2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial \rho_2} + \delta \frac{\partial^2 R_2}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где δ есть плотность, θ — кубическое расширение и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial (R_1 H_1)}{\partial \rho_2} - \frac{\partial (R_2 H_2)}{\partial \rho_1} &= \frac{H_1 H_2}{H} A, \\ \frac{\partial (R_2 H_2)}{\partial \rho} - \frac{\partial (R H)}{\partial \rho_2} &= \frac{H_2 H}{H_1} B, \\ \frac{\partial (R H)}{\partial \rho_1} - \frac{\partial (R_1 H_1)}{\partial \rho} &= \frac{H H_1}{H_2} \Gamma. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Умножая выражения (15) соответственно на скорости частиц R', R'_1, R'_2 , на элемент объёма $d\omega$ и интегрируя по всему протяжению тела, мы найдём уравнение сохранения энергии во всём теле. Выделяя интеграцией по частям из тройных интегралов, входящих в это уравнение, двойные, относящиеся к поверхности, подинтегральная функция этих последних будет иметь вид:

$$-(\rho_s ds_1 ds_2 + \rho_{s_1} ds ds_2 + \rho_{s_2} ds_1 ds). \quad (17)$$

Ортогональные поверхности ρ, ρ_1, ρ_2 я определяю под тем условием, чтобы ρ_{s_1}, ρ_{s_2} были нулями. Найдём:

$$\left. \begin{aligned} -\rho_s &= \mu \left(\frac{\Gamma R'_1}{H_2} - \frac{B R'_2}{H_1} \right) - (\lambda + 2\mu) \theta R', \\ 0 &= \mu \left(\frac{A R'_2}{H} - \frac{\Gamma R'}{H_2} \right) - (\lambda + 2\mu) \theta R'_1, \\ 0 &= \mu \left(\frac{B R'}{H_1} - \frac{A R'_1}{H} \right) - (\lambda + 2\mu) \theta R'_2. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Выражения (18) дают нам возможность раскрыть некоторые общие отношения формы псевдинамиических

линий к форме частичных движений. Умножая выражения (18) соответственно на

$$\frac{R'}{H}, \quad \frac{R'_1}{H_1}, \quad \frac{R'_2}{H_2}$$

и складывая, находим:

$$\rho_s \frac{R'}{H} = (\lambda + 2\mu) \theta \left[\frac{R'^2}{H} + \frac{R_1'^2}{H_1} + \frac{R_2'^2}{H_2} \right] \quad (19)$$

и также

$$\rho_s \frac{A}{H} = (\lambda + 2\mu) \theta \left[\frac{R'A}{H} + \frac{R_1'B}{H_1} + \frac{R_2'\Gamma}{H_2} \right]. \quad (20)$$

Если перемещения не сопровождаются изменением плотности, т. е. если $\theta = 0$, то, так как ρ_s по первому соотношению (18) не равно нулю, мы должны иметь по (19) и (20):

$$R' = 0, \quad A = 0. \quad (21)$$

Первое из этих условий показывает, что *перемещения, совершающиеся по направлению псевдодинамических линий, всегда соединены с изменением плотности. Если плотность не изменяется, то перемещения происходят в плоскостях, касающихся псевдостатических поверхностей.* В последнем случае из условий (18) остаётся только одно первое.

Второе из условий (21) даёт:

$$\frac{\partial (H_1 R_1)}{\partial \rho_2} - \frac{\partial (H_2 R_2)}{\partial \rho_1} = 0, \quad (22)$$

откуда, означая через Φ некоторую функцию от ρ , ρ_1 , ρ_2 и времени,

$$R_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_1}, \quad R_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_2},$$

или

$$R_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial s_1}, \quad R_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial s_2}. \quad (23)$$

Следовательно, *при $\theta = 0$ перемещения, совершающиеся по линиям кривизны псевдостатических поверхностей,*

пропорциональны производным от некоторой функции по соответственным линиям.

Предположим, что по одной из линий кривизны псевдостатических поверхностей не происходит движения; пусть, например, $R'_2 = 0$. Тогда соотношения (19) и (20) дают:

$$\frac{R'}{A} = \frac{\frac{R'^2}{H} + \frac{R_1'^2}{H_1}}{\frac{R'A}{H} + \frac{R_1'B}{H_1}}, \quad (24)$$

откуда

$$\frac{R'}{A} = \frac{R'_1}{B}, \quad (25)$$

и последнее из соотношений (18) даёт:

$$H = H_1. \quad (26)$$

Следовательно, одновременное перемещение по псевдодинамической линии и одной из линий кривизны псевдостатических поверхностей может существовать в том только случае, если дифференциальные параметры первого порядка поверхностей, нормальных к направлению обоих движений, друг другу равны.

(К системам ортогональных поверхностей, выполняющих условие (26), принадлежат, между прочим, криволинейные координаты, употреблённые мною в статье «Уравнения движения энергии в телах», § 16.)

Если в какой-нибудь момент времени $R'_2 = 0$ и H_1 не равно H , то для того же момента должно существовать условие:

$$\frac{R'}{A} = \frac{R'_1}{B} = 0.$$

Так как A и B не могут быть бесконечно большими, то

$$R' = 0, \quad R'_1 = 0. \quad (27)$$

Итак, если ортогональная система не удовлетворяет условию (26), скорость движения частицы равна нулю

всякий раз, когда её слагающая по нормали к поверхности ρ_2 обращается в нуль.

Я разберу подробнее явления движения частиц упругого тела по одной из линий кривизны псевдостатических поверхностей.

Пусть $R=0$ и $R_1=0$; следовательно, существует одно перемещение R_2 . Мы находим из выражений (18):

$$q_s = \mu \frac{BR'_2}{H_1}, \quad A=0, \quad \theta=0, \quad (28)$$

или, обращая внимание на величины A и θ ,

$$\frac{\partial (R_2 H_2)}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial (H H_1 R_2)}{\partial \rho_2} = 0; \quad (29)$$

функция Γ обращается в нуль, и из (16) находим:

$$B = \frac{H_1}{H H_2} \frac{\partial}{\partial \rho} (R_2 H_2). \quad (30)$$

Неопределённые уравнения движения дают:

$$\frac{\partial B}{\partial \rho_2} = 0, \quad -\frac{\mu}{H H_1} \frac{\partial B}{\partial \rho} + \delta \frac{\partial^2 R_2}{\partial t^2} = 0. \quad (31)$$

Мы должны отыскать величину R_2 , удовлетворяющую выражениям (29), (31) и условиям, данным на поверхности упругого тела. Последние мы оставим неопределёнными. Для нас важно открыть условия для вида псевдостатических поверхностей, которые должны вытечь из совместного удовлетворения приведённых выше уравнений.

Пусть

$$R_2 = e^{\alpha t} u, \quad (32)$$

где α — постоянное, u есть функция одних координат. Означая через φ и ψ две функции, имеем из (29):

$$H_2 u = \varphi(\rho, \rho_2) \quad H H_1 u = \psi(\rho, \rho_1), \quad (33)$$

откуда

$$\frac{H_2}{H H_1} = \frac{\varphi(\rho, \rho_2)}{\psi(\rho, \rho_1)}. \quad (34)$$

Первое из соотношений (31) даёт:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\frac{H_1}{HH_2} \frac{\partial \tau(\rho, \rho_2)}{\partial \rho} \right) = 0. \quad (35)$$

Отсюда

$$\frac{H_1}{HH_2} = \frac{\Phi(\rho, \rho_1)}{\frac{\partial}{\partial \rho} (\tau(\rho, \rho_2))}. \quad (36)$$

Второе из выражений (31) будет:

$$-\frac{\mu H_2}{HH_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_1}{HH_2} \frac{\partial \tau}{\partial \rho} \right) + \delta \alpha^2 \varphi = 0. \quad (37)$$

Так как φ есть функция одних ρ и ρ_2 , то первый член предыдущего выражения не должен зависеть от ρ_1 . Мы удовлетворим этому условию, полагая в выражениях (34) и (36)

$$\psi(\rho, \rho_1) = \frac{\Phi(\rho, \rho_1)}{a} = \xi(\rho) \cdot \eta(\rho_1), \quad (38)$$

где ξ и η суть обозначения функций и a — постоянное или функция одного ρ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{H_2}{HH_1} &= \frac{\varphi(\rho, \rho_2)}{\xi(\rho) \cdot \eta(\rho_1)}, \\ \frac{H_1}{HH_2} &= \frac{a \cdot \xi(\rho) \cdot \eta(\rho_1)}{\frac{\partial \varphi(\rho, \rho_2)}{\partial \rho}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя эти выражения в (37), найдём:

$$-\frac{a \cdot \mu \eta}{\xi(\rho)} \frac{\partial}{\partial \rho} (\xi(\rho)) + \delta \alpha^2 \varphi = 0 \quad (40)$$

или

$$\frac{\partial \ln \xi(\rho)}{\partial \rho} = \frac{\delta \alpha^2}{a \mu}; \quad (41)$$

если a постоянное, то

$$\xi(\rho) = A e^{\frac{\delta \alpha^2}{a \mu} \rho}. \quad (42)$$

Поэтому условия для системы псевдостатических поверхностей будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{H_2}{HH_1} &= \frac{\varphi(\rho, \rho_2)}{A \cdot \eta(\rho_1)} e^{-\frac{\delta a^2}{\alpha \mu} \rho}, \\ \frac{HH_2}{H_1} &= \frac{1}{aA\eta(\rho_1)} \frac{\partial \varphi(\rho, \rho_2)}{\partial \rho} e^{-\frac{\delta a^2}{\alpha \mu} \rho}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Мы находим из (39):

$$H^2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial \ln \varphi(\rho, \rho_2)}{\partial \rho}, \quad (44)$$

откуда следует, что дифференциальный параметр первого порядка псевдостатических поверхностей не должен зависеть от параметра той ортогональной поверхности, по нормали к коей нет колебаний, т. е. *кривизна этой поверхности по псевгодинамической линии равна нулю*. Следовательно, движения по обеим линиям кривизны возможны в том только случае, если H не зависит ни от ρ_1 , ни от ρ_2 . В этом случае H есть функция одного ρ , и псевдостатические поверхности суть поверхности волновые (см. статью «Законы колебаний в неограниченной среде постоянной упругости», Математический сборник, т. V).

Из (44) находим:

$$\varphi(\rho, \rho_2) = \Phi(\rho_2) \cdot e^{\int aH^2 d\rho}. \quad (45)$$

Следовательно, по (33) и (32) имеем:

$$R_2 = \frac{\Phi(\rho_2)}{H_2} e^{\alpha t + \int aH^2 d\rho}. \quad (46)$$

Выражения (43) не должны, очевидно, содержать частного $\frac{\delta}{\mu}$. Поэтому

$$\alpha = l \sqrt{\frac{\mu}{\delta}}, \quad (47)$$

где l есть действительный или мнимый коэффициент. Окончательные условия для псевдостатических поверх-

ностей в нашем случае будут, следовательно:

$$\frac{H_2}{HH_1} = \frac{\Phi(\rho_2)}{A\eta(\rho_1)} e^{-\frac{I^2}{\alpha}\rho + \int aH^2 d\rho},$$

$$e^{\int H^2 d\rho} = \frac{\varphi(\rho, \rho_2)}{\Phi(\rho_2)}, \quad (48)$$

где Φ , η , φ суть знаки функций, определяемых условиями ортогональности.

Вопрос может быть решён в форме более простой в случае волнообразного движения.

Полагая

$$\left. \begin{aligned} \frac{H_2}{HH_1} &= \frac{\varphi(\rho) \cdot \varphi_2(\rho_2)}{\psi(\rho) \cdot \psi_1(\rho_1)}, \\ \frac{H_1}{HH_2} &= \frac{A\xi(\rho) \cdot \psi_1(\rho_1)}{\varphi_2(\rho_2)}, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} H_2 u &= \varphi(\rho) \cdot \varphi_2(\rho_2), \\ -\frac{\mu H_2}{HH_1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{H_1}{HH_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) + \delta \alpha^2 \varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

мы удовлетворим всем условиям, причём функции φ , φ_2 , ψ остаются подчинёнными только условиям ортогональности. Здесь H есть функция одного ρ .

Рассмотрим частный случай. Пусть $H_2 = H_1$; из выражений (49) следует, что функции φ_2 , ψ_1 не зависят от ρ_2 , ρ_1 , т. е. суть постоянные. Последнее из выражений (50) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \frac{\delta \alpha^2}{\mu} \varphi, \quad (51)$$

откуда

$$\varphi = Ae^{\alpha \sqrt{\frac{\delta}{\mu}} s} + Be^{-\alpha \sqrt{\frac{\delta}{\mu}} s} \quad (52)$$

и

$$R_2 = \frac{A}{H_2} e^{\alpha \left(t+s \sqrt{\frac{\delta}{\mu}} \right)} + \frac{B}{H_2} e^{\alpha \left(t-s \sqrt{\frac{\delta}{\mu}} \right)}. \quad (53)$$

Пусть величина α мнимая и $A=0$; тогда

$$R_2 = \frac{B}{H_2} \cos \alpha \left(t - \frac{s}{\omega} \right), \quad (54)$$

где ω есть скорость распространения поперечных колебаний.

Наши выводы могут быть приложены к случаю сферических псевдостатических поверхностей. Пусть

$$\rho = \frac{l}{r}, \quad \rho_1 = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}, \quad \rho_2 = \psi, \quad (55)$$

где ρ, ρ_1, ρ_2 суть термометрические параметры сфер, конусов широты и меридиональных плоскостей; r есть радиус сферы, φ —широта, ψ —долгота. Кроме того, имеем:

$$H = \frac{r^2}{l}, \quad H_1 = H_2 = r \cos \varphi. \quad (56)$$

Для колебаний, совершающихся по параллелям или по меридианам сферы, находим из (54):

$$\left. \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \right\} = \frac{B}{r \cos \varphi} \cdot \cos \alpha \left(t - \frac{r}{\omega} \right). \quad (57)$$

Амплитуды колебаний становятся бесконечно большими на полюсах сфер; на экваторе они наименьшие. Выражения (57) могут также представлять колебания, распространяющиеся сферическими волнами между поверхностями двух конусов широты.

Случаи распространения плоскими волнами колебаний, амплитуды коих различны в различных точках волны, решаются весьма просто для плоских ортогональных кривых, коих дифференциальные параметры первого порядка равны.

Вообразим себе в пространстве две бесконечно длинные, друг другу параллельные прямые A и A_1 . Пусть расстояние между ними будет $2a$ и плоскость xy к ним перпендикулярна. Если одна из этих линий притягивает, а другая отталкивает по закону $\frac{1}{r}$, где r есть перпендикулярное расстояние точки m от линии, которая на неё действует, то поверхности равного потенциала будут цилиндры, пересекающиеся под прямым углом с плоскостью xy и дающие в пересечении круги параметра u , уравнения коих представляются формулой (147) статьи «Уравнения движения энергии в телах».

Ортогональные к ним цилиндрические поверхности с параметром v дают в пересечении с плоскостью xu круги, которые проходят через точки сечения прямых с плоскостью xu . Уравнения этих кругов представляются формулой (145) упомянутой выше статьи.

Вообразим себе в среде постоянной упругости ортогональную систему, коей параметры суть

$$\rho = z, \quad \rho_1 = u, \quad \rho_2 = v$$

и

$$H_1 = H_2 = \frac{\xi^2}{2a}, \quad H = 1,$$

где, означая через mA , mA_1 перпендикулярные расстояния какой-нибудь точки m от прямых A и A_1 ,

$$\xi^2 = mA \cdot mA_1.$$

В среде может распространяться плоская волна с поперечными колебаниями R_1 и R_2 , которые будут по формуле (54):

$$\left. \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \right\} = \frac{2Ba}{\xi^2} \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} \right). \quad (a)$$

Если же прямые A и A_1 притягательные, то поверхности равного потенциала будут цилиндры ρ_1 , ортогональные к плоскости yx и дающие в сечении с нею лемнискаты. Ортогональные к ним поверхности будут цилиндры ρ_2 , проходящие через прямые A и A_1 и дающие в сечении с плоскостью yx равносторонние гиперболы (см. Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes).

Вообразим себе в среде постоянной упругости ортогональную систему с параметрами

$$\rho = z, \quad \rho_1, \quad \rho_2;$$

для неё

$$H = 1, \quad H_1 = H_2 = \frac{\xi^2}{2R},$$

где ξ^2 имеет то же значение, как выше, и R представляет перпендикулярное расстояние точки m от линии O ,

лежащей в одной плоскости с линиями A , A_1 и проходящей посередине между ними.

В среде возможна плоская волна с колебаниями R_1 , R_2 , определяемыми по формуле (54):

$$\left. \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \end{matrix} \right\} = \frac{2BR}{\xi^2} \cos \alpha \left(t - \frac{z}{\omega} \right). \quad (b)$$

Амплитуды колебаний (a) и (b) становятся бесконечно большими на линиях A , A_1 . Чтобы избежать этого случая, достаточно вообразить себе внутри среды две ограничивающие поверхности в форме двух прямых цилиндров, обнимающих линии A и A_1 .

3. Общий тип неопределённых уравнений движения частиц непрерывных сред. Неопределённые уравнения движения частиц непрерывной среды, на которую не действуют внешние силы, имеют общую форму:

$$\left. \begin{matrix} \rho \frac{d^2 u}{dt^2} = X, \\ \rho \frac{d^2 v}{dt^2} = Y, \\ \rho \frac{d^2 w}{dt^2} = Z, \end{matrix} \right\} \quad (58)$$

где X, Y, Z суть суммы производных по координатам от некоторых функций. Умножая эти выражения на скорости частиц u', v', w' , на элемент объёма $d\omega$ и интегрируя по всему объёму, занимаемому средой, мы выделим интеграцией по частям сумму членов, распространяющихся на поверхность среды. Эти члены будут иметь факторами скорости u', v', w' , и их сумма представляет не что иное, как ток энергии q_z через элемент поверхности. Следовательно, мы всегда можем представить токи энергии в следующем виде:

$$\left. \begin{matrix} q_x = L_{xx}u' + L_{xy}v' + L_{xz}w', \\ q_y = M_{yx}u' + M_{yy}v' + M_{yz}w', \\ q_z = N_{xz}u' + N_{yz}v' + N_{zz}w'. \end{matrix} \right\} \quad (59)$$

Для тел постоянной упругости коэффициенты L , M , N не зависят от скоростей, и между ними существуют соотношения:

$$L_{xy} = M_{yx}, \quad L_{xz} = N_{xz}, \quad M_{yz} = N_{yz}. \quad (60)$$

Для тел жидких коэффициенты L , M , N зависят от скоростей, и между ними существуют соотношения:

$$\left. \begin{aligned} L_{xx} &= M_{yy} = N_{zz}, \\ L_{xy} &= L_{zx} = M_{yx} = M_{yz} = N_{xz} = N_{yz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Для жидкости с трением L , M , N зависят от скорости, и между ними существуют соотношения (60).

Выражения (59) заключают в себе ещё целый ряд более общих случаев, из коих каждый представляет среду, обладающую известными физическими свойствами.

Составим неопределённые уравнения движения частиц среды, для которой имеют место выражения (59). Найденные нами уравнения будут, очевидно, типом неопределённых уравнений движения непрерывных сред природы.

Выражение закона сохранения энергии для всей среды будет по (59):

$$\begin{aligned} & \iiint \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} d\omega + \\ & + \iint \{ u' [L_{xx} \cos(nx) + M_{xy} \cos(ny) + N_{xz} \cos(nz)] + \\ & \quad + v' [L_{xy} \cos(nx) + M_{yy} \cos(ny) + N_{yz} \cos(nz)] + \\ & \quad + w' [L_{xz} \cos(nx) + M_{yz} \cos(ny) + N_{zz} \cos(nz)] \} d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Но

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\delta(u'^2 + v'^2 + w'^2)}{2} - \delta P, \quad (63)$$

где $-\delta P$ есть потенциальная энергия элемента.

Знак $\frac{d}{dt}$ в выражениях (58) представляет полную производную по времени; раскрывая эту последнюю

и заменяя $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d\omega}{dt}$ через u' , v' , ω' , находим:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial u'}{\partial t} + \rho u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \rho v' \frac{\partial u'}{\partial y} + \rho \omega' \frac{\partial u'}{\partial z} - X &= 0, \\ \rho \frac{\partial v'}{\partial t} + \rho u' \frac{\partial v'}{\partial x} + \rho v' \frac{\partial v'}{\partial y} + \rho \omega' \frac{\partial v'}{\partial z} - Y &= 0, \\ \rho \frac{\partial \omega'}{\partial t} + \rho u' \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \rho v' \frac{\partial \omega'}{\partial y} + \rho \omega' \frac{\partial \omega'}{\partial z} - Z &= 0. \end{aligned} \right\} (64)$$

Если перемещения малы, то члены $u' \frac{\partial u'}{\partial x}$ и пр. отпадают, как, например, в случае упругого тела.

Умножая выражения (64) на $\delta u = u' dt$, $\delta v = v' dt$, $\delta \omega = \omega' dt$, складывая и интегрируя по всему протяжению тела, находим:

$$\begin{aligned} & \iiint \frac{\partial \rho (u'^2 + v'^2 + \omega'^2)}{2} d\omega + \\ & + \frac{1}{2} \iiint \left[\rho u' \frac{\partial}{\partial x} (u'^2 + v'^2 + \omega'^2) + \right. \\ & \left. + \rho v' \frac{\partial}{\partial y} (u'^2 + v'^2 + \omega'^2) + \rho \omega' \frac{\partial}{\partial z} (u'^2 + v'^2 + \omega'^2) \right] d\omega - \\ & - \iiint \frac{i^2 \partial \rho}{2 \partial t} d\omega + \iiint (Xu' + Yv' + Z\omega') d\omega = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

К этому выражению мы должны присоединить ещё уравнение сохранения вещества:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho u'}{\partial x} + \frac{\partial \rho v'}{\partial y} + \frac{\partial \rho \omega'}{\partial z}. \quad (66)$$

С помощью (66) и полагая

$$u'^2 + v'^2 + \omega'^2 = i^2,$$

выражение (65) преобразуется в следующее:

$$\begin{aligned} & \iiint \delta \frac{\rho i^2}{2} d\omega + \frac{1}{2} \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho i^2 u') + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\rho i^2 v') + \frac{\partial}{\partial z} (\rho i^2 \omega') \right] d\omega - \\ & - \iiint (Xu' + Yv' + Z\omega') d\omega = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

С другой стороны, выражение (62) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} & \iiint \delta \frac{\rho i^2}{2} d\omega - \iiint \delta P d\omega + \\ & + \iint d\sigma \{ u' [L_{xx} \cos(nx) + M_{yx} \cos(ny) + N_{xz} \cos(nz)] + \\ & \quad + v' [L_{xy} \cos(nx) + M_{yy} \cos(ny) + N_{zy} \cos(nz)] + \\ & \quad + w' [L_{xz} \cos(nx) + M_{yz} \cos(ny) + N_{zz} \cos(nz)] \} = 0. \quad (68) \end{aligned}$$

Второй тройной интеграл выражения (67) целиком переходит в двойной интеграл по поверхности:

$$\iint \left[\frac{\rho i^2}{2} u' \cos(nx) + \frac{\rho i^2}{2} v' \cos(ny) + \frac{\rho i^2}{2} w' \cos(nz) \right] d\sigma. \quad (69)$$

Отсюда заключаем, что второй тройной интеграл выражения (68) получается интегрированием по частям выражения

$$- \iiint (Xu' + Yv' + Zw') d\omega = -S + V, \quad (70)$$

где S есть часть, приходящаяся на поверхность, а V есть $-\iiint \delta P d\omega$. Часть $-S$ есть разность двойного интеграла выражения (68) и двойного интеграла выражения (69). Следовательно,

$$\begin{aligned} -S = \iint d\sigma \left\{ u' \left[\left(L_{xx} - \frac{\rho i^2}{2} \right) \cos(nx) + M_{yx} \cos(ny) + \right. \right. \\ \left. \left. + N_{xz} \cos(nz) \right] + v' \left[L_{xy} \cos(nx) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(M_{yy} - \frac{\rho i^2}{2} \right) \cos(ny) + N_{yz} \cos(nz) \right] + \right. \\ \left. + w' \left[L_{xz} \cos(nx) + M_{yz} \cos(ny) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(N_{zz} - \frac{\rho i^2}{2} \right) \cos(nz) \right] \right\}. \quad (71) \end{aligned}$$

Отсюда очевидно:

$$\left. \begin{aligned} -X &= \frac{\partial}{\partial x} \left[L_{xx} - \frac{\rho i^2}{2} \right] + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xz}}{\partial z}, \\ -Y &= \frac{\partial L_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[M_{yy} - \frac{\rho i^2}{2} \right] + \frac{\partial N_{yz}}{\partial z}, \\ -Z &= \frac{\partial L_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left[N_{zz} - \frac{\rho i^2}{2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Следовательно, общий тип уравнений движения частиц сред есть

$$\left. \begin{aligned} -\rho \frac{du'}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[L_{xx} - \frac{\rho i^2}{2} \right] + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xz}}{\partial z}, \\ -\rho \frac{dv'}{dt} &= \frac{\partial L_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[M_{yy} - \frac{\rho i^2}{2} \right] + \frac{\partial N_{yz}}{\partial z}, \\ -\rho \frac{dw'}{dt} &= \frac{\partial L_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left[N_{zz} - \frac{\rho i^2}{2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

При этом изменение потенциальной энергии есть

$$\begin{aligned} -\delta P &= \left\{ \left[L_{xx} - \frac{\rho i^2}{2} \right] \frac{\partial u'}{\partial x} + L_{xy} \frac{\partial v'}{\partial x} + L_{xz} \frac{\partial w'}{\partial x} + \right. \\ &+ M_{xy} \frac{\partial u'}{\partial y} + \left[M_{yy} - \frac{\rho i^2}{2} \right] \frac{\partial v'}{\partial y} + M_{yz} \frac{\partial w'}{\partial y} + \\ &\left. + N_{xz} \frac{\partial u'}{\partial z} + N_{yz} \frac{\partial v'}{\partial z} + \left[N_{zz} - \frac{\rho i^2}{2} \right] \frac{\partial w'}{\partial z} \right\}. \quad (74) \end{aligned}$$

В случае движений весьма малых члены $\frac{\rho i^2}{2}$ могут быть пренебрежены как величины второго порядка.

Найденные выше выражения дают нам возможность изыскивать среду, в которой движение энергии должно подчиняться данным законам.

Я приведу пример такого изыскания. Тепловые явления в телах твёрдых приписываются молекулярным движениям, а следовательно, молекулярным силам. Решим вопрос, возможно ли объяснить явления теплопроводности молекулярными движениями одной непрерывной среды, будет ли эта среда само твёрдое тело или проникающий его эфир?

Плотность энергии в каждой точке среды представляется произведением теплоёмкости при постоянном давлении c на плотность тела ρ и температуру V . Токи энергии суть тепловые токи, и, означая через K коэффициент теплопроводности, имеем для изотропного тела:

$$q_x = K \frac{\partial V}{\partial x}, \quad q_y = K \frac{\partial V}{\partial y}, \quad q_z = K \frac{\partial V}{\partial z}$$

или

$$q_x = \frac{K}{c\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \quad q_y = \frac{K}{c\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad q_z = \frac{K}{c\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial z}. \quad (75)$$

Следовательно, в искомой среде токи энергии пропорциональны её производным по соответственным осям.

Работа молекулярных сил, когда последние не зависят от скоростей частиц, должна быть полным дифференциалом; следовательно, L , M , N должны представляться линейными функциями производных первого порядка по координатам от перемещений u , v , w частиц среды. По малости молекулярных тепловых движений член $\rho \frac{i^2}{2}$ может быть пренебрежён относительно L , M , N . Производная от \mathcal{E} по какой-нибудь координате, например по x , получится, дифференцируя по x живую силу и прибавляя выражение $-\delta P$, в котором u' , v' , w' заменены через

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}.$$

В нашем случае неопределённые уравнения движения удовлетворяются, полагая

$$u = e^{\alpha t} u_1, \quad v = e^{\beta t} v_1, \quad w = e^{\gamma t} w_1, \quad (76)$$

где α , β , γ суть постоянные и u_1 , v_1 , w_1 суть функции одних координат. Выражения (75) будут заключать величины αu , βv , γw , которые исключатся из них при помощи неопределённых уравнений движения (73), в коих левые части, вследствие соотношений (76), будут $\alpha^2 \rho u$, $\beta^2 \rho v$, $\gamma^2 \rho w$.

Полагая

$$\frac{c}{K\alpha} = \frac{1}{K_1}, \quad \frac{c}{K\beta} = \frac{1}{K_2}, \quad \frac{c}{K\gamma} = \frac{1}{K_3}, \quad (77)$$

первое из соотношений (75) представится в виде:

$$\begin{aligned} \alpha^2 \rho u \left[\frac{L_{xx}}{K_1} - \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \beta^2 \rho v \left[\frac{L_{xy}}{K_2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \gamma^2 \rho w \left[\frac{L_{xz}}{K_3} - \frac{\partial w}{\partial x} \right] = \\ = L_{xx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + L_{xz} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + M_{yz} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ + M_{yz} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{xz} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + N_{yz} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + N_{xz} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}. \quad (78) \end{aligned}$$

$\alpha^2 \rho u$, $\alpha^2 \rho v$, $\alpha^2 \rho w$ исключатся при помощи неопределённых уравнений, которые будут заключать в себе суммы вторых производных от перемещений по координатам, когда в них будут подставлены величины L , M , N . Обращая внимание на то, что по условию все три направления, принятые за направления осей координат, имеют одинаковые физические свойства и изменение молекулярной работы должно быть полным дифференциалом, мы найдём для L , M , N следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} L_{xx} &= a \frac{\partial u}{\partial x} + a_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + a_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ &\quad + a_3 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + a_4 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ M_{yy} &= a \frac{\partial v}{\partial y} + a_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + a_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ &\quad + a_3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + a_4 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ N_{zz} &= a \frac{\partial w}{\partial z} + a_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + a_2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ &\quad + a_3 \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + a_4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ L_{yx} &= a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + b_2 \frac{\partial u}{\partial z} + b_3 \frac{\partial v}{\partial x} + \\ &\quad + a_1 \frac{\partial v}{\partial y} + b_5 \frac{\partial v}{\partial z} + b_6 \frac{\partial w}{\partial x} + b_7 \frac{\partial w}{\partial y} + a_4 \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 L_{xx} &= a_2 \frac{\partial u}{\partial x} + b_1 \frac{\partial u}{\partial z} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + b_3 \frac{\partial w}{\partial x} + a_1 \frac{\partial w}{\partial z} + \\
 &\quad + b_5 \frac{\partial w}{\partial y} + b_6 \frac{\partial v}{\partial x} + b_7 \frac{\partial v}{\partial z} + a_4 \frac{\partial v}{\partial y}, \\
 M_{xy} &= a_2 \frac{\partial v}{\partial y} + b_1 \frac{\partial v}{\partial x} + b_2 \frac{\partial v}{\partial z} + b_3 \frac{\partial u}{\partial y} + \\
 &\quad + a_1 \frac{\partial u}{\partial z} + b_5 \frac{\partial u}{\partial z} + b_6 \frac{\partial w}{\partial y} + b_7 \frac{\partial w}{\partial x} + a_4 \frac{\partial w}{\partial z}, \\
 M_{zy} &= a_2 \frac{\partial v}{\partial y} + b_1 \frac{\partial v}{\partial z} + b_2 \frac{\partial v}{\partial x} + b_3 \frac{\partial w}{\partial y} + \\
 &\quad + a_1 \frac{\partial w}{\partial z} + b_5 \frac{\partial w}{\partial x} + b_6 \frac{\partial u}{\partial y} + b_7 \frac{\partial u}{\partial z} + a_4 \frac{\partial u}{\partial x}, \\
 N_{xx} &= a_2 \frac{\partial w}{\partial z} + b_1 \frac{\partial w}{\partial x} + b_2 \frac{\partial w}{\partial y} + b_3 \frac{\partial u}{\partial z} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \\
 &\quad + b_5 \frac{\partial u}{\partial y} + b_6 \frac{\partial v}{\partial z} + b_7 \frac{\partial v}{\partial x} + a_4 \frac{\partial v}{\partial y}, \\
 N_{yz} &= a_2 \frac{\partial w}{\partial z} + b_1 \frac{\partial w}{\partial y} + b_2 \frac{\partial w}{\partial x} + b_3 \frac{\partial v}{\partial z} + \\
 &\quad + a_1 \frac{\partial v}{\partial y} + b_5 \frac{\partial v}{\partial x} + b_6 \frac{\partial u}{\partial z} + b_7 \frac{\partial u}{\partial y} + a_4 \frac{\partial u}{\partial x}.
 \end{aligned} \right\} (79)$$

В эти выражения входят одиннадцать постоянных коэффициентов. Выражение (78) и два подобных, соответствующих двум последним выражениям (75), должны тождественно удовлетворяться приведёнными величинами упругих сил. Приравнявая нулю в выражении (78) коэффициенты у вторых производных, не входящих во вторую часть, мы найдём следующие условия, означая через λ , λ_1 два постоянных:

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda \left(\frac{L_{xx}}{K_1} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \lambda_1 \left(\frac{L_{xy}}{K_2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{L_{xz}}{K_3} - \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{a_2}{a_2} = \frac{a_1 + b_1}{b_1 + a_3} = \frac{2b_1}{a_1 + b_1} = \frac{b_1 + a_1}{2a_1} = \frac{b_6}{b_3} = \frac{b_6}{a_2} = \frac{b_3}{b_6} &= \lambda, \\
 \frac{a}{a_2} = \frac{a_2}{a} = \frac{2a_1}{b_1 + a_3} = \frac{a_1 + b_1}{a_1 + b_1} = \frac{a_3 + b_1}{2a_1} = \frac{a_2}{b_3} = \frac{b_3}{a_2} &= \\
 &= \frac{b_6}{a_2} = \frac{a_2}{b_6} = \lambda_1.
 \end{aligned} \right\} (80)$$

Из двух последних соотношений находим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \lambda_1 = 1, \\ a &= a_2 = b_3 = b_6, \\ a_1 &= a_3 = b_1. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Первое из соотношений (80) содержит первые производные от перемещений по координатам. Приравнявая в нём нулю коэффициенты при одинаковых производных и обращая внимание на равенства (81), найдём:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_3 = a_4 = b_1 = b_2 = b_5 = b_7, \\ a &= a_2 = b_3 = b_6, \\ a_1 \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} \right) &= 0, \\ a \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_3} \right) - 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Если a_1 не равно нулю, то последнее из этих выражений даст $1=0$, что невозможно; следовательно, a_1 и все равные ему коэффициенты суть нули. Вместо одиннадцати коэффициентов мы находим только один a , которому равны a_2 , b_3 , b_6 , остальные коэффициенты суть нули.

Поэтому выражения (79) приведутся к форме:

$$\left. \begin{aligned} L_{xy} &= L_{xz} = L_{xx} = a \frac{\partial s}{\partial x}, \\ M_{xy} &= M_{zy} = M_{yy} = a \frac{\partial s}{\partial y}, \\ N_{xz} &= N_{yz} = N_{zz} = a \frac{\partial s}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

где

$$s = u + v + w. \quad (84)$$

Неопределённые уравнения движения будут:

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = \rho \frac{d^2 v}{dt^2} = \rho \frac{d^2 w}{dt^2} = a \Delta_2 s. \quad (85)$$

Обращая внимание на последнее из соотношений (82), условие (78) и два ему подобных будут следующие:

$$\left. \begin{aligned} (a-1) \Delta_2 s \frac{\partial s}{\partial x} &= \frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x}, \\ (a-1) \Delta_2 s \frac{\partial s}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial y}, \\ (a-1) \Delta_2 s \frac{\partial s}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial h^2}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

где h есть дифференциальный параметр первого порядка от функции s .

Выражения (86) содержат одно только постоянное и несколько различных производных от s . Они не могут, следовательно, тождественно удовлетворяться, не давая в то же время условий для движения сверх тех, которые даются неопределёнными уравнениями движения.

Этот результат даёт нам право сделать заключение, что соотношения (75) даже приблизительно не выполняются одной непрерывной средой. Объяснение тепловых явлений в телах твёрдых мы должны искать в молекулярных движениях по крайней мере двух взаимно проникающихся и воздействующих друг на друга сред.

Такая среда, в которой токи энергии были бы пропорциональны производным от живой силы, возможна.

Выражение (74) будет полным дифференциалом, и токи энергии будут пропорциональны производным от живой силы по соответственным координатам, если

$$\left. \begin{aligned} L_{xx} &= a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad M_{xy} = a \frac{\partial u}{\partial y}, \quad N_{xz} = a \frac{\partial u}{\partial z}, \\ L_{xy} &= a \frac{\partial v}{\partial x}, \quad M_{yy} = a \frac{\partial v}{\partial y}, \quad N_{zy} = a \frac{\partial v}{\partial z}, \\ L_{xz} &= a \frac{\partial w}{\partial x}, \quad M_{yz} = a \frac{\partial w}{\partial y}, \quad N_{zz} = a \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Уравнения движения в такой среде будут:

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = a \Delta_2 u, \quad \rho \frac{d^2 v}{dt^2} = a \Delta_2 v, \quad \rho \frac{d^2 w}{dt^2} = a \Delta_2 w. \quad (88)$$

Легко отыскать такие выражения для L , M , N , при которых $\delta P = 0$.

Выражения токов энергии, предложенные в статье «Уравнения движения энергии в телах» для некоторых случаев взаимодействия на конечных расстояниях, должны служить исходной точкой при изыскании сред, в которых они были бы возможны. Такое изыскание может быть произведено только при помощи формул настоящего параграфа.



ОПЫТ ИССЛЕДОВАНИЯ МАГНИТНЫХ ОБРАЗОВ ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА ¹⁾

В последние годы неоднократно ставилась задача построения действительной картины земного магнетизма. Эта задача решалась тем, что за действительное распределение принималось то, которое имеет равномерно намагниченный шар, или же то, которое получается вычислением средних значений для параллелей.

Что касается первого решения, то оно является только первым приближением. Можно также показать, что оно способно объяснить лишь одну из причин земного магнетизма. Помимо этого, такое решение не исключает возможности существования какого-либо общего закона; кроме того, ряд других закономерностей земного магнетизма остаётся невыясненным и объясняется только с точки зрения аномальных явлений.

Метод второго решения заимствован из метеорологии и, очевидно, приводит к такому распределению, которое может только условно соответствовать действительности. Образование средних значений для параллелей исключает отклонение от действительного образа только вдоль них, но сохраняет отклонения в перпендикулярных направлениях. Такой метод, с точки зрения исследования законов земного магнетизма, может дать только отрывочные сведения о магнитном образе, который

¹⁾ Впервые напечатано в Bulletin de la Société Imperiale des Naturalistes de Moscou, 1902, стр. 1. (Прим. ред.)

характеризует наиболее значительную часть магнитных явлений земли.

Различным общим причинам земного магнетизма должны соответствовать строгие закономерности, которые под воздействием местных условий (локальные влияния) будут испытывать бóльшие или меньшие отклонения. Вопрос о нахождении магнитных образцов такого рода остаётся открытым, и для его решения необходимо установить принцип, который нашёл бы своё подтверждение в опытах. Настоящая работа имеет своей целью найти такой принцип, основанный на использовании математической теории бессмертного Гаусса. Физическому анализу причин земного магнетизма должен предшествовать аналитический отбор магнитных образцов. Поэтому необходимо придерживаться метода разложения в ряд потенциала произвольно намагниченного шара, чтобы из данного разложения получить необходимые признаки для вышеуказанного отбора.

Принято считать, что известное разложение в ряд отображает только общие свойства потенциала, в остальном же является совершенно произвольным. Более подробный анализ показывает, что дело обстоит иначе. Оказывается, разложение в ряд содержит члены, которые, несмотря на произвольный выбор коэффициентов, обладают вполне определёнными и заранее установленными свойствами, выступающими не при любом распределении. Но существуют и такие связанные группы членов, которые выступают при любом данном распределении. При этом может быть найдено аналитическое выражение, дающее возможность найти основной принцип распределения, исходя из значений коэффициентов, полученных опытным путём. Первая часть этой работы посвящена введению в упомянутое выше исследование. Вторая часть содержит само исследование. Третья применяет результаты исследования к явлениям земного магнетизма.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Глава I. ВВЕДЕНИЕ

§ 1. **Определение образа.** В этом разделе поясняются те признаки магнитного образа, которые, как мы в дальнейшем увидим, дадут возможность представить любое магнитное распределение через ряд элементарных.

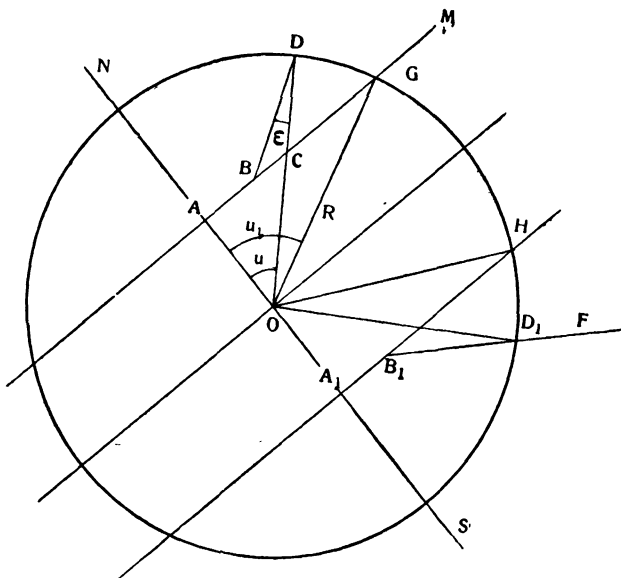


Рис. 1.

Пусть для каждой точки поверхности шара задан некоторый вектор. Я ставлю задачу отыскания точки пересечения одного из заданных векторов с произвольной плоскостью, рассекающей шар. Через D обозначена точка поверхности шара радиуса R . M — произвольная плоскость, перпендикулярная чертежу. За направление оси шара мы принимаем прямую NS ,

перпендикулярную плоскости M . От неё мы будем отсчитывать углы u , образованные с радиусом шара.

Вообразим себе систему меридианов и параллелей, для которых прямая NS является осью. Далее, мы обозначим через X, Y, Z составляющие вектора в точке D по направлениям дуги меридиана, параллели и радиуса OD . За положительное направление составляющей X принимается направление в сторону N . Y положительно в направлении против движения часовой стрелки с точки зрения наблюдателя, смотрящего вдоль SN . Составляющая Z положительна, если она направлена в сторону центра шара.

Положение плоскости M и параллели, лежащей в этой плоскости, задаётся углом u_1 . Угол u определяет положение той параллели, которая проходит через точку D . Пусть DB — направление меридиональной составляющей вектора в точке D . Обозначим угол BDO через ε . Тогда очевидно:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{X}{Z}. \quad (1)$$

Расстояние AB между точкой пересечения вектора DB с плоскостью M и прямой NS обозначим через ρ . Тогда мы имеем:

$$\rho = AC - BC = AO \cdot \operatorname{tg} u - BC. \quad (a)$$

Так как

$$AO = R \cos u_1 = (R - DC) \cos u, \quad (b)$$

то

$$DC = \frac{R(\cos u - \cos u_1)}{\cos u}. \quad (c)$$

Далее, из треугольника BCD имеем:

$$\frac{BC}{DC} = \frac{\sin \varepsilon}{\cos(\varepsilon + u)},$$

откуда, используя соотношение (c),

$$BC = DC \frac{\sin \varepsilon}{\cos(\varepsilon + u)} = - \frac{R \sin \varepsilon (\cos u_1 - \cos u)}{\cos(\varepsilon + u) \cos u}. \quad (d)$$

Вставляя найденные значения для BC и AO из (b) в выражение (a), получим:

$$\rho = R \cos u_1 \cdot \operatorname{tg} u + \frac{R \sin \varepsilon (\cos u_1 - \cos u)}{\cos u \cdot \cos (\varepsilon + u)}.$$

С помощью несложных преобразований эти формулы можно привести к виду:

$$\rho = \frac{R}{\cos u \cdot \sin u} \left[\sin^2 u \cdot \cos u_1 + \frac{\operatorname{tg} \varepsilon (\cos u_1 - \cos u)}{\operatorname{ctg} u - \operatorname{tg} \varepsilon} \right], \quad (\text{I})$$

$$\rho = \frac{R}{\cos u} \left[\sin u \cos u_1 + \frac{X (\cos u_1 - \cos u)}{Z \cos u - X \sin u} \right], \quad (\text{II})$$

$$\rho = R \frac{(X \cos u + Z \sin u) \cos u_1 - X}{Z \cos u - X \sin u}. \quad (\text{II}')$$

Величины ρ , определённые таким способом для всех векторов одной и той же параллели, образуют радиус-векторы некоторой кривой, которую можно считать отображением данной окружности на плоскость M .

Формула (II') показывает, что для $u = \frac{\pi}{2}$, т. е. в случае экваториальной плоскости, величина ρ имеет конечное значение.

Если угол u взять произвольно, например $u = u_1$, то

$$\rho = R \sin u_1,$$

т. е. параллель совпадает со своим изображением, независимо от законов распределения векторов. Это не будет иметь места, если для случая $u = u_1$ выполняются условия:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \operatorname{ctg} u_1, \quad \text{или} \quad Z_1 \cos u_1 - X_1 \sin u_1 = 0, \quad (\text{III})$$

т. е. если составляющая вектора в направлении, перпендикулярном плоскости параллели u_1 , равна нулю, или же векторы точек окружности u_1 лежат в её плоскости.

Тогда согласно (II) имеем:

$$\rho = R \sin u_1 + \frac{0}{0},$$

и ρ может принимать определённые, для различных точек параллели разные значения. Таким образом, мы получаем на плоскости M изображение поверхности шара, зависящее от распределения векторов на шаровой поверхности. Плоскость M , обладающую таким свойством и совпадающую с плоскостью параллели u_1 , я буду в дальнейшем для простоты обозначать просто через u_1 .

Далее, я принимаю в качестве образа, принадлежащего плоскости u_1 , такое распределение векторов, при котором векторы точек соответствующей параллели лежат в плоскости этой окружности. Угол u_1 я назову критическим углом образа, его дополнение до $\frac{\pi}{2}$ — критической широтой и плоскость критической параллели — критической плоскостью.

Возможно существование образов, обладающих несколькими критическими плоскостями. Формулы (I) и (II) доказывают, что *критическими плоскостями образа являются те, на которые возможно отобразить образ непрерывным, т. е. совершенным путём.*

§ 2. Выделение образа из распределения векторов. Вообразим себе на поверхности шара некоторое распределение векторов. Допустим, что оно представляет какой-то образ (определённый в вышеуказанном смысле), искажённый в силу каких-либо причин. Так как образ характеризуется уравнением (III), то нужно ожидать, что мы придём к ряду лежащих близко друг от друга параллельных плоскостей, которые замечательны тем, что для ряда точек пересечения этих плоскостей с поверхностью шара нормальная составляющая вектора равна нулю. При этом критическая плоскость распределения совпадает с одной из этих плоскостей.

Пусть X и Z — составляющие образа; составляющие данного распределения пусть будут $X + \delta X$, $Z + \delta Z$,

где δX , δZ — малые величины. Изображение распределения на критической плоскости на основании формулы (II) даётся следующим выражением:

$$\rho = \frac{R \cos u_1}{\cos u} \left[\sin u + \frac{(X + \delta X) \left(1 - \frac{\cos u}{\cos u_1}\right)}{(Z + \delta Z) \cos u - (X + \delta X) \sin u} \right]. \quad (2)$$

При $u = u_1$ второй член в квадратной скобке обращается в нуль и величина ρ становится равной радиусу критической окружности.

Для случая, когда угол u отличается от u_1 на небольшую величину Δu_1 , выражение (2) принимает следующий вид:

$$\rho = \frac{R \cos u_1}{\cos u} \times \left[\sin u - \frac{(X + \delta X) \operatorname{tg} u_1 \cdot \Delta u_1}{\left. \frac{\partial}{\partial u} \right|_{u=u_1} (Z \cos u - X \sin u) \Delta u_1 + (\delta Z \cos u_1 - \delta X \sin u_1)} \right]. \quad (3)$$

Легко видеть, что мы получим множество значений угла Δu_1 в зависимости от положения точки на критической параллели, для которого знаменатель второго члена в выражении (3) обращается в нуль; при этом получается $\rho = \infty$. Таким образом, в рассматриваемом случае существует бесчисленное множество параллелей, расположенных вблизи критической параллели, большее или меньшее число точек которых отображается на критическую плоскость в виде бесконечно удалённых точек.

Из этих рассуждений следует: если при отображении какого-нибудь распределения векторов по формуле (II) мы находим такую плоскость u_1 , на которую в виде бесконечно удалённых точек отображается большее или меньшее число точек параллелей, лежащих вблизи плоскости u_1 , то плоскость u_1 является критической плоскостью образа, скрытого в данном распределении.

§ 3. Усовершенствование отображения. До сих пор мы не принимали во внимание составляющую Y .

Проведём в плоскости u_1 перпендикуляр к прямой AB . Найдём на нём в направлении составляющей Y такую точку B_1 , чтобы

$$\frac{BB_1}{BD} = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Z^2}} = \operatorname{tg} q,$$

где угол q определяет наклон вектора точки D к меридиональной плоскости этой точки.

Из треугольника BCD , применяя формулу (d) первого параграфа, найдём:

$$BB_1 = R \frac{\cos u - \cos u_1}{\cos(u + \varepsilon)} \operatorname{tg} q. \quad (\text{IV})$$

Точка B_1 является полным векторным изображением точки D на плоскости u_1 . Для критической плоскости у нас $\cos u = \cos u_1$ и $u + \varepsilon = \frac{\pi}{2}$. Тогда величина BB_1 превратится в выражение вида $\frac{0}{0}$, которое, однако, должно будет иметь определённый смысл.

Теперь представим себе два отображения на критическую плоскость: одно — отображение образа, другое — данного распределения векторов. Пусть B_1 и B'_1 будут двумя точками отображений, соответствующих одной и той же точке параллели; тогда прямая B'_1B укажет отклонение распределения от образа.

§ 4. Образы равномерного намагничивания. В качестве примера применим разобранные выше методы к отображению равномерно намагниченного шара.

Внешний потенциал такого шара выражается так:

$$V = -A \frac{R^3}{r^2} \cos u,$$

где R — радиус шара, r — расстояние от центра шара до точки, расположенной вне его. Обозначим через ξ направление, параллельное оси шара и положительное

в северном направлении. Пусть этим направлением будет ON (рис .1). Тогда для составляющей в направлении ξ на поверхности шара мы имеем:

$$\bar{\xi} = -\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{\xi}} = AR(1 - 3 \cos^2 u). \quad (4)$$

Эта составляющая обращается в нуль для значений:

$$\cos u_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin u_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (5)$$

Это распределение, следовательно, имеет две критические плоскости, которые лежат по обе стороны экваториальной плоскости и определяются углами:

$$u = \begin{cases} 54^\circ 44' 8'', 2 \\ 125^\circ 15' 51'', 8 \end{cases} \quad \text{или} \quad \varphi = \pm 35^\circ 15' 51'', 8,$$

где φ — широта. Эти критические углы u я в дальнейшем буду всегда обозначать через u_c .

Далее, так как

$$X = -\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial u} = -A \frac{R^2}{r^2} \sin u$$

и

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2AR^3}{r^3} \cos u,$$

то по формуле (1)

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{2} \operatorname{tg} u. \quad (6)$$

Согласно (III) для критической плоскости

$$\operatorname{tg} z_1 = \operatorname{ctg} u_c. \quad (7)$$

Сопоставление (6) и (7) приводит нас к

$$\operatorname{ctg} u_c = \frac{1}{2} \operatorname{tg} u_c,$$

откуда

$$\operatorname{tg} u_c = \pm \sqrt{2}, \quad (8)$$

что совпадает с (5).

Необходимо подчеркнуть, что для полученных выше критических плоскостей рассматриваемое распределение является не единственным.

Итак, для отображения распределения нам необходимы две плоскости u_1 , расположенные на равных расстояниях по обе стороны экваториальной плоскости. На одну из них отображается одно полушарие, на другую — второе. Для южного полушария имеем (рис. 1) угол $OD_1F = \varepsilon$, угол $AON = u_1$. Отображение точки D_1 строится по тем же правилам, что и отображение точки D . При этом оба отображения получаются идентичными, так как при одновременном изменении знаков величин $\operatorname{tg} \varepsilon_1$, $\operatorname{ctg} u_1$, $\cos u$, $\cos u_1$ знаки у членов уравнения (I) сохраняются. Поэтому можно ограничиться нахождением одного отображения.

Преобразуем уравнение (I), чтобы неопределённость исчезла. С помощью формул (5), (6), (8) мы получим:

$$= \frac{R}{\cos u \cdot \sin u} \left[\frac{\sin^2 u}{\sqrt{3}} + \frac{\operatorname{tg} u \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \cos u \right)}{2 \operatorname{ctg} u - \operatorname{tg} u} \right],$$

или

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{3} \cos u \cdot \sin u} \left[\sin^2 u + \frac{\sin^2 u (1 - \sqrt{3} \cdot \cos u)}{2 \cos^2 u - \sin^2 u} \right],$$

или

$$\rho = \frac{R \sin u}{\sqrt{3} \cos u} \left[1 - \frac{1 - \sqrt{3} \cos u}{1 - 3 \cos^2 u} \right],$$

откуда

$$\rho = \frac{R \sin u}{\sqrt{3} \cos u} \left[1 - \frac{1}{1 + \sqrt{3} \cos u} \right],$$

и окончательно

$$\rho = \frac{R \cdot \sin u}{1 + \sqrt{3} \cos u}. \quad (\text{IV}^*)$$

Отображением критической параллели будет тоже параллель, с радиусом, равным половине радиуса исходной параллели:

$$\rho_c = \frac{R \sin u_c}{2} = \frac{R}{\sqrt{6}}. \quad (9)$$

Мы приходим к вполне совершенному непрерывному отображению поверхности шара на две параллельные плоскости. Отображение критической параллели делит критическую плоскость на две части. На внутренней части изображается та часть поверхности полушария, которая лежит над критической параллелью. На внешнюю часть отображается та часть поверхности полушария, которая заключена между критической параллелью и экваториальной плоскостью. Следующая таблица содержит значение радиусов кругов, которые служат отображением параллелей и которым соответствуют углы u . При этом берётся $R = 100$.

Таблица I

u	ρ	u	ρ
0°	0	u_c	$\frac{100}{\sqrt{6}} = 40,825 = \rho_c$
10°	6,4		
20°	13,0	60°	46,4
30°	20,0	70°	59,2
40°	27,6	80°	75,8
50°	36,2	90°	100,0

Ниже мы разъясним причины, которые привели к отображению нашей земной поверхности с помощью этих новых географических координат. Схема III показывает нам отображение северного полушария, а схема V — южного полушария на соответствующие критические плоскости¹⁾.

¹⁾ Схемы см. в конце книги. (Прим. ред.)

Глава II. ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА

§ 5. Определение общего образа земного магнетизма.

Ясно, что простейший вид отображения распределения векторов будет тогда, когда мы на критических плоскостях получим картину равномерную и совпадающую в общих чертах с распределением векторов. Поэтому требуется отыскать такой общий образ для случая земного магнетизма. Следуя методу, изложенному в § 2, нам необходимо найти такое направление, чтобы ряд близких перпендикулярных этому направлению плоскостей делил поверхность земли на отдельные зоны, в которых составляющие векторов по избранному направлению меняли бы свои знаки.

Попытка выбрать в качестве такого направления ось земли является естественной и близкой к истине. На схеме I, содержащей меркаторскую проекцию земной поверхности, представлены значения ряда точек ξ -составляющих векторов, проведённых параллельно оси земли. Эти значения относятся к 1885 г. и выражаются в 0,001 единиц CGS. Они составлены на основании численного материала, приведённого в работе профессора Лейста «О географическом распределении нормального и аномального геомагнетизма», Москва, 1899 г. Все данные по геомагнетизму заимствованы мною из этой работы ввиду тщательности обработки автором всех материалов. Географическая долгота исчисляется от Гринвича.

Ломаной линией по обе стороны экватора отмечена область, в которой составляющая ξ является положительной, т. е. направлена на север. Вне этой области составляющая ξ отрицательна, на границе равна нулю. Между широтами $\pm 30^\circ$ и $\pm 40^\circ$ заключены значения, вычисленные для параллелей u_c .

Мы видим, таким образом, что между северными широтами 30 и 40° составляющая ξ становится равной нулю на дуге примерно в 300° и между широтами 25 и 30° — на дуге в 60° . В южном полушарии эта соста-

Таблица II

λ	Северная широта					Значения ξ					Южная широта						
	70	60	50	40	u_c	30	20	10	0	10	20	30	u_c	40	50	60	70
180 W	-0,499	-0,346	-0,191	-0,034	+0,035	+0,105	+0,230	+0,322	+0,365	+0,331	+0,223	+0,058	-0,037	-0,132	-0,317	-0,520	-0,684
170	-523	-365	-212	-48	+22	+93	+218	+318	+360	+331	+229	+72	-20	-111	-298	-508	-680
160	-528	-384	-234	-64	+7	+79	+212	+314	+357	+330	+232	+79	-9	-97	-271	-499	-672
150	-527	-416	-261	-84	-6	+71	+207	+310	+352	+324	+229	+83	+0	-83	-252	-467	-638
140	-530	-439	-288	-103	-20	+63	+205	+309	+347	+317	+227	+86	+2	-77	-249	-474	-668
130	-558	-473	-317	-122	-35	+52	+207	+314	+348	+316	+226	+92	+13	-66	-234	-464	-620
120	-664	-502	-341	-155	-55	+44	+208	+323	+354	+316	+227	+92	+17	-58	-231	-434	-596
110	-676	-515	-378	-180	-76	+28	+205	+323	+356	+315	+229	+102	+27	-48	-213	-401	-572
100	-806	-540	-396	-202	-93	+15	+198	+321	+354	+317	+233	+114	+42	-29	-192	-369	-551
90	-673	-484	-400	-219	-109	-1	+191	+314	+347	+315	+235	+128	+61	-6	-162	-342	-503
80	-639	-445	-386	-225	-119	-14	+176	+238	+337	+308	+235	+142	+84	+27	-121	-293	-454
70	-608	-477	-389	-227	-127	-27	+161	+276	+320	+297	+237	+157	+106	+55	-76	-245	-415
60	-577	-474	-369	-211	-121	-31	+147	+259	+306	+291	+241	+167	+128	+79	-44	-197	-361
50	-543	-447	-340	-198	-113	-28	+133	+251	+300	+287	+239	+173	+131	+89	-25	-175	-368
40	-515	-409	-310	-167	-92	-17	+129	+249	+292	+278	+230	+166	+124	+83	-26	-168	-339
30	-489	-396	-281	-143	-72	-1	+136	+243	+283	+263	+212	+146	+105	+64	-39	-169	-340
20	-463	-374	-258	-116	-47	+21	+155	+248	+276	+246	+190	+121	+79	+37	-63	-189	-335
10 W	-445	-344	-230	-97	-24	+48	+181	+274	+277	+232	+164	+88	+47	+6	-89	-209	-347
0	-428	-327	-214	-74	+2	+79	+210	+287	+281	+222	+140	+61	+20	-21	-117	-227	-356
10 E	-416	-316	-201	-53	+25	+104	+232	+304	+287	+222	+122	+33	-11	-54	-145	-247	-370
20	-411	-316	-190	-39	+41	+122	+257	+312	+293	+210	+111	+15	-31	-77	-169	-276	-384
30	-411	-325	-187	-31	+51	+133	+264	+323	+300	+210	+104	-3	-51	-99	-198	-295	-414
40	-412	-333	-184	-26	+58	+142	+276	+331	+309	+217	+100	-16	-86	-124	-221	-330	-428
50	-434	-452	-196	-29	+59	+147	+285	+337	+320	+225	+102	-26	-83	-139	-248	-343	-450
60	-446	-363	-213	-36	+56	+148	+291	+347	+330	+240	+110	-28	-91	-154	-268	-367	-464
70	-477	-379	-221	-42	+52	+147	+299	+357	+341	+253	+119	-27	-96	-165	-287	-395	-486
80	-504	-393	-233	-49	+45	+139	+303	+369	+353	+270	+130	-26	-99	-172	-297	-437	-512
90	-512	-401	-241	-58	+36	+131	+296	+377	+366	+285	+142	-23	-103	-183	-337	-467	-520
100	-503	-404	-254	-61	+35	+132	+287	+371	+376	+301	+157	-21	-108	-194	-357	-497	-571
110	-496	-407	-272	-69	+29	+127	+278	+368	+382	+313	+169	-20	-110	-200	-392	-529	-603
120	-502	-398	-255	-61	+33	+127	+271	+364	+384	+320	+177	-14	-111	-208	-407	-521	-552
130	-494	-387	-246	-52	+38	+128	+266	+356	+383	+325	+187	-13	-113	-212	-408	-488	-389
140	-488	-375	-224	-33	+48	+130	+262	+351	+381	+324	+193	-6	-108	-210	-402	-517	-408
150	-491	-358	-199	-19	+58	+136	+257	+343	+373	+383	+198	+7	-91	-188	-392	-483	-615
160	-485	-341	-184	-15	+59	+133	+251	+336	+363	+322	+209	+24	-76	-176	-381	-497	-679
170	-488	-336	-179	-18	+51	+121	+242	+328	+364	+326	+216	+40	-60	-160	-342	-517	-682
180 E	-499	-346	-191	-34	+35	+105	+230	+322	+365	+331	+223	+58	-37	-132	-317	-520	-684

вляющая принимает значение нуль между 30 и 40° на дуге в 165° , между 40 и 50° — на дуге в 80° и между 20 и 30° — на дуге в 115° . Таким образом, значения $\xi = 0$ расположены вблизи параллелей, определяемых широтами $\varphi = \pm 35^\circ 15' 51'' , 8$. Из этих результатов можно сделать следующее заключение: основным образом земного магнетизма является тот, для которого критические плоскости совпадают с критическими плоскостями равномерно намагниченного шара, магнитная ось которого совпадает с осью земли. Однако не нужно этот вывод понимать так, что основной образ земного магнетизма совпадает с образом равномерно намагниченного шара.

Чтобы избежать каких-либо неясностей, значения для ξ даны ещё в таблице II.

Для большего подтверждения сделанного выше вывода я привожу из работы профессора Лейста таблицу средних значений величины $\frac{V_\varphi}{R}$ для ряда параллелей. V_φ обозначает среднее значение магнитного потенциала земли на её поверхности на широте φ ; R — радиус земли.

Умножим эти числа на 300 и, взяв за единицу измерения миллиметр, нанесём полученные таким образом длины на прямые, проведённые из точки O (схема II) между значениями 10 и 10° . Концы этих линий соединим прямыми. Тогда мы увидим, что построенные таким образом для северного и южного полушарий многоугольники весьма близко совпадают с двумя окружностями, центры которых лежат в точках O_1 и O_2 . При этом точка O расположена на линии центров O_1O_2 , определяющей направление земной оси. Нетрудно заметить, что концы нанесённых длин, имеющих с осью земли общую точку O , лежат почти что на окружности. Итак, для северного полушария мы имеем:

$$r = 2 \cdot \overline{OO_1} \cos u,$$

а для южного

$$r = -2 \cdot \overline{OO_2} \cos u.$$

Следовательно, потенциал V_p близок к потенциалу равномерно намагниченного шара.

Таблица III

Северная широта	$\frac{V_p}{R}$	Южная широта	$\frac{V_p}{R}$
90°	0,3033	90°	-0,3085
80	3004	80	— 3036
70	2907	70	— 2895
60	2734	60	— 2672
50	2466	50	— 2376
40	2099	40	— 2020
30	1638	30	— 1606
20	1103	20	— 1137
10	0528	10	— 0618
0° . . . -0,3056			

Указанные в схеме I значения составляющей ξ на параллелях u_c должны соответствовать другим образом, чем найденные, ибо для последних эти значения должны быть равны нулю.

§ 6. Отображения распределения земного магнетизма. Предыдущие рассуждения приводят нас к выводу, что наиболее выгодное отображение получается на критических плоскостях, задаваемых следующими значениями (§ 4):

$$\cos u_c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin u_c = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \operatorname{tg} u_c = \pm \sqrt{2}. \quad (10)$$

Такое отображение мы можем осуществить, если в формулы (II') и (IV) подставим значение $\cos u_1 = \cos u_c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ и значения составляющих X, Y, Z земного

магнетизма. Тогда из формулы (II') получим:

$$\rho = \frac{R}{\sqrt{3}} \frac{\pm (X \cos u + Z \sin u) - X \sqrt{3}}{Z \cos u - X \sin u}. \quad (11)$$

Здесь знак $+$ берётся для северного и знак $-$ берётся для южного полушария.

Однако схемы III, IV, V составлены не с помощью таких вычислений, а на основании геометрических построений, сделанных для 15 параллелей на 36 меридиональных плоскостях. Таким способом мы получили изображение из 540 точек для параллелей, лежащих около 70° широты с отклонениями в 10° по широте и долготе.

Нанесенные на схемах значения окружностей относятся к случаю отображения равномерно намагниченного земного шара, ось которого служит магнитной осью. При этом радиус экватора взят за 100 мм. В качестве примера построения картины истинного распределения я опишу такое построение в меридиональной плоскости, лежащей в северном полушарии на 20° западной долготы.

В плоскости чертежа (рис. 2 выполнен в меньшем масштабе) опишем четверть окружности, начиная от радиуса $OA = 100$ мм. ON обозначает земную ось, $OA =$ радиус экватора.

Критическая плоскость пересекает плоскость чертежа по прямой CC_1 , параллельной OA и отстоящей от неё на расстоянии $OC = R \cos u_c = 57,735$ мм. Поэтому откладываем на прямой ON отрезок $OC = 57,7$ мм и строим перпендикуляр CC_1 .

Изображение точки D , лежащей на параллели, равной 20° северной широты, находится следующим образом.

Единица магнитной силы (в системе CGS) выражается отрезком длиной 100 мм. Для точки D в абсолютных единицах мы имеем: $Z = 0,265$; $X = 0,262$; $Y = 0,093$.

На радиусе OD отложим отрезок $Z = ED = 26,5$ мм и восставим в точке E перпендикуляр, на который

нанесём отрезок $X = EF = 26,2$ мм. Затем продолжим DF до пересечения с прямой CC_1 в точке G . Тогда отрезок CG даёт нам искомое расстояние ρ отображения точки D в меридиональной плоскости на критическую

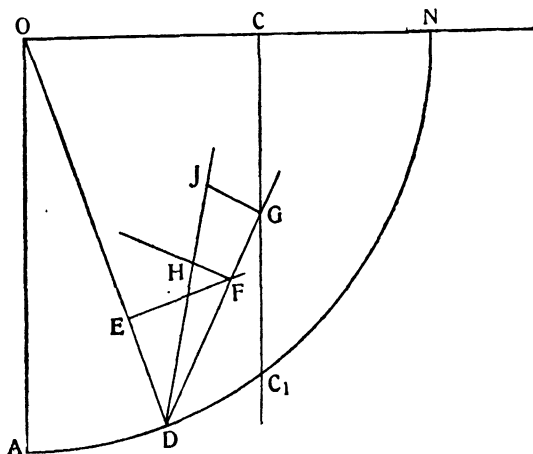


Рис. 2.

плоскость, то-есть для отображения северного полушария ρ отсчитывается в плоскости меридиана, равного 20° западной долготы от центра. Таким путём мы получаем меридиональное отображение. Нетрудно заметить, что точка G может оказаться вне отрезка CC_1 . Для простоты чертежа такие точки наносились в отображении только в том случае, если их расстояние до C и C_1 было незначительным. Если это не имело места, то соответствующие точки параллелей отмечались маленькими кружочками.

Таким путём мы получаем картину меридионального отклонения действительного распределения от равномерного распределения. На наших схемах меридиональное отображение не приводится.

Теперь я перехожу к отклонению в вертикальном направлении. Для этого в точке F прямой DF восставим

перпендикуляр и отложим на нём длину $Y = HF = 9,3$ мм. Продолжим DH до пересечения в точке J с перпендикуляром, восстановленным из точки G прямой DG . Затем в отображении откладывают отрезок GJ на перпендикуляре, восстановленном из точки D меридиана 20° западной долготы, в западном направлении, ибо Y является положительным. Полученноз таким образом полное изображение точки D отмечается точкой, которая соединяется тонкой линией с картографической проекцией отображённой точки параллели. Соединяя такие точки, соответствующие одной и той же параллели, непрерывной кривой, мы получим изображение параллели. Эти кривые отмечены в схемах жирной линией.

Точки D являются точками пересечения суммарных магнитных сил земли с критическими плоскостями. Если соединить эти точки прямыми с нормальными проекциями в тех же плоскостях, которые соответствуют этим точкам параллелей, то прямые укажут нам направление плоскостей, в которых действуют магнитные силы земли. Во избежание путаницы отображение приводится в трёх чертежах (см. схемы III, IV, V в конце книги):

III — отображение северного полушария между северным полюсом и критической плоскостью северного полушария.

IV — отображение того же полушария между той же критической плоскостью и плоскостью экватора.

V — отображение южного полушария между экваториальной плоскостью и критической плоскостью южного полушария.

Отображение этого полушария между критической плоскостью и южным полюсом не приводится из-за его путанности.

Найденные изображения распределения земного магнетизма не зависят от абсолютных значений векторных величин. Вследствие этого они показывают ряд общих соотношений распределения. Мы видим, что изображение параллелей в северном полушарии, на-

ходящихся над критической плоскостью, сдвинуты в сторону первой четверти западной долготы. Ось этого сдвига определяется примерно направлением меридиана, равного 80° западной и 100° восточной долготы. Изображение параллелей, лежащих ниже критической плоскости в том же полушарии, представляется более равномерным распределением вокруг центра отображения. Всё же они сдавлены к центру отображения в той же четверти западной долготы. В южном полушарии мы находим примерно такое же сдавливание в первой четверти восточной долготы. Приведённые пояснения могут послужить указанием относительно влияния различных факторов земной поверхности на распределение земного магнетизма.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Глава III. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЗМОЖНЫХ МАГНИТНЫХ ОБРАЗОВ ПРОИЗВОЛЬНО НАМАГНИЧЕННОГО ШАРА

§ 7. Основные уравнения. Пусть R — радиус намагниченного шара, r — расстояние от центра до произвольной точки вне его, u — угол между прямой, выбранной в качестве оси шара, и r . Направление оси, от которой отсчитывается угол u от 0° до 180° , принимается за северное направление, а точка пересечения оси с шаром обозначается через северный полюс. λ — угол между меридиональной плоскостью и любой другой данной (географическая долгота отсчитывается в восточном направлении).

Магнитный потенциал шара для внешней точки выражается так:

$$V = R \sum Y_n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}, \quad (12)$$

где

$$Y_n = g_{n0} A_{n0} + (g_{n1} \cos \lambda + h_{n1} \sin \lambda) A_{n1} + \\ + (g_{n2} \cos 2\lambda + h_{n2} \sin 2\lambda) A_{n2} + \dots + \\ + (g_{nn} \cos n\lambda + h_{nn} \sin n\lambda) A_{nn} \quad (13)$$

и

$$A_{nm} = \left[\cos^{n-m} u - \frac{(n-m)(n-m-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-m-2} u + \right. \\ \left. + \frac{(n-m)(n-m-1)(n-m-2)(n-m-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-2)} \cos^{n-m-4} u + \dots \right] \sin^m u. \quad (14)$$

Знаки коэффициентов g_{nm} и h_{nm} выбираются таким образом, чтобы составляющие X, Y, Z в направлениях возрастающих u, r, λ не принимали отрицательных значений, если они определяются из функции V следующими соотношениями:

$$X = -\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial u}; \quad Y = -\frac{1}{R \sin u} \frac{\partial V}{\partial \lambda}; \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial r}. \quad (15)$$

Следовательно, X берётся положительным в северном, Y — в западном направлениях. Z положительно по направлению к центру земли. Тогда, используя соотношение (12), получим для точки поверхности земли:

$$X = -\sum \frac{\partial Y_n}{\partial u}, \quad Z = \sum (n+1) Y_n, \quad (16)$$

и по формуле (1)

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{\sum \frac{\partial Y_n}{\partial u}}{\sum (n+1) Y_n}. \quad (17)$$

Условие (III), определяющее направление критической плоскости, принимает вид:

$$\cos u_1 \sum_{u=u_1} (n+1) Y_n + \sin u_1 \sum_{u=u_1} \frac{\partial Y_n}{\partial u} = 0, \quad (V)$$

т. е. равенство, которое должно быть справедливо для любого λ .

К основному условию (V) добавим ещё одно, которое, как мы увидим, не приведёт к противоречиям. А именно, допустим, что критические плоскости расположены симметрично относительно плоскости экватора, т. е. что основное условие (V) удовлетворяет значениям

$$u_1 \text{ и } \pi - u_1. \quad (\text{VI})$$

Для отображения образов нам необходимо изменить основную формулу (II) с учётом уравнений (16). Мы получим:

$$\rho = \frac{R}{\cos u} \left[\sin u \cdot \cos u_1 - \frac{(\cos u_1 - \cos u) \sum \frac{\partial Y_n}{\partial u}}{\cos u \sum (n+1) Y_n + \sin u \sum \frac{\partial Y_n}{\partial u}} \right]. \quad (\text{VII})$$

Второй член в квадратной скобке назовём критическим членом.

§ 8. Нахождение критических плоскостей. Для исследования земного магнетизма я, исходя из практических соображений, ограничусь разложением потенциала (12) до члена Y_4 , считая при этом $Y_0 = 0$.

Значит мы будем учитывать следующие члены:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= g_{10}A_{10} + (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) A_{11}; \\ Y_2 &= g_{20}A_{20} + (g_{21} \cos \lambda + h_{21} \sin \lambda) A_{21} + \\ &\quad + (g_{22} \cos 2\lambda + h_{22} \sin 2\lambda) A_{22}; \\ Y_3 &= g_{30}A_{30} + (g_{31} \cos \lambda + h_{31} \sin \lambda) A_{31} + \\ &\quad + (g_{32} \cos 2\lambda + h_{32} \sin 2\lambda) A_{32} + \\ &\quad + (g_{33} \cos 3\lambda + h_{33} \sin 3\lambda) A_{33}; \\ Y_4 &= g_{40}A_{40} + (g_{41} \cos \lambda + h_{41} \sin \lambda) A_{41} + \\ &\quad + (g_{42} \cos 2\lambda + h_{42} \sin 2\lambda) A_{42} + \\ &\quad + (g_{43} \cos 3\lambda + h_{43} \sin 3\lambda) A_{43} + \\ &\quad + (g_{44} \cos 4\lambda + h_{44} \sin 4\lambda) A_{44}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Вставляя эти выражения в формулу (V) и учитывая, что они должны выполняться при любом λ , мы получим следующие уравнения для коэффициентов g (для коэффициентов h получаются аналогичные соотношения):

$$\left. \begin{aligned} & \cos u_1 [2g_{10}A_{10} + 3g_{20}A_{20} + 4g_{30}A_{30} + 5g_{40}A_{40}] + \\ & + \sin u_1 \left[g_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial u} + g_{20} \frac{\partial A_{20}}{\partial u} + g_{30} \frac{\partial A_{30}}{\partial u} + g_{40} \frac{\partial A_{40}}{\partial u} \right] = 0, \end{aligned} \right\} (a)$$

$$\left. \begin{aligned} & \cos u_1 [2g_{11}A_{11} + 3g_{21}A_{21} + 4g_{31}A_{31} + 5g_{41}A_{41}] + \\ & + \sin u_1 \left[g_{11} \frac{\partial A_{11}}{\partial u} + g_{21} \frac{\partial A_{21}}{\partial u} + g_{31} \frac{\partial A_{31}}{\partial u} + g_{41} \frac{\partial A_{41}}{\partial u} \right] = 0, \end{aligned} \right\} (b)$$

$$\left. \begin{aligned} & \cos u_1 [3g_{22}A_{22} + 4g_{32}A_{32} + 5g_{42}A_{42}] + \\ & + \sin u_1 \left[g_{22} \frac{\partial A_{22}}{\partial u} + g_{32} \frac{\partial A_{32}}{\partial u} + g_{42} \frac{\partial A_{42}}{\partial u} \right] = 0, \end{aligned} \right\} (c)$$

$$\cos u_1 [4g_{33}A_{33} + 5g_{43}A_{43}] + \sin u_1 \left[g_{33} \frac{\partial A_{33}}{\partial u} + g_{43} \frac{\partial A_{43}}{\partial u} \right] = 0, \quad (d)$$

$$\cos u_1 \cdot 5g_{44}A_{44} + \sin u_1 g_{44} \frac{\partial A_{44}}{\partial u} = 0, \quad (e)$$

причём в уравнения (a), (b), (c), (d), (e) вставляется $u = u_1$.

§ 9. Уравнение (e). Согласно формуле (14) мы имеем:

$$A_{44} = \sin^4 u; \quad \frac{\partial A_{44}}{\partial u} = 4 \sin^3 u \cos u.$$

Вставляя эти значения в уравнение (e), получаем:

$$9g_{44} \sin^4 u_1 \cdot \cos u_1 = 0.$$

Аналогичное уравнение имеет место для h . Отсюда следует, что члены с произвольными коэффициентами g_{44} и h_{44} принадлежат образу с тремя критическими плоскостями

$$u_1 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi. \quad (19)$$

Одна из этих плоскостей является плоскостью экватора, остальные две назовём полярными плоскостями.

