# УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И РЕШЕТКИ

МЕЖВУЗОВСКИЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

*Выпуск третий*

Издательство Саратовского университета
1975

УДК 519.48
У67

**Упорядоченные множества и решетки. Межвузовский научный сборник, вып. 3. Изд-во Сарат. ун-та, 1975.**

В предлагаемом выпуске сборника «Упорядоченные множества и решетки» помещается серия обзоров по теории решеток (структур). Эти обзоры составлены в основном по материалам реферативного журнала «Математика» за период с начала 1969 г. по июнь 1973 г. включительно. Они тесно связаны с предыдущими обзорами по теории решеток (структур), появившимися в серии «Итоги науки».

Сборник представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов, которые занимаются современной алгеброй.



$\frac{2-2-3}{56-74}$

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем выпуске сборника «Упорядоченные множества и решетки» помещается серия обзоров по теории решеток (структур). Эти обзоры составлены в основном по материалам реферативного журнала «Математика» за период с начала 1969 г. по июнь 1973 г. включительно. Они тесно связаны с обзорами Л. А. Скорнякова [67, 6А188] и М. М. Глухова, И. В. Стеллецкого, Т. С. Фофановой [70, 7А270], появившимися в серии «Итоги науки».

Авторы стремились возможно более полно отразить работы, посвященные собственно исследованию решеток, а также результаты, полученные в других областях алгебры существенным использованием решеток. Некоторые разделы, тесно связанные с теорией решеток, сознательно оставлены вне рассмотрения. Это алгебры логики (полиадические алгебры, алгебры Поста, Лукашевича и т. п.), векторные решетки, решетки, связанные с проективными плоскостями, упорядоченности отношений сводимости, специальные свойства вполне упорядоченных множеств, упорядоченные системы, полугрупповые свойства полурешеток и некоторые другие. Одни из этих разделов уже освещались в обзорах серии «Итоги науки», другие заслуживают специального внимания.

При изложении результатов какой-либо работы приводятся фамилия автора (в русской транскрипции) и ссылка на реферативный журнал «Математика», в которой указываются две последние цифры года, а затем номер соответствующего реферата. Для нереферированных работ в сносках дается библиографическое описание.

Сохранены некоторые несущественные различия в алгебраической терминологии авторов, но из одинаково распространенных синонимов термин «решетка» предпочтен термину «структура», а термин «упорядоченное множество» — термину «частично упорядоченное множество».

Обзоры печатаются под общей редакцией Л. А. Скорнякова и В. Н. Салия.

В. В. ПАШЕНКОВ

# БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

Отметим прежде всего монографии Сикорского [69, 7А278], Д. А. Владимирова [69, 12А400], Казановы [69, 12А399], Ригхи [70, 6А262], Кунтсмана [69, 10А148], Двингера [72, 8А373], Л. А. Скорнякова [70, 12А229, § 8], Фора и Эргона [72, 6А315, 10А195], Мендельсона [73, 1А286]. В большой книге Хенкина, Манка, Тарского [73, 3А320], посвященной памяти А. И. Мальцева, значительное место уделено так называемым цилиндрическим алгебрам, то есть булевым алгебрам с некоторыми дополнительными унарными и нульарными операциями, удовлетворяющими определенной системе тождеств. Отметим попутно работы Собоциньского [73, 4А132], где упрощается аксиоматика цилиндрических алгебр, Комера [73, 4А407], в которой изучается двойственность цилиндрических алгебр, аналогичная двойственности Стоуна. Там же исследуются прямые и подпрямые разложения цилиндрических алгебр. Обзору результатов по топологическим булевым алгебрам посвящен доклад Пирса [72, 6А322]. Обзор результатов и проблем о булевых алгебрах содержится в докладе В. Г. Болтянского [71, 4А462] на симпозиуме в Херцог-Нови.

## § 1. Об определении булевых алгебр

Продолжается изучение булевых колец (алгебр) как универсальных алгебр с операциями, подчиненными некоторым тождествам. Сакико [69, 9А192] и независимо от него Киоси [70, 1А277] описывают булево кольцо как универсальную алгебру с нульарными операциями 0,1, унарной операцией «—»

и двумя бинарными операциями «$+$» и «$\cdot$», для которых выполняются тождества: 1) $r+0=r$; 2) $r\cdot 1=r$; 3) $((-r)+$ $+r)\cdot a=0$; 4) $((ar+by)+cl)r=b(yr)+(ar+l(cr))$. Моргадо [72, 2A397] характеризует булевы кольца как универсальные алгебры $(A;\ 0,-,+,\cdot)$ типа $<0,\ 1,\ 2,\ 2>$ с тождествами 1) $r+0=r$; 2) $r^2=r$; 3) $((-r)+r)\cdot a=0$; 4) $(c+(ay))+$ $+b=(cr)+((rb)+a(yr))$. Гютинг [72, 5A302] задает булеву алгебру как алгебру с нульарной операцией 1, бинарной операцией «$-$» и тождествами 1) $(a-b)-c=(a-c)-b$; 2) $1-$ $-(1-a)=a$; 3) $a-a=1-1$; 4) $a-(a-b)=a-(1-b)$. Тамура [71, 5A397] доказывает четыре теоремы, каждая из которых характеризует булевы алгебры как универсальные алгебры. Одну из таких характеризаций приводит Финч [71, 1A55]. Этому же вопросу посвящена работа Дердеряна [69, 5A255]. Лай [70, 12A236] определяет левое почти кольцо (л. п. к.) как систему $(R;\ +,\ \cdot)$, в которой $(R;\ +)$ группа, $(R;\ \cdot)$ полугруппа, причем $x(y+z)=xy+xz$ для любых $x,\ y,\ z\in R$. Назовем л. п. к. $R$ дистрибутивно порожденным, если $(R;\ +)$ порождается полугруппой $(S;\ \cdot)$, причем $(x+$ $+y)s=xs+ys$ для всех $s\in S\subset R$. Л. п. к. назовем булевым, если $x^2=x$ для любого $x\in R$. Всякое дистрибутивно порожденное булево л. п. к. есть булево кольцо. Варле [72, 11A288] называет нижнюю полурешетку $(S;\ \cdot)$ дистрибутивной, если из $c\geqslant ab$ следует существование таких $a_1\geqslant a$ и $b_1\geqslant b$, что $c=a_1\cdot b_1$. Доказано, что дистрибутивная полурешетка с 0 и 1 тогда и только тогда будет булевой алгеброй, когда каждый ее элемент имеет дополнение. Пусть $S$ — дистрибутивная полурешетка с 0 и 1, в которой только тождественная конгруенция имеет своим ядром нулевой идеал. Такая решетка будет булевой в том и только том случае, если все простые и максимальные фильтры в ней совпадают. Мачадо [72, 11A225] на булевом кольце $(B;+;\ \cdot)$ определяет новые операции: $x\cap y=ax+by+cxy+d$ и $x\cup y=ex+fy+gxy+h$ для некоторых фиксированных $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h$ из $B$. Для того, чтобы относительно новых операций $B$ было булевой алгеброй, необходимо и достаточно выполнение условий $1/x\cap y=$ $=z(x+y)+xy$; 2) $x\cup y=(1+z)(x+y)+xy$ для некоторого фиксированного элемента $z\in B$. С этой работой интересно сопоставить результаты Гетца [73, 4A411]. Пусть $(B;\ \vee,\ \wedge,')$ булева алгебра. Определим на $B$ новые операции: $x\cup y=$ $=(a\wedge(x\vee y))\vee(a'\wedge x\wedge y)$ и $x\cap y=(x'\cup y')'$ для некоторого фиксированного $a\in B$. Алгебра $(B;\ \cup,\ \cap',)$ есть булева алгебра с единицей $a$ и нулем $a'$. Более того, любая булева алгебра с основным множеством $B$, операции которой определимы в терминах операций исходной булевой алгебры и констант, может быть получена указанным способом при подходящем $a \in B$. Отметим также работу Исеки [72, 10А65], где рассматриваются условия, при которых обогащенные (присоединением единичного элемента) решетки являются булевыми алгебрами, и работу Сарторелли [73,2А285], в которой булевы алгебры определяются как упорядоченные множества с некоторыми (отличными от классических) условиями.

## § 2. Вложения в полные булевы алгебры. Расширения и произведения

Кауфман [69, 5А243] обобщает известную теорему Бюхи-Сикорского о том, что всякое упорядоченное множество, обладающее свойством «плотности», однозначно определяет полную булеву алгебру, в которую оно вкладывается в качестве плотного подмножества. Требование «плотности» заменяется указанием семейства подмножеств, имеющих точную нижнюю грань. А. Г. Пинскер [70, 11А217] погружает произвольное упорядоченное множество в полную булеву алгебру. В другой его работе [72, 6А314], совместной с В. А. Гейлером, изучаются различные способы таких погружений. Манк [71, 6А327] строит расширение для булевой алгебры с операторами, которое сохраняет все существующие точные верхние и нижние грани. До этого Йонссоном и Тарским было построено расширение для таких алгебр, являющееся полным и атомным (в отличие от расширения Манка), но не обязательно сохраняющим точные грани. Характеризацию некоторых полных расширений булевых алгебр дает Хигс [71, 6А339]. Бексич [72, 10А199] дает простое доказательство результата Монтейро [66, 9А220]: обозначим через $S(A, B)$ множество всех полуморфизмов $f: A \to B$ для булевых алгебр $A$, $B$, то есть отображений, сохраняющих 0, 1 и объединения; $H(A, B)$ — множество всех гомоморфизмов $A$ в $B$. Пусть $K$ — полная булева алгебра, $A$ — подалгебра булевой алгебры $B$, $f \in H(A, K)$, $d \in S(B, K)$ и $f(x) \leqslant d(x)$ для всех $x \in A$. Тогда найдется такое $h \in H(B, K)$, что $h(x) = f(x)$ при $x \in A$ и $h(x) \leqslant d(x)$ для всех $x \in B$. Приводится также некоторое обобщение этого результата. Аналогичный результат для дистрибутивных решеток с нулем и единицей получает Георгеску [71, 9А251], причем в качестве следствия получается еще одно доказательство равносильности полноты и инъективности в категории булевых алгебр. Отображения булевых алгебр, сохраняющие 0 и объединения, рассматривает Жури [70, 11A219]. Сюда же примыкает работа Бьенко [70, 10A204]. Дэй [70, 12A234] называет решетку $N^+$-полной, если оно $M$-полна для всякого $M<N$. Для того, чтобы цепь $C$ была изоморфна максимальной цепи некоторой $N^+$-полной, атомной булевой алгебры, необходимо и достаточно, чтобы $C$ была $N^+$-полна, обладала нулем и единицей и не содержала плотного в себе полного интервала. Мангани [69, 10A145] показывает, что счетная свободная булева алгебра является единственной бесконечной булевой алгеброй, которая является свободным расширением любой своей бесконечной подалгебры. Якуб [69, 10A144] продолжает изучение свободного произведения булевых алгебр $\{B_\gamma\}$ с амальгамированной подалгеброй $A$, налагая требование, чтобы все рассматриваемые гомоморфизмы были $\alpha$-полными. Такое произведение он называет обобщенным (для данного $\alpha$). В частности, доказывается, что если $\{B_\gamma\}$ семейство $\alpha$-полных булевых алгебр и $A$ есть $\alpha$-полная атомная $\alpha$-регулярная подалгебра в каждой $B_\gamma$, то обобщенное свободное $\alpha$-произведение с $\alpha$-амальгамированной $\alpha$-подалгеброй $A$ существует и с точностью до изоморфизма единственно. Мачиньский [70, 5A247] доказывает аналогичную теорему для случая, когда $A$ есть $\alpha$-дистрибутивная $\alpha$-полная булева алгебра и для каждого $\gamma$ имеется $2^\alpha$-полный мономорфизм $A\longrightarrow B_\gamma$. С этой же тематикой связана другая работа Мачиньского [72, 12A278]. Остановимся на работе Лагранжа [70, 7A274]. Пусть $\{U_t\}_{t\in T}$ — набор булевых алгебр. Обозначим через $P_n$ класс всех $(m, n)$ — произведений булевых алгебр $\{U_t\}$; пусть $X_t$ есть стоуновское пространство алгербы $U_t$ и $X=\prod\limits_{t\in T} X_t$. Рассматривая элементы $a_t$ алгебры $U_t$ как открыто-замкнутые подмножества в $X_t$, определим $g_t(a_t)=\{x\in X: x_t\in a_t\}$ и обозначим через $F_n$ поле множеств, порожденное множествами $\bigcap\limits_{t\in S} g_t(a_t)$ при $S\subset T$; $|S|\leqslant n$. Будем считать $(m, n)$ — произведение $(\{i_t\}_{t\in T}; B)\in P_n$, относящимся к классу $E_n$, если существует $m$-изоморфизм $h: F_n\longrightarrow B$, для которого $B$ есть $m$-расширение $F_n$. Доказано, что существует единственный изоморфизм $h_n: F_n\longrightarrow B$, для которого $h_n(\inf\limits_{t\in S} g_t(a_t))=\inf\limits_{t\in S}(i_t(a_t))$ при $a_t\neq 0$; $a_t\in U_t$ и $|S|\leqslant n$. Изоморфизм $h_n$ является $m$-полным тогда и только тогда, когда

$B \in E_n$. Если $|T| > n$ и $m \geqslant n' > n$, то $P_n \cap E_n$ пусто; если же $|T| > n$ и $m > n$, то $E_n \cup P_{n+1} \neq P_n$. Плонка [72, 3А266] рассматривает для булевых алгебр $B_1$, $B_2$, $B_3$ множество $B = B_1 \times B_2 \times B_3$ и определяет на нем три бинарные и три унарные операции. Отмечаются некоторые свойства этих операций. Обратно, если алгебра $A$ с тремя бинарными и тремя унарными операциями обладает этими свойствами, то $A$ можно рассматривать как подалгебру алгебры $B$, полученной по описанному автором способу. Сас [73, 1А285] называет булево кольцо $B$ ограниченным, если любые два его элемента либо сравнимы, либо дизъюнктны. Для произвольного кольца $A$ некоторое ограниченное булево кольцо $B$ выделяется прямым слагаемым из $A$ в том и только том случае, если выполнено условие: для любой аддитивной подгруппы $C$ из $A$ и для любого элемента $c \in C$ существует такое целое $n$, что $c = nc^2$. Отмечены связи полученных результатов со строением строго регулярных колец. Сформулируем одну проблему, поставленную Бэлбсом и Двингером в работе [72, 8А362], посвященной в основном изучению инъективности и проективности алгебр Поста: найти класс всех таких цепей, что из изоморфизма $B \times C$ и $B \times C'$ свободных произведений произвольной булевой алгебры $B$ и цепей $C$ и $C'$ этого класса следует изоморфизм самих цепей $C$ и $C'$.

### § 3. Вопросы двойственности Стоуна. Фильтры и идеалы

Продолжается интенсивное изучение вопросов, связанных со стоуновской двойственностью. Остановимся прежде всего на серии работ Абяна. В [70, 11А218] дается новое краткое доказательство классической теоремы М. Стоуна. Доказано, что мощность стоуновского бикомпакта безатомной булевой алгебры несчетна [72, 3А264]. Пусть $\varphi: B \to P^*$ есть полное по объединениям (или по пересечениям) представление булевой алгебры $B$ в виде подалгебры алгебры $P^*$ всех подмножеств множества $P$. Тогда $B$ атомна. Если $B$ — произвольная бесконечная булева алгебра и $X$ — совокупность ультрафильтров $B$, то естественный изоморфизм $B \to X^*$ не является полным ни по объединениям, ни по пересечениям [72, 2А398]. Пусть $B$ — булево кольцо; $P(B)$ — множество всех ультрафильтров в $B$. Если $A$ такое подкольцо в $B$, что $A \cup \{b\}$ порождает $B$ для некоторого $b \in B$, то $|P(A)| = |P(B)|$ [73, 3А306]. Пусть $I$ — собственный простой идеал булевой алгебры $B$. Доказана равносильность следующих условий: 1) $\mathrm{Sup} I = 1$; 2) $\mathrm{Sup} I \notin I$; 3) $1 + \mathrm{Sup} I$ есть атом в $B$ (здесь

«$+$» операция сложения в соответствующем булевом кольце). Если $I$ — полный идеал, то $B$ — полная булева алгебра. В этой же работе производится еще ряд интересных результатов. Пусть теперь $B$ — булево кольцо множеств. Следующие условия эквивалентны [71, 10А119]: 1) $\cup E \neq \cup B$ для всякого собственного идеала $E \subset B$; 2) для любого элемента $b \in B$ и любого подмножества $G \subset B$ соотношение $b \in \cup F$ для некоторого конечного $F \subset G$. Райс [69, 2А480] передоказывает теорему Стоуна о представлении булевой алгебры в виде кольца множеств. Негрепонтис [70, 6А379; 71, 5А492] исследует стоуновские пространства так называемых $\alpha$-поглощающих, то есть $\alpha$-универсальных и $\alpha$-однородных в смысле [70, 7А270] булевых алгебр. Этой же тематике посвящена его работа [72, 1А514]. Бернау [72, 12А284] на стоуновском пространстве $X$ дистрибутивной решетки $L$ определяет некоторую новую хаусдорфову топологию. Используя полученное пространство, строится булева оболочка $A$ решетки $L$, то есть такая булева алгебра $A \cap L$, что любой гомоморфизм $L \to B$ в некоторую булеву алгебру $B$ продолжается до гомоморфизма булевых алгебр $A \to B$. При этом элементами булевой алгебры $A$ являются подмножества в $X$, являющиеся бикомпактными и открытыми в новой топологии. Некоторую новую топологию, также отличную от стоуновской, на множестве ультрафильтров булевой алгебры вводит Драб [71, 3А384]. Аналогичное построение проводится для алгебр Брауэра. В. В. Пашенков [71, 2А416] обобщает классическую теорему Стоуна на случай нульмерных, вообще говоря, небикомпактных пространств путем введения на булевой алгебре некоторой топологии. При этом оказывается, что дискретность представленного на топологической алгебре $A$ пространства равносильна тому, что $A$ полна и бикомпактна. Вудс [73, 5А502] рассматривает булеву алгебру $R$ всех регулярных замкнутых множеств пространства $X$. Пусть $I$ идеал в $R$, состоящий из всех псевдокомпактных элементов $R$. Изучается стоуновское пространство $Y$ фактор-алгебры $R/I$. Отметим такой результат: в предположении континуум-гипотезы, пусть $X$ — вполне регулярное не псевдокомпактное пространство, причем 1) мощность $R$ континуальна, 2) каждый счетноцентрированный ультрафильтр содержит псевдокомпактный элемент. Тогда $Y$ гомеоморфно пространству $\beta N \setminus N$ и, кроме того, пространства $\beta N \setminus N$ и $[\beta X \setminus vX]_{\beta X}$ соабсолютны (здесь $vX$ — расширение Хьюита, $\beta X$ — расширение Стоуна-Чеха). См. также работы Вудса [72, 2А622, 624]. Вопросам реализации булевых алгебр посвящена также работа М. Р. Бунятова [73, 6А325]. Мэгил и Глейсенап [69, 9А342] изучают упорядоченное множество $L$ всех нульмерных компактификаций вполне регулярного нульмерного пространства $X$ и естественным образом упорядоченного множества $M$, состоящее из всех таких булевых алгебр открыто-замкнутых подмножеств, которые образуют базу открытых множеств $X$. Доказано, что $L$ полная решетка тогда и только тогда, когда $X$ локально бикомпактно. Очевидно, что $L$ и $M$ изоморфны как решетки. Каррега и Кулон [70, 8А250] рассматривают атомную булеву алгебру $A$ со множеством атомов $U$. Для любого элемента $a \in A$ обозначим через $\alpha(a)$ множество всех атомов $p \in U$, для которых $p \leqslant a$. Пусть $R$ отношение эквивалентности на множестве $U$. Если для любого элемента $a \in A$ существует $\mathrm{Sup}\{p_\alpha\} = \exists a$, где точная верхняя грань берется по всем $p_\alpha \in R[\alpha(a)]$, то назовем отношение $R$ допустимым. На полной атомной булевой алгебре любое отношение эквивалентности допустимо. Отображение $A \longrightarrow A$, определенное законом $a \rightarrow \exists a$ для некоторого допустимого отношения эквивалентности $R$ на $U$ есть квантор. Обратно, для любого квантора $a \longrightarrow \exists a$ отношение эвивалентности $pRg \rightleftarrows \exists p = \exists (q; p, q \in U)$ является допустимым. Изучая допустимые отношения эквивалентности, авторы получают некоторые интересные результаты, касающиеся стоуновского пространства $X$ атомной булевой алгебры $A$. Пусть $S$ есть множество непрерывных отображений стоуновского бикомпакта $X$ булевой алгебры $A$ в двухточечную компактификацию прямой $R$, при которых прообразы точек $+\infty$ и $-\infty$ нигде не плотны в $X$. Известно, что если булева алгебра $A$ вполне регулярна в о-топологии, то при естественной топологизации $S$ является топологическим кольцом, в которое вкладывается $A$. Это построение М. Я. Антоновский и Т. Абдуллаев [71, 5А522] распространяют на произвольные топологические булевы алгебры $A$, причем в кольце $S$ операции непрерывны по каждому переменному ($S$-полутопологическое кольцо). Марчья [72, 1А517] двумя различными способами распространяет понятие регулярности на фильтраты полных (необязательно атомных) булевых алгебр и обобщает теорему об ультрарасширениях по регулярным ультрафильтрам. Кетонен [73, 2А66] в обычном смысле определяет понятие независимого семейства элементов булевой алгебры. Доказано, что каждая булева алгебра, удовлетворяющая условию счетности цепей, является счетно порожденной независимым подмножеством элементов. Этот результат применяется к изучению некоторых свойств ультрапроизведений по нерегулярным ультрафильтрам. Мейкинсон [70, 2A71] показывает, что для стоуновского пространства $X$ бесконечной булевой алгебры $A$ соотношение $|A|=\alpha$ влечет $|X|\geqslant\alpha$. Люксембург [69, 5A247] приводит три примера полных безатомных булевых алгебр, не обладающих никаким собственным $\sigma$-полным идеалом. Прикри [71, 11A323] показывает, что существование измеримого кардинала равносильно существованию полной безатомной булевой алгебры, обладающей $\sigma$-полным простым идеалом (ответ на вопрос Люксембурга). В другой форме этот результат, по существу, был известен ранее (см., например, 63, 4Б366К). Хэрри и Раутенберг [71, 11A324] называют подмножество $E$ булевой алгебры $B$ свободным от противоречий, если фильтр $F(E)$, порожденный множеством $E$, собственный. Для любого элемента $a\in B$ и любой подполурешетки $(M;+)$ следующие условия эквивалентны: 1) $a\in M$; 2) для любого максимального фильтра $U\subset B$ из $a\in U$ следует существование такого элемента $b\in U\cap M$, что $b\leqslant a$; 3) пусть подмножество $N\subset B$ свободно от противоречий и $a\in N$. Тогда существует такой элемент $b\in M$, что $b\leqslant a$ и $\{b\}\cup N$ свободно от противоречий; 4) пусть $N\subset M$ и $N'=\{x\in B : x'\in N\}$ ($x'$ дополнение к $x$ в $B$), причем $\{a\}\cup N'$ свободно от противоречий. Тогда существует такой элемент $b\in M$, что $b\leqslant a$ и $\{b\}\cup N'$ свободно от противоречий. Отметим интересный результат Д. А. Владимирова и Б. А. Ефимова [71, 4A446]: в предположении обобщенной континуум-гипотезы мощность экстремально несвязаного бикомпакта либо является степенью двойки, либо недостижима. Отсюда, в частности, следуют некоторые результаты, касающиеся полных булевых алгебр.

## § 4. Топологические и гомологические вопросы

С целью избежать неудобств, связанных с определением операции замыкания на элементах неполной булевой алгебры, Уилкер [70, 1A276] определяет операцию $f$-замыкания как отображение, ставящее в соответствие каждому элементу $b$ произвольной булевой алгебры $B$ некоторый фильтр $Cb$. В частности, отображение $b\to Cb=\{x\in B : x\geqslant b\}$ есть операция $f$-замыкания. Для полных булевых алгебр построения автора совпадают с классическими. Исбел. [70, 7A273] рассматривает полные атомные булевы алгебры с замыканием, подчиненным естественным условиям. Доказано, что в классе таких алгебр не существует свободной алгебры в смысле полных гомоморфизмов, порожденной одним элементом. Для произвольного нульмерного бикомпактного пространства $X$ со счетной базой Пирс [70, 12A233] рассматривает булеву алгебру $B(X)$ всех его подмножеств как универсальную алгебру с естественным образом определенными двумя бинарными, тремя унарными и двумя нульарными операциями (унарные операции: замыкание, взятие дополнения и взятие топологической производной). Обозначим через $C(X)$ пересечение всех подалгебр универсальной алгебры $B(X)$. Пространства $X$ и $Y$ рассматриваемого класса гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм $\varphi: C(X) \to C(Y)$ алгебр $C(X)$, $C(Y)$, для которого $|\varphi(A)| = |A|$ при любом $A \in C(X)$. Среди ряда других результатов отметим такой: пусть $[X]$ — класс пространств, гомеоморфных пространству $X$. Совокупность всех таких классов $S$ является полукольцом с нулем и единицей относительно операций $[X] \cdot [Y] = [X \times Y]$, $[X] + [Y] = [X \cup Y]$. В другой работе Пирса [71, 1A384] дается частичное решение задачи о классификации счетных булевых алгебр. Асертон [71, 7A352] определяет топологию идеалов $T_{\mathrm{I}}$ на булевой алгебре $B$, беря за предбазу открытых множеств все максимальные идеалы и фильтры в $B$. Пусть $D$ некоторый фильтр в $B$. Взяв множества $U_p = \{(x, y) : x'y + xy' \leqslant p$ для некоторого $p \in D\}$ за базу некоторой равномерности на $B$, определим равномерную топологию $T_{\mathrm{D}}$ на $B$. Среди большого числа свойств $T_{\mathrm{I}}$, $T_{\mathrm{D}}$ и $T$ (топология упорядоченности) топологий, изученных в работе, укажем следующие: на атомной булевой алгебре $B$ топологии $T_{\mathrm{D}}$ и $T$ совпадают для некоторого фильтра $D$; в бесконечной булевой алгебре $T_{\mathrm{I}}$ строго сильнее $T$. Даусон [71, 9A250] изучает свойства полных булевых алгебр проекторов гильбертова пространства. Гайна [72, 11A226] изучает топологию на булевых алгебрах, задаваемую с помощью обобщенных последовательностей. См. также его работу [73, 3Б843] и работу А. В. Потепуна [73, 3Б597]. Эти результаты применяются к изучению векторных мер. Месси [71, 3A78] определяет некоторую функционально полную (через нее, в частности, выражаются исходные операции) бинарную операцию на булевой алгебре с замыканиями. Собоциньский [71, 3A245] упрощает определение этой операции. Прикри [72, 7A50] изучает меры на булевых алгебрах. Оказывается, что существование действительнозначного кардинала равносильно существованию такой безатомной полной булевой алгебры $B$, что для каждого ненулевого элемента $b \in B$ существует мера $\mu$, удовлетворяющая условиям: $\mu(b)>0$ и множество $\{c\in B : c\neq 0, \mu(c)=0\}$ плотно в $B$. Мера $\mu$ называется нормальной, если $\mu[\mathrm{Sup}\{x\in B : \mu(x)=0\}]=0$. Полную булеву алгебру $B$ назовем гиперстоуновой, если для любого ненулевого элемента $b\in B$ существует нормальная мера $\mu$, для которой $\mu(b)>0$. Предполагая существование действительнозначного кардинала, автор строит пример ненормальной меры на гиперстоуновой алгебре. Людвиг [70, 3А534] определяет на булевой алгебре булеву метрику как симметрическую разность и изучает свойства такой метрики. Георгеску [71, 6А328], как и в уже упоминавшейся его работе [71, 9А251]), передоказывает теорему Халмоша об описании инъективных булевых алгебр. Инъективные объекты в категории алгебр Моргана описывает Петреску [71, 12А380]. Тивари [71, 9А248] рассматривает некоторые типы модулей над булевым кольцом, у которых инъективные оболочки являются булевыми пополнениями. Креймер [71, 10А118] находит некоторые условия, при которых подалгебра $B$ булевой алгебры $A$ ретрагируется из $A$. Особо остановимся на работе Ротмана [73, 1А287]. Булева алгебра $C$ называется ретрактной, если для любого эпиморфизма $f : C\longrightarrow D$ булевых алгебр $C$ и $D$ существует такой мономорфизм $g : D\longrightarrow C$, что $fg=1_D$. Двойственно определяется коретрактная булева алгебра. Алгеброй интервалов будем называть булеву алгебру, состоящую из конечных объединений полуоткрытых интервалов $(a, b]$ некоторого линейно упорядоченного множества. Показано, что класс булевых алгебр $FC(T)$ всех конечных и коконечных подмножеств произвольного множества $T$ совпадает с классом коретрактных булевых алгебр. Бесконечная $\sigma$-полная булева алгебра не вкладывается ни в какую алгебру интервалов. В связи с этим высказываются три гипотезы: 1) бесконечная проективная булева алгебра не может быть вложена ни в какую алгебру интервалов; 2) любая подалгебра алгебры интервалов ретрактна; 3) класс ретрактных алгебр совпадает с классом подалгебр интервалов.