§ 10. Уравнение (d). Согласно формуле (14) имеем:

$$A_{33} = \sin^3 u; \quad \frac{\partial A_{33}}{\partial u} = 3 \sin^2 u \cos u;$$

$$A_{43} = \cos u \cdot \sin^3 u; \quad \frac{\partial A_{43}}{\partial u} = -\sin^4 u + 3 \sin^2 u \cdot \cos^2 u.$$

После подстановки этих значений в уравнение (d) получим:

$$[7g_{33} \cos u_1 + g_{43} (9 \cos^2 u_1 - 1)] \sin^3 u_1 = 0.$$

Члены, содержащие произвольные коэффициенты g_{33} , g_{43} , h_{33} , h_{43} , принадлежат образу с двумя критическими плоскостями (полярными):

$$u_1 = 0, \pi. \quad (20)$$

Кроме того, предыдущее уравнение удовлетворяют с помощью условия симметричности (VI):

$$\begin{aligned} 7g_{33} \cos u_1 + g_{43} (9 \cos^2 u_1 - 1) &= 0, \\ -7g_{33} \cos u_1 + g_{43} (9 \cos^2 u_1 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что распределение, в котором

$$\left. \begin{aligned} g_{33} &= 0, & g_{43} & \\ h_{33} &= 0, & h_{43} & \end{aligned} \right\} \text{ произвольны,}$$

принадлежит образу с двумя прежними и двумя новыми критическими плоскостями

$$\cos u_1 = \pm \frac{1}{3}, \quad (21)$$

или

$$u_1 = \begin{cases} 70^\circ 31' 40'' \\ 109^\circ 28' 20'' \end{cases}.$$

Кроме того, возможен образ, если

$$\left. \begin{array}{l} g_{43} = 0, \\ h_{43} = 0, \end{array} \right\} \text{ произвольны,} \quad \left. \begin{array}{l} g_{33} \\ h_{33} \end{array} \right\}$$

с двумя прежними и одной новой критической плоскостью

$$u_1 = \frac{\pi}{2}. \quad (22)$$

§ 11. Уравнение (с). По формуле (14) имеем:

$$\begin{aligned} A_{42} &= \left[\cos^2 u - \frac{1}{7} \right] \sin^2 u; \\ \frac{\partial A_{42}}{\partial u} &= 2 \sin u \cdot \cos u \left[\cos^2 u - \frac{1}{7} \right] - 2 \cos u \cdot \sin^3 u; \\ A_{32} &= \cos u \cdot \sin^2 u; \quad \frac{\partial A_{32}}{\partial u} = 2 \sin u \cdot \cos^2 u - \sin^3 u; \\ A_{22} &= \sin^2 u; \quad \frac{\partial A_{22}}{\partial u} = 2 \cos u \cdot \sin u; \end{aligned}$$

тогда уравнение (с) принимает вид:

$$\left\{ 5g_{22} \cos u_1 + g_{32} [6 \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1] + \right. \\ \left. + g_{42} \cos u_1 \left[7 \left(\cos^2 u_1 - \frac{1}{7} \right) - 2 \sin^2 u_1 \right] \right\} \sin^2 u_1 = 0.$$

Отсюда следует: если g_{22} , g_{32} , g_{42} , h_{22} , h_{32} , h_{42} произвольны, то критическими плоскостями будут две полярные плоскости

$$u_1 = 0, \pi. \quad (23)$$

Кроме того, принимая во внимание условие симметричности (VI), получим:

$$\begin{aligned} 5g_{22} \cos u_1 + g_{32} [6 \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1] + \\ + g_{42} \cos u_1 \left[7 \left(\cos^2 u_1 - \frac{1}{7} \right) - 2 \sin^2 u_1 \right] &= 0, \\ -5g_{22} \cos u_1 + g_{32} [6 \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1] - \\ - g_{42} \cos u_1 \left[7 \left(\cos^2 u_1 - \frac{1}{7} \right) - 2 \sin^2 u_1 \right] &= 0, \end{aligned}$$

откуда $g_{32} = 0$, $h_{32} = 0$ или $6 \cos^2 u_1 - \sin^2 u_1 = 0$. Последнее уравнение даёт нам $\cos u_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{7}}$, откуда

$$u_1 = \begin{cases} 67^\circ 47' 30'' \\ 112^\circ 12' 30'' \end{cases} \quad (23^*)$$

и, кроме того,

$$\left. \begin{matrix} g_{22} \\ h_{22} \end{matrix} \right\} = \frac{12}{35} \begin{cases} g_{42} \\ \text{или} \\ h_{42} \end{cases} \quad (23^{**})$$

После ряда преобразований остаётся:

$$[5g_{22} + 3g_{42}(3 \cos^2 u_1 - 1)] \cos u_1 = 0,$$

откуда получается следующий образ:

$$\left. \begin{matrix} g_{32} = 0, & g_{22}, g_{42} \\ h_{32} = 0, & h_{22}, h_{42} \end{matrix} \right\} \text{ произвольны,}$$

третьей критической плоскостью будет экваториальная плоскость

$$u_1 = \frac{\pi}{2}. \quad (24)$$

Или другой:

$$\left. \begin{matrix} g_{32} = 0, & g_{42} \\ h_{32} = 0, & h_{42} \end{matrix} \right\} \text{ произвольны,}$$

$$\left. \begin{matrix} g_{22} \\ \text{или} \\ h_{22} \end{matrix} \right\} = -\frac{3}{5}(3 \cos^2 u_1 - 1) \begin{cases} g_{42} \\ \text{или} \\ h_{42} \end{cases}$$

с тремя критическими плоскостями:

$$u_1, \frac{\pi}{2}, \pi - u_1. \quad (25)$$

Возможен образ:

$$\left. \begin{matrix} g_{22} = 0, & g_{32} = 0, & g_{42} \\ h_{22} = 0, & h_{32} = 0, & h_{42} \end{matrix} \right\} \text{ произвольны,}$$

$$\text{критические плоскости} \left\{ \begin{array}{l} 0, \frac{\pi}{2}, \pi \\ \cos u_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos u_c, \end{array} \right. \quad (26)$$

где u_c обозначает критические плоскости равномерно намагниченного шара.

§ 12. Уравнение (b). По формуле (14) получаем:

$$A_{41} = \left[\cos^2 u - \frac{3}{7} \right] \sin u \cdot \cos u;$$

$$\frac{\partial A_{41}}{\partial u} = \left[\cos^2 u - \frac{3}{7} \right] (\cos^2 u - \sin^2 u) - 2 \sin^2 u \cdot \cos^3 u;$$

$$A_{31} = \left[\cos^2 u - \frac{1}{5} \right] \sin u;$$

$$\frac{\partial A_{31}}{\partial u} = \left[\cos^2 u - \frac{1}{5} \right] \cos u - 2 \cos u \cdot \sin^2 u;$$

$$A_{21} = \cos u \cdot \sin u; \quad \frac{\partial A_{21}}{\partial u} = \cos^2 u - \sin^2 u;$$

$$A_{11} = \sin u; \quad \frac{\partial A_{11}}{\partial u} = \cos u.$$

После несложных преобразований уравнение (b) примет вид:

$$\left\{ 3g_{11} \cos u_1 + g_{21} [5 \cos^2 u_1 - 1] + g_{31} \cos u_1 [7 \cos^2 u_1 - 3] + \right. \\ \left. + 3g_{41} \left[3 \cos^4 u_1 - 2 \cos^2 u_1 + \frac{1}{7} \right] \right\} \sin u_1 = 0.$$

Получим следующие образы:

$$\left. \begin{array}{l} g_{11}, g_{21}, g_{31}, g_{41} \\ h_{11}, h_{21}, h_{31}, h_{41} \end{array} \right\} \text{произвольны,}$$

критические плоскости: две полярные плоскости

$$u_1 = 0, \pi, \quad (27)$$

и

$$\left. \begin{array}{l} g_{11}, g_{31} \\ h_{11}, h_{31} \end{array} \right\} \text{ произвольны, } \quad \begin{array}{l} g_{21} = \frac{3}{7} g_{41} \\ h_{21} = \frac{3}{7} h_{41}; \end{array}$$

критические плоскости: кроме тех двух полярных плоскостей ещё экваториальная плоскость

$$u_1 = \frac{\pi}{2}. \quad (28)$$

Уравнение (b) удовлетворяется, если

$$\begin{aligned} 3g_{11} \cos u_1 + g_{21} [5 \cos^2 u_1 - 1] + g_{31} \cos u_1 [7 \cos^2 u_1 - 3] + \\ + 3g_{41} \left[3 \cos^4 u_1 - 2 \cos^2 u_1 + \frac{1}{7} \right] = 0, \end{aligned}$$

и по условию симметричности (VI)

$$\begin{aligned} -3g_{11} \cos u_1 + g_{21} [5 \cos^2 u_1 - 1] - \\ - g_{31} \cos u_1 [7 \cos^2 u_1 - 3] + \\ + 3g_{41} \left[3 \cos^4 u_1 - 2 \cos^2 u_1 + \frac{1}{7} \right] = 0, \end{aligned}$$

откуда после исключения прежних решений

$$3g_{11} + g_{31} (7 \cos^2 u_1 - 3) = 0$$

и

$$g_{21} (5 \cos^2 u_1 - 1) + 3g_{41} \left(3 \cos^4 u_1 - 2 \cos^2 u_1 + \frac{1}{7} \right) = 0.$$

Таким образом, мы получим пока неопределённый образ:

$$\left. \begin{array}{l} g_{11}, g_{21} \\ h_{11}, h_{21} \end{array} \right\} \text{ произвольны,}$$

$$\left. \begin{array}{l} g_{31} \\ \text{или} \\ h_{31} \end{array} \right\} = -\frac{3}{7 \cos^2 u_1 - 3} \left\{ \begin{array}{l} g_{11} \\ \text{или} \\ h_{11}, \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} g_{41} \\ \text{или} \\ h_{41} \end{array} \right\} = -\frac{5 \cos^2 u_1 - 1}{3 \left(3 \cos^4 u_1 - 2 \cos^2 u_1 + \frac{1}{7} \right)} \left\{ \begin{array}{l} g_{21} \\ \text{или} \\ h_{21}; \end{array} \right.$$

критические плоскости:

$$u_1, \pi - u_1, 0, \pi. \tag{29}$$

§ 13. Уравнение (а). По формуле (14) имеем:

$$A_{40} = \cos^4 u - \frac{6}{7} \cos^2 u + \frac{1}{14};$$

$$\frac{\partial A_{40}}{\partial u} = -4 \cos^3 u \cdot \sin u + \frac{12}{7} \cos u \cdot \sin u;$$

$$A_{30} = \cos^3 u - \frac{3}{5} \cos u; \quad \frac{\partial A_{30}}{\partial u} = -3 \cos^2 u \cdot \sin u + \frac{3}{5} \sin u;$$

$$A_{20} = \cos^2 u - \frac{1}{3}; \quad \frac{\partial A_{20}}{\partial u} = -2 \cos u \cdot \sin u;$$

$$A_{10} = \cos u; \quad \frac{\partial A_{10}}{\partial u} = -\sin u.$$

После несложных преобразований уравнение (а) запишется так:

$$g_{10} [3 \cos^2 u_1 - 1] + g_{20} [5 \cos^2 u_1 - 3] \cos u_1 +$$

$$g_{30} \left[7 \cos^4 u_1 - 6 \cos^2 u_1 + \frac{3}{5} \right] +$$

$$+ g_{40} \left[9 \cos^4 u_1 - 10 \cos^2 u_1 + \frac{29}{14} \right] \cos u_1 = 0.$$

Из условия симметричности (VI) следует, что это уравнение должно удовлетворяться при замене $\cos u_1$ на $-\cos u_1$. Тогда мы приходим к двум уравнениям:

$$g_{10}(3 \cos^2 u_1 - 1) + g_{30} \left(7 \cos^4 u_1 - 6 \cos^2 u_1 + \frac{3}{5} \right) = 0,$$

$$\cos u_1 \left\{ g_{20}(5 \cos^2 u_1 - 3) + \right.$$

$$\left. + g_{40} \left(9 \cos^4 u_1 - 10 \cos^2 u_1 + \frac{29}{14} \right) \right\} = 0.$$

Таким образом, мы получим следующие образы: во-первых,

$$g_{10} = g_{30} = 0, \quad g_{20}, \quad g_{40} \text{ произвольны,}$$

критическая плоскость—плоскость экватора

$$u_1 = \frac{\pi}{2}; \quad (30)$$

во-вторых, образ равномерно намагниченного шара:

$$g_{20} = g_{30} = g_{40} = 0, \quad g_{10} \text{ произвольно,}$$

две критические плоскости

$$u_c, \quad \pi - u_c; \quad (31)$$

в-третьих: $g_{10} = g_{20} = g_{40} = 0$, g_{30} произвольно, при этом u_1 задаётся уравнением

$$7 \cos^4 u_1 - 6 \cos^2 u_1 + \frac{3}{5} = 0,$$

т. е. получается образ с четырьмя критическими плоскостями, которые соответствуют широтам:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{30}' &= \pm 59^\circ 26' 40'', \\ \varphi_{30}'' &= \pm 19^\circ 52' 30''; \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

в-четвёртых, получаем пока что неопределённый образ с двумя критическими плоскостями u_1 и $\pi - u_1$; при этом

$$\left. \begin{aligned} g_{30} &= - \frac{3 \cos^2 u_1 - 1}{7 \cos^4 u_1 - 6 \cos^2 u_1 + \frac{3}{5}} \cdot g_{10}, \\ g_{40} &= - \frac{5 \cos^2 u_1 - 3}{9 \cos^4 u_1 - 10 \cos^2 u_1 + \frac{29}{14}} \cdot g_{20}, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где g_{10} и g_{20} заданы произвольно.

§ 14. Составление образов. Предыдущие выводы приводят нас к членам, которые имеют одинаковые наперёд заданные определённые критические плоскости. Таковые можно объединить в более общий образ. Таким путём мы получаем вполне определённые образы. Но мы нашли также ряд членов, которые имеют по крайней мере две наперёд не определённые критические плоскости. Все эти члены можно тоже объединить в один образ, если всем им приписать одни и те же критические плоскости. Такой образ, соответствующий специфическим свойствам данного распределения, должен выражать особую структуру этого магнитного распределения. Этому специальному образу могут приписываться критические плоскости, которые находят каким-нибудь образом из данного распределения.

Глава IV. СИСТЕМА ВОЗМОЖНЫХ ОБРАЗОВ

§ 15. Характеристика специального или первого образа распределения. Специальный образ распределения может быть составлен из совокупности только тех членов, для которых возможно указать их критические плоскости. Эти члены находятся из соотношений (33), (29) и (25). Обозначая $\cos^2 u_1$ через x , мы полу-

чим следующие характеристические уравнения:

две критические плоскости $u_1, \pi - u_1$.

g_{10}, g_{20} произвольны.

$$g_{30} = - \frac{3x - 1}{7x^2 - 6x + \frac{3}{5}} g_{10},$$

или сокращённо: $g_{30} = U_{10} g_{10}$.

$$g_{40} = - \frac{5x - 3}{9x^2 - 10x + \frac{29}{14}} g_{20},$$

сокращённо: $g_{40} = U_{20} g_{20}$.

$g_{11}, g_{21}, h_{11}, h_{21}$ произвольны.

$$\left. \begin{array}{l} g_{31} \\ \text{или} \\ h_{31} \end{array} \right\} = - \frac{3}{7x - 3} \left\{ \begin{array}{l} g_{11} \\ \text{или} \\ h_{11}; \end{array} \right.$$

сокращённо: $\left. \begin{array}{l} g_{31} \\ \text{или} \\ h_{31} \end{array} \right\} = U_{11} \left\{ \begin{array}{l} g_{11} \\ \text{или} \\ h_{11}. \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} g_{41} \\ \text{или} \\ h_{41} \end{array} \right\} = - \frac{5x - 1}{3 \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{7} \right)} \left\{ \begin{array}{l} g_{21} \\ \text{или} \\ h_{21}, \end{array} \right.$$

сокращённо: $\left. \begin{array}{l} g_{41} \\ \text{или} \\ h_{41} \end{array} \right\} = U_{21} \left\{ \begin{array}{l} g_{21} \\ \text{или} \\ h_{21}, \end{array} \right.$

g_{42}, h_{42} произвольны.

$$\left. \begin{array}{l} g_{22} \\ \text{или} \\ h_{22} \end{array} \right\} = - \frac{3}{5} (3x - 1) \left\{ \begin{array}{l} g_{42} \\ \text{или} \\ h_{42}, \end{array} \right.$$

сокращённо: $\left. \begin{array}{l} g_{22} \\ \text{или} \\ h_{32} \end{array} \right\} = U_{42} \left\{ \begin{array}{l} g_{42} \\ \text{или} \\ h_{42}. \end{array} \right.$

(34)

Итак, этот образ содержит восемь неопределённых коэффициентов и неопределённый угол u_1 .

Значение Y_n для этого распределения получают из формулы (13), вставляя в неё значения данных коэффициентов (34). Наконец, если обозначить потенциал образа на поверхности шара через \bar{W}_1 , то из (12) получим:

$$\frac{\bar{W}_1}{R} = \sum Y_n.$$

§ 16. Подготовка формул для отображения специальных образов. Теперь необходимо представить выражение (VII) для ρ , как непрерывную функцию от u и λ , не содержащую больше неопределённости. С этой целью мы преобразуем критический член

$$-\frac{(\cos u_1 - \cos u) \sum \frac{\partial Y_n}{\partial u}}{\cos u \sum (n+1) Y_n + \sin u \sum \frac{\partial Y_n}{\partial u}}. \quad (35)$$

Знаменатель критического члена имеет вид правой части уравнения (V), если произвести в нём замену u_1 на u . Поэтому он содержит при \cos и \sin , если умножить на λ , многочлены, построенные наподобие тех, которые приводятся в § 8 (а), (b), (с), при замене в них u_1 на u .

В развёрнутом виде такие многочлены мы покажем только для g , выражения которых возьмём в (34). Для первого образа знаменатель примет вид:

$$N = B + C \cos \lambda + C' \sin \lambda + D \cos 2\lambda + D' \sin 2\lambda, \quad (36)$$

где B, C, C', D, D' являются функциями только от u .

C' и D' будут не чем иным, как C и D , в которых g заменили на h .

Итак, для B , образованного по образцу (а), имеем:

$$\begin{aligned}
 B = \cos u & \left\{ 2g_{10} \cos u + 3g_{20} \left(\cos^2 u - \frac{1}{3} \right) - \right. \\
 & - 4g_{10} \frac{(3 \cos^2 u_1 - 1) \left(\cos^3 u - \frac{3}{5} \cos u \right)}{7 \cos^4 u_1 - 6 \cos^2 u_1 + \frac{3}{5}} - \\
 & \left. - 5g_{20} \frac{(5 \cos^2 u_1 - 3) \left(\cos^4 u - \frac{6}{7} \cos^2 u + \frac{1}{14} \right)}{9 \cos^4 u_1 - 10 \cos^2 u_1 + \frac{29}{14}} \right\} + \\
 & + \sin u \left\{ -g_{10} \sin u - 2g_{20} \cos u \cdot \sin u - \right. \\
 & - g_{10} \frac{(3 \cos^2 u_1 - 1) \left(-3 \cos^2 u \sin u + \frac{3}{5} \sin u \right)}{7 \cos^4 u_1 - 6 \cos^2 u_1 + \frac{3}{5}} - \\
 & \left. - g_{20} \frac{(5 \cos^2 u_1 - 3) \left(-4 \cos^3 u \cdot \sin u + \frac{12}{7} \cos u \cdot \sin u \right)}{9 \cos^4 u_1 - 10 \cos^2 u_1 + \frac{29}{14}} \right\}. \quad (37)
 \end{aligned}$$

Теперь положим

$$B = B_{10} + B_{20}, \quad (38)$$

где B_{10} содержит только члены с g_{10} , а B_{20} объединяет члены, содержащие только g_{20} . После преобразований, которые я опускаю, получим:

$$\begin{aligned}
 B_{10} = 7g_{10} (\cos^2 u_1 - \cos^2 u) \times \\
 \times \frac{(3 \cos^2 u_1 - 1) \cos^2 u - \left(\cos^2 u_1 - \frac{3}{5} \right)}{7 \cos^4 u_1 - 6 \cos^2 u_1 + \frac{3}{5}}; \quad (39)
 \end{aligned}$$

$$B_{20} = g_{20} \cos u (\cos^2 u_1 - \cos^2 u) \times \\ \times \frac{9 \cos^2 u (5 \cos^2 u_1 - 3) - \frac{1}{14} (378 \cos^2 u_1 - 275)}{9 \cos^4 u_1 - 10 \cos^2 u_1 + \frac{29}{14}}. \quad (40)$$

Многочлен C конструируется по форме (b):

$$C = \cos u \left\{ 2g_{11} \sin u + 3g_{21} \cos u \cdot \sin u - \right. \\ \left. - 4g_{11} \frac{3 \left(\cos^2 u_1 - \frac{1}{5} \right) \sin u}{7 \cos^2 u_1 - 3} - \right. \\ \left. - 5g_{21} \frac{(5 \cos^2 u_1 - 1) \left(\cos^2 u - \frac{3}{7} \right) \sin u \cdot \cos u}{3 \left(3 \cos^4 u_1 - 2 \cos^2 u_1 + \frac{1}{7} \right)} \right\} + \\ + \sin u \left\{ g_{11} \cos u + g_{21} (\cos^2 u - \sin^2 u) - \right. \\ \left. - \frac{3g_{11}}{7 \cos^2 u_1 - 3} \left[\left(\cos^2 u - \frac{1}{5} \right) \cos u - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \cos u \cdot \sin^2 u \right] - g_{21} (5 \cos^2 u_1 - 1) \left(\cos^2 u - \frac{3}{7} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{(\cos^2 u - \sin^2 u) - 2 \sin^2 u \cdot \cos^2 u}{3 \left(3 \cos^4 u_1 - 2 \cos^2 u_1 + \frac{1}{7} \right)} \right\}. \quad (41)$$

Полагаем опять:

$$\left. \begin{aligned} C &= C_{11} + C_{21}, \\ C' &= C'_{11} + C'_{21}, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

где C_{11} содержит члены только с g_{11} , C_{21} — только с g_{21} и C'_{11} , C'_{21} объединяют соответственно члены с h_{11} и h_{21} .

После преобразований имеем:

$$C_{11} = 21g_{11}(\cos^2 u_1 - \cos^2 u) \frac{\cos u \cdot \sin u}{7 \cos^2 u_1 - 3}, \quad (43)$$

$$C_{21} = 3g_{21} \sin u (\cos^2 u_1 - \cos^2 u) \times \\ \times \frac{\cos^2 u (5 \cos^2 u_1 - 1) - \cos^2 u_1 + \frac{3}{7}}{3 \cos^4 u_1 - 2 \cos^2 u_1 + \frac{1}{7}}. \quad (44)$$

Вставляя вместо g величины h , получим штрихованные C .

Многочлен D строится по форме (с):

$$D = g_{42} \left(\begin{array}{l} \cos u \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3 \cdot 3}{5} (3 \cos^2 u_1 - 1) \sin^2 u \\ + 5 \left(\cos^2 u_1 - \frac{1}{7} \right) \sin^2 u \end{array} \right\} \\ + \sin u \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2 \cdot 3}{5} (3 \cos^2 u_1 - 1) \cos u \cdot \sin u \\ + 2 \sin u \cos u \left[\cos^2 u - \frac{1}{7} \right] - \\ - 2 \cos u \cdot \sin^3 u \end{array} \right\} \end{array} \right) \quad (45)$$

Преобразования дадут нам:

$$D = -9g_{42} (\cos^2 u_1 - \cos^2 u) \sin^2 u \cos u. \quad (46)$$

Аналогично получается D' из D заменой g на h .

Образуя знаменатель (36), мы видим, что он содержит выражение $\cos^2 u_1 - \cos^2 u$. Этим самым уничтожается всякая неопределённость в критическом члене (35), так как он будет содержать выражение:

$$\frac{\cos u_1 - \cos u}{\cos^2 u_1 - \cos^2 u} = \frac{1}{\cos u_1 + \cos u}, \quad (47)$$

которое будет всегда иметь конечную величину, ибо метод нашего отображения таков, что знаки $\cos u_1$ и $\cos u$ всегда совпадают.

§ 17. Отображение специального образа. Если положить

$$N = (\cos^2 u_1 - \cos^2 u) N_1, \quad (48)$$

то основная формула (VII) примет вид:

$$\rho = \frac{R}{\cos u} \left[\sin u \cdot \cos u_1 - \frac{\sum \frac{\partial Y_n}{\partial u}}{(\cos u_1 + \cos u) N_1} \right]. \quad (49)$$

Мы имеем:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial Y_n}{\partial u} = & g_{10} \sin u \frac{3 \cos^2 u (3 \cos^2 u_1 - 1) - 7 \cos^2 u_1 \left(\cos^2 u_1 - \frac{3}{5} \right)}{7 \cos^4 u_1 - 6 \cos^2 u_1 + \frac{3}{5}} - \\ & - 2g_{20} \sin u \cdot \cos u \times \\ & \cos^2 u_1 \left(9 \cos^2 u_1 - \frac{40}{7} \right) - 2 \cos^2 u (5 \cos^2 u_1 - 3) - \frac{1}{2} \\ & \times \frac{9 \cos^4 u_1 - 10 \cos^2 u_1 + \frac{29}{14}}{14} + \\ & + \cos u \frac{7 \cos^2 u_1 - 9 \cos^2 u + \frac{18}{5}}{7 \cos^2 u_1 - 3} (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) + \\ & + \left| (\cos^2 u - \sin^2 u) \left\{ \begin{array}{l} 9 \cos^2 u_1 \left(\cos^2 u_1 - \frac{3}{7} \right) \\ - \cos^2 u (5 \cos^2 u_1 - 1) \end{array} \right\} \right| \times \\ & \times \frac{g_{21} \cos \lambda + h_{21} \sin \lambda}{3 \left(3 \cos^4 u_1 - 2 \cos^2 u_1 + \frac{1}{7} \right)} + \\ & + \cos u \cdot \sin u \left| \begin{array}{l} 4 \left(\cos^2 u - \frac{4}{7} \right) \\ + \frac{6}{5} (1 - 3 \cos^2 u_1) \end{array} \right| \times \\ & \times (g_{42} \cos 2\lambda + h_{42} \sin 2\lambda). \quad (50) \end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}
 N_1 = & \left[\begin{aligned}
 & 7g_{10} \frac{(3 \cos^2 u_1 - 1) \cos^2 u - \left(\cos^2 u - \frac{3}{5} \right)}{7 \cos^4 u_1 - 6 \cos^2 u_1 + \frac{3}{5}} \\
 & + g_{20} \frac{9 \cos^2 u (5 \cos^2 u_1 - 3) - \left(27 \cos^2 u_1 - \frac{275}{14} \right)}{9 \cos^4 u_1 - 10 \cos^2 u_1 + \frac{29}{14}} \cos u \\
 & + \frac{21 \cos u \cdot \sin u}{7 \cos^2 u_1 - 3} (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) \\
 & + 3 \sin u \frac{\cos^2 u (5 \cos^2 u_1 - 1) - \cos^2 u_1 + \frac{3}{7}}{3 \cos^4 u_1 - 2 \cos^2 u_1 + \frac{1}{7}} \times \\
 & \quad \times (g_{21} \cos \lambda + h_{21} \sin \lambda) \\
 & - 9 \sin^2 u \cos u (g_{42} \cos 2\lambda + h_{42} \sin 2\lambda)
 \end{aligned} \right] \cdot (51)
 \end{aligned}$$

Может показаться, что выражение (49) обращается в бесконечность при $u = \frac{\pi}{2}$. Однако, если привести оба члена выражения для ρ к общему знаменателю, то в числителе появится общий множитель $\cos u$, который сократится с $\cos u$ в знаменателе. Поэтому мы получим:

$$\rho = R \frac{P}{(\cos u_1 + \cos u) N_1}, \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned}
 P = & [1, 0] g_{10} + [2, 0] g_{20} + [1, 1] (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) + \\
 & + [2, 1] (g_{21} \cos \lambda + h_{21} \sin \lambda) + \\
 & + [4, 2] (g_{42} \cos 2\lambda + h_{42} \sin 2\lambda) \quad (53)
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 [1, 0] = & \frac{7 \sin u}{7 \cos^4 u_1 - 6 \cos^2 u_1 + \frac{3}{5}} \left\{ (3 \cos^2 u_1 - 1) \times \right. \\
 & \times [(\cos u_1 + \cos u) \cos u_1 - 3] \cos u - \\
 & \left. + \left(\cos^2 u_1 - \frac{3}{5} \right) \cos u_1 \right\}, \quad (54)
 \end{aligned}$$

$$[2, 0] = \left| \begin{array}{l} \cos^2 u (5 \cos^2 u_1 - 3) [9 \cos u_1 (\cos u_1 + \cos u) - 4] \\ - \left(27 \cos^2 u_1 - \frac{275}{14} \right) (\cos u_1 + \cos u) \cos u_1 \\ - 1 + 2 \cos^2 u_1 \left(9 \cos^2 u_1 - \frac{40}{7} \right) \end{array} \right| \times$$

$$\times \frac{\sin u}{9 \cos^4 u_1 - 10 \cos^2 u_1 + \frac{29}{14}}, \quad (55)$$

$$[1, 1] = \frac{1}{7 \cos^2 u_1 - 3} \times$$

$$\times \left[21 \cos u_1 \sin^2 u (\cos u + \cos u_1) - \right.$$

$$\left. - \left(7 \cos^2 u_1 - 9 \cos^2 u + \frac{18}{5} \right) \right], \quad (56)$$

$$[2, 1] = \left| \begin{array}{l} \cos u (5 \cos^2 u_1 - 1) \times \\ \times [9 \cos u_1 \sin^2 u (\cos u_1 + \cos u) + \\ + 4 \cos^2 u - 3] - 9 \cos u_1 \left(\cos^2 u_1 - \frac{3}{7} \right) \times \\ \times (\cos u_1 \cos u + \sin^2 u) \end{array} \right| \times$$

$$\times \frac{1}{3 \left(3 \cos^4 u_1 - 2 \cos^2 u_1 + \frac{1}{7} \right)}, \quad (57)$$

$$[4, 2] = -\sin u \left| \begin{array}{l} 9 \sin^2 u \cos u_1 (\cos u_1 + \cos u) \\ + 4 \left(\cos^2 u - \frac{4}{7} \right) \\ + \frac{6}{5} (1 - 3 \cos^2 u_1) \end{array} \right|. \quad (58)$$

Легко видеть, что точки поверхности шара, соответствующие значениям $u < \frac{\pi}{2}$, отображаются на плоскость $u_1 < \frac{\pi}{2}$; точки, соответствующие $u > \frac{\pi}{2}$, отображаются на плоскость $\pi - u_1$. Из этого следует, что в приведённых соотношениях знаки $\cos u$ и $\cos u_1$ всегда совпадают.

Примечание. Значение членов с коэффициентами g_{11} , h_{11} , g_{21} , h_{21} . Найдём отображение полюсов шара на критические плоскости u_1 и $\pi - u_1$.

В случае, когда $g_{11} = h_{11} = g_{21} = h_{21} = 0$, для $u = 0^\circ, 180^\circ$ имеем: $P = 0$, а следовательно, и $\rho = 0$. Это означает, что полюсы отображаются на точки, получающиеся пересечением критических плоскостей осью шара. Но если условия, указанные выше, не имеют места, то для $u = 0^\circ, 180^\circ$ получим в числителе линейную функцию $\cos \lambda$ и $\sin \lambda$, в знаменателе — постоянную. Тогда отображение записывается следующим образом:

$$\rho = A \cos \lambda + B \sin \lambda$$

или

$$\rho = C \cos (\lambda - \varepsilon).$$

Получился круг с диаметром, равным C , центр которого лежит в проекции меридиана $\lambda = \varepsilon$ и на котором находится точка пересечения критической плоскости с осью шара. Магнитная сила в точке полюса лежит, следовательно, в плоскости меридиана $\lambda = \varepsilon$ и пересекает критическую плоскость в конце диаметра на расстоянии C от оси шара. Эти два случая мы будем называть соответственно центрическим и эксцентрическим распределением. Последнее означает деформацию первого.

§ 18. Остаточные распределения. Пусть Γ и H с индексами — коэффициенты данного распределения; g и h с индексами — коэффициенты первого образа, содержащегося в распределении; γ и χ с индексами — коэффициенты остаточного распределения. Определим его следующим образом. Обозначим через Y_n, Y'_n, Y''_n функции Y_n , принадлежащие трём вышеуказанным распределениям; через V, W_1, W_2 — соответствующие им потенциалы (12). Положим:

$$V = W_1 + W_2 \quad (59)$$

или

$$W_1 = V - W_2.$$

Так как это соотношение должно быть справедливо для любого r , то мы приходим к выводу, что

$$Y'_n = Y_n - Y''_n.$$

Так как это уравнение должно удовлетворяться при любом λ , то мы имеем:

$$\begin{aligned} g_{nm} A_{nm} &= \Gamma_{nm} A_{nm} - \gamma_{nm} A_{nm}, \\ h_{nm} A_{nm} &= H_{nm} A_{nm} - \chi_{nm} A_{nm}, \end{aligned}$$

где A_{nm} есть функция, определяемая выражением (14). Отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} g_{nm} &= \Gamma_{nm} - \gamma_{nm}, \\ h_{nm} &= H_{nm} - \chi_{nm}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

§ 19. Определение коэффициентов специального образа и остаточного распределения. После того как мы выяснили зависимость трёх распределений — данного, первого образа и остаточного, необходимо перейти к вопросу о методе определения этих коэффициентов.

В целях удобства придадим условиям (34) общий вид:

$$\left. \begin{aligned} g_{an} &\text{ произвольно,} \\ g_{bn} &= U_{an} g_{an}, \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

где U_{an} — данная функция критического угла u_1 .

Поэтому уравнения (60) перепишем в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} g_{an} &= \Gamma_{an} - \gamma_{an}, \\ g_{bn} &= \Gamma_{bn} - \gamma_{bn}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Вставляя значение g_{bn} из (61), получим:

$$\left. \begin{aligned} g_{an} &= \Gamma_{an} - \gamma_{an}, \\ U_{an} g_{an} &= \Gamma_{bn} - \gamma_{bn}, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

откуда

$$U_{an} \Gamma_{an} - \Gamma_{bn} = U_{an} \gamma_{an} - \gamma_{bn}. \quad (64)$$

Если принять γ_{an} за абсциссу, γ_{bn} — за ординату прямоугольной системы координат, то выражение (64) можно рассматривать как уравнение прямой. Если бы наш образ точно соответствовал распределению, то эта прямая проходила бы через начало координат. Так как это не имеет места, то расстояние этой прямой до начала координат указывает на малейшее отклонение образа от данного распределения. Следовательно, искомые коэффициенты γ_{an} и γ_{bn} находятся как проекции перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую. Поэтому мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{an} &= \frac{U_{an}\Gamma_{an} - \Gamma_{bn}}{1 + U_{an}^2} U_{an}, \\ \gamma_{bn} &= -\frac{U_{an}\Gamma_{an} - \Gamma_{bn}}{1 + U_{an}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

И, значит, из (63) получаем:

$$g_{an} = \frac{\Gamma_{an} + \Gamma_{bn}U_{an}}{1 + U_{an}^2}. \quad (66)$$

Такое же значение мы получаем при отыскании минимума выражения

$$\gamma_{an}^2 + \gamma_{bn}^2,$$

т. е. выражения

$$(\Gamma_{an} - g_{an})^2 + (\Gamma_{bn} - U_{an}g_{an})^2.$$

Действительно, приравнивая первую частную производную по g_{an} нулю, получим:

$$\Gamma_{an} - g_{an} + (\Gamma_{bn} - U_{an}g_{an}) U_{an} = 0,$$

откуда получается приведенное выше выражение (66).

Применяя соотношение (66) и (61) к коэффициентам (34) первого образа, придём к следующим выражениям:

$$\left. \begin{aligned}
 g_{10} &= \frac{\Gamma_{10} + \Gamma_{30}U_{10}}{1 + U_{10}^2}, & g_{30} &= U_{10} g_{10}, \\
 g_{20} &= \frac{\Gamma_{20} + \Gamma_{40}U_{20}}{1 + U_{20}^2}, & g_{40} &= U_{20} g_{20}, \\
 g_{11} &= \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{31}U_{11}}{1 + U_{11}^2}, & g_{31} &= U_{11} g_{11}, \\
 h_{11} &= \frac{H_{11} + H_{31}U_{11}}{1 + U_{11}^2}, & h_{31} &= U_{11} h_{11}, \\
 g_{21} &= \frac{\Gamma_{21} + \Gamma_{41}U_{21}}{1 + U_{21}^2}, & g_{41} &= U_{21} g_{21}, \\
 h_{21} &= \frac{H_{21} + H_{41}U_{21}}{1 + U_{21}^2}, & h_{41} &= U_{21} h_{21}, \\
 g_{42} &= \frac{\Gamma_{42} + \Gamma_{22}U_{42}}{1 + U_{42}^2}, & g_{22} &= U_{42} g_{42}, \\
 h_{42} &= \frac{H_{42} + H_{22}U_{42}}{1 + U_{42}^2}, & h_{22} &= U_{42} h_{42}.
 \end{aligned} \right\} (67)$$

§ 20. Обнаружение специального образа данного распределения. Нахождение специального образа данного распределения равносильно отысканию его критических плоскостей. В качестве руководства укажем на необходимость подробного изучения коэффициентов остаточного образа. Согласно (65) они имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned}
 \Upsilon_{30} &= -\frac{U_{10}\Gamma_{10} - \Gamma_{20}}{1 + U_{10}^2}, & \Upsilon_{10} &= -\Upsilon_{30} U_{10}, \\
 \Upsilon_{40} &= -\frac{U_{20}\Gamma_{20} - \Gamma_{40}}{1 + U_{20}^2}, & \Upsilon_{20} &= -\Upsilon_{40} U_{20}, \\
 \Upsilon_{31} &= -\frac{U_{11}\Gamma_{11} - H_{31}}{1 + U_{11}^2}, & \Upsilon_{11} &= -\Upsilon_{31} U_{11}, \\
 \Upsilon_{31} &= -\frac{U_{11}H_{11} - \Gamma_{31}}{1 + U_{11}^2}, & \Upsilon_{11} &= -\Upsilon_{31} U_{11}, \\
 \Upsilon_{41} &= -\frac{U_{21}\Gamma_{21} - \Gamma_{41}}{1 + U_{21}^2}, & \Upsilon_{21} &= -\Upsilon_{41} U_{21}, \\
 \Upsilon_{41} &= -\frac{U_{21}H_{21} - H_{41}}{1 + U_{21}^2}, & \Upsilon_{21} &= -\Upsilon_{41} U_{21}, \\
 \Upsilon_{22} &= -\frac{U_{42}\Gamma_{42} - \Gamma_{22}}{1 + U_{42}^2}, & \Upsilon_{42} &= -\Upsilon_{22} U_{42}, \\
 \Upsilon_{22} &= -\frac{U_{42}H_{42} - H_{22}}{1 + U_{42}^2}, & \Upsilon_{42} &= -\Upsilon_{22} U_{42}.
 \end{aligned} \right\} (68)$$

Если бы данное распределение содержало специальный образ в «чистом» виде, то эти коэффициенты равнялись бы нулю. При этом получаются восемь уравнений вида:

$$U_{an}\Gamma_{an} - \Gamma_{bn} = 0, \quad (\text{VIII})$$

решения которых давали бы одни и те же значения неизвестной x , определяющей положение критических плоскостей. Однако, это не будет иметь места, так как данное распределение может представлять деформированный специальный образ. Таким образом, решения уравнений (VIII) приведут к различным значениям величины x . Если эти значения будут сильно отличаться друг от друга, то тогда нельзя говорить о специальном образе. Но если из нескольких уравнений получаются мало отличные друг от друга значения x , то такой результат приводит нас к заключению, что в данном распределении скрыт специальный образ, у которого число коэффициентов вдвое больше числа найденных значений x . Характеристическое значение x , которое должно лежать между найденными, можно вычислить как среднее значение или определить из других соображений. Мы применим этот метод к исследованию явлений земного магнетизма.

Оставшиеся коэффициенты будут отнесены, как это будет показано дальше, к другим образам.

После того как с помощью указанного метода определены критические плоскости специального распределения, возможно восстановить это распределение. А именно, его коэффициенты находят из тех соотношений формулы (65), которые соответствуют уравнениям, определяющим близкие значения x . Но в эти соотношения необходимо вставить то значение x , которое отвечает специальному распределению. Это распределение может быть представлено с помощью приведённых выше формул. Кроме того, возможно произвести отображение с помощью тех значений Γ и H , которые приводят к близким значениям x . Для этого мы можем воспользоваться тем же методом отображения, так как откло-

нения от истинного отображения, к которому он приводит, будут относиться только к точкам, лежащим на поверхности шара вблизи критической параллели. Такое отображение может вскрыть причины деформации образа.

§ 21. Потенциал специального образа. Для нашего случая из уравнений (18), учитывая значения функций A_{nm} и (65), получаем:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= g_{10} \cos u + (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) \sin u, \\ Y_2 &= g_{20} \left(\cos^2 u - \frac{1}{3} \right) + \\ &\quad + (g_{21} \cos \lambda + h_{21} \sin \lambda) \cos u \cdot \sin u + \\ &\quad + U_{42} (g_{42} \cos 2\lambda + h_{42} \sin 2\lambda) \sin^2 u, \\ Y_3 &= g_{10} U_{10} \left(\cos^2 u - \frac{3}{5} \right) \cos u + \\ &\quad + U_{11} (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) \left(\cos^2 u - \frac{1}{5} \right) \sin u, \\ Y_4 &= g_{20} U_{20} \left(\cos^4 u - \frac{6}{7} \cos^2 u + \frac{1}{14} \right) + \\ &\quad + U_{21} (g_{21} \cos \lambda + h_{21} \sin \lambda) \left(\cos^2 u - \frac{3}{7} \right) \sin u \cdot \cos u + \\ &\quad + (g_{42} \cos 2\lambda + h_{42} \sin 2\lambda) \left(\cos^2 u - \frac{1}{7} \right) \sin^2 u. \end{aligned} \right\} (69)$$

С помощью этих значений мы можем образовать потенциал образа согласно уравнению (12). Потенциал на поверхности шара станет равным:

$$\begin{aligned} \overline{W}_R^1 &= g_{10} \cos u \left(U_{10} \cos^2 u - \frac{3}{5} U_{10} + 1 \right) + \\ &\quad + g_{20} \left[U_{20} \cos^4 u + \left(1 - \frac{6}{7} U_{20} \right) \cos^2 u + \frac{U_{20}}{14} - \frac{1}{3} \right] + \\ &\quad + (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) \sin u \left(U_{11} \cos^2 u + 1 - \frac{U_{11}}{5} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (g_{21} \cos \lambda + h_{21} \sin \lambda) \cos u \cdot \sin u \times \\
& \times \left(U_{21} \cos^2 u + 1 - \frac{3}{7} U_{21} \right) + \\
& + (g_{42} \cos 2\lambda + h_{42} \sin 2\lambda) \sin^2 u \times \\
& \times \left(\cos^2 u - \frac{1}{7} + U_{42} \right). \quad (70)
\end{aligned}$$

§ 22. Критические плоскости первого образа совпадают с критическими плоскостями равномерно намагниченного шара. В этом случае необходимо положить:

$$\cos u_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{или} \quad x_c = \frac{1}{3}. \quad (71)$$

Тогда из (34) мы получаем:

$$U_{10} = 0; \quad U_{20} = -\frac{56}{11}, \quad U_{11} = \frac{9}{2}, \quad U_{21} = \frac{7}{6}, \quad U_{42} = 0, \quad (72)$$

и поэтому

$$g_{10}, g_{20}, g_{11}, h_{11}, g_{21}, h_{21}, g_{42}, h_{42} \text{ произвольны (72*)}$$

и

$$g_{40} = -\frac{56}{11} g_{20}; \quad \left. \begin{array}{l} g_{31} \\ \text{или} \\ h_{31} \end{array} \right\} = \frac{9}{2} \left\{ \begin{array}{l} g_{11} \\ \text{или} \\ h_{11}; \end{array} \right. \quad (73)$$

$$\left. \begin{array}{l} g_{41} \\ \text{или} \\ h_{41} \end{array} \right\} = \frac{7}{6} \left\{ \begin{array}{l} g_{21} \\ \text{или} \\ h_{21}; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} g_{22} = 0; \\ h_{22} = 0. \end{array}$$

Коэффициенты (72*) находятся из коэффициентов данного распределения с помощью формул (67), учитывая значения (72).

Таким образом, для этого образа имеем:

$$\left. \begin{aligned} Y_0 &= 0; \quad Y_1 = g_{10} \cos u + (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) \sin u, \\ Y_2 &= g_{20} \left(\cos^2 u - \frac{1}{3} \right) + \\ &\quad + (g_{21} \cos \lambda + h_{21} \sin \lambda) \cos u \cdot \sin u, \\ Y_3 &= \frac{9}{2} (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) \left(\cos^2 u - \frac{1}{5} \right) \sin u, \\ Y_4 &= -\frac{56}{11} g_{20} \left(\cos^4 u - \frac{6}{7} \cos^2 u + \frac{1}{14} \right) + \\ &\quad + \frac{7}{6} (g_{21} \cos \lambda + h_{21} \sin \lambda) \left(\cos^2 u - \frac{3}{7} \right) \sin u \cdot \cos u + \\ &\quad + (g_{42} \cos 2\lambda + h_{42} \sin 2\lambda) \left(\cos^2 u - \frac{1}{7} \right) \sin^2 u. \end{aligned} \right\} (74)$$

Обозначим через \bar{V} потенциал данного распределения для точек, лежащих на поверхности шара.

Согласно (12) имеем:

$$\frac{\bar{V}}{R} = \sum Y_n, \quad (75)$$

и на основании уравнений (74)

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}}{R} &= g_{10} \cos u - g_{20} \left(\frac{56}{11} \cos^4 u - \frac{59}{11} \cos^2 u + \frac{23}{33} \right) + \\ &\quad + (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) \left(\frac{9}{2} \cos^2 u + \frac{1}{10} \right) \sin u + \\ &\quad + (g_{21} \cos \lambda + h_{21} \sin \lambda) \left(\frac{7}{6} \cos^2 u + \frac{1}{2} \right) \sin u \cdot \cos u + \\ &\quad + (g_{42} \cos 2\lambda + h_{42} \sin 2\lambda) \left(\cos^2 u - \frac{1}{7} \right) \sin^2 u. \end{aligned} \quad (76)$$

Это выражение содержит восемь коэффициентов, значения которых необходимо определить.

§ 23. Общие или остаточные образы. К общим образам относятся те, которые описываются критическими плоскостями, найденными из законов разложения в ряды.

К ним принадлежат также члены остаточного распределения.

Общие образы содержат один или несколько членов. Согласно главе III имеем:

1) Члены, содержащие γ_{10} и γ_{42} , образуют самостоятельный образ равномерного намагничивания;

$$\cos u_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

2) Самостоятельный образ с единственным членом γ_{30} и четырьмя критическими плоскостями, которые определяются широтами:

$$\varphi'_{30} = \pm 59^\circ 26' 40'',$$

$$\varphi''_{30} = \pm 19^\circ 52' 30''.$$

Самостоятельный образ с коэффициентами g_{42} , h_{42} и двумя критическими плоскостями, которые определяются широтами:

$$\varphi = \pm 22^\circ 12' 30''.$$

3) Составной образ с тремя критическими плоскостями: плоскость экватора и две полярные плоскости. Коэффициенты:

$$\gamma_{11}, \chi_{11}, \gamma_{31}, \chi_{31}, \gamma_{22}, \chi_{22}, \gamma_{33}, \chi_{33}, \gamma_{44}, \chi_{44}.$$

4) Составной образ, имеющий одну критическую плоскость — плоскость экватора. Сюда относятся члены с коэффициентами γ_{20} и γ_{40} .

5) Составной образ с двумя полярными плоскостями в качестве критических. Коэффициенты:

$$\gamma_{21}, \chi_{21}, \gamma_{41}, \chi_{41}, \gamma_{32}, \chi_{32}, \gamma_{43}, \chi_{43}.$$

Примечание. Члены γ_{43} и χ_{43} могут составить самостоятельный образ с двумя критическими плоскостями $\varphi_{43} = \pm 19^\circ 28' 20''$, который очень близок одному из образов 2).

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

Глава V. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ К ЯВЛЕНИЯМ
ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА

§ 24. Коэффициенты гауссовского потенциала для 1885 г. были вычислены Неймаером и Петерсоном. Для отображения распределения, как показывают наши основные формулы, знаки коэффициентов не играют роли. Знаки коэффициентов берутся так, чтобы составляющие магнитной силы земли, определяемые по формулам (15), имели бы заранее (§ 7) предусмотренный знак. Для удобства подсчёта формул отображения все коэффициенты будем брать с противоположными знаками. Тогда мы получим:

Таблица IV

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
Γ_{n0}	+0,315720	+0,007906	-0,024363	-0,034395
Γ_{n1}	+0,024814	-0,049798	+0,039560	-0,030597
Γ_{n2}		-0,005667	-0,027857	-0,019754
Γ_{n3}			-0,003270	+0,006842
Γ_{n4}				-0,000849
H_{n1}	-0,060258	+0,012999	+0,007383	-0,011877
H_{n2}		-0,012604	-0,000443	+0,007147
H_{n3}			-0,005492	+0,005121
H_{n4}				+0,000968

§ 25. Обнаружение специального образа. Перейдём теперь к исследованию специального образа. Рассуждения главы II приводят к выводу, что в земном магнетизме заложен специальный образ с критическими плоскостями $x_c = \frac{1}{3}$. Обратимся теперь к проверке

этого вывода методом, указанным в § 20. На основании формул (68), полагая γ и χ равными нулю, получим следующие уравнения:

$$U_{10} \frac{\Gamma_{10}}{\Gamma_{30}} - 1 = 0; \quad U_{20} \frac{\Gamma_{20}}{\Gamma_{40}} - 1 = 0; \quad (77)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{11} \frac{\Gamma_{11}}{\Gamma_{31}} - 1 = 0; \quad U_{21} \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{41}} - 1 = 0; \\ U_{11} \frac{H_{11}}{H_{31}} - 1 = 0; \quad U_{21} \frac{H_{21}}{H_{41}} - 1 = 0; \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{42} \frac{\Gamma_{42}}{\Gamma_{22}} - 1 = 0; \\ U_{42} \frac{H_{42}}{H_{22}} - 1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Беря здесь значения U из формул (34) и Γ и H из таблицы IV, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{3x-1}{7x^2-6x+\frac{3}{5}} \cdot 12,96 - 1 = 0; \\ \frac{5x-3}{9x^2-10x+\frac{29}{14}} \cdot 0,2299 - 1 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Первое уравнение будет:

$$x^2 - 6,4114x + 1,9371 = 0,$$

откуда

$$x = 3,2057 \pm 2,8878.$$

Так как x меньше единицы, то получится только один корень:

$$x = 0,3179 = \frac{1}{3} - 0,0154.$$

Помня, что $x = \cos^2 u_1$, получим для $u_1 < \pi$:

$$u_1^{(10)} = 55^\circ 40' 50''$$

вместо $u_c = 54^\circ 44' 8''$, 2. Разница равна $+ 0^\circ 56' 41''$, 8.

Второе из уравнений (80) примет вид:

$$x^2 - 1,2388x + 0,3068 = 0;$$

отсюда следует:

$$x = 0,6194 \pm 0,2774.$$

Справедливо только одно значение x :

$$x = 0,34198 = \frac{1}{3} + 0,00865.$$

Тогда получаем:

$$u_1^{(20)} = 54^\circ 12' 40''.$$

Отклонение этого значения от u_c равно $-0^\circ 31' 28'', 2$.

То-есть существует деформированный образ $x = \frac{1}{3}$ с коэффициентами Γ_{10} , Γ_{20} , Γ_{30} , Γ_{40} .

Недеформированные коэффициенты g_{n0} находятся из этих с помощью формул (67).

Если мы ограничимся коэффициентами Γ_{n0} , то мы придём к распределению, идентичному тому, которое профессор Лейст назвал нормальным геомагнетизмом. К такому распределению приводит подсчёт средних значений магнитного потенциала земли по широтам.

Первая пара уравнений (78) примет вид:

$$\frac{3}{7x-3} \cdot 0,6273 + 1 = 0;$$

$$\frac{3}{7x'-3} \cdot 8,1617 - 1 = 0.$$

Эти уравнения приводят к значениям:

$$x = 0,15975, \text{ откуда } u_1^{(11)} = 66^\circ 26' 30'';$$

$$x' = 3,9264 \text{ невозможно.}$$

Вторая пара уравнений (78) запишется:

$$\frac{5x-1}{3\left(3x^2-2x+\frac{1}{7}\right)} \cdot 1,6089 + 1 = 0,$$

$$\frac{5x-1}{3\left(3x^2-2x+\frac{1}{7}\right)} \cdot 1,0945 - 1 = 0,$$

отсюда получаем следующие возможные значения:

$$x = 0,2660, \text{ откуда } u_1^{(21)} = 58^\circ 57' 10'',$$

$$x = 0,1506, \text{ откуда } u_1^{(21)} = 67^\circ 9' 50''.$$

Разница между u_1 и u_c в группе (78) чересчур велика, чтобы коэффициенты Γ_{11} , H_{11} , Γ_{21} , H_{21} можно было рассматривать только с точки зрения деформации специального образа. Та часть этих коэффициентов, которая вызвана такой деформацией, должна соответствовать значениям g_{11} , h_{11} , g_{21} , h_{21} , вычисленным на основании формул (67). Найденные таким путём коэффициенты согласно примечанию к § 18 относятся к эксцентрическому распределению. Это является лишним поводом к тому, чтобы соответствующие члены не включать в недеформированное распределение.

После подстановки значений Γ и H уравнения (79) дадут:

$$(3x - 1) + \frac{5}{3} \cdot 0,28688 = 0,$$

$$(3x' - 1) - \frac{5}{3} \cdot 1,7636 = 0,$$

откуда

$$x = 0,17396 \text{ и } u^{(42)} = 65^\circ 20' 50'',$$

$$x = 1,3131 \text{ невозможно.}$$

Это значит, что пары Γ_{42} , Γ_{22} и H_{42} , H_{22} не могут одновременно содержаться в деформированном специальном распределении. Но такое распределение может включать пару Γ_{42} , H_{42} , ибо уравнения (79) удовлетворяются значениями $x = \frac{1}{3}$ и $H_{22} = \Gamma_{22} = 0$ при любом Γ_{42} и H_{42} . Деформация обуславливает в этом члене не положение критической плоскости, а значения коэффициентов, которые являются совершенно произвольными.

Таким образом, мы приходим к следующим выводам: земной магнетизм содержит специальный образ, при этом

а) центрическая форма этого образа определяется коэффициентами

$$\Gamma_{10}, g_{20}, g_{40};$$

б) эксцентрическая форма образа включает коэффициенты

$$\Gamma_{10}, \Gamma_{20}, \Gamma_{30}, \Gamma_{40}, g_{11}, h_{11}, g_{21}, h_{21}, \Gamma_{42}, H_{42}.$$

Коэффициент Γ_{10} относится к центрическому образу, ибо подстановка значений $x = \frac{1}{3}$ обращает функцию U_{10} в нуль, откуда затем получаются значения $g_{10} = \Gamma_{10}$, $g_{30} = 0$.

§ 26. Отображение центрического специального образа. Это отображение дается соотношением (52), где

$$P = [1, 0] g_{10} + [2, 0] g_{20} \quad (81)$$

и

$$N_1 = \left\{ \begin{array}{l} 7g_{10} \frac{(3 \cos^2 u_1 - 1) \cos^2 u - \left(\cos^2 u_1 - \frac{3}{5}\right)}{7 \cos^4 u_1 - 6 \cos^2 u + \frac{3}{5}} + \\ + g_{20} \frac{9 \cos^2 u (5 \cos^2 u_1 - 3) - \left(27 \cos^2 u_1 - \frac{275}{14}\right)}{9 \cos^4 u_1 - 10 \cos^2 u_1 + \frac{29}{14}} \cos u \end{array} \right\} \cdot (82)$$

Так как для нашего образа $x_c = \frac{1}{3}$, то согласно (72) имеем:

$$U_{10} = 0, \quad U_{20} = -\frac{56}{11}. \quad (83)$$

Беря за основу значения таблицы IV, получим из уравнений (67):

$$\left. \begin{aligned} g_{10} &= 0,315720 = \Gamma_{10}, \\ g_{20} &= 0,006799. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Теперь необходимо записать формулы отображения для северного и южного полушарий. С этой целью следует более детально ознакомиться с символами, встречающимися у P (81).

Символ $[1, 0]$ (54) меняет свой знак при переходе из северного полушария в южное. Символ $[2, 0]$ (55) при этом не меняет своего знака.

Поэтому, если под $\cos u$ и $\cos u_1$ понимать только их абсолютные значения и положить $\cos u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, то мы приходим к выражениям, которые могут содержать два знака. В этом случае верхний знак относится к северному полушарию, нижний — к южному.

$$[1, 0] = \mp \sin u \cdot \sqrt{3}, \quad (85)$$

$$[2, 0] = -\frac{2}{11} \sin u \left[112 \cos^2 u + 84 (1 + \sqrt{3} \cos u) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{149}{168} - \cos^2 u \right) - 59 \right]. \quad (86)$$

В выражении для N_1 знак меняет только последний член. Поэтому имеем:

$$N_1 = -3 \left[g_{10} \pm g_{20} \cdot \frac{168}{11} \left(\frac{149}{168} - \cos^2 u \right) \cos u \right]. \quad (87)$$

Смысл входящих сюда величин $\cos u$ и $\sin u$ соответствует отсчёту угла u в северном полушарии от северного полюса, а в южном полушарии — от южного.

Основная формула (52) отображения

$$\rho = R \frac{P}{(\cos u_1 + \cos u) N_1} \quad (88)$$

содержит выражение $\cos u_1 + \cos u$, которое также меняет свой знак при переходе из северного полушария в юж-

ное. Поэтому только первый член знаменателя изменяет свой знак. Тогда мы можем записать формулу отображения для обоих полушарий в следующем виде:

$$\rho = \frac{R}{\psi} \cdot \frac{\pm a_{10} + a_{20}}{\pm g_{10} + b_{20}}, \quad (89)$$

где верхний знак относится к северному полушарию, а нижний — к южному; при этом

$$a_{10} = g_{10} \cdot \sin u \cdot \sqrt{3}; \quad (90)$$

$$a_{20} = \frac{2}{11} g_{20} \cdot \sin u \left[112 \cos^2 u + \right. \\ \left. + \frac{84}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} + 3 \cos u) \left(\frac{149}{168} - \cos^2 u \right) - 59 \right]; \quad (91)$$

$$b_{20} = g_{20} \frac{168}{11} \left(\frac{149}{168} - \cos^2 u \right) \cos u; \quad (92)$$

$$\psi = \sqrt{3} + 3 \cos u. \quad (93)$$

Таблица V содержит значения величин (90) — (93) для различных углов u . Параллели отображаются на окружности, радиусы которых вычислены согласно (89) для северного и южного полушарий и приведены в таблице VI. Кроме этого таблица VI содержит средние значения радиусов соответствующих параллелей обоих полушарий. Сравнение этих средних значений с радиусами изображения параллелей (в случае равномерно намагниченного шара) приводит нас к следующему выводу:

Основной образ магнитного распределения Земли обладает теми же критическими плоскостями, что и равномерно намагниченный шар, причём отображение равномерного намагничивания равносильно среднему арифметическому из северного и южного отображений основного образа.

§ 27. Отображение деформированного специального образа. Этот образ составлен из членов, имеющих своими критическими плоскостями плоскости u_c , $\pi - u_c$, где $u_c = 54^\circ 44' 8''$, 2, или близкие к последним,

Таблица V

u	a_{10} g_{10}	a_{20} b_{20}	$\lg \psi$
0°	0 0,31572	0 -0,01175	0,6750539
10°	0,09496 0,31572	0,00875 -0,00848	0,6708486
20°	0,18703 0,31572	0,01724 0,00038	0,6581259
30°	0,27342 0,31572	0,03323 0,01232	0,6365007
40°	0,35151 0,31572	0,05196 0,02280	0,6053158
50°	0,41889 0,31572	0,07708 0,03163	0,5635423
u_c	0,44656 0,31572	0,07202 0,03320	0,5395906
60°	0,47424 0,31572	0,07370 0,03307	0,5094848
70°	0,51386 0,31572	0,05332 0,02723	0,4406116
80°	0,53854 0,31572	0,04697 0,01545	0,3527419
90°	0,54684 0,31572	0,01917 0	0,2385606

Эти члены определяются следующими коэффициентами (см. § 25):

1) Члены с критическими плоскостями

$$u_1^{(10)}, \pi - u_1^{(10)}, \text{ причём } u_1^{(10)} = 55^\circ 40' 50'';$$

они содержат коэффициенты Γ_{10} и Γ_{30} .

Таблица VI

Значения ρ для центрального основного распределения

μ	0°	20°	30°	40°	50°	μ_c	60°	70°	80°	90°
Северное полушарие . .	0	14,199	21,588	29,574	39,086	42,904	48,617	59,962	78,477	103,505
Южное полушарие . .	0	11,830	18,283	25,375	32,869	38,270	43,844	57,880	72,666	96,494
Среднее значение . .	0	13,014	19,935	27,474	35,977	40,587	46,230	58,921	75,571	100,0
Равномерно намагничен- ный шар . . .	0	13,0	20,0	27,6	36,2	40,825	46,4	59,2	75,8	100,0

2) Члены с критическими плоскостями

$$u_1^{(20)}, \pi - u_1^{(20)}, \text{ причём } u_1^{(20)} = 54^\circ 12' 40'';$$

содержат коэффициенты Γ_{20} и Γ_{40} .

3) Согласно § 25 члены с критическими плоскостями

$$u_c, \pi - u_c$$

содержат:

во-первых, коэффициенты Γ_{42} и H_{22} . При этом получается:

$$\Gamma_{42} \cos 2\lambda + H_{42} \sin 2\lambda = E_{42} \sin (2\lambda - 70^\circ 6' 40''),$$

и

$$\lg E_{42} = 0,3223620 - 2;$$

во-вторых, коэффициенты g_{11} , h_{11} , g_{31} , h_{31} , которые согласно (72) связаны переходной формулой

$$U_{11} = \frac{9}{2}$$

и вычисляются по формулам (67).

Они весьма близки к коэффициентам

$$\Gamma_{11}, H_{11}, \Gamma_{31}, H_{31}.$$

Получаем:

$$g_{11} = 0,009545; \quad h_{11} = -0,001272;$$

$$g_{31} = \frac{9}{2} g_{11} = 0,042952; \quad h_{31} = \frac{9}{2} h_{11} = -0,005724;$$

или

$$g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda = E_{11} \sin (\lambda + 97^\circ 35' 30''),$$

$$g_{31} \cos \lambda + h_{31} \sin \lambda = E_{31} \sin (\lambda + 97^\circ 35' 30''),$$

$$\lg E_{11} = 0,9835961 - 3,$$

$$\lg E_{31} = 0,6368086 - 2;$$

в-третьих, коэффициенты g_{21} , h_{21} , g_{41} , h_{41} , которые согласно (72) связаны переходной формулой

$$U_{21} = \frac{7}{6}$$

и вычисляются по формулам (67). Они весьма близко совпадают с коэффициентами

$$\Gamma_{21}, H_{21}, \Gamma_{41}, H_{41}.$$

Мы получаем:

$$g_{21} = -0,036209, \quad h_{21} = -0,000363,$$

$$g_{41} = \frac{7}{6} g_{21} = -0,042244, \quad h_{41} = \frac{7}{6} h_{21} = -0,000423,$$

или

$$g_{21} \cos \lambda + h_{21} \sin \lambda = E_{21} \sin (\lambda + 89^{\circ}25'30''),$$

$$g_{41} \cos \lambda + h_{41} \sin \lambda = E_{41} \sin (\lambda + 89^{\circ}25'30'').$$

Так как коэффициенты E_{21} , E_{41} отрицательны, то мы пишем:

$$\lg E_{21}^{(-)} = 0,5588165 - 2;$$

$$\lg E_{41}^{(-)} = 0,6257632 - 2.$$

Все остальные члены принадлежат экваториальной и двум полярным плоскостям, служащим критическими плоскостями, и не могут вследствие этого принадлежать определяемому образу.

Ввиду того, что этот образ не обладает единообразными критическими плоскостями, мы не можем воспользоваться формулой (VII) для его отображения. Вместо неё мы возьмём общую формулу (II'). Чтобы воспользоваться ею, необходимо подсчитать выражения:

$$Z = \sum (n+1) Y_n, \quad X = - \sum \frac{\partial Y_n}{\partial u}$$

для разных значений u и λ , учитывая при этом приведённые выше коэффициенты. Для этой цели служат таблицы VII, VIII и IX. К этим таблицам необходимо сделать следующие замечания.

Если перед какой-либо величиной или рядом стоит знак \pm , то это значит, что для северного полушария необходимо прибавлять эту величину, для южного —

вычитать. Что касается знака самой величины, то он указан в вертикальных рядах перед самой величиной. Если же в таблице приводится не сама величина, а её логарифм, то знак логарифмируемого числа заключён в скобки и стоит перед логарифмом или над ним. Если знак не указан вообще, то величина считается всегда положительной.

С помощью этих таблиц составлены значения для $100X$ и $100Z$, которые приводятся в таблицах X и XI. Затем вычислены значения ρ по формуле (II')

$$\rho = R \frac{(X \cos u + Z \sin u) \cos u_1 - X}{Z \cos u - X \sin u}$$

и сведены в таблицу XII.

Отображение полюсов находят, вставляя в формулу (II') для северного полюса значение $\cos u = 1$, для южного $\cos u = -1$, а также $\sin u = 0$. Тогда в силу того, что

$$\cos u_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}},$$

для северного полюса

$$\rho^N = -R \frac{X}{Z} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right);$$

для южного полюса

$$\rho^S = R \frac{X}{Z} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

По нашим таблицам находим:

$$Z^N = 0,57844, \quad Z^S = -0,60644.$$

$$X = - \left\{ \begin{array}{l} \pm \left(E_{11} + \frac{4}{5} E_{31} \right) \sin (\lambda + 97^\circ 35' 30'') \\ + \left(E_{21} + \frac{4}{7} E_{41} \right) \sin (\lambda + 89^\circ 25' 30''). \end{array} \right\}$$

Индекс N и верхний знак относятся к северному полюсу, индекс S и нижний знак — к южному.

Мы имеем:

$$E_{11} + \frac{4}{5} E_{31} = 0,01113;$$

$$E_{21} + \frac{4}{7} E_{41} = -0,03723;$$

и, наконец, в миллиметрах:

$$\rho^N = -\{0,13474 \sin \lambda + 1,91409 \cos \lambda\} = -A \cos (\lambda - \theta_1),$$

$$\rho^S = -0,07644 \sin \lambda + 3,36349 \cos \lambda = B \cos (\lambda + \theta_2),$$

где

$$\theta_1 = 4^\circ 1' 36'',$$

$$\theta_2 = 1^\circ 18' 7'',$$

$$A = 1,9143 \text{ мм};$$

$$B = 3,3642 \text{ мм}.$$

Следовательно, полюсы отображаются на окружности, диаметры которых равны A и B . Положение центров определяется восточной долготой $180^\circ + \theta_1 = 184^\circ 1' 36''$ и западной долготой θ_2 . То-есть это — концевые точки диаметров, выходящих из полюсов, т. е. точки пересечения магнитных сил $\sqrt{X^2 + Z^2}$, действующих в полюсах, с критическими плоскостями. Ввиду незначительности длин диаметров A и B деформация основного распределения приводит к малым противоположным друг другу сдвигам полюсов.

На схеме VI (северное полушарие) и VII (южное полушарие) приводится отображение деформированного основного распределения, составленного на основании таблицы XII. Пунктирные линии соответствуют параллелям, лежащим между полюсами и критической плоскостью; сплошные относятся к тем, которые лежат между критическими плоскостями и плоскостью экватора. Критические параллели тоже отображены.

Из формул (12), (18), (70) и (72) получаем для потенциала деформированного основного распределения на

поверхности шара следующее выражение:

$$\begin{aligned} -\frac{\bar{W}_2}{R} = & \Gamma_{10} \cos u + \Gamma_{20} \left(\cos^2 u - \frac{1}{3} \right) + \\ & + \Gamma_{30} \left(\cos^2 u - \frac{3}{5} \right) \cos u + \Gamma_{40} \left(\cos^4 u - \frac{6}{7} \cos^2 u + \frac{1}{4} \right) + \\ & + E_{11} \sin(\lambda + 97^\circ 35' 30'') \left(\frac{9}{2} \cos^2 u + \frac{1}{10} \right) \cdot \sin u + \\ & + E_{21} \sin(\lambda + 89^\circ 25' 30'') \left(\frac{7}{6} \cos^2 u + \frac{1}{2} \right) \sin u \cdot \cos u + \\ & + E_{42} \sin(2\lambda - 70^\circ 6' 40'') \left(\cos^2 u - \frac{1}{7} \right) \sin^2 u. \end{aligned}$$

§ 28. Симметричное восточно-западное распределение. Указанные в § 23, пункт 2, самостоятельные образы с коэффициентами $\gamma_{30} = \Gamma_{30} - g_{30}$, $\gamma_{42} = \Gamma_{42} - g_{42}$ вырождаются ввиду того, что $g_{30} = \Gamma_{30}$ и $g_{42} = \Gamma_{42}$. Аналогично с образом 4), ибо $\gamma_{20} = \gamma_{40} = 0$. Оставшееся распределение согласно § 23, пункты 3) и 5), можно связать только с двумя образами. Перейдём к построению того из них, критическая плоскость которого совпадает с плоскостью экватора.

В силу условий

$$\gamma_{nm} = \Gamma_{nm} - g_{nm}, \quad \gamma_{nm} = H_{nm} - h_{nm}$$

только некоторые коэффициенты, указанные в § 23, 3), будут иметь отличные от нуля значения, а именно:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} = +0,015269, & \quad \gamma_{11} = -0,058986; \\ \gamma_{31} = -0,003392, & \quad \gamma_{31} = +0,013107, \\ \gamma_{22} = \Gamma_{22} = -0,005667, & \quad \gamma_{22} = H_{22} = -0,012604; \\ \gamma_{33} = \Gamma_{33} = -0,003270, & \quad \gamma_{33} = H_{33} = -0,005492; \\ \gamma_{44} = \Gamma_{44} = -0,000849, & \quad \gamma_{44} = H_{44} = -0,000968. \end{aligned}$$

Потенциал этого распределения на поверхности будет равен:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{W}_{III}}{R} = & (0,015269 \cos \lambda - 0,058986 \sin \lambda) \sin u - \\ & - (0,003392 \cos \lambda - 0,013107 \sin \lambda) \left(\cos^2 u - \frac{1}{5} \right) \sin u - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (0,005667 \cos 2\lambda + 0,012604 \sin 2\lambda) \sin^2 u - \\
& - (0,003270 \cos 3\lambda + 0,005492 \sin 3\lambda) \sin^3 u - \\
& - (0,000849 \cos 4\lambda - 0,000968 \sin 4\lambda) \sin^4 u, \quad (94)
\end{aligned}$$

или сокращённо:

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{W}_{III}}{R} = & [1, 1] \sin u - [3, 1] \left(\cos^2 u - \frac{1}{5} \right) \sin u - \\
& - [2, 2] \sin^2 u - [3, 3] \sin^3 u - [4, 4] \sin^4 u.
\end{aligned}$$

Заметим при этом, что это выражение представляет сумму функций Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 данного распределения. Тогда на основании формул (15) и (16)

$$\begin{aligned}
Z = \sum_1^{\infty} (n+1) Y_n = \\
= \left| \begin{array}{l} 2[1, 1] - 4[3, 1] \left(\cos^2 u - \frac{1}{5} \right) \\ - 3[2, 2] \sin u - 4[3, 3] \sin^2 u \\ - 5[4, 4] \sin^3 u \end{array} \right| \sin u; \quad (95)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X = -\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \bar{W}_{III}}{\partial u} = \\
= - \left| \begin{array}{l} [1, 1] - [3, 1] \left\{ \left(\cos^2 u - \frac{1}{5} \right) - 2 \sin^2 u \right\} \\ - 2[2, 2] \sin u - 3[3, 3] \sin^2 u \\ - 4[4, 4] \sin^3 u \end{array} \right| \cos u; \quad (96)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y = -\frac{1}{R \sin u} \cdot \frac{\partial \bar{W}_{III}}{\partial \lambda} = \\
= \left| \begin{array}{l} (0,015269 \sin \lambda + 0,058986 \cos \lambda) \\ - (0,003392 \sin \lambda + 0,013107 \cos \lambda) \left(\cos^2 u - \frac{1}{5} \right) \\ - 2(0,005667 \sin 2\lambda - 0,012604 \cos 2\lambda) \sin u \\ - 3(0,003270 \sin 3\lambda - 0,005492 \cos 3\lambda) \sin^2 u \\ - 4(0,000849 \cos 4\lambda + 0,000968 \sin 4\lambda) \sin^3 u \end{array} \right|. \quad (97)
\end{aligned}$$

Рассматриваемое распределение обладает следующими свойствами: 1) значения потенциала на одном и том же меридиане для одинаковых широт в северном и южном полушариях равны; 2) таким же свойством обладают составляющие Z и Y магнитной силы; 3) на одном и том же меридиане, для одинаковых широт в северном и южном полушариях, составляющие X равны и противоположны по знаку. Но этот знак сохраняется в пределах четверти меридионального круга в каждом полушарии; 4) составляющая Y обладает в направлении параллелей теми же свойствами, что и потенциал; 5) в полюсах значение потенциала и составляющей Z равны 0; в плоскости экватора в нуль обращается составляющая X .

Для полного представления свойств этого распределения для разных точек поверхности вычислено значение выражения $\frac{\bar{W}_{III}}{R}$.

С этой целью для восьми значений географической долготы были подсчитаны значения символов $[n, m]$ и сведены в таблицу XIII. Затем с помощью этой таблицы были определены значения $\frac{\bar{W}_{III}}{R}$ для величины u , лежащей между 20 и 90°.

Эти значения совпадают для северного и южного полушарий, если угол u отсчитывать от соответствующих полюсов.

Значения $\frac{\bar{W}_{III}}{R}$ приведены в таблице XIV, причём некоторые из них после увеличения в 10^5 раз нанесены на схему VIII.

Эта схема показывает (если вспомнить правило знаков для потенциала), что мы имеем здесь дело с магнитным распределением, ось которого лежит в плоскости экватора. Восточное полушарие примерно от 10 до 200° восточной долготы представляет собой область северного магнетизма, западное полушарие — область южного магнетизма. *Поэтому мы вправе назвать это распределение восточно-западным магнитным распределением.*

Указанные выше свойства составляющих становятся понятными, если учесть, что ось распределения лежит в экваториальной плоскости. Вероятное положение этой оси становится определённым, если подвергнуть более детальному анализу рассматриваемое распределение. Мы ограничимся здесь только указанием на то, что это распределение включает также распределение равномерно намагниченного шара. Первый член потенциала образуется с помощью функции:

$$P = \frac{R^3}{r^2} (0,015\,269 \cos \lambda - 0,058\,986 \sin \lambda) \sin u, \quad (98)$$

которая может быть преобразована в следующую:

$$P = \frac{R^3}{r^2} A \cos \theta, \quad (99)$$

где

$$\cos \theta = \cos (\lambda + \varepsilon) \cdot \sin u,$$

причём

$$\lg \operatorname{tg} \varepsilon = 0,586\,9383,$$

$$\varepsilon = 75^\circ 29' 10'',$$

$$\lg A = 0,784\,8345 - 2,$$

$$A = 0,060931.$$

Соотношение (99) — это не что иное, как потенциал равномерно намагниченного шара, ось которого лежит в плоскости экватора и имеет западную географическую долготу ε . От этой оси отсчитывается угол θ .

Южный полюс определяется координатами:

$$u = 90^\circ, \quad \lambda = \varepsilon \text{ (зап.)}.$$

Учтём также положение радиуса шара, которое определяется координатами:

$$u = 90^\circ, \quad \lambda = (90 - \varepsilon) \text{ (вост.)}.$$

Проведём через направление этого радиуса перпендикулярно к плоскости экватора новую плоскость, в которой, в направлении радиуса на север, будем отсчи-

тывать новую географическую долготу l . Тогда получим следующие переходные формулы:

$$\begin{aligned}\sin u \cos (\lambda + \varepsilon) &= \cos \theta, \\ \sin u \sin (\lambda + \varepsilon) &= \sin \theta \cos l, \\ \cos u &= \sin \theta \sin l,\end{aligned}$$

откуда, далее, следует:

$$\begin{aligned}\sin u \cos \lambda &= \cos \theta \cos \varepsilon + \sin \theta \cos l \sin \varepsilon, \\ \sin u \sin \lambda &= \sin \theta \cos l \sin \varepsilon - \cos \theta \cos \varepsilon.\end{aligned}$$

Не привлекая этих формул, мы можем вычислить значение $\frac{\overline{P}}{R}$ из первого члена выражения $\frac{\overline{W}_{III}}{R}$. Эти значения представлены в таблице XV. В таблице XVI даны значения оставшихся распределений; увеличенные в 10^5 раз, они показаны на схеме IX.

§ 29. Перейдём теперь к описанию последнего остаточного распределения, обладающего, в качестве критических плоскостей, двумя полярными плоскостями. Согласно § 23, 5), это распределение содержит ряд коэффициентов, которые определяются из соотношений:

$$\begin{aligned}\gamma_{ln} &= \Gamma_{ln} - g_{mn}, \\ \chi_{ln} &= H_{nm} - h_{nm}.\end{aligned}$$

Это следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned}\gamma_{21} &= -0,013\,589, & \gamma_{41} &= -0,011\,647, \\ \chi_{21} &= +0,013\,362, & \chi_{41} &= -0,011\,454, \\ \gamma_{32} &= \Gamma_{32}, & \gamma_{43} &= \Gamma_{43}, \\ \chi_{32} &= H_{32}, & \chi_{43} &= H_{43}.\end{aligned}$$

Заменим это распределение на другое, которое мало отличается от данного. Нетрудно видеть, что коэффициенты γ_{41} , χ_{41} и γ_{21} , χ_{21} попарно имеют почти одинаковые численные значения. Поэтому будем считать,

что истинные средние значения этих коэффициентов совпадают, т. е.

$$\begin{aligned}\gamma_{21} &= -\chi_{21} = -0,013\,475, \\ \gamma_{41} &= \chi_{41} = -0,011\,550.\end{aligned}$$

Находим потенциал на поверхности земли \overline{W}_{IV} из соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{W}_{IV}}{R} &= -0,006\,737 (\cos \lambda - \sin \lambda) \sin 2u - \\ &\quad - 0,005\,775 (\cos \lambda + \sin \lambda) \left(\cos^2 u - \frac{3}{7} \right) \sin 2u - \\ &\quad - (0,013\,928 \cos 2\lambda + 0,000\,221 \sin 2\lambda) \sin 2u \cdot \sin u + \\ &\quad + (0,003\,421 \cos 3\lambda + 0,002\,560 \sin 3\lambda) \sin 2u \cdot \sin^2 u, \quad (100)\end{aligned}$$

или сокращённо:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{W}_{IV}}{R} &= \left\{ -[2, 1] - [4, 1] \left(\cos^2 u - \frac{3}{7} \right) - \right. \\ &\quad \left. - [3, 2] \sin u + [4, 3] \sin^2 u \right\} \sin 2u.\end{aligned}$$

Можно также записать:

$$\begin{aligned}[2, 1] &= 0,019\,057 \cos (\lambda + 45^\circ), \\ [4, 1] &= 0,016\,334 \cos (\lambda - 45^\circ).\end{aligned}$$

Мы видим, что потенциал \overline{W}_{IV} , взятый для точек, имеющих ту же долготу и одинаковые широты в северном и южном полушариях, равен по абсолютному значению и противоположен по знаку для таких точек северного и южного полушарий. В плоскости экватора и на полюсах потенциал \overline{W}_{IV} всегда равен нулю.

Таблица XVII содержит значения символов $[n, m]$ для разной географической долготы, таблица XVIII — значения $\frac{\overline{W}_{IV}}{R}$. В южном полушарии угол u отсчитывается от южного полюса.

На схеме X представлена меркаторская проекция земной поверхности, причём включены и линии нулевого потенциала и ряд значений $10^5 \cdot \frac{\bar{W}_{IV}}{R}$. Знак (+) соответствует, по нашему предположению, южному магнитному распределению, знак (—) — северному. На чертеже они обозначены буквами N и S . Наиболее приемлемым явилось бы объяснение этого распределения с точки зрения электрических токов, которые существовали бы в указанных областях и отмеченных стрелками.

Далее, согласно известным формулам имеем:

$$Z = \left[\begin{array}{l} -3[2, 1] - 5[4, 1] \left(\cos^2 u - \frac{3}{7} \right) \\ -4[3, 2] \sin u + 5[4, 3] \sin^2 u \end{array} \right] \sin 2u.$$

Величина Z обладает теми же свойствами потенциала, которые были отмечены выше. Z обращается в нуль на полюсах и в экваториальной плоскости.

$$\begin{aligned} X = \{ & -[4, 1] \sin 2u + [3, 2] \cos u - [4, 3] \sin 2u \} \sin 2u + \\ & + 2 \left\{ [2, 1] + [4, 1] \left(\cos^2 u - \frac{3}{7} \right) + \right. \\ & \left. + [3, 2] \sin u - [4, 3] \sin^2 u \right\} \cos 2u. \end{aligned}$$

Составляющая X обладает различными значениями для точек, симметричных плоскости экватора; на полюсах и в плоскости экватора её значение отлично от нуля.

Отображение на полярные плоскости может быть осуществлено с помощью формулы (II'), в которой $\cos u_1$ полагается равным ± 1 .

Таблица VII

	Y_1		Y_2	
u	$\lg \Gamma_{10}=0,4993021-1$	$\lg E_{11}=0,9835961-3$	$\lg \Gamma'_{20}=0,8979568-3$	$\lg E_{21}=0,5588165-2$
	$\pm \Gamma'_{10} A_{10}$	$\lg E_{11} A_{11} (+)$	$+ \Gamma_{20} A_{20}$	$\lg E_{21} A_{21} (\pm)$
0°	$+0,315720$ $\lg A_{10}=0$	$-\infty$ $\lg A_{11}=-\infty$	$+0,00516$ $\lg A_{20}=0,8239087-1$	$-\infty$ $\lg A_{21}=-\infty$
20°	$+0,29668$ $\lg A_{10}=0,9729858-1$	$(+)0,5176478-3$ $\lg A_{11}=0,5340517-1$	$+0,00435$ $\lg A_{20}=0,7401178-1$	$(-)0,0658540-2$ $\lg A_{21}=0,5070375-1$
30°	$+0,27342$ $\lg A_{10}=0,9375506-1$	$(+)0,6825661-3$ $\lg A_{11}=0,6989700-1$	$+0,00329$ $\lg A_{20}=0,6197922-1$	$(-)0,1953175-2$ $\lg A_{21}=0,6365006-1$

Таблица VII (продолжение)

	Y_1		Y_2
40°	+0,24185 $\lg A_{10}=0,8842540-1$	(+) 0,7916636-3 $\lg A_{11}=0,8080675-1$	(-) 0,2511380-2 $\lg A_{21}=0,6923215-1$
50°	+0,20291 $\lg A_{10}=0,8080675-1$	(+) 0,8678501-3 $\lg A_{11}=0,8842540-1$	(-) 0,2511380-2 $\lg A_{21}=0,6923215-1$
60°	+0,15786 $\lg A_{10}=0,6989700-1$	(+) 0,9211267-3 $\lg A_{11}=0,9375306-1$	(-) 0,1953175-2 $\lg A_{21}=0,6365006-1$
70°	+0,10798 $\lg A_{10}=0,5340517-1$	(+) 0,9565819-3 $\lg A_{11}=0,9729858-1$	(-) 0,0658540-2 $\lg A_{21}=0,5070375-1$
80°	+0,05482 $\lg A_{10}=0,2396702-1$	(+) 0,9769476-3 $\lg A_{11}=0,9933515-1$	(-) 0,7918382-3 $\lg A_{21}=0,2330217-1$
90°	0 $\lg A_{10}=-\infty$	0,98355961-3 $\lg A_{11}=0$	$-\infty$ $\lg A_{21}=-\infty$

	Y_3		Y_4	
u	$\begin{matrix} (-) \\ \lg \Gamma_{30} = \\ = 0,3867308 - 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \lg E_{31} = \\ = 0,6368086 - 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} (-) \\ \lg \Gamma_{40} = \\ = 0,5364953 - 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} (-) \\ \lg E_{41} = \\ = 0,6257632 - 2 \end{matrix}$
	$\pm \Gamma_{30} A_{30}$	$\lg E_{31} A_{31} (+)$	$+ \Gamma_{40} A_{40}$	$\lg E_{41} A_{41} (\pm)$
0°	$\begin{matrix} -0,00975 \\ \lg A_{30} = \\ = 0,6020600 - 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\infty \\ \lg A_{31} = -\infty \end{matrix}$	$\begin{matrix} -0,00737 \\ \lg A_{40} = \\ = 0,3309933 - 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\infty \\ \lg A_{41} = -\infty \end{matrix}$
20°	$\begin{matrix} -0,00648 \\ \lg A_{30} = \\ = 0,4248000 - 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} (+) 0,9923869 - 3 \\ \lg A_{31} = \\ = 0,3555783 - 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -0,00324 \\ \lg A_{40} = \\ = 0,9744656 - 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} (-) 0,7902868 - 3 \\ \lg A_{41} = \\ = 0,4645236 - 1 \end{matrix}$
30°	$\begin{matrix} -0,00317 \\ \lg A_{30} = \\ = 0,1136760 - 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} (+) 0,0761443 - 2 \\ \lg A_{31} = \\ = 0,4393327 - 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} +0,00031 \\ \lg A_{40} = \\ = 0,9508515 - 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} (-) 0,7693502 - 3 \\ \lg A_{41} = \\ = 0,1435870 - 1 \end{matrix}$
40°	$\begin{matrix} +0,00025 \\ \lg A_{30} = \\ = 0,0025980 - 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} (+) 0,0323850 - 2 \\ \lg A_{31} = \\ = 0,3955764 - 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} +0,00300 \\ \lg A_{40} = \\ = 0,9405165 - 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} (-) 0,5174284 - 3 \\ \lg A_{41} = \\ = 0,8916652 - 2 \end{matrix}$
				$\begin{matrix} \lg E_{42} = \\ = 0,3223620 - 2 \\ \lg E_{42} A_{42} (+) \\ -\infty \\ \lg A_{42} = -\infty \end{matrix}$
				$\begin{matrix} (+) 0,2597910 - 3 \\ \lg A_{42} = \\ = 0,9374290 - 2 \\ (+) 0,5035908 - 3 \\ \lg A_{42} = \\ = 0,1812288 - 1 \\ (+) 0,5858408 - 3 \\ \lg A_{42} = \\ = 0,2634788 - 1 \end{matrix}$

Таблица VII (продолжение)

	Y_3		Y_4	
50°	+ 0,00293 (-) $\lg A_{30} =$ = 0,0795430 - 1	(+) 0,8498091 - 3 $\lg A_{31} =$ = 0,2130005 - 1	+ 0,00385 (-) $\lg A_{40} =$ = 0,0492568 - 1	(+) 0,5053233 - 4 (-) $\lg A_{41} =$ = 0,8795601 - 3
60°	+ 0,00426 (-) $\lg A_{30} =$ = 0,2430380 - 1	(+) 0,2733092 - 3 $\lg A_{31} =$ = 0,6365006 - 2	+ 0,00276 (-) $\lg A_{40} =$ = 0,9049859 - 2	(+) 0,5140723 - 3 (-) $\lg A_{41} =$ = 0,8883091 - 2
70°	+ 0,00402 (-) $\lg A_{30} =$ = 0,2179838 - 1	(-) 0,5289771 - 3 (-) $\lg A_{31} =$ = 0,8921685 - 2	+ 0,00052 (-) $\lg A_{40} =$ = 0,1804126 - 2	(-) 0,6263842 - 3 (-) $\lg A_{41} =$ = 0,0006210 - 1
80°	+ 0,00241 (-) $\lg A_{30} =$ = 0,9952929 - 2	(-) 0,8602257 - 3 (-) $\lg A_{31} =$ = 0,2234171 - 1	- 0,00160 (-) $\lg A_{40} =$ = 0,6674530 - 2	(-) 0,4591260 - 3 (-) $\lg A_{41} =$ = 0,8333628 - 2
90°	0 $\lg A_{30} = -\infty$	(-) 0,9378386 - 3 (-) $\lg A_{31} =$ = 0,3010300 - 1	- 0,00246 (-) $\lg A_{40} =$ = 0,8538807 - 2	(-) 0,4772726 - 3 (-) $\lg A_{41} =$ = 0,1549106 - 1

Таблица VIII

	$\frac{\partial Y_1}{\partial u}$	$\frac{\partial Y_2}{\partial u}$
u	$\lg \Gamma_{10} = 0,4993021 - 1$ $\pm \Gamma_{10} \frac{\partial A_{10}}{\partial u}$	$\lg \Gamma_{20} = 0,8979568 - 3$ $\pm \Gamma_{20} \frac{\partial A_{20}}{\partial u}$
0°	0 $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{10}}{\partial u} = -\infty$	0 $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{20}}{\partial u} = -\infty$
20°	$-0,10798$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{10}}{\partial u} = 0,5340517 - 1$	$-0,00508$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{20}}{\partial u} = 0,8080675 - 1$
30°	$-0,15786$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{10}}{\partial u} = 0,6989700 - 1$	$-0,00685$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{20}}{\partial u} = 0,9375306 - 1$
40°	$-0,20294$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{10}}{\partial u} = 0,8080675 - 1$	$-0,00779$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{20}}{\partial u} = 0,9933515 - 1$
	$\lg E_{11} = 0,9835961 - 3$ $\lg E_{11} \frac{\partial A_{11}}{\partial u} (\pm)$	$\lg E_{21} = 0,5588165 - 2$ $\lg E_{21} \frac{\partial A_{21}}{\partial u} (+)$
	$0,9835961 - 3$ $\lg \frac{\partial A_{11}}{\partial u} = 0$	$(-)$ $0,5588165 - 2$ $\lg \frac{\partial A_{21}}{\partial u} = 0$
	$(+) 0,9565819 - 3$ $\lg \frac{\partial A_{11}}{\partial u} = 0,9729858 - 1$	$(-)$ $0,4430705 - 2$ $\lg \frac{\partial A_{21}}{\partial u} = 0,8842540 - 1$
	$(+) 0,9211267 - 3$ $\lg \frac{\partial A_{11}}{\partial u} = 0,9375306 - 1$	$(-)$ $0,2577865 - 2$ $\lg \frac{\partial A_{21}}{\partial u} = 0,6989700 - 1$
	$(+) 0,8678501 - 3$ $\lg \frac{\partial A_{11}}{\partial u} = 0,8842540 - 1$	$(-)$ $0,7984867 - 3$ $\lg \frac{\partial A_{21}}{\partial u} = 0,2396702 - 1$

Таблица VIII (продолжение)

	$\frac{\partial Y_1}{\partial u}$	$\frac{\partial Y_2}{\partial u}$
50°	$-0,24186$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{10}}{\partial u} = 0,8842540-1$	$(+)$ 0,7916636-3 $\lg \frac{\partial A_{11}}{\partial u} = 0,8080675-1$
60°	$-0,27342$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{10}}{\partial u} = 0,9375306-1$	$(+)$ 0,6825661-3 $\lg \frac{\partial A_{11}}{\partial u} = 0,6989700-1$
70°	$-0,29668$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{10}}{\partial u} = 0,9729858-1$	$(+)$ 0,5176478-3 $\lg \frac{\partial A_{11}}{\partial u} = 0,5340517-1$
80°	$-0,31093$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{10}}{\partial u} = 0,9933515-1$	$(+)$ 0,2232663-3 $\lg \frac{\partial A_{11}}{\partial u} = 0,2396702-1$
90°	$-0,315720$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{10}}{\partial u} = 0$	$-\infty$ $\lg \frac{\partial A_{11}}{\partial u} = -\infty$
		$-0,00779$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{20}}{\partial u} = 0,9933515-1$
		$-0,00685$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{20}}{\partial u} = 0,9375306-1$
		$-0,00508$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{20}}{\partial u} = 0,8080675-1$
		$-0,00270$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{20}}{\partial u} = 0,5340517-1$
		0 $\lg \frac{\partial A_{20}}{\partial u} = -\infty$
		$(+)$ 0,7984867-3 $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{21}}{\partial u} = 0,2396702-1$
		$(+)$ 0,2577865-2 $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{21}}{\partial u} = 0,6989700-1$
		$(+)$ 0,4430705-2 $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{21}}{\partial u} = 0,8842540-1$
		$(+)$ 0,5318023-2 $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{21}}{\partial u} = 0,9729858-1$
		$(+)$ 0,5588165-2 $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{21}}{\partial u} = 0$

	$\frac{\partial Y_3}{\partial u}$		$\frac{\partial Y_4}{\partial u}$	
u	$(-)$ $\lg \Gamma_{30} =$ $= 0,5867308 - 2$	$\lg E_{31} =$ $= 0,6368086 - 2$	$(-)$ $\lg \Gamma_{40} =$ $= 0,5364953 - 2$	$(-)$ $\lg E_{41} =$ $= 0,6257632 - 2$
	$+ \Gamma_{30} \frac{\partial A_{30}}{\partial u}$	$\lg E_{31} \frac{\partial A_{31}}{\partial u} (\pm)$	$\Gamma_{40} \frac{\partial A_{40}}{\partial u} (\pm)$	$\lg E_{41} \frac{\partial A_{41}}{\partial u} (+)$
0°	0	$(+) 0,5398986 - 2$	0	$(-) 0,3827252 - 2$
	$\lg \frac{\partial A_{30}}{\partial u} = -\infty$	$\lg \frac{\partial A_{31}}{\partial u} =$ $= 0,9030900 - 1$	$\lg \frac{\partial A_{40}}{\partial u} = -\infty$	$\lg \frac{\partial A_{41}}{\partial u} =$ $= 0,7569620 - 1$
20°	$+ 0,01657$	$(+) 0,2423291 - 1$	$+ 0,02009$	$(-) 0,7766424 - 3$
	$(-)$ $\lg \frac{\partial A_{30}}{\partial u} =$ $= 0,8326996 - 1$	$\lg \frac{\partial A_{31}}{\partial u} =$ $= 0,6055205 - 1$	$(-)$ $\lg \frac{\partial A_{40}}{\partial u} =$ $= 0,7665836 - 1$	$\lg \frac{\partial A_{41}}{\partial u} =$ $= 0,1508792 - 1$
				$(+) 0,9250151 - 3$
				$\lg \frac{\partial A_{42}}{\partial u} =$ $= 0,3228620 - 2$
				$\lg E_{42} \frac{\partial A_{42}}{\partial u} (\pm)$
				$-\infty$
				$\lg \frac{\partial A_{42}}{\partial u} = -\infty$
				$(+) 0,9250151 - 3$
				$\lg \frac{\partial A_{42}}{\partial u} =$ $= 0,60266531 - 1$

Таблица VIII (продолжение)

	$\frac{\partial Y_3}{\partial u}$		$\frac{\partial Y_4}{\partial u}$	
30°	+0,02009 (-) $\lg \frac{\partial A_{30}}{\partial u} =$ =0,9164540-1	(+) $\lg \frac{\partial A_{31}}{\partial u} =$ =0,6364879-2	+0,01915 (-) $\lg \frac{\partial A_{40}}{\partial u} =$ =0,7456470-1	(+) $\lg \frac{\partial A_{41}}{\partial u} =$ =0,3312045-1
				(+) $\lg \frac{\partial A_{42}}{\partial u} =$ =0,4903691-1
40°	+0,01817 (-) $\lg \frac{\partial A_{30}}{\partial u} =$ =0,8726977-1	(-) $\lg \frac{\partial A_{31}}{\partial u} =$ =0,5272431-1	+0,01072 (-) $\lg \frac{\partial A_{40}}{\partial u} =$ =0,4937252-1	(+) $\lg \frac{\partial A_{41}}{\partial u} =$ =0,3224261-2
				(+) $\lg \frac{\partial A_{42}}{\partial u} =$ =0,4810554-2
50°	+0,01194 (-) $\lg \frac{\partial A_{30}}{\partial u} =$ =0,6901218-1	(-) $\lg \frac{\partial A_{31}}{\partial u} =$ =0,7905526-1	-0,01043 (+) $\lg \frac{\partial A_{40}}{\partial u} =$ =0,4816201-2	(+) $\lg \frac{\partial A_{41}}{\partial u} =$ =0,6648299-2
				(-) $\lg \frac{\partial A_{42}}{\partial u} =$ =0,4936703-1

60°	$+0,00316$ $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{30}}{\partial u} =$ $= 0,1136219 - 1$	$(-)$ 0,4971466 — 2 $\lg \frac{\partial A_{31}}{\partial u} =$ $= 0,8603380 - 1$	$-0,01064$ $(+)$ $\lg \frac{\partial A_{40}}{\partial u} =$ $= 0,4903691 - 1$	$(+)$ 0,0817038 — 2 $\lg \frac{\partial A_{41}}{\partial u} =$ $= 0,4559406 - 1$	$(-)$ 0,0680090 — 2 $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{42}}{\partial u} =$ $= 0,7456470 - 1$
70°	$-0,00570$ $\lg \frac{\partial A_{30}}{\partial u} =$ $= 0,3692898 - 1$	$(-)$ 0,4384935 — 2 $\lg \frac{\partial A_{31}}{\partial u} =$ $= 0,8016819 - 1$	$-0,01378$ $(+)$ $\lg \frac{\partial A_{40}}{\partial u} =$ $= 0,6026810 - 1$	$(-)$ 0,1322682 — 3 $\lg \frac{\partial A_{41}}{\partial u} =$ $= 0,5065050 - 2$	$(-)$ 0,0889265 — 2 $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{42}}{\partial u} =$ $= 0,7665645 - 1$
80°	$-0,01222$ $\lg \frac{\partial A_{30}}{\partial u} =$ $= 0,7003384 - 1$	$(-)$ 0,1006574 — 2 $\lg \frac{\partial A_{31}}{\partial u} =$ $= 0,5638488 - 1$	$-0,00937$ $(+)$ $\lg \frac{\partial A_{40}}{\partial u} =$ $= 0,4354228 - 1$	$(-)$ 0,1253128 — 2 $\lg \frac{\partial A_{41}}{\partial u} =$ $= 0,4995496 - 1$	$(-)$ 0,8912426 — 3 $(-)$ $\lg \frac{\partial A_{42}}{\partial u} =$ $= 0,5688806 - 1$
90°	$-0,01462$ $\lg \frac{\partial A_{30}}{\partial u} =$ $= 0,7781513 - 1$	$-\infty$ $\lg \frac{\partial A_{31}}{\partial u} = -\infty$	0 $\lg \frac{\partial A_{40}}{\partial u} = -\infty$	$(-)$ 0,2577850 — 2 $\lg \frac{\partial A_{41}}{\partial u} =$ $= 0,6320218 - 1$	$-\infty$ $\lg \frac{\partial A_{42}}{\partial u} = -\infty$

Таблица IX

λ	$\lg \sin (\lambda + 97^{\circ}35'30'')$	$\lg \sin (\lambda + 89^{\circ}25'30'')$	$\lg \sin (2\lambda - 70^{\circ}6'40'')$
0	9,9961765	9,9999781	9,9732914
10	9,9791998	9,9940974	9,8849593
20	9,9475665	9,9745474	9,7004255
30	9,8989326	9,9400179	9,2444197
40	9,8289239	9,8878741	9,2348666
50	9,7291239	9,8132092	9,6975080
60	9,5811584	9,7064325	9,8835459
70	9,3321907	9,5458428	9,9726784
80	8,6234661	9,2636892	0
90	9,1209430	9,0015379	9,9732914
100	9,4803394	9,2141983	9,8849593
110	9,6657377	9,5218865	9,7004255
120	9,7853511	9,6913325	9,2444197
130	9,8682665	9,8028200	9,2348666
140	9,9264711	9,8805593	9,6975080
150	9,9659025	9,9349850	9,8835459
160	9,9897350	9,9713747	9,9726784
170	9,9996162	9,9925604	0
180	9,9961765	9,9999781	9,9732914

Т а б л и ц а IX (продолжение)

λ	$\lg \sin (\lambda + 97^{\circ}35'30'')$	$\lg \sin (\lambda + 89^{\circ}25'30'')$	$\lg \sin (2\lambda - 70^{\circ}6'40'')$
190	— 9,9791998	— 9,9940974	— 9,8849593
200	— 9,9475665	— 9,9745474	— 9,7004255
210	— 9,8989326	— 9,9400179	— 9,2444197
220	— 9,8289239	— 9,8878741	+ 9,2348666
230	— 9,7291239	— 9,8132092	+ 9,6975080
240	— 9,5811584	— 9,7064325	+ 9,8835459
250	— 9,3321907	— 9,5458428	+ 9,9726784
260	— 8,6234661	— 9,2636892	+ 0
270	+ 9,1209430	— 8,0015379	+ 9,9732914
280	+ 9,4803394	+ 9,2141983	+ 9,8849593
290	+ 9,6657377	+ 9,5218865	+ 9,7004255
300	+ 9,7853511	+ 9,6913325	+ 9,2444197
310	+ 9,8682665	+ 9,8028200	— 9,2348666
320	+ 9,9264711	+ 9,8805593	— 9,6975080
330	+ 9,9659025	+ 9,9349850	— 9,8835459
340	+ 9,9897350	+ 9,9713747	— 9,9726784
350	+ 9,9996162	+ 9,9925604	— 0

Значения величин 100 X.

и	Восточная					
	северн.	0°	30°	60°	90°	120°
0						
20		+ 9,174	+ 8,624	+ 7,700	+ 7,233	+ 7,453
30		+11,049	+13,646	+12,120	+12,303	+12,612
40		+19,499	+19,237	+18,685	+18,033	+17,468
50		+25,412	+25,610	+24,788	+25,151	+24,080
60		+26,982	+28,049	+29,148	+29,425	+28,840
70		+30,797	+31,595	+32,711	+32,002	+31,941
80		+31,716	+32,359	+33,392	+32,499	+33,918
90		+31,223	+31,458	+32,113	+33,016	+33,924
80		+28,688	+28,547	+29,044	+31,999	+32,654
70		+24,473	+24,355	+25,151	+27,490	+31,005
60		+24,452	+20,787	+21,874	+24,537	+28,216
50		+16,924	+16,936	+17,572	+20,049	+21,297
40		+18,535	+18,659	+18,819	+18,607	+18,956
30		+16,313	+16,491	+16,354	+15,269	+14,054
20		+15,852	+15,532	+14,012	+11,117	+ 7,515
0						

ЮЖН.

Значения величин 100 Z.

и	Восточная					
	северн.	0°	30°	60°	90°	120°
0						
20		+53,547	+54,177	+55,529	+56,246	+56,020
30		+50,767	+51,831	+53,744	+54,894	+54,769
40		+50,551	+48,535	+50,601	+51,578	+50,961
50		+41,380	+42,467	+44,144	+44,815	+44,083
60		+32,991	+33,545	+34,233	+32,692	+34,641
70		+22,254	+22,157	+23,391	+22,652	+23,306
80		+10,175	+11,364	+11,881	+16,903	+11,023
90		- 2,140	- 2,979	- 3,758	- 3,229	- 1,345
80		-12,943	-13,220	-14,595	-10,945	-13,245
70		-21,402	-21,855	-21,617	-23,728	-24,456
60		-27,381	-27,609	-29,055	-33,433	-34,889
50		-31,750	-32,001	-34,086	-38,591	-44,523
40		-38,983	-36,219	-39,223	-45,220	-52,853
30		-40,779	-41,685	-45,312	-51,784	-60,573
20		-46,789	-47,855	-51,269	-57,374	-62,930
0						

ЮЖН.

Таблица X

Деформированное основное распределение

долгота λ						
150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
+ 7,833	+ 7,688	+ 6,952	+ 6,292	+ 6,465	+ 7,531	+ 8,735
+13,209	+13,267	+12,683	+11,980	+11,569	+12,254	+12,879
+17,098	+16,989	+17,153	+17,585	+18,215	+18,878	+19,376
+22,387	+22,984	+23,788	+25,842	+25,709	+25,778	+22,989
+28,019	+28,366	+28,365	+30,190	+30,347	+28,430	+27,743
+30,952	+31,283	+32,363	+33,555	+33,694	+32,493	+31,174
+33,607	+33,684	+34,231	+34,662	+35,829	+33,220	+32,067
+34,592	+34,845	+34,610	+33,955	+33,052	+32,144	+31,476
+34,595	+34,992	+33,913	+31,982	+28,753	+29,288	+28,911
+33,944	+34,539	+32,779	+29,675	+27,006	+25,699	+24,638
+31,269	+32,384	+30,457	+26,972	+23,896	+22,008	+21,153
+21,632	+23,048	+21,634	+21,770	+19,523	+20,714	+16,059
+18,926	+18,885	+18,859	+18,819	+18,884	+18,606	+19,024
+12,787	+12,479	+13,295	+14,654	+15,967	+16,188	+16,233
+ 4,643	+ 3,850	+ 5,456	+ 8,560	+11,749	+14,065	+14,553

Таблица XI

Деформированное основное распределение

долгота λ						
150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
+57,146	+57,601	+58,361	+58,721	+57,856	+56,158	+54,314
+54,585	+54,693	+56,067	+57,152	+56,562	+54,249	+51,435
+49,990	+46,975	+51,929	+53,518	+53,186	+50,855	+48,202
+45,435	+43,222	+44,683	+46,140	+46,055	+44,239	+39,753
+34,334	+34,337	+35,075	+35,650	+37,362	+34,571	+33,281
+23,896	+21,804	+22,073	+22,143	+22,800	+22,512	+22,374
+12,573	+12,901	+ 9,048	+10,125	+15,753	+ 9,389	+ 9,999
+ 0,550	- 1,909	- 1,526	- 2,437	- 3,637	- 3,224	- 2,300
-12,103	-11,793	-10,998	-14,157	-18,111	-14,055	-13,137
-24,882	-25,062	-24,975	-25,665	-23,636	-22,542	-24,664
-36,979	-38,315	-36,795	-33,761	-28,987	-28,923	-27,819
-47,007	-50,664	-47,865	-42,646	-37,554	-34,171	-34,821
-58,994	-57,381	-57,197	-50,569	-43,895	-39,211	-36,694
-65,409	-67,425	-64,081	-57,456	-50,424	-45,073	-42,235
-67,660	-69,039	-66,583	-61,457	-55,664	-50,868	-47,850

Значения ρ . Деформированное основное распределение

и	Восточная долгота λ												
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	
Северн.													
20	13,516	14,101	15,043	15,478	15,278	15,094	15,461	15,905	16,438	16,286	15,229	14,004	
30	23,753	26,637	23,355	23,427	21,539	22,570	22,476	23,344	24,154	24,408	23,334	22,069	
40	30,118	29,349	31,243	32,536	32,986	32,965	31,719	33,761	33,889	32,998	31,120	28,860	
50	32,548	34,858	41,924	41,971	44,014	50,016	45,814	49,548	42,131	42,391	38,612	39,348	
60	39,261	42,293	44,518	50,181	41,724	38,941	40,673	37,564	43,755	38,237	40,054	41,895	
70	47,084	60,436	59,659	59,995	56,241	56,788	60,518	61,248	62,259	61,478	60,763	59,463	
80	77,211	75,778	75,047	73,592	77,011	74,690	74,818	79,823	78,543	71,578	79,005	77,627	
90	103,957	105,467	106,756	105,647	102,289	99,082	103,164	100,631	104,144	106,353	105,791	104,219	
90	96,043	94,533	93,244	94,353	97,711	100,918	96,836	99,369	95,856	93,647	94,209	95,781	
80	70,962	70,371	68,411	76,209	73,140	75,844	76,444	77,045	89,556	61,840	69,513	70,802	
70	51,215	49,887	52,004	51,868	55,922	58,759	59,127	57,305	51,766	51,177	51,065	34,318	
60	21,333	28,652	23,224	16,096	37,518	43,690	38,643	40,952	35,597	40,390	25,911	25,788	
50	45,674	45,879	47,627	47,312	51,183	52,668	53,072	53,260	49,121	47,163	34,214	52,574	
40	23,019	19,222	22,674	28,235	31,947	34,340	33,825	33,790	31,046	26,990	23,096	19,004	
30	13,518	13,603	15,787	19,658	23,022	24,853	25,323	24,283	21,826	11,582	12,664	15,086	
20	5,155	-1,048	8,558	12,287	15,890	18,127	18,679	17,548	15,012	11,653	10,946	7,163	

ЮЖН.

Таблица XIII

λ	0	90	180	270	45	135	225	315
[1, 1]	0, 01527	-0, 05899	-0, 01527	+0, 05899	-0, 03091	-0, 05251	+0, 03091	+0, 05251
-[3, 1]	-0, 00339	-0, 01311	+0, 00339	+0, 01311	+0, 00684	+0, 01166	-0, 00684	-0, 01166
-[2, 2]	-0, 00567	+0, 00567	-0, 00567	+0, 00567	-0, 01260	+0, 01260	-0, 01260	+0, 01260
-[3, 3]	-0, 00327	+0, 00549	+0, 00327	-0, 00549	-0, 00157	-0, 00619	+0, 00157	+0, 00619
-[4, 4]	-0, 00085	-0, 00085	-0, 00085	-0, 00085	+0, 00085	+0, 00085	+0, 00085	+0, 00085

Таблица XIV

μ	Значения $\frac{\bar{W}_{III}}{R}$							
90°	+0, 00616	-0, 04606	-0, 01920	+0, 06370	-0, 04565	-0, 04758	+0, 02210	+0, 07448
80	+0, 00620	-0, 04596	-0, 01880	+0, 05536	-0, 04610	-0, 04655	+0, 02166	+0, 07259
70	+0, 00628	-0, 04550	-0, 01757	+0, 05420	-0, 04268	-0, 04360	+0, 02042	+0, 06718
60	+0, 00622	-0, 04432	-0, 01568	+0, 05185	-0, 04394	-0, 03452	+0, 02505	+0, 05438
50	+0, 00608	-0, 04164	-0, 01331	+0, 04791	-0, 03095	-0, 03343	+0, 01617	+0, 04879
40	+0, 00563	-0, 03753	-0, 01059	+0, 04191	-0, 02396	-0, 02713	+0, 01354	+0, 03785
30	+0, 00483	-0, 03105	-0, 00777	+0, 03380	-0, 01698	-0, 02064	+0, 01068	+0, 02704
20	+0, 00366	-0, 02227	-0, 00498	+0, 02359	-0, 01055	-0, 01410	+0, 00751	+0, 01704

Таблица XV

λ u	0	90	180	270	45	1 35	225	315
20	+0,00522	-0,02018	-0,00522	+0,02018	-0,01057	-0,01796	+0,01057	+0,01796
30	+0,00764	-0,02950	-0,00764	+0,02950	-0,01547	-0,02626	+0,01546	+0,02626
40	+0,00982	-0,03792	-0,00982	+0,03792	-0,01988	-0,03375	+0,01988	+0,03375
50	+0,01171	-0,04520	-0,01171	+0,04520	-0,02368	-0,04023	+0,02368	+0,04023
60	+0,01322	-0,05109	-0,01322	+0,05109	-0,02677	-0,04548	+0,02677	+0,04548
70	+0,01435	-0,05543	-0,01435	+0,05543	-0,02906	-0,04934	+0,02906	+0,04934
80	+0,01510	-0,05809	-0,01510	+0,05809	-0,03044	-0,05171	+0,03044	+0,05171
90	+0,01527	-0,05899	-0,01527	+0,05899	-0,03091	-0,05251	+0,03091	+0,05251

Таблица XVI

20	-0,00156	-0,00209	-0,00024	+0,00341	+0,00002	+0,00386	-0,00296	-0,00092
30	-0,00281	-0,00155	-0,00013	+0,00430	-0,00151	+0,00562	-0,00478	+0,00078
40	-0,00419	+0,00039	-0,00077	+0,00399	-0,00408	+0,00662	-0,00634	+0,00410
50	-0,00571	+0,00336	-0,00160	+0,00271	-0,00727	+0,00680	-0,00751	+0,00856
60	-0,00700	+0,00677	-0,00246	+0,00077	-0,01747	+0,01096	-0,01172	+0,00890
70	-0,00807	+0,00993	-0,00322	-0,00123	-0,01362	+0,00574	-0,00864	+0,01784
80	-0,00890	+0,01213	-0,00370	-0,00273	-0,01566	+0,00516	-0,00878	+0,02088
90	-0,00911	+0,01293	-0,00393	+0,00471	-0,01474	+0,00493	-0,00881	+0,02197

ПОЯСНЕНИЯ К СХЕМАМ

Схема I. На меркаторской проекции земной поверхности нанесены значения составляющей магнитной силы земли, параллельной земной оси. По обе стороны экватора ломаной линией отмечена область, в которой эта составляющая направлена на север (стр. 237).

Схема II. Прямые, соединяющие точку O с вершинами многоугольников, пропорциональны средним значениям потенциала для разных широт. Прямая OO_1 показывает направление земной оси (стр. 239).

Схемы III, IV, V представляют отображение земной поверхности на критические плоскости для случая равномерно намагниченного земного шара. Одна точка отображения является точкой пересечения магнитной силы с критической плоскостью. Таким же образом отображены параллели. Сильно вытянутые кривые линии являются отображением действительного распределения земного магнетизма на поверхности земли: схема III относится к части северного полушария над критической плоскостью, IV — часть того же полушария ниже критической плоскости, V — часть южного полушария над южной критической плоскостью (стр. 242).

Схемы VI, VII. Отображения деформированного основного распределения (стр. 285).

Схема VIII. На меркаторской проекции поверхности земли нанесены значения магнитного потенциала для симметричного восточно-западного распределения (стр. 288).

Схема IX. Даны значения магнитного потенциала распределения, которое получается после исключения из восточно-западного распределения равномерного намагничивания (стр. 290).

Схема X. Представлены значения потенциала последнего образа магнитного распределения земли (стр. 292).



ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОБРАЗА ПОТЕНЦИАЛА ГАУССА КАК ПРИЁМ ИЗЫСКАНИЯ ЗАКОНОВ ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА ¹⁾

Наряду с усовершенствованием способов наблюдения и накоплением необыкновенно большого и очень ценного наблюдательного материала, учение о земном магнетизме, сравнительно с другими физическими дисциплинами, подвинулось слишком мало в выяснении причин земномагнитных явлений и в открытии простых, легко объемлемых числовых законов. Причины такого застоя совершенно понятны. Характеристики, служащие для определения магнитных свойств какого-нибудь места на земном шаре, — склонение, наклонение и горизонтальное напряжение — представляют в то же время и единственные величины, для которых могут быть разыскиваемы какие-либо соотношения и зависимости от времени. Такие соотношения выражаются магнитными кривыми, представляющимися линиями чрезвычайно разнообразно изогнутыми и потому пригодными только для описания явлений. Выражение законов этих кривых не может обойтись без детального перечисления всех тех мест земной поверхности, через которые идёт их течение. Совершенно ясно, что про-

¹⁾ Впервые напечатано в Трудах Отделения физических наук Московского общества любителей естествознания, антропологии и этнографии, т. 12, вып. 1, 1904.

стые законы могут быть отысканы не ранее, как будут найдены лишь немногие элементы, знание которых может заменить собой знание магнитных элементов бесчисленного числа точек земной поверхности.

Существует формула, до настоящего времени представляющая замечательную попытку выразить всё разнообразие земномагнитных явлений при помощи немногих коэффициентов. Это есть гауссово разложение потенциала земного магнетизма по сферическим функциям. Оно содержит в себе 24 эмпирически определяемых коэффициента. В своём обычном виде потенциал Гаусса рассматривается как эмпирическая формула, возможно близко воспроизводящая случайные ненормальности в магнитных свойствах земли, так сказать погрешности, допущенные природой, когда она одаряла нашу землю магнитными свойствами.

Но такой взгляд на потенциал Гаусса мог бы иметь основание только после обстоятельной проверки, а такая проверка даёт ответ противоположный.

В самом деле, известно, что сферическая функция представляет собой геометрический образ, имеющий некоторые оси (см. § 2), число которых определяется порядком функции. Кроме того, каждой функции соответствует некоторый момент, который мы можем для данного случая назвать магнитным моментом того же порядка, каков порядок самой функции. Положение осей сферической функции n -го порядка и её магнитного момента n -го порядка определяется из $2n + 1$ эмпирических постоянных, в неё входящих.

Каждая из шаровых функций, входящих в потенциал Гаусса, представляет магнитный потенциал особого распределения. Изыскание соответственных линий равного потенциала на земной поверхности даст возможность распутать сложную картину, представляемую картами линий равного потенциала всего магнитного состояния земли. Эти отдельные группы могли бы быть выделены и исходя из того вида шаровых функций, какой они имеют в потенциале Гаусса; но закон их не мог бы быть установлен в своей простой форме.

Между тем, преобразуя шаровые функции к их осям, мы получаем крайне простые полярные уравнения линий равного потенциала. Например, в случае шаровой функции 2-го порядка это уравнение выражается тем, что произведение косинусов углов радиус-вектора точки кривой с осями есть величина постоянная для одной и той же линии.

Вместе с этим положение этих линий, осей и связанных с ними некоторых прямых оказывается имеющим отношение к некоторым особенностям магнитных свойств земли. Так, например, биссектриса угла между осями шаровой функции 2-го порядка проходит через середину области восточно-азиатской магнитной аномалии, и границы этой области близко подходят к форме некоторой линии равного потенциала для этой шаровой функции.

Потенциал Гаусса рассматривался как определяющий отклонения от некоторого нормального потенциала, представляемого или потенциалом равномерно намагниченного шара, или некоторым средним, определяемым по широтам статистическим методом. В параллель такому взгляду на потенциал Гаусса мы можем привести подобный же из другой области. Он соответствовал бы элементарному взгляду на поверхность световой волны как на собрание светящихся точек—первоначальное воззрение Гюйгенса. В действительности световая волна должна быть рассматриваема не только составленной из слоя светящихся точек, но ещё из двойного слоя центров сотрясения. Поэтому устранение шаровых функций из нормального типа земного магнетизма не имеет достаточных оснований.

Против всего сказанного может быть сделано одно возражение, а именно, что степень точности коэффициентов потенциала Гаусса зависит от принятого во внимание при их вычислении числа точек земной поверхности. Такие неточности лишь таковы, что, например, угол осей шаровой функции 2-го порядка оказался бы равным не 86° , а 88 или 84° ; знание положения осей даже при большей погрешности есть уже значи-

тельное приобретение в смысле ясности и образности представления изучаемого явления. Значение неточностей в коэффициентах потенциала будет совершенно ничтожным для тех заключений, которые основываются на отношениях между коэффициентами.

Во всяком случае для исследователя в области земного магнетизма они будут не более вредны, чем были неточные определения положения планет для Кеплера при установлении им нормальных законов нашей планетной системы.

Точность величин коэффициентов Гаусса имеет значение только при изыскании законов изменения магнитных свойств земли с временем.

Такие законы должны управлять изменениями в носителем расположении осей шаровых функций и их моментов, что требует точного знания положения осей. Но качественно эти законы могут быть выражены и должны выражать собою периодические отклонения от нормальных условий. Относясь к небольшому числу величин, они будут обладать во всяком случае большей наглядностью, чем многие из современных формулировок, как, например, описание положения на земной поверхности кривых линий, отделяющих части земной поверхности, в которых направление стрелки склонения удаляется от географического меридиана, от частей, в которых она к нему приближается. Мало того, получаемые результаты, изложенные в конце работы, по своей неожиданности выдвигают всю важность изучения вековых изменений земного магнетизма. Выражая их изменением положения осей, из коих одни очень мало меняют своё место, другие же подвержены очень значительным перемещениям, мы приходим к взгляду на земной магнетизм как на совокупность магнитных свойств, из коих некоторые подвержены очень большим переменам. Таким образом самое суждение о нормальном магнетизме земного шара может иметь место только после изучения его вековых изменений.

Рекомендуемый здесь приём представляет собою не что иное, как построение геометрического образа

· потенциала Гаусса. Геометрические свойства этого образа раскрывают вместе с тем и законы земного магнетизма. Законы изменения этого образа с временем представляют и зависимость от времени земномангнитных свойств. Построение такого образа следовало давно выполнить, так как оно является желательным дополнением к формуле Гаусса. Но оно никоим образом не должно быть смешиваемо с употреблявшимся уже приёмом построения поверхностей равного потенциала и отысканием линий их пересечения с земной поверхностью.

Предполагаемый приём существенно пополняет наше знание земномангнитных свойств ещё и в другом отношении. Определявшийся до сего времени магнитный момент земли, благодаря принятому определению магнитного момента, есть не что иное, как момент шаровой функции 1-го порядка. Только он и определялся из потенциала Гаусса. Между тем в общем случае для познания магнитных свойств намагниченной сферы необходимо знать магнитные моменты всех тех шаровых функций, по которым развёртывается её потенциал. Сообразно порядку функций, мы будем различать магнитные моменты 1-го, 2-го, 3-го и так далее порядков, причём до сих пор был вычислен для земли только магнитный момент 1-го порядка. Решение предлагаемой здесь задачи делает излишней ту, которую ставили некоторые магнитологи, а именно: найти коэффициенты формулы Гаусса для любой системы координат и найти направление диаметра земли, по отношению к которому сумма членов потенциала, зависящая только от угловых расстояний от этого диаметра, будет наименьшей.

Потенциал земли развёрнут Гауссом по сферическим функциям от 1-го порядка до 4-го включительно. Сумма всех порядков равна 10, и таково число осей потенциала. Их положение определяется двадцатью координатами; сверх того, мы имеем 4 момента, что составляет всего 24 постоянных, которые и определяются по двадцати четырём постоянным, содержащимся

в потенциале Гаусса. Не говоря уже о том, что новые постоянные имеют геометрическое значение, между ними обнаруживаются ещё соотношения, представляющие небольшие отклонения от некоторых чрезвычайно простых, которые мы можем считать типичными или нормальными и которые прямо не явствуют из известных эмпирических коэффициентов.

Решение задачи изыскания осей шаровых функций представляет значительные трудности, начиная с шаровой функции 3-го порядка. Моё исследование заканчивается этой функцией, причём даны все необходимые преобразования и указаны её свойства и законы, получаемые общими приёмами. Приближённое решение даёт узкий пучок трёх осей, причём меридиональная плоскость одной из них делит пополам угол между меридиональными плоскостями двух остальных. Окончательное определение положения осей может быть получено только путём последовательных испытаний, требующих значительного времени, и это дело я представляю специалистам-магнитологам.

Решение задачи значительно упрощается, если смотреть на каждую шаровую функцию, входящую в потенциал Гаусса, как на видоизменение некоторого нормального типа.

Мы можем представить в этом случае каждую шаровую функцию как сумму по меньшей мере двух шаровых функций того же порядка, причём для одной из них ось земли является многократной осью того же порядка, как и сама функция. Такой приём законен при гипотезе, что магнитные свойства земли обусловлены частью её вращением около прямой, совпадающей с её географической осью. Добавочная функция представила бы математически выраженное влияние вращения земли, и мерой этого влияния был бы момент этой функции. Он представляет собой и меру уклонения или погрешности, которую мы бы сделали, заменив задачу общую задачей о функции нормальной. Мы увидим, что подобная замена приводит лишь к малым различиям в решениях, причём момент многократной

земной оси оказывается по своей малости близким к пределам допустимых погрешностей. Ниже мы приводим подробное изыскание нормального типа шаровой функции 2-го порядка и шаровой функции, обусловливаемой вращением земли около её оси. Допуская такое разложение, следует признать, что космическое магнитное поле, в котором развивалась наша земля, не было однородным, что, без сомнения, вполне вероятно.

Итак, основная мысль предлагаемой работы заключается в том, что обширный материал, собранный в области земного магнетизма, может быть резюмирован положением и взаимным отношением немногих элементов, представляемых осями и моментами четырёх потенциалов различных порядков, из которых складывается потенциал Гаусса.

В этом и заключается построение геометрического образа потенциала Гаусса, которое само по себе было бы желательным дополнением к труду этого гениального мыслителя. Много работы потребуется для раскрытия законов изменений этого образа с временем, но можно думать, что только она в состоянии выразить их в простейшей и наглядной математической форме.

Заканчивая это вступление, я считаю своей обязанностью выразить нашему известному специалисту магнитологу профессору Эрнесту Егоровичу Лейсту мою глубокую благодарность за доставление мне необходимого материала и за сделанные им ценные указания.

Глава I. ВВЕДЕНИЕ

1. По Гауссу, магнитный потенциал земли в точке её поверхности представляется выражением:

$$\frac{V}{R} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3 + \mathcal{V}_4. \quad (1)$$

Здесь V означает потенциал, R — радиус земли и \mathcal{V}_n — сферическую функцию n -го порядка.

Эти функции суть:

$$Y_1 = g_{10}A_{10} + (g_{11} \cos \lambda + h_{11} \sin \lambda) A_{11}, \quad (2)$$

$$Y_2 = g_{20}A_{20} + \sum_{i=1,2} (g_{2i} \cos i\lambda + h_{2i} \sin i\lambda) A_{2i}, \quad (3)$$

$$Y_3 = g_{30}A_{30} + \sum_{i=1,2,3} (g_{3i} \cos i\lambda + h_{3i} \sin i\lambda) A_{3i}, \quad (4)$$

$$Y_4 = g_{40}A_{40} + \sum_{i=1,2,3,4} (g_{4i} \cos i\lambda + h_{4i} \sin i\lambda) A_{4i}. \quad (5)$$

λ есть географическая долгота, считаемая от 0° до 360° от меридиана Гринвича на восток. Суммы распространяются на члены с различными i , и A_{ij} суть функции угла u , дополнения до широты места, считая u от 0° до 180° от северного конца оси мира.

Функции A_{ij} имеют следующий вид:

Т а б л и ц а I

$$A_{10} = \cos u,$$

$$A_{20} = \cos^2 u - 1/3,$$

$$A_{11} = \sin u,$$

$$A_{21} = \cos u \sin u,$$

$$A_{22} = \sin^2 u,$$

$$A_{30} = \cos^3 u - 3/5 \cos u,$$

$$A_{31} = [\cos^2 u - 1/5] \sin u,$$

$$A_{32} = \cos u \sin^2 u,$$

$$A_{33} = \sin^3 u,$$

$$A_{40} = \cos^4 u - 6/7 \cos^2 u,$$

$$A_{41} = [\cos^2 u - 3/7] \sin u \cos u,$$

$$A_{42} = [\cos^2 u - 1/7] \sin^2 u,$$

$$A_{43} = \cos u \sin^3 u,$$

$$A_{44} = \sin^4 u.$$

Коэффициенты g и h были вычислены для 1885 г. Неймайером и Петерсенom:

Таблица II

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
g_{n0}	+0,315720	+0,007906	-0,024363	-0,034395
g_{n1}	+0,024814	-0,049798	+0,039560	-0,030597
g_{n2}		-0,005667	-0,027857	-0,019754
g_{n3}			-0,003270	+0,006842
g_{n4}				-0,000849
h_{n1}	-0,060258	+0,012999	+0,007383	-0,011877
h_{n2}		-0,012604	-0,000443	+0,007147
h_{n3}			-0,005492	+0,005121
h_{n4}				+0,000968

2. Представим себе в пространстве некоторые прямые h_1, h_2, \dots, h_n , исходящие из одной точки. Пусть r есть расстояние этой точки до какой угодно точки пространства. Тогда ¹⁾ поверхностная шаровая функция n -го порядка представится выражением:

$$Y_n = (-1)^n \frac{r^{n+1} \delta_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_2} \dots \frac{\partial}{\partial h_n} \frac{1}{r}; \quad (6)$$

n прямых h_1, h_2, \dots, h_n суть оси этой функции.

Произвольная постоянная δ_n есть момент функции. Функция не содержит радиус-вектора r и зависит только от углов, образуемых этим радиус-вектором с осями, и от углов осей между собой. Если описать из точки пересечения осей сферу радиусом, равным некоторой длине R (радиус земли), то полученные точки пересечения осей с этой сферой будут полюсами шаровой поверхностной функции: момент δ_n будем всегда считать положительным, чем определяется то направление оси, от которого отсчитываются образуемые ею углы с другими прямыми.

¹⁾ Maxwell, Electricity and Magnetism, французский перевод Seligmann-Lui, т. I, гл. VIII, 1885 г., стр. 226.

Возьмём на сфере произвольную точку M и означим через μ_j косинус угла, образуемого радиусом точки M с осью j .

Далее, через λ_{ij} означим косинус угла между осями j и i . Тогда сферические поверхностные функции до 3-го порядка включительно будут представлены следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \delta_1 \mu_1, & Y_2 &= \delta_2 \left(\frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 - \frac{1}{2} \lambda_{12} \right), \\ Y_3 &= \delta_3 \left[\frac{5}{2} \mu_1 \mu_2 \mu_3 - \frac{1}{2} (\mu_1 \lambda_{23} + \mu_2 \lambda_{31} + \mu_3 \lambda_{12}) \right]. \end{aligned} \right\} (7)$$

Мы видим, что определённый индекс входит в каждый член только один раз и что число всех индексов, содержащихся в одном члене, равно порядку n сферической поверхностной функции. Члены содержат двоякого рода косинусы: с одним и двумя индексами; последние суть косинусы углов между осями.

Мы означим через λ^s число косинусов λ_{ij} , т. е. с двумя индексами, содержащихся в каком-нибудь члене. Число косинусов μ с одним индексом в том же члене будет потому, что сказано выше, равно $n - 2s$, что означим через μ^{n-2s} .

Далее, представим символом

$$\sum (\mu^{n-2s} \lambda^s)$$

сумму всех членов, содержащих каждый одинаковое число μ и λ ; тогда выражение шаровой поверхностной функции n -го порядка будет следующее:

$$Y_n = S \left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s} n! (n-s)!} \sum (\mu^{n-2s} \lambda^s) \right],$$

где S есть знак суммы.

Каждая шаровая поверхностная функция n -го порядка содержит $2n$ постоянных, определяющих положение её n полюсов, и, кроме того, момент функции, в общем $2n + 1$ постоянных. Число этих постоянных уменьшается при совпадении некоторых осей друг с другом.

Мы ставим себе задачей привести шаровые функции, которыми выражается потенциал земного магнетизма, к виду выражений (7), с целью разыскания их осей.

Глава II. ФУНКЦИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

3. Функция Гаусса 1-го порядка Y_1 содержит 3 постоянных, следовательно, такое же число, как и функция Y_1 (7). Но эта последняя изображает поверхностный потенциал равномерно намагниченной сферы, ось которой образует некоторый угол с земной осью.

Означим ось функции Y_1 через A ; пусть u_1, λ_1 будут её полярные координаты (координаты её южного магнитного полюса); u, λ — полярные координаты какой-нибудь точки M на поверхности земли. Из сферического треугольника, вершины которого образуют точка M , северный географический полюс земли и полюс A , мы получаем:

$$\mu_1 = \cos u \cos u_1 + \sin u \sin u_1 \cos (\lambda - \lambda_1).$$

После подстановки этой величины в Y_1 (7) мы находим:

$$Y_1 = \delta_1 [\cos u_1 \cos u + \sin u \sin u_1 (\cos \lambda \cos \lambda_1 + \sin \lambda \sin \lambda_1)]$$

или, пользуясь обозначениями таблицы II:

$$Y_1 = \delta_1 \cos u_1 A_{10} + \delta_1 \sin u_1 (\cos \lambda_1 \cos \lambda + \sin \lambda_1 \sin \lambda) A_{11}. \quad (8)$$

Сравнение этого выражения с шаровой функцией Y_1 (2) в потенциале Гаусса приводит нас к следующим соотношениям:

$$g_{10} = \delta_1 \cos u_1, \quad g_{11} = \delta_1 \sin u_1 \cos \lambda_1, \quad h_{11} = \delta_1 \sin u_1 \sin \lambda_1, \\ \delta_1^2 = g_{10}^2 + g_{11}^2 + h_{11}^2, \quad \operatorname{tg} \lambda_1 = \frac{h_{11}}{g_{11}}. \quad (9)$$

Для определения положения магнитной оси земли и, по отношению к ней, момента земного магнетизма достаточно, по Гауссу¹⁾, знания членов 1-го порядка в выражении V . Следовательно, момент земного магнетизма есть не что иное, как момент $R^3 \delta_1$ нашей равномерно намагниченной сферы, магнитная ось которой есть A .

¹⁾ Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins in Jahre 1838, S. 45.

Из (9) мы имеем, замечая, что $\sin \lambda_1$ должен быть отрицателен, а $\cos \lambda_1$ положителен:

$$\begin{aligned} \delta_1 = 0,32237, \lambda_A = -67^\circ 37' 6'' \text{ (западной долготы),} \\ u_A = 11^\circ 39' 45''. \end{aligned} \quad (I)$$

Здесь при λ и u введен индекс A вместо индекса единицы. Таким образом, южный полюс равномерного намагничивания земного шара лежит у северо-западного берега Гренландии, и положение равномерно намагниченного шара, который всего более приближается по своим магнитным свойствам к свойствам нашей планеты, определяется не осью вращения земли, а осью A .

Глава III. ФУНКЦИЯ 2-ГО ПОРЯДКА

Преобразование функции. Разыскание осей и момента

4. Функция Y_2 содержит 5 постоянных, т. е. столько, сколько их имеет шаровая поверхностная функция того же порядка с двумя различными несовпадающими осями. Для отыскания этих осей мы преобразуем функцию Y_2 (7) к виду функции Y_2 . Оси или полюсы этой функции означим через B и C , а координаты их соответственно через u_1, λ_1 и u_2, λ_2 . Мы внесём в выражение Y_2 величины:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \cos u \cos u_1 + \sin u \sin u_1 \cos (\lambda - \lambda_1), \\ \mu_2 &= \cos u \cos u_2 + \sin u \sin u_2 \cos (\lambda - \lambda_2), \\ \lambda_{12} &= \cos u_1 \cos u_2 + \sin u_1 \sin u_2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Мы получим:

$$\begin{aligned} Y_2 = & -\frac{\delta_1}{2} [\cos u_1 \cos u_2 + \sin u_1 \sin u_2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2)] + \\ & + \frac{3}{2} \delta_2 \cos^2 u \cos u_1 \cos u_2 + \frac{3}{2} \delta_2 \sin u \cos u \times \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & \cos \lambda (\sin u_1 \cos u_2 \cos \lambda_1 + \cos u_1 \sin u_2 \cos \lambda_2) + \\ & + \sin \lambda (\sin u_1 \cos u_2 \sin \lambda_1 + \cos u_1 \sin u_2 \sin \lambda_2) \end{aligned} \right\} + \\ & + \frac{3}{2} \delta_2 \sin^2 u \sin u_1 \sin u_2 \left\{ \begin{aligned} & \cos^2 \lambda \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \\ & + \sin^2 \lambda \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + \\ & - \sin \lambda \cos \lambda \sin (\lambda_1 + \lambda_2) \end{aligned} \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

В последний член этого выражения вставляем:

$$\cos^2 \lambda = \frac{1 + \cos 2\lambda}{2}, \quad \sin^2 \lambda = \frac{1 - \cos 2\lambda}{2},$$

вследствие чего он принимает следующий вид:

$$+ {}^3/4 \delta_2 \sin^2 u \sin u_1 \sin u_2 \left\{ \begin{array}{l} \cos 2\lambda \cos (\lambda_1 + \lambda_2) + \\ + \sin 2\lambda \sin (\lambda_1 + \lambda_2) \end{array} \right\} + \\ + {}^3/4 \delta_2 \sin^2 u \sin u_1 \sin u_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Мы присоединяем последний член этого выражения к первым двум членам формулы (11) и получаем, таким образом, сумму членов функции Y_2 , не зависящих от λ :

$$\frac{\delta_2}{2} \left\{ \begin{array}{l} -\cos u_1 \cos u_2 - \sin u_1 \sin u_2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2) + \\ + 3 \cos^2 u \cos u_1 \cos u_2 + \\ + {}^3/2 \sin^2 u \sin u_1 \sin u_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1) \end{array} \right\}.$$

Вынося здесь общим множителем $\sin u_1 \sin u_2$ и вставляя

$$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u,$$

найдем:

$$\frac{\delta_2}{2} \sin u_1 \sin u_2 \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{ctg} u_1 \operatorname{ctg} u_2 + 1/2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1) + \\ + 3 \cos^2 u [\operatorname{ctg} u_1 \operatorname{ctg} u_2 - 1/2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)] \end{array} \right\}$$

или

$$\frac{3\delta_2}{2} \sin u_1 \sin u_2 [\operatorname{ctg} u_1 \operatorname{ctg} u_2 - 1/2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)] (\cos^2 u - 1/3)$$

и по таблице I:

$$\frac{3\delta_2}{2} \sin u_1 \sin u_2 [\operatorname{ctg} u_1 \operatorname{ctg} u_2 - 1/2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)] A_{20}.$$

Принимая во внимание обозначения таблицы I и полагая

$$\left. \begin{array}{l} M = \delta_2 \sin u_1 \sin u_2, \\ \operatorname{ctg} u_1 = x, \quad \operatorname{ctg} u_2 = y, \\ \lambda_2 - \lambda_1 = \Delta, \quad \lambda_2 + \lambda_1 = \sigma, \end{array} \right\} \quad (12)$$

мы получаем окончательно:

$$\begin{aligned}
 Y_2 = \frac{3M}{2} (xy - 1/2 \cos \Delta) A_{20} + \\
 + \frac{3M}{2} [\cos \lambda (y \cos \lambda_1 + x \cos \lambda_2) + \\
 + \sin \lambda (y \sin \lambda_1 + x \sin \lambda_2)] A_{21} + \\
 + \frac{3M}{4} (\cos 2\lambda \cos \sigma + \sin 2\lambda \sin \sigma) A_{22}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

5. Приведя функцию Y_2 к виду шаровой функции 2-го порядка Y_2 в потенциале Гаусса, мы можем приступить к сравнению коэффициентов при A_{2i} в выражениях обеих функций; мы получим следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{2}{3M} g_{20} &= xy - 1/2 \cos \Delta, \\
 \frac{2}{3M} g_{21} &= y \cos \lambda_1 + x \cos \lambda_2, \\
 \frac{2}{3M} h_{21} &= y \sin \lambda_1 + x \sin \lambda_2, \\
 \frac{4}{3M} g_{22} &= \cos \sigma, \\
 \frac{4}{3M} h_{22} &= \sin \sigma.
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Из двух последних уравнений мы находим:

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{h_{22}}{g_{22}} = \operatorname{tg} 65^\circ 47' 30''. \quad (15)$$

Так как M положительно, а g_{22} и h_{22} отрицательны, то $\sin \sigma$ и $\cos \sigma$ должны быть отрицательными. Поэтому

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 180^\circ + 65^\circ 47' 30'' = 245^\circ 47' 30'' \quad (16)$$

и, далее,

$$M = 0,018416. \quad (17)$$

6. Мы переходим теперь к определению x и y . Возвышаем в квадрат и складываем друг с другом второе и третье из уравнений (14); получаем:

$$\left(\frac{2}{3M} g_{21} \right)^2 + \left(\frac{2}{3M} h_{21} \right)^2 = y^2 + x^2 + 2xy \cos \Delta. \quad (18)$$

Полагаем:

$$\left(\frac{2}{3M} g_{21}\right)^2 + \left(\frac{2}{3M} h_{21}\right)^2 = 3,47126 = A. \quad (19)$$

Первое из уравнений (14) даёт:

$$\frac{4}{3M} g_{20} + \cos \Delta = 2xy. \quad (20)$$

Из (18) и (20) составляем два следующих уравнения:

$$\left. \begin{aligned} A + \left(\frac{4}{3M} g_{20} + \cos \Delta\right)(1 - \cos \Delta) &= (y + x)^2, \\ A - \left(\frac{4}{3M} g_{20} + \cos \Delta\right)(1 + \cos \Delta) &= (y - x)^2, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

откуда, вводя новые обозначения C и S :

$$\left. \begin{aligned} y + x &= \pm \sqrt{A + \left(\frac{4}{3M} g_{20} + \cos \Delta\right)(1 - \cos \Delta)} = S, \\ y - x &= \pm \sqrt{A - \left(\frac{4}{3M} g_{20} + \cos \Delta\right)(1 + \cos \Delta)} = C. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Отсюда находим величины:

$$x = 1/2(S - C), \quad y = 1/2(S + C),$$

которые вносим во второе и третье из уравнений (14); получаем:

$$\frac{4}{3M} g_{21} = S(\cos \lambda_1 + \cos \lambda_2) + C(\cos \lambda_1 - \cos \lambda_2),$$

$$\frac{4}{3M} h_{21} = S(\sin \lambda_1 + \sin \lambda_2) + C(\sin \lambda_1 - \sin \lambda_2).$$

Мы заменяем здесь суммы и разности косинусов и синусов их произведениями по известным формулам.

Мы получим, припоминая смысл обозначений σ и Δ (12):

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3M} g_{21} &= S \cos \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\Delta}{2} + C \sin \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\Delta}{2}, \\ \frac{2}{3M} h_{21} &= S \sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\Delta}{2} - C \cos \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\Delta}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Путём исключения получаем далее:

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3M} \left(g_{21} \cos \frac{\sigma}{2} + h_{21} \sin \frac{\sigma}{2} \right) &= S \cos \frac{\Delta}{2}, \\ \frac{2}{3M} \left(g_{21} \sin \frac{\sigma}{2} - h_{21} \cos \frac{\sigma}{2} \right) &= C \sin \frac{\Delta}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Введём для сокращения следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{9M^2} \left(g_{21} \cos \frac{\sigma}{2} + h_{21} \sin \frac{\sigma}{2} \right)^2 &= 1,88851 = m, \\ \frac{4}{9M^2} \left(g_{21} \sin \frac{\sigma}{2} - h_{21} \cos \frac{\sigma}{2} \right)^2 &= 1,58275 = n. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Тогда получим из (24):

$$\frac{m}{S^2} + \frac{n}{C^2} = 1$$

или

$$mC^2 + nS^2 = C^2S^2. \quad (26)$$

Мы внесём в это выражение значения C и S из (22) и введём ещё обозначения:

$$1 - \cos \Delta = z, \quad 1 + \frac{4}{3M} g_{20} = 1,57238 = a. \quad (27)$$

Мы получаем:

$$\begin{aligned} m[A - (a - z)(2 - z)] + n[A + (a - z)z] &= \\ &= [A - (a - z)(2 - z)][A + (a - z)z]. \end{aligned} \quad (28)$$

Мы замечаем ещё, что по уравнениям (19) и (25)

$$m + n = A. \quad (29)$$

После преобразований уравнение (28) примет вид:

$$(a - z)[z^3 - (a + z)z^2 - (A - 2a)z + 2n] = 0. \quad (30)$$

Одно из решений будет:

$$z = a. \quad (31)$$

Три остальные содержатся в уравнении

$$z^3 - \alpha z^2 - \beta z + \gamma = 0, \quad (32)$$

где положено:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= a + 2 = 3,57238, \\ \beta &= A - 2a = 0,32650, \\ \gamma &= 2n = 3,16550. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Решение (31) не может быть принято, так как оно даёт из уравнений (27):

$$\cos \Delta = -\frac{4}{3M} g_{20}$$

и из первого из уравнений (14):

$$xy = 0, \quad \text{т. е. } x = 0 \quad \text{или} \quad y = 0.$$

Мы получим, таким образом, для определения трёх величин, например y , λ_1 , λ_2 , три первых уравнения (14) и уравнение (16), что невозможно.

7. Мы переходим к решению уравнения (32). Полагая в нём

$$z = \zeta + \frac{\alpha}{3}, \quad (34)$$

получаем:

$$\zeta^3 - \zeta \left(\beta + \frac{\alpha^2}{3} \right) + \gamma - \frac{\beta\alpha}{3} - \frac{2\alpha^3}{27} = 0. \quad (35)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} p &= -\left(\beta + \frac{\alpha^2}{3} \right) = -4,57973, \\ q &= \gamma - \frac{\beta\alpha}{3} - \frac{2\alpha^3}{27} = -0,59939, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

тогда уравнение (35) будет:

$$\zeta^3 + p\zeta + q = 0. \quad (37)$$

Мы видим из (36), что

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -3,467783 < 0.$$

Поэтому уравнение (37) имеет три действительных корня, которые и находим по известной методе.

Пусть

$$\rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = 1,8862, \quad \cos \omega = -\frac{q}{2\rho}, \quad \omega = 80^\circ 51' 30''.$$

Искомые корни будут:

$$2 \sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\omega}{3}, \quad 2 \sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\omega + 2\pi}{3}, \quad 2 \sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\omega + 4\pi}{3},$$

или ξ равно одной из следующих величин:

$$2,20184; -2,07053; -0,13131. \quad (38)$$

Припоминая, что по (34) и (27)

$$\zeta = -\cos \Delta - 0,19079$$

или

$$\cos \Delta = -\zeta - 0,19079,$$

мы видим, что пригоден только последний из найденных корней. Итак,

$$\cos \Delta = -0,05948 = -\cos 86^\circ 35' 20''.$$

Так как $\Delta < \pi$, то мы выбираем следующее значение для Δ :

$$\Delta = 180^\circ - 86^\circ 35' 20'' = 93^\circ 24' 40''. \quad (39)$$

Следовательно, разность долгот осей B и C почти равна 90° . Из величины Δ и из (16) вычисляем:

$$\lambda_1 = 76^\circ 11' 25'', \quad \lambda_2 = 169^\circ 36' 5''. \quad (II)$$

Далее, из второго и третьего из уравнений (14) вычисляем величины x и y . Мы находим:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3M} g_{21} \sin \lambda_2 - \frac{2}{3M} h_{21} \cos \lambda_2 &= y \sin (\lambda_2 - \lambda_1), \\ \frac{2}{3M} h_{21} \cos \lambda_1 - \frac{2}{3M} g_{21} \sin \lambda_1 &= x \sin (\lambda_2 - \lambda_1). \end{aligned} \quad (40)$$

Получаем:

$$u_1 = 28^\circ 11' 55'', \quad u_2 = 82^\circ 42' 13'', \quad (II')$$

и из величины M (12)

$$\delta_2 = 0,039314. \quad (\text{II}^{\prime\prime})$$

Это есть магнитный момент 2-го порядка нашего земного шара. Угол между осями B и C равен $85^{\circ}10'30''$, т. е. ось C делает с осью земли почти такой же угол, как с осью B .

8. Уравнение плоскости, проходящей через центр земли, в употребляемых нами полярных координатах имеет вид:

$$a \cos \lambda + b \sin \lambda + \text{ctg } u = 0, \quad (41)$$

где a и b суть постоянные, подлежащие определению. Найдём плоскость, проходящую через оси $B(u_1, \lambda_1)$ и $C(u_2, \lambda_2)$. Координаты этих осей должны удовлетворять написанному выше уравнению, откуда мы и получаем два уравнения для определения постоянных a и b . Из них мы находим:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\sin \lambda_1 \text{ctg } u_2 - \sin \lambda_2 \text{ctg } u_1}{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ b &= \frac{\cos \lambda_2 \text{ctg } u_1 - \cos \lambda_1 \text{ctg } u_2}{\sin (\lambda_2 - \lambda_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Таким образом, уравнение искомой плоскости будет:

$$0,212639 \cos \lambda + 1,868222 \sin \lambda = \text{ctg } u \quad (43)$$

или

$$\text{ctg } u_M \cdot \cos (\lambda_M - \lambda) = \text{ctg } u, \quad (44)$$

где

$$\lambda_M = 83^{\circ}30'20'' \quad \text{и} \quad u_M = 28^{\circ}0'20'' \quad (45)$$

суть координаты высшей точки M в северном полушарии над экватором на большом круге, по которому плоскость (43) пересекает земной шар. Большой круг пересекает экватор в двух точках, для которых $\text{ctg } u = 0$
и

$$\lambda_M - \lambda = \pm 90^{\circ}.$$

Мы означим эти точки через P_2 и P'_2 . Их долготы будут:

$$\left. \begin{aligned} (P_2) & - 6^\circ 29' 40'' \text{ (западная долгота),} \\ (P'_2) & 173^\circ 30' 20'' \text{ (восточная долгота).} \end{aligned} \right\} \quad (45')$$

Мы видим, что высшая точка M большого круга осей близка к совпадению с полюсом оси B . На прилагаемой карте, представляющей меркаторскую проекцию земного шара, изображён большой круг, плоскость которого содержит оси B и C . Его уравнение представляется выражением (43). Он вычерчен, пользуясь уже найденными выше точками и ещё точкой $\lambda = 45^\circ$, $u = 34^\circ 12''$, на нём лежащей.

Линия этого большого круга от точки пересечения P'_2 с экватором направляется к северо-западу почти под прямым углом к северо-восточной береговой линии азиатского материка, идёт через область восточно-азиатской магнитной аномалии, рассекая её на две почти равные части.

Далее она продолжается по материку Старого Света, приблизительно параллельно очертанию его береговой границы с Ледовитым и Атлантическим океаном. Выходит она вблизи экватора из северной Гвинеи и течёт далее по Атлантическому и Тихому океанам приблизительно параллельно береговым линиям Южной Америки в Атлантическом океане и линии материков Австралии.

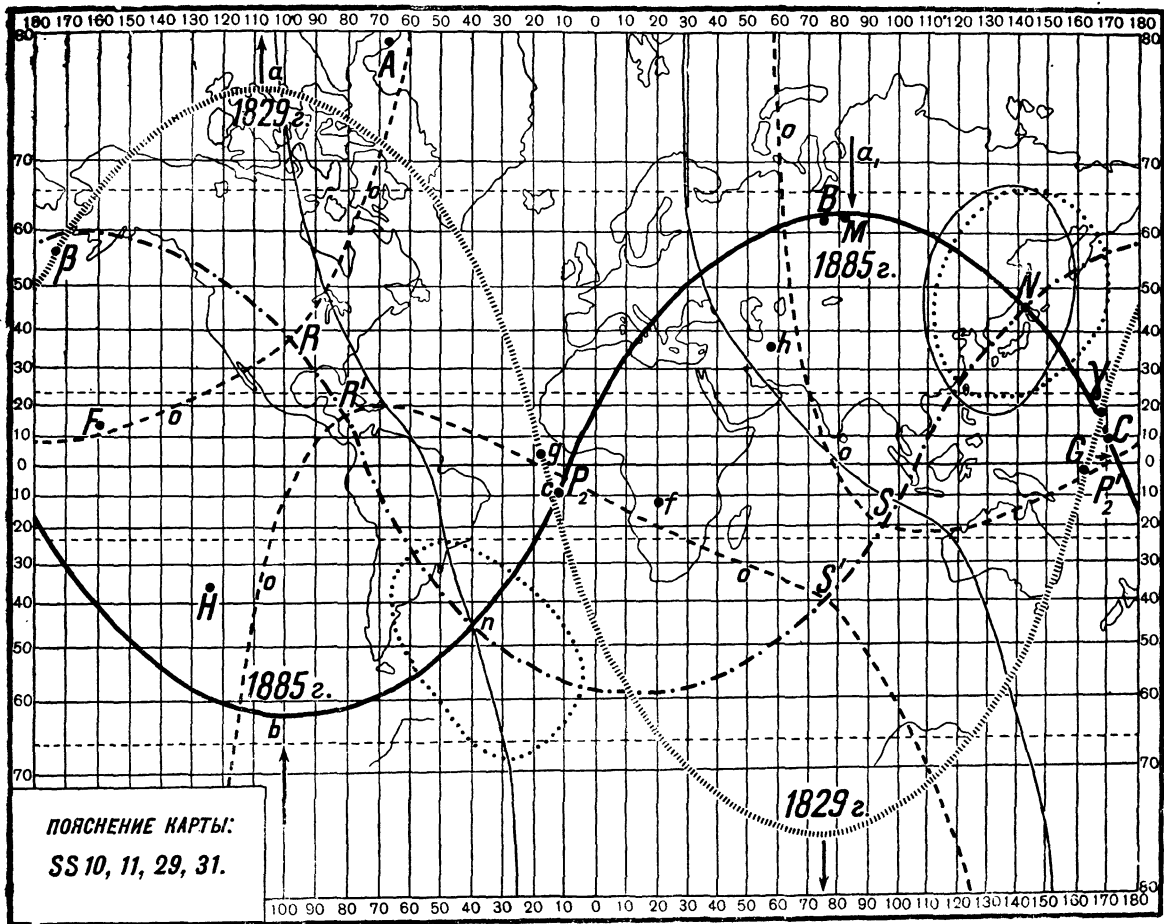
9. Определим положение биссектрисы угла между осями B и C и её полюс в северном полушарии. Половина угла BC составляет $42^\circ 35' 15''$.

Угол между радиус-векторами точек B и M определится из формулы

$$\cos \sphericalangle BM = \cos u_1 \cos u_M + \sin u_1 \sin u_M \cos (\lambda_M - \lambda_1)$$

равным $3^\circ 26' 50''$. Радиус-вектор биссектрисы будет поэтому делать с радиус-вектором точки M угол, равный $m = 39^\circ 8' 25''$.

Так как меридиональная плоскость, проходящая через точку M , перпендикулярна к плоскости большого



круга через полюсы B и C , то угол u_B биссектрисы с земной осью определится из выражения

$$\cos u_B = \cos u_M \cos m,$$

откуда

$$u_B = 46^\circ 46' 50'', \quad (46)$$

и по уравнению (44)

$$\lambda_B = 144^\circ 29' 20''. \quad (47)$$

Полюс N биссектрисы тоже нанесён на карте. Мы видим, что он падает внутри восточно-азиатской аномалии.

Глава IV. ЛИНИИ РАВНОГО ПОТЕНЦИАЛА ШАРОВОЙ ФУНКЦИИ 2-ГО ПОРЯДКА И ЕЁ НОРМАЛЬНЫЙ ТИП

Линии равного потенциала и их отношение к восточно-азиатской аномалии. Нормальный тип. Влияние на него вращения земли.

10. Мы можем перейти теперь к построению линий равного потенциала шаровой функции Y_2 . Из её вида (7)

$$Y_2 = \delta_2 (3\mu_1 u_2 - \lambda_{12}) \quad (48)$$

мы заключаем, что полярное уравнение линий равного потенциала будет:

$$\mu_1 u_2 = c = \text{const.} \quad (49)$$

Введём новую систему координат, принявши найденную выше биссектрису за полярную ось земного шара; угол радиус-вектора какой-нибудь точки с этой осью означим через η , причём он изменяется от 0° до 180° ; угол между плоскостью, содержащей этот радиус-вектор и биссектрису, и плоскостью, проходящей через биссектрису и ось B , т. е. плоскостью осей B и C , означим через ξ ; этот угол будем отсчитывать от 0 до 2π в направлении запад, юг, восток, север. Для оси B будет $\xi = 0$, для оси C $\xi = 180^\circ$.

Означая через μ_1 и μ_2 косинусы углов радиус-вектора какой-нибудь точки с осями B и C , мы получим,

означая через $\alpha = 42^\circ 35' 15''$ половину угла между осями B и C :

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \cos \eta \cos \alpha + \sin \eta \sin \alpha \cos \xi, \\ \mu_2 &= \cos \eta \cos \alpha - \sin \eta \sin \alpha \cos \xi. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Отсюда, перемножая, находим:

$$c = \cos^2 \eta \cos^2 \alpha - \sin^2 \eta \sin^2 \alpha \cos^2 \xi \quad (51)$$

и определяем

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \eta &= \frac{c + \sin^2 \alpha \cos^2 \xi}{1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \xi}, \\ \sin^2 \eta &= \frac{\cos^2 \alpha - c}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \xi}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Второе из этих уравнений показывает, что наибольшее значение c равно $\cos^2 \alpha$, что понятно, так как $\cos^2 \alpha$ есть максимум произведения $\mu_1 \mu_2$. При этом для всяких ξ будет $\eta = 0$. Следовательно, полюс-биссектрисы есть стянувшаяся в точку линия равного потенциала.

Мы видим, далее, что для ξ , $180 - \xi$, $180 + \xi$, $360 - \xi$ величина $\cos^2 \eta$ не изменяется. Мы заключаем отсюда, что искомые кривые имеют две криволинейные оси симметрии, из которых одна есть дуга большого круга, плоскость которого содержит оси B и C , а другая есть дуга большого круга, перпендикулярного к первому и плоскость которого проходит через биссектрису.

Первое из уравнений (52) даёт для η две величины, η и $180 - \eta$,

что показывает, что линии равного потенциала дают две системы линий, одинаково расположенных вокруг полюсов биссектрисы в северном и южном полушариях. Для каждой системы линий соответственный полюс является центром.

Для $c = 0$ мы имеем линию равного потенциала, состоящую из двух больших кругов, полюсами которых служат полюсы осей B и C . Они пересекаются по нормали, проведённой из центра земли к плоскости осей,

и точки их пересечения отстоят на 90° от полюсов биссектрисы; эти линии были бы линиями нулевого потенциала, если бы угол между осями строго равнялся бы 90° .

Кривые, имеющие отрицательное c , не имеют точек с азимутом $\xi = 90^\circ$; это видно из второго уравнения (52), полагая в нём $\xi = 90^\circ$ и $c = -a^2$, где a^2 есть действительная положительная величина; именно, мы получаем невозможное соотношение:

$$\sin^2 \eta = 1 + \frac{a^2}{\cos^2 \alpha}.$$

Для построения линий равного потенциала по точкам нужно составить таблицу, часть которой я привожу здесь, причём замечу, что вследствие указанных выше свойств симметрии достаточно построить четверть кривой и притом только для одного полушария земли, считая за его полюс — полюс биссектрисы.

Таблица III

ξ	$\sin^2 \alpha \cos^2 \xi$	$1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \xi$	$\lg (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \xi)$
0	0,45797	1	0
45°	0,22898	0,77102	9,8870656
90°	0	0,54203	9,7340250

Для линий нулевого потенциала

$$3\mu_1\mu_2 = \lambda_{12}, \quad (53)$$

откуда

$$\mu_1\mu_2 = c = 0,028042. \quad (54)$$

Мы получаем из нашей формулы ряд соответственных точек:

$$\left. \begin{array}{ccc} \xi & 0^\circ & 45^\circ & 90^\circ \\ \eta & 45^\circ 48' & 54^\circ 44' & 76^\circ 51'. \end{array} \right\} \quad (55)$$

Внутри этих линий Y_2 положительно, что соответствует южному магнетизму. Обе линии не имеют общих точек и они лежат раздельно в двух полушариях; они показаны на карте.

Если бы угол между осями равнялся точно 90° , т. е. $\lambda_{12} = 0$, то для нулевого потенциала $\mu_1 \mu_2 = 0$, и обе линии нулевого потенциала имели бы две общие точки: $\xi = 90^\circ$ и 270° , $\eta = 90^\circ$. Эти линии были бы представлены двумя большими кругами, полюсами коих были бы полюсы осей B и C . Об этих линиях мы говорили выше.

Рассмотрим ещё линию равного потенциала, близкую к агонической линии восточно-азиатской магнитной аномалии. Мы берём для неё

$$c = 0,45028 \quad (56)$$

и получаем:

$$\left. \begin{array}{l} \xi \quad 0^\circ \quad 45^\circ \quad 90^\circ \\ \eta \quad 17^\circ 38' \quad 20^\circ 50' \quad 24^\circ 18'. \end{array} \right\} \quad (57)$$

Обе кривые имеют вид замкнутой и удлинённой в направлении оси симметрии, перпендикулярной к дуге большого круга осей B и C . Они вычерчены на приложенной карте. Здесь симметрия кривых нарушена благодаря свойствам меркаторской проекции.

Полюсы биссектрисы суть пределы линии равного потенциала. Для них

$$c = \cos^2 \alpha = 0,54203,$$

и уравнение линии равного потенциала (51) принимает вид:

$$0 = \sin^2 \eta [\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \xi],$$

следовательно, удовлетворяется при $\eta = 0$ или 180° .

Указанные линии равного потенциала расположены на земном шаре симметрично относительно большого круга, плоскость которого перпендикулярна к биссектрисе угла между осями рассматриваемой нами шаровой функции 2-го порядка. Этот большой круг и

соответственную плоскость можно назвать магнитным экватором 2-го порядка, также и введённую нами биссектрису — магнитной осью 2-го порядка. Все линии, о которых здесь говорилось, и различные полюсы нанесены на прилагаемой при сём карте.