## § 5. Булевы уравнения, булевы матрицы, булевы пространства

Укажем ряд работ, дающих способы решения булевых уравнений: Гудстейн [70, 5А245] (для уравнений с одним неизвестным), Матеи [70, 8А248], Хоули [69, 11А54], Ливовский [71, 1А247] [аналогично 66, 1В224], Рудяну [71, 7А96], используя способ решения систем булевых уравнений, предложенный Прешичем [68, 11Б26], выводит ряд теорем (Левенгейма, Порецкого-Шредера-Ито] и получает некоторые их обобщения. Прешич [71, 11А322] получает формулы для решений булевых и псевдобулевых уравнений и уравнений Поста. Давио и Дешанс [70, 8А253] рассматривают булевы уравнения вида $a_0x'_1x'_2+a_1x_1x'_2+a_2x'_1x_2+a_3x_1x_2=0$ над булевой алгеброй $B$. Известно, что условие $a_0a_1a_2a_3=0$ влечет такие оценки для решений: $a_0a_1\leqslant x_1\leqslant (a_1a_3)'$ и $a_0a'_1+a_2x_1\leqslant x_2\leqslant \geqslant (a_2x'_1+a_3x_1)')$. Для произвольных $x^1_1$, $x^2_1$ определим отношение «$\sim$» одинаковости оценок для второго неизвестного. Это отношение оказывается конгруенцией на $B$. В каждом классе конгруентных элементов имеется наименьший, и множество этих наименьших элементов изоморфно фактор-алгебре $B/\sim$. Эти результаты позволяют получить удобный для вычислений алгоритм нахождения решений булевых уравнений с двумя и несколькими неизвестными. Абян [70, 8А252; 71, 4А61] называет бесконечную систему булевых уравнений полиномиальной, если каждая из входящих в эту систему функций содержит конечное число неизвестных. Доказывается, что полнота исходной булевой алгебры является необходимым и достаточным условием для выполнения такого факта: если каждая конечная подсистема произвольной полиномиальной системы булевых уравнений имеет решение, то и вся система имеет решение. Лапшер [70, 1А280] определяет операции верхнего и нижнего замыкания на решетках. Полученные результаты применяются к представлению некоторых типов булевых функций и к решению булевых уравнений. Пиша [69, 2А369] рассматривает для булевой функции $f(X)$ «простое разложение», то есть такое разбиение $(Y, Z, T)$ множества переменных $X$, для которого $1<|Y|<|X|$ и $f(X)=$ $=g[h(Y, T), Z, T]$. Находятся необходимые и достаточные условия для определения простых разложений, у которых $T$ пустое множество. Рассматриваются другие аналогичные вопросы. Райст [70, 1А79] определяет и изучает булевы функции как отображения $B^n\longrightarrow B$, где $B$ — двухэлементная булева алгебра. Бурлаку, Обажян, Урошу [70, 8А246] изучают различные операции над булевыми матрицами. Первый из указанных авторов [70, 8А247] особое внимание уделяет решению уравнений вида $A\times X=B$ в булевых матрицах. С. Г. Иванов [71, 11А321] рассматривает $n\times n$ — матрицы над некоторой булевой алгеброй $U$. Обозначим через $F$ свободную булеву алгебру с $n^2$ свободными образующими $\{x_{ij}\}$, $i$, $j=1$, 2, ..., $n$. Для любой $n\times n$-матрицы $A=\{a_{ij}\}$ над $U$ определим гомоморфизм $\varphi_A: F\longrightarrow U$ как продолжение отображения $\varphi_A(x_{ij})=a_{ij}$. Доказано, что для каждого $n$ существует такая $n\times n$-матрица $T=\{t_{ij}\}$, что подобие матриц $A$ и $B$ равносильно матричному равенству $\varphi_A(T)=\varphi_A(t_{ij})=\varphi_B(t_{ij})=\varphi_B(T)$. Поэтому матрицы $\varphi_A(T)$ естественно рассматривать как каноническую форму матрицы $A$. Фейхтингер и Макаллистер [70,8А255] и Племмонс [71, 10А117] получают ряд теорем о связи бинарных отношений с булевыми матрицами. Охару [69, 3А233] определяет некоторое специальное умножение булевых матриц над двухэлементной булевой алгеброй. Доказано, что для каждой такой $n\times n$-матрицы существует число $m<n-1$, для которого $A^m=A^{m+1}$. Сюда же примыкает работа Субрахманьяма [69, 1А308]. Блис [69, 2А365] определил обычным образом подобие булевых матриц и установил, например, что матрица, подобная диагональной, сама диагональна.

## § 6. Обобщения булевых алгебр. Булевы алгебры с дополнительными операциями

Бэлбс [70, 8А254] вводит в рассмотрение $I$-алгебры, то есть булевы алгебры с дополнительной операцией «$\times$», для которых 1) $x\times(y\times z)=(x\times y)\times z$; 2) $x\times(y+z)=(x\times y)+(x\times z)$; 3) $x\times(y\cdot z)=(x\times y)\cdot(x\times z)$; 4) $x\times 1=x$; 5) если $x\times y=x\times z$ и $x\neq 0$, то $y=z$; 6) для любых элементов $x$, $y$ ($y\neq 0$) существует такой элемент $z$, что $xy=y\times z$. Если выполняются только условия 2(—6), то приходим к определению неассоциативной $I$-алгебры, или $I_0$-алгебры. Изучаются свойства $I_0$- и $I$-алгебр. Из полученных результатов выводится, в частности, что любой интервал свободной алгебры $F$ со счетным множеством свободных образующих изоморфен $F$. А. Н. Шерстнев [69, 4Б550] изучает так называемые булевские логики — находящие приложения в основаниях квантовой механики алгебры, построенные на основе упорядоченных множеств с ортодополнениями. Эббот [69, 2А89] рассматривает импликационные булевы алгебры, то есть булевы алгебры с операцией, соответствующей операции импликации в исчислении высказываний. Дается характеризация алгебр, как таких верхних полурешеток, в которых каждый главный фильтр является булевой алгеброй. Шатобриан и Монтейро [70, 11А223] алгеброй Моргана называют алгебру $(A;+,\cdot,-,1)$ типа $<2, 2, 1, 0>$, где $(A;+,\cdot)$

дистрибутивная решетка с единицей 1 и «—» унарная операция с тождествами $-(-x)=x$, $-(x+y)=(-x)\cdot(-y)$. Такие алгебры под названием квазибулевых уже изучались Бялыницким-Бирулей и Расевой [58, 178]. Приводится конструкция свободных алгебр Моргана с любым числом свободных образующих. Демаре [71, 11А325] называет квантификатором булевой алгебры $A$ отображение $\varphi: A\to A$, при котором $\varphi(0)=0$, $x\leqslant\varphi(x)$, $\varphi(x\cdot\varphi(y))=\varphi(x)\cdot\varphi(y)$. Множество всех квантификаторов естественно упорядочивается. Приводится пример атомной булевой алгебры $A$ и двух квантификаторов на ней $\varphi$ и $\psi$, для которых не существует ни точной нижней, ни точной верхней грани. Кирш и Линдер [69, 2А370] рассматривают конечно-аддитивное отображение $\mu: V\to N$ булевой алгебры $V$ с $n$ атомами во множество целых неотрицательных чисел $N$. Определим на $V$ бинарное отношение $a\ll b\rightleftarrows\mu(a)\leqslant\mu(b)$. Тогда 1) $0\ll a$; 2) $a\ll b$ и $b\ll c\to a\ll c$; 3) $a\ll b$ или $b\ll a$; 4) $a\cap c=b\cap c=0)\to$ $\to(a\ll b\rightleftarrows a\cup c\ll b\cup c)$ для любых $a, b, c\in V$. Приводится пример бинарного отношения на булевой алгебре $V$ с пятью атомами, удовлетворяющего условиям 1 (—4), но не порождаемого никаким конечно-аддитивным отображением $\mu: V\to N$, что опровергает выдвинутую ранее гипотезу Кирша. В другой работе Кирша [69, 5А245] требование конечной аддитивности отображения $\mu$ заменяется требованием сохранения объединений для дизъюнктных элементов булевой алгебры $A$ всех подмножеств конечного множества $M$. Показано, что отношение порядка в алгебре $A$ совпадает с отношением «$\ll$» для некоторой большей конечной булевой алгебры $B$, в которую $A$ изотонно вкладывается, причем число атомов в $B$ не превосходит $2^{|M|}-1$. Хенкин [71, 1А246] для булевой алгебры $A$ определяет $n$-арную операцию $f$ как отображение $A^n\to A$. Назовем операцию $f$ $p$-аддитивной, если для любого подмножества $X\subset A^n$, $|X|\leqslant p+1$, у которого все его элементы различаются только $j$-ой компонентой при $j\leqslant n$, выполняется соотношение $f(SupX)=Sup\{f(z): Z\in\sigma_p(X)\}$, где $\sigma_p(X)=\{y\in A^n:$ $: y=x_1+\ldots+x_p$ для некоторых $x_1, \ldots, x_p\in X\}$. Рассматривая в этом определении произвольные подмножества $X$, приходим к определению вполне $p$-аддитивной операции. Изучается различные свойства таких операций и связь между $p$- и $q$-аддитивными операциями. Показано, что всякая $p$-аддитивная операция $f$ на произвольной алгебре $A$ может быть расширена до вполне $p$-аддитивной операции $f^*$ на полной атомной булевой алгебре $A$ всех подмножеств стоуновского бикомпакта алгебры $A$. Если некоторое равенство в терминах операций $f_1, \ldots, f_к$ выполняется на $A$, то такое же равенство в терминах операций $f_1^*, \ldots, f_к^*$ выполняется на $A^*$ Ву [72, 12А279], используя эти результаты, доказывает, что каждое тождество, в которое не входит символ дополнения, имеющее место в вулевой алгебре $A$ с $p$-аддитивной операцией, сохраняется в ее пополнении. Отсюда, в частности, вытекает уже упоминавшийся результат Манка [71, 6А327]. Зелмер [70, 1А278; 71, 6А330] рассматривает алгебрические системы с тремя операциями, по своим свойствам похожие на булевы алгебры, и изучает эти системы. Другой класс универсальных алгебр, называемых полубулевыми алгебрами, изучает Раузер [72, 4А348, 349]. Доказана теорема о представлении таких алгебр в виде полуполя множеств. Батбеда [72, 4А350] для произвольного множества $A$ определяет булеву метрику как отображение $\varphi: A \times A \to B$ в некоторую булеву алгебру $B$, при котором выполняются условия: $\varphi(a, b)=0 \rightleftarrows a=b$; $\varphi(a, b)=\varphi(b, a)$; $\mathrm{Sup}(\varphi(a, b), \varphi(b, c)) \geqslant \varphi(a, c)$ для любых $a, b, c \in A$. Показано, что совокупность идемпотентов произвольного 3-кольца (определение $p$-кольца см. в 70, 7А270) образует булево кольцо $B$. Отображение $\varphi: A^2 \to B$ для 3-кольца $A$, определенное законом $\varphi(a, b)=(a-b)^2$, удовлетворяет приведенным условиям, то есть является булевой метрикой на $A$. Исследуются свойства этой метрики. Упомянем работу Мачадо [73, 2А296], в которой на 3-кольцах определяются некоторые дополнительные бинарные операции. Манк и Дональд [71, 2А263] определяют $F$-алгебру как алгебру $(A; +, \cdot, -, P, P', Q, Q', D)$ типа $<2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 0>$, для которой $(A; +, \cdot, -)$ булева алгебра. Пусть $U$ — некоторое множество и $A$ — булева алгебра всех подмножеств конечных последовательностей элементов из $U$. Если $X \in A$, то $QX$ $(Q'X)$ есть множество непустых конечных последовательностей, получающихся присоединением произвольного первого (последнего) элемента к последовательностям, входящим в $X$; $PX$ $(P'X)$ — множество последовательностей, получающихся отбрасыванием первого (последнего) элемента для последовательностей, входящих в $X$. $D$ — множество непустых последовательностей, у которых первый и последний элементы совпадают. Такая $F$-алгебра называется алгеброй множеств. $F$-алгебры, изоморфные алгебрам множеств, называются сильно представимыми; $F$-алгебры, изоморфные подпрямым произведениям алгебр множеств, называются представимыми. Классы сильно представимых и представимых $F$-алгебр не аксиматизируемы. Борш [71, 2А261] рассматривает булево кольцо $T$ некоторых подмножеств множества $X$. Пусть $Y$-ассоциативное кольцо или векторное пространство. На $T\times Y$ определим операции $(A, y_1)+(B_1y_2)=(A+B, y_1+y_2)$; $(A, y_1)\cdot\cdot(B_1y_2)=(A\cdot B, y_1\cdot y_2)$; $\lambda(A, y)=(A, \lambda y)$, где $\lambda$ элемент основного поля. Тогда $T\times Y$ превращается в кольцо или некоторое обобщение векторного пространства — «квазивекторное пространство» (в первом случае прямое произведение колец $T$ и $Y$). Наконец, отметим работу Рама [70, 7А224], в которой приводится новое решение 105-й проблемы Биркгофа: находятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы алгебра $(A;\cup,=\cap, +, -)$ являлась прямым произведением кольца и решеточно упорядоченной группы.

## § 7. Другие вопросы

Буковский [70, 1А279] изучает различные типы дистрибутивности в булевых алгебрах и вводит новые определения дистрибутивностей. Мори [69, 5А246], рассматривая некоторые специальные классы булевых алгебр, приводит ряд условий, достаточных для $(\alpha, \infty)$-дистрибутивности и $\beta$-представимости булевых алгебр. Намба [72, 1А62] находит условия, при которых для некоторого кардинального числа $\alpha$ существует такая полная булева алгебра, которая $(\omega, \omega_\beta$-дистрибутивна для всех $\beta<\alpha$, но не $(\omega, \omega_\alpha\ )$-дистрибутивна. Райт [72, 8А378] доказывает, что для произвольного бесконечного кардинального числа $m$ некоторая $m$-полная булева алгебра обладает свойством слабой $m$-продолжаемости тогда и только тогда, когда она слабо $m$-дистрибутивна. Этим решается проблема Сикорского-Матиса [69, 7А278]. Пусть $m, n$ — бесконечные кардинальные числа. Спид [69, 6А246] называет кольцо множеств $(m, n)$-кольцом, если оно $m$-полно в смысле объединений и $n$-полно в смысле пересечений. Среди ряда результатов получается критерий того, чтобы данная решетка была изоморфна $(m, n)$-кольцу множеств. Лагранж [70, 8А251] называет булеву $n$-алгебру $A$ $(k, n)$-представимой, если $A$ изоморфна $F/\Delta$, где $F$ есть $k$-поле множеств и $\Delta$ $n$-идеал в $F$. В предположении обобщенной континуум-гипотезы доказано, что если $m$-алгебра $A$ является $(2^m, m)$-представимой, то слабая $m$-дистрибутивность влечет $m$-дистрибутивность $A$. Камфорт и Хейгор [72, 12А37] находят условия для $m$-полной булевой алгебры $B$, при которых выполняется равенство

$|B|^m=|B|$. Отметим, что для бесконечной булевой алгебры это равенство выполняется не всегда. Полученный результат интересно сопоставить с результатом Пирса: кардинальная счетная степень кардинального числа $|B|$ для полной бесконечной булевой алгебры $B$ равна $|B|$. Петтис [72, 3A267] изучает свойства подалгебр булевых $\sigma$-колец. Некоторый специальный класс булевых алгебр, называемый классом алгебр двух пар, изучают Кишш и Матеи [72, 5A304]. Для произвольных кардинальных чисел $n$ и $m$ ($m$ бесконечно) Буковский и Гавалец [73, 4A410] доказывают такие факты: в булевой $m$-алгебре с $n$ $m$-образующими ($n\leqslant m$) каждый $m$-ультрафильтр главный; свободная $m$-алгебра с $n$ свободными образующими $U_{mn}$ имеет $2^n$ атомов при $n\leqslant m$, а при $n>m$ алгебра $U_{mn}$ безатомна. Приводится еще ряд фактов, касающихся таких алгебр. Хорн [69, 5A242] передоказывает теорему о счетности цепей свободной булевой алгебры. Бизер [73, 4A409] доказывает, что каждая бесконечная полная булева алгебра является обратным пределом булевых алгебр, причем проекции на все эти алгебры не являются изоморфизмами. С. В. Кисляков [73, 3A309] отмечает, что мощность всякой бесконечной полной булевой алгебры равна супремуму мощностей ее свободных подалгебр. Результаты применяются к пространствам непрерывных функций на экстремально несвязных бикомпактах. Трачик [72, 3A265] называет подмножество $X$ алгебры $A$ с конечным числом операции (может быть и бесконечноместных) базой, если любое отображение $f:X\to A$ однозначно продолжается до эндоморфизма $h:A\to A$. Для того, чтобы эндоморфизм $h$ был автоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы ограничение $h$ на $X$ было взаимно однозначным и $h^{-1}[h(X)]=X$. Эндоморфизм $h$ $m$-дистрибутивной булевой алгебры $A$ с базой $X$ является автоморфизмом тогда и только тогда, когда ограничение $h$ на $X$ взаимно однозначно и $h(X)$ является $m$-независимым подмножеством в $A$. Вопрос о существовании полных булевых алгебр, не обладающих нетривиальным автоморфизмом, остается открытым. В связи с этим представляет интерес работа Макалуна [71, 7A353]. Назовем булеву алгебру $A$ жесткой, если она не имеет нетривиальных автоморфизмов. Назовем полную безатомную булеву алгебру $B$ минимальной, если для любой полной безатомной подалгебры $C\subset B$ существует такое подмножество $X\subset B$, что $C\cap x=B\cap x$ для всех $x\in X$ и $\operatorname{Sup}X=1$. Доказана равносильность следующих условий: 1) $B$ — минимальная и жесткая булева алгебра; 2) $B$ не содержит нетривиальных полных безатомных подалгебр. В другой работе Макалуна [71, 8А46] строится модель теории множеств, в которой обсуждаемая проблема получает положительное решение. Сюда же примыкают работы Райхберга [71, 4А479], Гроота и Мориса [71, 6А520], Лозьера [70, 11А331]. Мэгил [71, 5А336] и Б. М. Шайн[1] доказывают, что две булевы алгебры изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны полугруппы всех их эндоморфизмов. Максcон [72, 8А222] упрощает это доказательство, замечая, что изоморфизм мультипликативных полугрупп булевых колец обеспечивает их изоморфизм. Серви [69, 2А368] называет отображение $f: A \to B$ булевых алгебр $A$ и $B$ регулярным гомоморфизмом, если $f(a)=0 \rightleftarrows a=0$ и $f(a_1+a_2)=f(a_1)+f(a_2)$ для любых $a, a_1, a_2 \in A$. Если $F: P \to Q$ — произвольное отображение множеств, то с ним естественно связывается регулярный гомоморфизм $F^*$ булевых алгебр $\widetilde{P} \to \widetilde{Q}$ всех подмножеств множеств $P$ и $Q$. Доказано обратное: для всякого регулярного гомоморфизма $f: A \to B$ булевых алгебр $A$ и $B$ существуют подходящие множества $P$ и $Q$, мономорфизмы $\varphi: A \to \widetilde{P}$, $\psi: B \to \widetilde{Q}$ и отображение $F: P \to Q$, для которых $F^*\varphi=\psi f$. Степлс [70, 7А272] с помощью некоторой специальной конструкции передоказывает теоремы Никодима, Тарского и Кэли. При этом получаются некоторые обобщения этих теорем. Отметим серию работ Карпинтейро [71, 12А109; 72, 6А313, 8А374, 10А196]. Для булевых алгебр $A$ с условием $|A|=m$ при бесконечном $m$ оценивается число всех попарно неизоморфных алгебр (их оказывается $2^m$) и число алгебр, ограниченных условиями $|A|=m$, $|X|=2^m$ (здесь $X$ — стоуновское пространство алгебры $A$). Кроме того, в третьей из указанных работ отмечается, что если счетная булева алгебра $A$ имеет счетное множество атомов и континуальное множество простых фильтров, то $A$ изоморфна булевой алгебре $A \times A \times A$ и не изоморфна $A \times A$, так что известная проблема Халмоша о существовании такой алглебры получает положительное решение. Носаль [73, 3Б857] доказывает, что в булевой алгебре $\sum\limits_{1=n}^{\infty} a_n$ существует тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Креймер [71, 8А255] для некоторого класса $S$ непустых счетных бесконечных булевых алгебр характеризует следующие классы: $S_1$ — класс всех булевых алгебр, имею

[1] Fund. math., 1970, 68, № 1, с. 31—50.

щих подалгебры в $S$; $S_2$ — класс всех подалгебр из $S$; $S_3$ — класс всех булевых алгебр, являющихся гомоморфными образами алгебр из $S$; $S_4$ — класс всех булевых алгебр, имеющих гомоморфные образы в $S$. Квантовые семейства булевых алгебр изучает Мачиньский [70, 11Б750].

Т. С. ФОФАНОВА

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РЕШЕТОК

Первые два параграфа этой статьи посвящены специально дистрибутивным и модулярным решеткам, так как эти классы занимают ведущее место в теории решеток (за исключением булевых алгебр) по числу и значимости посвященных им исследований. Все работы структурно-геометрического направления освещены в § 2, пункт 1, хотя это направление уже давно вышло за рамки теории модулярных решеток. Другие важные классы решеток рассматриваются в § 3. Общие вопросы, в том числе аксиоматика дистрибутивных и модулярных решеток, излагаются в § 3. Если параграф или отдельный пункт параграфа посвящен специально какому-то типу решеток (например, дистрибутивные решетки, ортомодулярные решетки), то почти всюду основное свойство (дистрибутивность, ортомодулярность) оговаривается лишь вначале, а далее до конца этого параграфа или пункта оно предполагается выполненным. При рассмотрении каждой статьи дается ссылка типа «...Лаксер [71, 9А239] доказал..., и далее по следующей ссылке речь идет о той же самой работе. Если следующая ссылка имеет, например, вид [70, 11А220], то имеется в виду другая работа того же автора. Заметим, что многообразиям решеток и категорным вопросам посвящен отдельный обзор.

## § 1. Дистрибутивные решетки

**1. Операции на классе дистрибутивных решеток. Некоторые общие вопросы.** Гретцер и Лаксер [70, 10А207] получили условие, необходимое и достаточное для того, чтобы в категории дистрибутивных решеток (с 0 и 1) и в категории булевых алгебр выполнялось так называемое $P(m, n)$-цепное условие ($m$ и $n$ кардинальные числа). Бэлбс и Двингер [72, 8A367] доказали, что представление дистрибутивной решетки (д. р.) с 0 и 1 в виде свободного произведения $B^*C$ булевой алгебры $B$ и цепи $C$ является единственным тогда и только тогда, когда $C$ обладает нулем и выполняется одно из условий: 1) $B$ двухэлементна; 2) $C$ не имеет нетривиальных автоморфизмов. В другой работе [72, 1A505] они доказали, что д. р. является подпрямым произведением трехэлементных цепей тогда и только тогда, когда она не содержит невырожденной булевой алгебры, выделяющейся прямым слагаемым. Бэлбс [69, 12A389] рассматривает семейство $\mathbf{P}$ упорядоченных сумм [70, 7A270, стр. 113], получающихся при всевозможных порядках на множестве индексов $P$. Множество $\mathbf{P}$ упорядочивается таким образом, что свободное произведение оказывается в нем наибольшим элементом, а ординальная сумма — наименьшим. Вводится понятие $(J, M, m)$ — расширения упорядоченной суммы $\sum\limits_{\alpha \subset P} L_\alpha$, исследуются условия его существования и некоторые другие свойства (здесь $J$, $M$ — некоторые подмножества в $\sum\limits_{\alpha \in P} L_\alpha$, а $m$ — кардинальное число). Ряд интересных теорем (без доказательства) о строении тензорного произведения дистрибутивных решеток содержит работа Фрейзера [72, 3A269Д]. О максимальных цепях в кардинальном произведении дистрибутивных решеток см. работу Пиша [72, 10A192].

**2. Идеалы, фильтры, конгруенции и подрешетки дистрибутивных решеток.** Итурриоз и Мейкинсон [70, 10A206] доказали, что мощность бесконечной дистрибутивной решетки (д. р.) не превосходит мощности множества ее простых фильтров, и вывели ряд следствий из этого результата. Пусть $\mathbf{P}(L)$ — множество простых идеалов решетки $L$ вместе с $L$ и пустым множеством. Бэлбс [72, 5A305] получил простые условия, необходимые и достаточные для того, чтобы упорядоченное множество $P$ было изоморфно $\mathbf{P}(L)$ для некоторой д. р. $L$, порождаемой своими $\wedge$-неприводимыми элементами. О связи аксиомы выбора с существованием максимальных идеалов в решетках множеств см. работу Белла и Фремлина [73, 2A286]. Пусть $(a]$ — главный идеал, порожденный элементом $a \in L$ и $(a]^* = \{t \mid t \in L,\ t \wedge x = 0$ для всех $x \in (a]\}$. Спид [69, 12A402] изучает класс $\Delta^*$ таких д. р. с 0, которые удовлетворяют условию: если $L \in \Delta^*$, то для любого $x \in L$ существует такой элемент $y \in L$, что $(x]^{**} = (y]^*$. Все д. р. с псевдодополнениями входят в этот класс. Для решетки

$L \in \Delta^*$ доказана эквивалентность свойств: 1) $L$ — булева; 2) $L$ является дизъюнктной решеткой (то есть если $x<y$, то существует такой $z \in L$, что $0=x \wedge z \neq y \wedge z$); 3) 1 является единственным плотным элементом в $L$. Получены некоторые топологические характеризации класса $\Delta^*$. Следующая работа Спида [70, 2А276], тесно связанная с вышеупомянутой, посвящена изучению двух интересных конгруенций д. р. с нулем. Решетку с нулем, в которой каждый простой идеал содержит единственный минимальный простой идеал, Корниш [73, 5А296] называет нормальной. Он выводит некоторые свойства нормальных решеток и различные (в том числе топологические) критерии нормальности д. р. Пусть $K$ — выпуклая подрешетка решетки $L$. В терминах некоторых конгруенций на $L$, связанных с подрешеткой $K$, Айтаи [71, 11А327] получает условие, необходимое и достаточное для существования идемпотентного эндоморфизма $L \to K$, и рассматривает еще некоторые эквивалентные условия. О выпуклых подрешетках д. р. см. работы Гавалеца [72, 3А268], Беккера [69, 4А245], Ниминена [73, 1А288].

**3. Решетки (или алгебры) Стоуна** (в дальнейшем сокращенно а. С.). Интерес к решеткам Стоуна за последнее время продолжает расти. Причем, если раньше основная масса исследований была посвящена различным характеристикам и представлениям а. С. (см. 70, 7А270, стр. 112), то теперь целью большего числа работ является изучение их строения и общекатегорных свойств (о последнем см. соответствующий обзор настоящей серии). Снабженный обширным списком литературы обзор по а. С., содержащий как основные ранее известные теоремы, так и новые результаты, написал Бэлбс [71, 2А260]. Остановимся подробнее на представлении а. С. тройками, поскольку оно позволяет получить много интересных результатов. Это представление было предложено Ченом и Гретцером [71, 1А242, 243]. Аналогичная конструкция для других классов решеток и полурешеток независимо получена Катриняком [69, 7А257; 73, 3А298]. Пусть $F(L)$ обозначает решетку фильтров данной решетки $L$. Под тройками понимаются выражения вида $\langle C, D, \varphi \rangle$, где $C$ — булева алгебра, $D$ — дистрибутивная решетка с 1 и $\varphi : C \to F(D)$ — гомоморфизм, сохраняющий 0 и 1. Естественным образом определяются гомоморфизм и изоморфизм троек. Центр $C(L)$ а. С. $L$ является булевой алгеброй, множество $D(L)$ ее плотных элементов (элемент $x$ плотен, если $x^*=0$) — дистрибутивной решеткой с 1, причем гомоморфизм

$^{L}: C(L) \to F(D(L))$, определяемый условием $a\varphi^{L} = \{x | x \in D(L),\ x \geqslant a^*\}$, сохраняет 0 и 1. Тройка $< C(L)$, $D(L)$, $\varphi^{L} >$ называется тройкой, ассоциированной с а. С. $L$. При этом можно отождествить $L$ с множеством упорядоченных пар $< z, a >$, где $a \in C(L)$ и $z \in a\varphi^{L}$. Основная теорема: произвольная тройка изоморфна тройке, ассоциированной с некоторой а. С. Алгебры изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны ассоциированные с ними тройки. Для произвольной булевой алгебры $C$, $|C| > 1$ и для дистрибутивной решетки $D$ с единицей всегда существует тройка $< C, D, \varphi >$, то есть решетки $C(L)$ и $D(L)$ «независимы» в $L$. Гомоморфизм а. С. влечет гомоморфизм ассоциированных с ними троек и обратно. В работе [71, 1A243] исследуются множества $P(L)$, $P(C)$ и $P(D)$ простых идеалов решеток $L$, $C$ и $D$, соответственно, а также (с использованием представления тройками) доказывается ряд теорем о строении а. С. Например, $L$ полна тогда и только тогда, когда выполняются условия: 1) $C(L)$ полна; 2) $D(L)$ условно полна и для каждого подмножества $E \subset D(L)$ множество $C_E = \{a | a \in C(L)$ и $\bigwedge\limits_{d \in E}(d \vee a^*)$ существует $\}$ имеет наибольший элемент в $C(L)$. Финч [71, 1A271] изучает класс решеток $L$, называемых специальными, у которых в ассоциированных тройках гомоморфизм $\varphi^{L}$ взаимно однозначен. Доказано, что всякая а. С. изоморфна подпрямому произведению своего центра и некоторой специальной решетки. В работе Спида [69, 11A265] изучаются плотные решетки (решетка плотна, если $\{x \in L | a \wedge x = 0\} = \{0\}$ для всех $a \in L$) и дается характеристика а. С., использующая это понятие. Единый подход к алгебрам Стоуна и Поста, использующий понятие $p$-решетки, изложен в работах Катриняка и Митчке [71, 4A59; 734A408]. С этой точки зрения изучаются плотные элементы, простые идеалы этих алгебр и другие понятия.

**4. Произвольные дистрибутивные решетки с псевдодополнениями.** Строению дистрибутивных решеток с псевдодополнениями (или, для краткости, $p$-алгебр) посвящены статьи Лаксера [72, 2A402] и Гретцера и Лаксера [72, 2A403; 73, 4A414]. В них установлены следующие важные факты: а) $p$-алгебра подпрямо неразложима тогда и только тогда, когда множество ее элементов, отличных от 1, образует булеву алгебру; б) каждую конгруенцию, заданную на подалгебре (то есть $*$ -подрешетке) $p$-алгебры, можно продолжить до конгруенции всей алгебры. Эти свойства применяются для описания решетки многообразий $p$-алгебр. Доказано, что всякая $p$-алгебра изоморфно вложима в решетку идеалов некоторой атомно порожденной булевой алгебры, а также получен ряд теорем, связывающих условие б) со свойствами свободного произведения и амальгамами. Катриняк [73, 3А298] получил представление $p$-алгебр тройками, подобно тому, как это сделано для алгебр Стоуна, и на основе этого представления изучал конгруенции, гомоморфизмы, прямые произведения $p$-алгебр. В другой работе [73, 4А416] он доказал, что $p$-алгебра является брауэровой решеткой (синонимы: решетка с относительными псевдодополнениями, импликативная решетка) тогда и только тогда, когда решетка ее плотных элементов брауэрова. Здесь же получено представление брауэровых решеток тройками. См. также работу Катриняка [70, 8А257].

**5. Другие вопросы.** Бесконечно дистрибутивные, условно полные решетки, которые допускают специальное представление в виде подпрямого произведения цепей, М. Г. Рабинович назвал вполне разложимыми. Этот класс включает в себя большое число решеток, связанных с функциональным анализом. В серии работ [69, 12А387;70, 9А232, 11А220, 12А238; 72, 7А255; 73, 1А277] изучаются гомоморфизмы, пополнения и представления этих решеток, а также связь между разложимыми решетками и решетками Стоуна. О свойствах слабых дополнений в дистрибутивных решетках (д. р.) см. работу Чинтаямма [71, 4А275]. Изучение строения решеток с интенсиональными дополнениями, интересных своими логическими приложениями, продолжили Дани и Белнап [69, 4А243] (об этих решетках см. также 70, 7А270, стр. 114). Эванн [69, 1А317] исследовал локально атомные, локально дистрибутивные сверху решетки подмножеств, замкнутых относительно некоторого оператора замыкания. Работа Пика [73, 2А281] посвящена свойствам элементов конечных д. р. Барбу [71, 2А266] ввел для конечной д. р. понятие расстояния между подмножествами и привел алгоритм, позволяющий для любого подмножества построить максимальную цепь с минимальным до него расстоянием. О различных понятиях размерности для д. р. см. статью Гавалеца [72, 2А388]. Некоторое отображение конечного множества в д. р. $L$ и связанное с ним понятие размерности в $L$ изучал Мисюревич [70, 6А261]. Ортогональные дополнения подмножеств д. р. с нулем Фиала [71, 12А381] называет полярами. Упорядоченная включением совокупность всех поляр решетки оказывается булевой алгеброй.

Впрочем, это следует из общего результата А. С. Бондарева [73, 3А307] для упорядоченных множеств. Работа Фиала посвящена в основном исследованию пространства собственных максимальных идеалов булевой алгебры поляр. Рудяну [69, 5А253; 71, 4А277] обобщил некоторые результаты Гудстейна о функциях на д. р. О функциях говорится также в заметке Карлсона [69, 1А307]. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы полукольцо с 1 (с 0 и 1) было д. р. с 1 (с 0 и 1), указал Глазек [69, 6А244]. О некоторых бесконечных дистрибутивных тождествах см. работу Якубика [69, 12А401]. См. также статьи Боргеса [72, 5А309] и Алимпич [70, 4А302].

## § 2. Модулярные, ортомодулярные, полумодулярные и близкие к ним решетки

**1. Геометрические вопросы.** О более ранних работах этого направления, а также некоторые определения см. в одноименных параграфах обзоров по теории решеток [67, 6А188; 70, 7А270] и в обзоре по теории колец [64, 11А217]. Монография Ф. Маеды и Ш. Маеды «Теория симметрических решеток» [71, 8А252] является итогом большой серии работ (в основном этих же авторов), посвященных изучению решеток, в которых отношение модулярности пар симметрично. В ней систематически изложена теория аффинных решеток и параллельности, имеющая глубокие связи со структурной теорией проективных геометрий. Кроме геометрических решеток (то есть матроидных решеток и решеток Вилкокса), рассматриваются симметрические решетки, связанные с функциональным анализом, и их обобщения. Результаты работ Ш. Маеды [69, 7А252; 70, 1А271; 72, 2А408] вошли в эту монографию. Глубокие результаты, устанавливающие связи между исследованиями Ш. Маеды и работой Вилле [68, 5А345] о решетках с полудополнениями, а также связи между различными понятиями структурно-геометрического направления, принадлежат Яновичу [70, 11А221; 71, 4А274]. К сожалению, точная формулировка теорем потребовала бы дать дополнительные определения, что невозможно ввиду ограниченного объема настоящей статьи. В другой работе [69, 7А255] Янович изучает условно непрерывные сверху решетки, то есть решетки, в которых существует sup для каждого непустого ограниченного сверху подмножества, причем $a_\delta \uparrow a \to a_\delta \wedge b \uparrow a \wedge b$ для любого $b \in L$. Идеал $I \subset L$ называется полным, если он замкнут относительно sup, существующих в $L$. Показано, что на решетке $K(L)$ полных идеалов решетки $L$ можно ввести функцию размерности, индуцирующую функцию размерности на $L$. Выведены условия, необходимые и достаточные для представления решетки в виде некоторой подпрямой суммы семейства идеалов.

Элемент $x$ решетки называется циклом, если идеал $(x]$ является цепью. Изучению модулярных решеток, в которых каждый элемент может быть представлен в виде объединения конечного числа циклов, посвящены работы С. А. Анищенко [69, 1А304; 71, 4А278, 7А345].

Артман [69, 8А226] строит тернарное кольцо, координатизирующее модулярную решетку с однородным базисом порядка 3, и исследует его свойства. К координатизации примарных решеток с однородным базисом примыкает его работа 73, 6А330. О координатизации решеток так называемыми кортежами Бэра см. статью Блиса, Харди и Копсона [73, 4А404]. Кроун [71, 6А358] обобщил на категории теорему Яновича о координатизации решеток полугруппами Бэра. Вопросы координатизации решеток бэровскими полугруппами подробно рассмотрены в монографии Блиса и Яновича[1]. В частности, получена теорема: всякая решетка с 0 и 1 изоморфна решетке так называемых $K$-аннуляторных идеалов некоторой бэровской полугруппы. Крапо [69, 3А243] вводит операцию объединения геометрических полумодулярных решеток и исследует ее свойства (в основном, для конечного случая). К геометрическим вопросам теории решеток относятся также работы Бастерфилда и Келли [69, 1А322], В. Я. Басеншпилера [72, 12А275], Грина [71, 7В476], Дилуорса и Грина [71, 12В559].

**2. Ортомодулярные решетки.** Как разнообразные приложения, так и интересные алгебраические свойства ортомодулярных решеток привели к появлению большой серии работ, специально посвященных исследованию этого класса решеток. Относящиеся сюда более ранние результаты (преимущественно геометрического характера) отражены в обзорах [67, 6А188, стр. 246—248; 70, 7А270, стр. 115—116]. Кроме того, Холланд [72, 4А342К] написал великолепный подробный обзор по теории ортомодулярных решеток, включающий в себя результаты, опубликованные до 1966 года.

Рэндел [69, 12А385] доказал, что полная счетная ортомодулярная решетка (о. р.) атомна. Если $m$ — бесконечное

[1] Blyth T. S., Janowitz M. F. Reziduation theory. N. y., 1972.

кардинальное число, то о. р., в которой существует объединение любого семейства ортогональных элементов мощности $\leqslant m$, является полной [Холланд, 71, 9А249]. Пример модулярной решетки с ортодополнениями, пополнение сечениями которой не ортомодулярно, привел Адамс [70, 9А234]. Финч [71, 1А241] рассматривал решетку $C(I,\perp)$ всех подмножеств, замкнутых по отношению к операции замыкания $X \to X^{\perp\perp}$, определенной на подмножествах непустого множества $I$ с отношением ортогональности $\perp$, и вывел условия, необходимые и достаточные для ортомодулярности некоторых ее подрешеток. Об этой решетке и некотором классе отображений о. р. см. также работу Фоулиса и Рэндела [72, 1А510]. В статье Финча [70, 10А210] с помощью двух новых операций на о. р. вводится понятие ортотранспонированных интервалов и доказывается аналог принципа транспозиции Дедекинда. Бевис [73, 5А306] рассматривал условия, при которых в о. р. выполняются дистрибутивные тождества специального вида для некоторых подмножеств. О дистрибутивности в о. р. см. также его работу [71, 11А313]. Если в решетке с единственными ортодополнениями (то есть в о. р.) для любых $x, y, z \in L$ выполняется импликация $x' \vee y = 1$ и $y' \vee z = 1 \to x' \vee z = 1$, то $L$ дистрибутивна и, следовательно, является булевой алгеброй [Фэй, 69, 1А313].

Работы Яновича [71, 11А316; 73, 2А280, 4А393], примыкающие к исследованию геометрических свойств о. р., посвящены так называемым индексированным о. р. Эти статьи образуют самостоятельное интересное направление, однако формулировка результатов потребовала бы много дополнительных определений.

Идеал $I$ о. р. $L$ называется $p$-идеалом, если $(e \vee f') \wedge f \in I$ для любых $e \in I$, $f \in L$. Марсден [71, 4А270] ввел понятие коммутанта $J(L)$ в о. р. $L$ так, что $J(L)$ является $p$-идеалом и решетка $L/J(L)$ — булевой. Если $I \subset L$ есть $p$-идеал и решетка $L/I$ булева, то $I \supseteq J(L)$. Исследуя коммутанты обобщенных о. р., изучавшихся ранее Яновичем, он доказал, что в обобщенной о. р. $L$ коммутант также является $p$-идеалом и что решетка $L/J(L)$ дистрибутивна. Если же $I$ есть такой $p$-идеал обобщенной о. р. $L$, что $L/I$ дистрибутивна, то $I \supseteq J(L)$. Обобщенная о. р. разрешима тогда и только тогда, когда она дистрибутивна.

Группу автоморфизмов о. р. изучал Гадер [72, 4Б988]. Гричи [71, 11Б949] привел пример о. р., не допускающей ограниченной меры. Приложениям о. р. к геометрии и логике квантовой механики посвящены работы Финча [71, 1А55, 66], Беннета [71, 3А250], Киндера и Вольфа [71, 7А356], Фридмана и Глимора [72, 8А70], Окса [72, 11А29]. Матрицы с элементами из ортомодулярной решетки изучали Бевис и Мартин [69, 12А392], Чесли и Бевис [69, 12А405].

**3. Полумодулярные и другие близкие к модулярным решетки.** Гедеонова [72, 12А274] показала, что теорема Жордана-Гельдера для прямых имеет место в полумодулярных и в частично модулярных решетках. (Об этой теореме см. также ее работу 72, 1А509 и обзор 70, 7А270, стр. 132, 133).

Для элемента $x$ решетки $L$ конечной размерности множество всех атомов, меньших $x$, обозначим через $\mathbf{A}_x$. Если $|\mathbf{A}_x| = \dim x$ для всех $x \in L$, то $L$ называется А-регулярной Пфальц [70, 5А248] изучал полугомоморфизмы решеток, то есть отображения, при которых сохраняется пересечение любой пары элементов, а объединение $x \vee y$ сохраняется в том случае, если оно покрывает $x$ и $y$. Он доказал, что полугомоморфизмы сохраняют полумодулярность и **А**-регулярность и получил еще некоторые результаты о полугомоморфизмах полумодулярных решеток. Близкие к полумодулярным субмодулярные решетки исследовались Бераном [69, 12А390; 71, 9А243]. В работе [71, 9А243] изучаются амальгамы упорядоченных множеств, решеток, полумодулярных, модулярных и дистрибутивных решеток. Характеристики почти слабо модулярных и слабомодулярных решеток (их определение дается на языке слабо проективных факторов) в терминах конгруенций специального вида содержатся в работе Катриняка [70, 10А197], пересекающейся со статьей Л. Н. Каролинской и И. В. Стеллецкого [67, 7А248]. Е. Н. Мочульский [69, 10А141; 72, 4А343] продолжает теорию прямых разложений элементов вполне $m$-модулярной решетки (о более ранних его работах см. 67, 6А188, стр. 262).

**4. Другие вопросы.** К геометрическим исследованиям примыкают работы Вилле [69, 12А388, 394], посвященные изучению так называемых примитивных инвариантов. Примерами являются примитивная длина и примитивная ширина решетки, в модулярном случае совпадающие с обычными.

Штейнштрем [70, 2А274] ввел понятие цоколя полной модулярной компактно порожденной (к. п.) решетки и исследовал его свойства. Пересечение дуальных атомов полной решетки он назвал ее радикалом. Полученные им результаты о радикалах и цоколях решеток обобщают известные теоремы о решетках подмодулей, нормальных делителей, подколец.

Пусть $L$ — к. п. модулярная решетка и $K$ — множество всех ее компактных элементов. Подмножество $M \subseteq K$ называется базисом решетки $L$, если оно максимально независимо и $\vee M = 1$. В работе Кертеса [69, 12А403] доказана равносильность нескольких утверждений, каждое из которых эквивалентно относительной атомности к. п. модулярной решетки $L$. Среди них следующие: 1) 1 является прямой суммой атомов; 2) каждый элемент является чистым (см. 70, 7А270, стр. 133); 3) каждое максимально независимое подмножество $M \subseteq K$ является базисом в $L$. Элемент $a \in L$, называется главным, если $a \in K$ и интервал $[0, a]$ является конечной цепью. Теорема Фрицше [73, 4А397] дает условия, достаточные для того, чтобы к. п. решетка обладала базисом, состоящим из главных элементов. Икбалунниса [72, 6А317] привел примеры модулярной решетки с нулем и конечной полумодулярной решетки, в каждой из которых существует идеал, удовлетворяющий первой теореме об изоморфизмах и не являющийся ядром никакого гомоморфизма. В. П. Солтан [73, 6А323] вводит в модулярной решетке понятие жорданового элемента и изучает решетки, в которых каждый элемент представим в виде прямой суммы жордановых.

Для любых элементов $a$, $u$, $v$ произвольной решетки $L$ элемент $a' \in L$ называется $(u, v)$-дополнением элемента $a$, если $a \wedge a' \leqslant u$ и $a \vee a' \geqslant v$. Сас [69, 1А312] выясняет связи между $(u, v)$-дополнениями и относительными дополнениями в модулярной решетке. О некотором условии максимальности для цепей в модулярных и полумодулярных решетках см. статью Бэрджеса и Маккалиона [72, 1А499]. Ковач [70, 3А345] указал условия, необходимые и достаточные для выполнения условия обрыва убывающих цепей в $\vee$-непрерывных модулярных решетках. По-видимому, все результаты работы Форта [69, 1А314], посвященной Г-изотипным элементам, отражены в предыдущем обзоре [70, 7А270, стр. 117]. Следующая его работа [69, 2А371] посвящена изучению еще одного класса элементов модулярной решетки. Икбалунниса [72, 1А501] доказал, что решетка конгруенций полной, слабо модулярной решетки со слабыми дополнениями является стоуновой (эта теорема выводится им из некоторой более общей). См. также работы Бэлбса [70, 2А271], Милича [70, 3А344] и Мамманы [69, 11А257].

## § 3. Другие классы решеток

**1. Мультипликативные решетки.** Истоки этого направления лежат в теории идеалов коммутативных колец (см. работу Дилуорса 64, 1А308), и поэтому естественно, что большинство результатов имеет аналоги (или приложения) в коммутативных кольцах. Основная масса работ посвящена исследованию нетеровых мультипликативных решеток. Под мультипликативной решеткой понимается полная решетка $L$ с ассоциативным и коммутативным умножением, в которой наибольший элемент играет роль мультипликативной единицы и $b\cdot(\bigvee_{\alpha\in J} b_\alpha)=\bigvee_{\alpha\in J} b\cdot b_\alpha$ для любых $b$, $b_\alpha\in L$ и любого множества индексов $J$. Если $a$, $b\in L$, то $a:b=\bigvee\{x \mid x\in L,\ x\cdot b\leqslant a\}$. Элемент $e\in L$ называется главным, если $[a\wedge(b:e)]\cdot e=a\cdot e\wedge d$ и $[a\vee(b\cdot e)]:e=(a:e)\vee b$ для любых $a$, $b\in L$. Нетеровой решеткой называется модулярная, удовлетворяющая условию обрыва возрастающих цепей мультипликативная решетка, в которой каждый элемент является объединением главных. Заметим, что решетка идеалов нетерова кольца — нетерова. Почти все используемые понятия переносятся на нетеровы решетки из теории идеалов нетеровых колец. Перечислим работы, посвященные изучению свойств главных элементов и вопросам представления нетеровой решетки как решетки идеалов нетерова кольца: Богарт [70, 2А272], Е. Джонсон и Ледяев [69, 11А264; 71, 5А329, 12А367], Дж. Джонсон [72, 10А190], Е. Джонсон, Дж. Джонсон и Ледяев [72, 1А519], Янович [71, 3А216], Маккарти [69, 1А320]. Локальные и полулокальные нетеровы решетки, свойства ассоциированных простых элементов исследуются в работах Е. Джонсона и Дж. Джонсона [71, 3А241], Е. Джонсона [70, 1А268; 71, 3А242], Е. Джонсона, Дж. Джонсона и Ледяева [71, 5А330], Богарта [69, 7А256; 70, 3А338Д, 6А264; 71, 11А317], Уэллса [73, 3А300]. Заметим, что в последнее время теория локализации и ассоциированных простых элементов построена Наккаром[1] для гораздо более широкого класса мультипликативных решеток, включающего в себя решетки идеалов произвольных коммутативных колец. Естественным образом определяемым модулям над нетеровыми решетками посвящены работы Дж. Джонсона [70, 8А240, 241; 72, 7А253, 254], Е. Джонсона и Дж. Джонсона [71, 3А227].

О другом подходе к абстрактному обобщению теории идеалов коммутативных колец и о связи его с мультипликативными решетками см. в работах Ледяева [71, 9А120], Е. Джонсона и Ледяева [71, 9А121]. См. также статьи Уитмена

[1] Успехи матем. наук, 1973, 28, № 3, 185—186.

[72, 1A518], Зелинки [69, 1A311], Мураты [71, 4A272], Богарта [70, 2A273], Ледяева [70, 7A379].

2. **Полные решетки.** Прежде всего отметим цикл работ, в которых исследуются операторы замыкания на полной решетке. В предыдущих обзорах операторам замыкания были посвящены специальные параграфы, однако в последнее время интерес к этому направлению заметно угасает. Манара [69, 5A254] показал, что решетка $\Phi(L)$ операторов замыкания решетки $L$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда $L$ — полная цепь (ввиду дуальной атомности, $L$ в этом случае является булевой). Получено условие, при котором полная дуально атомная булева алгебра изоморфна решетке $\Phi(L)$ для некоторой полной цепи $L$, а также условие, при котором $\Phi(L)$ полумодулярна и атомна. В работе Ашаша [71, 9A238] изучаются правые $TC$-группоиды (полугруппы) — это множества, наделенные структурой полной решетки и группоида (полугруппы), в которых справедливо тождество $\bigwedge\limits_{\in J} a_i)x = \bigwedge\limits_{i \in J} (a_i x)$. Через 1 обозначается мультипликативная единица $TC$-группоида $D$, $m$ — его максимальный элемент, $I$ — множество всех идемпотентов, $P = \{x \mid x \in D,\ a \leqslant b \to xa \leqslant \leqslant xb\}$, $Q = [1, m]$ и $H(D) = I \cap P \cap Q$. Изучаются свойства множества $H$, в частности, получена теорема: если $T$ — полная решетка и $D$ — естественно упорядоченное множество отображений ее в себя, то $D$ оказывается $TC$-полугруппой с 1, причем $H(D)$ совпадает с множеством замыканий решетки $T$. Кьяра [70, 7A271] доказывает, что оператор замыкания, заданный на полной подрешетке полной решетки $L$, можно расширить на всю решетку, причем множество всех таких расширений образует полную подрешетку $\widetilde{\Phi}(L)$ решетки $\Phi(L)$. Изучаются свойства решетки $\Phi(L)$ и некоторые другие вопросы, связанные с расширениями операторов замыкания. Пара $(A, I)$ называется пространством замыкания, если $A$ — полная решетка и $I \in \Phi(A)$. В работе Мова [70, 8A243] без доказательства приводится ряд результатов об отображениях пространств замыканий. В частности, для пространств замыканий $(A, I)$ и $(B, I)$ устанавливается соответствие Галуа между совокупностью всех множеств отображений $A \to B$, сохраняющих sup, и множеством $\Phi(A)$. Операторы центрального типа на полной решетке, близкие к операторам замыкания, изучала Замбелли [69, 3A234]. Работа Маркьонны [69, 1A318] посвящена исследованию решетки операторов замыкания некоторого специального типа и приме-

нению их к вложению полурешеток во вполне дистрибутивные полные решетки. Операторы замыкания на $m$-компактных полных решетках, являющихся обобщением компактно порожденных полных решеток, изучал Тулипани [72, 5А300] Некоторые результаты о полных решетках, применимые к решеткам подгрупп абелевых групп, содержатся в работе Кроуна [72, 8А366]. Буше [69, 11А262] дал характеристику подмножеств полной решетки $L$, являющихся полными решетками относительно порядка, индуцированного порядком решетки $L$. О свойствах полной, непрерывной сверху решетки, сохраняющихся при переходе к интервалам, см. работу Делани [72, 10А201]. Веглож [69, 1А306] дал характеристики полных решеток на языке эквациональной компактности и атомной компактности, а также исследовал связь между этими понятиями. Он построил элементарный класс полных, но не эквационально компактных решеток (для булевых алгебр эти понятия эквивалентны). С помощью этого примера получен ряд отрицательных результатов об элементарной определимости некоторых классов решеток. В работе Дэвиса, Хейеса и Руссо [72, 5А299] доказано, что каждое изотонное или антиизотонное отображение $\varphi$ полной решетки $L$ в себя имеет точку левой непрерывности, то есть точку $a \in L$, для которой $\varphi(a) = V\{\varphi(x) \mid x < a\}$, и двойственно определяемую точку правой непрерывности. Эта теорема имеет следствия теоретико-множественного характера.

**3. Решетки с дополнениями. Различные типы дополнений в решетках.** В .Н. Салий [73, 3А313] доказал, что компактно порожденная решетка с единственными дополнениями дистрибутивна. Некоторые условия, влекущие дистрибутивность в решетке с единственными дополнениями, указал Чен [1]. В работе Чена и Гретцера [69, 12А404] излагается метод (называемый методом $\lambda$-покрытий), позволяющий решетку, в которой каждый элемент имеет самое большее $m$ несравнимых дополнений, вложить с сохранением 0 и 1 в решетку, каждый элемент которой, кроме 0 и 1, имеет точно $m$ дополнений ($m$ — произвольное кардинальное число). Тот же метод дает простое доказательство теоремы Дилуорса о вложении произвольной решетки в решетку с единственными дополнениями. О других интересных приложениях этой конструкции см. § 4. 3. Асколи и Теппати [71, 1А240] передоказали теорему о правильности конгруенций на решетке с относительными дополнениями. Связь между наличием до-

[1] Chen C. C. «J. Nanyang Univ», 1969, 3, 380—384.

полнений различного типа в решетках (дополнения, единственные дополнения, относительные дополнения, частичные дополнения, ортодополнения, полудополнения, слабые дополнения, псевдодополнения) изучают Грийе и Варле [69, 1А319]. Отдельно исследуются случаи, когда решетка дистрибутивна или модулярна. Решетка называется О-модулярной (О-дистрибутивной), если $a \leqslant c$ и $b \wedge c = 0$ влекут $(a \vee b) \wedge c = a$ (соответственно, из $a \wedge b = 0$ и $a \wedge c = 0$ следует $a \wedge (b \vee c) = 0$). Двойственно определяются 1-модулярность и 1-дистрибутивность. Решетка с единственными дополнениями является булевой тогда и только тогда, когда она 0- или 1-модулярна. Выясняется связь между О-дистрибутивностью и наличием псевдодополнений или квазидополнений, а также между условиями наличия дополнений в решетке и решетке ее идеалов. Укажем еще две теоремы из этой работы: 1) каждая решетка со слабыми дополнениями вложима в простую, 2) в решетке со слабыми дополнениями, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепей, ядро каждого гомоморфизма является стандартным идеалом, и, обратно, каждый стандартный идеал является ядром единственной конгруенции. В последнее время значительно возрос интерес к полурешеткам и решеткам с псевдодополнениями, а также появились различные обобщения этого понятия. Так, Варле [69, 6А245] изучает свойства 0-дистрибутивных решеток и решеток с квазидополнениями. На решетке $L$ определяется конгруенция $R$: $(a, b) \in R$ тогда и только тогда, когда $a \wedge x = 0 \rightleftarrows b \wedge x = 0$. Основным результатом он считает аналог и обобщение известной теоремы В. И. Гливенко: если $L$ есть О-дистрибутивная решетка с квазидополнениями, то фактор-решетка $L/R$ является булевой алгеброй. Манделкер [71, 4А279] ввел понятие относительного аннулятора, являющееся обобщением относительного псевдодополнения, и исследовал его свойства. Наиболее содержательные результаты получены для дистрибутивного случая. К этой статье примыкают исследования Смит [73, 3А312], касающиеся решеток с относительными псевдодополнениями. Результатам, касающимся дистрибутивных решеток с псевдодополнениями, посвящен § 1. 4. Янович [69, 1А263] исследовал решетки с частичными полудополнениями ($SSC$-решетки), то есть такие решетки с нулем, в которых каждый главный идеал обладает полудополнениями. В частности, если полная решетка $L$ и двойственная ей решетка $L^*$ являются $SSC$-решетками, то решетка конгруенций $L$ стоунова. Отметим еще одну теорему: пополнение сечениями решетки $L$ с 0 и 1 является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда $L$ дистрибутивна, а $L$ и $L^*$ являются $SSC$-решетками.

## § 4. Общие вопросы

**1. Монографии.** На русском языке вышли в свет монографии «Элементы теории структур» Л. А. Скорнякова [70, 12A229K] и «Лекции по теории решеток» В. Н. Салия [72, 5A301K]. Подбор материала и упражнений таков, что эти книги дополняют, но не заменяют друг друга. Общей теории решеток посвящены монографии Фрода [69, 3A260], Саса [71, 9A241] и Гретцера [72, 6A312K]. Первая из них довольно популярна, а в последней, кроме основных понятий, рассматриваются лишь дистрибутивные решетки. В 1967 г. появилось третье издание книги Биркгофа «Теория структур» [70, 3A339K], существенно отличающееся от второго, имеющегося в русском переводе. Отметим также более специальные монографии Шмидта [70, 3A362K] и Фора и Эргон [72, 10A195], последняя довольно популярного характера. В книгах 72, 4A342K и 72, 6A322K содержится ряд обзорных докладов, посвященных как общей теории, так и некоторым специальным классам решеток. Результаты работ по теории решеток, прореферированных в РЖ «Математика» в 1961—1964 гг. и в 1965—1968 гг., освещены в обзорных статьях «Теория структур» сборников серии «Итоги науки» [67, 6A188; 70, 7A270]. На эти обзоры даются ссылки там, где этого требует логика и связность изложения.

**2. Аксиоматика.** Укажем фамилии авторов и номера рефератов работ, относящихся к вопросам аксиоматики упорядоченных множеств, решеток, модулярных решеток, дистрибутивных решеток: Рюден [69, 1A315, 316,5A252, 7A250, 251], Миллер [69, 2A372], М. Гостаминдза и С. Гостаминдза [69, 5A251], Охаси [69, 9A192], Пик [69, 9A195], Равель [69, 11A261], Ферентину-Николакопулу [70, 5A250], Клей [70, 12A60],Исеки и Охаси [71, 7A354], Чинтаямма [71, 11A314], Собоциньский [72, 9A68, 69], Такахаси [70, 1A283].

**3. Операции на классе всех решеток.** Предложенный Ченом и Гретцером [69, 12A404] метод λ-покрытий явился действенным инструментом при исследовании свободных произведений решеток. В работе Гретцера, Лаксера и Платта [71, 8A253] даются интересные приложения усовершенствованного метода λ-покрытий, в частности, простое решение проблемы слов для свободного произведения и простое доказательство теоремы Ю. И. Соркина[1] об изотонном отображении. Далее [72, 5А298], Гретцер использует этот метод для построения $C$-редуцированного свободного произведения решеток (точное определение довольно громоздко). Лаксер [71, 3А244] исследовал нормальное представление элемента свободного произведения решеток, играющее ту же роль, что и каноническое представление в свободной решетке, и указал условия, необходимые и достаточные для его существования.

Бадида строит на классе всех решеток ассоциативные и коммутативные операции, отличные от прямого и свободного произведений [70, 5А240; 71, 7А342]. Конструкция последней работы обобщает операции, рассматривавшиеся автором ранее [см. 70, 7А270, стр. 134]. Булей [69, 12А386; 71, 12А372; 72, 1А508] изучает расширения решеток. Расширением решетки $L$ он называет всякую подрешетку $\overline{L}$ прямого произведения $L$ на двухэлементную цепь $\{0, 1\}$, содержащую $L \times \{0\}$. Находятся условия, при которых $\overline{L}$ сохраняет модулярность, полумодулярность, дистрибутивность; дается способ описания конечных дистрибутивной решетки как последовательных расширений одноэлементной решетки, а также рассматриваются другие вопросы, связанные с понятием расширения. Описанием решеток, разбивающихся в объединение двух непересекающихся решеток, занималась Бонзини [70, 8А242]. О разложении решеток, в которых все ограниченные цепи конечны (синоним — дискретная решетка), в слабое прямое произведение в смысле Гретцера см. работу Якубика [72, 2А393].