11. Шаровую функцию Y_2 в том виде, какой она имеет в потенциале Гаусса, можно рассматривать как уклонившуюся от некоторого нормального типа. Простейшее предположение о причине такого отклонения заключалось бы в том, что оно вызвано вращением земли. Функцию Y_2 можно представить себе поэтому равной сумме двух налагающихся друг на друга функций — одной нормальной Y'_2 и другой Y_2^0 , для которой земная ось есть двойная ось. Эта последняя функция и её момент δ_2^0 представят отклонение от нормального вида, вызванное вращением земли. Мы увидим, что δ_2^0 значительно меньше момента δ'_2 нормальной функции. Функция Y_2^0 вносит новую постоянную, именно момент δ_2^0 , но вместе с тем функция Y'_2 имеет одной постоянной меньше, так как нормальный тип определяется условием, выражающимся некоторым соотношением между прежними постоянными, в данном случае тем, что угол между её осями должен быть равен 90° .

Вид функции Y_2^0 определяется из вида Y_2 (7), полагая в нём

$$\lambda_{12} = 1, \quad \mu_1 = \mu_2 = \cos u. \quad (58)$$

Мы получим:

$$Y_2^0 = \delta_2^0 \left(\frac{3}{2} \cos^2 u - \frac{1}{2} \right), \quad (59)$$

или, по таблице I,

$$Y_2^0 = \frac{3\delta_2^0}{3} A_{20}. \quad (60)$$

Нормальным типом функции Y'_2 я выбираю тот, который имеет две взаимно перпендикулярные оси. Он получается из вида Y_2 (7), внося условие взаимной перпендикулярности осей, т. е. полагая

$$\lambda_{12} = \cos u_1 \cos u_2 + \sin u_1 \sin u_2 \cos (\lambda_1 - \lambda_2) = 0, \quad (61)$$

благодаря чему функция принимает простую форму

$$Y'_2 = \frac{3}{2} \delta_2^0 \mu_1 \mu_2. \quad (62)$$

Мы можем сохранить и прежние уравнения (14), дополнив их членом (60) и условием (61). Сохраняя прежние обозначения, получим поэтому:

$$\frac{2}{3} g_{20} = \delta_2^0 + xy - \frac{1}{2} \cos \Delta, \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{3M} g_{21} &= y \cos \lambda_1 + x \cos \lambda_2, \\ \frac{2}{3M} h_{21} &= y \sin \lambda_1 + x \sin \lambda_2, \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{4}{3M} g_{22} &= \cos \sigma, \\ \frac{4}{3M} h_{22} &= \sin \sigma \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

и уравнение (61):

$$xy + \cos \Delta = 0. \quad (66)$$

Уравнения (65) дают прежние величины для σ и M :

$$\sigma = 245^\circ 47' 30'' \quad \text{и} \quad M = 0,018416. \quad (67)$$

Для отыскания положения осей мы последуем приёму § 6, с тем различием, что вместо уравнения (63), которое послужит нам для определения δ_2^0 , мы будем пользоваться уравнением (66). Таким образом, из уравнения (64) мы находим:

$$\left(\frac{2}{3M} g_{21} \right)^2 + \left(\frac{2}{3M} h_{21} \right)^2 = y^2 + x^2 + 2xy \cos \Delta. \quad (68)$$

Отсюда, пользуясь прежним обозначением A и уравнением (66),

$$y^2 + x^2 = A + 2 \cos \Delta;$$

прибавляя и вычитая

$$2xy = -2 \cos \Delta,$$

находим, по извлечении корня:

$$\left. \begin{aligned} y + x &= \pm \sqrt{A + 2 \cos \Delta (\cos \Delta - 1)} = S, \\ y - x &= \pm \sqrt{A - 2 \cos \Delta (\cos \Delta + 1)} = C. \end{aligned} \right\} (69)$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{2} (S - C), \quad y = \frac{1}{2} (S + C)$$

и вносим в уравнение (64). Затем, поступая как в § 6, мы приходим к уравнению:

$$mC^2 + nS^2 = C^2S^2, \quad (70)$$

где m и n имеют прежние числовые значения, а S и C — значения, указанные в равенствах (69). Внося в уравнение (70) величины C и S и полагая

$$A' = \frac{1}{2} A, \quad 1 - \cos \Delta = Z, \quad (71)$$

мы получим после преобразований, аналогичных тем, которые изложены в § 6:

$$(1 - Z) [Z^3 - 3Z^2 - (A' - 2)Z + n] = 0. \quad (72)$$

Один из корней будет:

$$Z = 1 \quad \text{или} \quad \cos \Delta = 0. \quad (73)$$

Второй множитель уравнения (72) представим в виде:

$$Z^3 - \alpha Z^2 - \beta Z + \gamma = 0, \quad (74)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= 3, \quad \beta = A' + 2 = 1,73357 + 2 = 3,7336, \\ \gamma &= n = 1,58406. \end{aligned} \quad (75)$$

Полагая попережнему

$$Z = \zeta + \frac{\alpha}{3} = \zeta + 1, \quad \text{или} \quad \cos \Delta = -\zeta, \quad (76)$$

мы вычисляем:

$$\left. \begin{aligned} p &= -\left(\beta + \frac{\alpha^2}{3}\right) = -6,7336, \\ q &= \gamma - \frac{\beta\alpha}{3} - \frac{2\alpha^3}{27} = -4,1525. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Мы видим, что

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27} < 0,$$

следовательно, все три корня действительны.

Полагая

$$\rho = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}, \quad \cos \omega = -\frac{q}{2\rho}, \quad (78)$$

мы находим

$$\omega = 51^\circ 52'. \quad (79)$$

Из трёх корней ξ

$$2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\omega}{3}, \quad 2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\omega + 2\pi}{3}, \quad 2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{\omega + 4\pi}{3} \quad (80)$$

абсолютная величина первых двух больше единицы, а потому они не годны. Третий корень даёт:

$$\Delta = 48^\circ 46'. \quad (81)$$

Из двух корней (73) и (81) первый ближе к нашему общему решению. Поэтому мы останавливаемся на нём, т. е. берём:

$$\Delta = 90^\circ. \quad (82)$$

Отсюда и из (67) находим:

$$\lambda_1 = 77^\circ 35' 50'', \quad \lambda_2 = 167^\circ 35' 50'' \quad (83)$$

— величины, мало различающиеся от найденных прежде в § 4. Но вследствие (82) мы находим из (66):

$$xy = 0, \quad (84)$$

т. е. одна из величин x или $y = 0$. Чтобы решить какая, мы обращаемся к уравнениям (64), в левых частях которых теперь вместо двух членов должно остаться по одному.

Мы находим:

$$\frac{h_{21}}{g_{21}} = -\operatorname{tg} 14^{\circ}38' = \operatorname{tg} 165^{\circ}22'. \quad (85)$$

Так как этот угол мало отличается от λ_2 , то заключаем, что

$$y = 0. \quad (86)$$

Тогда из одного уравнения (64), а именно из

$$\frac{2}{3M} g_{21} = x \cos \lambda_2,$$

определяем x . Таким образом, отсюда и из (85) находим:

$$u_1 = 28^{\circ}13'30'', \quad u_2 = 90^{\circ}. \quad (87)$$

Таким образом, мы видим, что ось C перешла на экватор и плоскость BC немного повернулась к западу.

Из величины M мы вычисляем момент нормальной функции:

$$\delta'_2 = 0,03894. \quad (88)$$

Уравнение (63) будет:

$$\frac{2}{3} g_{20} = \delta_2^0,$$

откуда момент шаровой функции, для которой земная ось служит двойной осью, будет:

$$\delta_2^0 = 0,00527. \quad (89)$$

Приведённое исследование показывает, что возможность существования принятого нормального типа обусловливается тем, что выражение (85) дало величину тангенса угла, близкую к тангенсу одной из долгот, именно λ_2 .

Совершенно иной взгляд открывается на шаровую функцию 2-го порядка, если мы будем исходить из величины Δ (81). Пользуясь ею и величиной (67), мы находим:

$$\lambda_1 = 98^\circ 30', \quad \lambda_2 = 147^\circ 16',$$

и затем, решая уравнения (65), (64), (63), получаем:

$$u_1 = 65^\circ, \quad u_2 = 127^\circ 36',$$

$$\delta'_2 = 0,02565,$$

$$\delta_2^0 = 0,9894.$$

Ввиду значительного момента этой функции мы должны рассматривать её как главную составную часть шаровой функции 2-го порядка, а функцию Y'_2 —как часть, вносящую возмущение в распределение магнетизма, обусловленного вращением земли, а не наоборот. Решение вопроса в ту или другую сторону возможно только путём изучения вековых изменений земного магнетизма, причём разделение шаровой функции на две должно быть подчинено условию, чтобы абсолютная величина отношения

$$\delta_2^0 : \delta'_2$$

была бы наибольшей или наименьшей.

ПОЯСНЕНИЕ КАРТЫ

Сплошной чертой представлен большой круг, плоскость коего содержит оси Bb и Cc . M есть высшая точка круга над экватором к северу, P_2, P'_2 —его точки

пересечения с экватором. M и n — полюсы биссектрисы в северном и южном полушариях. Большой круг, содержащий оси B и C , и большой круг, обозначенный попеременно чёрточками и точками, к нему перпендикулярный, представляют на сфере оси симметрии чрезвычайно искажённых в меркаторской проекции линий равного потенциала. Точки N и n суть их центры. Линия равного потенциала, представленная рядом точек, окружающих полюс биссектрисы N , мало уклоняется от агонической линии восточно-азиатской аномалии, означенной тонкой чертой. Две другие линии, обозначенные чёрточками, представляют линии нулевого потенциала. При типической форме функции Y_2 соответственные вершины этих линий S , S' , R и R' должны совпасть и обе линии должны представить собою два взаимно пересекающихся больших круга. Всего лучше начертить эти кривые на глобусе.

Глава V. ФУНКЦИЯ 3-го ПОРЯДКА

12. Функция Y_3 содержит 7 постоянных, следовательно, такое же число, как и шаровая поверхностная функция 3-го порядка с тремя различными осями. Поэтому мы перейдём к преобразованию функции Y_3 самого общего вида (7), гл. I. Её оси означим через F , G , H и будем снабжать их полярные координаты u , λ соответственно одним, двумя и тремя штрихами. Ввиду обширности главы нумерация формул ведётся, начиная с 1-й.

Мы вносим в выражение Y_3 следующие величины:

$$\mu_1 = \cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos (\lambda - \lambda'),$$

$$\mu_2 = \cos u \cos u'' + \sin u \sin u'' \cos (\lambda - \lambda''),$$

$$\mu_3 = \cos u \cos u''' + \sin u \sin u''' \cos (\lambda - \lambda''').$$

Мы получим:

$$\begin{aligned}
 Y_3 = & \frac{5}{2} \delta_3 \{ \cos^3 u \cos u'' \cos u''' + \\
 & + \cos^2 u \sin u \sin u' \cos u'' \cos u''' \cos (\lambda - \lambda') + \\
 & + \cos^2 u \sin u \cos u' \sin u'' \cos u''' \cos (\lambda - \lambda'') + \\
 & + \cos^2 u \sin u \cos u' \cos u'' \sin u''' \cos (\lambda - \lambda''') + \\
 & + \sin^2 u \cos u \sin u' \sin u'' \cos u''' \cos (\lambda - \lambda') \cos (\lambda - \lambda'') + \\
 & + \sin^2 u \cos u \cos u' \sin u'' \sin u''' \cos (\lambda - \lambda'') \cos (\lambda - \lambda''') + \\
 & + \sin^2 u \cos u \sin u' \cos u'' \sin u''' \cos (\lambda - \lambda''') \cos (\lambda - \lambda') + \\
 & + \sin^3 u \sin u' \sin u'' \sin u''' \times \\
 & \times \cos (\lambda - \lambda') \cos (\lambda - \lambda'') \cos (\lambda - \lambda''') - \\
 & - \frac{1}{5} [\cos u (\lambda_{23} \cos u' + \lambda_{31} \cos u'' + \lambda_{12} \cos u''') + \\
 & + \sin u \sin u' \lambda_{23} \cos (\lambda - \lambda') + \\
 & + \sin u \sin u'' \lambda_{31} \cos (\lambda - \lambda'') + \\
 & + \sin u \sin u''' \lambda_{12} \cos (\lambda - \lambda''')] \}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

13. Мы начнём преобразование с членов 3-го порядка относительно $\cos \lambda$ и $\sin \lambda$. Они содержатся в члене выражения (1), имеющего множителем $\sin^3 u$.

Полагая

$$M_3 = \delta_3 \sin u' \sin u'' \sin u''' \quad (2)$$

и производя простые преобразования, мы придаём этому члену следующий вид:

$$\frac{5}{2} M_3 \left\{ \begin{array}{l} \cos^3 \lambda \cos (\lambda' + \lambda'' + \lambda''') + \\ + \cos \lambda \sum \sin \lambda' \sin \lambda'' \cos \lambda''' - \\ - \sin^3 \lambda \sin (\lambda' + \lambda'' + \lambda''') + \\ + \sin \lambda \sum \cos \lambda' \cos \lambda'' \sin \lambda''' \end{array} \right\} \sin^3 u. \quad (3)$$

Внося сюда выражения:

$$\left. \begin{aligned} \cos^3 \lambda &= \frac{1}{4} \cos 3\lambda + \frac{3}{4} \cos \lambda, \\ \sin^3 \lambda &= \frac{3}{4} \sin \lambda - \frac{1}{4} \sin 3\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

получим:

$$\frac{5}{2} M_3 \sin^3 u \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{4} \cos (\lambda' + \lambda'' + \lambda''') \cos 3\lambda + \\ &+ \frac{1}{4} \sin (\lambda' + \lambda'' + \lambda''') \sin 3\lambda + \\ &+ \cos \lambda \left[\frac{3}{4} \cos (\lambda' + \lambda'' + \lambda''') + \right. \\ &+ \left. \sum \sin \lambda' \sin \lambda'' \cos \lambda''' \right] - \\ &- \sin \lambda \left[\frac{3}{4} \sin (\lambda' + \lambda'' + \lambda''') - \right. \\ &- \left. \sum \cos \lambda' \cos \lambda'' \sin \lambda''' \right] \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Но мы имеем тождественно:

$$\left. \begin{aligned} \sum \sin \lambda' \sin \lambda'' \cos \lambda''' &= \\ &= \sin \lambda' \sin \lambda'' \cos \lambda''' + \sin \lambda' \cos \lambda'' \sin \lambda''' + \\ &+ \cos \lambda' \sin \lambda'' \sin \lambda''' = \cos \lambda' \cos \lambda'' \cos \lambda''' - \\ &- \cos (\lambda' + \lambda'' + \lambda'''); \\ \sum \cos \lambda' \cos \lambda'' \sin \lambda''' &= \\ &= \cos \lambda' \cos \lambda'' \sin \lambda''' + \cos \lambda' \sin \lambda'' \cos \lambda''' + \\ &+ \sin \lambda' \cos \lambda'' \cos \lambda''' = \sin (\lambda' + \lambda'' + \lambda''') + \\ &+ \sin \lambda' \sin \lambda'' \sin \lambda'''. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Члены окончательно преобразованные будем означать через Q , а члены, которые ещё подлежат преобразованию, означим через R . Принимая во внимание

таблицу I и полагая

$$\lambda' + \lambda'' + \lambda''' = \sigma, \quad (7)$$

мы найдём:

$$Q_3 = \frac{5}{8} M_3 A_{33} \{ \cos \sigma \cdot \cos 3\lambda + \sin \sigma \cdot \sin 3\lambda \}, \quad (8)$$

$$R_3 = \frac{5}{2} M_3 \sin^3 u \left\{ \begin{aligned} & \cos \lambda \left[\cos \lambda' \cos \lambda'' \cos \lambda''' - \frac{1}{4} \cos \sigma \right] + \\ & + \sin \lambda \left[\sin \lambda' \sin \lambda'' \sin \lambda''' + \frac{1}{4} \sin \sigma \right] \end{aligned} \right\}. \quad (9)$$

14. Мы перейдём теперь к членам 2-го порядка. Они имеют множителем $\cos u \sin^2 u$ и принимают следующий вид:

$$\frac{5}{2} M_3 \left\{ \begin{aligned} & \cos^2 \lambda \sum \operatorname{ctg} u' \cos \lambda'' \cos \lambda''' + \\ & + \sin^2 \lambda \sum \operatorname{ctg} u' \sin \lambda'' \sin \lambda''' + \\ & + \cos \lambda \sin \lambda \sum \operatorname{ctg} u' \sin (\lambda'' + \lambda''') \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Мы вносим сюда:

$$\cos^2 \lambda = \frac{1 + \cos 2\lambda}{2},$$

$$\sin^2 \lambda = \frac{1 - \cos 2\lambda}{2}$$

и получаем:

$$\frac{5}{2} M_3 \left\{ \begin{aligned} & \frac{\cos 2\lambda}{2} (\sum \operatorname{ctg} u' \cos \lambda'' \cos \lambda''' - \\ & - \sum \operatorname{ctg} u' \sin \lambda'' \sin \lambda''') + \\ & + \frac{\sin 2\lambda}{2} \sum \operatorname{ctg} u' \sin (\lambda'' + \lambda''') + \\ & + \frac{1}{2} (\sum \operatorname{ctg} u' \cos \lambda'' \cos \lambda''' + \\ & + \sum \operatorname{ctg} u' \sin \lambda'' \sin \lambda''') \end{aligned} \right\}, \quad (11)$$

откуда, обращая внимание на таблицу I,

$$Q_2 = \frac{5}{4} M_3 A_{32} [\cos 2\lambda \sum \operatorname{ctg} u' \cos (\lambda'' + \lambda''') + \\ + \sin 2\lambda'' \sum \operatorname{ctg} u' \sin (\lambda'' + \lambda)], \quad (12)$$

$$R_2 = \frac{5}{4} M_3 \cos u \sin^2 u \sum \operatorname{ctg} u' \cos (\lambda'' - \lambda'''). \quad (13)$$

15. Члены 1-го порядка функции Y_3 имеют множителей в виде $\cos^2 u \sin u$ или $\sin u$. Мы напишем их, присоединяя к ним и выражение R_3 (9); в последнем мы заменяем ещё

$$\sin^3 u = \sin u - \sin u \cos^2 u$$

и вносим величины $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}$. Получим:

$$\frac{5}{2} M_3 \sin u \cos^2 u \left\{ \begin{array}{l} \cos \lambda \left(\sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \cos \lambda' - \right. \\ \left. - \cos \lambda' \cos \lambda'' \cos \lambda''' + \frac{1}{4} \cos \sigma \right) + \\ \left. + \sin \lambda \left(\sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \sin \lambda' - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \lambda' \sin \lambda'' \sin \lambda''' - \frac{1}{4} \sin \sigma \right) \right\} - \\ \\ - \frac{1}{2} M_3 \sin u \left\{ \begin{array}{l} \cos \lambda \left[\sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \cos \lambda' - \right. \\ \left. - 5 \left(\cos \lambda' \cos \lambda'' \cos \lambda''' - \frac{1}{4} \cos \sigma \right) + \right. \\ \left. + \sum \cos (\lambda'' - \lambda''') \cos \lambda' \right] + \\ \left. + \sin \lambda \left[\sum \cos (\lambda'' - \lambda''') \sin \lambda' - \right. \right. \\ \left. \left. - 5 \left(\sin \lambda' \sin \lambda'' \sin \lambda''' + \frac{1}{4} \sin \sigma \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \sin \lambda' \right] \right\}. \quad (14)$$

Мы имеем тождественно по (6):

$$\sum \cos (\lambda'' - \lambda''') \cos \lambda' = 4 \cos \lambda' \cos \lambda'' \cos \lambda''' - \cos \sigma,$$

$$\sum \cos (\lambda'' - \lambda''') \sin \lambda' = 4 \sin \lambda' \sin \lambda'' \sin \lambda''' + \sin \sigma.$$

Вставляя в (14), получаем:

$$\frac{M_3}{2}(5 \sin u \cos^2 u - \sin u) \left\{ \begin{array}{l} \cos \lambda \left[\sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \cos \lambda' - \right. \\ \left. - \cos \lambda' \cos \lambda'' \cos \lambda''' + \frac{1}{4} \cos \sigma \right] + \\ \left. + \sin \lambda \left[\sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \sin \lambda' - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \lambda' \sin \lambda'' \sin \lambda''' - \frac{1}{4} \sin \sigma \right] \right\},$$

и окончательно, обращая внимание на табл. I,

$$Q_1 = \frac{5M_3}{2} A_{31} \left\{ \begin{array}{l} \cos \lambda \left[\sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \cos \lambda' - \right. \\ \left. - \cos \lambda' \cos \lambda'' \cos \lambda''' + \frac{1}{4} \cos \sigma \right] + \\ \left. + \sin \lambda \left[\sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \sin \lambda' - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin \lambda' \sin \lambda'' \sin \lambda''' - \frac{1}{4} \sin \sigma \right] \right\}, \quad (15)$$

$$R_1 = 0. \quad (16)$$

16. Нам остаётся ещё преобразовать члены нулевого порядка, не зависящие от λ . К ним присоединяем и R_2 (13). Заменяя в них λ_{23} , λ_{31} , λ_{12} их величинами и вставляя

$$\cos u \sin^2 u = \cos u - \cos^3 u,$$

придадим им следующий вид:

$$\frac{5M_3}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos u \left[-\frac{3}{5} \operatorname{ctg} u' \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' - \right. \\ \left. - \frac{1}{5} \sum \cos (\lambda'' - \lambda''') \operatorname{ctg} u' + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum \cos (\lambda' - \lambda''') \operatorname{ctg} u' \right] - \\ - \cos^3 u \left[-\operatorname{ctg} u' \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum \cos (\lambda'' - \lambda''') \operatorname{ctg} u' \right] \end{array} \right\}$$

ИЛИ

$$\frac{5M_3}{2} \left\{ \begin{array}{l} \cos u \left[\frac{3}{10} \sum \cos(\lambda'' - \lambda''') \operatorname{ctg} u' - \right. \\ \left. - \frac{3}{5} \operatorname{ctg} u' \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \right] - \\ - \cos^3 u \left[\frac{1}{2} \sum \cos(\lambda'' - \lambda''') \operatorname{ctg} u' - \right. \\ \left. - \operatorname{ctg} u' \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \right] \end{array} \right\}.$$

Отсюда, обращая внимание на табл. I,

$$Q_0 = \frac{5M_3}{2} A_{30} \left\{ \operatorname{ctg} u' \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' - \frac{1}{2} \sum \cos(\lambda'' - \lambda''') \operatorname{ctg} u' \right\}. \quad (17)$$

17. Мы привели теперь функцию Y_3 к виду

$$Y_3 = Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

тождественному с видом функции Y_3 . Приравнивая в обеих коэффициенты при A_{ij} , а затем при $\cos i\lambda$ и $\sin i\lambda$, мы получаем число условий, достаточное для определения всех постоянных. Эти условия будут:

$$g_{30} = \frac{5M_3}{2} \left\{ \operatorname{ctg} u' \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' - \frac{1}{2} \sum \cos(\lambda'' - \lambda''') \operatorname{ctg} u' \right\}, \quad (18)$$

$$\left. \begin{array}{l} g_{31} = \frac{5M_3}{2} \left\{ \sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \cos \lambda' - \right. \\ \left. - \cos \lambda' \cos \lambda'' \cos \lambda''' + \frac{1}{4} \cos \sigma \right\}, \\ h_{31} = \frac{5M_3}{2} \left\{ \sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \sin \lambda' - \right. \\ \left. - \sin \lambda' \sin \lambda'' \sin \lambda''' - \frac{1}{4} \sin \sigma \right\}, \end{array} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{array}{l} g_{32} = \frac{5M_3}{4} \sum \operatorname{ctg} u' \cos(\lambda'' + \lambda'''), \\ h_{32} = \frac{5M_3}{4} \sum \operatorname{ctg} u' \sin(\lambda'' + \lambda'''), \end{array} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{33} &= \frac{5M_3}{8} \cos \sigma, \\ h_{33} &= \frac{5M_3}{8} \sin \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

18. Мы получаем из уравнения (21):

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{h_{33}}{g_{33}} = \operatorname{tg} 59^\circ 13' 48''. \quad (22)$$

Чтобы заключить отсюда о величине σ , мы замечаем, что M_3 (2) положительно, а g_{33} и h_{33} отрицательны; таким образом, уравнения (21) показывают, что $\cos \sigma$ и $\sin \sigma$ должны быть отрицательны. Потому

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda' + \lambda'' + \lambda''' = n \cdot 360^\circ + 180 + 59^\circ 13' 48'' = \\ &= n \cdot 360^\circ + 239^\circ 13' 48''. \end{aligned} \quad (III)$$

Здесь n равно 0 или 1. Мы замечаем, что отношение постоянных h_{33} и g_{33} подходит очень близко к тангенсу угла в 60° и что σ близко к $360^\circ + 240^\circ = 600^\circ$.

Из тех же уравнений вычисляем:

$$M_3 = 0,010227. \quad (23)$$

19. Займёмся преобразованием уравнений (18) — (20). Мы введём другие коэффициенты, численное значение которых приведено в нижеследующей таблице.

Т а б л и ц а IV

$$\begin{aligned} g'_{30} &= \frac{2g_{30}}{5M_3} = -0,95289, \\ g'_{31} &= \frac{2g_{31}}{5M_3} = 1,54724, & g''_{31} &= g'_{31} - 1/4 \cos \sigma = 1,67514, \\ h'_{31} &= \frac{2h_{31}}{5M_3} = 0,28877, & h''_{31} &= h'_{31} + 1/4 \sin \sigma = 0,07396, \\ g'_{32} &= \frac{4g_{32}}{5M_3} = -2,17910, & h'_{32} &= \frac{4h_{32}}{5M_3} = -0,03465, \end{aligned}$$

Уравнения (18) — (20) примут следующий вид:

$$g'_{30} = \text{ctg } u' \text{ ctg } u'' \text{ ctg } u''' - 1/2 \sum \text{ctg } u' \cos(\lambda'' - \lambda'''), \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} g'_{31} &= \sum \text{ctg } u'' \text{ ctg } u''' \cos \lambda' - \cos \lambda' \cos \lambda'' \cos \lambda''', \\ h'_{31} &= \sum \text{ctg } u'' \text{ ctg } u''' \sin \lambda' - \sin \lambda' \sin \lambda'' \sin \lambda''', \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} g'_{32} &= \sum \text{ctg } u' \cos(\lambda'' + \lambda'''), \\ h'_{32} &= \sum \text{ctg } u' \sin(\lambda'' + \lambda'''). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Последним двум уравнениям можно придать ещё другой вид, вставляя

$$\begin{aligned} \cos(\lambda'' + \lambda''') &= \cos(\sigma - \lambda'), \\ \sin(\lambda'' + \lambda''') &= \sin(\sigma - \lambda') \text{ и пр.} \end{aligned}$$

Мы получим:

$$g'_{32} = \cos \sigma \sum \text{ctg } u' \cos \lambda' + \sin \sigma \sum \text{ctg } u' \sin \lambda',$$

$$h'_{32} = \sin \sigma \sum \text{ctg } u' \cos \lambda' - \cos \sigma \sum \text{ctg } u' \sin \lambda'.$$

Отсюда

$$g'_{32} \sin \sigma - h'_{32} \cos \sigma = \sum \text{ctg } u' \sin \lambda',$$

$$g'_{32} \cos \sigma + h'_{32} \sin \sigma = \sum \text{ctg } u' \cos \lambda'.$$

Полагая

$$A = g'_{32} \sin \sigma - h'_{32} \cos \sigma = 1,85461,$$

$$B = g'_{32} \cos \sigma + h'_{32} \sin \sigma = 1,14461,$$

$$\lg A = 0,2682527, \quad \lg B = 0,0586575,$$

уравнения (26) заменятся следующими:

$$\left. \begin{aligned} A &= \sum \text{ctg } u' \sin \lambda', \\ B &= \sum \text{ctg } u' \cos \lambda'. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

20. Примем для простоты радиус земного шара равным 1. Проведём касательную плоскость к точке северного географического полюса. На этой плоскости отметим след первого меридиана и перпендикулярную к нему линию. На прямой пересечения этой координатной плоскости с плоскостью меридиана λ' нанесём от северного географического полюса длину $\text{tg } u'$.

Проекцию этой длины на первый меридиан и перпендикулярную к нему линию означим через ξ и x . Эти проекции представляют собой тангенсы некоторых углов α и a , вершины которых лежат в центре земли, а самые углы—в плоскостях координат. Поступая подобным же образом и с двумя другими тангенсами, $\operatorname{tg} u''$ и $\operatorname{tg} u'''$, мы получим следующие соотношения, которые обозначим соответственными буквами греческого и латинского алфавитов:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} u' \sin \lambda' &= \operatorname{tg} a = x, & \operatorname{tg} u' \cos \lambda'' &= \operatorname{tg} \alpha = \xi, \\ \operatorname{tg} u'' \sin \lambda'' &= \operatorname{tg} b = y, & \operatorname{tg} u'' \cos \lambda''' &= \operatorname{tg} \beta = \eta, \\ \operatorname{tg} u''' \sin \lambda''' &= \operatorname{tg} c = z, & \operatorname{tg} u''' \cos \lambda'' &= \operatorname{tg} \gamma = \zeta. \end{aligned} \right\} (28)$$

Разделим теперь уравнения (24) — (26) на

$$N = \operatorname{ctg} u' \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''', \quad (29)$$

полагая, что ни один из углов u' , u'' , u''' не равен нулю.

Мы получим:

$$\frac{2}{N} g_{30} = 2 - \eta\zeta - \zeta\xi - \xi\eta - yz - zx - xy, \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{N} g'_{31} &= \xi + \eta + \zeta - \xi\eta\zeta, \\ \frac{1}{N} h'_{31} &= x + y + z - xyz, \end{aligned} \right\} (b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{N} g'_{32} &= \eta\zeta + \zeta\xi + \xi\eta - yz - zx - xy, \\ \frac{1}{N} h'_{32} &= y\zeta + z\xi + x\eta + \eta z + \zeta x + \xi y. \end{aligned} \right\} (c)$$

Складывая и вычитая друг из друга уравнения (a) и первое из уравнений (c), находим, подставляя численные величины коэффициентов из таблицы IV:

$$\left. \begin{aligned} -2,04244 \frac{1}{N} &= 1 - yz - zx - xy, \\ +0,13666 \frac{1}{N} &= 1 - \eta\zeta - \zeta\xi - \xi\eta. \end{aligned} \right\} (30)$$

Деля второе и первое из уравнений (b) соответственно на первое и второе уравнение (30), получим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{h'_{31}}{2,04245} &= \frac{z(1-xy) + (x+y)}{1-xy+z(x+y)} = \frac{z + \frac{x+y}{1-xy}}{1+z\frac{x+y}{1-xy}}, \\ \frac{g'_{31}}{0,13666} &= \frac{\xi(1-\xi\eta) + (\xi+\eta)}{1-\xi\eta+\xi(\xi+\eta)} = \frac{\xi + \frac{\xi+\eta}{1-\xi\eta}}{1+\xi\frac{\xi+\eta}{1-\xi\eta}}. \end{aligned} \right\} (31)$$

Обращая внимание на выражения (28), вторые части уравнений (31) примут вид:

$$\operatorname{tg}(a+b+c) \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma).$$

Вставляя величины h'_{31} и g'_{31} , мы находим отсюда для 1885 г.:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(a+b+c) &= -\operatorname{tg} 2^{\circ}4'27'', \\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) &= \operatorname{tg} 50^{\circ}47'30''. \end{aligned} \right\} (32)$$

Таковы величины тангенсов алгебраических сумм проекций углов u' , u'' , u''' на две взаимно перпендикулярные плоскости, из коих одна есть плоскость первого меридиана. Сумма проекций на плоскость, перпендикулярную к плоскости первого меридиана, очень мало отличается от (меньше) 180° или 360° .

Глава VI. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ОСИ ШАРОВОЙ ФУНКЦИИ 3-ГО ПОРЯДКА

21. Пользуясь координатной плоскостью и координатными осями предыдущего параграфа, построим на этой плоскости, исходя из северного географического полюса, ломаную линию, части которой равны $\operatorname{ctg} u'$, $\operatorname{ctg} u''$, $\operatorname{ctg} u'''$ и параллельны меридианам λ' , λ'' , λ''' . Очевидно, что величины B и A (27) представляют проекции нашей ломаной линии на направление первого меридиана и на перпендикулярное к нему.

Означим через R абсолютную длину линии, замыкающей ломаную линию до четырёхугольника. Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{A^2 + B^2} = 2,17938 = -g'_{32}, \\ \lg R &= 0,3383330. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Этот результат станет понятным, если обратить внимание на состав коэффициентов A и B и на относительную малость коэффициента h'_{32} сравнительно с g'_{32} .

Назовём через L угол линии R с первым меридианом. Мы имеем:

$$\operatorname{tg} L = \frac{A}{B} = \operatorname{tg} 58^\circ 19' 10''. \quad (34)$$

Так как A и B , т. е. обе проекции R , положительны, то

$$L = 58^\circ 19' 10''. \quad (35)$$

Примем плоскость $\lambda = L$ за плоскость первого меридиана и вставим в уравнение (III) § 17 величины

$$\lambda' = L + l', \quad \lambda'' = L + l'', \quad \lambda''' = L + l''', \quad (36)$$

где l' , l'' , l''' суть долготы, отсчитываемые от новой плоскости. Мы найдём:

$$\sigma' = l' + l'' + l''' = n \cdot 360 + 64^\circ 16' 18''. \quad (37)$$

Внося новые долготы в уравнения (27), они примут вид:

$$R \sin L = \cos L \sum \operatorname{ctg} u' \sin l' + \sin L \sum \operatorname{ctg} u' \cos l',$$

$$R \cos L = \cos L \sum \operatorname{ctg} u' \cos l' - \sin L \sum \operatorname{ctg} u' \sin l'.$$

Умножая первое из этих уравнений на $\cos L$, второе на $\sin L$ и вычитая, а затем поступая обратно и складывая, найдём:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \operatorname{ctg} u' \sin l' + \operatorname{ctg} u'' \sin l'' + \operatorname{ctg} u''' \sin l''', \\ R &= \operatorname{ctg} u' \cos l' + \operatorname{ctg} u'' \cos l'' + \operatorname{ctg} u''' \cos l'''. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Путём исключения мы получаем отсюда:

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{ctg} u'' \sin (l''' - l'') + \operatorname{ctg} u' \sin (l''' - l')}{\sin l'''} = \\ & = \frac{\operatorname{ctg} u''' \sin (l'' - l''') + \operatorname{ctg} u' \sin (l'' - l')}{\sin l''} = \\ & = \frac{\operatorname{ctg} u'' \sin (l' - l'') + \operatorname{ctg} u''' \sin (l' - l''')}{\sin l'} = R. \end{aligned}$$

Из этих уравнений мы извлекаем следующие определения:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} u'' &= \frac{R \sin l''' - \operatorname{ctg} u' \sin (l''' - l')}{\sin (l''' - l'')}, \\ \operatorname{ctg} u''' &= \frac{\operatorname{ctg} u' \sin (l'' - l') - R \sin l''}{\sin (l''' - l'')} . \end{aligned} \right\} (38')$$

22. Введём новые долги́ты в два уравнения (25). После довольно длинных преобразований, которых я не буду здесь приводить, мы получим следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} g'_{31} &= \cos L \left\{ \sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \cos l' - \right. \\ & \quad \left. - \cos l' \cos l'' \cos l''' + \sin^2 L \cos \sigma' \right\} - \\ & \quad \left. - \sin L \left\{ \sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \sin l' - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \sin l' \sin l'' \sin l''' - \cos^2 L \sin \sigma' \right\}, \right. \\ h_{31} &= \cos L \left\{ \sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \sin l' - \right. \\ & \quad \left. - \sin l' \sin l'' \sin l''' - \sin^2 L \sin \sigma' \right\} + \\ & \quad \left. + \sin L \left\{ \sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \cos l' - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \cos l' \cos l'' \cos l''' + \cos^2 L \cos \sigma' \right\}. \right\} (39) \end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$\left. \begin{aligned} g'_{31} \cos L + h'_{31} \sin L &= \sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \cos l' - \\ & \quad - \cos l' \cos l'' \cos l''' + \\ & \quad + \cos^2 L \sin^2 L \cos \sigma' + \\ & \quad + \sin \sigma' (\cos^2 L - \sin^2 L) \cos L \sin L, \\ h'_{31} \cos L - g'_{31} \sin L &= \sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \sin l' - \\ & \quad - \sin l' \sin l'' \sin l''' - \\ & \quad - \cos^2 L \sin^2 L \sin \sigma' + \\ & \quad + \cos \sigma' (\cos^2 L - \sin^2 L) \cos L \sin L. \end{aligned} \right\} (40)$$

23. Сохраняя уравнение (24) без изменения, заменяя уравнения (25) уравнениями (40), в которых все известные члены вычислены и перенесены в правую часть, и уравнения (26) уравнениями (38), мы получим следующую систему уравнений, причём вновь вычисленные постоянные обозначаются новыми буквами:

$$g'_{30} = -0,95289 = \operatorname{ctg} u' \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' - \frac{1}{2} \sum \operatorname{ctg} u' \cos (l'' - l'''), \quad (41)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= 1,052823 = \sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \cos l' - \\ &\quad - \cos l' \cos l'' \cos l''', \\ H &= -1,119751 = \sum \operatorname{ctg} u'' \operatorname{ctg} u''' \sin l' - \\ &\quad - \sin l' \sin l'' \sin l''', \end{aligned} \right\} (42)$$

$$R = 2,17938 = \sum \operatorname{ctg} u' \cos l', \quad 0 = \sum \operatorname{ctg} u' \sin l', \quad (43)$$

$$\sigma' = n \cdot 360^\circ + 64^\circ 16' 18''. \quad (44)$$

24. Уравнения (43) исчерпываются уравнениями (38). Даваемые ими величины $\operatorname{ctg} u''$ и $\operatorname{ctg} u'''$ мы внесём в уравнения (42); получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma \sin^2 (l''' - l'') + R^2 \sin l'' \sin l''' \cos l' + \\ &\quad + \cos l' \cos l'' \cos l''' \sin^2 (l''' - l'') - \\ &\quad - R \operatorname{ctg} u' \{ \sin (l'' - l') \sin l''' \cos l' + \\ &\quad + \sin (l''' - l') \sin l'' \cos l' + \\ &\quad + \sin l''' \sin (l''' - l'') \cos l'' - \\ &\quad - \sin l'' \sin (l''' - l'') \cos l'' \} + \\ &\quad + \operatorname{ctg}^2 u' \{ \sin (l''' - l') \sin (l'' - l') \cos l' + \\ &\quad + \sin (l''' - l') \sin (l''' - l'') \cos l''' - \\ &\quad - \sin (l'' - l') \sin (l''' - l'') \cos l'' \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= H \sin^2 (l''' - l'') + R^2 \sin l'' \sin l''' \sin l' + \\ &\quad + \sin l' \sin l'' \sin l''' \sin^2 (l''' - l'') - \\ &\quad - R \operatorname{ctg} u' \{ \sin (l'' - l') \sin l''' \sin l' + \\ &\quad + \sin (l''' - l') \sin l'' \sin l' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sin l''' \sin(l''' - l'') \sin l''' - \\
 & - \sin l'' \sin(l''' - l'') \sin l'' \} + \\
 & + \operatorname{ctg}^2 u' \{ \sin(l''' - l') \sin(l'' - l') \sin l' + \\
 & + \sin(l''' - l') \sin(l''' - l'') \sin l''' - \\
 & - \sin(l'' - l') \sin(l''' - l'') \sin l'' \}.
 \end{aligned}$$

Мы имеем два квадратных уравнения относительно $\operatorname{ctg} u'$. Они должны давать по крайней мере по одному одинаковому корню. Аналитическое выражение этого обстоятельства дало бы нам уравнение, из которого $\operatorname{ctg} u'$ был бы исключён. Но этим путём мы получили бы очень сложное выражение, почему продолжаем преобразование в другом направлении.

25. Определение долгот может быть приведено к определению только двух величин Δ и l' , связанных с остальными следующими соотношениями, в которых для краткости введено ещё обозначение ε :

$$\left. \begin{aligned}
 l''' - l'' &= 2\Delta, & l'' &= l' - (\Delta + \varepsilon), \\
 l' - l'' &= \Delta + \varepsilon, & l''' &= l' + (\Delta - \varepsilon), \\
 l''' - l' &= \Delta - \varepsilon, & l' &= l', \\
 3l' - 2\varepsilon &= \sigma', & 2\varepsilon &= 3l' - \sigma', \\
 2l' - 2\varepsilon &= \sigma' - l', & l' - 2\varepsilon &= \sigma' - 2l'.
 \end{aligned} \right\} (45)$$

Очевидно, что из приведённых 10 равенств 7 вытекают из первых трёх в первой вертикальной колонке. Эти выражения мы внесём в уравнения § 24 и получим после довольно длинных преобразований:

$$\begin{aligned}
 0 &= \Gamma \sin^2 2\Delta + \frac{R^2}{2} [\cos 2\Delta - \cos(\sigma' - l')] \cos l' + \\
 &+ \frac{\sin^2 2\Delta \cos l'}{2} [\cos 2\Delta + \cos(\sigma' - l')] - \\
 &- R \operatorname{ctg} u' \{ [\cos l' \cos 2\Delta - \cos(\sigma' - 2l')] \cos l' + \\
 &+ \sin^2 2\Delta \cos(\sigma' - l') \} + \\
 &+ \operatorname{ctg}^2 u' \left\{ \frac{1}{2} \cos l' [\cos 2\Delta - \cos(3l' - \sigma')] + \right. \\
 &\quad \left. + \sin^2 2\Delta \cos(\sigma' - 2l') \right\}, \quad (A)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = & H \sin^2 2\Delta + \frac{R^2}{2} [\cos 2\Delta - \cos (\sigma' - l')] \sin l' + \\
& + \frac{\sin^2 2\Delta \sin l'}{2} [\cos 2\Delta - \cos (\sigma' - l')] - \\
& - R \operatorname{ctg} u' \left\{ [\cos l' \cos 2\Delta - \cos (\sigma' - 2l')] \sin l' + \right. \\
& \left. + \sin^2 2\Delta \sin (\sigma' - l') \right\} + \\
& + \operatorname{ctg}^2 u' \left\{ \frac{1}{2} \sin l' [\cos 2\Delta - \cos (3l' - \sigma')] + \right. \\
& \left. + \sin^2 2\Delta \sin (\sigma' - 2l') \right\}. \quad (B)
\end{aligned}$$

Из этих двух уравнений мы составляем два следующих:

$$A \sin l' - B \cos l' = 0,$$

$$A \sin (\sigma' - 2l') - B \cos (\sigma' - 2l') = 0;$$

получим:

$$\begin{aligned}
0 = & \Gamma \sin l' - H \cos l' + \frac{1}{2} \sin 2l' \cos (\sigma' - l') + \\
& + R \operatorname{ctg} u' \sin (\sigma' - 2l') + \operatorname{ctg}^2 u' \sin (3l' - \sigma') \quad (IV)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
0 = & \sin^2 2\Delta \left[\Gamma \sin (\sigma' - 2l') - H \cos (\sigma' - 2l') - \right. \\
& - \frac{1}{2} \cos 2\Delta \sin (3l' - \sigma') + \frac{1}{4} \sin 2(\sigma' - l') \left. \right] - \\
& - \frac{R^2}{2} [\cos 2\Delta - \cos (\sigma' - l')] \sin (3l' - \sigma') + \\
& + R \operatorname{ctg} u' \left\{ [\cos l' \cos 2\Delta - \cos (\sigma' - 2l')] \sin (3l' - \sigma') + \right. \\
& \left. + \sin^2 2\Delta \sin l' \right\} - \\
& - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 u' [\cos 2\Delta - \cos (3l' - \sigma')] \sin (3l' - \sigma').
\end{aligned}$$

Это выражение можно расположить по степеням $\sin^2 \Delta$. Полагая

$$\begin{aligned}
k = & 4\Gamma \sin (\sigma' - 2l') - 4H \cos (\sigma' - 2l') + \\
& + \sin 2(\sigma' - l') + 4R \operatorname{ctg} u' \sin l',
\end{aligned}$$

мы получим, замечая, что $\frac{R^2 - 2}{4} = 0,6929$:

$$\begin{aligned}
 0 = & \sin^6 \Delta - \sin^4 \Delta \left[1,5 - \frac{k}{4 \sin(3l' - \sigma')} \right] - \\
 & - \sin^2 \Delta \left[0,6929 + \frac{k}{4 \sin(3l' - \sigma')} - \frac{R}{2} \operatorname{ctg} u' \cos l' + \frac{\operatorname{ctg}^2 u'}{4} \right] + \\
 & + \frac{R^2}{8} [1 - \cos(\sigma' - l')] - \frac{R}{4} \operatorname{ctg} u' [\cos l' - \cos(\sigma' - 2l')] + \\
 & + \frac{1}{8} \operatorname{ctg}^2 u' [1 - \cos(3l' - \sigma')]. \quad (V)
 \end{aligned}$$

26. Преобразуем теперь уравнение (41). С этой целью, пользуясь выражениями (45), мы приводим уравнения (38) к виду:

$$\operatorname{ctg} u'' = \frac{R \sin(l' + \Delta - \varepsilon) - \operatorname{ctg} u' \sin(\Delta - \varepsilon)}{\sin 2\Delta},$$

$$\operatorname{ctg} u''' = \frac{-\operatorname{ctg} u' \sin(\Delta + \varepsilon) - R \sin[l' - (\Delta + \varepsilon)]}{\sin 2\Delta}$$

и вносим их в выражение (41). Мы получим:

$$g'_{30} \sin^2 2\Delta =$$

$$\begin{aligned}
 = & \operatorname{ctg} u' \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{ctg} u' R \sin(l' + \Delta - \varepsilon) \sin(\Delta + \varepsilon) + \\ + \operatorname{ctg}^2 u' \sin(\Delta - \varepsilon) \sin(\Delta + \varepsilon) + \\ + \operatorname{ctg} u' R \sin(\Delta - \varepsilon) \sin[l' - (\Delta + \varepsilon)] - \\ - R^2 \sin(l' + \Delta - \varepsilon) \sin[l' - (\Delta + \varepsilon)] \end{array} \right\} - \\
 & - \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{ctg} u' \cos 2\Delta \sin^2 2\Delta + \\ + R \sin(l' + \Delta - \varepsilon) \sin 2\Delta \cos(\Delta - \varepsilon) - \\ - \operatorname{ctg} u' \sin 2\Delta \sin(\Delta - \varepsilon) \cos(\Delta - \varepsilon) - \\ - R \sin 2\Delta \sin[l' - (\Delta + \varepsilon)] \cos(\Delta + \varepsilon) - \\ - \operatorname{ctg} u' \sin 2\Delta \sin(\Delta + \varepsilon) \cos(\Delta + \varepsilon) \end{array} \right\},
 \end{aligned}$$

или, заменяя произведения тригонометрических величин

соответственными разностями,

$$\begin{aligned}
 g'_{30} \sin^2 2\Delta = & \frac{1}{2} [\cos 2\varepsilon - \cos 2\Delta] \operatorname{ctg}^3 u' + \\
 & + R [\cos l' \cos 2\Delta - \cos (l' - 2\varepsilon)] \operatorname{ctg}^2 u' - \\
 & - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} u' \{R^2 [\cos 2\Delta - \cos 2(l' - \varepsilon)] + \\
 & + \sin^2 2\Delta [\cos 2\Delta - \cos 2\varepsilon]\} - \\
 & - \frac{1}{2} R \sin^2 2\Delta \cos (l' - 2\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Заменяя здесь $\cos 2\Delta$ и располагая по степеням $\sin \Delta$, получим:

$$\begin{aligned}
 -4 \operatorname{ctg} u' \sin^6 \Delta + \\
 + 2 \sin^4 \Delta [\operatorname{ctg} u' (3 - \cos 2\varepsilon) + R \cos (l' - 2\varepsilon) + 2g'_{30}] + \\
 + \sin^2 \Delta [\operatorname{ctg}^3 u' - 2R \cos l' \operatorname{ctg}^2 u' + \\
 + \operatorname{ctg} u' (R^2 - 2 + 2 \cos 2\varepsilon) - 2R \cos (l' - 2\varepsilon) - 4g'_{30}] + \\
 + \frac{1}{2} [\cos 2\varepsilon - 1] \operatorname{ctg}^3 u' + \\
 + R [\cos l' - \cos (l' - 2\varepsilon)] \operatorname{ctg}^2 u' - \\
 - \frac{1}{2} R^2 [1 - \cos 2(l' - \varepsilon)] \operatorname{ctg} u' = 0.
 \end{aligned}$$

В это выражение мы подставим по (45)

$$2\varepsilon = 3l' - \sigma'$$

и найдём, меняя ещё все знаки на противные:

$$\begin{aligned}
 4 \operatorname{ctg} u' \sin^6 \Delta - 2 \sin^4 \Delta \{ \operatorname{ctg} u' [3 - \cos (3l' - \sigma')] + \\
 + R \cos (\sigma' - 2l') + 2g'_{30} \} - \\
 - \sin^2 \Delta \{ \operatorname{ctg}^3 u' - 2R \cos l' \operatorname{ctg}^2 u' + \\
 + \operatorname{ctg} u' [R^2 - 2 + 2 \cos (3l' - \sigma')] - \\
 - 2R \cos (\sigma' - 2l') - 4g'_{30} \} - \\
 - \frac{1}{2} [\cos (3l' - \sigma') - 1] \operatorname{ctg}^3 u' - \\
 - R [\cos l' - \cos (\sigma' - 2l')] \operatorname{ctg}^2 u' + \\
 + \frac{1}{2} R^2 [1 - \cos (\sigma' - l')] \operatorname{ctg} u' = 0,
 \end{aligned} \tag{46}$$

Разделив предыдущее выражение на $4 \operatorname{ctg} u'$, увидим, что в нём и в уравнении (V) $\sin^6 \Delta$ будет иметь одинаковые знаки и члены, не зависящие от $\sin^2 \Delta$, друг другу равны. Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$\sin^2 \Delta \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \Delta \left[\frac{k}{4 \sin (3l' - \sigma')} + \frac{R \cos (\sigma' - 2l') + 2g'_{30}}{2 \operatorname{ctg} u'} - \right. \\ \left. - \frac{\cos (3l' - \sigma')}{2} \right] - \frac{k}{4 \sin (3l' - \sigma')} - \\ \left. - \frac{R \cos (\sigma' - 2l') + 2g'_{30}}{2 \operatorname{ctg} u'} + \frac{\cos (3l' - \sigma')}{2} \right\} = 0 \end{array} \right.$$

или

$$\sin^2 \Delta (\sin^2 \Delta - 1) \left[\frac{k}{2 \sin (3l' - \sigma')} + \right. \\ \left. + \frac{R \cos (\sigma' - 2l') + 2g'_{30}}{\operatorname{ctg} u'} - \cos (3l' - \sigma') \right] = 0. \quad (47)$$

Нашим основным уравнениям не удовлетворяют ни $\Delta = 0$, ни $\Delta = 90^\circ$ или 270° . Поэтому в нуль должен обращаться последний множитель предыдущего равенства. Подставляя в него величину k и раскрывая, найдём следующее уравнение:

$$[4\Gamma \sin (\sigma' - 2l') - 4H \cos (\sigma' - 2l') + \\ + \sin 2 (\sigma' - l') - \sin 2 (3l' - \sigma')] \operatorname{ctg} u' + \\ + 4R \sin l' \operatorname{ctg}^2 u' + 2R \cos (\sigma' - 2l') \sin (3l' - \sigma') + \\ + 4g'_{30} \sin (3l' - \sigma') = 0. \quad (VI)$$

Таким образом, мы получаем три уравнения (IV), (V) и (VI), из коих должны быть определены l' , u' , Δ .

27. Для удобства вычислений мы можем ввести преобразование:

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma = -Q \cos \alpha, \quad H = -Q \sin \alpha, \\ \alpha = 133^\circ 14' = 180^\circ - 46^\circ 46', \quad Q = 1,5371. \end{array} \right\} \quad (48)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma \sin l' - H \cos l' &= Q \sin (\alpha - l') = Q \sin (l' + 46^\circ 46'), \\ \Gamma \sin (\sigma' - 2l') - H \cos (\sigma' - 2l') &= \\ &= Q \sin (\alpha - \sigma' + 2l') = Q \sin (69^\circ 14' + 2l'). \end{aligned}$$

Тогда уравнения (IV) и (VI) получают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} & \operatorname{ctg}^2 u' + R \frac{\sin(\sigma' - 2l')}{\sin(3l' - \sigma')} \operatorname{ctg} u' + \\ & \quad + \frac{1}{4 \sin(3l' - \sigma')} [4Q \sin(l' + 46^\circ 46') + \\ & \quad + \sin(l' + \sigma') + \sin(3l' - \sigma')] = 0, \\ & \operatorname{ctg}^2 u' + [4Q \sin(69^\circ 14' + 2l') + \\ & \quad + \sin 2(\sigma' - l') - \sin 2(3l' - \sigma')] \frac{\operatorname{ctg} u'}{4R \sin l'} + \\ & \quad + \frac{1}{4R \sin l'} [\sin l' + \sin(5l' - 2\sigma') + \\ & \quad + 4g'_{30} \sin(3l' - \sigma')] = 0. \end{aligned} \right\} (49)$$

Эти уравнения, означая $\operatorname{ctg} u'$ через x , могут быть представлены выражениями:

$$x^2 + p_1 x + q_1 = 0, \quad x^2 + p_2 x + q_2 = 0. \quad (50)$$

Эти уравнения должны иметь по крайней мере один общий корень. Означая через x_1, x_0 и x_2, x_0 корни этих уравнений, мы имеем:

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1 + x_0, & q_1 &= x_1 x_0, \\ p_2 &= x_2 + x_0, & q_2 &= x_2 x_0. \end{aligned}$$

Отсюда извлекаем:

$$(q_2 - q_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 x_0^2 = (p_2 - p_1)(q_2 p_1 - p_2 q_1).$$

Таким образом, получаем одно уравнение для l' :

$$(q_2 - q_1)^2 - (p_2 - p_1)(q_2 p_1 - p_2 q_1) = 0. \quad (51)$$

Положим:

$$\left. \begin{aligned} q'_1 &= 4Q \sin(l' + 46^\circ 46') + \\ & \quad + \sin(l' + \sigma') + \sin(3l' - \sigma'), \\ q'_2 &= \sin l' + \sin(5l' - 2\sigma') + 4g'_{30} \sin(3l' - \sigma'), \\ p'_1 &= R \sin(\sigma' - 2l'), \\ p'_2 &= 4Q \sin(69^\circ 14' + 2l') + \\ & \quad + \sin 2(\sigma' - l') - \sin 2(3l' - \sigma'), \end{aligned} \right\} (52)$$

тогда предыдущее равенство представится в следующем виде:

$$[q'_1 R \sin l' - q'_2 \sin (3l' - \sigma')]^2 - \frac{1}{4} [p'_2 \sin (3l' - \sigma') - 4p'_1 R \sin l'] (4q'_2 p'_1 - q'_1 p'_2) = 0. \text{ (VII)}$$

Мы получили, таким образом, одно уравнение с одним неизвестным l' . Определить его можно только путём целого ряда подстановок. Найдя l' , из уравнения (IV) находим u' , затем из (V) — величину Δ ; следовательно, так как σ' известно, находим долготы осей, а по уравнениям (38) — и их широты.

В предыдущих формулах, взятых не для 1885 г., а для произвольного момента, следует $l' + 46^\circ 46'$ заменить через $\alpha - l'$ и $69^\circ 14' + 2l' - \text{через } \alpha - \sigma' + 2l'$.

28. Можно ограничить выбор величин l' , указав для них те пределы, внутри которых уравнение (IV) даёт действительные корни. Представляя это уравнение типичной формой

$$x^2 + px + q = 0, \tag{53}$$

те значения l' , для которых

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0,$$

будут заключать в себе искомое.

Это условие представится в следующем виде:

$$R^2 \sin^2 (\sigma' - 2l') - [4Q \sin (l' + 46^\circ 46') + \frac{1}{2} \sin 2l' \cos (\sigma' - l')] \sin (3l' - \sigma') \geq 0. \tag{54}$$

С этим условием совместны, например, величины l' от $l' = 0$ до $l' = 18^\circ$. Но не все величины, возможные по уравнению (IV), приводят к значениям $\text{ctg } u'$, которые по подстановке в уравнение V дают возможные значения для $\sin \Delta$.

Мною был произведён ряд испытаний, которые показали, что следующие величины l' не удовлетворяют

нашим уравнениям:

20° (u' мнимое), 55° (u' мнимое), 60° (u' мнимое), 90° (Δ мнимое), 120° , 124° , 130° , 150° , 160° (u' мнимое), 171° , 201° , 321° .

Задаче не удовлетворяет также предположение, что один из полюсов лежит на экваторе, т. е. $u' = 90^\circ$, $l' = 124^\circ 20'$.

29. Испытания, сделанные мною относительно различных величин l' подстановкой их в уравнение (VII), показали, что это выражение может давать очень большие положительные или отрицательные величины. Наименьшая полученная мною величина этой сложной функции соответствовала значению l' , удовлетворяющему условию $\varepsilon = 3l' - \sigma' = 0$, т. е. когда меридиональная плоскость одной оси будет биссектрисой угла между меридиональными плоскостями двух других осей. Для этого случая выражение (VII) дало $F = 4,24 - 4,40 = -0,16$. Так как определяемая из этого условия величина l' не представляется все-таки корнем уравнения, я, для оценки решения, исследую вопрос приёмом, который был мною употреблён уже в изысканиях, относившихся к шаровой функции 2-го порядка.

В этом случае уравнения (IV) и (V) становятся тождественными. Действительно, мы имеем:

$$3l' - \sigma' = 0, \quad \sigma' - 2l' = l', \quad \sigma' - l' = 2l', \quad (55)$$

и оба уравнения (IV) и (V) приводятся к одному:

$$0 = \Gamma \sin l' - H \cos l' + \frac{1}{4} \sin 4l' + R \operatorname{ctg} u' \sin l'. \quad (56)$$

Нам нужно, поэтому, привлечь ещё одно из уравнений (A) или (B) § 25. Мы возьмём последнее; для данного случая оно преобразуется в уравнение 6-й степени по отношению к $\sin \Delta$, следующего вида:

$$\sin^6 \Delta \cdot 4 \sin l' + 4 \sin^4 \Delta [\operatorname{ctg} u' \sin l' (2R \cos l' - \operatorname{ctg} u') - H - \sin l' - \sin^3 l'] + \sin^2 \Delta [4H + 4 \sin^3 l' - R^2 \sin l' - 3 \operatorname{ctg} u' \sin l' (2R \cos l' - \operatorname{ctg} u')] + R^2 \sin^3 l' = 0. \quad (57)$$

Я прослежу до конца решение этого случая, чтобы дать представление о характере получаемых результатов.

Положим согласно (44) § 23

$$\sigma' = 360^\circ + 64^\circ 16' 18''$$

и по условию (55)

$$l' = 141^\circ 25' 26''. \quad (58)$$

Из уравнения (56) находим:

$$\lg \operatorname{ctg} u' = 9,3818028, \operatorname{ctg} u' = 0,24088, u' = 76^\circ 27' 20''. \quad (59)$$

Внося найденную величину $\operatorname{ctg} u'$ в уравнение (57) и полагая

$$\sin^2 \Delta = x, \quad (60)$$

получим:

$$x^3 - \alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0, \quad (61)$$

где

$$\alpha = 0,46092; \beta = 1,93170; \gamma = 0,47461.$$

Все три корня этого уравнения действительны, так как, обозначая

$$p = -\left(\beta + \frac{\alpha^2}{3}\right) = -2,00255,$$

$$q = \gamma - \frac{\beta\alpha}{3} - \frac{2\alpha^3}{27} = +0,17057,$$

имеем:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

По своему значению x^3 должно быть действительно и меньше или равно единице. Поэтому два корня уравнения (61), не удовлетворяющие этому условию, отпадают и остаётся один, из которого мы получаем два решения:

$$\sin \Delta = \pm \sin 36^\circ 26' 20'',$$

откуда для Δ получаются следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= 36^\circ 26' 20'', \\ \Delta_2 &= 180^\circ - 36^\circ 26' 20'' = 143^\circ 33' 40'', \\ \Delta_3 &= 180^\circ + 36^\circ 26' 20'' = 216^\circ 26' 20'', \\ \Delta_4 &= 360^\circ - 36^\circ 26' 20'' = 323^\circ 33' 40''. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Из этих четырёх величин только первые две дают различные решения, так как Δ_1 и Δ_4 , Δ_2 и Δ_3 определяют положение одних и тех же прямых в пространстве, но один раз — когда положительный конец оси l'' направлен в одну сторону, а другой раз — в другую.

Мы рассмотрим, таким образом, только корни Δ_1 и Δ_2 .

Ни в том, ни в другом случае уравнение (41) не будет удовлетворено. Для определения степени погрешности мы дополним его шаровой функцией с трёхкратной осью, совпадающей с географической осью земли.

Из выражения Y_3 (7) § 2, полагая в нём

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{12} &= \lambda_{23} = \lambda_{31} = 1, \\ \mu_1 &= \mu_2 = \mu_3 = \pm \cos u, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

где должен быть взят знак $+$, если положительный конец оси вводимой функции совпадает с северным концом географической земной оси, и знак $-$ в противном случае, мы найдём:

$$Y_3^0 = \pm \frac{5}{2} \delta_3^0 A_{30};$$

поэтому во вторую часть уравнения (41) войдёт ещё член $\pm \frac{1}{M_3} \delta_3^0$, где δ_3^0 есть момент введённой функции, а M_3 даётся уравнениями (2) § 13. Таким образом, уравнение (41) послужит для определения δ_3^0 , который даст меру отклонения от истинного решения.

Мы найдём следующие результаты для 1885 г.

$$\begin{aligned} \text{1-й случай: } \Delta_1 &= 36^\circ 26' 20'' \\ l' &= 141^\circ 25' 26'' \end{aligned}$$

$$u' = 76^\circ 27' 20''$$

$$\lambda' = 199^{\circ}44'36''$$

$$l_1' = 104^{\circ}59'6''$$

$$u_1' = 93^{\circ}42'10''$$

$$\lambda'' = 163^{\circ}18'16''$$

$$l_1'' = 177^{\circ}51'46''$$

$$u_1'' = 126^{\circ}28'50''$$

$$\lambda''' = 236^{\circ}10'2''$$

$$\text{2-й случай: } \Delta_2 = 143^{\circ}33'40''$$

$$l' = 141^{\circ}25'26''$$

$$u' = 76^{\circ}27'20''$$

$$\lambda' = 199^{\circ}44'36''$$

$$l_2' = - 2^{\circ}8'14''$$

$$u_2' = 53^{\circ}31'10''$$

$$\lambda'' = 56^{\circ}10'56''$$

$$l_2'' = - 75^{\circ}0'54''$$

$$u_2'' = 86^{\circ}17'50''$$

$$\lambda''' = - 16^{\circ}41'44''$$

В обоих случаях:

момент трёхосной функции $\delta_3 = 0,01314$;

момент одноосной (трёхкратной) $\delta_3^0 = 0,01280$.

Последний момент получается со знаком $+$, только сохранив перед выражением (64) знак $-$. Следовательно, положительный конец оси совпадает с южным концом земной географической оси.

Рассматривая оба полученные решения, мы видим, что они определяют одну и ту же систему трёх линий; различие же заключается в том, какие концы одной пары из этой группы считать положительными и какие отрицательными. Полюс F , определяемый координатами l' и u' , остаётся всегда положительным концом оси.

Координаты l_1' , u_1' и l_2'' , u_2'' определяют одну и ту же ось Gg , ибо сумма соответственных координат даст 180° . Точно так же координаты l_1'' , u_1'' и l_2' , u_2' определяют одну и ту же ось Hh , по той же при-

чине. Но в первом случае положительные концы осей суть F, G, H , во втором F, g, h . Соответственные полюсы нанесены на прилагаемой карте. Величина моментов в обоих случаях одна и та же, и момент функции, для которой ось земли служит трёхкратной осью, представляющий отступление от предположенной задачи, равен моменту искомой функции. Углы между осями будут:

$$\sphericalangle FG = 40^{\circ}10', \quad \sphericalangle FH = 61^{\circ}4', \quad \sphericalangle GH = 74^{\circ}2';$$

перемена знака полюса F невозможна, ибо $l' = 180^{\circ} + 141^{\circ} = 321^{\circ}$ даёт для $\sin^2 \Delta$ величину, ббльшую 1.

Если возьмём значения l' по обе стороны от $l' = 140^{\circ}$, то получим решения или далеко не удовлетворяющие уравнению (41) или же дающие для $l' = 150^{\circ}$ $\delta_3^{\circ} = 0,014$, для $l' = 130^{\circ}$ $\delta_3^{\circ} = 0,021$.

Таким образом, мы заключаем, что при равенстве углов между меридиональными плоскостями мы имеем минимум магнитного момента 3-го порядка земной оси, сравнительно с ближайшими положениями меридиональных плоскостей, что изображено в следующей таблице:

l'	130°	141°	150°
l''	113°	104°	102°
l'''	181°	177°	168°
δ_3°	0,021	0,013	0,14

Глава VII. ВЕКОВЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ЗЕМНОГО МАГНЕТИЗМА. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

30. Геометрическое построение шаровых функций потенциала Гаусса имеет особое значение для уяснения изменений магнитных свойств земного шара с временем. Без такого построения наблюдательный материал, обильно собираемый, не может дать нам не только представления о тех значительных переменах, которые происходят в свойствах нашего земного шара,

но даже их приблизительной оценки. Приводимые ниже примеры подтвердят эти соображения.

Мы имеем вычисленные коэффициенты потенциала Гаусса кроме 1885 г. ещё для 1829 г., вычисленные Ad. Erman'ом и Petersen'ом, которые нельзя, однако, рассматривать как строго точные, так как они основываются на позднейших наблюдениях, которые были приведены к 1829 г.

Для 1829 и 1886 гг. из коэффициентов Гаусса уже вычислялось положение магнитной оси земли, которая есть не что иное, как ось шаровой функции 1-го порядка. Характеристики этой оси будут:

	λ_1	u_1	δ_{11}
1829 г.	$-61^{\circ}35'$	$11^{\circ}44'$	0,32690
1885 г.	$-67^{\circ}37'$	$11^{\circ}40'$	0,32237

Таким образом, за 56 лет шаровая функция 1-го порядка очень мало изменила своё положение в пространстве и свой момент. Мы можем рассматривать её как выражающую некоторое нормальное состояние земного магнетизма.

31. Обратимся теперь к сферической функции 2-го порядка. Её коэффициенты для 1829 г. будут:

$g_{20} = +0,001210,$	
$g_{21} = -0,044537,$	$h_{21} = +0,000720,$
$g_{22} = +0,001249,$	$h_{22} = -0,012637$

Эти коэффициенты представляют значительные отступления сравнительно с 1885 г., выражающиеся даже в перемене знака. Мы займёмся определением изменения вида шаровой функции 2-го порядка и увидим, что только этим путём приведённые цифры дают нам совершенно неожиданное освещение тех значительных

изменений, которые происходят в магнитных свойствах земного шара.

Мы должны воспользоваться здесь уже известным нам решением уравнений (14) § 5, применяя их к новым значениям коэффициентов Гаусса. Мы получим следующие результаты, которые сопоставим с найденными нами результатами для 1885 г.

Год	Ось B		Ось C		$\sphericalangle BC$	δ_2
	λ_1	u_1	λ_2	u_2		
1829	186°4′	34°21′	167°56′	73°45′	42°40′	0,005011
1885	76°11′	28°12′	169°36′	82°42′	85°11′	0,039314

Положительные полюсы осей B и C для 1829 г. обозначены на карте буквами β и γ . Мы видим, что ось C за 56 лет весьма мало изменила своё положение, в то время как ось B значительно, на 110°, переместилась от востока к западу, мало изменив свой наклон к оси земли.

Это изменение мы можем представить себе таким образом. Параллельными чёрточками изображён на карте большой круг, соответствующий плоскости осей B , C для 1829 г. Он наклонён к экватору под углом около 75° и делает угол около 43° с плоскостью тех же осей для 1885 г. Этот круг из положения 1829 г. поворачивается около своего экваториального диаметра, приближаясь к северному полюсу, что означено стрелкой a , переходит его по стрелке a_1 и, описав угол в 43°, принимает положение, соответствующее 1885 г., причём экваториальный диаметр постепенно перемещается в плоскости экватора приблизительно на 10° к востоку. В то же время ось β движется к востоку, слегка приподымаясь к северу от своего круга широты, отступая от него через 56 лет приблизительно на 5°. Момент функции возрастает за это время почти в 8 раз.

Едва ли возможно при другой методе охарактеризовать с такой отчётливостью вековое изменение потенциала.

32. Коэффициенты шаровой функции 3-го порядка с 1829 г. по 1885 г. изменились, но не столь значительно, причём ни один из них не изменил своего знака. Исследование изменения вида этой функции требует продолжительных вычислений. Из отношения коэффициентов h_{33} и g_{33} мы находим, что сумма долгот осей этой функции для 1829 г. равна 550° против 599° для 1885 г. Следовательно, за 56 лет величина σ возросла на 49. Величина M_3 изменилась за то же время с 0,00206 для 1829 г. до 0,010227 для 1885 г.

33. *Заключение.* Результаты настоящей работы приводят к следующим выводам:

1. Сложная картина, представляемая явлениями земного магнетизма, распутывается, когда мы относим её к осям шаровых функций, представляющих отдельные магнитные потенциалы. Она вполне определяется положением их осей и магнитных моментов соответственных функций.

2. Нормальный магнетизм земного шара представляется теми из этих потенциалов, которые претерпевают наименьшее изменение с временем. Таким потенциалом является потенциал равномерно намагниченной сферы, ось которой совпадает с осью шаровой функции 1-го порядка и представляет так называемую магнитную ось земли.

3. Кроме оси 1-го порядка и соответственного магнитного момента следует принимать во внимание магнитные оси и моменты высших порядков.

4. Вековые изменения, выражающиеся незначительным изменением элементов земного магнетизма, совершенно не дают понятия о действительно происходящих значительных изменениях магнитных свойств земли. Эти изменения выражаются значительным перемещением некоторых осей и очень медленным — других осей одной и той же шаровой функции. Вековые изменения

в положениях осей и величин моментов могут повести к открытию причин, вызывающих эти изменения.

5. Исходя из гипотезы, что главной причиной, установившей характер земного магнетизма, было вращение земли около ее оси, можно каждую шаровую функцию представлять суммой двух, из коих для одной земная ось есть ось кратная того же порядка, как и функция. Вторая функция представит возмущение первой, нормальной. С этой точки зрения нормальный потенциал земли представляется суммой шаровых функций 1-го, 2-го, 3-го и так далее порядков, для которых земная ось является однократной, двукратной, трёхкратной и так далее осью. Эта точка зрения может быть признана верной в том лишь случае, если моменты шаровых функций, имеющих своей кратной осью ось земли, не подвержены большим вековым изменениям.

6. Восточно-азиатская аномалия находится в связи с положением осей шаровой функции 2-го порядка.

7. Преимущества предлагаемой методы видны из простоты приложенной карты, обнимающей собой для 1885 г. основные элементы земного магнетизма, обусловливаемые явлениями, зависящими от шаровых функций первых трёх порядков.



ДОПОЛНЕНИЕ ЗАКОНА ГИДРОДИФФУЗИИ И НОВЫЕ ДИФФУЗИОМЕТРЫ

Настоящая статья преследует двоякую цель: во-первых, указать новые методы, упрощающие наблюдения явлений гидродиффузии и дающие возможность следить за ними непрерывно в течение произвольно долгого времени, не нарушая хода явления; во-вторых, указать на дополнение, которое должно быть сделано к уравнению диффузии Фика, чтобы оно действительно соответствовало наблюдению. Необходимость введения добавочного члена в уравнение Фика становится понятной, если мы обратим внимание на то обстоятельство, что во всех случаях гидродиффузии прибавление вещества или растворителя к существующему уже раствору всегда сопровождается изменением суммы смешиваемых объёмов, т. е. сжатием или расширением, происходящим от взаимодействия смешиваемых веществ. То, что мы наблюдаем в явлениях диффузии, представляется результатом двух актов: первого, приносящего к данной части раствора новые вещества, или собственно диффузии, и второго, сближающего изменившиеся в своих относительных количествах составные части раствора. Этот последний акт увеличивает, в случае сжатия, массу вещества в единице объёма, и это увеличение, эта «выигранная масса» должна

¹⁾ Статья была помещена в ЖРФХО, часть физ., т. 23, вып. 7, 1891 г. (*Прим. ред.*)

фигурировать как дополнительный член в основном уравнении диффузии, до сих пор принимавшем в расчёт только первый из двух вышеупомянутых актов. Это пренебрежение сжатием или «выигранной массой» может быть допущено в случаях диффузии растворов тех солей, для которых это количество представляется малой величиной; но при диффузии кислот взаимодействие составных частей раствора не может быть пренебрегаемо.

Неприменимость обычного уравнения диффузии к указанным выше явлениям вытекает ещё из следующих соображений. Интеграл такого уравнения даёт зависимость концентрации слоя в диффузионном цилиндре от времени и положения. Под концентрацией раствора разумеется количество растворённого вещества, содержащегося в единице объёма раствора. Если ρ есть удельный вес слоя, p — соответственное процентное содержание вещества, то концентрация представляется выражением $\Phi = \frac{p\rho}{100}$.

Мы можем себе представить, что опыт производится так, что в открытый сверху и запаянный снизу цилиндр наливается определённое количество раствора и поверх него, осторожно, определённое количество растворителя. Интеграл уравнения диффузии (отыскание его есть задача только математического анализа) для бесконечно большого времени должен дать предельное значение, к которому приближается концентрация, т. е. то значение, которое мы получили бы после прямого взбалтывания взятых количеств определённого раствора и растворителя. Так как эти количества наперёд нам известны, то нам известно процентное содержание веществ в предельном растворе, а уравнение Фика приводит нас к величине предельной концентрации; из этих данных мы вычисляем плотность раствора и находим затем соотношение между процентным содержанием вещества в растворе и этой плотностью — соотношение крайне важное в теории растворов и до сего времени не найденное! Я полагаю, что ни автор теории

диффузии, ни современные исследователи не признают общепринятую теорию диффузии достаточной для решения, помимо всяких других данных, кроме коэффициента диффузии, вопросов столь важных и связанных с наиболее характерными свойствами растворов.

Так как указанная мною задача может быть поставлена всякой теории диффузии и, с математической точки зрения, должна быть решена, то отсюда следует, что основное уравнение диффузии должно содержать в себе функцию, которая требует предварительного определения для всякого раствора и без знания которой интегрирование уравнения диффузии было бы невозможно; далее, самое решение поставленной выше задачи должно приводить к тождеству, т. е. не давать нам ничего нового. Отсюда следует, что основное уравнение диффузии должно содержать в себе функции, представляющие или зависимость Φ от ρ , или ρ от Φ для раствора данного вещества.

Гипотеза Фика, как мы увидим далее, предполагает специальную зависимость между ρ и Φ , соответствующую несжимаемости раствора при его образовании. Между тем при наблюдении явлений диффузии, в некоторых методах, по плотности ρ в данном месте диффузионного цилиндра вычисляют концентрацию, отыскивая в таблицах процентное содержание ρ , соответствующее этой плотности. В таких приёмах кроется недоразумение, выяснение которого, как мы увидим далее, весьма важно. Таблицы плотностей и соответственного процентного содержания вещества составлены для образовавшихся растворов; я назову их *статическими*. Между тем в диффузионном сосуде мы имеем дело с *образующимся* ещё раствором, не достигшим ни в одном слое сосуда своего статического состояния. Мы не можем утверждать а priori, что те стадии, которые проходятся раствором, приближающимся к статическому состоянию, соответствуют таким же промежуточным. Иными словами, а priori не очевидно, что в процессе диффузии плотности раствора ρ в данном месте сосуда соответствует то самое

процентное содержание вещества, которое наблюдалось бы нами в растворе той же плотности, при законченном процессе растворения. Подобная очевидность существует только для таких растворов, которые при образовании не изменяют своего объёма: только для них справедливо уравнение Фика; но подобных растворов не существует.

Из сказанного усматривается естественность появления добавочного члена в основном уравнении диффузии. Введение этого члена не требует видоизменения гипотезы Фика о диффузионном токе, как пропорциональном разности концентраций веществ в смежных слоях. Этот закон можно дополнить, как это делает О. Wiedeburg (Wied. Ann., Bd. XLI, S. 675, 1890), рассматривая член, представляющий гипотезу Фика, только как первый член разложения некоторой функции; но не с этой стороны должно явиться существенное изменение в теории диффузии; таким изменением представляется введение «выигранной массы».

Для пользования дополненным уравнением диффузии необходимо будет сделать гипотезы относительно этой массы. Одна из них, повидимому наиболее естественная, состоит в том, что введение в раствор веществ процессом диффузии и полное изменение объёма, соответствующее изменению в составе раствора, для объёма бесконечно малого происходят одновременно.

Предлагаемый мною метод наблюдений даёт возможность проверить избираемые гипотезы.

1. Приборы. Для наблюдения гидродиффузии я старался найти методы, которые давали бы возможность собрать возможно большее число цифр, соответствующих различным моментам явления, ограничивая все манипуляции, кроме первой, простой отметкой показаний самого прибора. Такие методы значительно упрощают самое исследование и дают возможность производить его одновременно, следовательно, при одинаковых условиях температуры, над целым рядом жидкостей, что весьма важно для проверки законов диффу-

зии, так как здесь, как мы увидим, имеет большое значение сравнение цифр, соответствующих растворам различных концентраций.

Первоначально для указанной цели мною употреблялись стеклянные шарики малых размеров и различного веса, указывавшие своим положением плотность в различных частях раствора, в котором они плавали на разных глубинах; перемещение этих шариков, наблюдавшееся изо дня в день, давало отчёт о явлении диффузии (см. мою статью «Диффузия водного раствора поваренной соли», XIV т. Записок Новороссийского общества естествоиспытателей, 1888 г.). Таким приёмом мною производились наблюдения над диффузией раствора поваренной соли с ноября 1887 г. по апрель 1888 г., затем с осени 1889 г. по настоящее время, и, наконец, наблюдается диффузия серной и азотной кислот в воду с ноября 1890 г. и по настоящее время.

При таком приёме необходимо, чтобы диаметр диффузионного цилиндра был бы достаточно велик сравнительно с диаметром взвешенных в растворе стеклянных шариков; это обстоятельство делает приборы объёмистыми и требует большого количества жидкостей. Во избежание этих неудобств и для определения итога диффузионного явления в любой момент я употребляю иные способы наблюдения.

На рис. 1 *AB* представляет стеклянную трубку, длиной около 40—50 см, произвольного внутреннего диаметра (мои трубки имели внутренний диаметр от 1,2 мм до 2,8 мм). Такая трубка представляет собой диффузионный цилиндр: в нём происходит процесс диффузии. В вершине *B* к диффузионному цилиндру

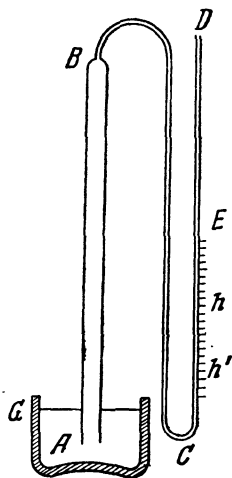


Рис. 1.

припаивается капиллярный сифон BCD , согнутый из термометрической стеклянной трубки. Внутренний диаметр сифона выражается сотыми долями миллиметра. Часть CE колена CD на протяжении 15—20 см разделена на миллиметры. Описанный прибор я назову *сифонным диффузиометром*. Пользуются им следующим образом. Конец A диффузионного цилиндра погружается в сосуд, содержащий растворитель, например воду. Вода втягивается, поднимается в диффузионном цилиндре и затем переходит в колено BC сифона; в тот момент, когда она достигает точки C , или же немного её переходит, насосывание воды прекращают, и последняя сама поднимается в капилляре CD , причём после нескольких небольших колебаний останавливается на некотором уровне h . После этого на отверстии D надевается восковой колпачок, который приплавляется своими краями к наружным стенкам трубки; сосуд с растворителем отнимается прочь и на его место ставится другой, наполненный диффундирующей жидкостью, так, чтобы конец A , погрузившись в неё, находился на прежней глубине относительно уровня жидкости. Восковой колпачок над отверстием D срезывается, и отсчитывается показание h уровня растворителя в капилляре. Прибор готов для наблюдений.