**4. Подрешетки.** Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы подмножество $H$ решетки $L$ порождало дистрибутивную подрешетку $L(H)$, получены Колибиаром [73, 4А415] и Тамурой [72, 3А262, 8А364]. Кроме того, в работе Колибиара для полной решетки $L$ выведены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы подрешетка $L(H)$ была вполне дистрибутивной, замкнутой. Т. С. Фофанова [70, 10А199] показала, что в решетке $L$ каждая подрешетка (идеал) является ретрактом тогда и только тогда, когда $L$ изоморфно вложима в цепь целых чисел (когда $L$ дистрибутивна и каждое непустое ограниченное сверху подмножество ее удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей). В работе Ко [72, 1А504] подрешетка Фраттини $\Phi(L)$ решетки $L$ определяется как пересечение всех ее максимальных подрешеток. Каждая решетка $L$, $|L| > 1$, может быть представлена как $\Phi(L')$ для некоторой другой решетки $L'$. Изучаются свойства решетки $\Phi(L)$. Среди

[1] Матем. сб., 1952, 30, 677—694.

них теорема, частично решающая проблему 8 Биркгофа [70, 3A339K, стр. 78]: если $L$ удовлетворяет условию обрыва возрастающих или убывающих цепей, то $\Phi(L)=\varnothing$ тогда и только тогда, когда $L$ — цепь. Продолжение и, частично, обобщение этих исследований содержится в работе Лиза [73, 5A297]. Для данного $N$ обозначим через $\Psi$ ($N$) такое наименьшее целое число, что каждая решетка из $n>\Psi$ ($N$) элементов содержит подрешетку из $N$ элементов. Хейвас и Уорд [70, 6A259] доказали, что $\Psi(N)$ существует для любого $N>0$, причем $\Psi$ $(N)<N_3{}^N$ для $N>1$ [см. проблему 9 Биркгофа, 70, 3A339K]. Работа Уэйли [69, 12A391] связана с проблемами Йонссона о нахождении бесконечного кардинала $m$, для которого существует алгебра мощности $m$ с конечным числом операций, удовлетворяющая условию обрыва убывающих цепей для подалгебр или не имеющая собственной подалгебры мощности $m$. Доказана теорема, из которой следует отрицательное решение второй проблемы для бесконечного регулярного $m$ и отрицательное решение первой проблемы для любого бесконечного $m$ в случае, если рассматриваемые алгебры являются решетками. В дистрибутивной решетке бесконечной регулярной мощности $m$ каждый элемент лежит в дополнении к некоторой подрешетке той же мощности. Марксонна [72, 10A200] рассматривает псевдоподрешетки решетки $L$, то есть подмножества элементов, замкнутые относительно пересечений и являющиеся решетками относительно порядка, индуцированного порядком в $L$. Ее работа посвящена в основном вложению решетки в качестве псевдоподрешетки в дистрибутивную решетку и изучению свойств, сохраняющихся при этом вложении.

**5. Разные вопросы.** Б. М. Шайн[1] установил, что полурешетки, дистрибутивные решетки и булевы алгебры тогда и только тогда изоморфны или дуально изоморфны, когда изоморфны полугруппы их эндоморфизмов. Порождающие множества полугруппы решеточных эндоморфизмов конечной булевой алгебры описала Т. Б. Шварц [72, 7A158]. А. Я. Айзенштат и Т. Б. Шварц [71, 7A346] показали, что всякая решетка, имеющая простой идеал, определяется полугруппой своих эндоморфизмов. С другой стороны, свойства модулярности, дополняемости и атомной порожденности решетки не могут быть охарактеризованы в терминах решеточных эндоморфизмов. Отметим также работы Гретцера и Зихлера [71, 9A124], Зихлера [73, 3A299]. К этой тематике примыкает также рабо-

[1] Fund. math., 1970, 68, № 1, 31—50.

та Цастеры [70, 10А196]. Крузе [69, 11А256] продолжает изучать элементы решеток с отношением нормальности, берущим начало из теории групп (Более ранние работы отражены в 70, 7А270, стр. 133). Идеал $M$ решетки $L$ назовем регулярным, если он является классом разбиения для некоторой конгруенции. Для каждого подмножества $S \subseteq L$ положим $p_0(S, M) = \{x \mid x \in L, x \wedge s \in M$, для каждого $s \in S\}$. Якубик [71, 2А264] изучает совокупность $P_0(M)$ множеств $p_0(S, M)$, называемых $M$-полярами, и получает результаты, во многом аналогичные теоретико-групповым. Некоторые $\wedge$-разложения элементов произвольной решетки с 1 и с симметричным бинарным отношением исследовал Дрбоглав [72, 1А502]. Его результаты имеют приложения к решеткам идеалов полугрупп и нетеровых колец, а также к решеткам конгруенций коммутативных полугрупп. Дердерян [69, 5А235] вводит понятие степени отображения с делением для решетки с 0 и 1 и доказывает аналог одной теоретико-групповой леммы. Сас [69, 10А142] по аналогии с фактор-полугруппами Риса определяет факторрешетки Риса и изучает их свойства (полумодулярность, модулярность, наличие дополнений и т. д.). Грийе [69, 5А236] ввел понятие трансляционной размерности $tr.\, dim\, L$ решетки $L$. Доказаны теоремы: 1) если $tr.\, dim\, L \leqslant 2$, то $L$ дистрибутивна; 2) если $tr.\, dim\, L \leqslant 3$ и $L$ модулярна, то она дистрибутивна; 3) если $L$ модулярна и порождается не более чем тремя элементами, то $tr.\, dim\, L \leqslant 4$. Цоколи и радикалы решеток, рассматриваемые Бераном [73, 4А395], являются обобщениями соответствующих понятий, введенных Штейнштремом (см. § 2, 4). Большинство результатов получено для модулярного случая. Кертес и Штерн [73, 4А398] изучали так называемые $A$-решетки. Некоторые условия, эквивалентные тому, что решетка идеалов решетки является вполне дистрибутивной, можно найти в работе Мартинеца [73, 4А406]. Об элементарной теории решеток см. статью Хаушильда и Раутенберга [71, 9А270]. Решетка полиномов над решеткой изучается в работе Митча [71, 3А248]. Если решетка дистрибутивна, то единственной обратимой полиномиальной функцией является тождественная. О понятии независимости в решетках см. статьи Длаба [70, 10А226; 71; 8А268]. Петрич [71, 4А245] доказал, что в произвольной решетке $L$ каждая конгруенция $\tau$, для которой решетка $L/\tau$ дистрибутивна, определяется некоторым множеством простых идеалов и вывел отсюда ряд интересных следствий. Об идеалах и конгруенциях см. также работу Граппи [69, 2А373]. Представление конечной решетки прямым произведением цепей и приложения этого представления рассматриваются в работе Фэна [73, 1A279]. Число элементов в максимальной антицепи некоторой конечной решетки подсчитано Розенбергом [71, 5A331]. Клотц и Люхт [71, 11A312] дали верхнюю и нижнюю оценки для числа неизоморфных решеток порядка $n$. О некоторых свойствах элементов решетки и о количестве цепей специального вида см. работу Стейна [71, 4A269], а об условиях максимальности для цепей — работу Бэрджеса и Маккалиона [72, 1A499]. См. также работы Зелинки [70, 12B346; 71, 12A370]. Свойства функции Мебиуса на конечных решетках изучает Крапо [69, 11B289].

В. И. ИГОШИН, Т. С. ФОФАНОВА

# МНОГООБРАЗИЯ РЕШЕТОК. КАТЕГОРНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Начнем с работы Йонссона [69, 9А208], способствовавшей заметному прогрессу в исследованиях многообразий решеток. Для класса $K$ (однотипных) алгебр будем писать $\Delta(K)$, если решетки конгруэнций на всех алгебрах из $K$ дистрибутивны. Через $V(K)$ обозначим наименьшее многообразие, содержащее $K$, через $I(K)$, $H(K)$, $S(K)$, $P(K)$, $P_s(K)$ и $P_u(K)$ — классы, состоящие соответственно из всех изоморфных копий, гомоморфных образов, подалгебр, прямых произведений, подпрямых произведений и ультрапроизведений алгебр из K. Йонссон [69, 9А208] показал, что из условия $\Delta(V(K)$ следует, что каждая подпрямо неразложимая алгебра из $V(K)$ принадлежит классу $HSP_u(K)$ и $V(K)=IP_sHSP_u(K)$, а если кроме того, $K$ состоит из конечного числа конечных алгебр, то $V(K)=IP_sHS(K)$. Он же заметил, что класс всех решеток совпадает с $HSP_u(F)$, где $F$ есть класс всех конечных решеток.

В другой работе [69, 9А194] Йонссон ответил на некоторые вопросы, поставленные им в [69, 9А208]. Введем обозначения: $M_n$ — модулярная решетка высоты 2 с $n\geqslant 3$ атомами, $M_1$ — одноэлементная, а $M_2$ — двухэлементная решетки, $M_{3,3}$ — решетка, изображенная на рис. 1, $U_\omega$ — многообразие, порожденное всеми решетками высоты два. Показано, что многообразия $V(M_n)$, $n\geqslant 3$ образуют строго возрастающую последовательность, что совокупностью $V(M_n)$, $n=1, 2, \ldots$, исчерпываются все собственные подмногообразия многообразия $U_\omega$, что $U_\omega$ в многообразии всех модулярных решеток определяются неравенством $x\wedge(y\vee(z\wedge t))\wedge(z\vee t)\leqslant y\vee(x\wedge z)\vee(x\wedge t)$, что многообразие $V(M_n)$, $n>1$ в $U$ задается $U_\omega$ задается неравенством $x\wedge\bigwedge\limits_{0\leqslant i<j<n}(y_1\vee y_j)\leqslant\bigvee\limits_{0\leqslant i<n}(x\wedge y_i)$.

При $n=3$ получается неравенство, определяющее $V(M_3)$, чем решается проблема 45 Биркгофа [70, 3А339]. В. И. Игошин[1]

[1] В сб.: Исследования по алгебре, вып. 3, Саратов, 1974, 14—19.

показал, что $U_\omega$ состоит из всех модулярных решеток, не имеющих подрешеток, гомоморфно отображающихся на $M_{3,3}$, что всякое подквазимногообразие многообразия $U_\omega$ совпадает с одним из многообразий $V(M_n)$ и что $V(M_n)$ для любого $n$ состоит из всех тех решеток из $U_\omega$, в которые не вкладывается $M_{n+1}$. Из результатов Йонссона [69, 9А194] непосредственно следует, что все супермодулярные тождества, счетный набор которых указал Икбалунниса [67, 4А218], в действительности эквивалентны между собой и каждое из них определяет многообразие $V(M_3)$.

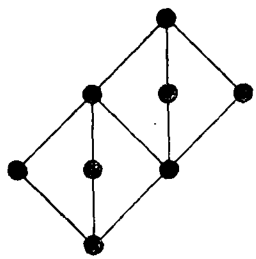

Рис. 1.

Бейкер [69, 10А149] и Вилле[1] привели примеры многообразий решеток, не порождающихся своими конечными членами, чем отрицательно решили проблему 5 Йонссона [69, 9А208]. Бейкер [69, 10А149] указал пример многообразия решеток, которое не конечно базируемо. Маккензи [71, 11А318] привел пример бесконечной решетки, порождающей не конечно базируемое многообразие, и показал, что всякая конечная решетка порождает конечно базируемое многообразие, что раньше без доказательства утверждал Шютценберже. В работах [69, 5А237, 12А393] Падманабхан показывает, что всякое конечно базируемое многообразие решеток может быть задано системой из двух тождеств. Маккензи [71, 11А318] установил, что многообразие всех решеток определяется единственным тождеством (от 34 переменных), способ написания которого он указывает. Отмечено, что другие нетривиальные многообразия решеток одним тождеством описаны быть не могут. Хонг [72, 12А276] доказывает конечную базируемость многообразия, порожденного семейством всех проективных плоскостей (рассматриваемых как решетки), и всякого многообразия, порожденного конечной проективной плоскостью.

Обозначим через $M_n^m$ многообразие, порожденное всеми модулярными решетками ширины не более чем $n$ и высоты не более чем $m$, где $m$ и $n$ либо натуральные числа, либо $\infty$, обозначающая любой бесконечный кардинал. Вилле [69, 12А388] поставил вопрос: когда $M_n^m$ конечно базируемо? Положительный ответ в случае конечных $m$ и $n$ вытекает из результатов

---

[1] Wille R. Notices Amer. Math. Soc., 1968, 15, № 5, 781.

Маккензи [71, 11А318]. Бейкер [71, 7А344] показал, что $M_\infty^m$ конечно базируемо для всех $m$ и что $M_n^\infty$ не конечно базируемо для $5\leqslant n<\infty$. Заметим, что $M_1^\infty=M_2^\infty$ есть многообразие дистрибутивных решеток. Йонсон [69, 9А194] доказал, что $M_3^\infty$ конечно базируемо. Фриз [73, А276] анонсирует результаты своей диссертации: $M_4^\infty$ конечно базируемо, свободная в $M_4^\infty$ решетка с конечным числом свободных порождающих конечна, существует не конечно базируемое подмногообразие в $M_4^\infty$. Нельсон [69, 5А233] показал, что каждая решетка ширины два является подпрямым произведением двухэлементных цепей и пятиэлементных немодулярных решеток.

Называя класс решеток стабильным [69, 10А194], если он замкнут относительно операторов $H$, $S$ и $P_u$, Бейкер показывает [71, 7А344], что стабильные классы — это в точности те, которые могут быть определены дизъюнкциями тождеств, и исходя из такого задания стабильного класса $K$, указывает [71, 7А344], используя результат Йонссона [69, 9А208], общий метод построения системы тождеств для $V(K)$. Хун [72, 1А520] рассматривает многообразия $\Delta_n$, $n=1, 2, \ldots$, состоящие из модулярных решеток, удовлетворяющих соответственно тождествам $D_n$: $X V\bigwedge\limits_{i=0}^{n} y_i=\bigwedge\limits_{j=0}^{n}(X V\bigwedge\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} y_i)$. Он дает критерий непринадлежности модулярной решетки многообразию $\Delta_n$ и доказывает, что $\Delta_n$ совпадает с многообразием, определяемым тождеством, двойственным для $D_n$, что $\Delta_1\subset\Delta_2\subset\Delta_3$ ... (строгие включения) и что $\mathop{U}\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$ не совпадает с многообразием всех модулярных решеток. Л. Н. Шеврин и В. Б. Лендер [73, 6А321] доказали для любого порядкового $\gamma$ отсутствие $\gamma$-ступенно достижимых в классе всех решеток нетривиальных реплично полных классов решеток. Погунтке и Ривал[1] описали конечные решетки $L$, обладающие следующим свойством: каждая решетка, которая имеет упорядоченное подмножество, изоморфное $L$ как упорядоченному множеству, имеет и подрешетку, изоморфную $L$. Франчи и Тоти-Ригателли [70, 5А243] установили, что двухэлементная решетка будет фильтрующейся в смысле Магари [70, 5А256]. Эванс [69, 9А153] утверждает хопфовость конечно определенных решеток.

В. И. Игошин [72, 4А340] называет класс $K$ решеток характеризуемым (конечно характеризуемым), если он состоит

[1] Poguntke W. and Rival I. Finite sublattices generated bu order-iso morphic subsets. Препринт.

из всех таких решеток, в которые не вкладывается ни одна решетка из некоторого множества (конечного множества) $\chi$ конечных решеток (в обозначениях $K=N(\chi)$). Наименьшее с точностью до изоморфизма из таких множеств $\chi$ называется характеристическим множеством для $K$ и обозначается $\chi_K$. Равенство $\chi=\chi_K$ имеет место тогда и только тогда, когда ни одна решетка из $\chi$ не вкладывается в другую. Для конечной решетки $L$ класс $N(\{L\})$ будет многообразием тогда и только тогда, когда $L$ изоморфна подпрямо неразложимой подрешетке свободной решетки. Гедеонова [72, 12A274] доказывает, что класс определенных ею в [72, 1A509] $p$-модулярных решеток характеризуется единственной решеткой с диаграммой на рис. 2. Она же отмечает [73, 6A332], что, как показал Маккензи, класс решеток, характеризуемый этой решеткой, может быть определен тождеством $(x \vee (y \wedge z))\wedge(z \vee (x \wedge y)) = (z\wedge(x\vee(y\wedge z)))\vee(x\wedge(z\vee(x\wedge y)))$ В. И. Игошин[1] привел пример строго бесконечно характеризуемого (и следовательно, строго бесконечно аксиоматизируемого) квазимногообразия решеток, не являющегося многообразием, а также пример континуального семейства квазимногообразий решеток, не являющихся многообразиями.

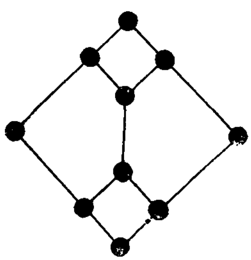

Рис. 2.

2. Брунс и Келмбах [72, 7A258] приводят тождество, определяющее многообразие $V(R)$, порожденное классом $R$ ортомодулярных решеток, разложимых в горизонтальную сумму своих блоков, и доказывают, что всякое подмногообразие в $V(R)$ конечно базируемо. Можно показать, что всякое подмногообразие многообразия $V(R)$ конечно характеризуемо в $V(R)$.

В одинаковых работах [71, 2A267, 7A351] Ли установил, что многообразие дистрибутивных решеток с псевдодополнениями (для краткости $p$-алгебр) порождается своими конечными членами, а каждое его нетривиальное и неатомное подмногообразие в классе всех $p$-алгебр определяется тождеством

$(x_1\wedge \dots \wedge x_n)^* \vee \bigvee_{i=1}^{n}(x_1\wedge \dots \wedge x_i^* \wedge \dots x_n)^* = 1$ и порождается

[1] XII Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Тезисы сообщений. Свердловск, 1973, с. 274.

одной конечной $p$-алгеброй $\overline{B}_n$ получаемой из $n$-атомной булевой алгебры $B_n$ присоединением нового единичного элемента.

Гретцер [70, 1А269] привел систему тождеств, определяющую класс стоуновых алгебр, и показал, что всякая стоунова алгебра изоморфна подпрямому произведению двух- и трехэлементных стоуновых алгебр. Бэлбс и Хорн [71, 6А315] описали свободные стоуновы решетки как дистрибутивные решетки, свободные относительно некоторой системы неравенств. Следствием этого описания является теорема: свободная стоунова решетка с конечным числом образующих изоморфна прямому произведению решеток, каждая из которых является свободной дистрибутивной решеткой с внешне присоединенными 0 и 1. Хейцт и Катриняк [72, 10А210] доказали, что каждое из подмногообразий в многообразиях относительно стоуновых алгебр и относительно стоуновых алгебр с наименьшим элементом порождается своими конечными подпрямо неразложимыми алгебрами и в соответствующем многообразии определяется тождеством $(x_1{}^*x_2)V(x_2{}^*x_3)V\ldots V(x_n{}^*x_{n+1})=1$.

3. Л. А. Скорняков [70, 12А229К] ввел понятие (**А**, **В**) — свободного расширения упорядоченного множества $P$, которое обобщает понятия свободной решетки $FL(n)$ Уитмена, вполне свободной решетки $FL(P)$ Дилуорса и свободной решетки $FL(P,$ **А**, **В**$)$ Дина. Вполне свободные решетки изучались в работах Т. С. Фофановой [69, 11А260] и Гретцера, Лаксера и Платта [71, 8А253], где, в частности, дано простое доказательство теоремы Ю. И. Соркина о том, что изотонные отображения решеток $L_i$, $i\in I$, в решетку $L$ могут быть одновременно расширены до изотонного отображения (вполне) свободного произведения решеток $L_i$, $i\in I$, в решетку $L$. В. И. Игошин[1] называет многообразие решеток шрейеровым, если всякая подрешетка любой решетки, свободно порожденной в этом многообразии упорядоченным множеством с сохранением всех имеющихся точных граней, сама в этом смысле свободно порождена в этом многообразии подходящим упорядоченным множеством. Он изучает такие относительно свободные решетки и показывает, что многообразия модулярных решеток, содержащие недистрибутивные решетки, не являются шрейеровыми. Йонссон [71, 3А246] показал, что для всякого многообразия решеток всякая свободная в нем решетка обладает свойствами: $(W1)\, x\leqslant y \leftrightarrow x=y$, $(W2)\, a\wedge b\leqslant x \leftrightarrow a\leqslant x$ или $b\leqslant$

[1] В сб.: Упорядоченные множества и решетки, вып. 2, Саратов, 1974, 32—41.

$(W3)\, x \leqslant c \vee d \leftarrow \rightarrow x \leqslant c$ или $x \leqslant d$. Дэй [71, 6А316] неконструктивно и просто доказал, что всякая проективная решетка обладает свойством: $(W4)\, a \wedge b \leqslant c \vee d$, если $\{a, b, c, d\} \cap [a \wedge b, c \vee d] \neq \varnothing$. Отсюда и из предыдущего результата Йонссона он вывел неконструктивное решение проблемы слов для решеток, ранее предложенное Уитменом. Уотермен [70, 10А195] изучает свободную в многообразии, порожденном пятиэлементной немодулярной решеткой, решетку с тремя свободными порождающими. В частности, он показывает, что эта решетка имеет 99 элементов. Рекурсивную процедуру для определения числа элементов свободной дистрибутивной решетки с $n$ порождающими предлагает Ривьер [1]. Например, это число четно при четном $n$. Для этой же задачи Жицо и Мостовский [69, 1А300] нашли алгоритм, реализуемый на вычислительной машине. См. также работы Монжарде [72, 7А261] и Такеути [70, 2А277].

4. Среди категорных вопросов в первую очередь рассмотрим большую серию работ, посвященных описанию инъективных и проективных объектов в различных категориях решеток. Известно [68, 8А270], что инъективными объектами в многообразии дистрибутивных решеток являются полные булевы решетки и только они. Т. С. Фофанова [70, 10А199] показала, что в многообразии всех решеток и в многообразии всех модулярных решеток нет нетривиальных (то есть не одноэлементных) инъективных объектов. Дэй [71, 2А265] установил этот факт и для любого недистрибутивного многообразия решеток. Банашевский и Брунс [69, 10А146] доказали, что всякая дистрибутивная решетка имеет существенное расширение, которое является булевым. Инъективная оболочка решетки в категории дистрибутивных решеток является пополнением сечениями ее булевых существенных расширений. Отмечаются связи и аналогии с другими категориями. В категории алгебр Стоуна алгебра $L$ инъективна тогда и только тогда, когда $L \cong B_0 \times B_1^{(2)}$, где $B_0$ и $B_1$ — полные булевы алгебры, а $B^{(2)} = \{(a, b) \mid (a, b) \in B \times B,\ a \leqslant b\}$ для любой булевой алгебры $B$ [Бэлбс, 71, 2А260]. Этот и еще один критерий инъективности для алгебр Стоуна можно найти в работе Бэлбса и Гретцера [72, 2А392]. Пусть $\langle C(L), D(L), \varphi^L \rangle$ — тройка, ассоциированная с алгеброй Стоуна $L$ (см. «Общая теория решеток» § 1.3), $R(L) = \{x \mid x \in C(L),\ x\varphi^L = 1\}$ и $K(L) = \{x \mid x \in C(L),\ [0, x] \cap R(L) = 0\}$. Лаксер [71, 9А239] доказал, что инъективная оболочка алгебры Стоуна $L$ изоморфна решетке $B_0 \times B_1^{(2)}$, где,

[1] Riviere L. «J. Comb. Th.», 1968, 5, 229—234.

$B_0$ — пополнение сечениями алгебры $C(L)/K(L)$, а $B_1$ — пополнение булевой алгебры, порожденной решеткой $D(L)$. Бэлбс и Хорн [71, 2А268] показали, что Брауэрова алгебра (синонимы: алгебра Гейтинга, решетка с относительными псевдодополнениями, импликативная решетка) инъективна в классе всех таких алгебр тогда и только тогда, когда она является полной булевой алгеброй. Аналогичный результат для категории моргановых алгебр (то есть дистрибутивных решеток с 0 и 1 и с унарной операцией, удовлетворяющей свойствам: $a''=a$, $(a \wedge b)'=a' \vee b'$) установила Петреску[1].

Гораздо труднее продвигается исследование проективных объектов в упомянутых категориях, и полного описания, как правило, получить не удается. Бейкер и Хейлс [71, 5А332] доказали теорему: дистрибутивная решетка проективна в категории всех решеток тогда и только тогда, когда она счетна и является ординальной суммой решеток, каждая из которых или одноэлементна, или есть 8-элементная булева алгебра, или является удвоением счетной цепи с 0 и 1. Отсюда следует, что конечная дистрибутивная решетка проективна тогда и только тогда, когда она является подрешеткой свободной решетки. Костинский [72, 10А191] получил некоторые условия, достаточные для проективности произвольной решетки, из которых вытекает, что конечно-порожденная решетка проективна тогда и только тогда, когда она вложима в свободную. Элемент $x$ решетки $L$ называется $s\vee$ — неразложимым, если $x \leqslant y \vee z$ всегда влечет $x \leqslant y$ или $x \leqslant z$. Для дистрибутивных решеток это условие эквивалентно $\vee$ — неразложимости. Бэлбс и Хорн [71, 4А276] рассматривали следующие свойства решеток, проективных в категории дистрибутивных решеток: (P1) каждый элемент решетки является суммой конечного числа $s\vee$ — неразложимых элементов; (P2) произведение любых двух $s\vee$ — неразложимых элементов $s\vee$ — неразложимо; (P3) решетка условно импликативна [70, 7А270, стр. 112]; (P1*), (P2*), (P3*) соответственно двойственны условиям (P1), (P2), (P3). Пусть $J(L)$ есть множество $\vee$-неразложимых элементов решетки $L$. Основным результатом работы является теорема, имеющая ряд интересных конкретных следствий: решетка $L$ проективна в категории дистрибутивных решеток тогда и только тогда, когда в ней выполняются условия (P1), (P1*), (P2) и условие (P4): существует свободная дистрибу-

[1] Petrescu I. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 1971, 16, 921—926.

тивная решетка $F$, гомоморфизм $f$: $F \longrightarrow L$ и такое изотонное отображение $h: J(L) \rightarrow F$, что $fh(x) = x$ для всех $x \in J(L)$. Для счетного случая достаточно ограничиться условиями (P1), (P1*), (P2). Оказывается, что произвольная $\wedge$ — полурешетка $J$ является полурешеткой $\vee$ — неразложимых элементов единственной дистрибутивной решетки $I$, удовлетворяющей условиям (P1) и (P2). Выведен критерий проективности решетки $I$ и получены еще некоторые результаты в том же направлении (Предыдущие результаты Бэлбса и Хорна, относящиеся к проективности и инъективности в категории дистрибутивных решеток освещены на стр. 119 предыдущего обзора [70, 7A270]). Гретцер и Уолк [70, 12A237] показали, что конечная дистрибутивная решетка $L$, в которой объединение двух $\wedge$ -неразложимых элементов $\wedge$ -неразложимо, является ретрактом свободной дистрибутивной решетки с числом образующих, равным числу $\wedge$ -неразложимых элементов $L$. Этот результат дает прямое доказательство критерия Бэлбса для проективности конечной дистрибутивной решетки. В категории алгебр Стоуна Бэлбс и Гретцер [72, 2A392] получили довольно громоздкий критерий проективности для некоторого частного типа объектов. Из этого критерия, однако, удается получить описание конечных проективных объектов. Булевы алгебры, проективные в категории булевых алгебр, оказываются проективными и в категории алгебр Стоуна. В категории брауэровых алгебр описаны проективные объекты, которые конечны или являются цепями [Бэлбс и Хорн 71, 2A268]. Кроун [71, 3A249] доказал, что в категории полных решеток и отображений с делением [68, 12A231] и проективность, и инъективность решетки эквивалентны тому, что она вполне дистрибутивна.

Брезулеану и Дьяконеску [70, 2A295, 5A331] определяют спектр, дистрибутивной решетки с 0 и 1, подобно тому как это делается для коммутативных колец с единицей. На множестве $Spec\,L$ простых идеалов такой решетки $L$ вводится топология, и с использованием полученного пространства решетке $L$ сопоставляется некоторая схема. Доказано, что полученная категория схем двойственна категории дистрибутивных решеток с 0 и 1. Георгеску и Попа [70, 9A243] доказали, что категория полных, относительно атомных, бесконечно дистрибутивных (то есть $a \wedge \bigvee_i b_i = \bigvee_i (a \wedge b_i)$ решеток и морфизмов, сохраняющих 1 и все верхние грани, эквивалентна категории, двойственной категории множеств. Дуальность некоторых категорий полных компактно порожденных решеток, а также эквивалентность их некоторым естественным категориям $\vee$-полурешеток показана в работе Гайсзингера и Грейвса [73, 5А298]. Описанию функтора, сопряженного пренебрегающему функтору из категории алгебр Стоуна в категорию дистрибутивных решеток с 0 и 1, и построению стоунова расширения дистрибутивной решетки с 0 и 1 посвящена заметка Спида [72, 1А500], а также работы Брезулеану [70, 4А390, 7А400] о категории схем решеток и Бейкера [69, 4А240] о категории векторных решеток.

Г. И. ЖИТОМИРСКИЙ

# РЕШЕТКИ ПОДМНОЖЕСТВ. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ

## I. РЕШЕТКИ ПОДМНОЖЕСТВ

В предлагаемом обзоре по возможности затронуты все случаи рассмотрения решеток, элементами которых являются подмножества того или иного множества, наделенного той или иной структурой, выбранные по тем или иным соображениям, но с одним непременным условием — определяющим отношением порядка является отношение включения. Вначале рассмотрены случаи, когда на базисном множестве не предполагается никакой дополнительной структуры, затем — когда на нем задана структура алгебры, упорядоченного множества, топологического пространства или некоторого их сочетания.