Диффундирующая, более плотная жидкость поднимается в диффузионный цилиндр, вследствие чего колонна AB становится всё более и более тяжёлой, почему уровень растворителя в капилляре CD опускается всё ниже и ниже. Вес колонны растворителя, соответствующий понижению уровня $h-h'$ в капилляре, представляет непосредственно увеличение веса вертикальной нити, одинакового диаметра с капилляром, мысленно проведённой в диффузионном цилиндре. Рассматривая последний бесконечно длинным, легко установить, как будет показано ниже, простое соотношение между падением $h-h'$ жидкости в капилляре и временем. Это падение измеряет разность между весовыми количествами жидкостей, входящих и выходящих из диффузионного цилиндра. Колену CD даётся такая же

длина, как и AB , хотя растворитель занимает в ней менее четверти всей длины, с целью уменьшить испарение жидкости. Ни испарение, ни прилипание жидкости к стенкам при её опускании не могут влиять на стояние уровня в капилляре, так как оно обуславливается исключительно изменением веса жидкости в диффузионном цилиндре и силой сцепления в капилляре. Малостью диаметра колена CD (другое колено BC сифона может иметь и больший диаметр) достигаются две цели: во-первых, высота падающей колонны Ch больше, а потому наблюдения могут продолжаться в течение более значительного времени; во-вторых, объём жидкости, переходящей при падении уровня в капилляре в диффузионный цилиндр, настолько мал, что не вытесняет жидкость из этого цилиндра обратно в сосуд G , а изменяет только кривизну поверхности, разграничивающей в части A жидкость диффузионного цилиндра и жидкость сосуда, из которого происходит диффузия.

Для предупреждения изменения уровня во внешнем сосуде вследствие диффузии последний имеет диаметр значительный сравнительно с диаметром диффузионного цилиндра; я употреблял цилиндрические стаканы с внутренним диаметром около 45 мм, в которых жидкость была налита на 2 см выше дна. Чтобы иметь представление об испарении растворителя из капиллярной трубки, рядом с прибором помещался обыкновенный опрокинутый сифон из такой же трубки, такой же длины, как капилляр, и в обоих коленах которого растворитель занимал высоты, равные Dh ; в течение месяца при температурах опыта ($14^{\circ},7$ — $16^{\circ},5$ C) испарение не превышало 0,8 мм в каждом колене.

Для замедления испарения жидкости из сосуда G или же поглощения ею (например, если жидкость есть серная кислота) влаги, предварительно (рис. 2) на диффузионный цилиндр AB надевалась стеклянная трубка F , ходившая по нему со слабым трением; к этой трубке приплавлялась парафиновая пробка n ; вся система с помощью двух нитей i висела на шпильке k , воткну-

той в пробку m , через которую проходил и цилиндр AB .

Пробка m имеет прорез p , которым она насажена на горизонтальную линейку S , поддерживающую на своём протяжении целый ряд подобных же диффузиометров. После погружения конца A в диффундирующую жидкость нить i снимается со шпильки k и трубка F с пробкой n опускается на сосуд, к

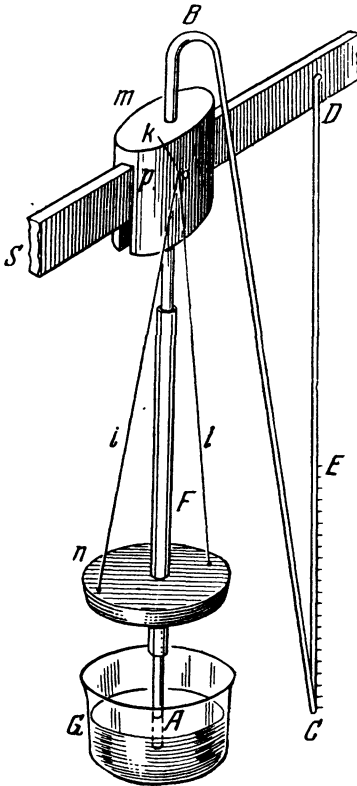


Рис. 2.

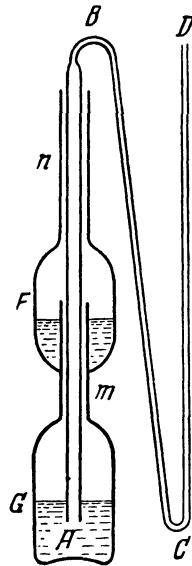


Рис. 3.

краям которого приплавляется пробка помощью нагретой металлической проволоки, изогнутой в виде полукруга. Давление наружного воздуха передаётся внутрь сосуда через капиллярное пространство между

стенками трубки F и диффузионного цилиндра AB . Обмен влаги между внутренним и внешним воздухом совершается через то же пространство.

При опытах с серной кислотой я употреблял ещё другой аппарат, а именно (рис. 3): диффузионный цилиндр AB вводился внутрь сосуда, состоящего из двух полостей F и G , наполненных растворами серной кислоты одинаковой концентрации. Сообщение этих полостей с наружным воздухом совершалось при помощи припаянных к их стенкам трубок m и n , прилежавших со слабым трением к проходившему внутри них диффузионному цилиндру AB . Серная кислота в полости F имела назначением предварительно осушать воздух, который поступал в сосуд G , из которого кислота диффундировала в диффузионный цилиндр.

Наконец, третье видоизменение прибора состояло в том, что сосуд с диффундирующей жидкостью имел вид колбочки с припаянной, вместо горлышка, длинной трубкой, заменявшей трубку F на рис. 2; в этом случае парафиновая пробка излишня.

Представим себе три вертикальных колонны, каждая с сечением, равным единице площади, и заменяющих, соответственно, колена AB , BC и CD аппарата; означим через P , p , π веса содержащихся в них жидкостей, через F — капиллярную силу, действующую у мениска в колене CD ; полагая, что точки A и C находятся на одном уровне, имеем для всякого момента времени уравнение:

$$P - p + \pi = F.$$

Если T есть температура, h мм — высота жидкости в колене CD , σ — её удельный вес, то $\pi = h\sigma$. Пусть длина AB равна 500 мм и для данного момента процесс диффузии распространился на $\frac{1}{5}$ часть длины AB ; среднюю плотность жидкости в этой части означим через $\bar{\rho}$. Предыдущее уравнение для данной температуры будет:

$$100(\bar{\rho} - \sigma) + h\sigma = F,$$

откуда

$$h = \frac{F}{\sigma} - 100 \frac{\bar{\rho} - \sigma}{\sigma}.$$

Оценим влияние колебаний температуры на величину h . Изменение h , соответствующее изменению температуры на ΔT , представится двумя членами:

$$\frac{d}{dT} \left(\frac{F}{\sigma} \right) \Delta T \quad \text{и} \quad -100 \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{\rho} - \sigma}{\sigma} \right) \Delta T.$$

Влияние первого члена может быть определено с помощью одного из описанных диффузионных аппаратов, наполненного исключительно растворителем плотности σ . Такой аппарат, наполненный дистиллированной водой, при колебаниях температуры около 2°C , имевших место в зале физической лаборатории, не обнаружил заметных изменений высоты h . Что касается второго члена, то он тоже мал; так, принимая, что диффундирующая жидкость есть азотная кислота плотности 1,4, мы можем принять плотность $\rho = 1,2$, и тогда второй член будет меньше 0,1 мм — величины, лежащей внутри погрешностей наблюдения.

Что касается влияния температуры на самый процесс диффузии, то непосредственное, вследствие малости её колебаний, ничтожно; нарушение же процесса токами жидкости, происходящими от изменения термических условий, не может быть значительным при большой узкости употреблявшихся мною диффузионных цилиндров.

Отсчёты высоты h на колене CD производились мною невооружённым глазом, причём оценивались пятые доли миллиметра. Можно было бы для уменьшения влияния температуры приводить все диффузиометры в момент наблюдения к одной определённой; но я не имел возможности сделать для этой цели необходимые приспособления. Желательно было бы производить подобные наблюдения внутри специально устроенного термостата: в этом случае возможно значительно увеличить чувствительность метода, заменив вертикальное колено CD другим — почти горизонтальным,

В моих опытах все диффузиометры, числом 11, помещались в стеклянном шкафе, покрытом войлочным чехлом. Кроме того, каждый диффузионный аппарат был окружён бумажным плотным цилиндром так, что колено CD оставалось видимым. Внутри шкафа висел термометр; на последовательное поднятие получехла и наблюдение всех диффузиометров требовалось не более четырёх минут; наблюдение производилось один раз в сутки. Этими наблюдениями мы воспользуемся в настоящей статье; но диффузия наблюдалась мною ещё другими приборами, которые, в видах полноты, будут мною здесь же описаны.

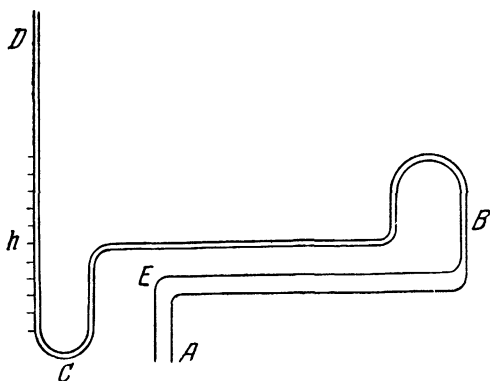


Рис. 4.

Диффузионный крючок (рис. 4). Цель этого прибора — исследование диффузии в различных участках диффузионного цилиндра AB , только часть AE которого сохранена вертикальной; изменение веса жидкости только в этой части влияет на падение уровня растворителя в капилляре CD . Несколько таких крючков различной длины с одним и тем же растворителем погружаются в один и тот же сосуд с диффундирующей жидкостью.

Диффузионный ареометр. Согнутый стеклянный сифон AB (рис. 5) наполняется водой, вешается на

крючок C выдутого из стекла ареометра E с длинной, тонкой, градуированной шейкой D . Весь прибор опускается в диффундирующую жидкость, например в серную кислоту S , налитую в длинный цилиндрический сосуд M , который погружён в другой, больший, N , наполненный водой; в этом последнем висит термометр T . По мере поступления серной кислоты в сифон AB он становится тяжелее, и число делений, на которое опускается шейка ареометра, служит указанием хода диффузии.

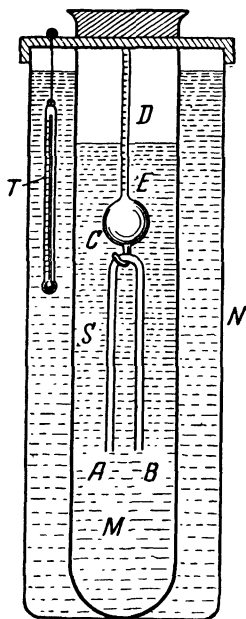


Рис. 5.

2. Вывод уравнения диффузии, обращая внимание на сжатие растворов. Примем, что сечение диффузионного вертикально стоящего цилиндра равно единице площади; через x означим ось цилиндра, отсчитывая её от нижнего сечения $x=0$ вверх. Обмен веществ через какое-нибудь сечение цилиндра, нормальное к его стенкам, мы принимаем подчиняющимся закону Фика, который будет выражен мною согласно приёму Стефана (Wied. Ann., Bd. XLI, стр. 725, 1890).

Число молекул растворителя в единице объёма обозначим через n , диффундирующего вещества — через N ; массы молекул — соответственно через m и M ; удельный вес растворителя — через σ , раствора в данном месте диффузионного цилиндра — через ρ , время — t . Мы имеем соотношение:

$$MN + mn = \rho. \quad (1)$$

По гипотезе Фика весовое количество диффундирующего вещества, проходящего актом диффузии через

единицу сечения в единицу времени с одной стороны на другую, будет:

$$Q = -\mu \frac{dN}{dx} M, \quad (2)$$

и растворителя:

$$q = -\mu \frac{dn}{dx} m; \quad (3)$$

здесь μ есть коэффициент диффузии, не зависящий, по удерживаемому нами предположению Фика, от концентрации раствора.

В видах упрощения вывода дифференциального уравнения диффузии будем рассуждать над единицей объёма, взятого где-нибудь внутри диффузионного цилиндра и ограниченного его стенками и двумя сечениями a и a_1 , нормальными к стенкам и равными каждое единице площади. По истечении элемента времени dt в пространстве, ограниченном этими двумя сечениями, количества веществ изменятся на разность диффузионных токов, проходящих через a и a_1 , т. е. к прежним массам

$$MN \text{ и } mn$$

соответственно алгебраически прибавляется

$$\mu \frac{d^2N}{dx^2} M dt \text{ и } \mu \frac{d^2n}{dx^2} m dt, \quad (4)$$

т. е. по уравнению (1) к массе ρ прибавляется масса

$$\mu \frac{d^2\rho}{dx^2} dt. \quad (4')$$

Таким образом, прежняя единица объёма вследствие изменения её удельного веса ρ в $\rho + \frac{d\rho}{dt} dt$ перейдёт в новый объём:

$$\frac{\rho + \mu \frac{d^2\rho}{dx^2} dt}{\rho + \frac{d\rho}{dt} dt}. \quad (5)$$

Означим через Δ происшедшее изменение единицы объёма: это будет или сжатие или расширение — соответственно с физическими свойствами раствора; для краткости мы назовём его условно сжатием и будем считать положительным. Мы имеем по определению:

$$\Delta = 1 - \frac{\rho + \mu \frac{d^2\rho}{dx^2} dt}{\rho + \frac{d\rho}{dt} dt}. \quad (6)$$

Приводя к одному знаменателю, опуская бесконечно малые 2-го порядка и деля на dt , находим:

$$\frac{\Delta}{dt} \rho = \frac{d\rho}{dt} - \mu \frac{d^2\rho}{dx^2}. \quad (I)$$

Это есть уравнение диффузии, дополненное членом $\frac{\Delta}{dt} \rho$, представляющим выигранную массу; полагая последнюю равной нулю, мы получаем, как частный случай, уравнение Фика:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mu \frac{d^2\rho}{dx^2}. \quad (7)$$

Это выражение получается и прямо, полагая отношение (5) равным единице. Таким образом, дифференциальное уравнение диффузии, в том виде как оно доселе выводилось, предполагает неизменяемость объёма при изменяемости массы процессом диффузии. Это предположение, делавшееся для всякой концентрации, содержит в себе две гипотезы:

а) отсутствие взаимодействий между веществами, кроме тех, которые обуславливают диффузионный ток;

б) объёмы веществ, обменивающихся процессом диффузии, друг другу равны, т. е. объём вещества, входящего в данную часть диффузионного цилиндра, равен объёму выходящего из неё растворителя.

Из этих двух, скрытых обыкновенно, гипотез только первая находится в прямом противоречии с правильным уравнением (I); что же касается второй гипотезы, то мы

увидим далее, что она тоже не соответствует действительности. Прежде чем заняться развитием основного уравнения (I), мы покажем приложение уравнения Фика (7) к предлагаемым мною методам наблюдения.

3. Теория метода диффузионного сифона на основании уравнения Фика. Считая время t от начала диффузии, интеграл уравнения (7) представится, как известно, выражением:

$$\rho = A + B \int_0^{\theta} e^{-y^2} dy, \quad (8)$$

где

$$\theta = \frac{x}{2\sqrt{\mu t}} \quad (9)$$

и A и B суть постоянные.

Означим через ρ_0 удельный вес жидкости в сосуде, из которого происходит диффузия, и примем, что вследствие больших размеров этого сосуда сравнительно с диффузионным цилиндром плотность этой жидкости остаётся всё время без изменения; следовательно, ρ на сечении $x=0$ равно ρ_0 . Называя через σ удельный вес жидкости в диффузионном цилиндре до начала диффузии и рассматривая этот цилиндр бесконечно длинным, в точках $x=\infty$ имеем $\rho=\sigma$. Вводя эти условия, получим:

$$A = \rho_0, \quad B = -2 \frac{\rho_0 - \sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

Полагая

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\theta} e^{-y^2} dy = U, \quad U_{\theta=\infty} = 1, \quad (10)$$

находим:

$$\rho = \rho_0 - (\rho_0 - \sigma) U. \quad (11)$$

Вычислим от начала диффузии до данного момента времени увеличение веса колонны диффузионного

цилиндра, ограниченной сечениями $x=0$ и $x=l$, из коих каждое равно единице площади. Означая через P этот прирост веса, имеем, по определению:

$$P = \int_0^l \rho dx - \sigma l = (\rho_0 - \sigma) \left\{ l - \int_0^l U dx \right\}.$$

Но

$$\int_0^l U dx = \frac{2l}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{l}{2\sqrt{\mu t}}} e^{-y^2} dy + \frac{\sqrt{\mu t}}{\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-\frac{l^2}{4\mu t}} - 1 \right\}.$$

Следовательно, подставляя:

$$P = (\rho_0 - \sigma) \left\{ l \left(1 - U_{y=l} \right) - \frac{2\sqrt{\mu t}}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-\frac{l^2}{4\mu t}} - 1 \right) \right\}.$$

С возрастанием l до бесконечности $U_{y=l}$ приближается по его свойству (10) к единице, а потому для $l = \infty$, т. е. для бесконечно длинной колонны,

$$P = \frac{2(\rho_0 - \sigma)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mu t}. \quad (12)$$

Если за то же время в измерительном колене CD сифона уровень жидкости упал с высоты h_0 до h , то найденный нами прирост веса P должен быть равен весу упавшей колонны, принимая площадь её основания равной единице, т. е. весу

$$(h_0 - h) \sigma. \quad (13)$$

Приравнивая друг другу выражения (12) и (13), получаем формулу, дающую закон падения уровня в колене сифона в зависимости от времени:

$$h_0 - h = \frac{2(\rho_0 - \sigma)}{\sigma \sqrt{\pi}} \sqrt{\mu t}. \quad (14)$$

Положим

$$R_1 = \frac{2(\rho_0 - \sigma)}{\sigma \sqrt{\pi}}, \quad (15)$$

тогда

$$h_0 - h = R_1 \sqrt{\mu t}. \quad (16)$$

То-есть падение уровня растворителя в капилляре сифона прямо пропорционально корню квадратному из времени, протекшего от начала диффузии, разности плотностей диффундирующей жидкости и растворителя, и обратно пропорционально плотности растворителя.

4. Развитие основного уравнения диффузии. Мы займёмся теперь изысканием выражения для функции Δ . Эта задача настолько важна, что я считаю нужным представить её решение двумя различными путями; они послужат вместе с тем к большему уяснению представления о процессах, сопровождающих диффузию.

а) *Первый вывод.* Предположим, что желаем составить раствор плотности ρ_1 , занимающий объём $\omega < 1$, из вещества плотности d и растворителя плотности σ . Означим через p_1 процентное содержание вещества в растворе. Весовое количество составных частей раствора в объёме ω будет:

$$\left. \begin{array}{l} \text{вещества} \quad \omega \rho_1 \frac{p_1}{100}, \\ \text{растворителя} \quad \omega \rho_1 \frac{100 - p_1}{100}. \end{array} \right\} \quad (17)$$

Желаемый раствор можно приготовить двояким образом:

1) Смешиваем сразу части (17); первоначальный объём смеси

$$\frac{\omega \rho_1}{d} \cdot \frac{p_1}{100} + \frac{\omega \rho_1}{\sigma} \frac{100 - p_1}{100}$$

переходит вследствие взаимодействия её составных частей, по условию, в объём ω , вследствие чего смесь испытывает сокращение объёма или сжатие

$$\Delta'' = \frac{\omega \rho_1}{d} \cdot \frac{p_1}{100} + \frac{\omega \rho_1}{\sigma} \frac{100 - p_1}{100} - \omega,$$

или, полагая

$$D_1 = \frac{p_1}{100} \left\{ \frac{p_1}{d} + \frac{100 - p_1}{c} \right\}, \quad (18)$$

сжатие

$$\Delta'' = \omega (D_1 - 1). \quad (19)$$

2) Тот же раствор может быть получен другим путём. Составные части (17) разделим на две группы.

Первая взаимодействием своих составных частей переходит в объём, равный единице; плотность образовавшегося раствора означим через ρ , процентное содержание в нём вещества через p . В этом растворе содержатся весовые количества:

$$\left. \begin{array}{l} \text{вещества} \quad \frac{\rho p}{100}, \\ \text{растворителя} \quad \frac{\rho(100 - p)}{100}. \end{array} \right\} \quad (20)$$

Вторая группа содержит массу $\omega \rho_1 - \rho > 0$ и весовые количества:

$$\left. \begin{array}{l} \text{вещества} \quad \xi = \omega \rho_1 \frac{p_1}{100} - \rho \frac{p}{100}, \\ \text{растворителя} \quad \eta = \omega \rho_1 \frac{100 - p_1}{100} - \rho \frac{100 - p}{100}. \end{array} \right\} \quad (21)$$

Первая группа вследствие взаимодействия своих составных частей, занимавших первоначально объём

$$\frac{\rho}{d} \cdot \frac{p}{100} + \frac{\rho}{c} \frac{100 - p}{100},$$

по условию сокращается в объём, равный единице; это парциальное сокращение Δ' , полагая

$$D = \frac{\rho}{100} \left(\frac{p}{d} + \frac{100 - p}{c} \right), \quad (22)$$

будет:

$$\Delta' = D - 1. \quad (23)$$

Затем вторая группа действует на образовавшийся раствор первой группы, и оставшийся объём

$$1 + \frac{\xi}{d} + \frac{\eta}{\sigma} \quad (24)$$

сокращается, по условию, до ω ; величина Δ''' этого второго парциального сокращения будет:

$$\Delta''' = 1 + \frac{\xi}{d} + \frac{\eta}{\sigma} - \omega. \quad (25)$$

Сумма парциальных сокращений должна равняться полному, т. е.

$$\Delta'' = \Delta' + \Delta'''. \quad (26)$$

Внося сюда соответственные величины (19), (23) и (25), находим после приведения:

$$\omega D_1 - D = \frac{\xi}{d} + \frac{\eta}{\sigma}. \quad (27)$$

Это выражение тождественно удовлетворяется значениями D (18) и (22) и ξ, η (24).

Положим теперь, что подмесь ξ и η к раствору плотности ρ , занимавшему объём, равный единице, произведена актом диффузии в течение элемента времени dt ; тогда, по соотношениям (4),

$$\xi = \mu \frac{d^2 N}{dx^2} M dt \quad \text{и} \quad \eta = \mu \frac{d^2 n}{dx^2} m dt, \quad (28)$$

и объём ω представляет собою тот, который достигается единицей объёма раствора во время диффузионного процесса по прибавлении к нему количеств (28); следовательно,

$$\Delta = 1 - \omega. \quad (29)$$

Δ есть малая величина 1-го порядка; ρ_1 и ρ , D_1 и D разнятся друг от друга тоже бесконечно мало, а потому

$$\rho_1 = \rho + d\rho, \quad D_1 = D + dD, \quad (30)$$

где знак дифференциала d относится ко времени. Пренебрегая произведением $\Delta \cdot dD$, мы получаем, пользуясь

(29) и (30), из (27):

$$dD - \Delta \cdot D = \frac{\xi}{d} + \frac{\eta}{d}. \quad (31)$$

Но, по определению,

$$p = \frac{100}{\rho} \cdot NM, \quad 100 - p = \frac{100}{\rho} nm, \quad (32)$$

а потому из (22) имеем:

$$D = \frac{NM}{d} + \frac{nm}{\sigma}. \quad (33)$$

Внося (28) и (33) в уравнение (31), находим:

$$\frac{M}{d} \frac{dN}{dt} + \frac{m}{\sigma} \frac{dn}{dt} - \frac{\Delta}{dt} D = \frac{\mu M}{d} \frac{d^2 N}{dx^2} + \frac{\mu m}{\sigma} \frac{d^2 n}{dx^2}. \quad (34)$$

Основное уравнение (I), по соотношению (1), можно представить в виде:

$$\frac{\Delta}{dt} \rho - M \frac{dN}{dt} - m \frac{dn}{dt} = -\mu M \frac{d^2 N}{dx^2} - \mu m \frac{d^2 n}{dx^2}. \quad (35)$$

Исключая Δ из уравнений (34) и (35), умножая первое на ρ , второе на D и складывая, приходим к равенству:

$$M \left(\frac{\rho}{d} - D \right) \left(\frac{dN}{dt} - \mu \frac{d^2 N}{dx^2} \right) + m \left(\frac{\rho}{\sigma} - D \right) \left(\frac{dn}{dt} - \mu \frac{d^2 n}{dx^2} \right) = 0. \quad (36)$$

Обращая внимание на выражение D (22), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{d} - D &= \frac{\rho}{100} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sigma} \right) (100 - p), \\ \frac{\rho}{\sigma} - D &= -\frac{\rho}{100} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\sigma} \right) p. \end{aligned}$$

Внося в (36) и сокращая, получим:

$$M (100 - p) \left(\frac{dN}{dt} - \mu \frac{d^2 N}{dx^2} \right) - mp \left(\frac{dn}{dt} - \mu \frac{d^2 n}{dx^2} \right) = 0. \quad (37)$$

Выведем из этого уравнения некоторые следствия. Мы видим, во-первых, что при p , отличном от 0 или 100, если диффузия одной составной части раствора следует

закону Фика, то ему следует и диффузия другой составной части: сжатия нет.

Во-вторых, если p или же $100 - p$ очень мало, то диффузия той части раствора, которая содержится в меньшем количестве, почти следует закону Фика.

Воспользуемся теперь уравнением (37) для решения нашей основной задачи; из уравнений (32) мы находим, рассматривая произведение $p\rho$ как функцию от ρ :

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dN}{dt} &= \frac{1}{100} \cdot \frac{d(p\rho)}{d\rho} \frac{d\rho}{dt}, \\ m \frac{dn}{dt} &= \frac{1}{100} \left[100 - \frac{d(p\rho)}{d\rho} \right] \frac{d\rho}{dt}, \\ M \frac{d^2N}{dx^2} &= \frac{1}{100} \left[\frac{d^2(p\rho)}{d\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dx} \right)^2 + \frac{d(p\rho)}{d\rho} \frac{d^2\rho}{dx^2} \right], \\ m \frac{d^2n}{dx^2} &= \frac{1}{100} \left[100 \frac{d^2\rho}{dx^2} - \frac{d^2(p\rho)}{d\rho^2} \left(\frac{d\rho}{dx} \right)^2 - \frac{d(p\rho)}{d\rho} \frac{d^2\rho}{dx^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Подставляя эти выражения в (37), получим после простых приведений:

$$\frac{d\rho}{dt} = \mu \frac{d^2\rho}{dx^2} + \mu\varphi \left(\frac{d\rho}{dx} \right)^2, \quad (I')$$

где

$$\varphi = \frac{\frac{d^2(p\rho)}{d\rho^2}}{\frac{d(p\rho)}{d\rho} - p}. \quad (II)$$

Сравнивая с уравнением (I), имеем:

$$\frac{\Delta}{dt} = \mu\varphi \left(\frac{d\rho}{dx} \right)^2. \quad (III)$$

Процентное содержание p вещества вошло в эти выражения через величину D (22). Последняя, сама по себе, не предполагает никакой предварительной связи между количествами p и ρ , в неё входящими; поэтому p в нашем уравнении диффузии есть такое же неизвестное, как и ρ ; для пользования уравнением необходимо, следовательно, сделать гипотезу о соотношении между p и ρ .

б) *Второй вывод.* Мы разумели под N и n числа молекул вещества и растворителя в единице объёма. После того как по истечении бесконечно малого элемента времени dt в этот объём поступит количество молекул вещества, равное

$$\mu \frac{d^2 N}{dx^2} dt,$$

и этот объём сократится до $1 - \Delta$, число молекул вещества, содержащееся в новой единице объёма, будет:

$$\frac{N + \mu \frac{d^2 N}{dx^2} dt}{1 - \Delta}.$$

Вычитая отсюда число молекул N , содержащихся в прежней единице объёма, мы получаем прирост $\frac{dN}{dt} dt$ числа молекул вещества в единице объёма, т. е.

$$\frac{dN}{dt} dt = \frac{N + \mu \frac{d^2 N}{dx^2} dt}{1 - \Delta} - N.$$

Умножая обе части на $1 - \Delta$ и пренебрегая бесконечно малыми 2-го порядка, найдём:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \mu \frac{d^2 N}{dx^2} + N \frac{\Delta}{dt}, \\ \frac{dn}{dt} &= \mu \frac{d^2 n}{dx^2} + n \frac{\Delta}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

и точно так же

Из этих двух уравнений, умножая первое на M , второе на n и складывая, получим, обращая внимание на (1), — основное уравнение (I).

Вставим теперь в первое из уравнений (39) вместо Δ его величину из уравнения (I); получим, по умножении на M :

$$M \frac{dN}{dt} = \mu M \frac{d^2 N}{dx^2} + \frac{MN}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} - \mu \frac{d^2 \rho}{dx^2} \right).$$

Но MN можно выразить произведением $\rho \rho$ из (32), не вносящего никакого нового условия; в этом предпо-

ложении производные MN по t и x представляются выражениями (38), и, внося их в предыдущее уравнение, последнее обратим в найденное выше уравнение (I'). Точно так же можно поступить и со вторым из уравнений (39).

Наконец, уравнения (39) обращают в тождество уравнение (37), которое, по сокращении на Δ , принимает вид:

$$M(100 - p)N - mpr = 0$$

и удовлетворяется соотношениями (32). Уравнение (31) можно представить в интересной форме, внося в него ξ и η (28) и обращая внимание на выражение D (33):

$$\frac{\Delta}{dt}D = \frac{dD}{dt} - \mu \frac{d^2D}{dx^2}, \quad (\text{IV})$$

аналогичное основному уравнению (I). D представляет собой объём, в который превратится единица объёма раствора после разделения двух её составных частей: вещества и растворителя. Таким образом, объём, занимаемый до смешения составными частями единицы объёма раствора, следует тому же закону, как плотность раствора. При гипотезе Фика: $D = 1$ и $\Delta = 0$, а потому уравнение (IV) и не появлялось в обычной теории диффузии: равенство $D = 1$ для этого случая обнаружено далее (41').

5. Первая гипотеза о функции Δ и интегрирование уравнения. Мы принимаем, что процентное содержание p , входящее в выражение (22), равно табличному, соответствующему плотности ρ ; иными словами, что в каждый отдельный момент диффузионного процесса каждый слой раствора успевает достигнуть наибольшего сокращения, вообще изменения объёма, соразного количеству веществ, поступающих в него, в этот момент, при процессе диффузии.

При такой гипотезе интегрирование уравнения (I') требует предварительного знания зависимости concentra-

ции раствора от его плотности, т. е. нужно знать зависимость от ρ функции

$$\Phi = \frac{p\rho}{100}. \quad (40)$$

Таким образом, теория диффузии вводится в надлежащие рамки.

Мы имеем, далее, вместо (II)

$$\varphi = \frac{\frac{d^2\Phi}{d\rho^2}}{\frac{d\Phi}{d\rho} - \frac{\Phi}{\rho}},$$

и уравнение (III), показывая нам, что сжатие Δ пропорционально квадрату диффузионного тока или что диффузионный ток пропорционален квадратному корню из сжатия, вносит родственную связь между способностью растворов к диффузии и способностью изменять свой объём взаимодействием своих составных частей.

В том случае, когда функция $\varphi = 0$, уравнение (I') совпадает с обычным видом дифференциального уравнения диффузии, интеграл которого для различных случаев известен.

Заметим, что это уравнение справедливо, следовательно, в том лишь случае, когда

$$\frac{d^2(p\rho)}{d\rho^2} = 0,$$

т. е. при зависимости

$$p = c + \frac{c_1}{\rho}, \quad (41)$$

где c и c_1 суть постоянные. Такая зависимость действительно имеет место при отсутствии изменения объёма во время образования раствора, так как в этом случае для 100 граммов раствора можем написать:

$$\frac{100}{\rho} = \frac{p}{d} + \frac{100 - p}{g}, \quad (41')$$

откуда

$$p = \frac{100d}{d - \sigma} - \frac{100 d\sigma}{d - \sigma} \cdot \frac{1}{\rho}.$$

Если бы мы сделали другую гипотезу относительно функции Δ , то получили бы уравнение, которое существовало бы рядом с уравнением (I'). Они дали бы нам возможность определить обе неизвестные величины p и ρ , а следовательно, и зависимость между ними; в таком случае эта зависимость была бы отлична от имеющей место для статических растворов.

Для интегрирования уравнения (I') мы предположим, что растворы данного вещества могут быть разбиты на такие группы, для которых функция φ изменяется мало; мы можем при этом условии найти приближительный результат, интегрируя при допущении постоянства φ . Такое предположение, перенесённое на растворы всякой концентрации, представляет собой также специальную гипотезу.

Мы принимаем, что ρ есть функция переменной θ (9):

$$\theta = \frac{x}{2\sqrt{\mu t}}, \quad (42)$$

тогда

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\theta}{2t} \frac{d\rho}{d\theta}, \quad \frac{d\rho}{dx} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{1}{2\sqrt{\mu t}}, \quad \frac{d^2\rho}{dx^2} = \frac{1}{4\mu t} \frac{d^2\rho}{d\theta^2}. \quad (43)$$

Подставляя эти величины в уравнение (I'), находим, умножая его на $4t$:

$$2\theta \frac{d\rho}{d\theta} + \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \varphi \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = 0. \quad (44)$$

Введём новую функцию z от θ , связанную с ρ дифференциальным соотношением

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{1}{\varphi} \frac{dz}{z}. \quad (45)$$

Отсюда

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2z}{dz^2} - \frac{1}{\varphi} \frac{\left(\frac{dz}{dz} \right)^2}{z^2}. \quad (46)$$

Внося в уравнение (44), после умножения на φz , получаем:

$$2\theta \frac{dz}{d\theta} + \frac{d^2z}{d\theta^2} = 0, \quad (47)$$

откуда, интегрируя и означая через c и c_1 две произвольные постоянные:

$$z = c \int_0^{\theta} e^{-\theta^2} d\theta + c_1. \quad (48)$$

Подставляя эту величину в соотношение (45) и полагая $\frac{c}{c_1} = c'$, находим:

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{1}{\varphi} \frac{c' e^{-\theta^2}}{c' \int_0^{\theta} e^{-\theta^2} d\theta + 1} \quad (49)$$

и, интегрируя, означая через c'' новое постоянное:

$$\rho = \frac{1}{\varphi} \ln \left[c' \int_0^{\theta} e^{-\theta^2} d\theta + 1 \right] + c''. \quad (50)$$

По условию наших наблюдений (§ 3) при $x=0$, т. е. при $\theta=0$, имеем $\rho = \rho_0$, следовательно, $c'' = \rho_0$; при $x = \infty$, т. е. при $\theta = \infty$, имеем $\rho = \sigma$, т. е.

$$\sigma = \frac{1}{\varphi} \ln \left[\frac{c' \sqrt{\pi}}{2} + 1 \right] + \rho_0,$$

откуда

$$c' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (e^{\varphi(\sigma - \rho_0)} - 1), \quad (51)$$

а затем находим окончательно:

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{\varphi} \ln \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1 - e^{\varphi(\sigma - \rho_0)}) \int_0^{\theta} e^{-\theta^2} d\theta \right]. \quad (V)$$

Этот интеграл значительно отличается от обычного интеграла (11), но составлен из тех же элементов. Полагая в (V) $\varphi = 0$ и отыскивая известным приёмом действительную величину его второго члена, мы найдём, что найденный нами интеграл переходит в прежний (11); последний есть, следовательно, частный случай выражения (V).

6. Теория метода диффузионного сифона на основании полного уравнения диффузии. По выражениям (2) и (3) алгебраическая сумма диффузионных токов через единицу площади во время dt будет:

$$(Q + q) dt = -\mu \left(\frac{dN}{dx} M + \frac{dn}{dx} m \right) dt,$$

или по уравнению (1):

$$(Q + q) dt = -\nu \frac{d\rho}{dx} dt. \quad (52)$$

Это выражение, отнесённое к площадке $x = 0$, замыкающей основание диффузионного цилиндра, представит собой увеличение веса колонны раствора в цилиндре в течение времени dt или же (§ 3) вес колонны жидкости, упавшей за это время в капилляре, т. е. $-\varepsilon dh$, где dh есть отрицательная величина. Итак,

$$\varepsilon dh = \mu \left(\frac{d\rho}{dx} \right)_{x=0} dt. \quad (53)$$

Но по (43) и (49)

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{\mu t}} \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{1}{2\varphi\sqrt{\mu t}} \cdot \frac{c'e^{-\theta^2}}{c' \int_0^{\theta} e^{-\theta'^2} d\theta + 1}. \quad (54)$$

При $x = 0$ и $\theta = 0$, а потому по (51)

$$\left(\frac{d\rho}{dx} \right)_{x=0} = \frac{c'}{2\varphi\sqrt{\mu t}} = \frac{e^{\varphi(\tau-\tau_0)} - 1}{\varphi\sqrt{\mu\pi t}}.$$

Внося в (53)

$$-\sigma dh = \frac{1 - e^{\varphi(\sigma - \rho_0)}}{\varphi \sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\mu}{t}} dt$$

и интегрируя от 0 до t , находим:

$$h_0 - h = \frac{2(1 - e^{\varphi(\sigma - \rho_0)})}{\varphi \sigma \sqrt{\pi}} \sqrt{\mu t}. \quad (55)$$

Полагая

$$R_2 = \frac{2(1 - e^{\varphi(\sigma - \rho_0)})}{\varphi \sigma \sqrt{\pi}}, \quad (56)$$

имеем:

$$h_0 - h = R_2 \sqrt{\mu t}, \quad (57)$$

т. е. такая же зависимость между падением уровня в капилляре и временем, как и в случае прежней теории [см. уравнение (16)]. Различие заключается в строении постоянных R_1 и R_2 . При $\varphi = 0$ постоянное R_2 переходит в R_1 :

$$R_{2\varphi=0} = \frac{2}{\sigma \sqrt{\pi}} \left(\frac{1 - e^{\varphi(\sigma - \rho_0)}}{\varphi} \right)_{\varphi=0} = \frac{2(\rho_0 - \sigma)}{\sigma \sqrt{\pi}} = R_1.$$

7. Общая теория метода диффузионного сифона.

В вышеизложенных соображениях я допускал, что ρ есть функция от

$$\theta = \frac{x}{2 \sqrt{\mu t}}.$$

Это допущение заключает в себе два: первое, что $\theta = x\varphi(t)$, и второе, что $\varphi(t) = \frac{1}{2 \sqrt{\mu t}}$.

Первое предполагает справедливость определённого закона изменения со временем положения слоя определённой плотности в диффузионном цилиндре. Представим себе опыт произведённым таким образом: длинный, внизу запаянный диффузионный цилиндр, наполненный диффундирующей жидкостью, помещён вертикально своим отверстием кверху в сосуд больших размеров,

наполненный растворителем. Ось этого цилиндра означаем через x и отсчитываем от верхнего отверстия вниз. Диффузия происходит как бы из бесконечно длинного цилиндра в беспредельное пространство, наполненное растворителем. Для данного момента времени x представляет глубину слоя определенной плотности ρ . Если мы будем следить за перемещением этого слоя в зависимости от времени, то, полагая

$$\rho = f[x\varphi(t)] = \text{const.},$$

находим, что

$$x\varphi(t) = \text{const.} = c. \quad (58)$$

Представим себе четыре слоя различных плотностей $\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ на глубинах x, x_1, x_2, x_3 . Мы имеем по (58):

$$\left. \begin{aligned} x_2 - x &= (c_2 - c)\varphi(t), \\ x_3 - x_1 &= (c_3 - c_1)\varphi(t). \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Отсюда, означая через H длину колонны раствора, ограниченной двумя слоями не изменяющихся со временем плотностей, находим:

$$\frac{H_1}{H} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x} = \frac{c_3 - c_1}{c_2 - c} = \text{const.}, \quad (60)$$

т. е. при неизменной температуре для всякого момента времени длины колонн раствора, ограниченных слоями одинаковой плотности, находятся в постоянном между собой отношении.

Этот закон был оправдан мною с помощью стеклянных шариков различной плотности для раствора поваренной соли в процессе диффузии, длившемся 4 месяца (см. мою статью о диффузии водного раствора поваренной соли). Я могу привести его оправдание и для диффузии серной кислоты в воду. Диффузионный цилиндр, длиной около полуметра и шириной 4 см, наполненный серной кислотой, помещался в большом сосуде с водой. Опыт начат 5 ноября прошлого года и продолжается до сих пор. Цилиндры содержат в себе 10 стеклянных

шариков небольшого диаметра, воспроизводивших довольно равномерно плотности растворов серной кислоты от наиболее слабых до наиболее крепких. Самый лёгкий шарик имел плотность, превышавшую единицу несколькими сотыми; самый тяжёлый имел плотность, отличающуюся несколькими сотыми от наибольшей плотности серной кислоты. На диффузионном цилиндре были нанесены деления, из коих каждое было меньше миллиметра. Называя самый лёгкий шарик № 1, а самый тяжёлый № 10, я приведу расстояния μ_1 шариков № 8 и № 5 и μ шариков № 9 и № 6 для различных времён. Глубины шариков в указанных выше делениях были:

	№ 5	№ 6	№ 8	№ 9
28 ноября 1890 г.	46,2	68,5	101,5	121,0
7 мая 1891 г.	120,5	182,0	276,0	332,8

Означая через T температуру, приводим таблицу:

Число	28 ноября	17 декабря	31 декабря	19 января	14 февраля	14 марта	28 марта	16 апреля	7 мая
T	14,3°	13°	14°	14,1°	14,8°	15,9°	14,4°	16,6°	20,3°
H_1	55,3	74,0	84,7	97,6	114,5	130,4	136,5	146,1	155,5
H	52,5	70,1	80,0	92,1	107,0	121,7	128,2	136,2	150,8
$\frac{H_1}{H}$	1,053	1,055	1,058	1,059	1,070	1,071	1,065	1,073	1,031

Таким образом, зависимость ρ от аргумента $x\varphi(t)$ оправдывается диффузией растворов, столь различных по своим свойствам, как растворы поваренной соли и серной кислоты.

Вид $\varphi(t)$ обнаруживается методом диффузионного сифона. В самом деле,

$$\left(\frac{d\rho}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_0 \varphi(t).$$

Подставляя в (53), получаем:

$$\sigma dh = \mu \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_0 \varphi(t) dt,$$

и интегрируя от 0 до t :

$$h_0 - h = -\frac{\mu}{\sigma} \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_0 \int_0^t \varphi(t) dt. \quad (\text{VI})$$

Принимая теперь

$$\varphi(t) = \frac{2}{2\sqrt{\mu t}},$$

мы находим помимо всяких гипотез о процессе диффузии:

$$\left. \begin{aligned} h_0 - h &= R \sqrt{\mu t}, \\ R &= -\frac{1}{\sigma} \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII})$$

8. Другие гипотезы о функции Δ . Может явиться предположение о возможности допущения скрытой гипотезы Фика — равенства объёмов входящего в раствор при диффузии вещества и выходящего растворителя; иными словами, что процесс сам по себе не изменяет объёма раствора. В этом случае алгебраическая сумма приводящих объёмов вещества и растворителя равна нулю, т. е. по уравнению (24)

$$\frac{\xi}{d} + \frac{\eta}{\sigma} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2 D}{dx^2} = 0. \quad (61)$$

Интегрируя это уравнение, мы находим:

$$D = x f(t) + \psi(t).$$

Для всякого времени при $x = 0$ должно быть $D = D_0$, следовательно,

$$\psi(t) = D_0$$

и

$$D = D_0 + xf(t).$$

Далее, функция D должна оставаться конечной для всякого времени, а потому и при $x = \infty$; это возможно, если $f(t) = 0$. Итак,

$$D = D_0. \quad (62)$$

Но вследствие (61) мы имеем из (27)

$$\omega D_1 - D = 0.$$

По (62) D постоянно, а потому $D_1 = D$, и из предыдущего мы находим, что $\omega = 1$, а так как $\omega = 1 - \Delta$, то отсюда получается $\Delta = 0$; иными словами, наше предположение приводит нас к недостаточному уравнению Фика.

Рассмотрим теперь другую гипотезу. Допустим, что $\frac{\Delta}{d\rho}$ есть производная ρ от некоторой параболической функции

$$a + b\rho + c\rho^2,$$

где a , b , c суть постоянные; тогда

$$\Delta = (b + 2c\rho) d\rho, \quad (VIII)$$

причём коэффициент при $d\rho$ мал. В этом случае уравнение (I) примет вид:

$$\frac{d\rho}{dt} - (b + 2c\rho) \frac{d\rho}{dt} = \mu \frac{d^2\rho}{dx^2}. \quad (63)$$

Внося в малый, по условию, второй член этого выражения вместо ρ интеграл (11) уравнения Фика (что ведёт к малой ошибке):

$$\rho = \rho_0 - (\rho_0 - \sigma) U,$$

получим:

$$\frac{d\rho}{dt} + \{b + 2c [\rho_0 - (\rho_0 - \sigma) U]\} (\rho_0 - \sigma) \frac{dU}{dt} = \mu \frac{d^2\rho}{dx^2}. \quad (64)$$

По соотношениям (42) и (43) это выражение преобразуется в следующее:

$$2\theta \frac{d\rho}{d\theta} + 2\theta \{b + 2c [\rho_0 - (\rho_0 - \sigma) U]\} (\rho_0 - \sigma) \frac{dU}{d\theta} + \frac{d\rho^2}{d\theta^2} = 0. \quad (65)$$

Положим теперь

$$\rho = A + BU, \quad (66)$$

где A и B суть функции θ . Внося эту величину в уравнение (65) и замечая, что по свойству функции U

$$2\theta \frac{dU}{d\theta} + \frac{d^2U}{d\theta^2} = 0,$$

найдём:

$$2\theta \left(\frac{dA}{d\theta} + U \frac{dB}{d\theta} \right) + 2\theta \{b + 2c [\rho_0 - (\rho_0 - \sigma) U]\} (\rho_0 - \sigma) \frac{dU}{d\theta} + \\ + \frac{d^2A}{d\theta^2} + 2 \frac{dB}{d\theta} \frac{dU}{d\theta} + U \frac{d^2B}{d\theta^2} = 0. \quad (67)$$

Приравняем нулю первую скобку:

$$\frac{dA}{d\theta} + U \frac{dB}{d\theta} = 0, \quad (68)$$

отсюда, дифференцируя,

$$\frac{d^2A}{d\theta^2} + U \frac{d^2B}{d\theta^2} + \frac{dU}{d\theta} \frac{dB}{d\theta} = 0.$$

Вычитая это выражение из (67), получим, сокращая на $\frac{dU}{d\theta}$:

$$\frac{dB}{d\theta} = -2\theta (\rho_0 - \sigma) (b + 2c\rho_0) + 4c (\rho_0 - \sigma)^2 \theta U. \quad (69)$$

Интегрируя это выражение, замечая, что

$$\int_0^{\theta} \theta U d\theta = \frac{U\theta^2}{2} + \frac{\theta e^{-\theta^2}}{2\sqrt{\pi}} - \frac{U}{4}, \quad (70)$$

находим, означая через α постоянное:

$$B = \alpha - (\rho_0 - \sigma)(b + 2c\rho_0)\theta^2 + c(\rho_0 - \sigma)^2(2\theta^2 - 1)U + \\ + 2c(\rho_0 - \sigma)^2 \frac{\theta e^{-\theta^2}}{\sqrt{\pi}}. \quad (71)$$

Внося затем (69) в (68), получим:

$$\frac{dA}{d\theta} = 2\theta(\rho_0 - \sigma)(b + 2c\rho_0)U - 4c(\rho_0 - \sigma)^2\theta U^2. \quad (72)$$

Так как

$$\int_0^\theta \theta U^2 d\theta = \frac{U^2}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{U\theta e^{-\theta^2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{2\pi} (1 - e^{-2\theta^2}), \quad (73)$$

то, интегрируя (72) и вводя новое постоянное β ,

$$A = \beta + (\rho_0 - \sigma)(b + 2c\rho_0) \left(\theta^2 - \frac{1}{2} \right) U + \\ + (\rho_0 - \sigma)(b + 2c\rho_0) \frac{\theta e^{-\theta^2}}{\sqrt{\pi}} - c(\rho_0 - \sigma)^2(2\theta^2 - 1)U^2 - \\ - 4c(\rho_0 - \sigma)^2 \frac{\theta e^{-\theta^2}}{\sqrt{\pi}} U + \frac{2c(\rho_0 - \sigma)^2}{\pi} (1 - e^{-2\theta^2}). \quad (74)$$

Подставляя теперь A и B в выражение (66), получаем:

$$\rho = \beta + \alpha U + (\rho_0 - \sigma)(b + 2c\rho_0) \left(\frac{\theta e^{-\theta^2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{U}{2} \right) - \\ - 2c(\rho_0 - \sigma)^2 \frac{\theta e^{-\theta^2}}{\sqrt{\pi}} U + \frac{2c(\rho_0 - \sigma)^2}{\pi} (1 - e^{-2\theta^2}). \quad (75)$$

Для определения постоянных α и β мы имеем условия: при $x=0$ должно быть $\rho = \rho_0$; при $x = \infty$ $\rho = \sigma$; отсюда:

$$\beta = \rho_0, \quad \alpha = (\rho_0 - \sigma) \left[\frac{b}{2} + c\rho_0 - 1 - \frac{2c(\rho_0 - \sigma)}{\pi} \right]. \quad (76)$$

Чтобы установить формулу (VII) для данного случая, находим, дифференцируя (66) и обращая внимание на (68):

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} B e^{-\theta^2}; \quad (77)$$

при $\theta = 0$

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)_0 = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}},$$

следовательно, по (VII)

$$\left. \begin{aligned} h_0 - h &= R_3 \sqrt{\mu t}, \\ R_3 &= -\frac{2\alpha}{c \sqrt{\pi}}, \end{aligned} \right\} \quad (VIII)$$

где α имеет значение (76).

9. Наблюдения. Трудно определить с точностью как начало диффузии, так и начальное положение уровня в капиллярном колене сифона. Поэтому для проверки теории опытом я видоизменяю основную формулу (VII), в которой время t отсчитывается от начала диффузии. Вставим вместо t величину $t + \frac{c}{\mu}$, где t отсчитывается уже от произвольного момента $t = 0$, которому пусть соответствует высота h_0 ; началу же диффузии соответствует неизвестная высота уровня H_0 . Мы имеем:

$$H_0 - h = R \sqrt{\mu t + c},$$

и точно так же

$$H_0 - h_0 = R \sqrt{c}.$$

Отсюда получаем:

$$h_0 - h = R \sqrt{\mu t + c} - R \sqrt{c}. \quad (78)$$

Положим здесь

$$h_0 - h = \delta$$

и напишем наше уравнение в виде:

$$\delta + R \sqrt{c} = R \sqrt{\mu t + c}.$$

Возвышая в квадрат и деля на t , находим:

$$\left(\frac{\delta}{t}\right) \delta + 2R \sqrt{c} \left(\frac{\delta}{t}\right) = R^2 \mu. \quad (79)$$

Положив здесь

$$R^2 \mu = z, \quad 2R \sqrt{c} = y, \quad (80)$$

получим:

$$\left(\frac{\delta}{t}\right) \delta + y \left(\frac{\delta}{t}\right) = z. \quad (81)$$

Из двух подобных уравнений, написанных для двух пар соответственных значений t и δ , мы определяем z и y и затем

$$\mu = \frac{z}{R^2}, \quad c = \frac{y}{4R^2}. \quad (82)$$

Рассматривая z и y как эмпирически получаемые постоянные, мы можем непосредственно проверить закон:

$$\delta = -\frac{y}{2} + \sqrt{zt + \frac{y^2}{4}}. \quad (83)$$

Сравнивая величину y с выражением $H_0 - h_0$, мы имеем:

$$y = 2(H_0 - h_0). \quad (84)$$

За единицу времени я принимаю сутки. Наблюдения производились сериями, и для сокращения места я приведу здесь под разными буквами времена, по истечении которых в разных сериях производились наблюдения, и соответственные температуры T ; та же буква, поставленная при наблюдениях, покажет, к какой серии они относились.

Серия А $t=0$ 2 апр. 4 ч. 45 м. попол. $T_0=17,4^\circ$		Серия В $t=0$ 7 марта 1 ч. 45 м. попол. $T_0=17^\circ$		Серия С $t=0$ 8 апр. 9 ч. 25 м. попол. $T_0=16,3^\circ$		Серия D $t=0$ 22 апр. 9 ч. 25 м. попол. $T_0=20^\circ$		Серия E $t=0$ 23 апр. 9 ч. 35 м. попол. $T_0=18,8^\circ$	
t	T	t	T	t	T	t	T	t	T
0,86	15,9°	0,92	17,8°	1,17	16,9°	1	18,8°	1	19,3°
1,86	15,3°	2	18,0°	2,01	16,5°	2	19,3°	2	19,6°
2,86	15,3°	3,82	17,7°	3,15	16,2°	3	19,6°	3,01	19,5°
4,86	16,9°	4,84	18°	4,15	16,4°	4,01	19,5°	4,02	19,6°
5,9	16,7°	5,84	17,5°	5,15	16,6°	5,02	19,6°	4,98	19,5°
6,88	16,9°	6,92	17,8°	6,15	16,6°	5,98	19,5°	6,03	19,7°
7,86	16,5°	7,96	18,4°	7,15	16,4°	7,03	19,7°	7,03	20°
8,86	16,2°	8,95	17,6°	8,15	16,9°	8,03	20°	8,03	19,3°
9,86	16,4°	9,93	17,6°	9,15	17°	9,03	19,3°	9,16	20°
10,86	16,6°			10,11	16,8°	10,16	20°	15,16	20,6°
11,86	16,6°					16,16	20,6°		
12,86	16,4°								
15,82	16,8°								

Кроме наблюдений, соответствующих этим сериям, обнимающим собою до 16 суток, помещены ниже ещё специальные, длившиеся около 23 суток. Для доказательства отсутствия влияния на процесс диффузии ширины диффузионных цилиндров наблюдались явления диффузии растворов одинаковой концентрации при различном диаметре сосудов.

В приводимых ниже таблицах помещены, в миллиметрах, для времён, указанных в сериях, как наблюденные величины δ , так и вычисленные по формуле (83). Кроме того, T' означает время, протекшее от начала до момента $t=0$; D означает внутренний диаметр диффузионного цилиндра в миллиметрах.

К первой группе относятся те явления диффузии, при которых диффузионный цилиндр был вначале наполнен водой ($\sigma=1$); ρ_0 означает плотность диффундирующей жидкости относительно воды при 15° на сечении $x=0$.

Растворы H_2SO_4 1) $\rho_0=1,175$, $T'=0,02$; $z=7,4458$; $y=3,0395$; $D=1,34$; серия А.

δ	{	набл.	1,3	2,5	3,3	5,0	5,3	5,8	6,3	6,8	7,3	7,7	
		выч.	1,43	—	3,34	4,38	5,26	5,79	6,28	6,74	7,18	7,6	
		набл.	8,0	8,3	9,5								
		выч.	—	8,38	9,45								

2) $\rho_0=1,2$; $T'=1$; $z=9,4661$; $y=5,4884$ $D=1,4$, серия D.

{	набл.	1,4	2,4	3,3	4,0	4,8	5,3	5,8	6,5	6,9	7,6	9,8
	выч.	1,38	—	3,25	4,0	4,68	5,26	5,86	6,4	—	7,44	9,63

3) $\rho_0=1,27$; $T'=0,12$, $z=19,7533$ $y=4,5480$ $D=1,4$; серия А.

δ	{	набл.	2,5	4,0	5,6	8,0	9,0	9,8	10,5	11,0	12,0	
		выч.	2,43	4,2	5,58	7,78	8,76	9,59	10,39	11,15	11,87	
		набл.	12,5	13,0	14,0	15,5						
		выч.	12,55	13,2	13,82	15,57						

4) $\rho_0=1,306$, $T'=0,03$, $z=26,8024$ $y=4,1064$ $D=1,37$; серия А.

δ	{	набл.	3,3	5,3	7,0	9,8	10,9	11,8	12,8	13,3	14,3	
		выч.	3,17	—	6,94	9,55	10,65	11,66	12,61	13,49	14,35	
		набл.	15,3	15,9	16,5	18,5						
		выч.	15,15	—	16,62	18,67						

4') $\rho_0=1,306$; $T'=1$; $z=29,5633$; $y=12,9065$; $D=2,4$; серия С.

δ	{	набл.	2,4	3,6	5,1	6,4	7,5	8,5	9,5	10,3	11,0	12,0
		выч.	2,28	—	5,16	6,37	7,48	8,5	9,51	10,36	11,21	—

5) $\rho_0=1,413$, $z=47,32$; $y=4,0$, $D=1,3$; серия В.

δ	{	набл.	4,9	7,9	11,4	13,0	14,8	16,2	17,4	18,4	19,6
		выч.	4,81	—	11,6	13,26	14,74	16,2	—	18,67	19,77

6) $\rho_0=1,837$, $T=1$; $z=113,5473$, $y=20,0761$; $D=2,8$, серия С.

δ	{	набл.	5,3	8,1	11,1	14,0	16,1	18,1	20,2	22,0	
		выч.	5,24	—	11,37	13,96	16,14	18,22	20,25	21,99	
		набл.	23,6	25,3							
		выч.	23,72	—							

6') $\rho_0=1,839$, $T'=0.0\dots$, $z=105,04$, $y=2,5$, $D=1,3$; $t=0$ 25 января

10 ч. 40 м. попол.

t	0,96	2,04	3	4	5	6	7	8	10
T	15,4°	15,1°	15,6°	15,2°	16,5°	16,4°	16,1°	15,6°	15,1°

δ	{	набл.	8,8	13,3	16,2	18,9	21,7	23,8	25,8	27,8	30,9
		выч.	8,85	13,45	16,54	19,28	21,63	23,87	25,88	27,75	31,15

t	11	12	15	17	18	19	20	21	22
T	16°	15,9°	15,05°	14,8°	15,5°	15,1°	15,65°	15°	15,2°

δ	{	набл.	32,65	34,0	38,4	40,9	42,3	43,6	44,8	45,8	46,8
		выч.	32,85	34,25	38,45	40,95	42,25	43,44	44,6	45,65	46,88

Растворы HNO₃

1) $\rho_0=1,2$; $T'=1$; $z_\alpha=13,8544$; $y_\alpha=5,188$; $D=1,27$; серия D;

$z_\beta=15,2629$, $y_\beta=6,747$

}	δ	набл.	2,0	3,1	4,3	5,4	6,0	6,5	7,5	8,2	8,7
		выч. α	1,94	3,27	—	5,3	5,95	6,87	7,61	—	8,89
		выч. β	1,79	—	4,19	5,15	6,01	6,76	7,52	—	8,84
		набл.	9,6	12,6							
		выч. α	9,53	12,61							
		выч. β	9,53	12,69							

2) $\rho_0=1,266$; $T'=0,02$; $z=23,5721$; $y=2,9722$; $D=1,4$; серия A.

}	δ	набл.	3,3	5,3	6,8	9,5	10,6	11,6	12,3	13,2	13,8
		выч.	3,25	—	6,85	9,31	10,41	11,31	12,21	13,04	13,83
		набл.	14,8	15,3	16,3	17,8					
		выч.	14,58	—	15,98	17,9					

3) $\rho_0=1,4022$; $T'=1$; $z=50,4188$; $y=11,9908$; $D=1,38$; серия E.

}	δ	набл.	3,1	5,7	7,7	9,4	10,7	12,5	13,7	15,0	16,5	22,7
		выч.	3,29	—	7,7	9,44	10,91	12,43	13,76	—	16,31	22,3

Растворы HCl

1) $\rho_0=1,1741$; $T'=0,1$; $z=17,0919$; $y=3,9478$; $D=1,4$; серия A.

}	δ	набл.	2,5	4,0	5,4	7,7	8,5	9,2	10,0	10,5	11,0
		выч.	2,34	—	5,29	7,35	8,26	9,09	9,78	10,49	11,16
		набл.	12,0	12,4	13,0						
		выч.	11,8	—	12,98						

2) $\rho_0=1,1853$; $T'=0,0...$; $z=17,64$; $y=1,62$; $D=1,3$; $t=0$ 25 января

2 ч. 30 м. попол.

t	0,79	1,88	2,79	3,79	4,87	5,87	6,8	7,84	9,86
T	15'4"	15,1°	15,6°	15,2°	16,5°	16,4°	16,1°	15,6°	15,1°

}	δ	набл.	4,4	6,4	7,5	8,7	10,0	11,0	11,6	12,5	13,9
		выч.	4,6	6,6	7,87	8,97	10,1	10,98	11,71	12,6	14,01

t	10,86	11,89	14,79	16,79	17,79	18,81	19,88	20,86	21,79
T	15,0°	15,9°	15,05°	14,8°	15,5°	15,1°	15,6°	15,0°	15,12°

}	δ	набл.	14,5	15,3	17,0	18,0	18,5	19,0	19,5	19,8	20,4
		выч.	14,67	—	16,98	18,01	18,51	19,01	19,51	20,01	—

Растворы HBr

1) $\rho_0=1,2$; $T'=1$; $z=21,9218$; $y=9,4952$; $D=1,34$; серия D.

}	δ	набл.	1,8	3,4	4,6	5,6	6,6	7,6	8,6	9,6	10,1	10,6	14,6
		выч.	1,91	—	4,64	5,75	6,76	7,68	8,54	9,34	—	10,31	14,66

2) $\rho_0=1,306$; $T'=0,6$; $z=49,6717$; $y=4,5565$; $D=1,38$; серия A

}	δ	набл.	4,6	7,6	10,10	13,6	15,1	16,6	17,6	19,0	20,1
		выч.	4,63	—	9,85	13,42	14,99	16,3	17,47	18,83	19,96
		набл.	21,1	22,1	23,1	25,8					
		выч.	21,05	—	23,09	25,87					

Вторая группа наблюдений обнимает собой те случаи, когда сосуд, из которого происходит диффузия, и диффузионный сифон до начала диффузии наполнены растворами одного и того же вещества различной концентрации. Плотность раствора в сосуде, из которого происходит диффузия, попрежнему обозначена буквой ρ_0 , плотность же жидкости в сифоне — через σ .

Растворы H_2SO_4

1а) $\rho_0=1,4$; $\sigma=1,2$; $T'=1$; падения уровня недостаточно определены.

2а) $\rho_0=1,6$; $\sigma=1,4$; $T'=1$; $z=4,9570$; $y=5,1093$; $D=1,44$, серия D.

δ { набл. 0,7 1,5 2,0 2,5 3,1 3,5 4,0 4,5 4,6 5,1 6,5
выч. 0,68 — 2,07 2,58 3,05 3,46 3,88 4,25 — 4,99 6,7

3а) $\rho_0=1,8$, $\sigma=1,6$, падения уровня слабы; наблюдения не определены.

Растворы HNO_3

1а) $\rho_0=1,4$, $\sigma=1,2$, $T'=1$; $D=1,3$; $z=9,2013$, $y=7,2013$; серия D.

δ { набл. 1,2 2,0 3,0 3,6 4,0 4,9 5,4 6,0 6,2 6,8 9,0
выч. 1,11 — 2,77 3,46 4,10 4,65 5,21 5,72 — 6,71 9,11

Растворы HBr

1а) $\rho_0=1,4$, $\delta=1,2$; $T'=1$ $z=24,0119$; $y=11,1124$, $D=5,37$, серия E.

δ { набл. 1,8 3,6 4,6 5,6 6,6 7,6 8,4 9,4 10,1 14,1
выч. 1,85 3,32 — 5,73 6,71 7,69 8,57 — 10,27 14,31

10. Результаты наблюдений. Приведённые наблюдения, как видно из предыдущего, удовлетворительно оправдывают закон (83), а вместе с тем (VII), из которого он вытекает. Таким образом, принимая во внимание соображения, приведённые в § 7, можно считать доказанным, что в опытах с весьма длинными диффузионными цилиндрами плотность ρ есть функция аргумента

$$\theta = \frac{x}{2\sqrt{\mu t}}.$$

Нам остаётся теперь сравнить с найденными числами различные развитые выше гипотезы. Обратная пропорциональность между падениями уровня и плотностью жидкости в капилляре, имеющая место во всех гипотезах, оправдывается наблюдениями и объясняет, между прочим, слабое падение уровня для H_2SO_4 в случае 3а).

Исходя из гипотезы Фика, мы нашли (15):

$$R_1 = \frac{2(\rho_0 - \sigma)}{\sigma \sqrt{\pi}}$$

С другой стороны, по (80), полагая $R = R_1$,

$$R_1^2 \mu = z.$$

Отсюда вытекает, что для растворов одного и того же вещества

$$\frac{z\sigma^2}{(\rho_0 - \delta)^2} = \frac{4\mu}{\pi} \quad (85)$$

должно быть постоянной величиной. Проверим это заключение на наших наблюдениях.

№ раствора	Растворы H_2SO_4								
	1	2	3	4	4'	5	6	6'	2а
$\frac{4\mu}{\pi}$	248	236	270	285	314	278	162	150	253
ρ_0	1,175	1,2	1,27	1,306	1,306	1,413	1,837	1,839	1,6
σ	1	1	1	1	1	1	1	1	1,4

№ раствора	Растворы HNO_3					HCl		HBr		
	1β	1α	2	3	1а	1	2	1	2	1а
$\frac{4\mu}{\pi}$	380	346	323	315	331	569	520	548	529	844
ρ_0	1,2	1,266	1,4	1,4		1,174	1,185	1,2	1,306	1,4
σ	1	1	1	1,2		1	1	1	1	1,2

Рассматривая предыдущие таблицы, мы видим, что для слабых растворов кислот (принимая во внимание недостаточную чувствительность метода, о способах

устранения которой говорилось выше) $\frac{4\mu}{\pi}$ почти постоянно, а следовательно, к ним применяется гипотеза Фика. Но недостаточность этой гипотезы обнаруживается из значительной разницы в величинах постоянной для слабых и крепких растворов серной кислоты — разницы $248 - 162 = 86$, которая не может быть объяснена недостатками метода. Величины z , сравнивая ход $\frac{4\mu}{\pi}$ для разных кислот, возрастают слишком быстро для H_2SO_4 с увеличением концентрации её растворов; возможно, что причина этого обстоятельства лежит в недостатках наблюдений.

Мы переходим теперь к первой нашей гипотезе, по которой [уравнение (56)]

$$R_2 = \frac{2(1 - e^{\varphi(\sigma - \rho_0)})}{\varphi\sigma\sqrt{\pi}} \quad (86)$$

для $\varphi = \text{const.}$ Развёртывая это выражение в строку, получаем:

$$R_2 = \frac{2(\rho_0 - \sigma)}{\sigma\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\varphi\sigma\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{\varphi^2(\rho_0 - \sigma)^2}{2!} - \frac{\varphi^3(\rho_0 - \sigma)^3}{3!} + \dots \right\}. \quad (87)$$

Величина R , по гипотезе Фика, как видно отсюда, представляет первый член разложения R_2 ; последняя функция есть, следовательно, более общая.

Если мы будем представлять для растворов серной кислоты функцию $p\rho$ от ρ рядом парабол и по ним отыскивать функцию φ , то найдём следующие приближенные величины:

$$\begin{aligned} \text{от } \rho = 1 \quad \text{до } \rho = 1,3 \quad \varphi \text{ около } 0,87; \\ \text{от } \rho = 1,3 \quad \text{до } \rho = 1,7 \quad \varphi \text{ около } 0,62; \\ \text{от } \rho = 1,7 \quad \text{до } \rho = 1,8 \quad \varphi \text{ доходит до } 3,03. \end{aligned}$$

Мы видим уже, что проверка первой гипотезы невозможна ранее точного определения функции ($p\rho$). Мы рассмотрим только предположение $\varphi = \text{const.}$ на всём протяжении раствора, принимая для φ величину, рав-

ную 0,7, лежащую внутри действительных значений φ , как видно из приведённых выше чисел. Для этого значения φ мы отыщем

$$\frac{4\mu}{\pi} = \frac{z\varphi^2\sigma^2}{(1 - e^{\varphi(\sigma - \rho_0)})^2}. \quad (88)$$

Растворы H₂SO₄

№ раствора	1	2	3	5	6	2а
$\frac{4\mu}{\pi}$	275	272	299	365	275	279

Здесь $\frac{4\mu}{\pi}$ почти одинаково для слабых и крепких растворов. Значения его повышаются для средних концентраций; причина может быть тою же, как и в случае гипотезы Фика, т. е. в несколько высокой оценке величин z .

Сделаем одно замечание: так как в растворах, между некоторыми пределами концентрации, функция φ изменяется медленно, то естественно является мысль о том, что зависимость между процентным содержанием p вещества и плотностью раствора ρ близка к той, которая давала бы для φ постоянную величину. Поэтому, интегрируя выражение (II):

$$\varphi = \frac{\frac{d^2(p\rho)}{d\rho^2}}{\frac{d(p\rho)}{d\rho} - p},$$

считая φ постоянным и замечая, что при $\rho = 1$ вообще $p = 0$, найдём:

$$p = \frac{2e^{-\varphi}}{\varphi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} \right] - \frac{2e^{-\varphi\rho}}{\varphi} \left[\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} \right]. \quad (89)$$

Следовательно, нужно ожидать зависимость типа:

$$p = -bc(1 + a + m) + bc\rho(\rho^2 + a\rho + m), \quad (90)$$

где a, b, c, m суть постоянные.

11. Определение коэффициентов диффузии. Для слабых растворов разность $\rho_0 - \sigma$ мала, а потому [выражение (87)] для них коэффициенты R_1 и R_2 очень близки

друг к другу. Мы можем поэтому определить μ из значений $\frac{4\mu}{\pi}$, вычисленных по гипотезе Фика для слабых растворов наших кислот.

Из выражения (16)

$$h_0 - h = \frac{2(\rho_0 - \sigma)}{\sigma \sqrt{\pi}} \sqrt{\mu t} .$$

мы видим, что

$$(1 \text{ мм})^2 = 1 \mu \cdot 1 t .$$

Следовательно, у нас

$$1 \mu = \text{мм}^2/\text{сутки} .$$

Умножая найденные числа μ на $\frac{0,01}{86400}$, найдём величину коэффициентов диффузии в $\text{см}^2/\text{сек}$. Таким образом, получается:

NaCl	H_2SO_4	HNO_3	HCl	HBr
$\mu = 117 \cdot 10^{-7}$	$225 \cdot 10^{-7}$	$326 \cdot 10^{-7}$	$490 \cdot 10^{-7}$	$497 \cdot 10^{-7}$

В этом ряду μ как будто приближается к некоторому пределу: $5 \cdot 10^{-5}$.

Кастель,
2 августа 1891 г.



ХРОМАТИЧЕСКАЯ ДЕПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРИ РАССЕИВАНИИ СВЕТА ¹⁾

Совершенно чёрное тело определяется как такое тело, которое при бесконечно малой толщине полностью поглощает все лучи, которые на него падают. Если это определение исчерпывает всё, что может быть сказано в идеальном случае о чёрном теле, то природные чёрные тела обладают ещё одним свойством, имеющим немаловажное значение и которое может рассматриваться как одна из обычных равноправных характеристик. Частью уже известные и другие нижеприведённые опыты показывают, что чёрное тело может быть исчерпывающе описано как такое, которое вносит *порядок* в колебания падающих на него лучей. Как следствие этого получается, что рассеянный чёрным телом естественный свет поляризуется, а поляризованный пучок лучей не деполяризуется. Переходя от идеального случая к реальным телам, мы должны качество черноты воспринимать в более общем смысле. Это качество мы должны всегда увязывать с определённым родом лучей. Тело может вести себя как чёрное в отношении определённых лучей и как нечёрное по отношению к другим лучам.

Когда цветное тело обладает избирательным поглощением в отношении определённых световых лучей,

¹⁾ Впервые напечатано в Phys. Zeits. 6, 1905 г. (Прим. ред.)

то оно становится чёрным по отношению к ним, и в рассеиваемом от его матовой поверхности поляризованном пучке белого света не деполяризуются только те лучи, для которых это тело является чёрным.

Противоположностью чёрных тел являются белые тела. Так как бесконечно тонкая поверхность этих тел не полностью поглощает падающий на них свет, мы должны допустить проникновение света в белые тела и рассеивание света из их глубины. Подобные явления сопровождаются деполяризацией падающего поляризованного света.

Белое тело, следовательно, изменяет природу падающего света, внося в него *беспорядок*. Из тех же соображений, что и в отношении чёрных тел, мы должны говорить о белых телах, как белых по отношению к *определённым* лучам; мы должны увязывать качество белизны с *определёнными* лучами. Одно и то же цветное тело может проявлять себя как белое по отношению к отдельным лучам и как чёрное по отношению к другим. Такое поведение может быть обнаружено или при помощи изучения спектров поглощения, или, с тем же успехом, в особенности для непрозрачных тел, при помощи определения поляризационного состояния пучка поляризованного света после его рассеивания матовой поверхностью тела. Наблюдения, которые описываются ниже, приводят к тому выводу, что цветные тела деполяризуют те лучи, которые по большей части образуют их цвет, причём такие лучи меньше всего подвергаются поглощению и проникают в тела на большую глубину.

Строгое разделение тел на белые и чёрные по отношению к определённым лучам может быть произведено только в исключительных случаях, а в большинстве случаев мы встречаемся только с серыми, в выше-приведённом смысле, телами.

Резкое различие в рассеивании поляризованного света от матовых чёрных или белых поверхностей тел вытекает уже из давнишних опытов Провосте и Дезена

(Provostaye et Desain). Они пишут¹⁾: «Если заставлять падать нормально на пластинку, покрытую слоем свинцовых белил или промытой серы, полностью поляризованный в каком-нибудь азимуте пучок лучей, то в рассеянных лучах находят только очень малую долю поляризованного света среди лучей, рассеиваемых под углами 30 и 70 градусов, и, как следствие, можно допустить, что с этими веществами и их аналогами деполяризация во всех случаях является полной, или почти полной. С обыкновенной сажей, с чёрным, лишённым полировки стеклом, платинированной платиной получают совершенно другие результаты».

Эти же самые учёные делали также наблюдения, которые указывают на избирательную деполяризацию при рассеивании падающего поляризованного света и которые, согласно моим опытам, всегда соответствуют минимуму поглощения:

«Если заставлять падать на рассеивающую чёрную пластинку, покрытую обычной сажей, на чёрное стекло, платинированную платину или на рассеивающую белую пластинку, как, например, из свинцовых белил, два соседних луча, равных и поляризованных в основных азимутах, их изображения покажутся одного и того же цвета, под каким бы углом их ни рассматривали».

«Совершенно иначе обстоит дело, если рассеивающая пластинка окрашена. В этом случае пятно, образуемое лучом, поляризованным перпендикулярно к плоскости отражения, более богато цветами, чем другое. Последнее, напротив, более ярко, но белесого цвета».

«Отсюда можно заключить, что лучи различных оттенков не рассеиваются в тех же самых пропорциях и сообразно тем же самым законам, но этот пункт мы ещё не изучили как следует...».

Различие в рассеивании поляризованного света чёрными и белыми телами может быть показано при помощи нескольких способов, приводящих к цветовым

¹⁾ Mémoire sur la diffusion de la chaleur. Ann. de Chimie et de Phys. (3), 34, 220 fig., 1852.

явлениям в поляризованном свете. Для этой цели достаточно взять вместо анализатора белое или чёрное сукно, бумагу и т. д. На белой поверхности мы не получаем никаких цветов, в то время как на чёрной они показываются. Чёрное тело действует как анализатор. Если мы, например, поставим на пути линейно-поляризованного пучка света бикварц и спроектируем его изображение на чёрное тело, то можно видеть цвета его обеих половинок.

В моих опытах, которые я здесь кратко хочу описать, я пользовался сделанными из различных материалов прессованными, литыми или окрашенными пластинками, белой или окрашенной фильтровальной бумагой, картоном, порошком и т. д. Схема опытов была следующей: накалённая нить лампы Нернста проектировалась на матовую плоскую поверхность исследуемого тела. На пути пучка света стояли поляризующий николь и призма прямого зрения, которая разлагала в спектр проецируемое на тело изображение. Тело было укреплено на рамке в центре алидады и круга с делениями. Благодаря этому было возможным изменять угол падения лучей. Рассеянный телом свет проходил через стопу из двенадцати стеклянных пластинок, которая могла быть наклонена под различными углами к лучам света, и далее падал на полярископ Савара, линии которого могли наблюдаться при помощи небольшой подзорной трубы с николем в окуляре. Стопа пластинок служила для определения, обычным образом, доли поляризованного света во всём рассеянном свете. Наблюдения были сделаны по большей части при перпендикулярном положении плоской поверхности исследуемого тела по отношению к падающим лучам. Виден спектр, который пересечён тёмными линиями Савара параллельно своей длине. Эти линии на красном конце спектра находятся друг от друга на больших расстояниях, а по направлению к фиолетовому концу всё более и более теснятся. Я наблюдал полное исчезновение линий или только следы последних в тех частях спектра, для которых тело обладало наибольшей про-

зрачностью. Линии прерываются в одном месте спектра, и линии, расположенные на обеих сторонах, не находятся на продолжении друг друга, что повышает точность наблюдения. В большинстве случаев полосы исчезают в различных областях спектра при различных наклонах стопы пластинок. Полосы от лучей, которые наибольшим образом поглощаются телом, не могли быть доведены до полного исчезновения. Из таких наблюдений можно сделать выводы относительно деполаризующего влияния тела на лучи различных цветов, или, короче, о его хроматическом деполаризующем влиянии. Можно в рамку алидады вставить рядом друг с другом также два тела, одно цветное и одно чёрное или белое, и таким образом сравнить их светорассеяние. Я очень часто наблюдал, что когда граница цветного и чёрного тела находилась в области спектра, для которой, по здесь высказанному взгляду, цветное тело было также чёрным, она полностью исчезала, и нельзя было уже более отличать обе поверхности друг от друга. Поляризованные лучи, которые были профильтрованы через тело, при их рассеивании от поверхности подобного же тела не показывают никакой поляризации. Отсюда следует, что если мы будем рассматривать в поляризованном свете матовое тело через николю и установим последний на минимум световой интенсивности, видимый свет будет образован из тех лучей, которые менее всего поглощаются телом.

Эти явления очень красивы у некоторых цветных тел. Я использовал только тела определённого химического состава, которые я получал из химической лаборатории профессора Н. Зелинского благодаря его любезности. Я даю качественные описания сделанных наблюдений.

Цветное вещество пунцовая *RR* (порошок). Исследованию были подвергнуты пластинки, спрессованные при помощи гидравлического пресса, фильтровальная бумага, окрашенная водным раствором, белый бристоольский картон, пластинки, отлитые из гипса. Линии Савара исчезают только в среднем

красном цвете. Явления очень резки. В оранжевом, желтом, зелёном—слабая поляризация, все прочие лучи сильно поляризованы. Водный раствор пропускает те же самые краски, более всего средний красный цвет.

К и с л о т н а я з е л ё н а я (Säuregrün) GG. Водный раствор пропускает узкую полоску в красном и широкую полосу в зелёном и голубом. Профильтрованные через раствор лучи, рассеянные окрашенной тем же раствором фильтровальной бумагой или гипсовой пластинкой, показывают только следы поляризации, рассеянные чёрной бумагой—сильную поляризацию. В полном спектре деполяризованными оказываются те же самые лучи, все прочие остаются поляризованными. При интенсивном окрашивании рассеивающего тела все лучи поляризуются с минимумом в тёмносинем. Пластинка, спрессованная из этой краски, показывает поляризацию во всех лучах, наименьшую—в зелёном.