### 1. Решетки семейств специального вида, фильтров, топологий

Решетки всевозможных семейств подмножеств данного множества, в частности, решетки покрытий, разбиений изучает Галло [69, 1А446, 70, 8А244]. Ограниченно полные решетки подмножеств рассматривает Спид [69, 6А246]. Лихова [72, 9А246] исследует решетку всех алгебраических систем замыканий на данном множестве, доказывает, что она полна и дуально атомна, указывает число дуальных атомов. О представлениях решеток решетками эквивалентностей см. работы: Томасон [71, 9А244] и Хейлс [71, 9А245]. Решетки частичных эквивалентностей (симметричных и транзитивных отношений) изучает Драшковичова [71, 8А251]. Ею доказано, что эти решетки являются полными, полумодулярными и непрерывными сверху. Получены необходимые и достаточные условия их модулярности и дистрибутивности. В работе Пика и Пурдя [70, 1А266] рассматриваются свойства решетки дифункциональных (квазиоднозначных) бинарных отношений, доказывается, что эта решетка компактно порожденная (алгебраическая), и находятся верхние и нижние точные грани семейств ее элементов. Костовичи [70, 10В220] доказывает, что булева алгебра всех бинарных отношений на данном множестве изоморфна булевой решетке графов, определенных на нем.

И. С. Негру получает ряд свойств решетки логик высказываний в фиксированном алфавите с фиксированными правилами вывода, доказывает, что она не модулярна и что конечно-аксиоматизируемые теории не составляют ее подрешетки [73, 4А118] [1]. Подрешетка указанной решетки, образуемая суперинтуиционистскими логиками, изучалась в работах В. А. Янкова [2], В. Я. Герчиу и А. В. Кузнецова [71, 5А65], Л. Л. Максимовой [71, 3А72]. Мелони [72, 6А107] применяет методы нестандартного анализа для изучения решетки фильтров на множестве, получает, в частности, что она полна и дистрибутивна и, более того, каждая верхняя грань дистрибутивна относительно нижней грани по любому семейству. В. А. Ярмоленко [68, 2А520, 9А533, 71, 2А549] рассматривает решетки, получающиеся при складывании плоских фигур по оси симметрии.

Большинство работ по решеткам топологий на данном множестве посвящено вопросу о наличии дополнений для топологий того или иного сорта. Новые доказательства теоремы Стейнер [66, 12А368] о том, что решетка всех топологий на произвольном множестве есть решетка с дополнениями, дают ван-Рой [69, 2А375] и Шнаре [73, 4А605]. Последний в работе [69, 9А341] показал, что всякая нетривиальная топология на бесконечном множестве $X$ имеет не менее $|X|$ и не более $2^{|X|}$ дополнений, причем обе оценки точные. По этому же вопросу см: Дачич [70, 3А478; 71, 4А460].

Хюбнер [73, 6А503] находит регулярные топологии, которые имеют дополнения в решетке всех регулярных (без отделимости) топологий. Вопросу о существовании дополнений для некоторых топологий в решетке всех $T_1$-топологий (которая не является решеткой с дополнениями) посвящены работы Ан-

---

[1] См. также в сб. «Математические исследования», Кишинев, 1973, 8, № 3: 161—166.

[2] ДАН СССР, 1968, 181, № 1, 33—34.

дерсона [71, 6А501; 73, 5А496], Андерсона и Стюарта [70, 6А384], Росицкого [71, 11А433].

Ларсон [70, 12А405] рассматривает минимальные топологии в решетке всех топологий для пространств с данным свойством. Падманабхан и Рао [70, 10А198] устанавливают связь между максимальными идеалами решетки всех топологий на данном множестве и центрированными семействами подмножеств этого множества. Лалита [70,8А364] доказывает, что всякая $T_1$-топология есть точная нижняя грань всех мажорирующих ее хаусдорфовых топологий; если же она удовлетворяет первой аксиоме счетности, то — точная нижняя грань метрических топологий. Ларсон и Трон [73, 3А476] изучают отношение покрытия в решетке всех $T_1$-топологий, в частности, получают, что эта решетка полумодулярна сверху и снизу. Валент и Ларсон [73, 5А495] рассматривают так называемые базисные интервалы в решетке всех топологий и дают их решеточную характеристику. К этой тематике можно отнести и работу Рейберна [71, 1А393], доказавшего, что решетка полных булевых алгебр является пересечением решетки σ-алгебр с решеткой топологий на данном множестве. Там же показано, что каждая σ-алгебра подмножеств множества $X$ является полной булевой алгеброй тогда и только тогда, когда $X$ счетно.

Решетка компактификаций данного топологического пространства изучается в работах Мэгила [69, 4А407], Мэгила и Глейсенапа [69, 9А342], Тривикрамана [72, 12А395]. Росицкий [72, 12А385] рассматривает случаи, когда совокупность всех топологий, совместимых с данным порядком на множестве, является решеткой.

Карстенс [70, 4А452] доказывает, что решетка всех претопологий на произвольном множестве является полной, атомной и дистрибутивной. О решетке близостей и равномерностей см. работы М. Я. Антоновского и В. З. Полякова [71, 10А279] и Гамбургера [72, 11А362]. Костовичи [72, 6А460] рассматривает специального вида отображения упорядоченного множества всех порядков на данном множестве в решетку всех $T_0$-топологий на нем и изучает его свойства в случае, когда порядки и топологии согласованы с некоторой групповой структурой на исходном множестве. Шакрон [73, 4А399] устанавливает соответствие Галуа между множествами $2^{2^E}$ и $2^{E \times E}$, при котором полным топологиям (всякое пересечение открытых открыто) соответствуют квазипорядки, и получает ряд свойств решетки квазипорядков.

## 2. Решетки подалгебр

Пусть $A$ — универсальная алгебра произвольной сигнатуры. Стабильные подмножества алгебры $A^n$ называются стабильными $n$-арными отношениями в $A$. Совокупность $L_n(A)$ всех таких отношений является полной решеткой по включению. При $n=1$ получаем решетку $L(A)$ всех подалгебр алгебры $A$. Все эти решетки являются компактно порожденными и в них, как показал В. Н. Салий [73, 3А313], единственность дополнений влечет булевость. Дантони [71, 2А274] нашел необходимые и достаточные условия модулярности решетки $L_n(A)$, в частности, и решетки подалгебр. Он же получил необходимые и достаточные условия, при которых заданное множество $n$-арных отношений в множестве $A$ является множеством всех стабильных $n$-арных отношений для некоторой алгебраической структуры на $A$. Эту же задачу решил Искандер [72, 5А312]. Г. И. Житомирский [70, 10А218] называет две универсальные алгебры $A_1$ и $A_2$ $R$-изоморфными, если изоморфны решеточно упорядоченные инволютированные полугруппы $R(A_1)$ и $R(A_2)$ всех стабильных бинарных отношений на $A_1$ и $A_2$ соответственно. Класс алгебр называется $R$-характеризуемым в некотором абстрактном классе, если он замкнут относительно $R$-изоморфизмов. Показано, в частности, что многие важные классы полугрупп (например, идемпотентные полугруппы, группы, вполне регулярные, а также вполне простые полугруппы) $R$-характеризуемы в классе всех полугрупп. Искандер [72, 11А234] получил результат, который можно сформулировать следующим образом: пусть $L_1$, $L_2$ и $L_3$ — компактно порожденные решетки, причем первые две снабжены инволюциями и неодноэлементны; тогда существуют такие две универсальные алгебры $A_1$ и $A_2$ одной сигнатуры, что $L_1$ изоморфна решетке $L_2(A_1)$, $L_2$ изомофна решетке $L_2(A_2)$, а $L_3$ — решетке $L(A_1 \times A_2)$, причем инволюции переходят в обращение бинарных отношений.

Пусть в множестве $A$ выделено некоторое семейство $L$ подмножеств и некоторая группа $G$ подстановок. Когда существует универсальная алгебра с решеткой подалгебр $L$ и группой автоморфизмов $G$? Исчерпывающий ответ на этот вопрос дал Стоун [73, 5А313]. Такую же задачу в различных вариантах — задана еще решетка конгруэнтностей, $G$ — полугруппа всех эндоморфизмов и т. п., — решает Лампе [73, 6А336].

Верхнюю полурешетку конечно порожденных подалгебр алгебры $A$ (это компактные элементы решетки $L(A)$) изучают Гулд и Платт [72, 2A419].

М. Б. Дихтярь[1] показала, что всякая полная решетка изоморфна решетке всех $P$-подоперативов некоторого $P$-оператива, и привела пример $P$-оператива, имеющего не компактно порожденную решетку $P$-подопеартивов ($P$-оператив — это множество $A$, на котором в роли операции выступает отображение множества всех непустых подмножеств $A$ в само $A$).

Перейдем к рассмотрению конкретных классов алгебр.

**Группы.** Если группу $G$ рассматривать как алгебру с одной бинарной и одной унарной операцией, то $L(G)$ — это решетка всех подгрупп $G$. В классе алгебр с одной бинарной операцией $L(G)$ — это решетка всех подполугрупп группы $G$, будем обозначать ее $\Sigma(G)$. Если базисное множество группы наделено топологией или порядком, то рассматривают, соответственно, решетку всех замкнутых подгрупп и решетку всех выпуклых подгрупп этой группы.

Обстоятельный обзор исследований по решеткам указанного вида (структурные свойства групп), затрагивающий также работы по решеткам подполугрупп полугруппы, сделан М. Н. Аршиновым и Л. Е. Садовским [73, 6A258]. Обзор охватывает работы, опубликованные в период с 1967 по 1971 г., а иногда и более ранние. Наиболее интересные факты приводятся с набросками доказательств. Приведены результаты о решеточных (структурных) изоморфизмах, о решетке смежных классов в группе, рассматриваются также упорядоченные полугруппы, некоторые полугрупповые конструкции и инверсные полугруппы.

Сначала рассмотрим результаты, касающиеся решетки $L(G)$, то есть решетки подгрупп группы.

Р. Шмидт [69, 7A174] дал характеристику разрешимых и сверхразрешимых подгрупп группы $G$ на языке решетки $L(G)$, используя понятие модулярной подгруппы, определенной как элемент решетки $L(G)$. Элемент $n$ решетки $L$ называется стандартным, если $x \to x \cup n$ есть эндоморфизм и $(x \cap n = y \cap n$, $x \cup n = y \cup n) \to x = y$ для любых $x, y \in L$. Цаппа [69, 1A305] определил все такие элементы в решетке $L(G)$ для конечной группы $G$, решив тем самым проблему 61 Биркгофа [70, 3A339K]. Наполитани [69, 6A172], нашел в указанной решетке все элементы, удовлетворяющие только второму из постав-

---

[1] В сб.: «Исследования по алгебре», вып. 2, Саратов, 1970, 3—22.

ленных условий. С. Г. Иванов [70, 7А207] рассматривает стандартные элементы для произвольных групп.

Пусть $L$ решетка с 0 и 1, $T$ — ее подрешетка, содержащая 0 и 1 и полная относительно объединений. Пару $(L, T)$ Ботто [72, 6А309] называет обобщенной открытой топологией и изучает в случае, когда $L$ решетка подгрупп группы, а $T$ — подрешетка нормальных подгрупп. На таком «топологическом» языке описываются конечно порожденные группы и другие типы групп.

Мартино [72, 4А265] и Менегаццо [72, 4А237] изучают группы, содержащие подгруппу, удовлетворяющую определенным условиям в решетке $L(G)$, имеющим вид дистрибутивного или модулярного равенства. Наполитани [72, 5А193] нашел все типы (их одиннадцать) $p$-групп нечетного порядка, которые не модулярны (то есть решетка подгрупп не модулярна), а все их собственные подгруппы модулярны, и выяснил строение таких $p$-групп произвольного порядка.

Следующая серия работ посвящена вопросу о наличии дополнений в решетке $L(G)$ для групп $G$ с некоторыми условиями конечности: Курцио [70, 4А245, обзорная статья], Бечтелл [70, 5А182], И. Н. Абрамовский [70, 7А219], В. В. Рогов [71, 4А198], Емальди [71, 5А244], Менегаццо [71, 6А223], Котцен [72, 6А211], Христенсен [69, 1А179]. Последний рассматривает дополнения нормальных подгрупп. Многие из этих работ подробно рассмотрены в упомянутом выше обзоре М. Н. Аршинова и Л. Е. Садовского. Особо отметим работу Емальди, который рассматривает аналогичный вопрос для группы с операторами.

А. С. Пекелис [72, 8А279] дает на языке решетки $L(G)$ характеристику нормальных делителей нильпотентной группы и указывает на связь подгруппы и ее нормализатора в решетке $L(G)$ в случае, когда $G$ нильпотентна и содержит по крайней мере два независимых элемента бесконечного порядка.

Длины максимальных цепей в решетке $L(G)$ в случае, когда $G$ симметрическая группа или полугруппа $k$-элементного множества, рассматривает Р. А. Байрамов [72, 1А259, 4А359]. Ю. И. Толстова [69, 12А306, 307] указывает диаграмму решетки $L(G)$ для групп $SL(2,5)$ и $SL(2,7)$. Р. Шмидт [69, 2А245] изучает некоторые гомоморфизмы решеток $L(G)$, Тибилетти [70, 3А256] — решетку операторов замыкания в $L(G)$, Лихтенберг [71, 1А194] — некоторые отношения в $L(G)$, связанные с разложением группы по двойному модулю.

Всякий изоморфизм решеток $L(G)$ и $L(G')$ называется решеточным (структурным) изоморфизмом групп $G$ и $G'$, или проектированием. Обсуждаются вопросы: 1) когда группа определяется своей решеткой подгрупп, то есть когда из решеточного изоморфизма этой группы на другую следует их групповой изоморфизм, и когда группы строго определяются, то есть любое ее проектирование индуцируется одним изоморфизмом или антиизоморфизмом; 2) какие свойства группы сохраняются при решеточных изоморфизмах. М. Н. Аршинов [70, 7А205] и независимо Холмс [70, 7А206] показали, что группы разложимые нетривиальным образом в свободное произведение, строго определяются своей решеткой подгрупп (в работе Холмса получен фактически более сильный результат). Такой же результат получен Л. Е. Садовским [72, 9А178] для смешанных нильпотентных групп, разложимых в прямое произведение абелевой группы и группы без кручения. М. Н. Аршинов рассматривает с этой точки зрения другие типы групп, разложимых в прямое произведение [71, 4А192], чистые сверхразрешимые группы [71, 7А241], разрешимые группы без кручения [72, 9А179]. Метелли показывает решеточную определяемость групп вида $pSL(2, p^f)$ [71, 3А181] и простых групп Судзуки $S(q)$, $q=2^{n+1}$, $n>0$ [72, 4А239]. Отрицательные примеры см. в работах А. С. Пекелис [70, 4А242], Н. В. Лойко [71, 4А191], а также в работах Н. П. Беляковой [71, 3А191, 11А230] и Верхаана [72, 4А241]. Перейдем ко второму вопросу. Б. В. Яковлев [71, 1А193] показал, что свойство быть разрешимой группой сохраняется при решеточных изоморфизмах, и дал оценку изменения ступени разрешимости, решив тем самым проблему 40 Биркгофа. Е. Т. Астахова [71, 4А201] нашла условие, при котором прямое произведение групп отображается при решеточном изоморфизме в прямое произведение образов этих групп. А. С. Пекелис [72, 9А180] доказала, что свойство быть радикальной группой сохраняется при решеточных изоморфизмах. Вопрос о сохранении индексов и сопряженности при проектированиях прямых произведений рассматривал Холмс [72, 4А240]. Р. Шмидт [73, 6А228] получил для конечных разрешимых групп связь между свойствами нормальных делителей образа и прообраза при решеточном изоморфизме. Аналогичные вопросы ставятся для групповых пар. Им посвящены работы А. С. Пекелис [69, 11А167; 70, 5А192; 71, 5А251, 12А271] и Г. В. Пивоваровой [72, 6А238].

Наконец, отметим результаты, касающиеся вопроса о разрешимости элементарной теории решеток подгрупп групп. Г. Т. Козлов [70, 12А177] доказал неразрешимость этой теории для класса конечных абелевых $p$-групп, а М. А. Тайцлин [71, 3А100] — разрешимость такой теории для абелевых $p$-групп с фиксированным конечным числом образующих и неразрешимость ее для класса групп, являющихся прямыми суммами двух бесконечных циклических групп.

Перейдем к рассмотрению решетки подполугрупп группы $\Sigma(G)$. В ней естественно определяется инволюция (автоморфизм второго порядка), что приводит к инволютированной решетке (симметрической структуре) $\Sigma'(G)$: П. Г. Конторович и К. М. Кутыев [70, 2А211]. Л. Н. Шеврин [71, 3А166] показал, что $\Sigma(G)$ и $\Sigma'(G)$ несут одинаковую информацию о группе $G$. К. М. Кутыев [71, 11А229] изучает такие свойства подполугрупп группы $G$, которые можно выразить на языке решетки $\Sigma(G)$. Об определяемости некоторых групп своей решетой подполугрупп см. уже цитированные выше работы М. Н. Аршинова [71, 4А192; 72, 9А179] и работу К. М. Кутыева [70, 11А176].

Решетку централизаторов подгрупп группы изучает Р. Шмидт [71, 5А204, 11А206; 72, 10А135]. Первая и последняя из указанных работ посвящены конечным группам специального вида, во второй, в частности, доказывается, что для групп, удовлетворяющих условию минимальности для централизаторов, из дистрибутивности образуемой ими решетки следует коммутативность группы. В. И. Тихоньких [71, 4А170] нашел конечные разрешимые группы с дистрибутивной решеткой квазинормальных подгрупп — это те, у которых все силовские подгруппы циклические. Наполитани [71, 5А243] описал все группы с модулярной и дистрибутивной решеткой субнормальных подгрупп. В. И. Сущанский [72, 6А222] доказал, что решетка характеристических подгрупп $m$-кратного сплетения конечных элементарных абелевых групп порядка $p^n$ дистрибутивна. Решетку $n$-подгрупп $n$-группы рассматривает Тим [73, 1А302], в коммутативном случае она оказывается модулярной.

Об аналогичных вопросах для решеточно упорядоченных групп ($l$-групп) см. в конце этого раздела. О решетке нормальных делителей см. в разделе «Решетки конгруэнтностей».

**Топологические группы.** Ю. Н. Мухин продолжает изучать решетку всех замкнутых подгрупп топологической группы, рассматривая 1) случаи, когда эта решетка полумодулярна снизу, удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда для цепей, обладает дополнениями [69, 6А209; 72, 7А205]; 2) дистрибутивный закон, центральные и нейтральные элементы в этой решетке [70, 3А274]; 3) модулярные абелевы локально компактные группы [71, 3А200]; 4) решеточные изоморфизмы топологических групп [69, 2А294]. В работе Ю. Н. Мухина и С. П. Хоменко [69, 2А295] показано, что связность, нульмерность и монотетичность топологической группы характеризуются в терминах указанной решетки. Некоторые полные подрешетки этой решетки, а также топологию на ней рассматривает Поммер [71, 5А272, 12А287].

**Полугруппы и другие бинарные оперативы.** Круг рассматриваемых вопросов здесь в основном тот же, что и в предыдущих пунктах. Р. В. Петропавловская [70, 1А167] описывает строение полугрупп, решеточно изоморфных группам, разлагающимся в прямое произведение циклических групп. В. А. Баранский и А. Н. Трахтман [70, 7А163] изучают решеточные изоморфизмы матричных связок полугрупп специального вида. В. А. Баранский описывает решеточные изоморфизмы полугрупп, разложимых в свободное произведение полугрупп с объединенным нулем [71, 4А137] и конечно определенных полугрупп [73, 4А252]. Результаты имеют вид: решеточный изоморфизм индуцируется полугрупповым изоморфизмом или антиизоморфизмом.

Л. Н. Шеврин [72, 5А133] полностью охарактеризовал полугруппы и группы конечной ширины, то есть такие, что любое множество их попарно несравнимых полугрупп конечно.

Решетку всех инверсных подполугрупп инверсной полугруппы (обобщенной группы Вагнера) изучает Т. И. Ершова [70, 7А169]. В работе [72, 8А227] она доказала, что любая инверсная полугруппа $S$, решетка инверсных подполугрупп которой изоморфна соответствующей решетке для моногенной инверсной полугруппы $A$, изоморфна или антиизоморфна $A$. Отметим еще один результат этого автора [73, 4А260]: из изоморфизма решеток подполугрупп двух инверсных полугрупп следует изоморфизм их решеток инверсных подполугрупп.

Л. Н. Шеврин и Л. М. Бешкето [71, 6А162] изучали свойства полурешетки непустых подполугрупп идемпотентной полугруппы: она не может разлагаться в прямое произведение более чем двух полурешеток; компоненты разложения определяются с точностью до изоморфизма; наконец, нетривиальное разложение в прямое произведение возможно тогда и только тогда, когда исходная полугруппа является прямоугольной и не сингулярной.

Н. П. Белякова [71, 11А230] доказала решеточную определяемость конечно порожденных квазигрупп с левой единицей и тождеством $a\cdot(b\cdot c)=(c\cdot b)\cdot a$.

Некоторые вопросы, касающиеся решетки полуполных частей категории, рассмотрены в работах Шакрона [70, 11А234; 73, 4А399].

**Кольца, поля, алгебры, модули.** Продолжается изучение решетки подколец кольца. И. Л. Хмельницкий [70, 6А221] дал описание колец, решетка подколец которых обладает относительными дополнениями. Области целостности с дистрибутивной решеткой подколец описал Кристанте [72, 3А222]: они исчерпываются подкольцами с единицей поля рациональных чисел и алгебраическими расширениями конечных полей. В этой же работе рассматриваются решеточные изоморфизмы областей целостности. А. А. Лашхи [72, 5А292] показал, что решеточный изоморфизм между двумя чистыми неабелевыми локально нильпотентными кольцами Ли индуцируется в точности одним изоморфизмом этих колец. О некоторых вопросах, касающихся решетки подполей, см. работу Хедикса, Мордсона и Винограда [70, 3А375].

Изоморфизмы решеток подалгебр конечномерных алгебр Ли изучают Гото [69, 7А231], Глейзер и Кольман [70, 7А264]. В последней работе, в частности, доказано, что решеточно изоморфные нильпотентные алгебры Ли над произвольным полем имеют одинаковые степени разрешимости.

О решетке подмодулей конечно порожденного модуля см. статьи Джонсона и Манка [70, 3А351, 352]. О решеточных изоморфизмах модулей и их связи с изоморфизмами колец эндоморфизмов говорится в работе Стивенсона [71, 12А343].

В. А. Пономарев [70, 2А270] изучает решетку аддитивных бинарных отношений в линейном пространстве (то есть решетку подпространств прямого удвоения), доказывает, что в конечномерном случае она модулярна и обладает дополнениями. Мартин [70, 6А222] рассматривает связь решетки подпространств векторного пространства с кольцом его линейных преобразований. Беннет [71, 12А354] дает аксиоматику решеток всех выпуклых подмножеств вещественного векторного пространства и векторного пространства над упорядоченным кольцом с делением.

Решетку всех выпуклых подмножеств множества состояний квантовомеханической системы в связи с вопросами квантовой логики изучает Инглби [72, 1А123].

**Упорядоченные алгебры.** К. М. Кутыев [70, 11А176] показал, что изоморфизм решеток подполугрупп двух групп, одна из которых решеточно упорядочена, индуцируется либо изоморфизмом, либо антиизоморфизмом этих групп. Фиала [71, 5A261] изучает решетку компонент решеточного упорядоченной группы. Сикс [72, 7A257] дает характеристику решеточно упорядоченных групп, решетка компонент которых компактно порождена. Берд, Конрад и Ллойд [72, 3A204] рассматривают решетки всех выпуклых подгрупп, идеалов и характеристических подгрупп решеточно упорядоченной группы. Каждая из этих решеток определяет цоколь группы — кардинальную сумму всех ее атомов. Дистрибутивную решетку нитей решеточно упорядоченной группы рассматривают Каппос и Кехайопулу [72, 3A206], связывая ее с алгеброй поляр подгрупп исходной группы.

Е. Я. Габович [72, 8A235] изучает упорядоченные группоиды (бинарные оперативы), решетка выпуклых подгруппоидов которых удовлетворяет тем или иным условиям. См. также статью Е. Я. Габовича и Г. И. Рубановича [73, 6A207], где рассматриваются случаи, когда эта решетка модулярна, дистрибутивна, имеет конечную длину, является цепью и т. п.

Решетка так называемых гнезд линейной решетки рассматривается в работе Накано и Ромберга [71, 11A319]; она дистрибутивна.

### 3. Решетки идеалов

Мы объединяем в этом разделе работы по решеткам идеалов колец, алгебр, полугрупп, решеток и полурешеток. Очевидно, что основания для такого объединения имеются, несмотря на то что в разных алгебраических системах понятие идеала вводится по-разному.

Лемонье [69, 11A204] в терминах решетки идеалов кольца формулирует достаточные условия того, что это кольцо обладает нетривиальным центром или единицей. В работе Саса и Вигандта [70, 8A272] приводятся примеры колец с кокомпактно порожденной решеткой идеалов. Миховски [73, 5A257] описывает групповые кольца с условием минимальности для главных левых идеалов. Хилл [72, 5A278] доказал, что решетка идеалов групповой алгебры конечной абелевой $p$-группы над простым полем характеристики $p$ однозначно определяет эту группу.

Михлер и Вилле [70, 6A268] доказали, что многообразия колец тогда и только тогда состоят из арифметических колец (то есть таких, у которых решетка идеалов дистрибутивна), когда они порождаются конечным множеством конечных полей. Другие критерии для этого см. в работах Вернера и Вилле [71, 2A218]. Маккарти [70, 8A327] характеризует арифметические кольца в терминах главных элементов их решетки идеалов. Как показали Л. Н. Шеврин и Л. М. Мартынов [72, 3A271], многообразия арифметических колец, и только они, являются нетривиальными конечно достижимыми в классе всех колец.

Сас [70, 8A200] строит один эндоморфизм по объединениям в решетке идеалов ассоциативного или альтернативного кольца, определяемый некоторым его радикалом.

Янович [72, 2A339] изучает решетку левых аннуляторных идеалов риккартовых *-колец и *-колец Бэра. Система так называемых $\chi$-идеалов колец образует $m$-решетку, то есть решетку с умножением и условием $ab \leqslant a \cap b$. Эту решетку изучает Субраманиан [70, 1A265]. Вопросы, связанные с бэровскими *-кольцами, подробно изучаются в книге Берберяна [1].

А. Я. Хелемский [69, 12A353] находит свойства коммутативной нильпотентной ассоциативной алгебры, которые можно выразить в терминах решетки ее идеалов. Деланг [70, 9A206] изучает решетку идеалов алгебры Клиффорда $n$-мерного квадратичного пространства.

Дрбоглав [72, 1A502] исследует некоторые разложения в решетках и иллюстрирует их примерами решеток идеалов полугрупп и нетеровых колец. Блис, Харди и Копсон [73, 4A404] рассматривают координатизации решеток так называемыми кортежами Бэра — конструкцией, близкой к бэровским полугруппам. Решетку левых аннуляторов всех элементов бэровской полугруппы изучают Блис и Янович [70, 10A142], Торн [70, 2A140], Адамс [71, 1A147], Кроун [71, 6A358]. См. также книгу Блиса и Яновича [2], где эти вопросы рассматриваются подробно.

Бицан [71, 11A385] устанавливает дистрибутивность решетки радикальных фильтров коммутативно нетерова кольца и находит условие ее булевости. В. А. Андрунакиевич и Ю. М. Рябухин [3] показали, что в алгебрах над кольцом кручения составляют полную дистрибутивную решетку, а Е. И. Тэбырце [4] найдены условия булевости этой решетки, что обобщает указанный результат Бицана.

Пусть $A$ — произвольный бинарный оператив (иногда говорят — группоид). Стабильное дополнение идеала в $A$ Фринк

---

[1] Berberian S. K. Baer.*-Rings. N. Y., 1972.
[2] Blyth T. S., Janowitz M. F. Residuation theory, N. y., 1972.
[3] Тр. Моск. матем. общества, 1973, 29, 19—49.
[4] В сб.: Математические исследования, Кишинев, 1973, 8, № 3, 92—105.

и Смит [73, 4A413] называют фильтром. Они находят условия, когда решетка фильтров дистрибутивна.

Пусть $K$ — категория с нулем, удовлетворяющая таким условиям, чтобы можно было говорить о решетке идеалов каждого ее объекта. Эту решетку изучают Сас и Вигандт [70, 8A272], в частности, выясняют, когда она компактно порождена. Гранджан и Валькарсель [72, 10A218] доказывают, что для нормальных категорий эта решетка модулярна.

Фатторози-Барнаба [73, 6A335] называет о-алгеброй универсальную алгебру, в которой имеется нульарная операция о, являющаяся нулем относительно любой другой операции, и изучает решетку идеалов такой алгебры.

Следующие работы относятся к решеткам и полурешеткам. Хигс [72, 1A507] доказал, что если решетка изоморфна решетке своих идеалов, то каждый ее идеал является главным. Мартинец [73, 4A406] нашел некоторые условия, эквивалентные полной дистрибутивности решетки идеалов решетки, причем этот результат переносится на любое упорядоченное множество. Стралка [72, 12A286] дал описание решеток идеалов компактных [топологических] полурешеток. Нейман [71, 6A238] указал на связь между решетками идеалов обобщенных булевых алгебр и направленных или решеточно упорядоченных групп. О вложимости всякой дистрибутивной решетки с псевдодополнениями в решетку идеалов атомно порожденной булевой алгебры см. в работе Лаксера [72, 2A402]. Определяемость импликативной полурешетки решеткой фильтров доказал Нимитц [69, 10A150]. Решетку фильтров произвольной решетки, в частности, алгебры Стоуна, изучают Чен и Гретцер [71, 1A242].