Фильтровальная бумага и гипсовые пластинки, окрашенные настоящей жёлтой, оранжевой 2B, оранжевой IV, деполяризуют пропущенные через их водные растворы лучи: красные, оранжевые, жёлтые, начало зелёных. Последняя из вышеназванных красок деполяризует более широкую зелёную полосу.

А н и л и н о в ы е к р а с к и (получены от Кальбаума). Фильтровальная бумага и гипсовые пластинки, окрашенные метилвиолетом. Водный раствор пропускает средние красные и сине-фиолетовые лучи. В рассеянном свете деполяризуются только эти лучи.

М а л а х и т о в а я з е л ё н а я. Водный раствор пропускает все красно-голубые лучи. Фильтровальная бумага, окрашенная малахитовой зелёной, прозрачна только для зелёных лучей. Сообразно с этим мы находим деполяризацию только в спектрально зелёной. Окрашенная гипсовая пластинка даёт слабую поляризацию в одной части красного и голубого, более сильную поляризацию в конце красного, оранжевого, жёлтого, начале зелёного. Полосы Савара проходят только через среднюю часть спектра. Прессованная

пластинка поляризует все лучи, менее всего — начало зелёных.

Ф у к с и н. Окрашенная фильтровальная бумага деполаризует красные лучи, для которых она прозрачна. Сравнение явлений на цветной бумаге и на рядом лежащей чёрной бумаге приводит к заключению, что различие в степени поляризации рассеянного бумагами света протекает параллельно разнице в интенсивности этого света.

В зелёной части спектра поляризация и интенсивность рассеянного обеими бумагами света оказались до такой степени одинаковыми, что было невозможно различить границу обеих прилегающих друг к другу поверхностей.

Крахмал более всего походит на абсолютно белое тело: он деполаризует все лучи. Далее следуют мел, гипс, фильтровальная бумага и другие тела, которые обычно обозначаются как белые, которые показывают только следы поляризации. Как чёрные проявляют себя сажа, чёрное сукно Макса Коля для затемнения аудитории; они дают очень сильную поляризацию и могут служить анализаторами поляризованного света. Далее идут другие тела, обозначаемые как чёрные.

Гипсовая пластинка, окрашенная иодом, показывает в красном следы поляризации. Гипсовая пластинка, только что окрашенная цианином, деполаризует крайнюю красную часть спектра, через час она поляризует все лучи. Хромовая жёлтая деполаризует все лучи, от красного до синего включительно. Охра: в красном — следы поляризации, жёлтая часть спектра деполаризуется, начало зелёной слабо поляризуется, прочие — сильнее. Киноварь: красная и оранжевая части деполаризуются, прочие резко поляризуются. Сурик деполаризует красную, оранжевую, жёлтую части спектра, прочие резко поляризует. Жжёная сиенна, умбра естественная и жжёная, кассельская земля — поляризуют все лучи, красные слабее: это серые тела. Цинковая зелень деполаризует все, кроме голубого и фиолетового, где наблюдается слабая деполаризация.

Ультрамарин даёт сильную деполаризацию в красном, она всё более ослабляется до голубого, где исчезает. В железном синеродистом калии поляризуются красные, оранжевые, жёлтые лучи; прочие лучи, начиная от зелёного, деполаризуются. Металлы дают поляризованный свет. Я не хочу далее продолжать список исследованных тел. Высказанные выше правила дают возможность наперёд знать тот вид лучей, которые в результате рассеивания будут деполаризованы или слабо поляризованы.

Строение тела имеет также влияние на рассеивание поляризованного света. Деревянное донышко коробочки из-под спичек деполаризует свет, когда плоскость поляризации составляет прямой угол с волокнами древесины; рассеянный свет остаётся поляризованным, когда плоскость поляризации и волокна направлены параллельно друг другу.

Поведение естественных чёрных тел в отношении рассеивания поляризованного света показывает разницу между естественными чёрными и искусственными чёрными излучателями. Я думаю, что теория излучения в реально существующем закрытом пустом пространстве, стенки которого, согласно вышесказанному, придадут лучам частично порядок, а частично беспорядок, должна будет учесть некоторые новые обстоятельства.

Москва
Физический институт университета
сентябрь 1905.



СПЕКТРАЛЬНО-ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПОГЛОЩЕНИЯ СВЕТА И ПРИРОДЫ КРАСОК¹⁾

СУЩНОСТЬ МЕТОДА

1. Обычный спектроскопический метод исследования поглощения света и его применение для определения природы красок основаны на наблюдении спектров поглощения растворов в проходящем естественном свете. При этом определяются положение, ширина и интенсивность полос поглощения, которые затем изображаются кривыми. В этом случае сталкиваются с трудностями в определении размазанных границ полос и положения минимумов интенсивности. Правда, неточности в определении этих факторов поглощения значительно снижаются при наблюдении тонких слоёв сильно разбавленных растворов, т. е. при уменьшении ширины полос поглощения, но всё же они остаются. Кроме того, такой способ приводит к исчезновению слабых полос поглощения и минимумов интенсивности и, таким образом, не даёт возможности наблюдать полную картину поглощения света в исследуемом теле.

Такие трудности особенно часто возникают при исследовании поглощения света в твёрдых телах, так как большинство из них прозрачно только в очень тонких слоях. Возникает также вопрос о том, возможно ли

¹⁾ Впервые напечатано в *Phys. Zeits.*, 1913 г. (*Прим. ред.*)

вообще получить полную картину поглощения в проходящем свете.

Явление поглощения света зависит от двух процессов, которые хотя и связаны между собой, но являются следствием различных причин. Первый процесс, который можно назвать затуханием (*extinction*), зависит от интенсивности и длины пути светового луча в теле. Второй процесс, который является собственно поглощением, связан с природой молекул исследуемого тела. Однако не исключена возможность, что последний процесс разыгрывается в полной мере в растворах такой концентрации или толщины, в которых он частично или совершенно перекрывается первым, т. е., быть может, в слоях, которые являются уже непрозрачными для света.

Поэтому целесообразно, учитывая требования науки и техники, найти пути уточнения существующих методов и даже разработать новый, который не был бы основан на наблюдениях в проходящем свете. В качестве такого метода можно назвать спектрально-фотометрические наблюдения, разработанные недавно А. Porai-Koschitz и J. Anschkap (*Revue générale des matières colorantes*, т. XVI, Janvier, 1912). Однако, этот метод лишён той наглядности, которая присуща способам с проходящим светом и которая, собственно, и обусловила развитие и применение именно таких способов.

В следующих строках я рассмотрю несколько методов, которые в отношении требования наглядности несколько не уступают прежним.

2. В основном эти методы упираются на зависимость между поляризацией рассеянного телом света и поглощением его этим же предметом. На основании качественных исследований («Хроматическая деполяризация при рассеивании света», этот журнал, т. 6, стр. 674, 1905 г.) я показал, что наибольшая поляризация при рассеивании света относится к тем областям спектра, которые испытывают сильнейшее поглощение. Этот вывод был позднее количественно проверен Д. Хмыро-

вым и Н. Златовратским (этот журнал, т. 7, стр. 533, 1906 г.) и недавно подробно обсуждён и ещё раз подтверждён Navrat, Sitzungsber. d. k. A. d. Wissensch. zu Wien, Math.-Nat. Kl., (Отчеты о заседаниях Королевской Академии наук в Вене, Abt. II a, Bd. CXX, H. VII, S. 1229). Причина этого явления кроется в частичной деполяризации лучей, рассеянных поверхностью тела, теми лучами, которые проникают внутрь тела и затем отражаются оттуда назад. Наиболее сильно поляризованы будут те участки спектра естественного света, для которых отражение изнутри тела будет наиболее слабым, т. е. в областях сильного поглощения. Совершенно очевидно, что это явление даёт возможность судить о степени поглощения света и, следовательно, о свойствах того или иного тела.

Указанная особенность даёт нам право рассматривать каждое тело как хроматический поляризатор и приводит к необходимости изготовить такие хроматические поляризаторы. Хроматическим поляризатором и называют тело, способное поляризовать падающий естественный свет в определённых областях спектра. Далее будет описано применение таких поляризаторов. Можно изготовить поляризаторы различного типа, в зависимости от положения и ширины спектральной области и в соответствии со степенью поляризации. Для этой цели необходимо получить более или менее сильный отражённый пучок света, прошедший через тело. Для этого достаточно нанести тонкий слой красящего вещества на более или менее хорошо отражающую основу. Таковыми можно считать белую бумагу, белый картон, фарфор и металлы. Если наносимый слой остаётся жидким, то эту жидкость необходимо налить в чашечку с более или менее отражающим дном.

3. Наглядность метода, построенного на приведённых выше рассуждениях, а также возможность получить понятную с первого взгляда картину поляризации и поглощения обеспечивается применением саваровского полярископа, который был мною использован ещё в первой работе. Наблюдая в полярископ Савара

спектр частично поляризованного света, можно видеть, что он пересекается по всей длине тёмными полосами, сгущающимися в сторону фиолетовой области спектра. Интенсивность этих тёмных полос зависит от степени поляризации света. Кроме того, в спектре света, рассеянного телом, можно заметить ещё другие более или менее тёмные полосы поглощения, которые ложатся поперёк спектра. Наложение этих двух перпендикулярных друг другу ослаблений света либо даёт в точках их пересечения утолщения саваровских полос, либо приводит к появлению на их месте круглых или эллиптических пятен, либо прерывистых чёрточек, которые я назвал чёточными полосами («О методе исследования небесных тел планетной системы», *Phys. Zeits.*, т. 10, стр. 259, 1909 г.). В зависимости от степени поляризации и, следовательно, величины поглощения саваровские полосы будут ослабевать, прерываться и исчезать вовсе; концы оставшихся полос приобретут самые причудливые формы; они могут быть размыты, обрезаны, закруглены, заострены, игольчатообразны, могут иметь вид булавочных головок. Рис. 23¹⁾ показывает различные виды чёточных полос (*a*) и разнообразие форм концов саваровских полос (*b*, *c*). Таким способом мы быстро и наглядно можем устанавливать особенности данного поглощения и положения минимумов и максимумов.

Эти явления можно воспроизвести искусственным путём. На цветную бумагу наносят тушью полосы поглощения различной интенсивности таким образом, чтобы основная краска больше или меньше просвечивалась или же не просвечивалась вообще. Сперва наносят тонкие и толстые, слабые и сильные полоски. Затем рисуют более широкие полосы: максимум темноты у одного края, другой размыт; максимум темноты в середине, оба края размыты; максимумы разной интенсивности на краях, в середине минимум; максимумам темноты на краях предшествует постепенное увеличение

¹⁾ Табл. I (стр. 434).

темноты, внутри полос эти максимумы спадают скачком или постепенно. Наблюдая такие искусственные картины через полярископ Савара при помощи рассеянного света, мы замечаем их сходство с теми, которые приведены в рис. 23. Саваровские полосы располагаются перпендикулярно к нарисованным, образуя уплотнение темноты в точках пересечения полос. При этом становятся очевидными преимущества предложенного метода для отыскания слабых полос поглощения.

Руководствуясь описанным выше принципом, можно получить надёжный способ для правильного изображения процессов поглощения. На картон, окрашенный в цвет наблюдаемого участка спектра, наносится тушью полоса с таким расположением уплотнений темноты, чтобы при наблюдении в полярископ получалась саваровская полоса такого вида, которая замечалась в действительности. В настоящее время фирма R. Fueß (Штеглиц, район Берлина) изготовляет прибор, который облегчает наблюдение таких искусственных спектров.

4. Если применить этот поляризационный метод к проходящему частично поляризованному свету, то он позволит исследовать явление поглощения света в растворах такой незначительной концентрации, с которыми в настоящее время не экспериментируют. Кроме того этот метод приводит к большей точности в определении положения максимума поглощения. Необходимо заметить, что успех опыта во многом зависит от того, будут ли саваровские полосы сравнимы по интенсивности с полосами поглощения. Первые из них должны быть достаточно слабыми, что с большим трудом достигается существующими способами получения частично поляризованного света. Поэтому имеет смысл пользоваться специально изготовленными указанным выше способом хроматическими поляризаторами. В нашем случае—это кусочки бумаги и картона, пластинки металла или фарфора, покрытые более или менее разбавленной чёрной или серой краской.

Наблюдая через полярископ Савара картину, получаемую при освещении естественным светом хроматического поляризатора, мы можем судить о природе его светопоглощающей составной части. Из подобных заранее исследованных поляризаторов можно составить набор, который будет служить для определения природы различных красящих веществ. Для этого достаточно осветить естественным светом, прошедшим через раствор, свойства которого необходимо определить, взятый из набора поляризатор и наблюдать полученную картину. Если растворённое вещество совпадает с тем, для которого изготовлен поляризатор, то мы получим усиление изображённой картины, присущей данному хроматическому поляризатору. В случае наличия отклонений мы можем судить о различии веществ или о влиянии растворителя. Для наблюдений такого рода пригодны слабо окрашенные предметы, дающие едва заметные чёточные полосы. Например, рис. 127¹⁾ показывает расположение одной саваровской полосы в спектре света, рассеянного от слабо окрашенной в малахитовую зелень белой бумаги. Здесь можно видеть элементы двух чёточных полос. Картина получается чрезвычайно слабой и может ускользнуть от наблюдения, поэтому необходимо ослабить яркость близлежащих областей спектра. Это достигается наблюдением спектральной картины через более или менее тёмное серое стекло.

Разобранный метод может быть использован для исследования поверхности несамосветящихся небесных тел, так как их можно рассматривать как совокупность хроматических поляризаторов. Однако до сих пор он не применялся для этих целей.

ПРИБОР

5. Для наблюдения описанных явлений и в целях использования возможно меньших рабочих поверхностей требуется специальный прибор. По моему указанию такой прибор был сконструирован под руковод-

¹⁾ Табл. II (стр. 442).

ством С. Leiß фирмой R. Fueß. На этом приборе производились опыты, которые будут описаны в следующих разделах.

В ходе опытов выявился ряд других требований к такому прибору, которые были учтены в новом вари-

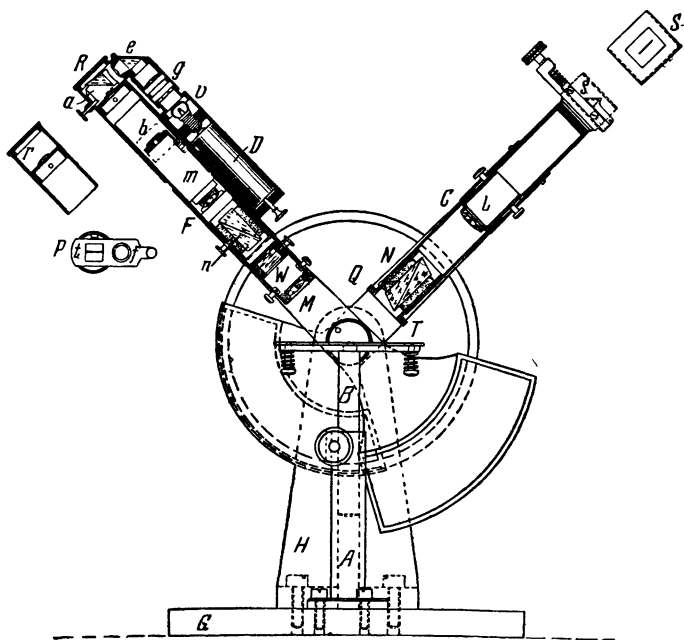


Рис. 1.

анте, который описывается в настоящей статье. Я приношу искреннюю благодарность С. Leiß, который любезно согласился руководить постройкой более совершенной модели прибора.

На массивном держателе *H* (см. чертёж), снабжённом установочными винтами, укрепляется в вертикальном положении металлический диск *Q*, на который нанесены деления в градусах. На диске располагаются

две подвижные и сбалансированные алидады, на которых монтируются коллиматор C и зрительная труба F . На плите G держателя укрепляется трубка A , в которой помещается подвижный стержень B . На верхнем конце стержня укрепляется предметный столик T , который можно устанавливать на любой высоте с помощью зубчатого привода, прикреплённого к стержню.

На верхнем конце коллиматора C имеется щель S , около которой прикрепляется небольшая стеклянная призма для использования, в случае необходимости, света от боковых источников. В нижний конец коллиматора вставляется подвижный николь; однако это приспособление применяется только в виде исключения, о котором будет сказано ниже. В большинстве опытов используется только естественный свет. Примерно в середине коллиматора находится линза L , которая может перемещаться в известных пределах вдоль длины трубы. Её устанавливают так, чтобы изображение освещённой щели попадало на продолжение горизонтальной оси четверти круга. Эта установка, а также установка щели перпендикулярно плоскости четверти круга выполняются с помощью небольшого прозрачного экрана, который прилагается к прибору.

Если установить предметный столик так, чтобы его верхняя горизонтальная плоскость проходила через центр четверти круга, то на нём появится тонкая светлая линия, перпендикулярная плоскости четверти круга и продолжение которой пересекает эту плоскость в указанном центре.

Исследуемый предмет помещается на предметный столик; при этом его опускают настолько, чтобы на небольшой выбранной для исследования части поверхности получилась такая же световая линия. Для наблюдений служит зрительная труба F . Она состоит в своей нижней части из линзы M , фокальная плоскость которой перпендикулярна плоскости диска Q и проходит через его центр. Это значит, что в неё также попадает световая линия. Из линзы M световые лучи вы-

ходят в зрительную трубу параллельными пучками и пересекают саваровскую пластинку W , которая для правильной установки снабжена винтом и способна немного поворачиваться вокруг оси трубы. Далее лучи проходят через николю n , для точной регулировки которого имеется также винт. Затем следует линза m , в фокальной плоскости которой (b) собираются лучи. В этой плоскости помещена передвижная пластинка P обладающая щелью t и отверстием f . В зависимости от потребности можно вводить в плоскость изображения либо щель, либо отверстие.

Изображение световой линии в плоскости b разлагается в спектр с помощью небольшого сетчатого диффракционного спектроскопа или призматического спектроскопа. На чертеже изображён сетчатый спектроскоп, образованный призмой a , у которой на плоскость её гипотенузы нанесена небольшая сетка. Таким путём получается бóльшая дисперсия в красной части спектра, чем в случае простого призматического спектроскопа. Сбоку от зрительной трубы устроено приспособление для отчёта длин волн. Оно состоит из призмы полного внутреннего отражения e и матовой шкалы длин волн g , освещаемой небольшой лампочкой v , которая питается от аккумуляторной батареи D .

Щель t вводится в плоскость изображения b , чтобы предотвратить нарушение соответствия между шкалой длин волн и спектром, которое может возникнуть во время опытов при изменении положения трубы.

Для правильной установки зрительной трубы и коллиматора с линзой необходимо опустить предметный столик T и затем установить обе трубы так, чтобы их оптические оси совпали. Приспособление для получения спектра вынимается из зрительной трубы и заменяется окуляром r .

После того как прибор отрегулирован, спектроскоп возвращают на своё место; щель коллиматора освещают натриевым пламенем и устанавливают правильное положение шкалы длин волн. Контроль за этой

установкой во время опытов можно осуществлять с помощью призмы, расположенной около щели коллиматора. Саваровская пластинка и николю должны быть отрегулированы таким образом, чтобы изображения полос получились резкими и располагались параллельно длине спектра. К каждой трубе можно прикрепить держатели для сосудов с растворами. В целях дальнейших научных исследований прибор может быть снабжён компенсаторами или стеклянными столбиками.

Предметный столик имеет приспособление, позволяющее прижимать мягкие или гибкие предметы к его поверхности, с тем чтобы устранить вредные неровности, шероховатости предметов. Кроме того, к предметному столику можно приспособить небольшой вертикальный стержень, обладающий подвижной горизонтальной стрелкой с чёрным экраном. Этот экран помещают в вертикальную плоскость светового изображения и опускают до положения, при котором никакие боковые или вторичные отражения от предмета не попадают в зрительную трубу.

Достаточно яркое изображение щели можно получить уже с помощью нернстовской нити, питаемой силой тока в 1 ампер, помещая её перед щелью коллиматора. Исследованиям могут быть подвержены разнообразные предметы из различных областей природы, если только возможно получить из них плоскую полоску длиной 1,5—2 см и шириной 2 мм. Такими могут быть: камни, голова или перо птицы, листья, цветные насекомые и т. д. Этот метод позволяет решать многие технические и естественнонаучные проблемы, в частности, даёт возможность определять скорости химических реакций и производить фотохимические наблюдения.

Наблюдения производились в большинстве опытов при одном и том же угле, большем или меньшем угла отражения, т. е. не в отражённом, а в рассеянном свете. При этом уменьшалось влияние зеркальных свойств поверхности предмета, хотя оно всё же частично сказывалось на результатах исследований. Если работать

при угле отражения, то поступающий в зрительную трубу от предмета свет будет сильно поляризован из-за отражения на поверхности предмета, причем эта поляризация скроет от наблюдателя те особенности, которые зависят от светопоглощающих свойств данного предмета. Исключение составляют прозрачные предметы, которые помещаются на сильно отражающие основания. Ось коллиматора устанавливалась под разными углами к вертикали. Эти углы колебались в пределах от 30 до 45°.

Кроме описанного прибора, фирма R. Fueß изготовляет ещё два прибора: один из них будет служить для демонстрационных, другой—для научно-технических целей.

ОПЫТЫ

6. Теперь я перейду к описанию спектров красящих веществ, которые были подвергнуты исследованию по вышеуказанному способу. Наиболее характерные из этих спектров помещены в прилагаемых таблицах в виде рисунков; числа 40, 50 и так далее обозначают соответствующие длины волн в 0,40 μ , 0,50 μ и т. д. Спектры изображены в масштабе некоторой сетки, но не в масштабе призматической шкалы. При этом имелось в виду сэкономить в таблицах место, так как вместо установленной в рисунках длины в 5 мм для красной области спектра (0,65 μ —0,60 μ) мы получили бы в случае призматической шкалы величину вдвое бóльшую. Чтобы представить себе действительную картину, получающуюся с помощью призматического спектроскопа, необходимо сужать области спектра, соответствующие волнам 0,75—0,70 μ , и расширять области, представляющие волны от 0,60 μ до 0,40 μ . В спектре я наблюдал шесть саваровских полос, число их возрастало при приближении к фиолетовому концу спектра. Для наблюдения достаточно трёх полос, но ни в коем случае не одна, с тем чтобы заметить слабые поперечные спектру полосы поглощения и слабые чёточные полосы. Обычно

я рисовал три параллельные полосы, но на некоторых рисунках показана и использовалась только одна из них.

Все опыты можно разделить на три группы:

А. Красящие вещества в виде жидких растворов или прозрачных листиков рассматриваются в проходящем поляризованном свете.

Б. Красящие вещества в виде прозрачных жидких или твёрдых слоёв нанесены на зеркальную или матовую металлическую или белую основу и освещаются естественным светом. Предметы кладутся на столик; коллиматорная и зрительная трубы образуют с горизонтальной плоскостью некоторые углы.

В. Тела, пропитанные растворами красок; естественные цветные тела органического и неорганического происхождения освещаются естественным светом.

ГРУППА А

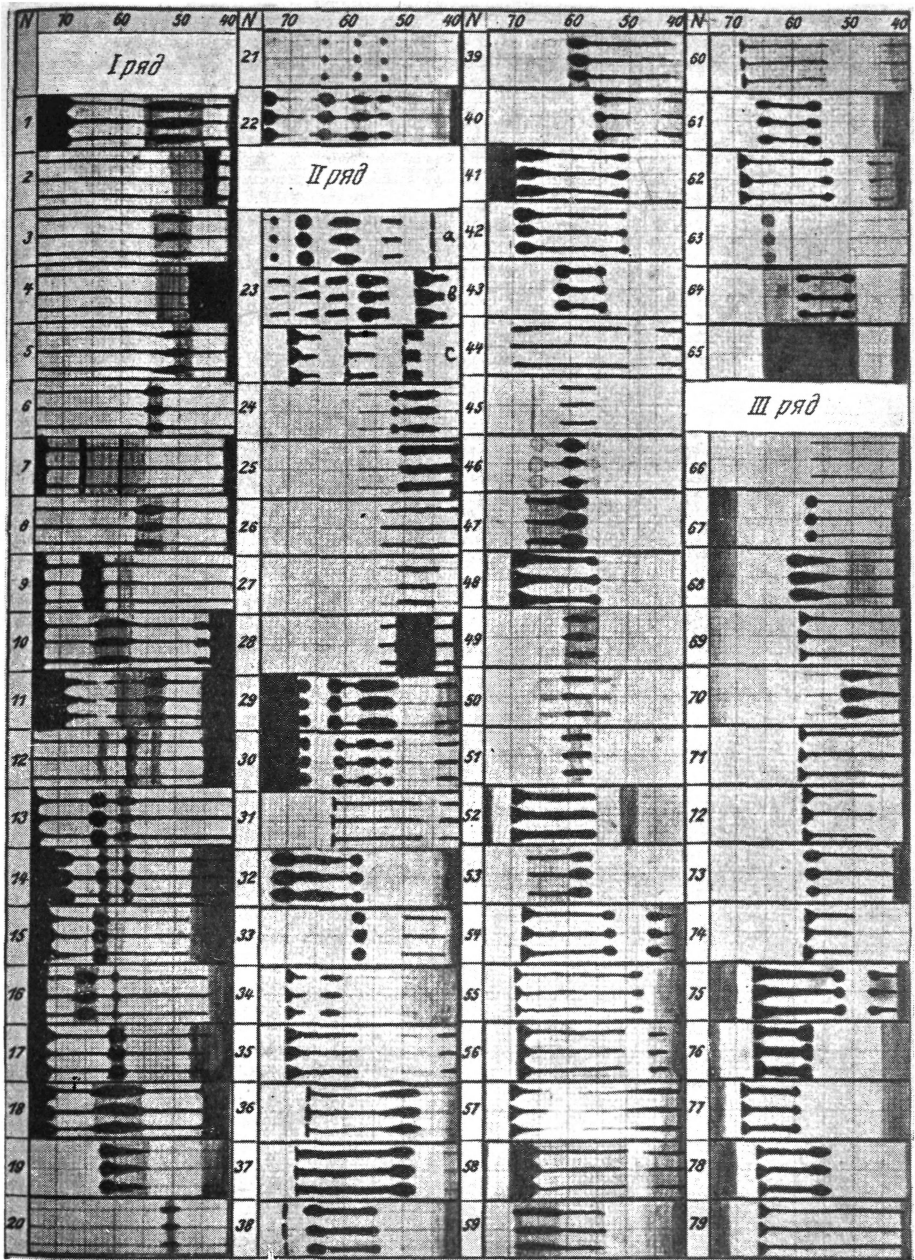
Р я д I

7. Я начну с описания спектров различных прозрачных веществ в проходящем поляризованном свете, чтобы связать наши последующие опыты с теми, которые проводятся обычным спектроскопическим методом. Эти опыты представлены на рисунках 1—22. Во всех случаях использовались либо наполненная раствором кювета с параллельными стеклянными стенками, либо прозрачные пластинки тела, которые помещались на пути световых лучей. Кроме того, при этом применялись следующие три расположения:

а) В опытах 1—11 свет проходил через николю, укрепленный в нижнем конце коллиматора; оптические оси обеих труб располагались горизонтально и совпадали. Свет, таким образом, был полностью поляризован; предметный столик опущен.

б) В опытах 12—18 оптические оси коллиматора и зрительной трубы находились под некоторым углом друг к другу и были наклонены к горизонтальной плоскости. Лучи света, выходя из николя, распо-

ТАБЛИЦА I



женного в конце коллиматора, давали изображение щели на хроматическом поляризаторе, который помещался на столике. В качестве хроматических поляризаторов использовались матовые металлические пластинки или окрашенные в серый цвет куски белого картона. Для этого проще всего воспользоваться любыми сортами серой эмалевой краски, которую можно найти в любом химическом магазине. В этом случае мы получаем частично поляризованный свет, степень поляризации которого мы можем изменять.

в) В опытах 19—22 николю удалялся из коллиматора, в остальном сохранялось расположение (б). Изображение щели на хроматическом поляризаторе получалось при помощи естественного света, т. е. мы имели случай слабого частично поляризованного света. Рисунки показывают, что при таком расположении обнаруживаются некоторые тонкости спектра.

Впредь я буду пользоваться следующими сокращениями: Р. — раствор, разб. — разбавленный, у. разб. — умеренно разбавленный, с. разб. — сильно разбавленный.

Данные спектры принадлежат следующим веществам:

8. *Расположение а).* 1. Р. хромотроп — вода (у. разб.). 2. Р. хинизарин — этиловый спирт (у. разб.). 3. Р. понсо экстра — вода (разб.); такая же картина получается для: Р. мельдола голубая — вода, Р. эритрозин — вода, или этиловый спирт — HNO_3 , Р. родулин красный G (Bayer) — вода, Р. флоксин — вода или этиловый спирт. 4. Р. пурпурин — этиловый спирт; аналогичная картина получается для желатины Steeg & Reuter — прочная жёлтая — кампеш, нафтиламин желтый. 5. Р. бенгальская розовая — этиловый спирт — HNO_3 ; аналогичная картина получается в случае Р. новый голубой D (Bayer) — вода (разб.). 6. Р. диамантовый фуксин — вода (разб.); такая же картина получается для желатины Steeg & Reuter брильянтовая зелень, метиловый зеленый и эозин, попугаевый зеленый. 7. Р. диамин зеленый В — вода. 8. Р. мельдола голубая — этиловый спирт; Р. мельдола голубая в воде даёт картину 3; аналогичную картину даёт кроцеиновая желатина фирмы Steeg & Reuter.

9. Р. метиленовый голубой—вода. 10. Желатина индигокармин и пикриновая кислота фирмы Steeg & Reuter. 11. Гвинейский фиолетовый 4b—вода (разб.).

Изображение других растворов или тел составляются из элементов приведённых здесь спектров. Видимость саваровских полос на фоне спектра может служить мерилем темноты данных полос.

9. *Расположение б*). 12. Р. мельдола голубая—этиловый спирт (у. разб.) (сравните эту картину с той, которая получается для того же раствора при другом расположении); Р. мельдола голубая в воде даёт здесь тоже картину 3. 13. Р. новый метиленовый синий GG—вода (разб.); при (с. разб.) эллиптические утолщения переходят в круглые. 14. Р. нильский голубой—вода (разб.). 15. Р. брильянтовая зелень экстра—вода (разб.). 16. Р. метиленовый голубой—вода (разб.). 17. Р. метилфиолетовый—вода (разб.). 18. Р. малахитовая зелень—вода (у. разб.); при этом николь убирают и на предметный столик кладут толстую стеклянную пластинку, зачернённую с нижней стороны.

10. *Расположение в*). 19. Тот же раствор, что и в п. 18; в качестве хроматического поляризатора использовали тонкий слой этого раствора, заключив его в металлическую чашечку. 20. Р. флуоресцеин—этиловый спирт (разб.); хроматический поляризатор—фарфоровая плитка. 21. Р. мельдола голубая—этиловый спирт (разб.); хроматический поляризатор—матовая алюминиевая пластинка; если в качестве хроматического поляризатора использовать слабо окрашенный в малахитовую зелень белый картон, то чёткая полоса усиливается на участке $0,64 \mu$. 22. Тот же раствор более разбавлен; в качестве поляризатора служила фарфоровая плитка.

ГРУППА Б

11. Сюда относятся опыты, осуществлённые методами, которые особенно пригодны для исследования природы красок. Николь удаляется из коллиматора,

источником света служит естественный свет. Рисунки отображают влияние условий наблюдений на вид спектра. В качестве характеристики спектра берётся форма чётчных полос и вид концов саваровских полос; на рис. 23, как указывалось уже раньше, показаны различные виды этих полос.

Р я д II

12. Этот ряд содержит рисунки под номерами 24—65. Предметами исследования являлись растворы красящих веществ, которые вливались в металлическую чашечку с зеркальным дном. Чашечка помещалась на предметный столик прибора; при этом изображение щели получалось на дне чашечки с помощью естественного света. Побочные и вторичные отражения задерживались чёрным экраном, который был опущен почти что вплотную к краям чашечки. Наблюдавшаяся спектральная картина являлась наложением двух спектров: первый спектр получался от лучей света, рассеянных на поверхности жидкости, второй—от лучей, отражённых от дна чашечки и, следовательно, дважды прошедших сквозь раствор. Совершенно ясно, что величины углов падения и наблюдения существенно влияли на суммарное спектральное изображение. Чем меньшие углы образуют обе трубы с горизонтальной плоскостью, тем сильнее выступают полосы поглощения, и на их тёмном фоне совершенно исчезают саваровские полосы. Толщина жидкого слоя колебалась от 1 мм до небольших его долей. Для каждого случая с помощью взвешивания возможно установить среднее значение толщины слоя, если знать концентрацию раствора и если чашечка будет обладать незначительным весом. Условия опыта для данной жидкости указываются заданием среднего значения толщины слоя, угла наблюдения β , который образован осью зрительной трубы и вертикалью, и угла отражения i . Если значение толщины слоя весьма мало, что имеет место в случае металла и бумаги, покрытых красками, то достаточно

указать, совпадает ли угол наблюдения с углом отражения или нет.

В последующих описаниях отдельных спектров углы i и β отсутствуют в случаях, когда они мало отличаются друг от друга.

24. Р. хинизарин—этиловый спирт—КОН. В проходящем свете этот раствор давал только одну полосу поглощения, начиная от $0,58\mu$ и кончая фиолетовой областью; таким образом, новый метод позволяет установить структуру этой полосы. 25. Р. флуоресцеин—этиловый спирт. 26. Тот же раствор после добавления нескольких капель Р. КОН в этиловом спирте. 27. Тот же (с. разб.) раствор при $\beta = i$. 28. Раствор 27 налили в кювету и поместили перед раствором 26 (в чашечке); полученное таким путем изображение указывает на новый метод сравнения природы двух растворов. 29. Р. мельдола голубая—этиловый спирт помещен в фарфоровую чашу. 30. Тот же более разбавленный раствор в фарфоровой чаше. Заметно исчезновение одной полосы поглощения; сравните с рисунком 22, представляющим тот же раствор, но ещё более разбавленный. 31. Р. мельдола голубая—этиловый спирт в металлической чаше. 32. Р. метиленовой голубой—вода. 33. Тот же раствор после удаления большей его части, так что остался только очень тонкий слой. 34. Тот же раствор (разб.). 35. Р. метиленовой голубой—этиловый спирт; после превышения угла отражения в 6° получаются только полосы поглощения. 36. Р. метилфиолетовый—вода, толстый слой; $i = 45^\circ$, $\beta = 39^\circ$. 37. Тот же раствор при $i = 38^\circ$. 38. Смесь растворов 32 и 36. 39. Р. понсо экстра—вода; $i = 40^\circ$, $\beta = 44^\circ$. 40. Р. понсо экстра—этиловый спирт; значения i и β прежние. 41. Р. нильский голубой—вода, толстый слой; значения i и β прежние. 42. Тот же раствор; $\beta = 38^\circ$. 43. Тот же раствор, тонкий слой; угол β прежний. 44. Тот же раствор при $\beta = i = 40^\circ$. 45. Тот же раствор сильно разбавлен водой при $\beta = 38^\circ$. 46. Тот же раствор при $\beta = 46^\circ$. 47. Р. нильский голубой—этиловый спирт; $i = 40^\circ$, $\beta = 38^\circ$. 48. Тот же раствор при $\beta = 45^\circ 30'$. 49. Р.

новый метиленовый голубой—вода; толстый слой; $i = 40^\circ$, $\beta = 37^\circ$. 50. Тот же раствор при $\beta = 44^\circ$. 51. Тот же раствор, тонкий слой; $\beta = 44^\circ$. 52. Р. новый метиленовый голубой—этиловый спирт; $\beta = 44^\circ$. 53. Тот же раствор, $\beta = 38^\circ 15'$. 54. Р. брильянтовая зелень—вода, толстый слой; $i = 42^\circ$, $\beta = 39^\circ$. 55. Концентрированный Р. метилфиолетовый и брильянтовая зелень—этиловый спирт, тонкий слой; $\beta = 39^\circ$. 56. Р. метилфиолетовый и брильянтовая зелень—вода; $\beta = 38^\circ$. 57. Р. малахитовая зелень—вода, толстый слой; $\beta = 39^\circ$, $i = 42^\circ$. 58. Тот же раствор, тонкий слой; $\beta = 34^\circ 30'$. 59. Тот же раствор разбавлен водой, более тонкий слой; $\beta = 37^\circ$. 60. Тот же раствор вблизи угла отражения. 61. Тонкий слой Р. малахитовая зелень—вода с преобладанием брильянтовой зелени; $\beta = 38^\circ$. 62. В прежний раствор добавлена малахитовая зелень; $\beta = 38$. 63. Дно чаши едва смочено прежним раствором. 64. Р. метилфиолетовый—этиловый спирт, тонкий слой; $i = 42^\circ$, $\beta = 38^\circ 15'$. 65. Тот же раствор; $\beta = 32^\circ$; замечено, что при большем отклонении угла рассеивания от угла отражения явление поглощения полностью заглушает поляризацию.

Ряд III

13. Рисунки 66—94 соответствуют слоям застывших растворов красок в желатине или эластичном коллоидуме, нанесённым на посеребрённый медный лист, при освещении естественным светом. Предметы располагают на столике прибора; опыты производятся вблизи угла отражения. Ввиду того, что слой очень тонкий, изменение угла наблюдения не сказывается заметным образом на изображении. Поляризованные части спектра возрастают с глубиной тона краски. Использовались следующие красящие вещества при угле падения $i = 35^\circ$.

Красные красящие вещества. 66. Понсо экстра. 67. Понсо R. 68. Родамин; в этом и в ряде других спектров за резкой границей полосы поглощения в крайней красной области следует очень яркий красный

цвет. 69. Эритрозин. 70. Пурпурин. 71. Бенгальский розовый. 72. Тетраметилпродаминхлорид; $\beta = 36,5^\circ$. 73. Родулин красный G. 74. Диамантовый фуксин.

Зелёные красящие вещества. 75. Малахитовая зелень (Meister). 76. Изумрудная зелень. 77. Брильянтовая зелень экстра.

Синие красящие вещества. 78. Новый метиленовый синий DD. 79. Мельдола голубая. 80. Нильский голубой. 81. Новый голубой D. 82. Метиленовый голубой. 83. Патентованный голубой краситель Мейера (Meyer).

Фиолетовые красящие вещества. 84. Гвинейский фиолетовый 4B. 85. Кислотный фиолетовый N. 86. Метилфиолетовый 5B.

В дальнейших рисунках я буду приводить большей частью одну саваровскую полосу. Следующие четыре спектра приведены из-за их оригинальности; они получены при наблюдении металлизированной алюминием бумаги, которая была покрыта анилиновыми красками; названия этих красок я не мог выяснить у московской фирмы G., поставляющей эти бумаги. 87. Красный. 88. Лиловый. 89. Синий. 90. Зелёный. Затем я покрыл металлизированную алюминием бумагу той же фирмы растворами анилиновых красок в этиловом спирте, при этом были получены следующие спектры. 91. Брильянтовая зелень экстра. 92. Новый метиленовый синий. 93. Метилфиолетовый. Опыты производились при $\beta > i$

Более сложные составные спектры получаются для красок, которые под действием света претерпевают химические изменения. Указанный метод может быть применён для исследования фотохимических явлений. Рисунок 94 изображает спектр посеребрённого медного листа, который был покрыт раствором цианина в этиловом спирте и затем высох под влиянием тепла. Изображение было получено только с одного участка такой пластинки, так как покрытие было неоднородным; с других участков получены более простые картины.

Р я д IV

14. Этот ряд охватывает рисунки под номерами 95—126. В каждом спектре рисовалась только одна саваровская полоса. Предметами исследования являлись образцы цветных лаков, нанесённых на полоски из оловянной фольги. Толщина слоёв краски ещё меньше, чем в предыдущих опытах. При наблюдениях под углом отражения заметно характерное исчезновение полос поглощения. Из сравнения спектральных изображений можно сделать заключение о применимости методов для решения технически важного вопроса о составе и природе красителей.

Цветные лаки московского предприятия по производству красок братьев А. и Н. Мамонтовых ($i = 35^\circ$).

95. Красный лак с эозином и жёлтым метанилом (оранж.); угол наблюдения больше угла отражения; при равенстве обоих углов исчезает полоса поглощения. 96. Красный лак с жёлтым метанилом (красный); $i = \beta$. 97. Тот же лак при $\beta > i$; поглощение увеличивается. 98. Светлый лак с диамантовой зеленью и метилфиолетовым (светлозел.). 99. Красный лак с сафранином (тёмнокрасный). 100. Светлый лак с родамином; $i = \beta$; при $\beta > i$ появляется поглощение в поляризованной части (кармезин). 101. Светлый лак с небольшим количеством родамина (красн.). 102. Красный лак с метилфиолетовым (фиолетовый). 103. Светлый лак с Викторией голубой (тёмносиний). 104. Светлый лак с диамантовой зеленью и жёлтым анилином (голубой).

Спиртовые краски на оловянной фольге предприятия по производству красок Meister Lucius & Brüning (Höchst на Майне) $i = \beta = 40^\circ$; в скобках указаны фабричные номера. 105. Спирт. жёлтая RP (№ 2). 106. Спирт. жёлтая VG (№ 3). 107. Спирт. оранжевая RRP (№ 5). 108. Спирт. красная 2G (№ 6). 109. Спирт. красная G (№ 7). 110. Спирт. шарлах G (№ 8). 111. Спирт. красная B (№ 9). 112. Спирт. розовая RB (№ 10). 113. Спирт. розовая RB со спирт. фиолетовой 2B (III 11). 114. Спирт. фиолетовая 2B (№ 12). 115. Спирт. голу-

бая VBD со спирт. фиолетовой 2B (№ 13). 116. Спирт. голубая DR (№ 14). 117. Спирт. голубая BL (№ 15). 118. Спирт. голубая VBD (№ 16). 119. Спирт. голубая VI (№ 17). 120. Спирт. зелёная M (№ 18). 121. Спирт. зелёная G (№ 19). 122. Спирт. зелёная GG (№ 20). 123. Спирт. коричневая C со спирт. чёрной N чистой (№ 27). 124. Спирт. фиолетовая 2B со спирт. жёлтой A (№ 28). 125. Флуоресцирующий фиолетовый BB со спирт. жёлтой A (№ 29). 126. Спирт. фиолетовая 2B со спирт. жёлтой A (№ 30).

В альбомах образцов предприятий по производству красок указаны пропорции, в которых смешивались вещества. Для случая масляных красок получались сходные картины, которые я здесь не привожу.

Р я д V

15. Рисунки 127—163 охватывают спектры различных окрашенных предметов (картон, бумага, шерсть, гипсовые пластинки), причём исследуются предметы только типичной формы. Эти предметы дают бледные спектральные картины по сравнению с описанными выше.

127. Белая бумага, слабо окрашенная малахитовой зеленью; чтобы наблюдать слабые кружочки чёточных полос, необходимо пользоваться серым дымчатым стеклом для того, чтобы ослабить световую картину вблизи этих кружочков. 128. Бумага или картон окрашены хромotropом в красный цвет. Такую же картину даёт большинство сортов красной бумаги, красных платков и так далее, имеющих в продаже. 129. Белый картон окрашен красным хинизарином.

Из образцов эмалевых красок братьев А. и Н. Мамонтовых в Москве; фабричные номера указаны в скобках. 130. Зелёная киноварь (№ 114). 131. Изумрудная зелень.

Из образцов светлых красителей из каменноугольного дёгтя для цветных лаков, нанесённых на толстую бумагу (фирма Friedr. Bayer & Co., Elberfeld). 132. Наф-

ТАБЛИЦА II

N	70	60	50	40	N	70	60	50	40	N	70	60	50	40
80					113					159				
81					115					156				
82					117					158				
83					119					160				
84					121					162				
85					123					164				
86					125					165				
87						<i>Уряд</i>				166				
88					127					167				
89					128					168				
90					129					169				
91					130					170				
92					131					171				
93					132					171	<i>б) органические</i>			
94					133					172				
95					134					172				
96					135					173				
97					137					175				
98					139					176				
99					140					176				
100					141					177				
101					142					178				
102					143					178				
103					144					179				
104					145					180				
105					146					180				
106					147					181				
107					148					182				
108					149					182				
109					150					183				
110					151					184				
111					152					185				
112					153									

толовый зелёный В (№ 7). 133. Ализарин красный 1R экстра (№ 13). 134. Брильянтовый ализарин бордо (№ 15). 135. Ализарин бордо (№ 16), более тёмный, чем предыдущий. 136. Гелиоголубой прочный VL конц. (№ 20). 137. Свинцовый сурик (№ 26). 138. Железисто-синеродоводородная кислота (№ 28).

Из образцов анилиновых цветных лаков на бумаге (анилиновая и содовая фабрика в г. Бадене). 139. Примазин жёлтый (Primazingelb) 6 экстра патент. и светлозелёный SL (№ 10). 140. Та же смесь в другой пропорции (темнее) (№ 11). 141. Нафтоловый жёлтый S и лаковый зелёный PL (№ 13). 142. Нептуновый зелёный SG (№ 15).

Образцы крашеной шерсти той же фабрики; весовое количество краски на единицу веса сухого шерстяного материала указано в соответствующих альбомах. 143. Оранжевая II (№ 4). 144. Эозин А (№ 10). 145. Кислотная фиолетовая 4BL (№ 20). 146. Кислотная фиолетовая 6BN (№ 21). 147. Водянистая голубая PP (№ 22) (все три голубые). 148. Синяя SL экстра (№ 28). 149. Кислотная зелёная SF, желтоватая (№ 30). 150. Кислотная зелёная 1224 (№ 31). 151. Родамин (№ 42) розовый. 152. Метилфиолетовый В экстра (№ 46). 153. Виктория голубая В (№ 51). 154. Морская снь Н (№ 52).

Мы считаем излишним приводить в статье спектры крашеного льняного полотна, полшерстяной и хлопчатобумажной ткани, кожи и т. д.

Затем следуют несколько спектров водянистых растворов ряда веществ, нанесённых на гипсовые плитки. Спектры сняты после высыхания плиток.

155. Жёлтая анилиновая краска. 156. Нафталин красный (розовый). 157. Родулин красный фирмы Байер (розовый). 158. Эозин (красный). 159. Патентованный голубой краситель Мейера. 160. Изумрудная зелень (Байер). 161. Сернистый кобальт (светлорозовый). 162. Уксуснокислая медь (тёмнозелёная). 163. Двууглекислый натрий (тёмнооранжевый).

ГРУППА В

Р я д VI

16. Этот ряд охватывает спектры твёрдых природных тел. Рисунки 164—171 относятся к неорганическим, рисунки 172—185 принадлежат органическим телам. Наблюдения ведутся с помощью естественного света.

Белые природные тела, такие, как, например, мел, гипс и другие, производят очень слабую поляризацию и, следовательно, дают очень слабые саваровские полосы. Магнезия *usta* представляет в этом смысле самое белое вещество. Чёрные тела, такие, как древесный и каменный уголь, чёрные смолы, камни и так далее, вызывают сильную поляризацию и дают сильные саваровские полосы. Поляризация света серыми камнями имеет среднее значение и зависит от интенсивности и цвета окраски. Коричневые и рыжевато-коричневые дают слабые полосы в красной и оранжевой областях, сильные полосы—в зелёной, синей и цвета индиго частях спектра; полосы поглощения лежат в крайней области длинноволновой части спектра, здесь же иногда можно обнаружить следы одной чёточной полосы. Сера и желтоватые камни производят заметную поляризацию между 0,59—0,45 μ , слабую—в красной части, поглощение—в крайней области длинноволновой части спектра. Такие же явления имеют место для красных и красноватых камней и земель. В телах, обладающих избирательным поглощением, полосы поглощения превращаются в чёточные полосы. Это превращение происходит чрезвычайно красиво у солей дидима, помещённых на фарфоровую плитку. Следующие опыты производились за пределами угла отражения.

Неорганические тела. 164. Спектр поверхности куска твёрдого кармина из коллекции Мамонтова. Различные виды этого красителя отличаются друг от друга большей или меньшей интенсивностью полутени, в которой располагаются саваровские полосы. 165. Прес-

сованная таблетка оранжевого крона. 166. Прессованная таблетка жёлтого крона. 167. Прессованная таблетка жёлтого крона другого сорта. 168. Прессованная таблетка фиолетового метила. 169. Прессованная таблетка родамина. 170. Прессованная таблетка голубой Виктории. 171. Прессованная таблетка красного эозина. Все вещества взяты из коллекции Мамонтова.

Органические тела. 172. Рисунок показывает наиболее полный спектр, который мне удалось получить для составной части растения. Опыт производился с куском зелёной коры арбуза и с несколькими свежими и засохшими листьями. Отличие в спектрах зелёных частей различных растений зависит, повидимому, от внешней кожной ткани, покрывающей предмет. Если предварительно обработать соответствующие части растений химическим или физическим путем, то спектры, полученные от них, очевидно, изменятся. 173. Сухой красный осиновый лист, упавший осенью с дерева; такую же картину дают некоторые красные цветы. 174. Жёлтый цветок *Tagetes patula*; белые и розовые цветы почти что не производят поляризации и не дают полос поглощения. 175. Высохший лиловый цветок мака; здесь мы встречаемся с двумя чёточными полосами спектра 172; цветы другого цвета отличаются интенсивностью саваровских полос на участке $0,656—0,610 \mu$ и интенсивностью чёточных полос. 176. Лиловый цветок *Anemona chinensis* из Ниццы; красные цветы этого растения дают спектр 173. 177. Спектр листа того же растения. 178. Спектр стебля того же растения; чёточные полосы в последних трёх спектрах можно найти в полном спектре 172. 179. Тёмнокоричневый цветок *Lackfiol*. 180. Спектр мяса; аналогичный спектр получается от пальца молодого человека; эти спектры соответствуют спектру гемоглобина. 181. Оранжевое перо петуха из хвоста. 182. Чёрное перо (с металлическим блеском) селезня. 183. Для сравнения приводится спектр каменного угля; заметные чёточные полосы на участке $0,67 \mu$. 184. Жёлтое пятно на кон-

це крыла бабочки. 185. Спектр зелёной головы австралийской птицы.

В заключение я хочу выразить благодарность профессору Московского высшего технического училища П. Петрову, директору неоднократно упоминавшейся московской фирмы С. Мамонтову и заведующему лабораторией этой же фирмы В. Киселёву за предоставление необходимого для работы материала.

Москва

(Прислано в журнал 6 сентября 1912 г.)



О СТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА
НА ПРОВОДЯЩИХ ПОВЕРХНОСТЯХ
ПРОИЗВОЛЬНОГО ВИДА ¹⁾

В июне 1875 г. мною была представлена проф. Кирхгофу работа, носящая заглавие настоящей статьи. Результаты этой работы помещены были проф. Кирхгофом в Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin за 1875 г. под заглавием: «Über die stationären elektrischen Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche». Доказательство же этих результатов дано было проф. Кирхгофом отличное от моего; метод, им употреблённый, сходен с тем, который мы находим в его же статье: «Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene etc.» (Pogg.-Ann., LXIV).

Я считаю нелишним привести здесь мне принадлежащее доказательство найденных мною результатов. Представим себе поверхность произвольного вида или изогнутую пластинку бесконечно малой, но равномерной толщины из однородного вещества, проводящего электричество. На этой поверхности проведём двойную сеть её линий кривизны. Параметры линий кривизны каждой системы означим через ρ и ρ_1 . Положение точки на поверхности будем определять пересекающимися в ней линиями кривизны ρ и ρ_1 . Элементы этих линий будем

¹⁾ Напечатано в Математическом сборнике, т. 9, 1878. (Прим. ред.)

означать соответственно через ds и ds_1 . Мы имеем:

$$ds = \theta_1 d\rho_1, \quad ds_1 = \theta d\rho, \quad (1)$$

где θ_1 и θ суть некоторые функции переменных ρ и ρ_1 . Предположим, что на поверхности установилось стационарное движение электричества. Тогда через периферию каждого элемента поверхности столько же втекает электричества, сколько и вытекает. Выразим аналитически это условие стационарности электрического движения для бесконечно малого четырёхугольника, который образован пересечением четырёх линий кривизны ρ , $\rho + d\rho$ и ρ_1 , $\rho_1 + d\rho_1$. Означим стороны четырёхугольника, лежащие на линиях кривизны ρ и $\rho + d\rho$, через ds и ds' ; на линиях кривизны ρ_1 и $\rho_1 + d\rho_1$ — через ds_1 и ds'_1 . Назовём через κ электропроводность пластинки и через δ — её толщину. Электродвижущая сила, действующая в точке элемента ds в направлении, к нему перпендикулярному, есть

$$-\frac{\partial V}{\partial s_1}, \quad (2)$$

где V означает потенциал свободного электричества, находящегося на нашей кривой пластинке. Количество электричества, втекающего в продолжение элемента времени dt в наш четырёхугольник через сторону его ds , будет:

$$-\kappa \cdot \delta \cdot dt \cdot \frac{\partial V}{\partial s_1} ds. \quad (3)$$

Через противоположную сторону ds' вытекает в то же самое время количество электричества, равное

$$-\kappa \cdot \delta \cdot dt \cdot \left[\frac{\partial V}{\partial s_1} ds + \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial V}{\partial s_1} ds \right) ds_1 \right]. \quad (4)$$

Подобным же образом через элемент ds_1 втекает количество электричества за тот же промежуток времени:

$$-\kappa \cdot \delta \cdot dt \cdot \frac{\partial V}{\partial s} ds_1 \quad (5)$$

и вытекает через противоположную сторону ds'_1 :

$$-x \cdot \delta \cdot dt \left[\frac{\partial V}{\partial s} ds_1 + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial V}{\partial s} ds_1 \right) ds \right]. \quad (6)$$

Избыток вытекающего электричества над втекающим в случае стационарного движения электричества должен быть равен нулю; следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{\partial V}{\partial s_1} ds \right) ds_1 + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial V}{\partial s} ds_1 \right) ds = 0. \quad (7)$$

Внося в это уравнение величины ds и ds_1 из выражений (1), сокращая произведение $d\rho \cdot d\rho_1$, находим:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\theta_1}{\theta} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\frac{\theta}{\theta_1} \frac{\partial V}{\partial \rho_1} \right) = 0. \quad (8)$$

Это есть дифференциальное уравнение с частными производными, которому должен удовлетворять потенциал свободного электричества на изогнутой пластинке в случае стационарного движения электричества. Общий интеграл уравнений такого вида был дан мною в статье: «Законы колебаний в неограниченной среде постоянной упругости» (Математический сборник, т. V, стр. 24).

Так как нам нужен этот общий интеграл для последующего, то я найду его здесь, тем более, что в упомянутой мною статье о нем было сказано слишком кратко. Означим через ξ и η интегралы дифференциальных уравнений:

$$\theta d\rho + \theta_1 d\rho_1 \sqrt{-1} = 0 \quad \text{и} \quad \theta d\rho - \theta_1 d\rho_1 \sqrt{-1} = 0;$$

тогда, называя через ψ , ψ_1 интегрирующие множители этих уравнений, имеем:

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= \psi (\theta d\rho + \theta_1 d\rho_1 \sqrt{-1}), \\ d\eta &= \psi_1 (\theta d\rho - \theta_1 d\rho_1 \sqrt{-1}). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Легко доказать, что

$$V = f(\xi) + F(\eta) \quad (11)$$

будет общим интегралом дифференциального уравнения с частными производными (8). В самом деле, условия

интегрируемости уравнений (10) будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\psi\theta)}{\partial\rho_1} &= \frac{\partial(\psi\theta_1)}{\partial\xi} \sqrt{-1}, \\ \frac{\partial(\psi_1\theta)}{\partial\rho_1} &= -\frac{\partial(\psi_1\theta_1)}{\partial\rho} \sqrt{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Достаточно доказать, что $f(\xi)$ будет интегралом нашего уравнения (8); тем же способом докажется, что и $F(\eta)$ есть интеграл того же уравнения. Полагая

$$V = f(\xi), \quad (13)$$

мы находим:

$$\frac{\partial V}{\partial\rho} = \frac{\partial V}{\partial\xi} \psi\theta, \quad \frac{\partial V}{\partial\rho_1} = \frac{\partial V}{\partial\xi} \psi\theta_1 \sqrt{-1}. \quad (14)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\frac{\theta_1}{\theta} \frac{\partial V}{\partial\rho} \right) &= \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\psi\theta_1 \frac{\partial V}{\partial\xi} \right) = \frac{\partial(\psi\theta_1)}{\partial\rho} \cdot \frac{\partial V}{\partial\xi} = \psi^2\theta_1\theta \frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}, \\ \frac{\partial}{\partial\rho_1} \left(\frac{\theta}{\theta_1} \frac{\partial V}{\partial\rho_1} \right) &= \frac{\partial}{\partial\rho_1} \left(\psi\theta \frac{\partial V}{\partial\xi} \right) \sqrt{-1} = \\ &= \frac{(\partial\psi\theta)}{\partial\rho_1} \frac{\partial V}{\partial\xi} \sqrt{-1} - \psi^2\theta_1\theta \frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Но первое из выражений даёт нам:

$$\frac{\partial(\psi\theta)}{\partial\rho_1} \sqrt{-1} = -\frac{\partial(\psi\theta_1)}{\partial\rho}. \quad (16)$$

Складывая выражения (15), обращая внимание на соотношение (16), мы находим, что сумма их тождественно равна нулю, чем и доказывается наше предложение.

Перейдём теперь к преобразованию уравнения с частными производными (8), которое даст нам возможность свести вопрос о распределении стационарных электрических токов на поверхностях произвольного вида к вопросу о распределении токов на некоторой плоской пластинке. Общий вид интегрирующих множителей ψ и ψ_1

в выражениях (1) будет:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= a + b \sqrt{-1}, \\ \psi_1 &= a - b \sqrt{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где a и b суть некоторые функции переменных ρ и ρ_1 . Внося выражения (17) в выражения (10), находим:

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= (a\theta d\rho - b\theta_1 d\rho_1) + (b\theta d\rho + a\theta_1 d\rho_1) \sqrt{-1}, \\ d\eta &= (a\theta d\rho - b\theta_1 d\rho_1) - (b\theta d\rho + a\theta_1 d\rho_1) \sqrt{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Так как эти выражения суть полные дифференциалы, то действительные и мнимые их части суть тоже полные дифференциалы. Вводя две новые переменные x и y , мы можем, следовательно, написать:

$$\left. \begin{aligned} dx &= a\theta d\rho - b\theta d\rho_1, \\ dy &= b\theta d\rho + a\theta_1 d\rho_1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= dx + dy \sqrt{-1}, \\ d\eta &= dx - dy \sqrt{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Интегралы этих последних уравнений будут:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + y \sqrt{-1}, \\ \eta &= x - y \sqrt{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Следовательно, общий интеграл (11) уравнения с частными производными (8) будет:

$$V = f(x + y \sqrt{-1}) + F(x - y \sqrt{-1}). \quad (22)$$

Такое выражение общего интеграла уравнения (8) показывает нам, что это уравнение в переменных x и y , связанных с переменными ρ и ρ_1 дифференциальными уравнениями (19), принимает вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (23)$$

Этому же уравнению должен удовлетворять, в случае стационарного движения электричества, потенциал на плоской пластинке, совпадающей с плоскостью xy .

Итак, решение вопроса о распределении электрических токов на поверхности произвольного вида приводится к решению вопроса о распределении электрических токов на некоторой плоской пластинке. Посмотрим теперь, в каком отношении находится эта пластинка к нашей поверхности.

Во-первых, очевидно, что каждой точке поверхности будет соответствовать по меньшей мере одна точка пластинки.

Решая уравнения (19) относительно $d\rho$ и $d\rho_1$, мы находим:

$$\left. \begin{aligned} d\rho &= \frac{a dx + b dy}{\theta (a^2 + b^2)}, \\ d\rho_1 &= \frac{a dy - b dx}{\theta_1 (a^2 + b^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Линиям кривизны ρ и ρ_1 поверхности будут соответствовать на нашей пластинке кривые линии, секущие друг друга под прямым углом и дифференциальные уравнения коих будут:

$$\left. \begin{aligned} a dx + b dy &= 0, \\ a dy - b dx &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Следовательно, каждому прямоугольнику на нашей поверхности будет соответствовать прямоугольник на нашей пластинке. Двум элементам ds и ds_1 линий кривизны поверхности будут соответствовать два элемента $d\sigma$ и $d\sigma_1$ линий (25), которые мы найдём, полагая в выражениях (19) или $d\rho = 0$ или $d\rho_1 = 0$. Именно:

$$\left. \begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{a^2 + b^2} ds, \\ d\sigma_1 &= \sqrt{a^2 + b^2} ds_1, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

откуда заключаем, что

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_1} = \frac{ds}{ds_1}. \quad (27)$$

Следовательно, пластинка наша представляет собою изображение поверхности на плоскости, подобное изображаемой поверхности в мельчайших частях. Заметим, что задача о такого рода изображении поверхности произвольного вида на плоскости была разрешена Гауссом (G a u s s, Werke, Bd. IV, S. 193).

Одесса.

21 марта 1877 г.



ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ФРЕНЕЛЯ ¹⁾

Настоящая статья имеет целью представить возможно наглядно свойства интегралов Френеля:

$$A = \int_0^z \cos \frac{\pi}{2} z^2 dz, \quad B = \int_0^z \sin \frac{\pi}{2} z^2 dz.$$

Возьмём на плоскости систему прямоугольных коор-

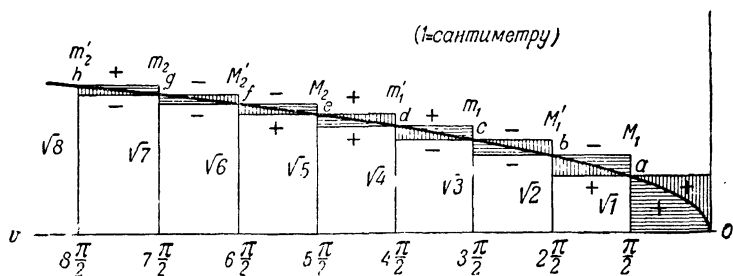


Рис. 1.

динат: абсцисс v и ординат z , и начертим параболу

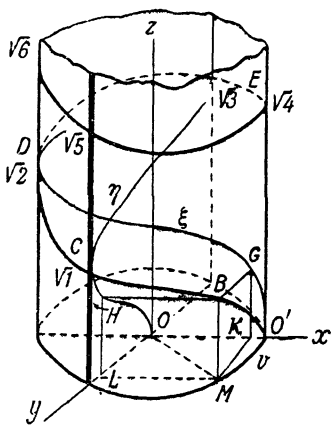
$$\frac{\pi}{2} z^2 = v, \tag{I}$$

принимая произвольную длину за единицу длины (рис. 1).

¹⁾ Статья была помещена в Записках математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей, т. 6, 1885. (Прим. ред.)

Представим себе, далее, круглый цилиндр (рис. 2), радиус которого равняется выбранной нами единице длины. Ось цилиндра примем за ось z -ов системы прямоугольных координат в пространстве. Две другие оси означим через x и y . Навернѐм на этот цилиндр плоскость с начерченной параболой таким образом, чтобы ось параболы совпадала с кругом пересѣчения цилиндра и плоскости xy , а вершина параболы совпала с точкой пересѣчения цилиндрической поверхности и оси x . Парабола, обвивая цилиндр, образует две винтовые линии, из коих одна направляется в сторону положительных z -ов, другая — в сторону отрицательных.

Для нашей цели достаточно рассмотреть только первую из этих двух линий, $O'BCDE$. Будем её проектировать на координатные плоскости zx и zy . Кривую на плоскости zx назовѐм через ξ , на плоскости zy — через η . Координаты z наших проекций будут представляться ординатами параболы:



(1=2 сантиметрам)

Рис. 2.

$$z = GK = HL = MB = \sqrt{\frac{2}{\pi}} v,$$

а координаты x, y будут: для кривой ξ в плоскости zx
 $x = OK = \cos v, \quad y = 0;$

для кривой η в плоскости zy
 $y = OL = \sin v, \quad x = 0.$

Кривая ξ пересекает ось z в точках, для которых $x = \cos v = 0$, т. е. $v = (2h + 1) \frac{\pi}{2}, h = 0, 1, 2, \dots$

и ординаты точек пересечения

$$z_{\pm} = \sqrt{2h + 1}.$$

Кривая η пересекает ось z в точках, для которых

$$y = \sin v = 0, \quad \text{т. е.} \quad v = 2h \frac{\pi}{2}, \quad \text{и} \quad \bar{z}_{\eta} = \sqrt{2h},$$

$$h = 0, 1, 2, \dots$$

Будем откладывать на оси z длины, равные корням квадратным из чисел натурального ряда, так, чтобы одна оконечность наносимых линий совпадала с началом координат; другая оконечность представит собой одну из рассмотренных выше точек пересечения. Означая через n целое число, выражение

$$\bar{z} = \sqrt{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

для n чётного даёт \bar{z}_{η} , для нечётного \bar{z}_{ξ} . Эти самые ординаты соответствуют точкам пересечения с плоскостями координат zx и zy параболы, навёрнутой на цилиндр. Дуги v , соответствующие этим точкам, даются выражением

$$v = h \frac{\pi}{2}, \quad h = 0, 1, 2, \dots,$$

где h есть целое число. Дугу параболы, коей оконечностям соответствуют значения $h-1$ и h , мы будем означать как лежащую в h -й четверти. Мы скажем также, что соответствующие дуги кривых ξ и η лежат в h -й четверти.

Пусть α есть угол касательной линии в точке кривой ξ с осью x , и β — угол касательной в точке кривой η с осью y ; имеем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dx} = - \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{v} \sin v},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dz}{dy} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{v} \cos v}.$$

Мы видим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \infty \quad \text{при} \quad \sin v = 0, \quad \text{т. е. при} \quad x = \pm 1; \\ \operatorname{tg} \beta &= \infty \quad \text{при} \quad \cos v = 0, \quad \text{т. е. при} \quad y = \pm 1. \end{aligned}$$

Следовательно, касательные параллельны оси z в тех точках кривых, которые лежат на прямых пересечения цилиндра с плоскостями zx и zy . Координаты z этих точек для кривой ξ будут равны z_η , а для кривой η равны z_ξ .

Заметим, что $\operatorname{tg} \beta$ бесконечно велик ещё при значении $v = 0$, т. е. в точке кривой η , совпадающей с началом координат.

В точках пересечения с осью z

$$\operatorname{tg} \alpha = \mp \frac{1}{\pi \sqrt{2h+1}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \pm \frac{1}{\pi \sqrt{2h}}.$$

По мере возрастания v касательные линии в этих точках кривых ξ и η всё более приближаются к параллелизму с осью x или с осью y .

Кривые ξ и η имеют точки перегиба. Они определяются значениями v , для которых $\operatorname{tg} \alpha$ или $\operatorname{tg} \beta$ принимают наименьшие значения. Эти значения v определяются для кривой ξ уравнением

$$\operatorname{tg} v_1 = -2v_1,$$

а для кривой η

$$\operatorname{tg} v_2 = \frac{1}{2v_2}.$$

Эти выражения показывают нам, что точки перегиба кривой ξ соответствуют значениям v , лежащим в чётных четвертях окружности. По мере возрастания v , $\operatorname{tg} v_1$ приближается к $-\infty$; следовательно, точка перегиба приближается к точкам пересечения кривой ξ с осью z . Для кривой η значения v_2 лежат в нечётных четвертях окружности, и с увеличением v_2 $\operatorname{tg} v_2$ приближается к нулю; следовательно, точки перегиба также приближаются к точкам пересечения кривой η с осью z .

Указанные свойства кривых ξ и η дают возможность представить их на чертеже (рис. 3 и 4). Линии AA , BB , CC , ... отграничивают на плоскостях zx и zy части, на которых проектируются дуги параболы, соответствующие 1-й, 2-й, 3-й и так далее четвертям.

Легко отыскать эти дуги на параболе (рис. 1). Откладывая на оси абсцисс v величины $\frac{\pi}{2}$, π , $3\frac{\pi}{2}$ и так далее, дуги Oa , ab , bc и прочие проектируются на пло-

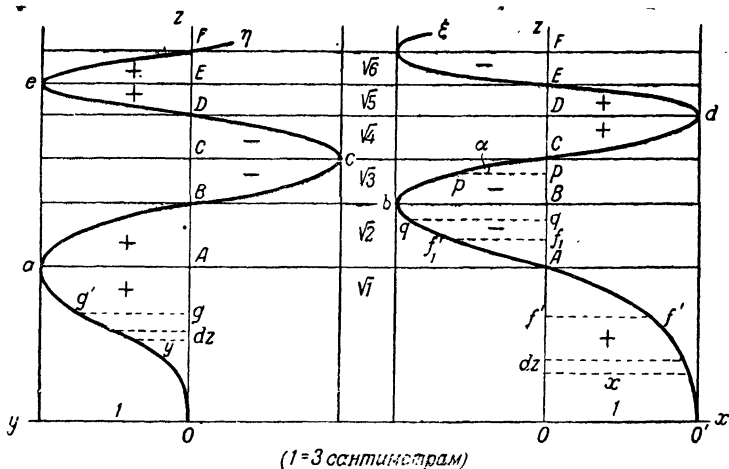


Рис. 3.

Рис. 4.

скости zx кривыми $O'A$, Ab , bC , Cd , ..., а на плоскости zy — кривыми Oa , aB , Bc , cD , ...

Найдём теперь выражение площади, ограниченной кривою ξ , осью z и двумя ординатами $x = O'O'$ и $x = ff'$. Элемент площади есть $x dz$, следовательно, площадь будет:

$$\int_0^{z=Of} x dz,$$

или, вставляя $x = \cos v = \cos \frac{\pi}{2} z^2$, находим для выраже-

ния площади интеграл Френеля

$$A = \int_0^z \cos \frac{\pi}{2} z^2 dz.$$

Если верхний предел z падает во вторую четверть, например $z = Of_1$, то интеграл A представляет собой разность двух площадей $O'O A$ и $Af_1f'_1$, так как значения x для последней площади отрицательны. Отсюда ясно, что если все площади, отсекаемые ветвями кривой ξ от плоскости zx на стороне положительной оси x , мы будем считать положительными, а отсекаемые от плоскости zx на стороне, содержащей отрицательную ось x , — отрицательными, то интеграл A для произвольного значения верхнего предела будет равен алгебраической сумме площадей, ограниченных кривой ξ , осью z , ординатой OO' и затем ординатой, соответствующей значению верхнего предела z .

Означая площади $O'O A$, ABb , bBC и прочие для краткости отрезками OA , AB , BC , CD , DE , ..., знаки последовательных площадей представятся рядом:

$$+OA, -AB, -BC, +CD, +DE, -EF, -FG, \dots,$$

т. е. площади, ограниченные проекциями дуг параболы, лежащих в 1-й, 4-й, 5-й, ... четвертях, будут положительны; между тем площади, ограниченные проекциями дуг параболы, лежащими во 2-й, 3-й, 6-й, 7-й, ... четвертях, отрицательны. Мы видим отсюда, что интеграл A должен иметь максимумы и минимумы. $A = +OA$ будет максимум; $A = +OA + -AB + -BC$ будет минимум, и т. д. Следовательно, максимумы будут представляться алгебраической суммой площадей, соответствующих ряду:

$$+ - - + + \dots - - + +,$$

а минимумы — ряду:

$$+ - - + + \dots + + - -.$$

Таким образом, максимумам интеграла A соответствуют значения

$$v = \frac{\pi}{2}, 5 \frac{\pi}{2}, 9 \frac{\pi}{2}, \dots, (4h + 1) \frac{\pi}{2}, \dots$$

и верхние пределы

$$z = \sqrt{1}, \sqrt{5}, \sqrt{9}, \dots, \sqrt{4h + 1}.$$

Минимумам соответствуют значения

$$v = 3 \frac{\pi}{2}, 7 \frac{\pi}{2}, 11 \frac{\pi}{2}, \dots, (4h - 1) \frac{\pi}{2}, \dots$$

верхние пределы

$$z = \sqrt{3}, \sqrt{7}, \dots, \sqrt{4h + 3}.$$

Эти результаты получаются и отыскивая непосредственно условия максимума и минимума интеграла

$$A = \int_0^z \cos \frac{\pi}{2} z^2 dz;$$

условие состоит в том, чтобы

$$\cos \frac{\pi z^2}{2} \quad \text{или} \quad \cos v = 0;$$

для максимума $\sin v$ должен быть положителен, а для минимума — отрицателен, что и выполняют приведённые выше значения v и z .

Подобными же рассуждениями убедимся, что интеграл

$$B = \int_0^z \sin \frac{\pi}{2} z^2 dz$$

представляет алгебраическую сумму площадей, лежащих на плоскости zy между кривой η , осью z , ординатой $y = 0$ и ординатой y , соответствующей верхнему пределу z ; при этом площади, лежащие по ту сторону оси z , которая соответствует положительной оси y , принимаются положительными, а лежащие по другую сторону — отрицательными.

Порядок положительных и отрицательных площадей представится рядом отрезков:

$$\overset{+}{OA}, \overset{+}{AB}, \overset{-}{BC}, \overset{-}{CD}, \overset{+}{DE}, \overset{+}{EF}, \dots,$$

т. е. площади, ограниченные на плоскости zy проекциями частей параболы, лежащими в 1-й и 2-й, 5-й и 6-й, 9-й и 10-й, вообще $1 + 4h$ и $2 + 4h$ четвертях, будут положительны; ограниченные же проекциями частей параболы, лежащими в 3-й и 4-й, 7-й и 8-й, ..., вообще $3 + 4h$ -й и $4 + 4h$ -й, будут отрицательными.

Максимумы и минимумы интеграла B даются, очевидно, такими комбинациями площадей:

максимумы: $++$, $+- - +$, ...

$$\dots, ++ - - \dots ++;$$

минимумы: $+- - -$, $+- - - ++ - -$, ...

$$\dots, ++ - - \dots - -.$$

Максимумам соответствуют значения:

$$v = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots, (2h + 1) \cdot 2 \frac{\pi}{2};$$

$$z = \sqrt{2}, \sqrt{6}, \dots, \sqrt{2(2h + 1)};$$

минимумам:

$$v = 2\pi, 4\pi, \dots, 4h \frac{\pi}{2};$$

$$z = \sqrt{4}, \sqrt{8}, \dots, \sqrt{4h}.$$

Эти результаты очевидны и из условия максимума и минимума интеграла B , дающего

$$\sin v = 0,$$

причём для максимумов $\cos v$ должен быть отрицателен, а для минимумов положителен.

Мы можем представить на плоскости те части цилиндрической поверхности, проекциями коих будут рассмотренные нами выше площади. Они изображены на рис. 1, причём площади, пунктированные горизонтально,

проектируются на плоскости zx , а пунктированные вертикально проектируются на плоскости zy ; знаки площадей проекций обозначены на соответственных частях.

Благодаря тому обстоятельству, что кривые проекций касаются образующих цилиндра, лежащих в плоскостях zx и zy , легко вычислять поправки в величинах интегралов, данных Френелем, для пределов, близких к значениям z этих точек соприкосновения. В данном случае алгебраически прибавляемая площадь весьма близка к прямоугольнику, основание коего есть единица, а высота — разность предела, для которого ищется интеграл, и значения z для ближайшей точки прикосновения. Так, например, B имеет максимум для $z = \sqrt{2} = 1,4142$, по Френелю же — для $z = 1,4$. Для этого значения интеграл A , вычисленный Френелем, будет 0,5439. Мы можем отыскать истинную его величину; в самом деле, площадь, вычисленная Френелем, есть алгебраическая сумма площадей

$$A = O'OA - qAq \text{ (рис. 4),}$$

где $Oq = 1,4$ меньше $OB = 1,4142$; разность

$$OB - Oq = 0,0142$$

представляет площадь прямоугольника $bqqB$, которая должна быть прибавлена к предыдущему значению A со знаком —; таким образом, получаем:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{2} z^2 dz = 0,5439 - 0,0142 = 0,5297.$$

Поправки в значениях A и B , соответствующих максимумам и минимумам, менее значительны, что видно из формы кривых проекций, так как они соответствуют точкам пересечения кривых с осью z .

По таблице Френеля первый минимум интеграла A будет для $z = 1,70$, причём величина этого интеграла определяется равной 0,3245. Так как $z = Op = 1,70$ меньше $z = OC = \sqrt{3} = 1,7321$, то истинное значение A ,

соответствующее минимуму, будет

$$A = 0,3245 \text{ — площадь } pCp \text{ (рис. 4).}$$

Но площадь pCp по малости $Cp = 0,0321$ может быть рассматриваема как площадь прямоугольного треугольника, в коем сторона pC совпадает с касательной, проведённой в точке C . По формуле, найденной выше,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\pi \sqrt{3}};$$

следовательно,

$$pCp = \frac{1}{2} \frac{\overline{pC}^2}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\pi}{2} (0,0321)^2 \sqrt{3} = 0,0028,$$

и истинный минимум A будет

$$\int_0^{1,7321} \cos \frac{\pi}{2} z^2 dz = 0,3245 - 0,0028 = 0,3217.$$

Мы можем установить приближённую формулу для вычисления интегралов Френеля. Соединим две точки

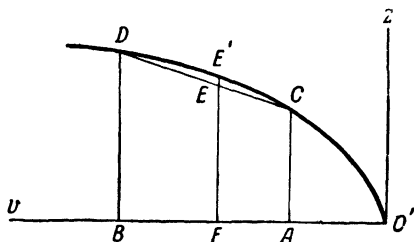


Рис. 5.

параболы (I) (рис. 5) хордой CD и введём обозначения:

$$CA = z_0, \quad BD = z_1, \quad E'F = z, \quad EF = \zeta,$$

$$AB = \alpha, \quad AO' = v_0, \quad FO' = v.$$

Получим:

$$\zeta = \frac{z_1 - z_0}{\alpha} (v - v_0) + z_0, \quad d\zeta = \frac{z_1 - z_0}{\alpha} dv.$$

Если точки C и D достаточно близки, как увидим ниже в применениях отыскиваемых нами формул, то в интегралах A и B можно будет заменить величину dz через d^r ; получим:

$$A_{z_0}^z = \int_{z_0}^z \cos \frac{\pi}{2} z^2 dz = \int_{v_0}^v \cos v d^r = \frac{z_1 - z_0}{\alpha} \int_{v_0}^v \cos v dv,$$

и отсюда

$$\left. \begin{aligned} A_{z_0}^z &= \frac{z_1 - z_0}{\alpha} \left[\sin \frac{\pi}{2} z^2 - \sin \frac{\pi}{2} z_0^2 \right]. \\ B_{z_0}^z &= -\frac{z_1 - z_0}{\alpha} \left[\cos \frac{\pi}{2} z^2 - \cos \frac{\pi}{2} z_0^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

Так как $\alpha = \frac{\pi}{2} (z_1^2 - z_0^2)$, то получим:

$$\left. \begin{aligned} A_{z_0}^z &= \frac{2}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z^2 - \sin \frac{\pi}{2} z_0^2}{z_1 + z_0}, \\ B_{z_0}^z &= -\frac{2}{\pi} \frac{\cos \frac{\pi}{2} z^2 - \cos \frac{\pi}{2} z_0^2}{z_1 + z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (\alpha_1)$$

Формулы, данные Абриа, представляют частный случай здесь приведённых (Verdet, Oeuvres, т. V, стр. 330). Простейшее употребление этих формул будет иметь целью отыскание интегралов A_0^z и B_0^z , если известны интегралы $A_0^{z_0}$, $B_0^{z_0}$, коих предел $z_0 < z$ и мало разнится от z . В этом случае, полагая $z = z_1$, находим:

$$\left. \begin{aligned} A_0^{z_1} &= A_0^{z_0} + \frac{2}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z_1^2 - \sin \frac{\pi}{2} z_0^2}{z_1 + z_0}, \\ B_0^{z_1} &= B_0^{z_0} - \frac{2}{\pi} \frac{\cos \frac{\pi}{2} z_1^2 - \cos \frac{\pi}{2} z_0^2}{z_1 + z_0}. \end{aligned} \right\} \quad (\beta)$$

Если $z_0 > z_1$, то знаки дробей в правых частях приведённых выражений будут противоположные. Так, напри-

мер, Френель даёт:

$$A_0^{1,2} = 0,7161 \quad \text{и} \quad A_0^{1,3} = 0,6393;$$

второй интеграл получается из первого, как известно, приближённой формулой Френеля. Применим найденное выше выражение для той же цели. Имеем:

$$\sin \frac{\pi}{2} (1,3)^2 = \sin 152,1^\circ = \sin 27,9^\circ = 0,4679;$$

$$\sin \frac{\pi}{2} (1,2)^2 = \sin 129,6^\circ = \sin 50,4^\circ = 0,7705;$$

$$\frac{2}{\pi} = 0,6366; \quad z_1 + z_0 = 2,5.$$

Подставляя в первую из формул (β), находим:

$$A_0^{1,3} = 0,7161 - 0,0771 = 0,6390,$$

— величину, различающуюся от данной Френелем на 0,0003.