## 4. Решетки конгруэнтностей

Отметим прежде всего книгу Е. Т. Шмидта [70, 3A362], в которой излагаются результаты о решетках конгруэнтностей произвольных, в том числе и частичных алгебр, решеток, дистрибутивных и модулярных решеток. Решеткам конгруэнтностей посвящена последняя глава курса Йонссона [72, 6A332] по универсальным алгебрам, а также гл. II и III книги Пирса [69, 11A274].

Решается следующая задача. Имеется некоторое многообразие алгебр, в решетке конгруэнтностей которых выполняется некоторое нетривиальное тождество. Каким условиям должно удовлетворять исходное многообразие? Йонссон [69, 9A208] нашел необходимые и достаточные условия для дистрибутивности решетки конгруэнтностей на всех алгебрах данного многообразия, Дэй [70, 5A254] — для модулярности, Гедеонова [73, 6A332] — для $p$-модулярности. Все эти условия — мальцевского типа. В упомянутой выше работе Йонссон, кроме того, дал формулу, выражающую такое многообразие через любой порождающий его класс. Такие же многообразия, то есть с условием дистрибутивности решетки конгруэнтностей на каждой его алгебре, рассматривал Дэй [72, 10A211], получивший, в частности, ряд условий, эквивалентных тому, что каждая алгебра такого многообразия вложима в инъективную. Классы алгебр с дистрибутивной решеткой конгруэнтностей рассматривал также Мацџанти [73, 5A325].

В работе Стоуна [72, 3A260] окончательное решение получил вопрос о взаимной связи условий правильности, перестановочности и модулярности для конгруэнтностей на алгебре, а именно, построен пример алгебры с правильными конгруэнтностями, решетка которых не модулярна.

Алгебры, решетка конгруэнтностей которых обладает дополнениями, изучает Л. А. Скорняков [72, 11A221], в частности, он доказывает, что при довольно слабых дополнительных условиях наличие дополнений в решетке конгруэнтностей самой алгебры и всех ее фактор-алгебр влечет дистрибутивность всех этих решеток. Цитированный в разделе 2 результат В. Н. Салия [73, 3A313] показывает, что единственность дополнений в решетке конгруэнтностей также влечет ее дистрибутивность. Л. А. Скорняков[1] ввел понятие почти прямого произведения алгебр и показал, что универсальная алгебра $A$ тогда и только тогда изоморфна почти прямому произведению фактор-алгебр $A/\Theta$ и $A/\Theta'$, когда $\Theta'$ является дополнением $\Theta$ в решетке конгруэнтностей на $A$. Условия существования дополнений в решетках конгруэнтностей алгебр некоторых многообразий исследовал И. И. Мельник[2].

Фостер [70, 10A219] рассматривает универсальные алгебры специального вида (полупримальные и сходные с ними), решетка конгруэнтностей которых образует цепь, — главным образом свойства многообразия, порожденного одной такой алгеброй. К этой работе примыкает статья Пиксли [72, 6A330]. Куэкенбаш [72, 2A353] вводит так называемые почти примальные алгебры, дает характеристику этих алгебр с исполь-

[1] Труды Моск. матем. общества, 1973, 29, 215—222.
[2] Матем. заметки, 1973, 14, № 5, 711—720.

зованием свойств решетки конгруэнтностей и показывает, что всякая алгебра, принадлежащая многообразию, порожденному почти примальной алгеброй, имеет дистрибутивную решетку конгруэнтностей.

В. Т. Кулик [72, 3А274] находит компактные элементы в решетке всех сильных отношений конгруэнтности частичной алгебры. Пасини [72, 2А412] описывает пары решеток $L_1$ и $L_2$, для которых существует частичная алгебра с решеткой конгруэнтностей, изоморфной $L_1$, и решеткой сильных конгруэнтностей, изоморфной $L_2$.

М. А. Кобан [73, 12А304] дала отрицательный ответ на следующий вопрос И. И. Валуцэ: любая ли подрешетка решетки эквивалентностей на множестве $A$, содержащая равенство и универсальное отношение, изоморфна решетке всех конгруэнтностей некоторой универсальной алгебры с носителем $A$? См. также последнюю главу упоминавшейся книги Йонссона [72, 6А332]. Для частичных алгебр характеристику систем эквивалентностей на множестве, обладающих свойством, аналогичным указанному, дают Армбрест [71, 9А269] и Искандер [72, 5А312].

Тулипани [72, 5А300] обобщает некоторые известные результаты о решетке конгруэнтностей на случай алгебры с бесконечно местными операциями, а Карасек [72, 1А537] на так называемые обобщенные алгебры, в которых роль операций играют отображения произвольной степени данного множества в множестве его подмножеств. Пусть в множестве $A$ задан оператор замыкания. Отношение эквивалентности на этом множестве называется замкнутым, если насыщение по нему любого замкнутого подмножества замкнуто. Баррис [72, 9А247] рассматривает семейство всех таких эквивалентностей [замкнутых конгруэнтностей] и доказывает, в частности, что если оператор замыкания компактный то это будет полная решетка.

Решетки подалгебр и конгруэнтностей алгебр отношений рассматриваются в работе В. П. Смолина [72, 1А133]. Уэйли [72, 8А392] вводит и изучает отношение между последовательностями кардинальных чисел, связанное с решетками конгруэнтностей универсальных алгебр. Берман [73, 6А339] находит условия полумодулярности и атомарности для решетки конгруэнтностей унарной алгебры.

Следующие работы посвящены описанию конкретных алгебраических систем, решетка конгруэнтностей которых удовлетворяет тем или иным условиям. Б. М. Шайн [70, 5А152] и независимо Тамура [70, 11А131] дают полное описание коммутативных полугрупп, конгруэнтности которых образуют цепь. Это подгруппы групп типа $p^\infty$, быть может, с присоединенным нулем, и коммутативные нильполугруппы с линейным отношением делимости, быть может, с присоединенной единицей. Б. М. Шайн описывает также цепи, которые могут быть решетками конгруэнтностей коммутативных полугрупп, и получает ряд результатов для некоммутативных полугрупп. Тамура [72, 8А216] находит некоторые условия конечности коммутативной полугруппы, исходя из решетки ее конгруэнтностей. Г. И. Житомирский [73, 1А186] приводит различные необходимые и достаточные условия модулярности решетки конгруэнтностей в обобщенных грудах и обобщенных группах Вагнера (инверсных полугруппах), в частности, дает полное описание клиффордовых обобщенных групп (вполне регулярных инверсных полугрупп) с модулярной решеткой конгруэнтностей, а также приводит некоторые достаточные условия дистрибутивности этой решетки. Им описаны[1] также обобщенные группы с булевой решеткой конгруэнтностей.

Вопрос о том, когда решетка конгруэнтностей полной решетки является стоуновской, полностью решен Икбалуннисой [72, 1А501]. Это будет, например, в том случае, если исходная решетка слабо модулярна со слабыми дополнениями. Стралка [72, 6А310] доказал, что решетка замкнутых конгруэнтностей компактной дистрибутивной топологической решетки, имеющей конечную ширину, является дистрибутивной. Пусть $P(M)$ обозначает решетку разбиений множества $M$, а $\Theta P(M)$ — ее решетку конгруэнтностей. Последнюю изучает Драшковичова [71, 8А251; 72, 1А503]. Один из результатов: $\Theta P(M)$ булева тогда и только тогда, когда $M$ конечно. Шейблих [71, 3А167] находит условие полумодулярности решетки конгруэнтностей на бипростой $\omega$-полугруппе, а Босбах [71, 6А161] приводит пример одного класса полугрупп, конгруэнтности на которых образуют дистрибутивную решетку и попарно коммутируют.

Теперь рассмотрим работы, посвященные изучению свойств решетки конгруэнтностей для тех или иных алгебраических систем.

Бузаши [69, 12А305] описывает решетку нормальных делителей сплетения циклических групп одного и того же порядка. Э. М. Жмудь изучает решетку нормальных делителей конеч-

[1] В сб.: Упорядоченные множества и решетки, вып. 2, Саратов, 1974, 18—27.

ных групп, связывая это с вопросами линейного представления [69, 5А217], рассматривает случаи, когда из изоморфизма решеток нормальных делителей нильпотентных групп следует изоморфизм последних [69, 6А176]. Манк и Сиосон [72, 5А316] изучают решетку конгруэнтностей $m$-групп; между прочим, она модулярна.

Холл [70, 8А140] переносит один результат о решетке конгруэнтностей инверсных полугрупп на регулярные полугруппы. Пирно [72, 2А211] рассматривает подрешетку решетки конгруэнтностей, состоящую из попарно коммутирующих конгруэнтностей регулярной полугруппы. Берд [73, 3А208] для простой регулярной $\omega$-полугруппы находит необходимые и достаточные условия, при которых модулярна решетка, состоящая из всех групповых конгруэнтностей и конгруэнтностей, разделяющих идемпотенты. Он же [73, 3А297] изучает решетку конгруэнтностей на связке (идемпотентной полугруппе). В работах Рейли [72, 1А260; 73, 1А184] и Шейблиха [70, 1А166] рассматривается отношение эквивалентности в решетке всех конгруэнтностей регулярной или инверсной полугруппы, состоящее из тех пар конгруэнтностей, которые совпадают на множестве идемпотентов. Используя это отношение, авторы описывают свойства конгруэнтностей.

Холл [72, 3А147], Г. И. Житомирский [72, 4А338], Керубини [72, 6А318] и Ниминен [73, 1А290], изучают свойства решетки конгруэнтностей на полурешетке. Полученные ими результаты частично пересекаются. Холл показал, что в указанной решетке выполняется условие $y > x \cap y \rightarrow x \cup y > x$, где «$>$» обозначает покрытие, откуда следует, что она является полумодулярной сверху. Г. И. Житомирский приводит абстрактную характеристику этого класса решеток и показывает, что всякая решетка с дополнениями в этом классе является булевой. Керубини устанавливает связь между решеткой отношений конгруэнтности и решеткой идеалов полурешетки. Ниминен переносит введенное Маедой понятие канонического разложения на полурешетки и рассматривает вопрос о существовании такого разложения с простыми факторами. Е. Т. Шмидт [69, 4А242] некоторым образом обобщает результат Дилуорса о том, что каждая конечная дистрибутивная решетка есть решетка конгруэнтностей некоторой решетки.

Шакрон рассматривает под названием элементарных сильные отношения конгруэнтности в категории. Они образуют полную решетку, которая для группоида является модулярной и удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда [70, 12А231].

Некоторые авторы рассматривают решетку, состоящую из всех классов всех конгруэнтностей алгебры и пустого множества. Для групп это делают Д'Андреа [70, 3A255] и Курцио [70, 4A244]. Находятся условия, когда эта решетка полумодулярна, дистрибутивна, обладает дополнениями и т. п. Пасини [73, 3A323] переносит некоторые результаты Д'Андреа на произвольные алгебры.

## 5. Решетки, связанные с топологическими пространствами

Решетки открытых подмножеств топологического пространства изучали Рид и Трон [69, 7A385]. Ван [71, 9A389] показал, что такие свойства топологического пространства, как полная регулярность, бикомпактность, финальная компактность, локальная бикомпактность и связность, определяются решеткой открытых подмножеств этого пространства, а хаусдорфовость и некоторые другие не определяются.

Нанцетта [69, 6A243] построил представление дистрибутивной решетки с относительными дополнениями компактно-открытыми подмножествами топологического пространства. А. А. Коробов [72, 12A422] приводит конструкцию, позволяющую определять когомологии бикомпактного топологического пространства, исходя из решетки его открытых подмножеств.

Брезулеану и Дьяконеску [70, 2A295] рассматривают решетку открытых подмножеств пространства всех простых идеалов решетки. Гандини [72, 12A379] изучает решетки нормальных открытых покрытий.

В. В. Пашенков[1] изучает булеву алгебру регулярных открытых подмножеств топологического пространства, выделяет в ней некоторую систему фильтров, с помощью которой строит представление произвольного полурегулярного пространства на булевой алгебре регулярных открытых подмножеств. При этом получается решение ряда топологических задач. Штепанек[2] доказывает, что булева алгебра регулярных открытых подмножеств метрического линейного пространства является счетно порожденной.

Вудс [72, 2A622; 73, 5A502] изучает булеву алгебру всех регулярных замкнутых подмножеств локально бикомпактного, σ-бикомпактного, небикомпактного хаусдорфова пространства. Корниш [73, 5A296] называет дистрибутивную решетку

[1] Матем. сб., 1973, 91, № 3, 291—309.

[2] Stepanek I. «Comm. Math. Univ. Carol.», 1968, 9, 95—101.

с нулем нормальной, если каждый простой ее идеал содержит минимальный простой идеал. Решетка замкнутых подмножеств топологического $T_1$-пространства является нормальной тогда и только тогда, когда пространство нормально. Ип [73, 1А448] ввел понятие квазигомеоморфизма топологических пространств, связав его с изоморфизмами решеток всех замкнутых подмножеств.

Эванн [69, 1А317] и Секанина [69, 2А484] рассматривают решетку замкнутых подмножеств (или регулярных замкнутых подмножеств) множества, на котором задан оператор замыкания, не являющийся, вообще говоря, топологическим.

## II. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ

**Топологии, ассоциированные с упорядоченными множествами.** Скула [69, 8А219] вводит в упорядоченном множестве понятие $m$-идеала и с помощью таких идеалов определяет топологию. Уолк [69, 2А476] рассматривает частично вполне упорядоченные множества (то есть когда все цепи вполне упорядочены, а все антицепи конечны). Для них интервальная и дедекиндова топологии совпадают, совпадают понятия компактности и полноты в смысле Дедекинда, получены результаты, связанные с пространством близости в таких множествах. А. В. Потепун [71, 12А573] рассматривает топологии, связанные с различного рода сходимостями обобщенных последовательностей и фильтров в упорядоченных множествах. Гайна [72, 11А226; 73, 3Б843] изучает такого же сорта топологии для булевых алгебр. Лозьер [72, 6А463] характеризует такие упорядоченные множества, которые можно наделить топологией так, что связными подмножествами являются подмножества, связные в смысле порядка.

Различные топологии на данном упорядоченном множестве изучает Деспанде [73, 2А413], в частности, сравнивается топология, открытую базу которой образуют открытые интервалы, с топологией, замкнутую базу которой образуют замкнутые интервалы. При некоторых предположениях совпадение этих двух топологий эквивалентно линейности исходного порядка. Новую топологию на квазиупорядоченном множестве вводит Черути [73, 7А479], эта топология в случае линейного порядка совпадает с интервальной. Одну топологию на квазиупорядоченном множестве рассматривал ранее Грин [69, 5А380]. Пирс [72, 5А463] вводит топологию на квазиупорядоченных множествах и характеризует нормальность и паракомпактность таких топологических пространств.

Известна связь между упорядоченными множествами и $T_0$-пространствами. Секанина [70, 7A443] переводит ее на категорийный язык. Георгеску и Лунгулеску [70, 9A326] используют эту связь, чтобы перевести на топологический язык ряд понятий, связанных с порядком. Трон и Циммерман [72, 4A537] характеризуют топологию линейного порядка с помощью минимальных $T_0$-топологий. Коновер [73, 3A485] нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы произведение локально компактных линейно упорядоченных пространств [в интервальной топологии] было нормальным. Лутцер [70, 3A501] и Беннет [72, 6A464] характеризуют некоторые топологические свойства линейно упорядоченных пространств, в частности, метризуемость, в различных терминах. Возможность продолжения функций, определенных на подмножестве некоторого упорядоченного множества и принимающих значения в топологическом пространстве, изучает Докас [70, 4A447].

Ряд авторов рассматривают некоторое подобие метрик, связанных с данным упорядоченным или квазиупорядоченным множеством, и получающиеся при этом топологии. См. Балан [72, 4A538; 73, 2A408, 3A483] и Бенадо [70, 5A381].

Топологическое пространство называется упорядочиваемым, если существует линейный порядок такой, что порядковая топология совпадает с исходной; если же последняя мажорирует топологию порядка, то говорят о слабой упорядочиваемости (упорядочиваемость по Эйленбергу). Дуда [69, 5A378] дает критерии упорядочиваемости и слабой упорядочиваемости для связных пространств и метрических сепарабельных пространств. Кок [71, 5A499] решает эту же задачу для связных хаусдорфовых пространств, а Брауэр [73, 3A484] — для связных $T_1$-пространств. Венкатараман и Раджаагопалан [72, 11A361] рассматривают свойства упорядочиваемых топологических пространств, их компактные расширения, дают характеристику упорядочиваемым топологическим группам различных типов. Исходя из упорядоченного множества, определенным образом связанного с данным топологическим пространством, Басс [69, 4A433] строит теорию размерностей конечных топологических пространств, а Курепа [71, 4A454] — ряд функций на топологических пространствах.

**Топологические упорядоченные множества.** В отличие от предыдущего, в этом разделе рассматриваются работы, в которых изучается структура вида $(X, \rho, T)$, где $X$—множество, $\rho$ — отношение на нем, а $T$ — топология, в некоторых случаях связанные друг с другом дополнительными условиями. Одна из решаемых здесь задач — каковы должны быть эти условия, то есть что означает согласованность топологии и порядка. Адналжевич [71, 11А434] дает обзор о совместимости топологии и порядка на фиксированном множестве и указывает проблематику. Он продолжает эту тему в работе [73, 3А482], изучая совместимость по отношению к операциям произведения, суммы, факторизации.

Тымчатын [70, 3А502; 71, 1А385] изучает структуру $(X, \rho, T)$, где отношение порядка $\rho$ замкнуто в $X \times X$. Такие же топологические упорядоченные пространства, в частности, непрерывные изотонные функции на них, изучает Такер [72, 12А384]. Деспанде [71, 7А519] усиливает это условие до так называемой сильной замкнутости $\rho$ и дает критерии его выполнимости. Недлер и Уорд [71, 9А414] изучают один специальный тип топологических упорядоченных пространств с замкнутым направленным вниз порядком. См. также Уорд [71, 8А348].

Другие специальные случаи согласованности топологии и порядка рассматривают Пелег [70, 10А312], Рао [70, 12А397], Росицкий [71, 5А498], Маккартан [69, 1А462; 72, 1А779], Лутцер [72, 7А401]. То, что рассматривает последний автор, близко к условию слабой упорядочиваемости.

В. В. Федорчук [69, 5А375] изучает бикомпактные расширения упорядоченных пространств, дает критерии метризуемости и рассматривает другие вопросы. Тымчатын [70, 3А503] доказывает для упорядоченных топологических пространств аналог теоремы Жордана. Маккартан [69, 5А379] вводит для них аксиому $T_1$-отделимости, а Адналжевич [70, 10А313] все остальные аксиомы отделимости от нулевой до четвертой. Бэрджес и Маккартан [71, 1А387] изучают понятие связности в топологических упорядоченных пространствах. Другие специальные вопросы теории топологических упорядоченных пространств обсуждаются в работах Мейера [69, 10А293], Пелхама [70, 1А420], Брукера [71, 1А386], Пристли [72, 10А319]. Квазиупорядоченные топологические пространства изучают Басс [71, 12А622] и Маккартан [72, 6А461]. Топологии и пространства близости, связанные с упорядоченными множествами, рассматривают В. В. Федорчук [69, 9А348] и Гамбургер [72, 11А362].

**Топологические полурешетки.** Для топологических полуреток согласованность топологии с порядком понимается однозначно: полурешеточная операция должна быть непрерывна. Поэтому топологические полурешетки можно рассматривать как топологические полугруппы.

Лоусон [72, 4A536; 73, 7A189] изучает размерность топологических полурешеток; в первой работе показано, что в случае локальной компактности коразмерность не превосходит ширину полурешетки, а в случае связности равна ей. Этот же автор в работе [71, 12A572] и Лау [72, 9A256] исследуют условия, при которых топологическая полурешетка обладает базой окрестностей из подполурешеток. Макуотерс [71, 12A571] показал, что локально связная метризуемая континуальная полурешетка, обладающая базой из подполурешеток, обладает свойством неподвижной точки. Лоусон и Уильямс [71, 12A365] изучают континуальные топологические полурешетки. Вопросы, связанные с метрикой на полурешетке, изучает Родабо [70, 3A346; 72, 3A261].

Степп [71, 10A120; 72, 4A462] рассматривает условия, когда локально компактная топологическая полурешетка вложима в произведение интервалов числовой прямой с естественной топологией и обычным порядком.

Другие вопросы, касающиеся свойств топологических полурешеток, освещаются в следующих работах: Боррего [70, 8A259], Каррут и Лоусон [71, 9A130], Лиейдер и Финкельстейн [71, 10A268], Хофман и Стралка [73, 7A194].

**Топологические решетки.** Бейкер и Стралка [71, 5A339] доказали для полной дистрибутивной решетки конечной ширины эквивалентность пяти условий, из которых отметим следующие: 1) операции в $L$ непрерывны относительно сходимости по упорядоченности; 2) интервальная топология и топология упорядоченности на $L$ совпадают и превращают ее в компактную хаусдорфову топологическую решетку; 3) $L$ можно вложить полным решеточным изоморфизмом в прямое произведение полных цепей. Показано, что при этих условиях все компактные хаусдорфовы топологии, относительно которых $L$ является топологической решеткой, совпадают с интервальной топологией, и выведен ряд следствий. Чо [69, 9A336] показал, что для компактной топологической решетки конечной ширины интервальная топология, порядковая топология и полная топология Инзеля совпадают с исходной. Этот же автор изучает вопросы связности для топологических решеток [70, 4A451], устанавливает в одном специальном случае равенство гомологической коразмерности топологической решетки и ее ширины, доказывает, что в локально компактной связной топологической решетке конечной размерности каждое компактное подмножество ограничено, что локально компактная топологическая булева алгебра вполне несвязна [70, 12A230], и рассматривает локально компактные решетки, в которых имеется базис из открытых подрешеток [71, 11A315].

Эдмондсон [70, 2A278] доказывает модулярность связной топологической решетки, ширина которой меньше трех, и локально связной топологической решетки, коразмерность которой меньше трех. В другой работе [70, 1A421] он приводит пример недистрибутивной модулярной компактной связной топологической решетки.

Кент и Асертон [69, 5A234] рассматривают сходимость по упорядоченности в компактно и кокомпактно порожденной решетке, доказывают, что она является топологической при некоторых дополнительных условиях. Рема [69, 1A302, 2A477] рассматривает равномерность на решетке, базис которой образует направленное вниз множество конгруэнтностей, изучает получающиеся при этом топологические решетки.

Веглож [69, 1A306] решает в отрицательном смысле вопрос об элементарной определимости топологических решеток, рассматриваемых как упорядоченные множества. Кларк и Эбенхарт [69, 3A389] рассматривают топологические решетки на единичном квадрате. Вложение так называемых гипотопологических пространств в дистрибутивную решетку с топологией порядка строит Бейкер [69, 10A292].

Шерли и Стралка [72, 5A297] изучают гомоморфизмы связных топологических решеток, в частности, выясняют, когда решеточный гомоморфизм является непрерывным. Вигадт [72, 8A369] строит в полной решетке операцию замыкания с помощью дуальных атомов, при некоторых дополнительных условиях получается топологическое $T_1$-пространство. Так называемую «новую интервальную топологию» в прямом произведении решеток вводит Холли [70, 11A327].

Хэнсел [71, 7A520] дает отрицательный ответ на вопрос Демарра: всякое ли компактное хаусдорфово пространство можно упорядочить так, чтобы получилась полная решетка и сходимость по порядку совпадала с топологической? Отрицательный ответ дается на аналогичный вопрос, когда вместо сходимости по порядку берется $o$-сходимость.

Стралка [71, 7A347] доказывает, что топологическая решетка конечной ширины $n$ может быть вложена в произведение $n$ компактных цепей тогда и только тогда, когда она локально выпукла и дистрибутивна; поэтому понятие метризуемости и сепарабельности для локально выпуклых связных дистрибутивных решеток равносильны. Ли [73, 4А394] устанавливает, что указанное вложение для компактных топологических решеток может быть осуществлено всегда, если под вложением понимать непрерывный гомоморфизм по объединениям; отсюда он получает следствия для полурешеток.

Непрерывные гомоморфизмы топологической решетки в единичный интервал рассматривают Дэвис [69, 1А463], Лоусон [70, 10А208], Чо [70, 12А230]. В частности изучается вопрос, когда таких гомоморфизмов (характеров) достаточно для отделимости точек. Лоусон приводит пример дистрибутивной топологической решетки, которая не допускает нетривиальных гомоморфизмов такого сорта, и полурешетки с таким же свойством. Хофман и Кеймел [73, 2А282] называют характером решетки ее гомоморфизм в двухэлементную решетку и дают единое изложение теории характеров для решеток и топологических пространств. Пристли [71,4А280] связывает с каждой дистрибутивной решеткой, имеющей с 0 и 1, стоуновское пространство — множество всех гомоморфизмов этой решетки в двухэлементную с естественной топологией и порядком. Обратно, по такому стоуновскому пространству восстанавливается исходная решетка. С этой работой пересекается работа Бернау [72, 12А284], который вводит новую топологию на стоуновском пространстве и характеризует в ней булево кольцо, порожденное исходной дистрибутивной решеткой.

Различные вопросы, касающиеся стоуновской топологии на решетках, рассматривают Йенсен [70, 1А422] и Венкатанарасимхан [73, 7А292]. Топологические булевы алгебры и их применения изучают Монтейро [72, 12А65] и Каган [73, 3А128].

Асертон [72, 2А598] доказывает, что топологическая решетка так называемых примитивно сходящихся структур (отображений семейства всех фильтров на данном множестве в семейство всех его подмножеств) содержит решетку всех топологий в качестве замкнутого подмножества. Некоторые решетки, связанные с инъективными $T_0$-пространствами, рассматривает Скотт [73, 1А444]. Спид [70, 11А222] изучает топологическое пространство простых идеалов дистрибутивной решетки с 0, а Рубинстейн [73, 4А396] — пространство минимальных простых идеалов, причем доказывает, что локальная компактность этого пространства не влечет обобщенной булевости решетки. Для алгебр Стоуна вопросы такого рода рассматривают Чен и Гретцер [71, 1А243].

Е. Я. Антоновский [71, 3А399] выясняет решеточный характер некоторых теорем о неподвижной точке, рассматривая естественную решетку для данного метрического пространства. Связь решетки фильтров с компактификациями изучают Скула [69, 12А572, 573] и Банашевский [70, 2А411]. А. И. Векслер [72, 10А320] использует для доказательства одного результата в теории топологических пространств существенным образом стоунов бикомпакт булевой алгебры всех подмножеств континуального множества по $\sigma$ — идеалу.

**В. Н. САЛИЙ**

# РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ. РЕШЕТОЧНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

## I. РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ

Два обзорных доклада как бы отмечают начало нового этапа в исследованиях решеток многообразий алгебр: доклад А. И. Мальцева на международном конгрессе математиков в Москве в 1966 г. [68, 12А128] и доклад, представленный Тарским на коллоквиуме по логике в Ганновере в том же году. Заметим, что к 1966 г. полная библиография по рассматриваемой тематике содержала не более двух десятков названий (см. соответствующий раздел в обзоре Т. М. Баранович по универсальным алгебрам [68, 9А254]).

1. А. Д. Больбот показал [71, 4А288], что решетка $L_\Omega$ всех многообразий $\Omega$-алгебр, если $\Omega$ содержит хотя бы одну операцию арности $\geqslant 2$, имеет континуум атомов, лежащих вне любого собственного подмногообразия. При этом многообразие $V_\Omega$ всех $\Omega$-алгебр порождается множеством атомов, мощность которого может быть выбрана не больше счетной при конечной $\Omega$ и не больше мощности $\Omega$ в противном случае. Ежек [71, 6А6317] для всех $\Omega$ определил число атомов решетки $L_\Omega$ и описал многообразие, являющееся объединением всех атомов. Ранее он же [69, 11А276] выяснил, что если $\Omega$ содержит бесконечное число нульарных, или не менее двух унарных операций, или не менее одной операции арности $\geqslant 2$, то каждый ультрафильтр в решетке $L_\Omega$ несчетен. Это следует также из работы Ю. Ребане [68, 5А354]. Баррис [72, 1А511] передоказал эти результаты и заметил, что $L_\Omega$ не может удов-

летворять никакому не выводимому из аксиом решетки решеточному тождеству.

Продолжая изучать решетку $L_\Omega$, Ежек [72, 4А344] вывел условия, при которых элемент $L_\Omega$ имеет верхнее полудополнение, и как следствие получил положительный ответ на вопрос из цитированной работы А. Д. Больбота: многообразие $V_\Omega$ порождается конечным числом собственных подмногообразий.

Маккензи [72, 1А134] доказал сформулированный Тарским критерий изоморфности решеток $L_{\Omega_1}$ и $L_{\Omega_2}$: мощности множеств основных операций каждой арности из $\Omega_1$ и $\Omega_2$ должны совпадать. Маккензи высказал также предположение, что каждое конечно базируемое многообразие, неподвижное при автомофизмах соответствующей решетки $L_\Omega$ определимо в $L_\Omega$ формулой первой ступени. Он проверил его для многообразий всех полугрупп, коммутативных группоидов, булевых алгебр, решеток и групп.

Пусть $\Omega$ не содержит нульарных операций. Тождество в сигнатуре $\Omega$ называется нормальным, если левая и правая его части содержат одни и те же переменные. Многообразие $\Omega$-алгебр называется (эквационально) нормальным, если оно может быть задано системой нормальных тождеств, а в противном случае — аномальным. В. Н. Салий [72, 6А333, 5А301К] показал, что нормальные многообразия образуют в решетке $L_\Omega$ главный дуальный идеал, определяемый многообразием $\Omega$-полурешеток (полурешеток в сигнатуре $\Omega$). Соответствие, сопоставляющее каждому многообразию его нормальное замыкание, является эндоморфизмом $L_\Omega$, взаимно однозначным на аномальных многообразиях. Отсюда следует, что если многообразие $V$ нормально, то в решетке $L_V$ его подмногообразий каждое аномальное многообразие имеет покрытие, а эквациональные свойства $L_V$ определяются эквациональными свойствами подрешетки нормальных многообразий. Изучая сдвиги в решетках многообразий, определяемые различными многообразиями, и особенности строения тождеств, задающих аномальные многообразия, И. И. Мельник [72, 3А248] разработал методы, позволяющие описывать довольно широкие решетки многообразий, отправляясь от некоторых известных [1].