Мы воспользуемся также формулами (β) для отыскания максимумов и минимумов напряжения света в диффракционном явлении, производимом экраном с беспредельным прямолинейным краем. Напряжение света в части пространства, лежащей вне геометрической тени, пропорционально, как известно, выражению:

$$I = \left(\frac{1}{2} + A_0^z \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + B_0^z \right)^2.$$

Предел z , соответствующий максимуму или минимуму I , означим через z_1 и положим $\varphi = \frac{\pi}{2} z_1^2$. Дифференцируя I по z и приравнявая результат нулю, получаем условие максимума или минимума:

$$\left(\frac{1}{2} + A_0^{z_1} \right) \cos \varphi + \left(\frac{1}{2} + B_0^{z_1} \right) \sin \varphi = 0.$$

Если мы означим через z_0 величину, близкую к z_1 , то

получим, пользуясь формулой (β):

$$\left(\frac{1}{2} + A_0^{z_0} + \frac{2}{\pi} \frac{\sin \varphi - \sin \frac{\pi}{2} z_0^2}{z_1 + z_0} \right) \cos \varphi + \\ + \left(\frac{1}{2} + B_0^{z_0} - \frac{2}{\pi} \frac{\cos \varphi - \cos \frac{\pi}{2} z_0^2}{z_1 + z_0} \right) \sin \varphi = 0.$$

Члены, содержащие $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ внутри скобок, взаимно уничтожаются, и мы находим:

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{\frac{1}{2} + A_0^{z_1}}{\frac{1}{2} + B_0^{z_1}} = - \frac{\frac{1}{2} + A_0^{z_0} - \frac{2}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z_0^2}{z_1 + z_0}}{\frac{1}{2} + B_0^{z_0} + \frac{2}{\pi} \frac{\cos \frac{\pi}{2} z_0^2}{z_1 + z_0}}. \quad (\gamma)$$

Покажем, каким образом эта формула даёт возможность весьма просто вычислять величину z_1 . Заметим прежде всего, что так как $A_0^{z_1}$ и $B_0^{z_1}$ всегда положительны, то $\operatorname{tg} \varphi$ отрицателен; следовательно, φ лежит всегда в чётных четвертях, почему $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ имеют противоположные знаки; означая их абсолютные величины через c и s , мы можем написать условие максимума и минимума в следующем виде:

$$\left(\frac{1}{2} + A_0^{z_1} \right) c = \left(\frac{1}{2} + B_0^{z_1} \right) s.$$

Так как в каждой четверти интегралы A и B изменяются внутри близких между собою пределов, как это показывают таблицы Френеля, и притом с возрастанием верхнего предела приближаются всё более и более к $\frac{1}{2}$, т. е. к равенству, то $\operatorname{tg} \varphi$ должен быть близок к -1 ; следовательно, c и s также близки к равенству. Мы заключаем отсюда, что

$$\frac{1}{2} + A_0^{z_1} \text{ близко к равенству с } \frac{1}{2} + B_0^{z_1},$$

или

$A_0^{z_1}$ близко к равенству с $B_0^{z_1}$.

Положим

$$z' < z_1 < z'';$$

тогда по непрерывности функций A и B должны иметь:

$$\text{если } A_0^{z'} \geq B_0^{z'},$$

$$\text{то } A_0^{z''} \leq B_0^{z''}.$$

Таким образом, нам достаточно отыскать в таблицах Френеля два возможно близких между собою значения z' и z'' , для которых выполнялись бы предыдущие неравенства, чтобы быть уверенными в том, что искомое z_1 близко к одному из найденных нами значений. Так, в таблице Френеля (Oeuvres, т. I, стр. 319) находим:

z	1,2	1,3	1,8	1,9	2,3	2,4	2,7	2,8
A	0,7161	0,6393	0,3342	0,3949	0,6271	0,5556	0,3929	0,4678
B	0,6229	0,6859	0,4509	0,3732	0,5528	0,6194	0,4528	0,3913

и т. д.

Мы видим отсюда, что искомые значения z_1 лежат близко к значениям 1,2; 1,8; 2,3; 2,7 и т. д. Отыскав эти последние и назвав их через z_0 , мы приступаем к решению выражения (γ) по приближению. Зная, что z_1 мало отличается от z_0 , мы полагаем в правой части, в дроби $\frac{1}{z_1 + z_0}$, величину $z_1 = z_0$; получаем из нашей формулы одинаковую по виду с известной приближённой (Verdet, Oeuvres, т. V, стр. 347):

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} z_1^2 = - \frac{\frac{1}{2} + A_0^{z_0} - \frac{1}{\pi z_0} \sin \frac{\pi}{2} z_0^2}{\frac{1}{2} + B_0^{z_0} + \frac{1}{\pi z_0} \cos \frac{\pi}{2} z_0^2}. \quad (\delta)$$

Найдя отсюда приближённое значение для z_1 , подставляем его в дробь $\frac{1}{z_1 + z_0}$ и снова производим вычисление. Но уже первое приближение, т. е. формула (6), даёт с достаточной точностью значения z_1 , как показывают приводимые ниже примеры:

$$1\text{-й максимум. } z_0 = 1,2; \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1,2161 - 0,2653 \cdot 0,7705}{1,1229 - 0,2653 \cdot 0,6374},$$

$$\text{отсюда } \operatorname{tg} \varphi = -1,0607 = -\operatorname{tg} 46,68^\circ,$$

$$\varphi = 180^\circ - 46,68^\circ = 133,32^\circ = 90^\circ \cdot z_1^2;$$

$$\lg z_1 = \frac{1}{2} \{ \lg 133,32 - \lg 90 \} = 0,0853264;$$

$$z_1 = 1,2171.$$

По Френелю $z_1 = 1,2172$ (Oeuvres, т. I, стр. 322). Второе приближение даёт:

$$\operatorname{tg} \varphi = -1,0609 = -\operatorname{tg} 46,687^\circ;$$

$$\frac{\pi}{2} z_1^2 = 133,313^\circ; z_1 = 1,21707.$$

$$1\text{-й минимум. } z_0 = 1,8; \operatorname{tg} \varphi = -\frac{0,8342 + 0,1768 \cdot 0,9298}{0,9509 + 0,1768 \cdot 0,3681};$$

$$\text{отсюда } \operatorname{tg} \varphi = -0,9829 = -\operatorname{tg} 44,51^\circ;$$

$$\varphi = 360^\circ - 44,51^\circ = 315,49^\circ = 90^\circ \cdot z_1^2;$$

$$\text{отсюда } z_1 = 1,8723;$$

$$\text{по Френелю } z_1 = 1,8726.$$

Второе приближение даёт:

$$\operatorname{tg} \varphi = -0,9810 = -\operatorname{tg} 44,43^\circ,$$

$$\varphi = 360^\circ - 44,43^\circ = 315,57^\circ = 90^\circ \cdot z_1^2$$

$$\text{и } z_1 = 1,8725;$$

$$\text{по Френелю } z_1 = 1,8726;$$

и т. д.

Ближайшей нашей задачей будет более подробное знакомство с кривыми ξ и η . Мы постараемся с этой

целью отыскать возможно простые кривые и комбинации кривых, близко подходящие к линиям ξ и η . В первой четверти начальная абсцисса кривой ξ (рис. 4) равна единице и конечная ордината тоже равна единице. Величина отграничиваемой ею площади $A_0^1 = 0,7803$ очень мало отличается от площади четверти круга, описанного радиусом, равным 1, равной $\frac{\pi}{4} = 0,7854$.

Если в первой четверти мы опишем дугу круга CO' (рис. 6) радиусом, равным единице, и проведём ломаную линию $O'AB$ так, чтобы

$$O'A = 0,6; \quad AB = 0,95,$$

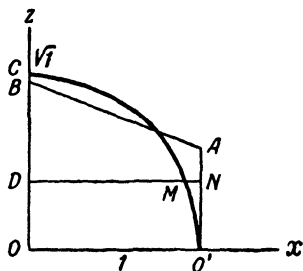


Рис. 6.

средняя арифметическая из площадей, отграничиваемых этими линиями и прямой, проведённой на высоте z , представит довольно близко соответственный интеграл A_0^z . Так, например,

$$A_0^{O'N} = \frac{1}{2} \{ \text{плоч. } ODMO' + \text{плоч. } ODNO' \}.$$

Поэтому интеграл A будет довольно близко изображаться следующими значениями:

$$1) \quad 0 < z < 0,6;$$

$$A_0^z = \frac{1}{4} [\text{arc sin } z + z \sqrt{1-z^2}] + \frac{1}{2} z.$$

$$2) \quad 0,6 < z < 0,95;$$

$$A_0^z = \frac{1}{4} [\text{arc sin } z + z \sqrt{1-z^2}] + 0,3 + \frac{1,3-z}{1,4} (z-0,6).$$

$$3) \quad 0,95 < z < 1;$$

$$A = \frac{1}{4} [\text{arc sin } z + z \sqrt{1-z^2}] + 0,3875.$$

В следующей таблице приведены значения интегралов, вычисленных по этим формулам и данных Френелем:

z	Формулы	Френель	Разность
0,1	0,0999	0,0999	0,0000
0,2	0,1971	0,1999	0,0028
0,3	0,2977	0,2993	0,0016
0,4	0,3945	0,3974	0,0029
0,5	0,4892	0,4923	0,0031
0,6	0,5804	0,5811	0,0007
0,7	0,6615	0,6597	-0,0018
0,8	0,7231	0,7230	-0,0001
0,9	0,7638	0,7651	0,0013
1,0	0,7802	0,7803	0,0001

Более удачно и более просто можно представить интегралы B в первой четверти. Заметим прежде всего (рис. 3), что кривая η в первой четверти имеет точку перегиба. Соответствующее v есть корень приведенного выше трансцендентного уравнения; это v_2 лежит между 37° и $37^\circ 40'$. Приблизительно для точки перегиба абсцисса $y = 0,609$, а ордината $z = 0,645$. Начертим (рис. 7) в первой четверти на плоскости zy параболу $y = \frac{\pi}{2} z^2$. Точку A ($z = 0,5$) этой параболы соединяем прямой с точкою B ($y = 1$; $z = 0,92$). Ломаная линия $OABD$ будет довольно близка к кривой η в первой четверти.

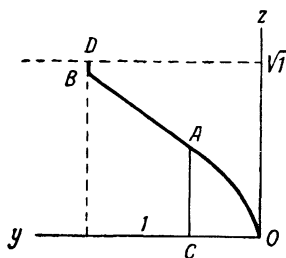


Рис. 7.

1) $0 < z < 0,5$; уравнение параболы есть $y = \frac{\pi}{2} z^2$; следовательно,

$$B = \int y dz = \frac{\pi}{2} \int z^2 dz = 0,5236 \cdot z^3.$$

2) $0,5 < z < 0,92$; так как $OC = \frac{\pi}{8} = 0,3927$, то

$$B = 0,0654 + [0,723z + 0,0312] (z - 0,5).$$

3) $0,92 < z < 1$;

$$B = z - 0,5621.$$

Приводим таблицу, составленную подобно предыдущей.

z	Формулы	Френель	Разность
0,1	0,0005	0,0006	0,0001
0,2	0,0042	0,0042	0,0000
0,3	0,0141	0,0140	-0,0001
0,4	0,0335	0,0332	-0,0003
0,5	0,0654	0,0644	-0,0010
0,6	0,1119	0,1101	-0,0018
0,7	0,1730	0,1716	-0,0014
0,8	0,2483	0,2487	0,0004
0,9	0,3382	0,3391	0,0009
1,0	0,4379	0,4376	0,0003

Перейдём теперь к исследованию кривой ξ в других четвертях. Дуги этой кривой, лежащие во 2-й, 3-й и 4-й четвертях, я заменяю в каждой четверти параболлами и прямыми, определёнными следующими условиями:

- 1) вершина параболлы лежит в точке соприкосновения кривой ξ с образующей цилиндра;
- 2) ось параболлы параллельна оси x ;
- 3) касательная к кривой ξ , проведённая в точке её пересечения с осью цилиндра и определяемая дан-

ной выше формулой (стр. 456)

$$\operatorname{tg} \alpha = \mp \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2h+1}},$$

есть в то же время и касательная к параболе. Часть этой касательной, лежащая между точкой пересечения кривой ξ с осью z и точкой касания с параболой, и идущая от этой точки дуга параболы до вершины представляют кривую ξ .

Для следующих четвертей дуги параболы (I) (рис. 1), соответствующие дугам ξ , лежащим в этих четвертях, заменяем стягивающими их хордами. Вследствие этого к вычислению интеграла A применяются формулы (α). Мы имеем здесь $\alpha = \frac{\pi}{2}$, и если речь идет о h -й четверти, то $v_0 = h \frac{\pi}{2}$, $z_0 = \sqrt{h}$, $z_1 = \sqrt{h+1}$. Полагая $d = \sqrt{h+1} - \sqrt{h}$, находим:

$$A_0^z = A_0^{\sqrt{h}} + \frac{2d}{\pi} \left[\sin \frac{\pi}{2} z^2 - \sin h \frac{\pi}{2} \right].$$

Пользуясь указанными здесь приемами, вычислены в приводимой ниже таблице значения Φ_A интегралов A . Те же интегралы, вычисленные Френелем, обозначены через F_A . Зная уклонения тех и других значений, можно извлечь из приводимой ниже таблицы величины интегралов A , соответствующие их наибольшим (M) и наименьшим (m) значениям. Так, например, на границе 15-й и 16-й четвертей лежит минимум интеграла A , значение которого по таблице Френеля приходится для $z = 3,9$ и равно 0,4226, т. е. падает уже в 16-ю четверть. По нашим формулам получается минимум для $z = \sqrt{15}$, равный 0,4169. Разность этой цифры и предыдущей равна 0,0057, — величине гораздо большей, чем возможные уклонения значений Φ_A и F_A . Прибавляя к цифре 0,4169 поправку 0,0013, получаем для минимума интеграла A величину 0,4182, более близкую к истине, чем та, которая извлекается из таблиц Френеля.

Четверть	z	Φ_A	F_A	Δ
2-я	1,1	0,7645	0,7643	-0,0002
	1,2	0,7177	0,7161	-0,0016
	1,3	0,6398	0,6393	-0,0005
	1,4	0,5443	0,5439	-0,0004
	$\sqrt{2}$	0,5301		
3-я	1,5	0,4465	0,4461	-0,0004
	1,6	0,3664	0,3662	-0,0002
	1,7	0,3233	0,3245	0,0012
	$\sqrt{3}$	0,3205	m	
4-я	1,8	0,3330	0,3342	0,0012
	1,9	0,3962	0,3949	-0,0013
	$\sqrt{4}$	0,4901	0,4886	-0,0015
5-я	2,1	0,5803	0,5819	0,0016
	2,2	0,6356	0,6367	0,0011
	$\sqrt{5}$	0,6404	M	
6-я	2,3	0,6265	0,6271	0,0006
	2,4	0,5546	0,5556	0,0010
	$\sqrt{6}$	0,5046		
7-я	2,5	0,4568	0,4581	0,0013
	2,6	0,3885	0,3895	0,0010
	$\sqrt{7}$	0,3797	m	
8-я	2,7	0,3916	0,3929	0,0013
	2,8	0,4671	0,4678	0,0007
	$\sqrt{8}$	0,4961		
9-я	2,9	0,5616	0,5627	0,0011
	$\sqrt{9}$	0,6053	0,6061 M	0,0008

Продолжение

Четверть	z	Φ_A	F_A	Δ
10-я	3,1 $\sqrt{10}$	0,5615 0,5020	0,5621	0,0006
11-я	3,2 3,3 $\sqrt{11}$	0,4659 0,4053 0,4037	0,4668 0,4061 m	0,0009 0,0008
12-я	3,4 $\sqrt{12}$	0,4377 0,4976	0,4388	0,0011
13-я	3,5 3,6 $\sqrt{13}$	0,5319 0,5870 0,5872	0,5328 0,5883 M	0,0009 0,0013
14-я	3,7 $\sqrt{14}$	0,5411 0,5005	0,5424	0,0013
15-я	3,8 $\sqrt{15}$	0,4472 0,4169	0,4485 m	0,0013
16-я	3,9 $\sqrt{16}$	0,4212 0,4980	0,4226 0,4986	0,0014 0,0006

Что касается кривой η , то во второй четверти она может быть представлена параболой, вершина коей лежит в точке соприкосновения кривой η с цилиндрической поверхностью, ось параллельна оси y , и парабола проходит через точку пересечения кривой η с осью z . Насколько близко такое построение воспроизводит кривую η во второй четверти, показывает следующая таблица, в коей Φ_B и F_B означают интегралы B , вычислен-

ные по этому построению и данные Френелем.

2-я четверть

z	Φ_B	F_B	Δ
1,1	0,5357	0,5359	0,0002
1,2	0,6221	0,6229	0,0008
1,3	0,6852	0,6859	0,0007
1,4	0,7133	0,7132	-0,0001
$\sqrt{2}$	0,7137	М	

Полагая

$$1 - y = \eta, \quad z - 1 = \zeta,$$

уравнение параболы будет:

$$\zeta^2 = 2p\eta, \quad 2p = (\sqrt{2} - 1)^2 = 0,1716$$

и

$$B_0^z = B_0^1 + \zeta \left(1 - \frac{\zeta^2}{6p} \right).$$

Построение для третьей четверти производится по правилу, указанному для кривой ξ в той же четверти. Для следующих четвертей соответственные дуги параболы (рис. 4.) навёрнутой на цилиндре, заменяются хордами, так что для них получаем из формул (а):

$$B_0^z = B_0^{\sqrt{h}} - \frac{2d}{\pi} \left[\cos \frac{\pi}{2} z^2 - \cos h \frac{\pi}{2} \right].$$

Согласие этих построений для кривой η столь же удовлетворительно, как и для кривой ξ , исключая третью четверть, содержащую точку перегиба.

Четверть	z	Φ_B	F_B	Δ
3-я	1,5	0,6973	0,6973	0,0000
	1,6	0,6377	0,6388	0,0011
	1,7	0,5468	0,5492	0,0024
	$\sqrt{3}$	0,5148		
4-я	1,8	0,4517	0,4509	-0,0008
	1,9	0,3748	0,3732	-0,0016
	$\sqrt{4}$	0,3437	0,3432 m	-0,0005
5-я	2,1	0,3734	0,3739	0,0005
	2,2	0,4566	0,4553	-0,0013
	$\sqrt{5}$	0,4940		
6-я	2,3	0,5538	0,5528	-0,0010
	2,4	0,6203	0,6194	-0,0009
	$\sqrt{6}$	0,6298	M	
7-я	2,5	0,6203	0,6190	-0,0013
	2,6	0,5512	0,5499	-0,0003
	$\sqrt{7}$	0,5049		
8-я	2,7	0,4536	0,4528	-0,0008
	2,8	0,3922	0,3913	-0,0009
	$\sqrt{8}$	0,3885	m	
9-я	2,9	0,4104	0,4098	-0,0006
	$\sqrt{9}$	0,4977	0,4959	-0,0018

Четверть	z	Φ_B	F_B	Δ
10-я	$\sqrt{10}$	0,6010	M	
11-я	3,2	0,5941	0,5931	-0,0010
	3,3	0,5197	0,5191	-0,0006
	$\sqrt{11}$	0,5027		
12-я	$\sqrt{12}$	0,4088	m	
13-я	3,5	0,4156	0,4144	-0,0012
	3,6	0,4927	0,4919	-0,0008
	$\sqrt{13}$	0,4984		
14-я	$\sqrt{14}$	0,5851	M	
15-я	3,8	0,5661	0,5654	-0,0007
	$\sqrt{15}$	0,5015		
16-я	3,9	0,4752	0,4750	-0,0002
	$\sqrt{16}$	0,4204	0,4202	-0,0002
			m	

Вычисление интегралов при замене кривых ξ и η параболой и касательной производилось по следующим формулам. Положим (рис. 8), что в плоскости zx кривая ξ , лежащая в h -й четверти, заменяется параболой CD и касательной DA , проведенной в точке A пересечения кривой ξ с осью z . Точки A и B суть конечности ординат \sqrt{h} и $\sqrt{h+1}$. Разность их AB означим через l . Вводим систему координат ξ и ζ , означенных на чертеже, и в этой системе называем через ζ_0 и ξ_0 координаты точки D касания параболы и прямой AD , делающей с осью x угол α , tg коего вычисляется по приведенной

выше формуле. Изображая уравнение параболы в виде

$$\zeta^2 = 2p\xi,$$

имеем, по свойству параболы:

$$\zeta_0 = 2\xi_0 \operatorname{tg} \alpha, \quad p = \zeta_0 \operatorname{tg} \alpha.$$

Кроме того,

$$l - \zeta_0 = (1 - \xi_0) \operatorname{tg} \alpha, \text{ откуда } \xi_0 = \frac{l}{\operatorname{tg} \alpha} - 1, \zeta_0 = 2(l - \operatorname{tg} \alpha).$$

Для $A\alpha < AE$ площадь $Ax\delta$ даёт интеграл Френеля

$$-A\sqrt[3]{h} = \frac{1}{2} \frac{(A\alpha)^2}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{(z - \sqrt{h})^2}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Для $A\beta > AE$ площадь $AD\gamma\beta$ определяет интеграл Френеля $A\sqrt[3]{h}$. Если координаты точки γ означим через

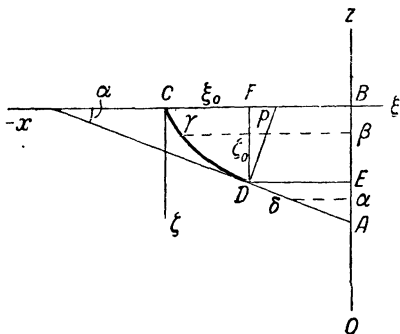


Рис. 8.

ξ , ζ и всю площадь $CDA\beta$ через P , то

$$-A\sqrt[3]{h} = P - \frac{2}{3} \xi \zeta_0 - \zeta(1 - \xi) = P - \zeta \left(1 - \frac{\xi^2}{6p}\right).$$

При этом $\zeta = \sqrt[3]{h+1} - z$

и

$$P = -A\sqrt[3]{h+1} = \frac{2}{3} \xi_0 \zeta_0 + \frac{l + \xi_0}{2} (1 - \xi_0).$$

Если парабола обращена своей выпуклостью в обратную сторону, т. е. в сторону положительной оси z , и лежит опять со стороны отрицательных x , то точка A будет окончанностью ординаты $\sqrt{\bar{h}+1}$, а точка B — окончанностью ординаты $\sqrt{\bar{h}}$. Поэтому если $z < \sqrt{\bar{h} + \zeta_0}$,

$$-A\sqrt{\bar{h}} = \zeta \left(1 - \frac{\zeta^2}{6p}\right), \quad \zeta = z - \sqrt{\bar{h}}.$$

Если же $z > \sqrt{\bar{h} + \zeta_0}$, то

$$-A\sqrt{\bar{h}} = P - \frac{(\sqrt{\bar{h}+1} - z)^2}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Постоянные, входящие в эти формулы для различных четвертей, имеют следующие значения:

Кривые	$\operatorname{tg} \alpha$	p	ξ_0	ζ_0	z_0	P
ξ во II четверти	$\frac{1}{\pi} = 0,3183$	0,0610	0,3013	0,1918	1,2224	0,2502
ξ в III четверти	$\frac{1}{\pi\sqrt{3}} = 0,1838$	0,0482	0,7296	0,2682	1,6824	0,2096
ξ в IV четверти	$\frac{1}{\pi\sqrt{3}} = 0,1838$	0,0309	0,4575	0,1682	1,8318	0,1696
η в III четверти	$\frac{1}{\pi\sqrt{2}} = 0,2251$	0,0418	0,4123	0,1856	1,5465	0,1989

Приведённые формулы могут быть полезны для вычисления интегралов Френеля в тех случаях, когда не требуется очень большой точности.

Представим себе два одинаковых круглых цилиндра A и B (рис. 9), вращающихся около двух горизонтальных осей и трущихся друг о друга своими поверхно-

стями. Если мы назовём через v угол между осями и через s —путь, описываемый точкой цилиндра B при его вращении, то путь, проходимый точкой цилиндра A , будет $\tau = s \cos v$. При повороте цилиндра B около вертикальной оси z , проходящей через точку касания обоих

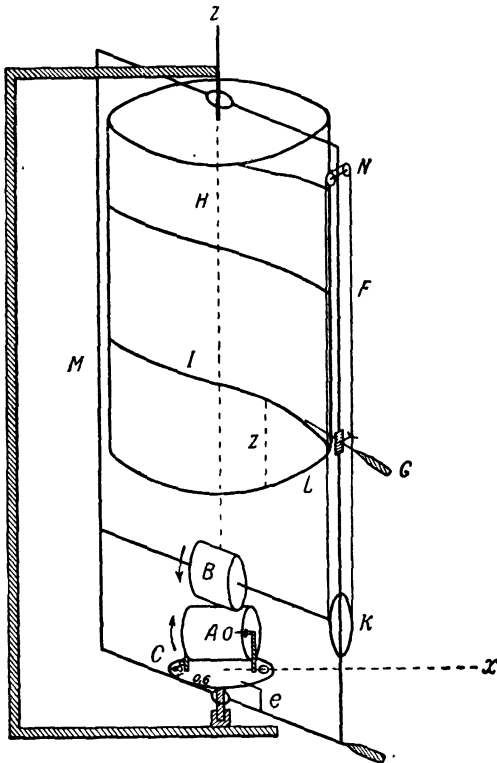


Рис. 9.

цилиндров, нижний не будет приходить во вращательное движение. Предположим, что оконечности оси цилиндра B покоятся в раме M , свободно надетой на ось z . На оси цилиндра находится такого же диаметра кру-

жок K , по ободу которого и ободкам блочков N проходит бесконечная нить. По одному из стержней двигается указатель G , соединённый с правой нитью F . На оси z неподвижно укреплен круглый барабан H , на поверхности коего начерчена парабола $\frac{\pi}{2} z^2 = v$, принимая за единицу радиус барабана. Если вертикальная плоскость zx , проходящая через вершину L параболы, содержит ось цилиндра A , то, вращая раму так, чтобы указатель G двигался по начерченной параболе, путь σ , пройденный нулевым делением цилиндра A и выраженный в долях принятой единицы, представит собой, очевидно, интеграл Френеля:

$$\sigma = \int_0^z \cos v \, dz.$$

Этот интеграл будет возрастать при движении указателя в первой четверти, когда цилиндр A вращается в сторону, указанную на чертеже стрелкой. Во второй четверти из пройденного пути σ будут вычитаться новые проходимые нулевой точкой пути, потому что движение цилиндра будет совершаться в противную сторону. Таким образом, положение нуля на цилиндре A даст алгебраическую сумму пройденных им путей, т. е. опять интеграл Френеля, соответствующий значениям z , лежащим во второй четверти, и т. д.

Если ось цилиндра A при помощи разделённого круга C будет поставлена перпендикулярно к плоскости zx , то путь, проходимый нулевой точкой цилиндра A , будет представлять интеграл Френеля B :

$$\sigma = \int_0^z \sin v \, dz.$$

Вообще, если на барабане начерчена кривая

$$v = f(z),$$

то отсчёты на цилиндре A дают нам или

$$\sigma = \int \cos [f(z)] dz$$

или

$$\sigma = \int \sin [f(z)] dz.$$

Прибор, схематически изображённый на рис. 9, может служить также и для отыскания значений z , соответствующих $\max.$ или $\min.$ напряжения света в дифракционном явлении, обусловливаемом ширмою с беспредельным прямолинейным краем. Данную выше формулу (стр. 465) для соответственных $\max.$ и $\min.$ величины I мы можем представить в таком виде:

$$\frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{2} + \int_0^z \cos (v - \varphi) dz = 0.$$

Повернём ось цилиндра A из плоскости zx на произвольный угол φ , больший 90° . Затем при помощи нониуса e ставим раму на 270° . Ведя указатель G от нижнего края барабана вертикально вверх на высоту, равную $\frac{1}{2}$, нулевое деление цилиндра A пройдёт путь $\frac{\sin \varphi}{2}$ в направлении, которое я обозначу стрелкой \leftarrow . Затем, поставив цилиндр B , т. е. нониус e , на 0° кружка C *опуская* указатель G с прежней его высоты вниз до края барабана, нуль цилиндра A пройдёт в противоположную сторону \rightarrow путь $\frac{\cos \varphi}{2}$, где под $\cos \varphi$ разумеется его абсолютная величина. Таким образом путь, пройденный нулём цилиндра A , будет равен $\frac{-\cos \varphi + \sin \varphi}{2}$, и этот путь пройден в направлении \rightarrow , если $\cos \varphi > \sin \varphi$. Не изменяя положения нуля на цилиндре A и не изменяя положения цилиндра B , поведём указатель G по параболе от точки L до z , соответствующего углу φ . Нуль цилиндра A опишет путь, равный

интегралу $\int_0^z \cos(v - \varphi) dz$ в сторону стрелки \leftarrow . Если в результате этих операций нуль цилиндра A вернётся в своё начальное положение, угол φ и соответственное z будут искомыми величинами, удовлетворяющими условию max. или min. выражения I .

В описанном интеграторе, имеющем интерес только теоретический, нижний цилиндр A может быть заменён линейкой, движущейся на колёсиках по рельсам, прикреплённым к кружку C . Перемещения нуля линейки будут давать интегралы A и B ; отыскание max. и min. величины I подчиняется тому же правилу, как и в случае двух цилиндров.



ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ¹⁾)

ПЕРВАЯ ФОРМУЛА

Известны две функции и их производные, посредством которых термодинамика стремится выразить величины, характеризующие состояние тел, и изменения этих величин.

Пусть для некоторого бесконечно малого изменения мы имеем, в механических единицах:

dQ — количество тепла, доставленное телу;

dw — работа, переданная телом во внешнюю среду;

dU — увеличение внутренней энергии;

S — энтропия;

p, v, T — давление, объём и абсолютная температура тела.

¹⁾ Статья была напечатана в Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou, 1894.

Приводимые функции $H = ST - U$ и $H' = ST - U - pv$ были впервые введены Massieu, см. Journal de Physique (1), 6, p. 216, 1877. Величины $-H$ и $-H'$ Дюгем назвал термодинамическими потенциалами при постоянном объёме и при постоянном давлении; см. Duhem, Le potentiel thermodynamique, Paris, 1886. Гельмгольц называет величину $-H$ свободной энергией, см. Ges. Abhandl., 2, p. 968, 1883. При помощи термодинамических потенциалов очень просто, посредством дифференцирования, получают выражения для энергии, энтропии, коэффициентов расширения и сжатия, теплоёмкости и т. д.

Работа Н. А. Умова имеет целью дать более общее выражение для термодинамического потенциала, частными случаями которого являются функции H и H' . (Прим. ред.)

Вышеупомянутые функции будут:

$$H = ST - U, \quad (1)$$

$$H' = ST - U - pv. \quad (2)$$

Независимые переменные, принятые обычно для первой функции, будут T и v , для второй — T и p . Само собой разумеется, что формулы, выведенные при помощи указанных функций, теряют силу при других предположениях относительно независимых переменных.

Функция H , если не считать знака, тождественна, с аналитической точки зрения, с функцией, введённой Гельмгольцем для выражения свободной энергии системы тел. Однако в различных задачах координаты p и v могут оказаться недостаточными для определения состояния тела; кроме того, эти количества, вообще говоря, аналитически отличны от количеств S и T . Поэтому лишь изыскание симметричной, в отношении значения членов, формулы может привести к более общему выражению для термодинамического потенциала.

В самом деле, до сих пор был введён интегрирующий множитель лишь для количества dQ :

$$dQ = T dS. \quad (3)$$

Однако у нас фигурирует ещё один неполный дифференциал; именно $d\omega$; в случае некоторых двух независимых переменных x и y мы вводим интегрирующий множитель $\frac{1}{\theta}$, полагая

$$d\omega = \theta dZ. \quad (4)$$

Множители T и θ будут некоторыми функциями от переменных x и y . Первый принцип механической теории тепла даёт:

$$0 = dU - T dS + \theta dZ. \quad (5)$$

Мы выбираем симметричную функцию

$$\Phi = U - TS + \theta Z. \quad (I)$$

Это и будет термодинамический потенциал.

В самом деле, напишем полный дифференциал от Φ ;

$$d\Phi = dU - TdS + \theta dZ - SdT + Zd\theta,$$

откуда, в силу уравнения (5),

$$d\Phi = -SdT + Zd\theta.$$

Однако $d\Phi$ — это полный дифференциал; следовательно, рассматривая T и θ как независимые переменные, будем иметь:

$$-S = \frac{\partial\Phi}{\partial T}, \quad Z = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}. \quad (\text{II})$$

Вставляя эти выражения в уравнение (I), получим соотношение, определяющее энергию U :

$$\Phi = U + T \frac{\partial\Phi}{\partial T} + \theta \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}. \quad (\text{III})$$

Потенциал $-H'$ (2) представляет частный случай от Φ при $dw = p dv$, откуда $\theta = p$ и $Z = v$.

Применение к задаче из области теории электричества. Пусть VdM — работа, совершённая внешними силами для увеличения заряда проводника, имеющего потенциал V , на количество положительного электричества dM . В этом случае $dw = VdM$, откуда, сравнивая с (4), $\theta = -V$ и $Z = M$.

Функция $U - TS$ представляет потенциальную энергию, соответствующую полностью превращённой работе; мы можем поэтому положить $U - TS = \frac{1}{2} VM$ (см. также формулу (27)).

Уравнение (I) даёт:

$$\Phi = \frac{1}{2} VM - VM = -\frac{1}{2} VM. \quad (6)$$

Пусть

$$M = 2cV, \quad (7)$$

где c — количество, независимое от V , но зависящее от T . Будем иметь:

$$\Phi = -cV^2. \quad (8)$$

Соотношение (III) принимает вид:

$$-cV^2 = U - T \frac{\partial c}{\partial T} V^2 - V \cdot 2Vc,$$

откуда

$$U = cV^2 + T \frac{\partial c}{\partial T} V^2. \quad (9)$$

В связи с рассматриваемой задачей мы обращаем внимание, что принцип свободной энергии Гельмгольца даёт тот же результат лишь при условии, если рассматривать количество электричества M в качестве независимой переменной, как это подчеркивает проф. П. А. Некрасов в своей работе¹⁾.

В этом случае мы пишем:

$$F = U - TS = \frac{1}{2} VM = \frac{M^2}{4c}.$$

Уравнение Гельмгольца

$$U = F - T \frac{\partial F}{\partial T} \quad (10)$$

сводится к уравнению:

$$U = \frac{M^2}{4c} + T \frac{M^2}{4c^2} \frac{\partial c}{\partial T} \quad (11)$$

— формула, тождественная с формулой (9).

Уравнение (III) предугадывает те переменные, которые следует употреблять. Каковы бы ни были независимые переменные x и y , уравнения $T = f(x, y)$ и $\theta = \psi(x, y)$ должны быть решены в отношении x и y , и последние должны быть внесены в выражение для Φ .

ВТОРАЯ ФОРМУЛА

Если соотношение (4) не годится для выражения совершённой телом работы, энергия U не может быть выражена посредством термодинамического потенциала и его производных.

¹⁾ П. А. Некрасов, Термодинамика и электричество, Москва, 1894, стр. 19.

Пусть

$$dw = P dx + R dy + L dz + \dots, \quad (12)$$

где x, y, z, \dots — это n независимых переменных. Некоторые из коэффициентов P, R, L могут отсутствовать в формуле. Образует выражение

$$F = U - TS. \quad (13)$$

Полный дифференциал будет:

$$dF = dU - T dS - S dT.$$

Но, согласно первому принципу термодинамики,

$$dU - T dS = -(P dx + R dy + L dz + \dots);$$

следовательно,

$$dF = -S dT - (P dx + R dy + L dz + \dots).$$

Иначе говоря,

$$dF = -\left(S \frac{\partial T}{\partial x} + P\right) dx - \left(S \frac{\partial T}{\partial y} + R\right) dy - \dots$$

Получаем таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -S \frac{\partial T}{\partial x} - P, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -S \frac{\partial T}{\partial y} - R, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Возьмём теперь в качестве независимых переменных температуру T и $n-1$ произвольных переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$; предположим, что все количества выражены в этой новой системе переменных. Помножим уравнения (14) на $\frac{\partial x}{\partial T}, \frac{\partial y}{\partial T}, \frac{\partial z}{\partial T}$ и так далее и сложим их:

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -S - \left(P \frac{\partial x}{\partial T} + R \frac{\partial y}{\partial T} + L \frac{\partial z}{\partial T} + \dots\right), \quad (15)$$

или символически

$$\frac{\partial F}{\partial T} = -S - \frac{(\partial w)}{\partial T}. \quad (16)$$

Вставляя в уравнение (13) значение $-S$, получим:

$$F = U + T \frac{\partial F}{\partial T} + T \frac{(\partial w)}{\partial T}. \quad (IV)$$

В частном случае, когда одна из переменных x, y, z, \dots , например y , есть не что иное, как T , уравнение (IV) принимает форму:

$$F = U + T \frac{\partial F}{\partial T} + TR. \quad (17)$$

Это соотношение мы находим в цитированной работе проф. П. Некрасова (стр. 21); оно было выведено В. Натансоном¹⁾.

Применим уравнение (IV) к рассмотренной выше проблеме из области теории электричества. Одна из переменных будет T ; так как выбор другой произволен, мы оставляем её неопределённой. Поскольку

$$F = cV^2, \quad dw = -2V(c dV + Vdc),$$

уравнение (IV) принимает вид:

$$cV^2 = U + T \left(\frac{\partial c}{\partial T} V^2 + 2V \frac{\partial V}{\partial T} c \right) - 2VT \left(c \frac{\partial V}{\partial T} + V \frac{\partial c}{\partial T} \right),$$

откуда, после приведения,

$$U = cV^2 + TV^2 \frac{\partial c}{\partial T}. \quad (18)$$

Эта формула тождественна с формулой (9). Беря в качестве второй независимой переменной M , получаем для члена $\frac{(\partial w)}{\partial T}$ нулевое значение, а для величины U — выражение (10).

ФОРМУЛА КЛАУЗИУСА²⁾

Клаузиус даёт соотношение, позволяющее вычислить внутреннюю энергию U в случае любых переменных; в частности, когда одна из этих переменных — это T , формула Клаузиуса совпадает с уравнением (17).

¹⁾ «О термодинамических потенциалах», *Zeits f. phys. Chemie*, Bd. X, 1892, p. 733, формулы (57) и (77).

²⁾ См. *Abhandlungen*, 1867. Abt. II, стр. 51 и сл. (*Прим. ред.*)

Обозначая независимые переменные через x и y , полагаем:

$$dw = P dx + R dy. \quad (19)$$

Выражаем:

$$dU = \left(T \frac{\partial S}{\partial x} - P \right) dx + \left(T \frac{\partial S}{\partial y} - R \right) dy,$$

$$dS = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + P \right) dx + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + R \right) dy.$$

Это — полные дифференциалы; приходим к следующей системе формул:

$$\left. \begin{aligned} E_{xy} &= \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y}, \\ E'_{xy} &= \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y}, \\ E_{xy} &= \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ TE_{xy} - E'_{xy} &= P \frac{\partial T}{\partial y} - R \frac{\partial T}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Возьмём в качестве независимой переменной T , полагая $T = y$. Будем тогда иметь:

$$E'_{xy} = T \left(\frac{\partial P}{\partial T} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) - P, \quad (21)$$

$$U = \int E'_{xT} dx + \psi(T), \quad (22)$$

$$S = \int E_{xT} dx + f(T). \quad (23)$$

Выражения для S и U и последняя из формул (20) дают нам функцию

$$F = U - TS = - \int P dx + \psi(T). \quad (24)$$

Вставляя значение E'_{xy} из уравнения (21) и F из уравнения (24) в уравнение (22) и объединяя произвольные

функции от T под знаком функции U , получаем:

$$U = T \frac{\partial}{\partial T} \left(\int P dx \right) - \int P dx - RT, \quad (25)$$

$$U = F - T \frac{\partial F}{\partial T} - RT. \quad (26)$$

Последняя формула тождественна с формулой (17).

Обращаясь к нашей задаче из области теории электричества, получаем, поскольку c — это функция лишь T :

$$dw = -2V \left[c \frac{\partial w}{\partial x} dx + \left(c \frac{\partial V}{\partial T} + V \frac{\partial c}{\partial T} \right) dT \right];$$

следовательно,

$$F = - \int P dx = 2 \int V c \frac{\partial V}{\partial x} dx = cV^2, \quad (27)$$

и мы приходим к уже полученному выше результату.

Таким образом, уравнение (22) Клаузиуса представляет более общее соотношение, нежели то, которое было найдено много лет спустя многими другими почтенными авторами.

Цитированная выше статья В. Натансона представляет в ряде отношений не что иное, как обобщение анализа Клаузиуса.



ЕДИНООБРАЗНЫЙ ВЫВОД ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, СОВМЕСТНЫХ С ПРИНЦИПОМ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ¹⁾

1. Общее замечание. Преобразование, составляющее главный предмет теории относительности, это — преобразование Г. А. Лорентца. Вывод его основывается на некоторой совокупности допущений и рассуждений, которые не вытекают сами собой из одного единственного положения, но, как кажется, связаны между собой остроумием исследователя. По сравнению с простотой преобразования вывод его представляется слишком громоздким. Кроме того, этот вывод не даёт никаких опорных пунктов для обсуждения положения, занимаемого лорентцовым преобразованием в ряду других возможных преобразований, и не показывает путей, которые могли бы повести к новым преобразованиям. Обычно употребляемые рассуждения пригодны скорее для разъяснения лорентцова преобразования, чем для вывода его.

Эти мысли побудили меня выработать единообразный метод, который, исходя лишь из одного положения, приводит к общему описанию преобразований, совместных с принципом относительности.

2. Определение и задача. Вообразим себе в пространстве два мира, находящихся в каком-нибудь кинематическом отношении друг к другу.

¹⁾ Статья впервые была напечатана в *Phys. Zeits.*, 1910. (Прим. ред.)

а) Миров называются *эквивалентными*, если явления одного и того же рода следуют в обоих одним и тем же законам.

б) Две точки этих миров, в которых рассматриваемое явление происходит одинаковым образом, называются *соответственными*.

с) Задача состоит в разыскании уравнений, связывающих переменные пространства и времени соответственных точек.

Чтобы решить поставленную нами себе задачу, мы должны выбрать то явление природы, которое будет основным при нашем исследовании. Из всех явлений природы мы выберем, ввиду его всеобщности, волнообразное движение.

Пусть переменные пространства и времени, определяющие однозначным образом некоторую точку, будут для первого мира x, y, z, t , для второго — x', y', z', t' .

Мы примем, что x, y, z представляют прямоугольные пространственные координаты, что же касается x', y', z' , то относительно их я не делаю наперёд никакого соглашения.

Рассматриваемое явление характеризуется некоторой функцией ψ , которая, выраженная в первый раз в x, y, z, t , во второй раз — в x', y', z', t' , в двух физически изотропных и эквивалентных мирах должна удовлетворять одним и тем же по форме дифференциальным уравнениям 2-го порядка с частными производными:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \\ \frac{1}{\omega'^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2}. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Коэффициент ω означает постоянную скорость распространения волн в обоих мирах.

Эта скорость не должна непременно равняться скорости света. Задачу относительности можно поставить для различных явлений. Например, мы можем вообразить себе в покоящемся весомере теле, частицы которого

находятся в колебании, некоторую движущуюся систему отсчёта вместе с наблюдателем и можем поставить вопрос об отношениях, существующих между координатами пространства и времени соответственных точек обоих этих миров.

Изложенные здесь понятия представляют единственную основу нижеследующей теории; дальнейшие рассуждения сводятся лишь к производству математических выкладок.

3. Решение задачи. Назовем через u одну из переменных пространства и времени первого мира, и вообразим себе, что функция ψ выражена в переменных второго мира. Мы имеем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial u}.$$

По этому образцу мы образуем и вторые производные $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}$. Подобный вывод при $u = t$ составляет первую часть следующего выражения, получающегося путём подстановки вторых производных по t, x, y, z в первое из уравнений (I). В этом выражении я пользуюсь двумя знаками суммы:

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{\partial_1}{\partial x} \right)^2 &= \left(\frac{\partial_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial_1}{\partial z} \right)^2, \\ \sum \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

и также знаком

$$\Delta_1 = \frac{\partial_1^2}{\partial x^2} + \frac{\partial_1^2}{\partial y^2} + \frac{\partial_1^2}{\partial z^2}.$$

Мы получаем:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} \left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} \left(\frac{\partial y'}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2} \left(\frac{\partial z'}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial \psi}{\partial x'} \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y'} \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z'} \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi}{\partial t'} \frac{\partial^2 t'}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x' \partial y'} \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial y'}{\partial t} + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x' \partial z'} \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial z'}{\partial t} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z' \partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial z'}{\partial t} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x' \partial t'} \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial t} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y' \partial t'} \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial t} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z' \partial t'} \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial t} = \omega^2 \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} \int \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
 &+ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y'^2} \int \left(\frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2} \int \left(\frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} \int \left(\frac{\partial t'}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial x'} \Delta x' + \\
 &+ \frac{\partial \psi}{\partial y'} \Delta y' + \frac{\partial \psi}{\partial z'} \Delta z' + \frac{\partial \psi}{\partial t'} \Delta t' + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x' \partial y'} \sum \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial x} + \\
 &+ 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x' \partial z'} \sum \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z' \partial y'} \sum \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial x} + \\
 &+ 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x' \partial t'} \sum \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x} + \\
 &\left. + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y' \partial t'} \sum \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z' \partial t'} \sum \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x} \right\}.
 \end{aligned}$$

Это уравнение должно быть тождественно со вторым из уравнений (I). Поэтому в нём должны остаться лишь производные 2-го порядка формы $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}$, и коэффициенты их должны удовлетворять известным условиям. Коэффициенты производных формы $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ и $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}$ должны равняться 0. Таким путём мы получим следующие дифференциальные уравнения преобразования:

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \int \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right)^2 &= \omega^2 \int \left(\frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial y'}{\partial t} \right)^2 = \\
 = \omega^2 \int \left(\frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z'}{\partial t} \right)^2 &= \omega^2 \left[\left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 - \omega^2 \int \left(\frac{\partial t'}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (II)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta x', & \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta y', \\
 \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta z', & \frac{\partial^2 t'}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta t'.
 \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial y'}{\partial t} &= \sum \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial x}, \\
 \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial z'}{\partial t} &= \sum \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial x}, \\
 \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial z'}{\partial t} &= \sum \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial x}.
 \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial t} &= \sum \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x}, \\ \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial y'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial t} &= \sum \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x}, \\ \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial t} &= \sum \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Интегралы этой системы дифференциальных уравнений представляют описание преобразований, совместимых с принципом относительности. Можно также рассматривать x', y', z', t' как функции промежуточных координат x_1, y_1, z_1 , описывающих данное относительное движение обоих миров, и ввести соответственно с этим в приведённые выше условия производные $\frac{\partial x'}{\partial x_1}$ и так далее, $\frac{\partial x_1}{\partial x}$ и т. д.

4. Ограничения. Лорентцово преобразование. Мы могли бы получить лорентцово преобразование из общих уравнений (II) — (V), введя промежуточные координаты.

Но мы воспользуемся другим методом. Простейшее преобразование соответствует тому случаю, когда лишь одна пространственная координата x' зависит от времени t' , и временная координата t' зависит лишь от одной пространственной координаты x .

Положим, что

$$\frac{\partial y'}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial z'}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial t'}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Мы должны, кроме того, ввести условия, определяющие взаимные отношения переменных x', y', z', t' и x, y, z, t . Пусть отношения эти даются указанием, что вообще

$$\frac{\partial x'}{\partial x}, \quad \frac{\partial y'}{\partial y}, \quad \frac{\partial z'}{\partial z}, \quad \frac{\partial t'}{\partial t} \quad (2)$$

отличны от нуля. Мы имеем тогда из уравнений (V):

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x}, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Так как $\frac{\partial t'}{\partial x}$ отлично от нуля, то мы получаем:

$$\frac{\partial y'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Уравнения (4) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial x'}{\partial z} \frac{\partial y'}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial z} \frac{\partial z'}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial x'}{\partial z} \frac{\partial z'}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Исключения $\frac{\partial y'}{\partial y}$ и $\frac{\partial z'}{\partial z}$, которые, согласно (2), отличны от нуля, приводят к соотношению:

$$\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial y'}{\partial z} \frac{\partial z'}{\partial y} = 0. \quad (6)$$

Это уравнение может быть удовлетворено трояким образом. Для конечного результата безразлично, какой из трёх множителей уравнения (6) мы приравняем нулю. Если мы примем $\frac{\partial y'}{\partial z} = 0$, то мы получим из (5), ввиду условий (2), ещё новые условия. Все вместе могут быть выражены следующим образом:

$$\frac{\partial y'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial x'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

Мы, следовательно, приходим к заключению, что $x' = f_1(t, x)$, $y' = f_2(y)$, $z' = f_3(z)$, $t' = f_4(t, x)$, (8)

где f есть знак некоторой функции.

Уравнения (II) и (III) принимают теперь вид:

$$\begin{aligned} \omega^2 \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right)^2 &= \omega^2 \left(\frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 = \omega^2 \left(\frac{\partial z'}{\partial z} \right)^2 = \\ &= \omega^2 \left[\left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 - \omega^2 \left(\frac{\partial t'}{\partial x} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 t'}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 t'}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 y'}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial z^2} = 0. \quad (10)$$

Допустим, что при $y = 0$, $z = 0$ и $y' = 0$, $z' = 0$; оба последних уравнения (10) и среднее из уравнений (9) дадут:

$$y' = \beta y, \quad z' = \beta z, \quad (\text{VI})$$

где β есть некоторая постоянная.

Уравнения (9) дают тогда:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right)^2 &= \omega^2 \beta^2, \\ \left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 - \omega^2 \left(\frac{\partial t'}{\partial x} \right)^2 &= \beta^2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Дифференцируя первое из этих уравнений сперва по x , затем по t и принимая во внимание первое из уравнений (10), мы получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} - \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial^2 x'}{\partial t \partial x} &= 0, \\ \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial^2 x'}{\partial x \partial t} - \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Помножим последнее из этих уравнений на $\frac{\partial x'}{\partial t}$, а первое — на $\frac{\partial x'}{\partial x}$ и сложим. Мы получим:

$$\left[\omega^2 \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial x'}{\partial t} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} = 0. \quad (13)$$

Так как первый множитель по (11) не равен нулю, то, принимая во внимание первые из уравнений (10) и (12), мы получим:

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x'}{\partial t \partial x} = 0. \quad (14)$$

Рассматривая аналогичным образом второе из уравнений (11), мы получим:

$$\frac{\partial^2 t'}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 t'}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 t'}{\partial t \partial x} = 0. \quad (15)$$

Интегрируя уравнения (14) и (15) при допущении, что если $t = 0$, $x = 0$ и $t' = 0$, $x' = 0$, мы получим:

$$x' = \alpha(x - vt), \quad t' = \alpha_1 t + \alpha_2 x, \quad (16)$$

где x , v , α_1 , α_2 представляют постоянные. Введя эти значения в первое из уравнений (3), мы получим:

$$\alpha_2 = -\frac{1}{\omega^2} \alpha_1 v. \quad (17)$$

Введя их в уравнение (11), мы получим:

$$\alpha_2 (\omega^2 - v^2) = \omega^2 \beta^2 = \alpha_1^2 (\omega^2 - v^2), \quad (18)$$

откуда имеем:

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}. \quad (VII)$$

Мы получаем, следовательно, лорентцово преобразование:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha(x - vt), & y' &= \beta y, & z' &= \beta z; \\ t' &= \alpha \left(t - \frac{v}{\omega^2} x \right), & \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (L)$$

$x_1 = x - dt$ представляет промежуточную координату.

5. Замечания. В то время как x , y , z означают прямоугольные и прямолинейные координаты, x' , y' , z' могут вообще оказаться криволинейными. Существо, которое бы жило в подобном мире и которое ввиду ограниченности своих ощущений могло бы измерять лишь бесконечно малые отрезки, считало бы подобные координаты прямолинейными.



УСЛОВИЯ ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЯ ВОЛНЫ

В предыдущей статье я установил общие отношения между двумя системами пространственно-временных переменных x, y, z, t и x', y', z', t' , обуславливающие инвариантность уравнения волны при преобразовании одной системы в другую. Отношения эти допускают весьма простое истолкование, которое мы и изложим здесь.

Обозначим через ω постоянную скорость распространения волны и введём вместо переменных времени t и t' новые переменные τ и t'' , которые связаны с первыми следующими отношениями:

$$\tau = i\omega t, \quad (1)$$

$$\omega t' = it'', \quad (2)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Оставим за символом Δ прежнее значение оператора Лапласа по переменным системы без значков и введём символ h_j^2 для суммы квадратов первых производных какой-нибудь переменной величины системы со значками по переменным системы без значков. В таком случае уравнения преобразования (II) — (V) предыдущей статьи принимают следующий вид:

$$h_1^2 = h_2^2 = h_3^2 = h_4^2, \quad (I)$$

$$\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = \Delta t'' = 0, \quad (II)$$

и шесть уравнений вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0, \quad (\text{III})$$

где u, v обозначают две каких-нибудь из переменных x', y', z', t'' .

Чтобы понять простым образом эти формулы, мы ограничимся обычным случаем трёх измерений. Для этого мы положим $z = z'$ и получим:

$$h_1^2 = h_2^2 = h_4^2 = 1, \quad (3)$$

$$\Delta x' = \Delta y' = \Delta t'' = 0, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial x'}{\partial \tau} \frac{\partial y'}{\partial \tau} &= 0, \\ \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial t''}{\partial x} + \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial t''}{\partial y} + \frac{\partial x'}{\partial \tau} \frac{\partial t''}{\partial \tau} &= 0, \\ \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial t''}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial t''}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial \tau} \frac{\partial t''}{\partial \tau} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) представляют не что иное, как уравнения преобразования прямоугольной системы координат x, y, τ в криволинейную, ортогональную и трёхкратно изотермическую систему, так называемые термометрические параметры которой (по Ламе) представлены переменными x', y', t'' .

Известно, что в случае криволинейной системы координат имеют место уравнения следующего вида:

$$\Delta x' = h_1 h_2 h_4 \frac{\partial h_1}{\partial x'} \text{ и т. д.}$$

Мы видим, что ввиду условий (3) уравнения (4) удовлетворяются тождественным образом.

Но вопрос можно рассмотреть и с другой точки зрения. x', y', t'' представляют потенциалы трёх распределений масс, действующих по закону Кулона, поверхности равного потенциала которых пересекаются под прямым углом и из которых каждое даёт силовое поле одной и той же постоянной интенсивности.

Задача имеет одно единственное решение: x', y', t'' суть потенциалы трёх неограниченных, перпендикуляр-

ных друг к другу плоскостей, покрытых массами постоянной плотности. Это решение есть лорентц-эйнштейново преобразование.

Обозначим через μ , ν , γ некоторые постоянные и получим:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \mu_1 x + \nu_1 y + \gamma_1 \tau, \\ y' &= \mu_2 x + \nu_2 y + \gamma_2 \tau, \\ t'' &= \mu_3 x + \nu_3 y + \gamma_3 \tau. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Формулы (3) и (5) дают:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1^2 + \nu_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \quad (3 \text{ уравнения}), \\ \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0 \quad (3 \text{ уравнения}). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Но мы можем положить:

$$\nu_1 = 0, \quad \mu_2 = \gamma_2 = 0, \quad \nu_2 = 1.$$

В таком случае условия (7) дают:

$$\nu_3 = 0, \quad \mu_3 = \gamma_1, \quad \mu_1 = -\gamma_3 = \sqrt{1 - \gamma_1^2}.$$

Если мы положим

$$\frac{\gamma_1 \omega i}{\sqrt{1 - \gamma_1^2}} = -v,$$

откуда

$$1 - \gamma_1^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{\omega^2}},$$

и примем во внимание (1) и (2), то мы получим уравнения:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \\ t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}} \left(t - \frac{v}{\omega^2} x \right), \end{aligned}$$



ВОЗМОЖНЫЙ СМЫСЛ ТЕОРИИ КВАНТ¹⁾

1

Неудачи, постигшие попытки вывести законы излучения и удельных теплот, исходя из максвеллова распределения энергии в системе молекул или осцилляторов, привели, как известно, Планка к его гипотезе квант. Но причина этих неудач осталась невыясненной, и, пока не воспоследует соответственное объяснение, нельзя считать гипотезу квант единственной разрешающей задачу. Важность вопроса побуждает меня высказать здесь ту точку зрения, которая может как объяснить бесплодность прежних попыток, так и указать тот путь, который приводит к принятым в настоящее время наукой законам, исходя и в тесной, не формальной, связи с максвелловым распределением энергии и минуя гипотезу излучения порциями или квантами.

В основной формуле удельной теплоты при постоянном объёме

$$c_v = \frac{\partial U}{\partial T}, \quad (1)$$

где T есть абсолютная температура, величина U представляет энергию неупорядоченных движений, существующих в системе. Эта величина U является определяющей и самый закон излучения.

¹⁾ Статья была напечатана в «Вестнике опытной физики и элементарной математики», 1913 г. (Прим. ред.)

Вся задача сводится к нахождению вида этой функции U . Кинетическая теория, исходя из закона распределения энергии по Максвеллу, даёт для вычисления атомных или молекулярных теплот выражение

$$U = \frac{q}{2} RT, \quad (2)$$

где q есть число степеней свободы и R — газовая постоянная. Пользуясь этим выражением, мы получаем законы, не согласные с опытом. Планк даёт другое выражение для U , приводящее к законам, согласным с опытом, и так как остаётся невыясненной причина негодности формулы (2), то для энергии неупорядоченных движений системы всё-таки остаются два не согласуемые между собой вида.

Противоречия исчезнут, если мы будем искать определения не абсолютного, а относительного неупорядоченного движения.

Когда система нагревается, она получает тепло от некоторого физического агента; когда она излучает, тот же агент уносит её теплоту. Всё дело заключается в том, какие движения системы будут по отношению к этому агенту иметь значение неупорядоченных и упорядоченных? Разграничение таких движений, зависящее от соотношения между свойствами агента и свойствами материи, не должно и не может совпадать с тем, которое производится нашим разумом на основании установленных им категорий движений. Становясь на такую точку зрения, гипотеза квант получает совершенно иной смысл, и в основу рассуждений может быть положено максвеллово распределение энергии.

Отношение агента к упорядоченным движениям электрических индивидов, составляющих матерью, является вполне определённым уравнениями электромагнитного поля. Но его отношение к неупорядоченным движениям этих индивидов ещё не установлено.

А priori очевидно, что неупорядоченные движения системы не должны обязательно действовать на агента, её проникающего, как таковые, во всей своей совокуп-

ности. В зависимости от свойств и связей агента действие на него неупорядоченных движений в общем случае разложится на две части: неупорядоченную (n) и упорядоченную (y).

Таким образом, энергия e молекулы или осциллятора системы по отношению к агенту представится суммой двух членов:

$$e = n + y. \quad (3)$$

Упорядоченная часть, по самому своему смыслу, должна быть одинаковой для всех молекул и представляться непрерывной функцией температуры. Неупорядоченная же часть n будет меняться от одной молекулы к другой и вместе со временем для одной и той же молекулы.

Для всей энергии системы мы получим выражение:

$$E = \sum n + Ny, \quad (4)$$

где N есть число молекул. По смыслу энергии U в выражении (1), как энергии неупорядоченных движений, применяя третью аксиому Ньютона к взаимодействию системы и агента, мы имеем:

$$U = \sum n. \quad (5)$$

Свойства агента будем представлять некоторой моделью, именно свойствами некоторого манометра. Неудачи попыток кинематической теории объясняются, как увидим далее, тем, что в их основе лежит отождествление агента с самым грубым манометром, определяющим давление газа, неспособного воспринимать импульсы отдельных групп молекул, а только всей их совокупности, определяемой пределами энергий 0 и ∞ . Для такого манометра, как будет показано, $\sum n = 0$, и в формулу (1) вместо U вставлялась энергия неупорядоченных движений, а упорядоченных.

Другим крайним типом манометра, обладающим крайней чувствительностью, является демон Максвелла, способный воспринимать импульсы отдельных молекул. Для него $y = 0$ и $e = n$.

Между этими крайними типами могут быть вставлены манометры, чувствительность которых определяется способностью воспринимать группы импульсов, энергии которых лежат между пределами: произвольным E и другим $E + \varepsilon$, где величину ε мы будем считать пока определяемой природой манометра и дробь $\frac{1}{\varepsilon}$ — мерой его чувствительности. Для обыкновенного манометра $\varepsilon = \infty$ и чувствительность равна 0; для демона Максвелла $\varepsilon = 0$ и чувствительность бесконечно велика. Я займусь выяснением свойств манометров общего типа.

2

Выкладки, приводимые ниже, не заключают в себе ничего нового: они имеются в статьях Нернста, Зоммерфельда, Планка, Эйнштейна и др. Но они скомбинированы в ином освещении, решающем вопрос методом, отличной от той, которая установлена гипотезой квант.

Ограничимся рассмотрением грамм-молекулы, индивиду которой обладают двумя степенями свободы. Распределение энергий пусть следует закону Максвелла. Мы имеем:

$$\frac{dN}{N} = Ae^{-\frac{E}{kT}} dE, \quad AkT = 1. \quad (6)$$

Здесь dN есть число индивидов, обладающих энергией в пределах между E и $E + dE$, $k = \frac{R}{N}$, N есть число Авогадро. Предполагаем, что манометр способен воспринимать и подсчитывать импульсы групп индивидов, определяемых пределами несомых ими энергий E и $E + \varepsilon$, где ε есть постоянная. Обозначим через N_i число индивидов, энергия которых лежит между пределами E_i и $E_i + \varepsilon$.

Мы имеем:

$$N_i = AN \int_{E_i}^{E_i + \varepsilon} e^{-\frac{E}{kT}} dE = Ne^{-\frac{E_i}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right). \quad (7)$$

Средняя энергия в этой группе будет:

$$\bar{e}_i = \frac{1}{N_i} \int_{E_i}^{E_i + \varepsilon} E dN = E_i + kT - \frac{\varepsilon}{e^{kT} - 1}. \quad (8)$$

Таким образом, наш манометр выделит из неупорядоченных движений системы неупорядоченную часть E_i , меняющуюся с временем и от одной молекулы к другой, и упорядоченную, остающуюся одинаковой для всех молекул. Обозначая последнюю через ρ , мы получим очевидное неравенство:

$$y = \rho = kT - \frac{\varepsilon}{e^{kT} - 1} < \varepsilon. \quad (9)$$

Эту величину можно представить ещё в таком виде:

$$y = \rho = kT - \frac{kT}{1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{kT} + \frac{1}{6} \left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 + \dots}. \quad (I)$$

Найдем ещё для всей системы энергию относительных неупорядоченных движений, т. е.

$$U = \sum N_i E_i. \quad (10)$$

Мы имеем:

$$\int_0^{\infty} E dN = \sum N_i E_i + N\rho. \quad (11)$$

Отсюда по равенствам (6) и (9), обозначая через \bar{U} среднюю энергию относительных неупорядоченных движений, найдём:

$$kT = \bar{U} + kT - \frac{\varepsilon}{e^{kT} - 1}, \quad (12)$$

откуда

$$\bar{U} = \frac{\varepsilon}{e^{kT} - 1}, \quad \text{или} \quad \bar{U} = \frac{kT}{1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{kT} + \frac{1}{6} \left(\frac{\varepsilon}{kT}\right)^2 + \dots}. \quad (II)$$

Это есть формула Планка. Искомое

$$U = N\bar{U}. \quad (13)$$

Величина ε определяется гипотезой Планка:

$$\varepsilon = h\nu, \quad (III)$$

где h есть известная универсальная постоянная, а ν есть число естественных колебаний молекулы в секунду.

Рассмотрим наши выражения подробнее. Для манометра первого типа, свойства которого отождествлялись в существующих работах со свойствами агента, мы имеем $\varepsilon = \infty$ и, согласно равенствам (I), (II), (III),

$$y = \rho = kT, \quad \bar{U} = 0 \quad \text{и} \quad U = 0, \quad \nu = \infty.$$

Для другого крайнего типа, демона Максвелла, $\varepsilon = 0$ и

$$y = \rho = 0, \quad \bar{U} = kT \quad \text{и} \quad U = NkT, \quad \nu = 0.$$

Этот тип соответствует бесконечно длинным волнам, и только для них имеет смысл подстановка величины NkT , равной RT , в формулу (4).

При абсолютном нуле мы имеем:

$$T = 0, \quad y = \rho = 0, \quad \bar{U} = U = 0.$$

Для всех промежуточных значений ε , лежащих между 0 и ∞ , величины y и U определяются формулами (I), (II), (III), и для q степеней свободы

$$U = \frac{q}{2} N\bar{U}.$$

Для твёрдого тела при $q = 6$ получаем формулу Планка:

$$U = 3R \frac{\frac{h\nu}{k}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

Таким образом, теория квант и излучения порциями, замена максвелловского распределения энергий планковским устраняются следующей гипотезой:

Эфир обладает различной степенью чувствительности по отношению к неупорядоченным движениям материальных систем.

Эта чувствительность зависит от числа естественных колебаний молекул системы и представляется величиной $\frac{1}{h\nu}$, где h есть постоянная, зависящая от свойства эфира и потому универсальная, а ν есть число естественных колебаний молекулы системы.

Универсальность постоянной h получает естественное объяснение.

Москва.
Декабрь 1913г.



Н.А.УМОВ

Очерк редактора



Примечания редактора

НИКОЛАЙ АЛЕКСЕЕВИЧ УМОВ¹⁾ 1846 — 1915

Н. А. Умов — один из тех деятелей науки, которые гармонично сочетают в себе богатство научных идей и бескорыстное, преданное служение своему отечеству. Память о таких учёных остаётся навеки в летописях народа.

Московский университет может гордиться тем, что Н. А. Умов принадлежит также к длинной веренице его талантливых профессоров, прославившихся размером положенного труда, ценностью посеянных идей и оставшихся всю жизнь чистыми в своих душевных побуждениях. А. Г. Столетов, П. Н. Лебедев, Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин — вот корифеи, которые своими трудами в области физико-математических наук прославили на весь мир Московский университет. К ним принадлежит и бессмертное имя первого русского физика-теоретика Н. А. Умова.

Н. А. Умов представлял собой тот тип теоретика, который мог не только математически оформлять физические идеи, но и был способен чувствовать факт; умел ставить тонкие физические опыты, умел питать и сдерживать свою научную фантазию фактами природы.

Он был далёк от абстрактных, формальных теоретических построений. Он любил опыты и к ним постоянно возвращался в своей научной деятельности.

¹⁾ Очерк написан А. С. Предводителевым.

В опыте, произведённом даже в грубой и примитивной обстановке, он искал вдохновения и пищи для размышлений. Н. А. Умов жил и работал в такую эпоху царской России, когда трудно было иметь хорошо оснащённую лабораторию. До конца своей жизни он так и не имел такой лаборатории.

Царское правительство смотрело во все глаза на Запад и не считало возможным, что среди русского народа найдутся деятели науки, способные соревноваться с учёными Запада. О строительстве физических институтов и лабораторий не помышлялось. Господствовала отвратительная тенденция — ввозить все из-за границы, даже науку. Вся экономика и хозяйство страны строились на рабском труде русского мужика. Немудрено поэтому, что отечественные таланты жили в тяжёлых условиях, не признавались и на долгие годы забывались на своей родине.

Об Н. А. Умове знали и знают гораздо меньше, чем он заслужил. Характерным является следующий факт. В широко известном многотомном курсе физики проф. О. Д. Хвольсона, где приняты во внимание работы даже третьестепенных иностранных учёных, имя Н. А. Умова отсутствует. Автор курса совершенно не сделал никаких указаний на основные результаты, добытые исследованиями нашего замечательного соотечественника. Передовые идеи Н. А. Умова, опередившие зарубежную науку, не могли быть восприняты и не были восприняты в силу рабского преклонения перед культурой Запада.

Вторая половина 19-го века ознаменовалась крупнейшими открытиями. Р. Майер и Гельмгольц закрепили закон сохранения энергии, задолго до этого предвосхищенный гениальным русским учёным М. В. Ломоносовым. Фарадей и Максвелл заложили основы учения об электромагнитном поле, нашедшего впоследствии блестящее подтверждение в искусных экспериментах П. Н. Лебедева и А. А. Эйнвальда и впервые получившего своё практическое применение в трудах А. С. Попова.

Именно в эту эпоху Н. А. Умов выступил на арену как глашатай новых идей. Он провозгласил новые понятия о движении энергии и её плотности. Он установил замечательный по своей плодотворности закон, согласно которому поток энергии и её плотность связаны единым уравнением. Этот закон почти сейчас же после опубликования обратил на себя внимание зарубежных учёных. И вскоре его идеи были подхвачены и развиты в применении к электромагнитному полю.

Честь открытия Н. А. Умова как учёного и определения истинного места его в истории развития науки принадлежит Советскому Союзу, где наука поставлена в столь благоприятное положение.

Н. А. Умов по складу своего мышления был учёным, любившим широкие обобщения, но при этом он не отрывался от действительности. Уже в своих первых теоретических работах он обнаружил необычайную силу этого качества своего ума.

В работе, посвящённой термомеханическим явлениям, Н. А. Умов впервые осмелился ввести в науку весьма плодотворное понятие — понятие тепловых напряжений.

Это позволило ему объединить теории упругости и теплопроводности, основанные на различных принципах, в одну теорию, покоящуюся на едином принципе — законе сохранения энергии.

Указанное исследование столь богато содержанием, что может повести и современных учёных по пути новых изысканий. Почти без особых дополнений основные положения этого исследования могут быть перенесены в гидродинамику неизотермических течений. Проблема анализа неизотермических течений с точки зрения единого уравнения, включающего и явления теплопроводности, стоит ещё на очереди.

Указанные качества Н. А. Умова как первоклассного теоретика с особой силой сказались в двух других гениальных его работах, посвящённых геомагнетизму.

На протяжении долгих лет учёные не могли раскрыть физического содержания в рядах Гаусса, к кото-

рым пришёл германский математик, разлагая по сферическим функциям элементы земного магнетизма. Впрочем, и сам Гаусс, повидимому, был далёк от физической интерпретации своих рядов. Быть может, именно он побудил всех последующих исследователей рассматривать эти ряды как интерполяционные формулы.

Только Н. А. Умову, обладавшему помимо физического чутья ещё изумительным геометрическим чутьем, удалось раскрыть истинный смысл разложений Гаусса. Эти работы ещё ждут своего продолжателя.

Все перечисленные теоретические произведения Н. А. Умова занимают почётное место среди других принципиальных исследований, составляющих целые разделы физики. Почему же ни одно из этих произведений не развивалось им самим последовательно в течение многих лет, а появлялось, как метеор на чёрном небе ночи? По нашему мнению, причина лежит в свойствах характера Н. А. Умова.

Если бы его выдающиеся исследования находили сразу отклик, а не сопротивление или глухое молчание, то, надо думать, он нашёл бы в себе силы для их развития. Не обладая достаточной настойчивостью, Н. А. Умов не вёл борьбу за развитие каждой своей идеи. Поэтому его внутренняя экспансия находила выход в разнообразии научных тем и в бурном проявлении его философских и общественных устремлений.

Н. А. Умов—большой общественник, педагог и философ.

В 1897 г., после кончины президента Московского общества испытателей природы Ф. А. Слудского, Н. А. Умов единодушно избирается президентом этого общества. Неизменные перевыборы, по истечении положенных трёх лет, длились до самой его смерти.

На годовых и очередных заседаниях Общества испытателей природы Н. А. Умов прочёл ряд речей и докладов; например: «Памяти Гельмгольца», «О жидком воздухе», «Материя по современным физическим учениям» и другие. Все речи и доклады Н. А. Умова отличались большой художественностью по форме и

богатством содержания. Каждый раз они встречались аудиторией с большим подъёмом.

Но особенно большой интерес со стороны московских натуралистов вызвало его сообщение «Приложение математики к теории эволюции и к определению растительных форм». Это сообщение относилось к 1898 году. В нём Н. А. Умов излагал, с одной стороны, некоторые методы исследования биологических явлений, данные Гальтоном и Пирсоном; с другой стороны, остановился на возможности применения гармонического анализа к определению форм листьев растений.

В конце 19-го века в русском обществе усиленно началось обсуждение недостатков среднего школьного образования и необходимости реформы. Голос общественности прозвучал столь громко, что министерство просвещения вынуждено было создать при Московском учебном округе Комиссию по вопросу о мерах к лучшей постановке преподавания в мужских гимназиях. Подкомиссия по физике возглавлялась Н. А. Умовым. Результатом работы этой подкомиссии явилось: мнение о подготовке преподавателей физики для мужских гимназий; мнение об общей постановке преподавания физики в кругу других наук; проект программы физики для классических гимназий; список обязательных физических демонстраций; объяснительная записка к программе преподавания физики; список необходимых приборов. Значительная доля этих «мнений» принадлежит перу Н. А. Умова.

Его влияние на учебное дело в средней школе сказалось и в другом направлении. В 1898 г. при Московском университете группой учредителей, среди которых значился и Н. А. Умов, было организовано Педагогическое общество. В этом обществе Н. А. Умов состоял товарищем председателя, выполняя одновременно обязанности председателя отделения физико-математических наук. Когда в 1902 г. председатель общества проф. П. Г. Виноградов выехал в Англию, Н. А. Умов был избран вместо него председателем общества.

Н. А. Умов особенно много потрудился для Педагогического общества в 1899 г. В это время был созван съезд преподавателей физико-химических наук. Н. А. Умов выступал на нём с докладами, принимал деятельное участие в дискуссиях по вопросам преподавания; устроил выставку книг научного содержания из личной библиотеки; организовал в университете вместе со своим ассистентом И. Ф. Усагиным выставку физических приборов, причём оформил её так, что каждый посещавший её имел возможность сам производить опыты и демонстрировать законы природы. При этом Н. А. Умов не щадил ни времени, ни труда при объяснении коллекции выставленных демонстрационных приборов (см. автобиографию).

В конце 1901 г. в Петербурге состоялся XI съезд русских естествоиспытателей и врачей. На первом общем собрании Н. А. Умов прочёл блестящую речь на тему «Физико-механическая модель живой материи». Эта речь вызвала живой отклик среди тогдашней интеллигенции; по поводу неё спорили и печатали статьи в газетах.

Н. А. Умов обрушился на виталистические учения; он указывал, что эти учения ставят предел дальнейшему мышлению о процессах в организованной материи; он находил, что необходимый признак живой материи есть стройность, т. е. такое качество, которое и для мёртвой материи является не невозможным, а лишь маловероятным.

В 1902 г. Н. А. Умов стал во главе новой культурной организации. Приват-доцент Московского университета Г. К. Рахманов предоставил свои средства для издания научно-популярного журнала, получившего название «Научное слово». Редактором этого журнала сделался Н. А. Умов. Постоянными сотрудниками его были Ключевский, Сергей Трубецкой, Сеченов и Мечников. Сам Н. А. Умов в этом журнале напечатал ряд статей выдающегося мастерства: «Значение опытных наук», «Недоразумения в понимании природы», «12 января 1905 года», «Эволюция атома», «Из истории союза науки и техники» и др.

Однако этот замечательный журнал просуществовал всего три года. Он не добился успеха в публике и закрылся, принеся большие убытки его зачинателям.

В 1909 г. мы видим Н. А. Умова деятельным помощником одного из замечательных людей русского народа. Х. С. Леденцов пожертвовал два миллиона рублей на организацию Общества содействия успехам опытных наук и их практических применений. Впоследствии это общество получило имя своего основателя. Н. А. Умов выдвинул мысль: объединить в этом обществе представителей естественных наук, техники и широких кругов общества и поставить общество под покровительство двух старейших и обширнейших научно-учебных учреждений—Московского университета и Высшего технического училища.

Он составил проект устава этого Общества и направил Х. С. Леденцова к тогдашнему директору Технического училища проф. С. А. Фёдорову, который принял самое живое участие в осуществлении благородного просветительного дела. В этом обществе Н. А. Умов занял должность товарища председателя и по существу являлся истолкователем заветов учредителя общества Х. С. Леденцова после его смерти. Благодаря Умову четырёхчленный девиз Х. С. Леденцова «наука—труд—любовь—довольство» сыграл значительную роль в создававшихся традициях Общества. Н. А. Умов написал замечательную записку для пояснения того, что надо разуметь под термином «довольство». В этой записке он исходит из понятия о довольстве, как о таком душевном настроении, когда даётся полнота личного участия человека в добыче и производстве национальных богатств; только в этом случае для трудящегося работа превращается из тяжёлой повинности в нравственную обязанность. Поэтому выдающейся гражданской заслугой является всякое изобретение или усовершенствование, увеличивающее производительность труда. Именно таким изобретениям Общество имени Х. С. Леденцова должно было уделять особое внимание.

Переходя к формам, в которые должна вылиться деятельность Общества, Н. А. Умов наметил создание ряда комиссий, которые должны решать следующие задачи: 1) знакомить ремесленников и производителей с научными основами их ремесла или производства; 2) знакомить их с тем местом, какое принадлежит разрабатываемой ими отрасли в общей системе техники и народного хозяйства; 3) знакомить их с историей их ремесла или производства; 4) знакомить их с природой и качеством важных для них материалов, со способом производства и сбыта.

Н. А. Умов, как активнейший деятель Общества, по разным поводам с большой любовью и горячим участием останавливался на судьбе талантов, выходящих из народа и не имеющих возможности развернуть свои дарования.

Его усилиями Общество имени Х. С. Леденцова сыграло в своё время выдающуюся роль в деле развития науки и распространения научных знаний в нашей стране.

В 1911 г., когда царский министр просвещения пресловутый Кассо посягнул на автономию Московского университета и вынудил выйти в отставку ректора Мануйлова, проректора Мензбира и помощника ректора Минакова, профессора университета в знак протеста решили покинуть университет вместе со своим выборным ректором.

В числе ушедших из университета были знаменитые физики: П. Н. Лебедев, А. А. Эйхенвальд и Н. А. Умов.