2. Особенно интенсивно изучались решетки многообразий полугрупп.

---

[1] См. также Матем. заметки, 1973, 14, № 5, 711—720.

Эванс [69, 2A200] доказал несчетность решетки $L_S$ всех многообразий полугрупп. Он же совместно с Дином [70, 2A139] установил, что многообразие всех полугрупп не порождается никаким конечным числом собственных подмногообразий. Ежек [70, 2A287] привел пример, показывающий, что $L_S$ немодулярна. Большой обзор по решеткам многообразий полугрупп написал Эванс [71, 12A172]. Как известно, атомами в $L_S$ являются многообразия $p$-ограниченных абелевых групп ($p$ простое) и четыре негрупповых многообразия: полугрупп левых нулей ($x_1x_2=x_1$), правых нулей ($x_1x_2=x_2$), константных полугрупп ($x_1x_2=x_3x_4$) и полурешеток ($x^2=x$, $x_1x_2=x_2x_1$). В числе проблем, поставленных в упомянутом обзоре, — проблема описания подрешетки решетки $L_S$, порожденной атомами. Наименьшее многообразие полугрупп, содержащее все атомы, выделяется тождеством $x_1x_2x_3x_4=x_1x_3x_2x_4$. Из примера, приведенного Перкинсом [1], следует, что оно имеет континуум подмногообразий. С другой стороны, подрешетка, порожденная групповыми атомами, изоморфна решетке (относительно делимости) натуральных чисел, свободных от квадратов. Объединение всех групповых атомов в $L_S$ есть многообразие всех коммутативных полугрупп. Эванс описывает все шестнадцать элементов булевой подрешетки, порожденной негрупповыми атомами.

А. Я. Айзенштат [73, 5A164] показала, что если некоторое многообразие $V$ полугрупп содержит все коммутативные полугруппы, то оно имеет хотя бы одно покрытие в решетке $L_S$. Если при этом $V$ конечно базируемо, то множество всех покрытий его в $L_S$ конечно, а в противном случае — счетно. Неизвестно, всякое ли нормальное многообразие имеет в $L$ покрытие [2].

Решетка $L_{SJ}$ многообразий идемпотентных полугрупп была описана А. П. Бирюковым [71, 2A133] и независимо Герхардом [71, 4A134] и Феннемором [72, 1A231, 232]. Она счетна и дистрибутивна, три ее атома суть многобразия полугрупп левых и правых нулей и многообразие полурешеток. Тринадцатиэлементную решетку всех подквазимногообразий многообразия идемпотентных полугрупп, удовлетворяющих тождеству $x_1x_2x_3x_4=x_1x_3x_2x_4$, описали Герхард и Шафаат [72, 2A201].

---

[1] Perkins P. «J. Algebra», 1969, 11, 298—314.

[2] Утвердительный ответ недавно дал А. Н. Трахтман (12 Всесоюзн. алгебр. колл. Тезисы сообщ., Свердловск, 1973).

Перкинс[1] доказал, что всякое многообразие коммутативных полугрупп конечно базируемо, и, следовательно, решетка $L_{SC}$ многообразий коммутативных полугрупп счетна. Швабауэр [70, 1A159] привел пример, показывающий, что $L_{SC}$ немодулярна, а Баррис и Нельсон [73, 10A216] установили, что $L_{SC}$ не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству.

Многообразие полугрупп $V$ называется $R$-многообразием, если его нормальное замыкание состоит из жестких коммутативных связок полугрупп многообразия $V$. И. И. Мельником[2] доказано, что решетка коммутативных $R$-многообразий изоморфна удвоению (то есть прямому произведению на двухэлементную решетку) решетки натуральных чисел относительно делимости. Коммутативные многообразия, которые можно задать тождествами вида $s=sx^n$, где $s$—слово, составляют более обширную дистрибутивную подрешетку решетки $L_{SC}$ [Швабауэр, 70, 5A148]. Нельсон [72, 8A207] нашел дистрибутивную решетку, являющуюся максимальной модулярной подрешеткой в $L_{SC}$; но не всякая модулярная подрешетка решетки $L_{SC}$ дистрибутивна.

Изучая нильпотентные многообразия полугрупп, И. И. Мельник [73, 2A138] описал дуальные атомы решетки $L_{SN(n)}$ многоообразий $n$-нильпотентных полугрупп и доказал ее немодулярность при $n>3$. Решетка $L_{SN(3)}$ дистрибутивна и состоит из шести элементов. Решетка $L_{SCN(n)}$ коммутативных $n$-нильпатентных многообразий дистрибутивна при $n\leqslant 4$, модулярна при $n=5$ и немодулярна, если $n>5$. Найдены в явном виде все тридцать два элемента решетки $L_{SCN(5)}$ и построена ее диаграмма.

Хед [69, 6A155] дал описание решетки многообразий коммутативных полугрупп с сигнатурной единицей. Эта решетка счетна, дистрибутивна, а ее атомами являются все групповые атомы решетки $L_S$ и многообразие полурешеток.

И. И. Мельник [72, 5A140] определил все элементы тринадцатиэлементной дистрибутивной решетки подмногообразий многообразия полугрупп, задаваемого тождеством $x_1x_2x_3x_1x_2=x_1x_2$.

Ежек [72, 4A194] доказал, что многообразие $V$ коммутативных полугрупп, удовлетворяющих тождеству $x_1^2x_2=x_1x_2$, является н. н. г. множества верхних полудополнений элемен-

---

[1] Цит. раб.

[2] В сб.: Исслед. по алгебре, Саратов, вып. 2, 1970, 47—57.

тов решетки всех многобразий группоидов и что оно определимо формулой первой ступени в этой решетке.

3. Одной из основных проблем, относящихся к решетке многообразий групп, был вопрос о ее мощности. А. Ю. Ольшанский [70, 10А155] доказал, что существует континуум различных многообразий групп. Оказывается, континуально множество многообразий 5-ступенно разрешимых групп, имеющих экспоненту $e=8pq$, где $p$, $q$ — нечетные взаимно простые. С. И. Адян [70, 6А193; 71,2А181] указал первый явный пример системы тождеств, задающих континуальное семейство групповых многообразий: $(x_1^{r^n} x_2^{r^n} x_1^{-r^n} x_2^{-r^n})^n=1$, $n$ нечетное $\geqslant 4381$, $r$ пробегает все простые. Другой такой пример привел Воэн-Ли [71, 7А234].

Решетка $L_G$ модулярна, но из замечания Хигмена (теорема 54.2 в книге Нейман 68, 3А194) следовало, что она недистрибутивна. В. А. Романьков [70, 11А174] доказал отмеченную Хигменом недистрибутивность решетки многообразий 6-нильпотентных групп. Дистрибутивность решетки многообразий 3-нильпотентных групп анонсировал Йонссон. Впрочем, она может быть легко получена из результатов В. Н. Ремесленникова [66, 7А192]. А. А. Клячко [72, 5А212] установил дистрибутивность решетки многообразий $p$-групп малого класса, то есть класса нильпотентности $n<p$ для $n=4,5$, а также недистрибутивность решетки многообразий 4-нильпотентных групп. Последний результат был получен также Ю. А. Беловым [71, 7А230], доказавшим вместе с тем, что решетка метабелевых многообразий недистрибутивна. В другой работе [73, 5А196] Ю. А. Беловым обнаружена дистрибутивность решеток подмногообразий некоторых метабелевых нильпотентных многообразий, а также приведены примеры недистрибутивных решеток многообразий всех классов нильпотентности, начиная с 4.

$A^*$-группой называется конечная группа, все силовские подгруппы которой абелевы, а композиционные факторы суть простые группы. Косси[1] доказал, что решетка многообразий $A^*$-групп дистрибутивна:

А. Д. Больбот [72, 8А309] изучал решетку подмногообразий в фиксированном $L$-многообразии $n$-квазигрупп. В частности, доказано, что любое конечное множество собственных подмногообразий порождает в $L$-многообразии собственное подмногообразие.

[1] Cossey J. «Proc. Amer. Math. Soc.», 1969, 20, № 1, 217—221.

Воэн-Ли [71, 5А319] показал, что над любым полем характеристики 2 существует несчетное множество многообразий алгебр Ли, в которых истинно тождество $\{(x_1x_2)(x_3x_4)\}x_5=0$. Аналогичный результат о континуальности решетки многообразий установлен А. Т. Гайновым [70, 10А190] для алгебр с ассоциативными степенями над бесконечным полем конечной характеристики.

Описание минимальных многообразий неассоциативных (то есть не обязательно ассоциативных) алгебр дал Сю [69, 2А122].

4. Решетка $L_{\mathrm{L}}$ многообразий решеток дистрибутивна. Как доказал Йонссон [69, 9А208], любое конечное множество собственных многообразий порождает в $L_{\mathrm{L}}$ собственное многообразие. Этот результат установили также Дин и Эванс [70, 2А139]. Йонссон в цитированной работе показал, что в $L_{\mathrm{L}}$ каждое собственное многообразие имеет покрытие. Неизвестно, существует ли многообразие, имеющее бесконечно много покрытий.

Бейкер [69, 10А149] выяснил, что решетка $L_{\mathrm{LM}}$ многообразий модулярных решеток (а значит, и решетка $L_{\mathrm{L}}$) континуальна. Этот же факт независимо и проще доказал Маккензи [71, 11А318].

Множество покрытий элемента решетки называется строгим, если всякий элемент, содержащий данный, содержит по крайней мере одно из его покрытий. Йонссон [69, 9А194] показал, что (модулярные) многообразия $V_{\mathrm{n}}$, порождаемые решетками высоты 2 с $n$ атомами, образуют строго возрастающую цепь, причем каждое $V_{\mathrm{n}}$ имеет в $L_{\mathrm{LM}}$ двухэлементное строгое множество покрытий. Хонг [72, 12А276] установил, что многообразие, порожденное конечной проективной плоскостью (рассматриваемой как решетка) имеет конечное строгое множество покрытий, а для многообразия, порождаемого семейством всех проективных плоскостей, описал все пять покрывающих его многообразий.

Еще одну бесконечно возрастающую цепь в решетке $L_{\mathrm{LM}}$ открыл Хун [72, 1А520].

В. И. Игошин [72, 4А340] указал, что характеризуемые многообразия решеток образуют полную минорантную подполурешетку решетки $L_{\mathrm{L}}$. Пусть $W_{\mathrm{V}}$ есть множество всех подмногообразий многообразия решеток $V$, $\overline{W}_{\mathrm{V}}$ — теоретико-множественное дополнение $W_{\mathrm{V}}$ в множестве всех многообразий решеток. Оказывается, если $V$ характеризуемо, то всякое многообразие из $\overline{W}_V$ содержит некоторое минимальное (в $\overline{W}_V$) многообразие, а каждое минимальное многообразие порождено одной решеткой из характеристического для $V$ множества решеток. Кроме того, каждое конечно характеризуемое многообразие имеет конечное строгое множество покрытий в $L_L$.

Ли [71, 2А267, 7А351] обнаружил, что многообразия дистрибутивных решеток с псевдодополнениями образуют цепь типа $\omega+1$. Другое доказательство дал Лаксер [72, 2А402]. Такое же строение имеет решетка многообразий относительно стоуновых алгебр [Хейцт и Катриняк, 72, 10А210].

Брунс и Келмбах [72, 7А258, 11А220] показали, что многообразия ортомодулярных решеток, порождаемые горизонтальными суммами булевых алгебр, образуют главный идеал в решетке многообразий ортомодулярных решеток, и исследовали некоторые покрытия в этой решетке.

Падманабхан [72, 2А405] отметил дистрибутивность решетки многообразий квазирешеток (квазирешетки суть алгебры нормального замыкания многообразия всех решеток).

5. Через $A_{m,n}$ $(1\leqslant m\leqslant n)$ обозначим многообразие алгебр с $m$-арными операциями $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ и $n$-арными операциями $\omega_1,\ldots,\omega_m$, определяемое тождествами

$$\varphi_i(\omega_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\omega_m(x_1,\ldots,x_n))=x_i,\ 1\leqslant i\leqslant n, \tag{1}$$

$$\omega_j(\varphi_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,\varphi_n(x_1,\ldots,x_m))=x_j,\ 1\leqslant j\leqslant m. \tag{2}$$

А. А. Акатаев и Д. М. Смирнов [69, 4А263] показали, что среди многообразий $A_{m,n}$ $(1\leqslant m\leqslant n)$ минимальными являются многообразия $A_{1,n}$ $(n>1)$ и только они. Если $n\geqslant m\geqslant 2$, то многообразие $A_{m,n}$ содержит континуум минимальных подмногообразий. Решетка подмногообразий многообразия $A_{1,1}$ изоморфна решетке натуральных чисел относительно делимости с внешне присоединенными наибольшим и наименьшим элементами. Д. М. Смирнов [70, 2А286] установил, что для каждого $n\geqslant 1$ многообразие $A_{1,n}$ является наибольшим подмногообразием многообразия $B_{1,n}$ алгебр, определяемых системой тождеств (1). Отсюда и из результатов предыдущей работы получается описание дистрибутивной решетки подмногообразий многообразия $B_{1,1}$. А. А. Акатаев [70, 12А257] выяснил, что решетка подмногообразий многообразия $C_{1,n}$ $(n>1)$ алгебр, определяемых тождеством (2), континуальна, а также показал, что решетка подквазимногообразий многообразия $A_{1,n}$ $(n\geqslant 2)$ имеет мощность континуума.

Г. И. Житомирский [72, 5А156] рассматривал многообразия обобщенных груд. Если $V_0$ одно из таких многообразий, то все многообразия, имеющие общие с $V_0$ антигруды, образуют модулярную подрешетку решетки всех многообразий обобщенных груд. Многообразие всех совместных обощенных груд минимально и содержится в любом многообразии обобщенных груд, не включающемся в многообразие всех груд.

Манк [71, 11А326] описал решетку многообразий одномерных полиадических алгебр: она изоморфна цепи типа $\omega+1$. Решетка многообразий двумерных полиадических алгебр континуальна.

Нимитц и Уэйли [72, 2А389] показали, что многообразие всех импликативных полурешеток не может быть представлено в виде конечного объединения собственных подмногообразий.

Шафаат [71, 9А274] нашел условия, при которых решетка подквазимногообразий локально конечного квазимногообразия удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей.

## II. РЕШЕТОЧНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Пусть $A$ — непустое множество, $L$ — полная решетка. Назовем $n$-арным ($n>0$) $L$-отношением на $A$ отображение $f: A^n \longrightarrow L$. Совокупность всех $n$-арных $L$-отношений на $A$ обозначим через $P_L(A^n)$. Унарные $L$-отношения называются $L$-множествами.

Риге [55, 4290] определил основные понятия для булевых бинарных отношений — когда в качестве основной решетки $L$ берется булева алгебра. В. Н. Салий [65, 8А188] изучал алгебраические свойства решеточных отношений для случая произвольной решетки. Заде[1] рассматривал $L$-множества, когда $L$ есть отрезок [0,1] с естественным порядком. Он назвал их нечеткими множествами и обнаружил [66, 12В453] возможности приложений в задаче распознавания образов. Гоген [68, 6В339], распространяя эти результаты Заде на общий случай, определил и описал свойства некоторых конструкций для бинарных $L$-отношений. Общая теория решеточных отношений изложена в книге В. Н. Салия [72, 5А301К].

1. Совокупность $P_L(A)$ $L$-множеств на $A$ является решеткой (операции переносятся из L поточечно). Некоторые простые ее свойства отметили Де Люка и Термини [73, 5А300], а также Браун [72, 2А396], занимавшийся приложениями нечетких множеств. Ион [63, 9А226] показал, что решетка $P_L(A)$

---

[1] Zadeh L. A. «Inform. and Control», 1965, 8, 338—353.

имеет конечную размерность тогда и только тогда, когда $A$ конечно, а $L$ конечномерна. Категории нечетких множеств исследовал Гоген [70, 2В395].

Если $f_1$, $f_2$ бинарные $L$-отношения, то их произведением называется бинарное $L$-отношение, обозначаемое $f_2{}^0 f_1$, такое, что $f_2{}^0 f_1(\bar a, \bar{\bar a}) = \bigvee_{a \in A}(f_1((\bar a, a) \wedge f_2(a, \bar{\bar a}))$ для любых $\bar a, \bar{\bar a} \in A$. Обратное для бинарного $L$-отношения $f \in P_L(A^2)$ определяется условием $f^{-1}(\bar{\bar a}, \bar a) = f(\bar a, \bar{\bar a})$ для любых $\bar a, \bar{\bar a} \in A$. Если $f \in P_L(A^2)$ и $f(a, \bar a) \leqslant f(a, a)$, $f^{-1} \leqslant f$, $f^0 f \leqslant f$, то $f$ называется $L$-эквивалентностью на $A$. С. Д. Орлов [72, 4А339] показал, что для бесконечно дистрибутивной решетки $L$ имеется далеко идущая аналогия между свойствами $L$-эквивалентностей и обычных эквивалентностей. Булевозначные эквивалентности рассматривал Хигс [71, 6А339], использовавший их для построения полных расширений полных булевых алгебр.

Бинарное $L$-отношение $f \in P_L(A^2)$ называется однозначным, или $L$-преобразованием множества $A$, если $f(a, \bar a) \wedge f(a, \bar{\bar a}) = 0$ для любого $a \in A$ и различных $\bar a, \bar{\bar a} \in A$. Если $\bigvee_a f(a, \bar a) = \bigvee_a f(\bar a, a) = 1$ для любого $\bar a \in A$, то $L$-преобразование $f$ называется полным. Совокупность всех полных взаимно однозначных (то есть с однозначным обратным) $L$-преобразований множества обозначим через $\bar K_L(A)$.

Умножение в $P_L(A^2)$ ассоциативно тогда и только тогда, когда решетка $L$ бесконечно дистрибутивна [72, 5А301]. Если $A$ конечное множество с $n$ элементами, то $P_L(A^2)$ есть совокупность всех матриц порядка $n$ с элементами из $L$. Большое число работ посвящено изучению алгебраических операций над булевыми матрицами. Как обобщение обычных преобразований трактовал булевы матрицы еще Левенгейм[1]. Веддербарн[2] нашел необходимые и достаточные условия обратимости булевой матрицы. Резерфорд [63, 10А237] упростил их и показал [67, 10А214], что $\bar K_L(A)$ в случае, когда $L$ есть конечная булева алгебра с $2^m$ элементами, является группой, изоморфной $m$-ой прямой сумме симметрической группы на $A$. Обратимость булевых матриц изучали также Блис

[1] Löwenheim L. «Math. Ann.», 1913, 73, 245—272.

[2] Wedderburn J. H. M. «Ann. Math.», 1934, 35, 185—194.

[65, 8A190], Охару [69, 3A233], Бурлаку [70, 8A247], Шакрон [71, 9A252], Рудяну [73, 3A308]. Отметим, что в этих исследованиях конечность множества $A$ является лишь традиционным требованием. Блис [67, 8A179] выяснил вопрос о дистрибутивности умножения в $P_{\mathrm{L}}(A^2)$ относительно решеточного пересечения $\wedge$ : элементы инверсной полугруппы всех взаимно однозначных $L$-преобразований $A$, и только они, двусторонне $\wedge$ -дистрибутивны в полугруппе $P_{\mathrm{L}}(A^2)$. Полугрупповые свойства множества булевых $n \times n$-матриц исследовал Льюс[1]. В. Н. Салий [70, 11A139] показал, что совокупность всех булевых преобразований множества является регулярной полугруппой.

Матрицы с элементами из произвольной решетки систематически изучал Гивеон [65, 10A273]. В частности, он доказал, что всякая конечно порожденная полугруппа в $P_{\mathrm{L}}(A^2)$, где $A$ конечно, конечна. Бевис [69, 11A266] установил, что если решетка $L$ ортомодулярна, то умножение в $P_{\mathrm{L}}(A^2)$ ассоциативно тогда и только тогда, когда $L$ булева.

Совокупность ненулевых элементов решетки с нулем называется ортогональной системой, если ее элементы попарно ортогональны, то есть дают в пересечении нуль. Ортогональная система называется независимой, если при любом ее разбиении на два подмножества объединения элементов этих подмножеств ортогональны. Если в решетке $L$ всякая ортогональная система независима, и только в этом случае, произведение произвольных $L$-преобразований однозначно [1972, 5A301]. Группоид всех полных взаимно однозначных $L$-преобразований множества близок по своим свойствам группе: он имеет единицу, каждый его элемент двусторонне обратим, произведение, равное единице, не зависит от расстановки скобок. Указанные три свойства выделяют в классе всех группоидов класс ассоциаций. Свойствам абстрактных ассоциаций посвящена часть работы В. Н. Салия [68, 9A253].

2. $L$-множество $\nu \in P_{\mathrm{L}}(A)$ называется нормальным, если $\nu(\bar{a}) \wedge \nu(\bar{\bar{a}}) = 0$, как только $\bar{a} \neq \bar{\bar{a}}$, и полным, если $\bigvee\limits_{a \in A} (a) = 1$. Совокупность всех нормальных $L$-множеств, всех полных нормальных $L$-множеств на $A$ обозначается через $N_{\mathrm{L}}(A)$ и $\widetilde{N}_{\mathrm{L}}(A)$ соответственно. Пусть на $A$ задана алгебраическая структура. В $N_{\mathrm{L}}(A)$ вводятся одноименные операции по формулам

---

[1] Luce R. D. «Proc. Amer. Math. Soc.», 1952, 3, 382—388.

$$F(\nu_1, \ldots, \nu_n)(a) = \bigvee_{a_1, \ldots, a_n \in A} (P(a_1, \ldots, a_n, a) \wedge \nu_1(a_1) \wedge \ldots \wedge \nu_n(a_n)).$$

где $P$ есть предикат, соответствующий операции $F$. Частичная алгебра $N_L(A)$ называется $L$-расширением алгебры $A$. Оказывается [В. Н. Салий, 72, 6А333], что $L$-расширение всякой алгебры тогда и только тогда имеет всюду определенные операции, когда в решетке $L$ всякая ортогональная система независима. Если $L$ полная булева решетка, то $\bar{N}_L(A)$ есть булево расширение алгебры $A$, введенное Фостером [55, 637]. Основной результат Фостера — эквациональная эквивалентность алгебры и ее булева расширения. Булевы расширения групп были введены позднее в работе Лося [61, 5А215] и рассматривались Бальцежиком [63, 11А161]. Нейман и Ямамуро [66, 10А147] показали, что если $A$ есть неабелева простая группа, то каждый гомоморфный образ ее булева расширения есть снова булево расширение. Характеризацию булевых расширений алгебр дал Яганнадхам [68, 5А340], а Гоулд и Гретцер [68, 7А330] обнаружили связь между булевыми расширениями и нормальными подпрямыми степенями конечных алгебр. Простое описание булевых расширений примальных алгебр получил Искандер [72, 7А269]: это суть коммутативные кольца с оператором замыкания и индуцированной структурой дистрибутивной решетки. Франчи [72, 12А151] указала новый способ построения булева расширения алгебры. Она доказала также, что всякое булево расширение алгебры есть эпиморфный образ подходящего ее полугруппового расширения, также введенного Франчи.

Пусть $B$ произвольное множество, $A$ — алгебра, $F(B \times A)$ множество всех (частичных) отображений $B$ в $A$. Для $\varphi_1 \ldots, \varphi_n \in F(B \times A)$ положим

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(a) = \begin{cases} F(\varphi_1(a), \ldots, \varphi_n(a)), \text{ если } a \in \bigcap\limits_i pr_1\varphi_i, \\ \varnothing, \text{ если } \bigcap\limits_i pr_1\varphi_i = \varnothing. \end{cases}$$

$F(B \times A)$ называется алгеброй отображений на $A$ (В. В. Вагнер, 57, 8910). Оказывается, $F(B \times A)$ изоморфна решеточному расширению $N_L(A)$, где $L$-булева решетка всех подмножеств множества $B$. В. Н. Салий [67, 11А174] показал, что если решетка $L$ дистрибутивна, то в $L$-расширении $N_L(A)$ истинны те и только те нормальные тождества, которые истинны в алгебре $A$. Таким образом, наименьшее нормальное многообразие, содержащее алгебру $A$, есть многообразие, порожденное любым дистрибутивным решеточным расширением $A$. В частности, можно взять $L=\{0,1\}$.

Дистрибутивные решеточные расширения и алгебры порожденных ими многообразий изучали Юсуф[1], В. Н. Салий [67, 11А174; 69, 9А190, 10А184; 72, 5А301К, 6А155]. Плонка [68, 4А249, 7А335; 69, 1А330, 4А255; 70, 4А310]. Келман [72, 2А404], Бэлбс [71, 3А247], И. И. Мельник [72, 3А283], Падманабхан [72, 2А405]. С другой стороны, недистрибутивные расширения практически не исследовались.

3. Доказательства независимости в теории множеств, полученные с использованием булевозначных моделей [Скотт, 68, 6А143; Россер, 72, 1А66К] привлекли внимание к этим структурам.

Пусть $L$ — полная булева алгебра. $L$-значной моделью называется множество $A$ вместе с совокупностью $L$-отношений различной арности, определенных на $A$. Основные алгебраические понятия для булевозначных моделей обсуждались в заметке Рутковского [71, 11А113]. Шорб [73, 4А145], используя конструкцию, обобщающую понятие фильтра, доказал теорему о полноте в булевозначной теории моделей. Скотт [69, 12А208] указал на тесную связь между булевозначными моделями и ультрастепенями. Целым рядом авторов [Марчья и Маронджю, 70, 10А205; Мэнсфилд, 71, 9А69; Дейно, 72, 8А153; В. Н. Салий[2]] было введено понятие булевой ультрастепени модели и доказано, что булевы ультрастепени являются ее элементарными расширениями. При этом Дейно привел пример булевой ультрастепени, отличной от ультрастепени, а Мэнсфилд получил булевы аналоги некоторых результатов Кислера. Марчья [71, 11А320] исследовала вопрос о мощности булевых ультрастепеней. Ею же было определено булево произведение моделей [72, 8А377] и доказано, что предложение тогда и только тогда сохраняется при образовании специальных булевых произведений, когда оно эквивалентно хорновскому.

Основные конструкции для булевозначных алгебр ввел В. Н. Салий[3]. Пусть $L$ — полная булева алгебра. Назовем $L$-алгеброй множество $A$ вместе с совокупностью отображений различных степеней $A$ в множество $\bar{N}_L(A)$ всех полных нормаль-

[1] Yusuf S. M. «J. Natur. Sci. Math.», 1965, № 1, 45—56.

[2] В сб.: Упорядоченные множества и решетки, вып. 2, Саратов, 1974, 85—90.

[3] Матем. сб., 1973, 92, № 4, 550—563.

ных $L$-множеств на $A$. Для основных конструкций (подалгебры, гомоморфизмы, конгруэнции и т. п.) имеют место стандартные алгебраические свойства. Каждой $L$-алгебре сопоставляется ее нормальное расширение — алгебра с базисным множеством $\bar{N}_L(A)$ (считается, что $A$ содержится в $\bar{N}_L(A)$). Формулы первой степени для булевозначной алгебры интерпретируются в нормальном расширении, но предметные переменные пробегают множество $A$. Булевозначная алгебра эквационально эквивалентна своему нормальному расширению.

## УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА

### § 1. Упорядоченные множества

1. Клей [70, 12А60] определил у. м. одной аксиомой. Уолк [69, 12А74] сообщил, что рефлексивное и антисимметричное бинарное отношение $\theta$ тогда и только тогда транзитивно, когда оно регулярно (то есть уравнение $\theta \circ \xi \circ \theta = \theta$ разрешимо). Моргадо [73, 2А283] заметил, что если $\omega$ есть порядок такой, для любого квазипорядка $\zeta$, содержащего $\omega$, выполняется равенство $\zeta = \omega \circ (\zeta \cap \zeta^{-1}) = (\zeta \cap \zeta^{-1}) \circ \omega$, то $\omega$ является линейным порядком. См. также работу Раутенберга [69, 4А61].

Н. Г. Хисамиев [73, 6А337] показал, что квазимногообразие всех у. м. не имеет подмногообразий, и описал его подквазимногообразия.

Мендельсон [72, 2А427] четырнадцатью аксиомами охарактеризовал категорию $K$ у. м. с изотонными отображениями. Секанина [71, 6А336] доказал, что мономорфизмами и эпиморфизмами в $K$ являются соответственно взаимно однозначные отображения и отображения на, $K$ полна, обладает интегральными и коинтегральными объектами. Те же свойства отмечаются и для категории $K_0$ у. м. с отмеченной точкой. В $K_0$, кроме того, каждое правильное произведение объектов совпадает с их свободным произведением. В [70, 7А443] он рассматривал вложение категории $K$ в категорию топологических пространств, а в [72, 1А222] — возможность вложения в категорию полугрупп полной подкатегории категории $K$, содержащей единственный объект (цепь или антицепь). Новак и Шмидт [70, 9А233] нашли ряд условий, эквивалентных разложимости объекта в прямое произведение подобъектов в категории у. м. с нулем. Венсан [69, 7А253] показал, что каждое конечное связное у. м. допускает единственное разложение в произведение неразложимых сомножителей, а Треэль [72, 4А347] — что прямое произведение конечных у. м. с 0 и 1 в нетривиальных случаях не может быть изоморфным стянутому произведению их упорядоченных подмножеств. Гомологические вопросы изучались Претцелем [69, 10А321]. Некоторые общие свойства у. м. рассматривал Курепа [70, 1А56].