Особенно трагично сложилась обстановка для первого.

П. Н. Лебедев к этому времени создал в Московском университете обширную школу физиков. У него работали: П. П. Лазарев, В. И. Романов, А. Р. Колли, Т. П. Кравец, А. К. Тимирязев, А. Б. Млодзеевский, Н. А. Капцов, Н. К. Щодро, Н. Е. Успенский, В. К. Аркадьев и из более молодого поколения: С. И. Вавилов, Б. В. Илѣин, К. А. Леонтьев и многие другие.

Возникал вопрос: как организовать дальнейшую работу, где приютить эту плеяду молодых физиков-экспериментаторов?

Общество имени Х. С. Леденцова пришло на помощь: для П. Н. Лебедева и его учеников в частном доме в Мёртвом переулке была организована новая лаборатория. Этот акт Общества дал возможность не умереть школе П. Н. Лебедева, а развиться в мощное, широко разветвлённое дерево.

В связи с указанными событиями 1911 г. Н. А. Умов напечатал в газете «Русские ведомости» статью под заголовком «Насущная потребность». В этой статье он развивал идею о необходимости создания высшего научного учреждения, не имеющего официального характера — «Вольной академии».

Н. А. Умов сделал и ещё ряд конкретных вкладов в предприятия и труды Общества. Очень много труда он вложил в дело организации и ведение «Временника» Общества, редактором которого он состоял до самой кончины. Им составлялись для этого печатного органа обзоры деятельности Общества, переводились на французский язык резюме статей, помещавшихся во «Временнике», составлялись научные «Приложения» к «Временнику» и т. д.

Неоднократно в этом журнале Н. А. Умов выступал и как автор статей. Здесь он напечатал, например, свои статьи: «Действие различных веществ на фотографическую пластинку», «Задачи техники в связи с истощением энергии на земле» и т. д.

Работа в Обществе имени Х. С. Леденцова была лебединой песнью Н. А. Умова в сфере его общественной деятельности. Здесь с особой силой прозвучала его любовь к народу.

Преподавательская деятельность Н. А. Умова продолжалась 22 года в Одесском и 18 лет в Московском университетах. Лекции Н. А. Умова были полны ярких образов и стояли на уровне современной науки. На его лекции стекались не только студенты физико-математического факультета, но и других факульте-

тов; многие жаждали услышать вдохновенное слово великого учёного.

Н. А. Умов любил сопровождать свои лекции демонстрациями; подбирал их с большим тактом и простотой; он никогда не стремился затемнять суть дела эффектами, действующими на воображение, отвлекающими внимание от предмета.

В Одесском университете он впервые организовал физический практикум.

Московский университет обязан Н. А. Умову строительством Физического института. Умов составил специальную записку, в которой доказывал, что такая страна, как Россия, должна стать на путь строительства институтов, способных развивать естественные науки.

Во время своих летних поездок за границу он подробно изучил устройство ряда физических институтов Запада. Весной 1897 г. он составил проект устройства Физического института в Московском университете. Разработка плана строительства и наблюдение за постройкой отнимали много времени и сил у Н. А. Умова.

Как видим, Н. А. Умов не был теоретиком, «витавшим в эмпиреях», он все время «ходил по земле», сея свет, знание и любовь к науке.

По своим философским воззрениям Н. А. Умов был материалистом. В начале своей деятельности он был убеждённым картезианцем и написал ряд восторженных статей по поводу философии Декарта. Однако с развитием физических знаний, с момента открытия электромагнитной природы света, открытия электрона и теории квант, Умов отходит от указанного философского направления, которое стремилось все физические явления объяснить с позиций классической механики.

Н. А. Умов защищает идею о познаваемости явлений природы. Он ведёт усиленную пропаганду о необходимости иметь гипотезы в науке, однако такого рода, которые способствуют дальнейшему познанию природы. Гипотезы, закрывающие путь к такому познанию,

как, например, гипотеза о жизненной силе (витализм), должны быть безоговорочно отвергнуты. «Из всех гипотез,—говорит Н. А. Умов,—которые могут быть оставлены для известной группы явлений, выбирайте ту, которая не пресекает дальнейшего мышления об исследуемых вещах».

Н. А. Умов во всех своих научных работах и популярных статьях является энергичным поборником гипотезы о близкодействии. Он решительно отвергал гипотезу о мгновенном далекодействии и не мыслил действия тел или зарядов друг на друга без посредства промежуточной среды, заполняющей пространство. Он боролся против метафизического понятия силы и стремился объяснить его движением так называемых скрытых масс, т. е. таких масс, представления о которых составляются нами на основании «силовых» воздействий. В природе нет потенциальной энергии. «Образованию потенциальной энергии,—говорит Умов в одной из своих работ,—соответствует определённое количество живой силы, перешедшей с движений частиц одной среды на бесконечно малые движения частиц других сред, не подлежащих нашему наблюдению». И далее: «Из этого основного положения непосредственно следует, что возможность образования потенциальной энергии обуславливается присутствием в явлении по крайней мере двух сред».

Особенностью мировоззрения Н. А. Умова, которая резко выделяла его философское «кредо» среди современников, надо считать идею развития, резкое отрицание догматической науки. Это помогало ему идти в ногу с развитием науки, правильно оценивать перспективу её прогресса. В статье «Памяти Клерка Максвелла», опубликованной в 1888 г., Н. А. резко критикует положение Максвелла о неизменности молекул и атомов. Основываясь на периодической системе Д. И. Менделеева, он защищает мысль об эволюции атомов. Периодическая система элементов,—писал он,—говорит в пользу общности и их происхождения и в пользу их родства. Таким образом, отпадает один из выше-

приведённых аргументов Максвелла — химический атом есть тоже микрокосмос. Такое определение устраняет необходимость гипотезы о неделимости атомов, устраняет лишнюю преграду человеческому мышлению, заменяя непонятный термин идеей.

Н. А. Умов со всей страстностью своего красноречия выступал против застоя в науке, косности и пугливости мысли. «Смелость мысли — характерная черта современной науки... Физические науки не знают страха перед мыслью», — часто говаривал он.

На протяжении своей долгой научной деятельности Н. А. Умову пришлось пережить существенные перемены в развитии физических теорий. Появление электромагнитной теории вызвало переполох среди физиков; появление электронной теории, теории относительности и, наконец, теории квант усугубило это замешательство. Появились философские высказывания о банкротстве науки, о непознаваемости явлений природы. Бесконечная вера в науку и в силу человеческого разума спасли Н. А. Умова от крайнего научного скептицизма. По поводу теории относительности Н. А. Умов писал: «В новых воззрениях мир является благодаря ограничению в своих скоростях несравненно более реальным, и познание, уходя с поверхности вещей и явлений в их глубину, зовёт нас к исканию основ реальной механики».

И далее: «Классическая механика, не знающая пределов для скоростей движения материи, является той абстракцией, тем отвлечением, которое и в других областях уносит ум человека за пределы реальности. Не может быть более речи о механистическом мировоззрении на прежних условиях».

Н. А. Умов совершенно чётко и ясно высказывал свои взгляды и на методы исследования физических явлений. Метод моделей и аналогий, метод математического анализа количественных отношений природы — каждому из них он отдавал должное. Умов не рассматривал механические модели и аналогии, как адекватное отображение соответствующих явлений. Он не был

последователем английской школы механистов во главе с В. Томсоном (лорд Кельвин). Для него метод моделей и аналогий имел лишь эвристическое значение, позволяющее использовать в творческом акте нашу способность мыслить наглядными образами.

Он писал: «Остроумные воображаемые или действительно построенные модели, своими зубчатками, блоками, ремнями и проч. воспроизводящие даже электрический эфир, конечно, не имеют ничего общего с механическим или картезианским мировоззрениями. Они дают для построения теорий сложный и своеобразный символ, устанавливающий символическою речью соотношения между величинами, подлежащими наблюдению...».

Но наряду с методом моделей и аналогий, используемым при анализе физических явлений, Н. А. Умов считал необходимым применять метод математического анализа. По его мнению, изображение явлений системой дифференциальных уравнений есть не менее сильное орудие в рассмотрении наших знаний о природе. В статье «Современное состояние физических теорий» он говорит: «Физическое объяснение может заключаться лишь в том, что последовательность двух явлений представляется как необходимое следствие некоторого верховного «общего» закона. Так как из такого верховного закона должны быть извлекаемы логические следствия, то он должен быть изображаем математически: применение математики, которая должна во всеоружии находиться в служении познанию природы, охраняет точность и строгость выводов и соединяет наибольшую продуктивность мысли с наибольшей экономией умственной работы».

Однако он предостерегает от крайнего увлечения математическим анализом, часто приводящим к сугубому формализму, который уже в силу этого может стать тормозом для развития науки. Именно в этом смысле он упрекает французского математика Пуанкаре, у которого часто математическая струнка покрывает и отстраняет натуралистическую. Все эти мысли при-

вели Н. А. Умова к постановке одного из существенных вопросов теории познания, именно—вопроса о соотношении относительной и абсолютной истины. Ставя вопрос о достоверности, о непреложности научных теорий и гипотез, Умов отмечал, что они являются только ступенями бесконечного приближения к истине.

Н. А. Умов был решительным врагом фетишизации тех или иных теорий. «Орудие научной мысли, работающей на пути искания истины, — говорит он, — обоюдоострое: создавая новое или останавливаясь на старом, оно непрестанно испытывает их своими лезвиями. Научные системы падают; но, разрушаясь, они не исчезают бесследно: на их обломках строятся теории более совершенные и долговечные». По его мнению, основой для теории является опыт. Поэтому он настойчиво советует учёным «не делить между собою теории и опыта, помня, что их нераздельное соединение есть необходимое условие широкого служения естествознанию».

Таковы в основном теоретико-познавательные и методологические установки нашего великого соотечественника. До конца дней своих он боролся за естественно-научный материализм, за рациональное «натуралистическое» миропонимание. Он был на пути к восприятию диалектического материализма. Только знакомство с этим учением не позволило ему включиться в ряды поборников за самое прогрессивное мировоззрение, ставящее одной из своих основных задач преобразование отношений между людьми и природой в интересах всего человечества.

Необходимо отметить ещё одну особенность мировоззрения Н. А. Умова. Он посвятил много статей и различных высказываний общим вопросам морали.

Высказывания Н. А. Умова по вопросам морали содержат много ценных идей, но в целом они были наивны и ошибочны. В частности, способы достижения человеческого благополучия, которые он рекомендовал, не имели под собой научной базы и не носили революционного характера. Умов надеялся на естественную эволюцию духовных сил человека.

Духовный облик Н. А. Умова формировался в эпоху, когда марксизм только завоёвывал позиции на почве практической революционной деятельности и когда русская интеллигенция находилась на пути исканий.

Дарования Н. А. Умова были исключительны. Научными, философскими и публицистическими статьями он не исчерпывал своих духовных возможностей. В 1890 г. он написал пятиактовую историческую драму под заглавием «Misericordia». События этой драмы относятся к 1453 г. Драма написана очень образным языком и затрагивает много философских вопросов.

Пристрастие Н. А. Умова к изящным искусствам сказалось также и в его любви писать пейзажи с натуры. При этом он стремился как можно ближе воспроизвести природу и по форме и по колориту. Физик и художник в этих случаях шли рядом, способствуя друг другу.

Последние годы своей жизни Н. А. Умов быстро дряхлел физически; он ясно это видел и больно переживал. В интимных разговорах с родными он жаловался на приближение старости и смерти. Временами он жаловался на те или иные болезненные явления, но не умел лечиться. Будучи от природы крепкого здоровья, он верил в свои силы и редко прибегал к врачебной помощи. Чаще всего лечился по своему усмотрению. В сентябре 1914 г. ему сделалось худо. Потребовалось врачебное вмешательство. Однако он скоро справился со своим недомоганием и вновь принялся за научные работы вопреки предписанному режиму.

В конце ноября он перенёс сильнейший припадок и слёг в постель. Припадок повторился вновь, и в ночь с 14 на 15 января 1915 г. Н. А. Умова не стало. Он умер 69 лет от роду.

17 января 1915 г. Н. А. Умова похоронили на Ваганьковском кладбище, недалеко от могилы его друга И. М. Сеченова, умершего девятью годами раньше.

Таков был сын русского народа, великий патриот, служитель науки, добра и красоты.

СПИСОК

СТАТЕЙ И ЗАМЕТОК, ПОСВЯЩЁННЫХ Н. А. УМОВУ

1. А. И. Бачинский, «Памяти Н. А. Умова». Русские ведомости, 1915 г., № 2. Естествознание и география, 1915 г., № 1, стр. 89.
2. А. Постников, «Памяти Н. А. Умова». Русские ведомости, 1915 г., № 3.
3. И. Соколов, «Дорогому учителю». Русские ведомости, 1915 г., № 3.
4. О. Хвольсон, «Н. А. Умов». Речь, 1915 г., № 4. Природа, январь 1915 г.
5. «Н.А. Умов». Киевская мысль, 4 января 1915 г.
6. Е. С-б, «Памяти Н. А. Умова». Русские ведомости, 1915 г., № 5.
7. «К кончине Н. А. Умова». Русские ведомости, 1915 г., № 8 (приложение).
8. А. Цингер, «Памяти Н. А. Умова». Вестник воспитания, 1915 г., № 1, стр. 97.
9. И. Мечников, «Памяти Н. А. Умова». Русское слово, 4 февраля 1915 г.
10. О. Д. Хвольсон, «Памяти Н. А. Умова». Вестник Европы, февраль 1915 г.
11. А. И. Бачинский, «Ник. Алекс. Умов». Природа, февраль 1915 г., стр. 285.
12. (Без заглавия) Nature, March, 18, 1915 г.
13. А. И. Бачинский, «Ник. Алекс. Умов». Физика, № 3 1914—1915 г., стр. 1.
14. А. И. Бачинский, «Николай Алекс. Умов». Математ. образ., 1915 г., № 2, стр. 49.
15. А. Бачинский, «Николай Алекс. Умов». Вестник инженеров, 1915 г., № 5, стр. 169.
16. О. Д. Хвольсон, «Н. А. Умов». Ж. Р. Ф.-Х. О., физ. отд., 1915 г., вып. 2, стр. 37.
17. А. И. Бачинский, «Николай Алекс. Умов». Временник Общества имени Х. С. Леденцова, 1915 г., вып. 1, стр. 3.
18. В. Ф. Каган, «Памяти Николая Алексеевича Умова». Вестник оп. физ., III сем., стр. 75.
19. Leo Rasvolsky, «Nikolai Alexeyevich Oumov». Science, July, т. 23, 1915, стр. 113.
20. Г. Г. Де-Метц, «Памяти Н. А. Умова». Физ. обозрение, 1915 г.
21. О. Н. Красуская, «Воспоминания о Н. А. Умове». Физ. обозрение, 1915 г.
22. И. А. Соколов, «Памяти профессоров И. И. Боргмана и Н. А. Умова». Изв. Физ.-мат. общ. при Имп. Каз. унив., 1915 г.
23. П. П. Лазарев, «Н. А. Умов». М., 1935.

24. А. С. Предводителев, «Н. А. Умов». Учёные записки Моск. гос. унив., 1940 г., часть физическая, вып. 52.
25. А. С. Предводителев, «Н. А. Умов». Люди русской науки, Гостехиздат, 1949 г.
26. А. С. Предводителев, «Н. А. Умов». Очерки по истории русской физики, Учпедгиз, 1949 г.
27. А. С. Предводителев, «Русский физик Умов». Сорена, 1940 г.
28. Н. Е. Жуковский, «Н. А. Умов как математик». Бюлл. Моск. общ. испыт. природы, 1915 г., XXIX том.
29. А. А. Эйхенвальд, «О научных работах Н. А. Умова по физике». Бюлл. Моск. общ. исп. природы, 1915—1916 гг., XXIX том.
30. Е. Е. Лейст, «О научных работах Н. А. Умова по геомагнетизму». Бюлл. Моск. общ. исп. природы, 1915—1916 гг., XXIX том.
31. Poggenдорф I. C., Biographisch-Literarisches Handwörterbuch, B. III, B. IV.



ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА

1

Работа Н. А. Умова «Законы колебаний в неограниченной среде постоянной упругости» была его первой научной работой. Она напечатана в «Математическом сборнике» в марте 1870 г. Проблема колебаний в неограниченной среде поставлена Умовым во всей своей широте и разобрана с большим изяществом и глубиной. Результаты работы не устарели и по сие время. Своим идейным содержанием и приёмами исследования она может ещё и должна оказать влияние на развитие науки.

В настоящее время одной из существенных проблем молекулярной физики является построение теории тепловых явлений в твёрдых и в особенности в жидких телах. Всё более и более укрепляется в науке тот взгляд на природу теплоты, по которому тепло рассматривается как ультраакустические колебания, беспорядочно распространяющиеся в жидком или твёрдом теле. Для укрепления и развития этих идей цитируемая работа Умова принесёт несомненную пользу. Несмотря на восьмидесятилетнюю давность, мысли, развиваемые в ней, так свежи и существенны, что эта работа, безусловно, может выйти из прошлого и стать в ряды современных работ, трактующих о природе тепла.

Ещё будучи студентом, Умов с большим мастерством использовал метод криволинейных координат Ламе при рассмотрении колебательных процессов в

неограниченной среде постоянной упругости. Отнеся среду к такой системе криволинейных координат, в которой волновая поверхность представляет одно из семейств координатных поверхностей, и приняв за параметр этого семейства отрезок луча, Умов доказывает, что соответственный дифференциальный параметр первого порядка будет равен единице. Такой выбор координат позволил ему разделить задачи о поперечных и продольных колебаниях в неограниченной среде. Таким способом ему удалось получить ряд интересных заключений. Оказывается, в изотропной среде постоянной упругости все волновые поверхности разделяются на три группы, согласно возможности иметь прямолинейную поляризацию по направлениям линий кривизны. К первой группе относятся сфера и круглый цилиндр; здесь возможна поляризация по каждой из двух линий кривизны. Ко второй группе относятся волновые поверхности, допускающие поляризацию по одной из двух линий кривизны; сюда относятся все поверхности вращения, в которых поляризация может иметь место только по меридиональной плоскости, но не в плоскости, к ней перпендикулярной. К третьей группе относятся все остальные поверхности, которые не могут иметь прямолинейной поляризации ни по одной из линий кривизны. В задаче о продольных колебаниях метод Умова привёл к тем же результатам, к которым ранее пришёл Пуассон иным путём.

Полученные выводы относительно поперечных колебаний в неограниченной среде Н. А. Умов распространил на оптические явления. Принимая во внимание некоторые дополнительные предположения относительно свойств среды, которая является носителем световых колебаний (идеальная упругость, малая плотность и т. д.), Умов получает уравнения оптики, совпадающие с уравнениями, которые получил Буссинеск. В этом нетрудно убедиться путём преобразования к криволинейным координатам дифференциальных уравнений Буссинеска, полученных им в его работе «Новая теория световых волн» (1868 г.).

2

Исследование Н. А. Умова «Теория термомеханических явлений в твёрдых упругих телах» было представлено им в качестве диссертации на соискание учёной степени магистра физико-математических наук.

Публичная защита диссертации прошла весьма успешно. Она состоялась в Московском университете в 1872 г. под председательством тогдашнего декана физико-математического факультета известного математика А. Ю. Давыдова. В своём резюме Давыдов с большой похвалой отозвался о новой работе молодого учёного, который к этому времени получил приглашение занять кафедру математической физики в Одессе. Проф. Шведов, бывший в то время профессором экспериментальной физики в Одесском университете, на запрос своего факультета высказался в следующих выражениях об Н. А. Умове как учёном и о его диссертации, посвящённой термомеханическим явлениям в твёрдых упругих телах.

«... Преподаватель такой новой и неустановившейся науки, как математическая физика, должен критически относиться к её вопросам, большей частью окончательно не решённым; вот почему я просил факультет отложить баллотировку до тех пор, пока г. Умов не даст мне возможность судить, в какой мере он способен обращаться с сырым материалом науки. В настоящее время г. Умов решил мои сомнения самым удовлетворительным образом и притом в свою пользу, прислав мне подробное содержание своего нового труда—магистерской диссертации, представленной в факультет Московского университета и одобренной последним. Цель этого сочинения—связать теорию упругости с механической теорией тепла. Не ограничиваясь исследованием частных случаев одинаковой температуры и одинаковых нормальных давлений и натяжений во всём теле, чем уже занимались Томсон, Клаузиус и Цейнер, г. Умов взглянул на вопрос с возможно общей точки зрения: когда температура неравномерно распростра-

нена во всём теле и последнее испытывает различные давления и натяжения в разных частях. В этом случае вопрос особенно усложняется, так как вследствие теплопроводности температура различных точек тела изменяется вместе со временем, и г. Умову пришлось бы иметь дело разом с двумя теориями—упругости и теплопроводности, основанными на различных принципах, если бы он не пришел к счастливой мысли связать эти теории одним общим принципом. Для этого ему послужил известный принцип сохранения энергии. Как критерий основательности и общности исследований г. Умова может служить то обстоятельство, что из его уравнений вытекают как частные случаи: второй закон механической теории теплоты, уравнения равновесия твёрдых упругих тел и уравнение теплопроводности.

Основываясь на таких достоинствах этого труда, я пришёл к убеждению, что факультет наш в лице Умова может приобрести не только преподавателя, способного передать результаты, добытые другими, но и специалиста, способного двигать науку вперёд¹⁾.

Магистерская диссертация Н. А. Умова интересна не только с точки зрения чисто теоретического исследования; она имеет очень существенное значение и для целей практики. Научиться рассчитывать упругие напряжения, возникающие вследствие неоднородного поля температур в теле, — задача, которая является нерешённой, но практически чрезвычайно существенной и по сей день. Различные попытки, существующие в настоящее время, в основном базируются на уравнениях Дюамеля и имеют частный характер. Постановка задачи, сделанная Н. А. Умовым, интереснее и общее, поэтому она может дать новые ценные результаты для теории и для практики, если только найдёт последователя, способного основные идеи этой замечательной работы приблизить к потребностям и условиям настоящего времени.

¹⁾ Отчёт Московского университета за 1915 г. Статья А. П. Бачинского «Очерк жизни и трудов Н. А. Умова».

Основное содержание данного исследования Н. А. Умова на языке современной науки можно передать так.

В телах, подверженных одновременному механическому и тепловому воздействию, тензор упругости можно разложить на два тензора: тензор молекулярных сил упругости и тензор тепловых сил упругости. Математически это можно записать следующим образом:

$$\begin{vmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{vmatrix}$$

или символически:

$$\mathbf{P} = \mathbf{t} - \mathbf{p}.$$

Здесь через \mathbf{P} , \mathbf{t} и \mathbf{p} обозначены, соответственно, тензор упругости, тензор тепловых сил упругости и тензор молекулярных сил упругости.

В дальнейшем все рассуждения Н. А. Умова направлены к тому, чтобы установить связь указанных сил упругости с тензором деформации:

$$\mathbf{e} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}.$$

Представляя всякое упругое тело как систему материальных точек, связанных между собой силами молекулярного взаимодействия, Н. А. Умов доказывает, что для изотропного тела в первом приближении должна существовать линейная зависимость между тензором молекулярных сил упругости и тензором деформации, а также между тензором тепловых сил упругости и тензором деформации; т. е. должны иметь место следующие равенства:

$$\begin{aligned} t_{\mathbf{n}} &= \psi(t) [\lambda_1 + k_1 \theta + \kappa_1 \varepsilon_{\mathbf{n}}], & t_{\tau} &= \kappa_1 \psi(t) \varepsilon_{\tau}; \\ p_{\mathbf{n}} &= \psi(t) [\lambda + k \theta + \kappa \varepsilon_{\mathbf{n}}], & p_{\tau} &= \kappa \varepsilon_{\tau}. \end{aligned}$$

Здесь индекс n символизирует нормальные напряжения, а индекс τ — касательные напряжения.

Функция $\psi(t)$ зависит определённым образом от начального состояния упругого тела, если считать при этом, что t есть температура центра тяжести элементарного объёма.

Н. А. Умов даёт следующий вид для этой функции, если через P_0 обозначить начальное давление, которое испытывает тело на своей поверхности:

$$\psi(t) = \frac{P_0 + \lambda}{\lambda_1} + ba_t(t - t_0).$$

Здесь через a_t обозначен коэффициент линейного расширения тела, а через b обозначена величина

$$b = \frac{3k + \kappa}{\lambda_1} - \frac{P_0 + \lambda}{\lambda_1} \cdot \frac{3k_1 + \kappa_1}{\lambda_1}.$$

Таким образом, получаются все необходимые величины для того, чтобы можно было написать уравнения движения упругого тела.

Найденные уравнения Н. А. Умова приложил к некоторым конкретным задачам, в частности к задачам Клаузиуса и В. Томсона.

3

Исследование Н. А. Умова «Уравнения движения энергии в телах» явилось результатом двух других его исследований, напечатанных в «Математическом сборнике» за 1873 г. Эти исследования вышли в свет под заголовками: «Теория взаимодействия на расстояниях конечных и её приложение к выводу электрических и электродинамических законов» и «Теория простых сред».

Указанная работа была представлена Н. А. Умовым в Московский университет в качестве докторской диссертации. Она вызвала большие споры и резкую критику со стороны официальных оппонентов, профессо-

ров А. Г. Столетова и Ф. А. Слудского. Неофициальный оппонент проф. В. Я. Цингер тоже выступал в решительных тонах против идеи диссертации. Диспут продолжался шесть часов и на всю жизнь оставил у Умова неприятное воспоминание. История повторилась: свежие, необычные взгляды не могли проложить себе путь в жизнь без боя.

В своей диссертации Н. А. Умов развивал идею, что потенциальная энергия не может образоваться в одной простой среде; необходимы по крайней мере две среды, из которых вторая, не поддающаяся непосредственному наблюдению (скрытая среда), принимает на себя часть кинетической энергии и тем самым определяет наши предположения о существовании потенциальной энергии. «Потенциальная энергия, — говорит Умов, — есть не что иное, как живая сила движений некоторых сред, неосязаемых для нас». С этой точки зрения он формулирует следующим образом закон сохранения энергии:

а) всякое изменение в величине живой силы обуславливается её переходом с частиц одной среды на частицы других сред или же с одних форм движений на другие;

б) определённое количество живой силы остаётся себе равным при всякой смене явлений;

в) количество живых сил природы неизменно».

Исходя из этой концепции, Умов путём некоторых простых допущений о движении частиц скрытых сред показывает, как можно придать количественное выражение основным законам взаимодействия электрических зарядов, магнитных полюсов, электрических токов и т. д.

Кинетическая энергия всегда связана с движущейся частицей и находится там, где находится частица. Отсюда возникло понятие о движении энергии. Н. А. Умов первый из учёных утвердил это понятие и широко пропагандировал его, считая, что для любого вида энергии возможно ввести понятие о плотности энергии и скорости её движения.

Умов составил дифференциальные уравнения движения энергии в твёрдых телах постоянной упругости и в жидких телах. Интеграция этих уравнений в различных частных случаях приводит к выводам большой принципиальной важности. Применяя свои идеи к распространению волн в упругой среде, Н. А. Умов приходит к утверждению, что энергия целиком переносится волной от одной точки к другой, и выдвигает следующую простую теорему: «Количество энергии, проходящее через элемент поверхности тела в единицу времени, равно силе давления или натяжения, действующей на этот элемент, умноженной на скорость движения элемента». Нетрудно видеть, что эта теорема, по сути дела, ничем не отличается от теоремы Максвелла о световом давлении. В 1881 г. голландский учёный (Grünwis) показал, что этот «закон Умова» (он его так и называет) можно с успехом применять к толкованию явлений соударения упругих тел.

Идеи Н. А. Умова, развитые им в его докторской диссертации, оказали серьёзное влияние на дальнейшее развитие представлений об энергии. Позднее, в 1884 г., идеи Умова воспринял и развил английский физик Пойнтинг в применении к электромагнитному полю.

Диссертация Н. А. Умова о движении энергии в телах имеет значение не только для истории физики, но она сохраняет свою ценность и по настоящее время, как строго материалистическое произведение, дающее эффективные методы разработки динамики континуума и теории поля.

Н. А. Умов первый поставил перед собой задачу построить такую общую теорию движения, основанную на наиболее общих свойствах материи, в которой бы не было намёка на сведение одного вида движений к другому. Эта задача является наиболее актуальной задачей современной науки. К сожалению, только спустя семьдесят с лишним лет обращено внимание на эту замечательную попытку выдающегося русского физика.

Локализуя энергию по пространству, Н. А. Умов в то же время ясно понимал, что это возможно лишь при одновременной локализации материи.

«При современном развитии естествознания, — говорит он, — указанной идее постепенности может соответствовать только представление о последовательной передаче движения от одних материальных частиц другим, бесконечно к ним близким. Вопрос и разрешался в этом направлении. При этом свойства промежуточной среды приравнивались обыкновенно свойствам сред уже исследованных, но самый выбор тех или иных свойств среды никогда не определялся на основании каких-нибудь общих руководящих начал. Поэтому-то существующие в науке объяснения некоторых частных форм взаимодействий и не носят того отпечатка неизбежности, который желателен для объяснения явлений природы».

В этих словах сказалась вся глубина мышления Н. А. Умова. Он подходил к исследованию явлений природы с ясным взглядом на основные теоретико-познавательные позиции, которыми должен руководиться натуралист.

Н. А. Умов предложил уравнение движения энергии в двух формах.

Если континуум не содержит источников, то одно из этих уравнений движения энергии на современном математическом языке можно записать так:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\sigma} = 0.$$

Здесь через E обозначена плотность энергии, а через $\vec{\sigma}$ — вектор Умова. Это уравнение соответствует следующему положению, высказанному Умовым: «Всегда существуют три функции σ_x , σ_y , σ_z , обладающие тем свойством, что сумма из первых производных по осям x , y , z даёт уменьшение плотности энергии в единицу времени в данной точке тела».

Для среды, обладающей постоянной упругостью, вектор Умова имеет следующий вид:

$$\vec{\sigma} = T_{ik} \vec{v}.$$

Здесь T_{ik} обозначает тензор упругих напряжений, а \vec{v} обозначает вектор скорости упругих смещений.

Для вязкой жидкости вектор Умова изображается так:

$$\vec{\sigma} = \vec{v} \frac{\rho v^2}{2} + T_{ik} \vec{v}.$$

Здесь через T_{ik} обозначен тензор упругих и вязкостных сил.

Для идеальной жидкости предыдущее выражение переписывается так:

$$\vec{\sigma} = \vec{v} \left(p + \frac{\rho v^2}{2} \right).$$

Из этого последнего выражения следует, что вектор Умова в идеальной жидкости всегда направлен по линиям тока, а это приводит к следующей важной теореме гидродинамики идеальной жидкости: «Правильно обтекаемые идеальной жидкостью тела не испытывают лобового сопротивления».

Это положение не имеет места для вязкой жидкости, ибо там вектор Умова не совпадает с линиями тока.

Идеи Умова при подходящем их использовании могут послужить основой для разработки методов подсчёта гидродинамических сопротивлений.

Интересный пример приложения идей Умова показал профессор Московского университета В. Н. Кесених. В работе «Вектор Умова и присоединённая масса»¹⁾ названный учёный показал плодотворность метода Умова при решении следующего вопроса: «как локализована энергия присоединённой массы в звуковом поле и как её выделить из полной энергии звукового поля». Весьма простыми рассуждениями задача решается до конца, исходя из уравнений Умова.

¹⁾ Вестник Московского университета, 1949.

Автор кончает свою работу справедливыми словами: «Этими краткими замечаниями мы ограничимся для подтверждения той мысли, что идеи Умова открывают неиспользованные ещё возможности построения эффективного аппарата для распространения аналитических методов динамики системы на динамику континуума, — возможности, которые настойчиво ищет современная физика».

4

Поводом к написанию Н. А. Умовым трёх замечательных работ по геомагнетизму послужила докторская диссертация проф. Э. Лейста, представленная в 1899 г. в физико-математический факультет Московского университета. Тема диссертации формулировалась так: «О географическом распределении нормального и аномального геомагнетизма». Факультет поручил Умову составить рецензию на работу Э. Лейста. С обычной для него тщательностью он не только изучил диссертацию Э. Лейста, но и поставил ряд новых вопросов.

В результате пятилетней работы Умова наука о земном магнетизме обогатилась двумя в высшей степени важными работами, а именно:

1. «Опыт исследования магнитных образов земного магнетизма».

2. «Построение геометрического образа потенциала Гаусса как приём изыскания законов земного магнетизма».

Основой для этих работ послужила теория Гаусса или, вернее, 24 мёртвых, эмпирически определяемых коэффициента разложения потенциала земного магнетизма в ряд по сферическим функциям. С течением времени глубокое теоретическое значение этих коэффициентов было забыто, и гауссово разложение потенциала земного магнетизма было сведено до простой интерполяционной формулы. Вместо того чтобы искать физический смысл главных коэффициентов разложения, стремились вычислять высшие члены потенциала

для получения более полной согласованности формулы Гаусса с действительным распределением земного магнетизма. Адамс, например, вычислил 48 коэффициентов, а Фритше — 63, но и это усилие не спасло положения, и последний из названных учёных признал, что прибавление членов с шаровыми функциями даже седьмого порядка не даёт нужной точности.

В работе Умова коэффициенты Гаусса ожили, им придан был нужный физический и геометрический смысл. Сопоставляя геометрические свойства сферических функций с известными фактами о географическом распределении земного магнетизма, Н. А. Умов пришёл к выводу, что не все коэффициенты разложения потенциала Гаусса по сферическим функциям имеют одинаковое значение: некоторые из них объединяются в законченные группы и образуют так называемые главные магнитные типы; другие представляют лишь дополнение к главным типам, уточняют географическое распределение земного магнетизма, даваемое коэффициентами, относящимися к главным магнитным типам. Все 24 гауссовых коэффициента Умов свёл к четырём главным типам и тем самым в запутанную картину эмпирических соотношений, касающихся распределения земного магнетизма, внёс необходимую ясность и научную обоснованность.

Всё это явилось результатом тонкого понимания геометрических свойств сферических функций.

Сферические функции представляют собой геометрический образ, имеющий некоторые оси, которые позволяют получить крайне простые полярные уравнения для линий равного потенциала.

Например в случае сферических функций 2-го порядка подобное уравнение выражается условием, что произведение косинусов углов радиус-вектора точки кривой с осями сферической функции есть величина постоянная для одной и той же линии. Вместе с тем Н. А. Умов подметил, что обнаруживается существование некоторой связи между положением этих линий, осей, а также связанных с ними некоторых прямых,

с некоторыми особенностями магнитных свойств земли. Так, например, биссектриса угла между осями сферической функции 2-го порядка проходит через середину области восточно-азиатской магнитной аномалии, а границы этой области немного отличаются от некоторой линии равного потенциала для этой сферической функции. Помимо этого Н. А. Умов открыл следующее замечательное обстоятельство: вековые изменения элементов земного магнетизма сводятся к очень быстрому перемещению некоторых осей сферической функции при очень медленном перемещении других осей той же функции. Далее Н. А. Умов установил, что его геометрический образ находится в определённой связи с осью вращения земли. Свой анализ Умов закончил сферической функцией 3-го порядка, предоставив будущим поколениям изучение сферических функций высших порядков.

Таким образом, работами Н. А. Умова по земному магнетизму был сделан столь значительный шаг, что в этом вопросе он, безусловно, стоит рядом с Гауссом.

Проф. Лейст в заключении к своему очерку, посвящённому трудам Умова по земному магнетизму, писал:

«Гаусс исходил из геометрического представления и составил потенциальную формулу с эмпирически определяемыми 24 коэффициентами. Умов, наоборот, составил комментарий к этим коэффициентам и перевёл их опять в геометрический образ, но в совершенно новых плоскостях. Так дополняют друг друга два гениальных мыслителя, Карл Фридрих Гаусс и Николай Алексеевич Умов».

5

Экспериментальными работами Н. А. Умов начал интересоваться с 1886 г. С этого времени в течение ряда лет его внимание было приковано к вопросам, связанным с явлениями диффузии в водных растворах. Экспериментальными работами Н. А. Умов занимался с юношеским увлечением, нередко засиживаясь в лаборатории далеко за полночь. Его записные книжки переполнены

планами экспериментальных работ. Иногда он, после продолжительных опытов в известном направлении, прекращал их, складывал в портфель накопленный материал, с тем чтобы через некоторое время вновь вернуться к нему. В эти промежутки Н. А. Умов обычно занимался другими экспериментальными работами.

В 1887 г. Н. А. Умов напечатал свою первую экспериментальную работу: «Законы растворимости некоторых солей». В этой работе он находит любопытную связь между относительным содержанием соли p в растворе и отношением $\frac{D}{u}$, где D есть разность между удельным объёмом смешиваемых веществ до смешения и удельным объёмом раствора, а u есть удельный объём воды. Эта связь выражается в виде следующей формулы:

$$\frac{D}{u} = \frac{p\alpha}{1 + p^2\alpha};$$

α — числовой коэффициент.

Эта формула, как оказалось, находится в очень хорошем согласии с экспериментом.

Попутно Н. А. Умов указывает следующее найденное им правило: «Для KCl , KBr , NaI , LiI отношение кубов плотностей безводных солей равно отношению количеств солей, насыщающих равные количества воды при $100^\circ C$. Для KCl , $NaCl$, NaI отношение кубов плотностей безводных солей равно отношению количеств солей, насыщающих равные количества воды при $0^\circ C$ ».

В 1888 г. Н. А. Умов напечатал обширное экспериментальное исследование: «Диффузия водного раствора поваренной соли». Он пользовался известным методом Фарадея-Томсона, проводил опыты в течение четырёх месяцев и нашёл ряд простых интегральных законов, характеризующих процесс диффузии. Один из этих законов гласит: отношение длин двух колесн раствора, ограниченных слоями одинаковой плотности, не зависит от времени.

Зависимость концентрации q от координаты z и от времени Н. А. Умов выразил следующей эмпирической формулой:

$$q = a - be^{-k(z-c)}.$$

Здесь k есть функция времени; a , b , c , суть постоянные. Функция q не удовлетворяет дифференциальному уравнению диффузии, данному Фиком:

$$\frac{dq}{dt} = k \frac{d^2q}{dz^2}.$$

Отсюда Н. А. Умов делает заключение, что уравнение Фика не отвечает действительному ходу явления; так называемый коэффициент диффузии k не есть постоянная величина. По мнению Н. А. Умова, предположения Фика можно считать справедливыми лишь в случае слабых растворов, процесс диффузии которых протекает в условиях строгого соблюдения постоянства температуры.

В 1889—1891 гг. Н. А. Умов производил наблюдения над диффузией не только солевых растворов, но и растворов кислот. В результате этих наблюдений появилась работа «Дополнение закона гидродиффузии и новые диффузиометры». Здесь описан ряд остроумных приспособлений для наблюдений над диффузией: «сифонный диффузиометр», «диффузионный крючок», «диффузионный ареометр» и т. д. В этой работе Н. А. Умов критикует гипотезу Фика с новых позиций; именно, он указывает, что при диффузии прибавление растворённого вещества или растворителя к существующему раствору сопровождается сжатием или расширением. Это изменение объёма не учитывается гипотезой Фика. Н. А. Умов исправляет уравнение Фика, вводя дополнительный член, принимающий в расчёт указанное обстоятельство.

Работы Н. А. Умова по диффузии в целом представляют образцовое экспериментальное исследование как по глубине теоретического анализа явления, так и по разработке новых экспериментальных приёмов.

К тем же годам относится исследование Н. А. Умова «Термопотенциал соляных растворов». Под понятием «термопотенциал» Н. А. Умов понимает функцию Гиббса ξ или термодинамический потенциал Дюгема

при постоянном давлении. Этот потенциал он обозначает через F .

Значение указанной функции, как известно, позволяет путём простого дифференцирования определить различные особенности и качества, характеризующие данное вещество. Вид этой функции сравнительно легко находится для идеальных газов и для слабых растворов. Основываясь на экспериментальных данных своего ассистента Герича касательно сжатия соляных растворов и на результатах опытов других исследователей по упругости пара растворов, Н. А. Умов построил функцию F для водных растворов любой крепости. Эта функция выглядит так:

$$F = M \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} + m_1 f_1 + m_2 (N + f_2) + m_2 DT \lg \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Здесь через m_1 и m_2 обозначены количества воды и соли в растворе; $m_1 f_1$ и $m_2 f_2$ — термopotенциалы воды и твёрдой соли; M и N — некоторые функции температуры T ; D — постоянная. Отсюда Н. А. Умов находит формулы теплоёмкости раствора и теплоты растворения в зависимости от состава.

Сравнение полученных формул с экспериментальными данными показывает хорошее их совпадение с действительностью.

6

В 1905 г. опубликованием работы «Хроматическая деполяризация при рассеивании света» открывается серия исследований Н. А. Умова по оптике. Он открыл, что если на матовую поверхность тела пустить пучок поляризованных световых лучей, то этот пучок более или менее деполяризуется по отношению к тем лучам, которые в максимальной степени пропускаются телом; наоборот, лучи наиболее поглощаемые обнаруживают наибольшую поляризацию. Если падающий свет не поляризован, то в рассеиваемом пучке оказываются всего сильнее поляризованными те лучи, которые всего более поглощаются телом. Это оптическое явление

следовало бы называть эффектом Умова. В научной и учебной литературе оно зафиксировано в виде следующего правила: если на окрашенную матовую поверхность пустить лучи различного цвета, то в тех цветах, которые диффузно отражаются без поглощения, имеет место деполяризация света; наоборот, те лучи, которые частично поглощаются данным веществом, поляризуются им. Например, красное сукно деполяризует красные лучи и поляризует зелёные. Именно это явление Н. А. Умов и положил в основу своего метода спектрального анализа матовых поверхностей. В 1909 г. им был устроен для этих целей прибор, который представляет собой спектроскоп с горизонтальной осью. На столике этого спектроскопа помещают исследуемое вещество. Лучи, идущие от щели коллиматора, отражаются диффузно от исследуемой поверхности; часть этих лучей попадает в трубу, которая снабжена пластинкой Савара, николем и призмой, дающей спектр.

Если отражающая поверхность поляризует свет, то в трубе будет наблюдаться спектр с долевыми тёмными линиями, которые получаются благодаря интерференционному действию пластинки Савара; если же свет при отражении от исследуемой поверхности не претерпевает поляризации, то указанные тёмные линии пропадают. Если с помощью такого прибора вести наблюдение окрашенных поверхностей, которые имеют спектр поглощения, то картина будет следующей: в тех местах спектра, где не имело места поглощение, где, следовательно, не было поляризации света, будет наблюдаться сужение или даже полное уничтожение полос Савара; напротив, в тех местах, где имелось поглощение, будет наблюдаться усиление и уширение этих полос. Таким образом, спектр отражённых от исследуемой поверхности лучей представится в виде пятен или «чётков», нанизанных на линиях Савара. Такая картина получается от двух причин сразу: от поляризации диффузно отражённого света и от ослабления его вследствие поглощения в данном веществе. Картина, видимая в спектроскоп Н.А. Умова, характерна

для каждого исследуемого вещества, как это показано им на многочисленных образцах, приводимых в его работе. Между прочим, подобные наблюдения Н. А. Умов производил и на хлорофилле и получил характерные два ряда чётков в красных и оранжевых лучах.

Метод Н. А. Умова очень чувствителен, поэтому Умов высказал мысль, что этим путём можно установить присутствие хлорофилла на планетах. Кроме того, таким способом исследуются горные породы нашей земли; сравнивая полученную картину с соответствующей картиной, полученной от различных точек лунной поверхности, можно установить минеральный состав лунной поверхности.

Развитием описанного оптического явления Н. А. Умов занимался до самой смерти. В возрасте 66 лет, после ухода из университета в связи с инцидентом, происшедшем в 1911 г., Н. А. Умов организовал лабораторию в помещении Высшего технического училища, любезно предоставленном ему проф. П. П. Петровым. Здесь им исследована абсорбция нескольких сотен различных веществ прибором, им сконструированным и изготовленным немецкой фирмой Фюса.

Эффект Умова не остался в науке без внимания. В России этим явлением занимался Н. Е. Успенский и его ученики Веденева, Грумм-Гржимайло, Воронков и Покровский. Последние два исследователя особенно много уделили внимания различным применениям эффекта Умова. Их работы напечатаны в *Zeits. f. Phys.* за 1924 г. В развитии оптических работ Н. А. Умова принимал участие также и его ученик Златовратский вместе с Амировым. Работы этих исследователей напечатаны в *Phys. Zeits.* за 1906 г.

Из зарубежных учёных особенно тщательно занимался эффектом Н. А. Умова Navrats, который опубликовал работу в *Wein. Ber.* за 1911 г. В самое последнее время работы Н. А. Умова продолжены в исследованиях А. С. Торопец в Ленинградской лаборатории Т. П. Кравца.

7

Своё исследование «О стационарном движении электричества на проводящих поверхностях произвольного вида» Н. А. Умов в 1875 г. во время заграничной поездки представил на суд Кирхгофа.

До указанной работы задача решалась лишь для различных частных случаев; Кирхгоф решил её для плоскости, Больцман—для сферы и круглого цилиндра, тогда как Умов дал решение *в самом общем виде*. Вопрос о распределении электрических токов на поверхности любого вида Умов свёл к вопросу о распределении токов в плоской пластинке, представляющей собой конформное отображение рассматриваемой поверхности на плоскость. Задача о такого рода изображении поверхности произвольного вида на плоскости в принципе была разрешена Гауссом. Таким образом, весьма трудная задача, не поддававшаяся усилиям таких корифеев науки, как Больцман и Кирхгоф, была разрешена Умовым просто и изящно.

К сожалению, с этой выдающейся работой Умова, как и многих русских учёных, произошёл исторический конфуз. Кирхгоф не постеснялся от своего имени немедленно опубликовать в «*Monatsberichte der Königl. Akad. d. Wiss. zu Berlin*» результаты, полученные Умовым, используя при этом для доказательства основных положений лишь свой метод, который он применил при решении задачи о стационарном течении электричества в проводящей пластинке. Хотя Кирхгоф в этой напечатанной работе и упоминает Н. А. Умова, но тем не менее именно благодаря Кирхгофу имя талантливого русского учёного не приобрело по этому вопросу того веса, которого оно заслуживало.

8

Работа Н. А. Умова «Геометрическое значение интегралов Френеля» появилась в свет в 1885 г. Эта работа лишней раз показывает цельность и одарённость её автора как учёного и мыслителя. Только исклю-

чительная научная прозорливость позволяет открывать новые стороны в вопросах, которые обычно кажутся давно решёнными. Что нового можно усмотреть в интегралах Френеля?! Однако Н. А. Умов усмотрел это новое; он с необычайной ясностью вскрыл их геометрический характер. Интегралы Френеля имеют вид:

$$A = \int_0^z \cos \frac{\pi}{2} z^2 dz; \quad B = \int_0^z \sin \frac{\pi}{2} z^2 dz.$$

Умов берёт параболу

$$\frac{\pi}{2} z^2 = v,$$

причём ось z направляет вертикально, а ось v направляет влево. В этом случае будем иметь:

$$A = \int_0^z \cos v dz; \quad B = \int_0^z \sin v dz.$$

Теперь представим себе круглый цилиндр с радиусом, равным единице; ось этого цилиндра примем за ось z . Пусть верхняя половина этой параболы навёртывается на упомянутый цилиндр так, чтобы её ось пошла по окружности основания цилиндра, а вершина параболы совпала бы с точкой пересечения поверхности цилиндра и оси x . При таком расположении параболы последняя образует винтовую линию.

Если спроектировать эту винтовую линию на координатные плоскости zx и zy , то абсциссы точек этих проекций можно записать так:

$$x = \cos v, \quad y = \sin v.$$

Теперь интегралы Френеля примут следующий вид:

$$A = \int_0^z x dz; \quad B = \int_0^z y dz.$$

Таким образом, задача о вычислении интегралов

Френеля сводится к квадратурам. Умов даёт способ вычисления поправок к значениям интегралов A и B , вычисленных самим Френелем; указывает приближённые формулы к отысканию экстремальных значений интенсивности света в диффракционной картине, осуществляемой краем безграничного экрана; далее, описывает устройство интегратора для механического вычисления интегралов A и B .

Вся работа производит впечатление изящества и простоты.

9

Две работы Н. А. Умова «Единообразный вывод преобразований, совместных с принципом относительности» и «Условия инвариантности уравнения волны» показывают, насколько живо он откликнулся на современные ему идеи в области теоретической физики. По свидетельству знаменитого русского учёного Н. Е. Жуковского эти работы Н. А. Умова являются лучшим математическим толкованием принципа относительности. Вот что пишет Жуковский об этой работе ¹⁾: «Подобно тому, как неэвклидовская геометрия и геометрия многих измерений опираются на инвариантность обобщённого представления об элементе дуги, принцип относительности, по Умову, имеет своё математическое содержание в инвариантности волнового уравнения пространства света».

Для решения поставленной задачи Н. А. Умов преобразует волновое уравнение для пространства четырёх измерений, вводя вместо координаты времени мнимое переменное $\tau = cti$, где c —скорость света; затем требует, чтобы это уравнение оставалось инвариантным при переходе от координат x, y, z, τ к координатам x', y', z', τ' . Оказывается, этого можно достичь только тогда, когда вторые дифференциальные параметры

¹⁾ Сборник, посвящённый памяти Н. А. Умова. Изд. Общества им. Леденцова, 1915.

функций x' , y' , z' и τ' , выраженных через переменные x , y , z и τ , будут равны нулю.

В случае, когда x , y , τ суть параметры декартовой системы координат, а $z = z' = 0$, инвариантность волнового уравнения требует, чтобы x' , y' , τ' были параметрами изотермической системы криволинейных триортогональных координат. В частном случае можно считать x' , y' , τ' параметрами декартовой системы координат, повернутой около оси y на мнимый угол φi . Приняв, далее, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{c}$, Умов приходит, в конечном счёте, к формулам преобразования Лорентца-Эйнштейна.

10

В 1913 г. Н. А. Умов много работал над составлением речи, которую он должен был произнести на предстоящем Первом всероссийском съезде преподавателей физики, химии и космографии. Съезд состоялся в Петербурге.

Речь Умова называлась «Эволюция физических наук и её идейное значение». В этой речи Н. А. Умов подробно осветил развитие новейших атомистических теорий. Речь была прочитана 29 декабря 1913 г. (по старому стилю) и была принята с большим энтузиазмом.

Готовясь к этой речи, Н. А. Умов пришёл к идеям, которые только сейчас могут быть поняты с должной полнотой.

Современная волновая механика родилась из попыток решить проблему взаимодействия между электромагнитным полем и веществом (вернее, электроном). В её основу положен принцип, который можно формулировать следующим образом: невозможно определить экспериментально абсолютно точно два канонически сопряжённых параметра, определяющих состояние системы. Это определение можно выполнить лишь с известным приближением, степень которого определяется следующими неравенствами: для координаты положения

и соответствующего импульса

$$- \Delta x \Delta p_x \geq h,$$

а для энергии частицы

$$- \Delta E \Delta t \geq h.$$

В своей работе «Возможный смысл теории квант», вышедшей в свет за 12 лет до появления основных идей волновой механики, Н. А. Умов пишет следующее:

«Электромагнитное поле по отношению к неупорядоченным движениям частиц обладает различной степенью чувствительности». Другими словами: нельзя иметь совершенно точное количественное выражение взаимодействия между электромагнитным полем и неупорядоченным движением частиц; мы можем составить себе представление лишь о средних величинах, определяющих состояние системы.

По его мнению, не существует аппарата, который бы обладал такой степенью чувствительности к определению всякого рода взаимодействий, какую обладает демон Максвелла. Только этот аппарат обладает бесконечной чувствительностью; всякий же другой регистрирует явление с известным и конечным приближением. Если воспользоваться электрическим полем как средством оценки взаимодействия скрытой среды и «видимой» материи, то чувствительность этого аппарата тоже должна быть конечна. Этот аппарат по отношению к неупорядоченным движениям молекулярных систем обладает некоторой средней чувствительностью. Величина этой средней чувствительности должна наложить свой отпечаток на все средние величины, с которыми мы встречаемся в процессе познания природы. За меру средней чувствительности электромагнитного поля как аппарата, с помощью которого мы познаём явления природы, Н. А. Умов принимает величину, равную $\frac{1}{h\nu}$, где ν есть повторяемость естественных колебаний молекулы системы, а h —постоянная Планка.

Высказанные соображения обозначают ни больше, ни меньше как следующее:

$$\frac{\Delta E}{\nu} \geq h \quad \text{или} \quad \Delta E \cdot T \geq h.$$

Изложенная концепция позволила Н. А. Умову, пользуясь только законом распределения Максвелла, установить формулу для средней энергии резонатора Планка. Таким образом, мы видим, насколько близко Умов подходил уже тогда к современным воззрениям волновой механики. По сути дела, он первый в истории развития теории квант осмелился сказать о приближённом характере измерений параметров, определяющих состояние системы.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора	5
Автобиографический очерк	9
Законы колебаний в неограниченной среде постоянной упругости	31
Теория термомеханических явлений в твёрдых упругих телах	74
Уравнения движения энергии в телах	151
Прибавление к статье «Уравнения движения энергии в телах»	201
Опыт исследования магнитных образов земного магнетизма	227
Построение геометрического образа потенциала Гаусса как приём изыскания законов земного магнетизма	311
Дополнение закона гидродиффузии и новые диффузиометры	371
Хроматическая деполяризация при рассеивании света	415
Спектрально-поляризационный метод исследования поглощения света и природы красок	423
О стационарном движении электричества на проводящих поверхностях произвольного вида	447
Геометрическое значение интегралов Френеля	454
Общее выражение термодинамического потенциала	484
Единообразный вывод преобразований, совместных с принципом относительности	492
Условия инвариантности уравнения волны	500
Возможный смысл теории квант	503
Николай Алексеевич Умов, 1846—1915 (Очерк редактора)	513
Примечания редактора	530

Редактор *В. А. Григорова.*
Техн. редактор *М. Д. Кислиновская.*
Переплёт и графическая орнаментация
книги художника *И. А. Байтина.*

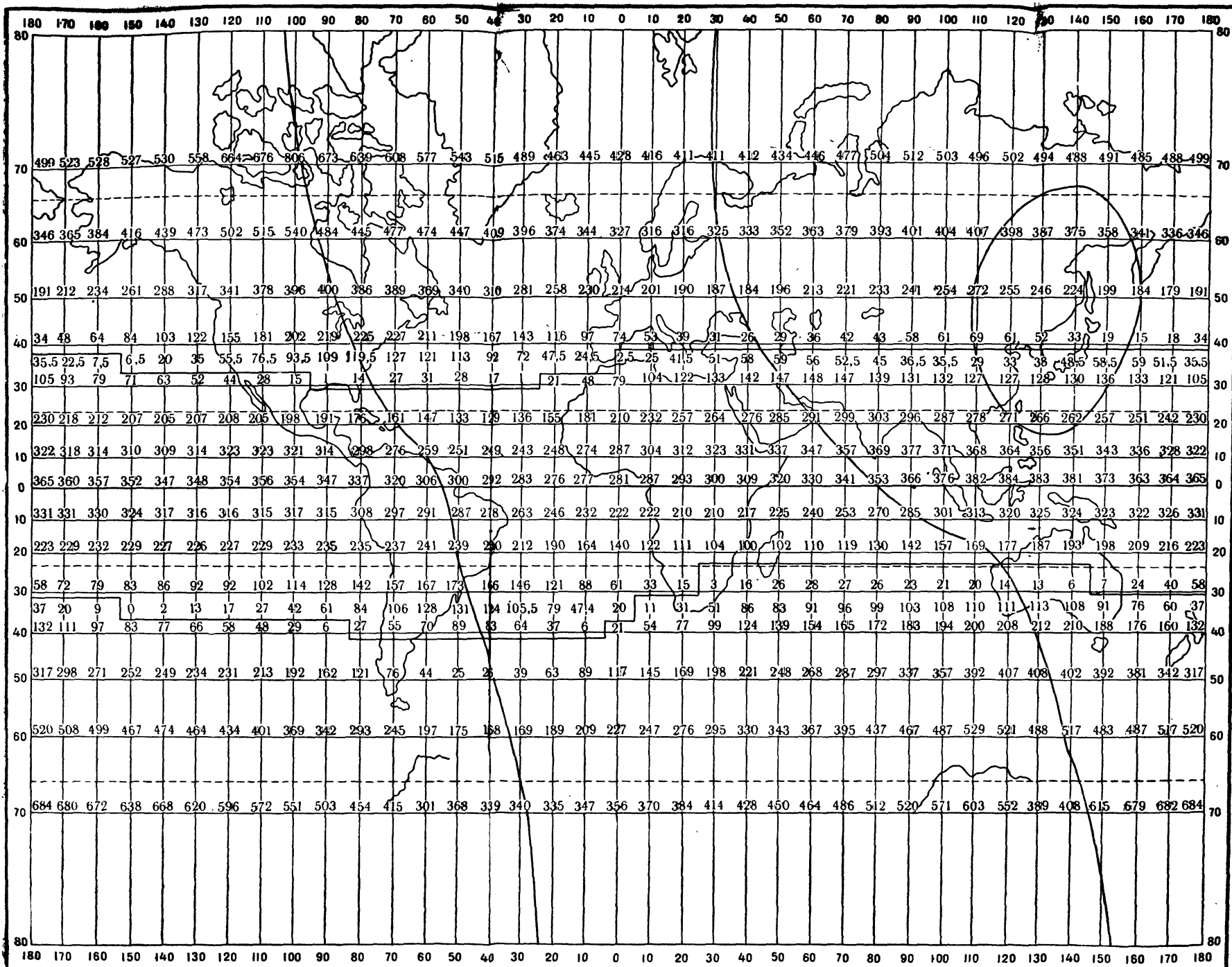


Подписано к печати 14/X 1950 г. Бумага 82×108/32. 9 бум. л. (10 вклеек) 30,34 печ. л. 23,8 уч.-изд. л. 32 505 тип. зн. в печ. л. Т-07880. Тираж 5000 экз.
Цена книги 14 руб. 30 коп.
Переплёт 2 руб. Заказ № 515.



16-я типография Союзполиграфпрома
Главполиграфиздата при Совете
Министров СССР.
Москва, Трёхпрудный пер., 9.

СХЕМА I



CXEMA II

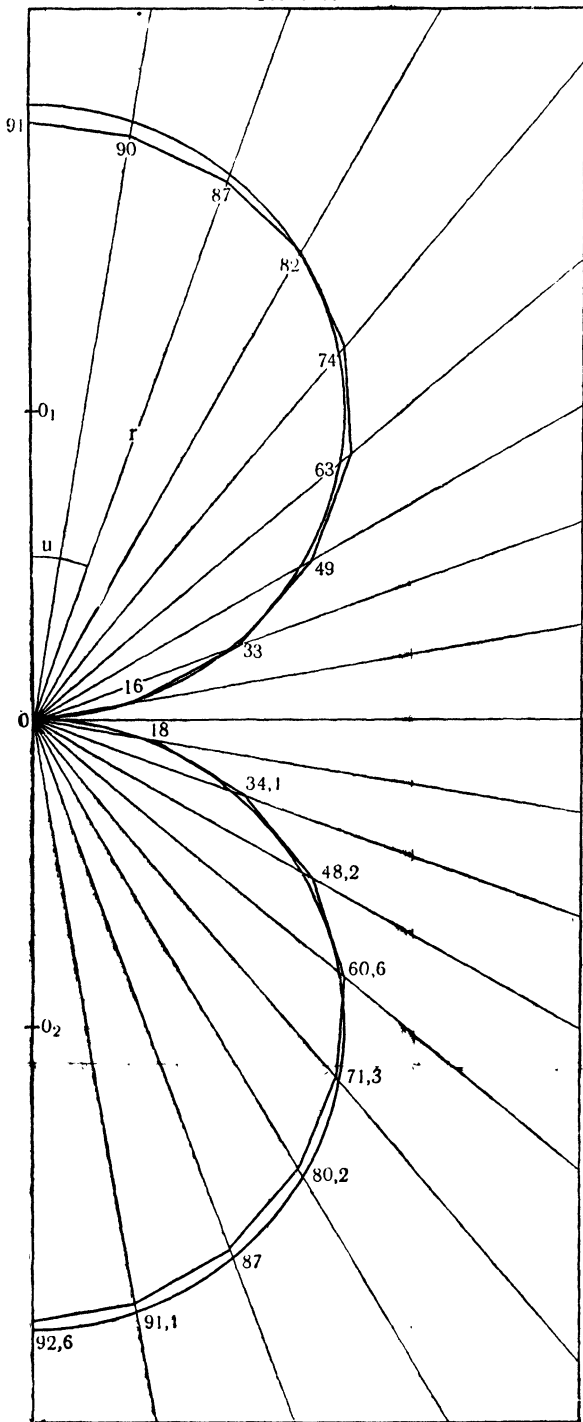
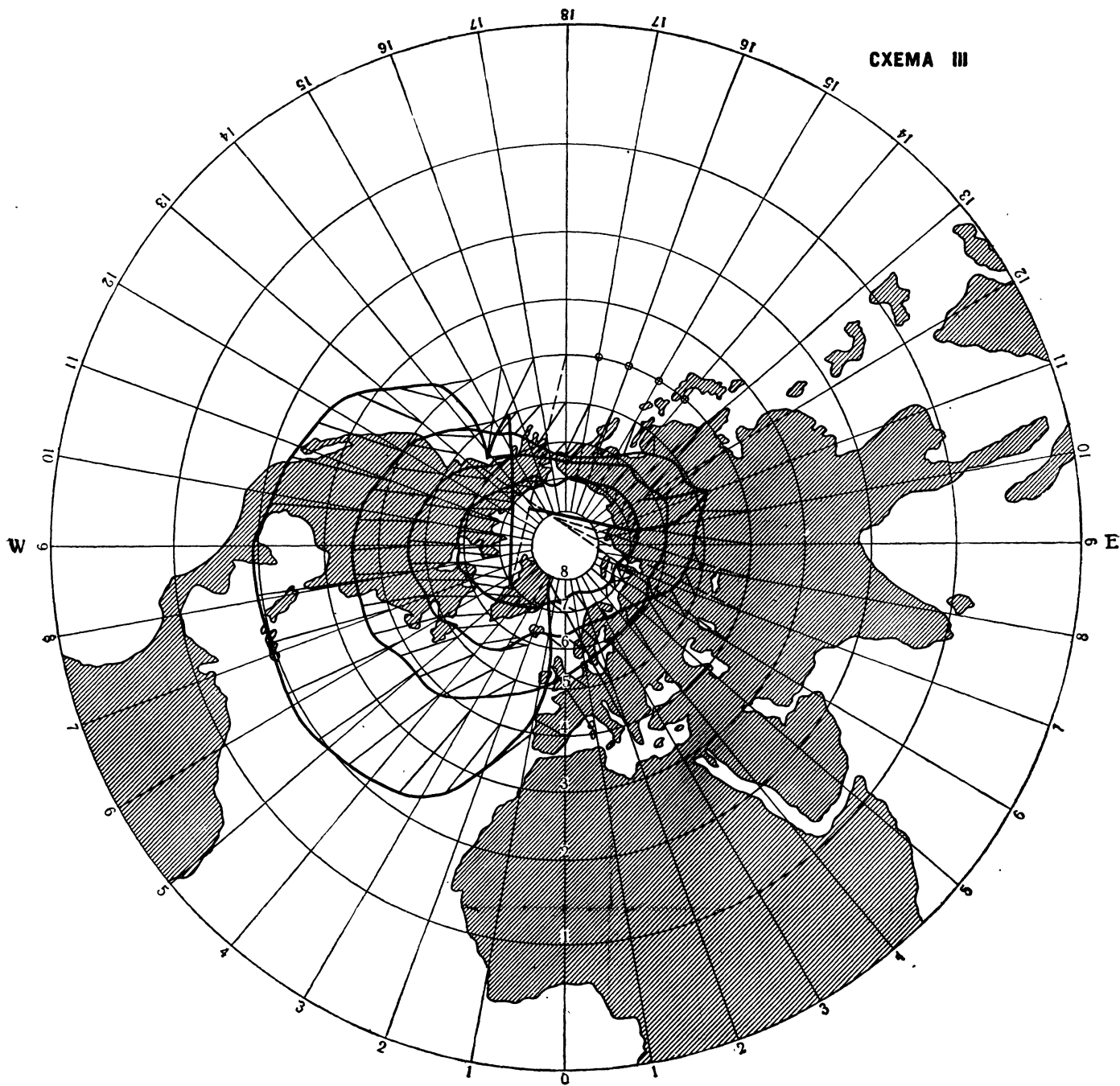
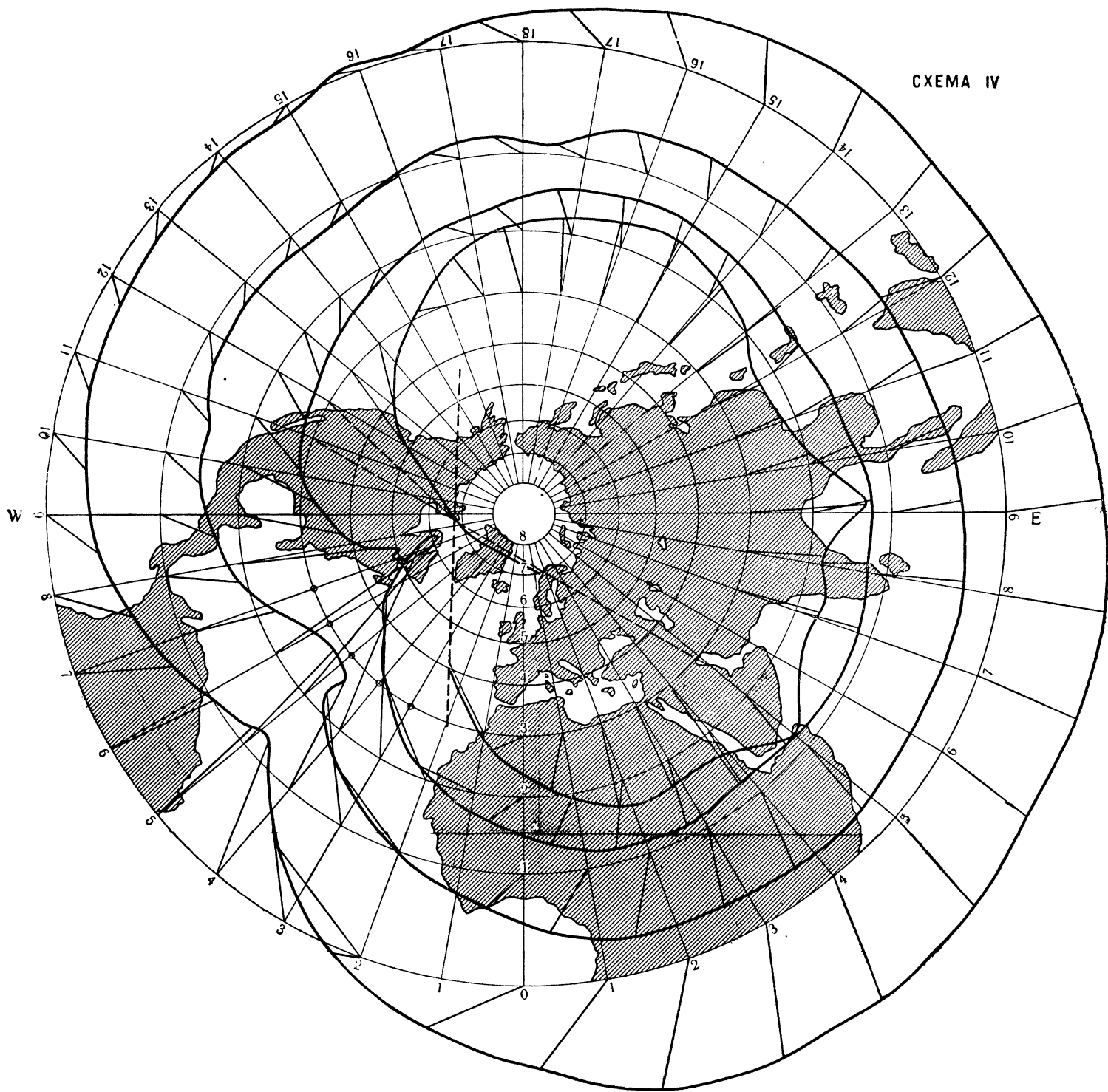


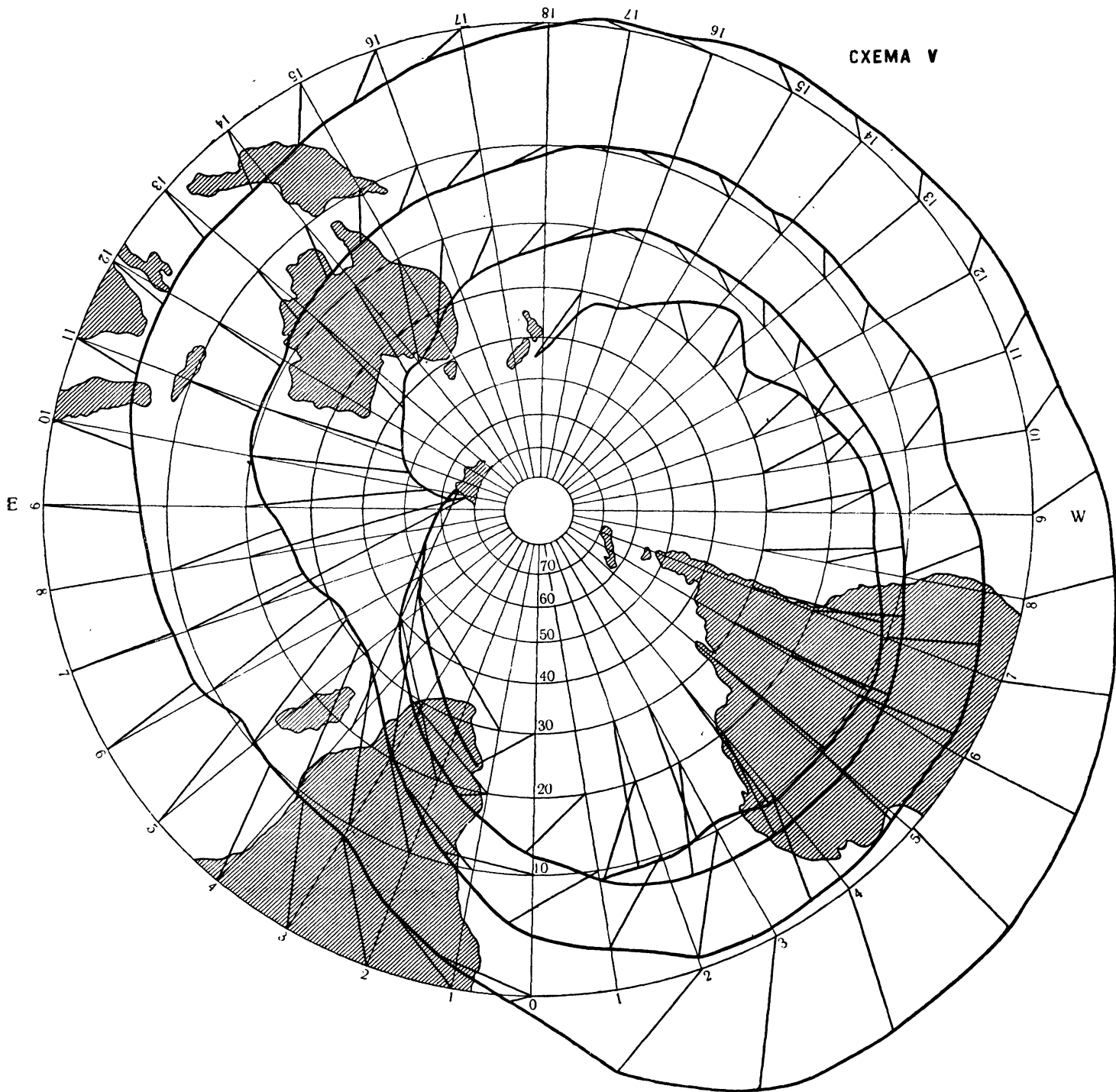
СХЕМА III



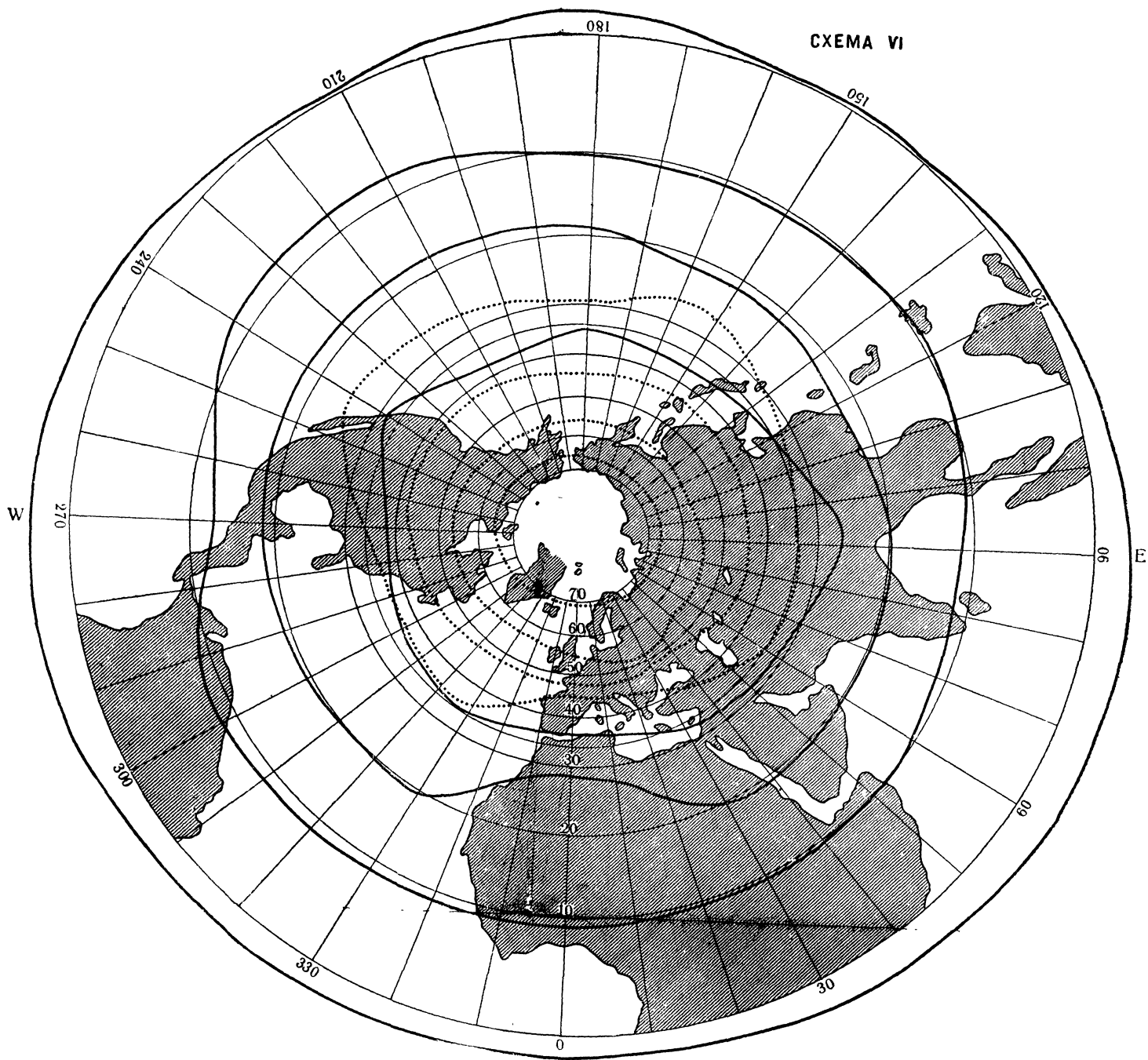
CXEMA IV



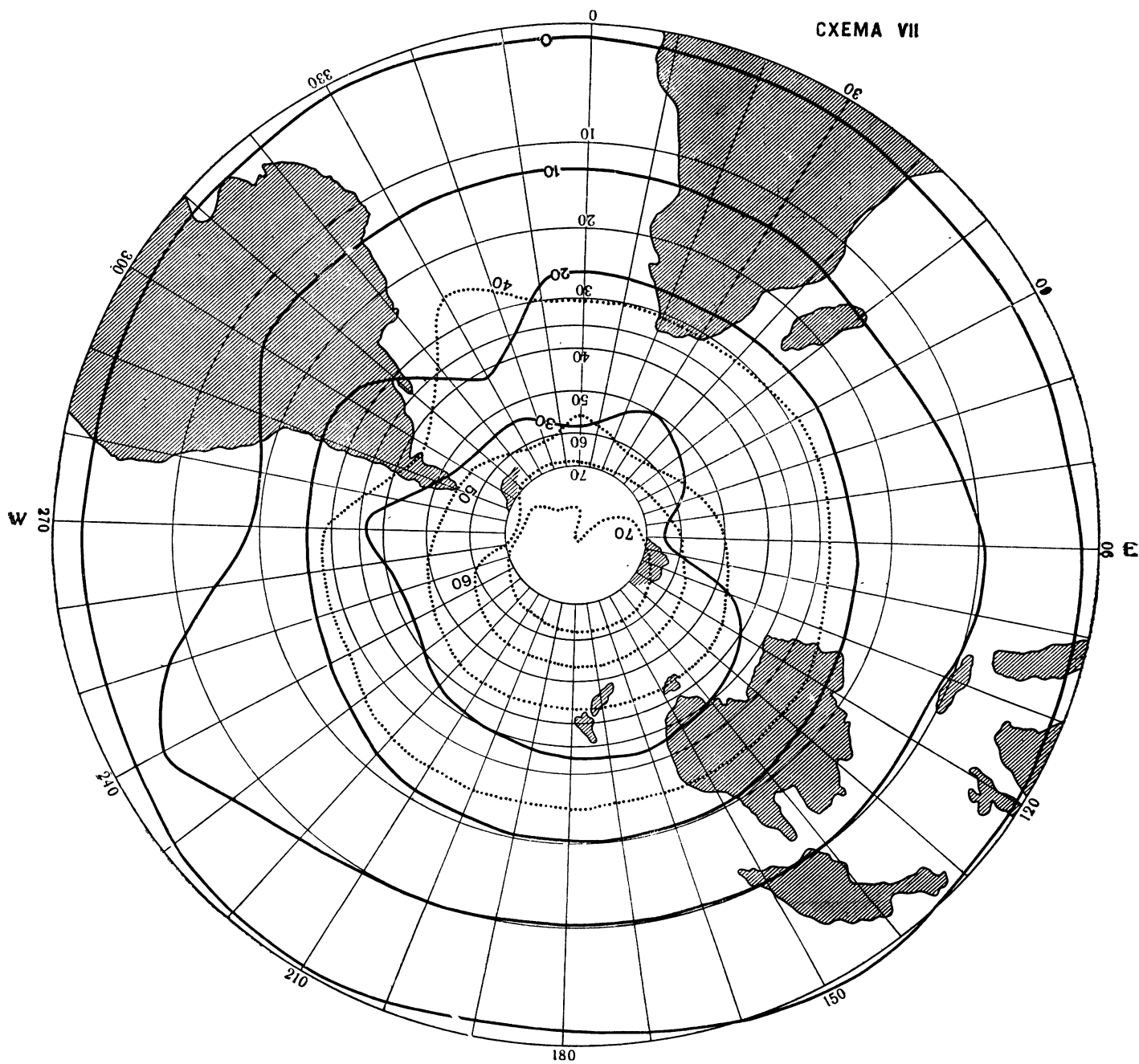
CXEMA V



CXEMA VI



CXEMA VII



CXEMA X