Девиде [69, 2А63, 12А397] дал короткое доказательство теоремы Цермело о вполне упорядочиваемости множеств в предположении аксиомы выбора. Сломсон [73, 5А94] явно указал рекурсивную систему аксиом для элементарной теории вполне упорядоченных множеств и дал новое доказательство ее разрешимости. Ротман [72, 1А52] доказал, что если $A$ и $B$ счетные вполне упорядоченные множества и $\varphi: A \longrightarrow B$ инъективно, то существует подмножество $X$ в $A$, имеющее тот же порядковый тип, что и $A$, и такое, что $\varphi(X)$ имеет ординал, не больший, чем ординал $A$. Разбиение на конфинальные подмножества рассматривали Стоун [69, 8А65] и Тейлор [72, 4А61]. См. также работы Бейкера [69, 8В158] и Пузе [73, 6А58]. Одну задачу о вполне упорядоченных множествах обсуждали Эрдеш, Хайнал и Милнер [70, 9А38].

Кларнер [70, 1В266] оценил снизу число у. м. на множестве из $n$ элементов. Абян [71, 6А318] установил, что если два конечные (но не бесконечные!) у. м. допускают изотонные взаимно однозначные вложения друг в друга, то существует изотонное и обратно изотонное взаимно однозначное отображение одного на другое. Эйгнер и Принс [73, 1А282] указали условия, при которых у. м. допускает взаимно однозначное неизоморфное отображение, образами и прообразами отрезков при котором являются отрезки. Свойства универсальных у. м. изучал Харцхайм [69, 2А64].

Свойства арифметических операций над у. м. рассматривал Копечек [71, 5А333].

Матричные представления конечных у. м. изучали Л. А. Назарова и А. В. Ройтер [73, 3А302], М. М. Клейнер [73, 3А303, 304], описание конечного у. м. с помощью перестановок предложил С. С. Кислицын [69, 6В214]. Разложение конечного у. м. в объединение цепей рассматривали Богарт [71, 2В290] и Мирский [72, 5В255]. Некоторые алгоритмы на у. м. описали Бэр и Эстербю [70, 3В607].

Беран [71, 5А335] ввел понятие амальгамы семейства у. м. относительно семейства их гомоморфизмов, показал, что она всегда существует, и выяснил, когда амальгама будет решеткой, модулярной, дистрибутивной решеткой.

Моргадо [73, 2А283] дал новое доказательство известного факта: каждый порядок есть пересечение линейных порядков. Наименьшее кардинальное число линейных порядков на множестве $A$, пересечением которых является данный порядок $\omega$, называется размерностью у. м. $(A, \omega)$. Харцхайм [71, 5А334] доказал следующую теорему компактности: если каждое конечное упорядоченное подмножество у. м. $(A, \omega)$ имеет размерность не больше $n$, где $n$ натуральное, то $(A, \omega)$ имеет размерность не больше $n$. Дачич [72, 8А370] привел пример, показывающий, что у. м., являющееся объединением $n$ своих антицепей, может иметь размерность, превышающую $n+1$ (считалось, что это не так). Подмножество $A^*$ у. м. $A$ называется $\sigma$-плотным ($\delta$-плотным) в $A$, если каждый элемент $A$ может быть представлен в виде н. в. г. (н. н. г.) некоторой совокупности элементов $A^*$. Новак [69, 9А91] доказал, что если $A^*$ является $\sigma$- и $\delta$-плотным в $A$, то размерности $A$ и $A^*$ совпадают. В частности, это верно для пополнения Дедекинда-Макнила $A$ у. м. $A^*$. Грийе [70, 2А275] показал, что если в конечной модулярной решетке $L$ любая максимальная цепь пересекает все максимальные антицепи, то размерность $L$ как у. м. не превышает двух. В работе [69, 12А398] Новак ввел понятие полной размерности у. м., изучил ее свойства. В частности, ее существование равносильно выполнимости условия обрыва убывающих цепей. См. также работу Бейкера, Фишберна и Робертса [71, 5В367].

2. Абян [69, 8А220] построил для у. м. пополнения с помощью начальных и нижних сечений. О пополнениях см. также замечание Дердеряна [69, 6А238].

Булей [71, 12А372] называет расширением у. м. $A$ такое у. м., которое является упорядоченным подмножеством в произведении $A \times \{0, 1\}$, содержащим $A \times \{0\}$, и изучает такие расширения решеток. Аженорф [72, 8А369; 73, 6А62, 63] определяет непосредственное расширение данного порядка $\omega$ и доказывает, что всякий порядок имеет непосредственное расширение. Если бесконечная цепь вложима в каждое непосредственное расширение $\omega$, то она вложима в $\omega$.

Пусть $A$ — у. м., $k$ — бесконечное регулярное кардинальное число. Подмножество $A^* \subset A$ называется $k$-замкнутым, если элементы $A$, представимые как н. в. г. семейств из $A^*$, имеющих мощность меньше $k$, сами принадлежат $A^*$. Если в $A$ нет собственных подмножеств, в которых $A^*$ было бы $k$-замкнутым, то $A$ называется $k$-расширением для $A^*$. Шмидт [72, 11А223; 73, 3А315] изучает $k$-пополнения у. м., то есть такие их $k$-расширения, в которых определены н. в. г. подмножеств с мощностью, меньшей $k$.

Полуидеалом в у. м. называется непустое подмножество, вместе со всяким своим элементом содержащее все его миноранты (пустое подмножество считается полуидеалом). Венкатанарасимхан [70, 10А209] подробно изучает свойства полуидеалов и переносит на них результаты Стоуна о топологии простых идеалов в дистрибутивной решетке.

Пусть $A$ — произвольное у. м. Обозначим через $\varphi(I)$, где $I$ полуидеал в $A$, дважды псевдодополнение $I$ в решетке всех полуидеалов $A$. Полуидеал называется замкнутым, если $\varphi(I)=I$. Пусть $S(A)$ есть наименьшая подалгебра в булевой алгебре замкнутых полуидеалов $A$, содержащая $\varphi$-образы всех главных идеалов $A$. В. В. Пашенков [71, 9А246], рассматривая эти конструкции, показал, что для любого идеала $I$ булевой алгебры $A$ фактор-алгебра $A/I$ изоморфна $S(A\setminus I)$, и предложил называть $S(A\setminus I)$, обобщенной фактор алгеброй для $A$.

А. Г. Пинскер [70, 11А217] показывает, как у. м. можно погрузить в полную булеву алгебру. Вложения у. м. в дистрибутивные решетки рассматривала Маркьонна [72, 10А200]. Вложения линейно упорядоченных множеств исследует в заметке [72, 5А45] А. Г. Пинус. См. также работу Исбела [72, 12А386].

Беднарек и Уэйли [70, 9А39], в частности, изучали упорядоченности на множествах регулярной мощности. Свойства начальных отрезков у. м. формулирует в терминах теории категорий и теории решеток Пузе [69, 12А75]. Фильтры в у. м. определяет и исследует Баррос [70, 12А232]. Характеризацию некоторых антицепей в у. м. с 0 и 1 дает Дрейк [72, 1А512].

Существование неподвижных точек для некоторых невозрастающих отображений устанавливается в работах Абяна [69, 12А619] и Меткалфа и Пейна [72, 10А194]. С неподвижными точками связывает вопрос о существовании н. в. г. у подмножеств у. м. Салинас [71, 7А349]. Неподвижные точки сохраняющих порядок многозначных отображений рассматривает Смитсон [72, 7А439].

3. Теорию псевдодополнений распространил на у. м. Венкатанарасимхан [72, 7А259]. Известно, что в решетке с псевдодополнениями множество псевдодополнений является булевой алгеброй. Треэль [72, 9А251] показал, что в у. м. с псевдодополнениями псевдодополнения образуют у. м. с единственными дополнениями. Катриняк [70, 8А245] нашел необходимые

и достаточные условия, при которых это у. м. будет булевой алгеброй, и привел пример, показывающий, что они не всегда выполняются.

Финч [70, 10А201] исследовал пополнения сечениями ортомодулярного у. м., а Адамс [70, 10А202] показал, что такое пополнение само не обязано быть ортомодулярным. В другой работе [70, 10А200] Финч дал необходимые и достаточные условия того, чтобы у. м. с ортодополнениями было ортомодулярной решеткой. Мейер [71, 7А79] решил одну из проблем Финча об ортомодулярных у. м. Хаскинс и Гадер [72, 7А260] изучали полумодулярные у. м.

4. Пусть $(A, \omega)$ — некоторое у. м. В множестве $A$ можно ввести частичные бинарные операции inf и min, полагая inf $(a_1, a_2)$ определенным тогда и только тогда, когда существует н. н. г. $a$ подмножества $\{a_1, a_2\}$, и равным в этом случае $a$, и полагая min $(a_1, a_2)$ определенным тогда и только тогда, когда элементы $a_1$ и $a_2$ сравнимы в смысле $\omega$, и равным в этом случае меньшему из них. Двойственно определяются частичные операции sup и max. Частичная алгебра $(A, f)$ типа $<2>$ называется ассоциированной с у. м., если на $A$ можно задать упорядоченность так, чтобы частичная операция $f$ совпадала с одной из упомянутых частичных операций, определяемых этой упорядоченностью. В. В. Розен [66, 12А264] дал в этом смысле обстрактное описание частичной алгебры $(A, inf)$ и показал, как алгебраические свойства частичной операции inf связаны со свойствами порядка. Фиала и Новак [67, 3А157] изучали частичную алгебру $(A$, min$)$, в частности, связь мождy ее гомоморфизмами и изотонными отображениями при различных упорядоченностях на $A$. В работе [69, 12А281] В. В. Розен, в частности, показал, что у. м. $A$ тогда и только тогда является цепью, когда идеалы частичного группоида $(A$, inf$)$ образуют по включению цепь. Теоретико-модельные свойства классов частичных алгебр, ассоциированных с у. м., рассматривались В. В. Розеном в статье [72, 3А160]. Гадер [73, 3А305] показал, что всякое ассоциативное частичное булево кольцо ассоциировано с некоторым ортомодулярным у. м. Штурм [72, 8А395; 73, 5А301] изучал эквивалентности, связанные с изотопными отображениями у. м. Довольно подробно эти вопросы разбираются и в книге Блиса и Яновича [1].

Под сильным вложением частичной алгебры $(A, F)$ в ча-

[1] Bluth T. S., Janowitz M. F. Residuation theory, N. У., 1972.

стичную алгебру $(\bar{A}, \bar{F})$ того же типа В. В. Розен понимает взаимно однозначное $\varphi$: $A \longrightarrow \bar{A}$ такое, что $a=f(a_1,..., a_n)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(a)=f(\varphi(a_1),..., \varphi(a_n))$ для любых $a_1,..., a_n \in A$, $f \in F$. В [72, 6А177] доказано, что если частичная алгебра $(A, f_1, f_2)$ типа $<2,2>$ ассоциирована с у. м. в том смысле, что для некоторого порядка на $A$ будет $f_1=\inf$, $f_2=\sup$, то $(A, f_1, f_2)$ сильно вложима в решетку. Систематическое изучение у. м. на базе исследования определенных в них частичных операций проводится в монографии В. В. Розена [1].

Частичным $P$-оперативом [В. В. Вагнер, 66, 12А254] называется пара $(A, O)$, где $A$ непустое множество, а частичная $P$-операция $O$ есть отображение $P(A)$ в само $A$. Примером частичной $P$-операции может служить сопоставление подмножествам упорядоченного множества их н. н. г. (частичная $P$-операция Inf) или сопоставление им их наименьших элементов (частичная $P$-операция Min). Абстрактная характеризация частичных $P$-оперативов вида $(A, \mathrm{Inf})$ и $(A, \mathrm{Min})$ была получена Шмидтом [58, 9624]. Свойства частичных $P$-оперативов, ассоциированных с у. м., рассматривались В. В. Вагнером в цитированной работе, а затем В. В. Розеном [2]. Общую теорию частичных $P$-оперативов построила М. Б. Дихтярь [72, 6А327] [3]. Ею изучались также конгруэнции и гомоморфизмы частичных $P$-оперативов, связанных с у. м. [72, 3А273].

5. Некоторые типы у. м. с изоморфными группами автоморфизмов исследовал Айзенбуд [69, 12А329]. Представления групп автоморфизмами у. м. изучал Гадер [72, 4Б988].

Е. С. Ляпин [70, 6А170] доказал, что у. м. с 1 изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны полугруппы их направленных эндоморфизмов и нашел [69, 2А214] определяющие соотношения полугруппы направленных преобразований конечного у. м. Определяемость у. м. с 0 и 1 полугруппой строго направленных преобразований установил С. Г. Мамиконян [71, 8А131].

А. Е. Евсеев [72, 1А263] показал, что некоторые полугруппы sup-эндоморфизмов у. м., содержащие все эндомор-

---

[1] Частичные операции в упорядоченных множествах. Саратов, 1973.

[2] В сб.: Некоторые приложения теории бинарных отношений. Изд-во Саратовского ун-та, 1966, 3—9.

[3] См. также в сб.: Исследования по алгебре, изд-во Саратовского ун-та, вып. 2, 1970, 3—22, вып. 3, 1973, 9—13.

физмы рангов 1 и 2, описывают это у. м. с точностью до дуального порядка. Ю. М. Важенин [70, 7А168] дал обстрактную характеристику полугруппы inf-эндоморфизмов у. м.; оказалось, что она и некоторые ее подполугруппы полностью характеризуют у. м. Он же [70, 8А148] рассматривал с этой точки зрения и некоторые частичные группоиды преобразований у. м.

Элементарным свойствам полугрупп преобразований у. м. посвящена работа Ю. М. Важенина [71, 1А148]. Например, если полугруппы эндоморфизмов у. м. $A_1$ и $A_2$ элементарно эквивалентны, то $A_1$ элементарно эквивалентно $A_2$ или его дуальному. А. Г. Пинус [72, 1А53] в связи с этим обращает внимание на тот факт, что у элементарно эквивалентных у. м. соответствующие полугруппы некоторых эндоморфизмов могут не быть элементарно эквивалентными.

Рейли [73, 2А154] доказал, что совокупность всех изотонных взаимно однозначных преобразований цепи, областями определения и областями значения которых являются ее идеалы, образует инверсную полугруппу.

Взаимно однозначное отображение одного у. м. на другое, при котором образом отношения сравнимости является отношение сравнимости, называется $\sigma$-изоморфизмом. Н. Д. Филиппов [69, 2А376] нашел условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данное у. м. было изоморфно решетке с единственными дополнениями, модулярной или полумодулярной решетке. Отметим, что в [69, 3В205] Н. Д. Филиппов рассматривал графы сравнимости у. м., а Сибульскис в [71, 12А369] — упорядоченности, связанные с отношением «между» на решетке.

Остаточные операторы замыкания в у. м. с 0 и 1 исследовал Янович [70, 1А273]. Перспективность в у. м., задаваемую парой идемпотентных эндоморфизмов, ввели Рамальо и Алмейда [72, 12А277].

6. Упорядоченность в системах подмножеств данного у. м. рассматривает Секанина [72, 2А433], а Оуингс [71, 9А43] вводит канонический линейный порядок на множестве максимальных цепей дерева.

У. м. $A$ называется частично вполне упорядоченным, если оно удовлетворяет условию минимальности и все его антицепи конечны. Множество антицепей упорядочивается: $A_1 \leqslant A_2 \leftarrow\rightarrow \forall a_2 \in A_2)(\exists a_1 \in A_1)(a_1 \leqslant a_2)$. Уорд доказывает, что этот порядок удовлетворяет условию минимальности [70, 6А200] и что для всякого $n$ семейство антицепей мощности $\leqslant n$ частично вполне упорядочено, но это, вообще говоря, неверно для всего множества антицепей в $A$ [71, 2А259].

Свойства порядка на множестве слоев данного у. м. $A$ изучает Скула [70, 1А273], а строение у. м. поляр в $A$ исследует Катриняк [71, 6А319]. $D$-множеством А. С. Бондарев [73, 3А307] называет тройку ($A$, o, $d$), где $A$ непустое множество с фиксированным элементом 0, а $d$ (дизъюнктность) — симметричное бинарное отношение, антирефлексивное на $A \setminus \{0\}$, причем $(a, 0) \in d$ для всякого $a \in A$. Компонентами называются дизъюнктные дополнения подмножеств $A$. Из результатов цитируемой работы следует, что совокупность всех компонент квазиупорядоченного множества $A$ с 0, где $(a_1, a_2) \in d$ означает, что $a_1$ и $a_2$ не имеют общих минорантов, отличных от 0, — является полной булевой алгеброй. Смит [69, 11А258] называет короной подмножество у. м. $A$, представимое в виде конечного объединения главных идеалов. Оказывается, если множество всех корон замкнуто по пересечению, то $A$ является дистрибутивной решеткой.

Порядок на полугруппе некоторых эндоморфизмов у. м. рассматривает Л. Д. Зыбина [71, 6А170]. Свойства порядков, определяемых для специальных подмножеств квазиупорядоченного множества, изучает Фрода-Шехтер [69, 6А40].

Бэлбс [72, 5А305] нашел достаточные условия изоморфности у. м. с 0 и 1 совокупности простых идеалов некоторой дистрибутивной решетки. Фрид [70, 8А178] абстрактно описал у. м., образуемые в группе подгруппами, сопряженными с некоторой ее подгруппой.

Гадер и Шелп [71, 8А137] перенесли на у. м. с ортодополнениями результаты Фоулса о координатизации с помощью бэровских *-полугрупп, а Джонсон [72, 4А198] и Шелп [72, 7А164] обобщили на у. м. результаты Яновича о координатизации решеток с помощью бэровских полугрупп.

Шакрон [71, 2А279] показал, что в у. м. всех инвариантных атласов группоида все сегменты являются модулярными решетками. Ряд замечаний о справедливости теоремы Жордана-Гельдера для идемпотентов кольца сделал Фаре [70, 5А217]. Упорядоченности, получающиеся на множестве целых чисел 0, 1,..., $n$ ослаблением естественного порядка, изучал Эванн [72, 10А193]. Свойства решетки естественных порядков на множестве ординалов, меньших данного, рассматривали Дин и Келлер [69, 2В192].

## § 2. Полурешетки

Клей [70, 12A60] показал, что полурешетку можно определить одной аксиомой.

В классе полугрупп характеристическое свойство сдвиговой оболочки полурешетки открыл Петрич [73, 4A417].

Категорию $S$ полурешеток с гомоморфизмами изучали Хорн и Кимура [72, 2A431]. Мономорфизмы в $S$ совпадают с взаимно однозначными отображениями, а эпиморфизмы — с отображениями на. Полурешетка называется полной, если она является полной решеткой относительно естественного порядка. Полная полурешетка $A$ называется $(2, \infty)$-дистрибутивной, если для любого семейства элементов $(a_i)_{i\in J}$ из $A$ и $a \in A$ имеет место $a \wedge \bigvee_{i\in J} a_i = \bigvee_{i\in J} (a \wedge a_i)$. Полурешетка $A$ инъективна в $S$ тогда и только тогда, когда $A$ полна и $(2, \infty)$-дистрибутивна. Доказывается, что категория $S$ инъективно полная, то есть для каждой полурешетки $A$ существует мономорфизм $A$ в инъективную полурешетку. Описаны инъективные оболочки. Некоторые из этих результатов получили ранее Брунс и Лаксер [71, 3A251]. Каждая свободная полурешетка изоморфна $\cup$-полурешетке непустых конечных подмножеств некоторого множества. Характеризуются проективные объекты, изучаются их свойства.

Вполне циклически инъективные полурешетки определили и описали Джонсон и Макморрис [73, 7A299].

Ниминен [73, 1A290] перенес на случай полурешеток конструкцию канонического подпрямого разложения, введенную для решеток Маедой. Тензорное произведение для полурешеток рассматривали Делани [73, 2A287] и Фрейзер [72, 3A269Д]. В частности, Делани доказал, что прямое произведение двух полурешеток есть гомоморфный образ их тензорного произведения.

Чейз [71, 11B463] указал алгоритм нахождения конечно порожденной подполурешетки. Бонзини [72, 6A320] описала полурешетки $S$, множество элементов которых является теоретико-множественным объединением множеств элементов двух данных полурешеток, в частности [70, 8A242], когда компоненты не пересекаются и одна из них есть идеал $S$.

Независимость в смысле Марчевского рассмотрел для полурешеток Сас [70, 8A258]. Шмидт [72, 4A351] ввел понятие $\perp$-независимости для полурешеток, частным случаем которого являются рассматривавшиеся до сих пор виды независимости, и доказал теорему, превращающуюся при специализациях отношения $\perp$ в теоремы Крулля-Шмидта и Куроша-Оре.

Варле [72, 11A228] доказал, что дистрибутивная $\wedge$-полурешетка с 0 и 1 будет булевой решеткой, если каждый ее элемент имеет дополнение.

Гретцер и Лаксер [69, 12A406] нашли условия, эквивалентные эквациональной компактности $\wedge$-полурешетки. В частности, в такой полурешетке всякое подмножество имеет н. в. г., а всякая цепь — н. н. г.

Хауи и Б. М. Шайн [70, 6A265] показали, что если полурешетка $S$ антиравномерна (то есть никакие два главных идеала ее не изоморфны) и в ней имеет место условие минимальности, то $S$ вполне упорядочена.

Бэлбс [69, 12A395] нашел условия вложимости с сохранением граней полурешетки в кольцо множеств, а в работе Маркьонны [69, 1A318] специальные операторы замыкания были применены для изучения вложений полурешеток во вполне дистрибутивные решетки.

Б. М. Шайн[1] доказал теорему о представлении дистрибутивных полурешеток, по-новому определив их. В работах [71, 3A171; 72, 6A157] Б. М. Шайн установил, что полурешетка определяется инверсной полугруппой своих частичных автоморфизмов и, вообще говоря, полугруппой эндоморфизмов.

Мажорантным базисом упорядоченного множества $A$ называется его подмножество $A^*$ такое, что всякий элемент $a \in A$ представим в виде н. в. г. некоторой совокупности из $A^*$. Мажорантный базис $A^*$ называется идеальным, если н. в. г. различных идеалов $A$, содержащихся в $A^*$, различны. А. Е. Евсеев [71, 8A123] доказал, что $\vee$-полурешетка тогда и только тогда обладает идеальным мажорантным базисом, когда она изоморфна полурешетке всех идеалов некоторого упорядоченного множества. При этом указанный базис единствен.

Полурешетка $S$ называется левым полигоном над дистрибутивной решеткой $L$, если для любых $\lambda \in L$, $s \in S$ определено произведение $\lambda s$, причем выполняются обычные модульные аксиомы. Серия статей Т. С. Фофановой посвящена изучению полигонов. В работе [72, 2A391] устанавливается взаимно однозначное соответствие между разложениями данной полурешетки $S$ и различными полигонами над булевой решеткой конечной длины и с основной полурешеткой $S$. В другой работе [72 7A256] описываются инъективные объекты и инъектив-

---

[1] «Algebra Univ.», 1972, 2, 1—2.

ные оболочки в категории полигонов над булевыми решетками. Оказывается, полигон инъективен в этой категории тогда и только тогда, когда его основная полурешетка инъективна в категории полурешеток. При помощи конструкции свободного вложения упорядоченного множества с дополнительной операцией умножения на элементы дистрибутивной решетки в полигон над ней Т. С. Фофанова [1] получила некоторые результаты, касающиеся амальгам упорядоченных множеств и решеток. В частности, для категории полигонов доказано существование свободного объединения любого семейства полигонов с объединенным подполигоном, откуда вытекает совпадение эпиморфизмов с гомоморфизмами на.

Катриняк [69, 7А257; 70, 5А242, 11А224] изучал свойства псевдодополнений в полурешетках. В работе [72, 2А406] он доказал, что всякая относительно стоуновская полурешетка является решеткой.

Блис [72, 1А265] показал, что полурешетки Брауэра с дополнениями — это в точности резидуальные инверсные полугруппы с нулем.

Нимитц [73, 3А314] доказал, что в классе импликативных полурешеток всякий гомоморфизм с конечным образом может быть ограничен до изоморфизма на этот образ. Отсюда следует, что каждая конечная импликативная полурешетка проективна, а инъективной является лишь одноэлементная. Нимитц и Уэйли [72, 2А389] исследовали многообразия импликативных полурешеток.

В. Н. Салий [69, 12А263] привел разнообазные примеры $F$-квазирешеток: полурешеток с заданным на них бинарным отношением, удовлетворяющим специальным свойствам. Например, $F$-квазирешеткой будет $\wedge$ -полурешетка, рассматриваемая с отношением определенности операции $\vee$.

Детерминанты в полурешетках рассматривал Линдстрем [71, 11В477].

## § 3. Обобщения

Многообразие всех решеток (а значит, и всякое многообразие решеток) аномально. Алгебры его нормального замыкания называются квазирешетками. Тождества (от четырех переменных) для многообразия всех квазирешеток указал В. Н. Са-

[1] В сб.: Упорядоченные множества и решетки, вып. 2, Саратов, 1974, 99—108.

лий [71,5А301], а Падманабхан [72, 2А405] выяснил, что аксиоматический ранг этого многообразия равен трем, и выписал соответствующую систему тождеств. Особый интерес вызвали дистрибутивные квазирешетки, выделенные Плонкой [68, 4А249], в неявной форме доказавшим, что они суть алгебры нормального замыкания многообразия дистрибутивных решеток. Келман [72, 2А404] нашел подпрямо неразложимые дистрибутивные квазирешетки (их оказалось три), а Бэлбс [71, 3А247] получил теорему о представлении дистрибутивных квазирешеток, аналогичную теореме о представлении дистрибутивных решеток как колец множеств. Нормальное замыкание многообразия булевых алгебр изучал Плонка [70, 4А310]: найдены тождества, определяющие это многообразие, и описаны независимые в смысле Марчевского подмножества его алгебр. И. И. Мельник [72, 3А248] в явном виде выписал, исходя из тождеств данного совершенного многообразия, тождества для нормального замыкания (многообразие называется совершенным, если оно удовлетворяет тождеству вида $f(x_1, x_2)=x_1$, где $f$ слово).

Плонка рассмотрел [69, 1А330, 4А268] многообразие дистрибутивных $n$-решеток — алгебр с $n$ идемпотентными, коммутативными, ассоциативными и взаимно дистрибутивными бинарными операциями $f_1$, $f_2,\ldots, f_n$, $n\geqslant 2$ и неявно доказал, что оно есть нормальное замыкание подмногообразия дистрибутивных $n$-решеток, выделяемого в нем тождества поглощения $f_1(x,(\ldots f_n(x,y)\ldots))=x$.

Пусть на множестве $A$ задано рефлексивное и антисимметричное бинарное отношение. Если любые два элемента имеют в естественном смысле н. в. г. и н. н. г., то, определяя с их помощью бинарные операции $\vee$ и $\wedge$ соответственно, получаем алгебру, называемую неассоциативной решеткой. Теорию этих алгебр систематически излагает Скала [73, 1А289]. Фрид [71, 9А242] показывает, в частности, что неассоциативные решетки образуют многообразие, и приводит соответствующие тождества. Доналд и Арриго [71, 12А382] устанавливают, что на модулярные неассоциативные решетки, удовлетворяющие в понятном смысле условиям обрыва цепей, переносится известное свойство функции размерности в модулярной решетке локально конечной длины. Мюллер, Нешетржил и Пелант [73, 6А333] с «линейно упорядоченными» неассоциативными решетками связывают коммутативные группоиды специального вида и исследуют их свойства.

Различные патологии коммутативности в решетках рассматривал Герхардтс. Косой решеткой называется алгебра с двумя идемпотентными, ассоциативными бинарными операциями, удовлетворяющими законам поглощения. В [69, 2А374] найдены эквиваленты коммутативности для косых решеток. Условия разложимости косой решетки в произведение двух множителей, один из которых решетка, приведены в [71, 3А243]. Косая решетка $A$ называется [70, 2А268] почти решеткой, если $(c \vee b \vee a) \wedge (a \vee b) = b \vee a$, $(b \wedge a) \vee (a \wedge b \wedge c) = a \wedge b$ для любых $a, b, c \in A$. Наименьшая некоммутативная почти решетка есть $(\{a, b\}, \wedge, \vee)$ с $a \wedge a = a \wedge b = a \vee a = b \vee a = a$ и $b \wedge b = b \wedge a = b \vee b = a \vee b = b$. Аналогично тому, как решетки ассоциируются с упорядоченными множествами, почти решетки соотносятся со специальными дважды квазиупорядоченными множествами. Двенадцать классов некоммутативных решеток ввел и исследовал Фаркаш [73, 4А419]. Как следствие он получил семьдесят две системы аксиом для решеток, не включающие тождеств коммутативности.

Различный смысл придавался термину «псевдорешетка». Сю и Бентли [71, 10А121] называют так квазиупорядоченное множество, в котором любые два элемента имеют по крайней мере одну н. в. г. и по крайней мере одну н. н. г. Квазиупорядоченное множество $(A, \zeta)$ тогда и только тогда является псевдорешеткой, когда существует изотонное и обратно изотонное отображение его на некоторую решетку (отображение обратно изотонно, если из сравнимости образов двух элементов следует аналогичная $\zeta$ — сравнимость этих элементов). Приводятся приложения понятия псевдорешетки в теории меры. Неизвестно, будет ли псевдорешеткой множество всех действительных функций на числовой прямой с квазипорядком

$$\zeta = \{(f, g) : (\forall a)(\exists b \leqslant a)\ (f(b) \leqslant g(a))\}.$$

Дистрибутивной псевдорешеткой Бензакен [69, 4А244, 70, 5А249] называет $*$ -полурешетку с ассоциативным умножением, причем $a(b * c) = (ab) * (ac)$, $(b * c)a = (ba) * (ca)$, $a * (ab) = a * (ba) = a$. В первой из указанных работ изучаются свойства матриц с элементами из дистрибутивной псевдорешетки, а во второй приводятся примеры и приложения к графам и автоматам.

Пусть на множестве $A$ заданы два квазипорядка $\zeta_1$ и $\zeta_2$, пересечение которых $\omega$ есть порядок («строго дважды квазиупорядоченное множество»). Элемент $a_0$ называется н. н. г. пары $(a_1, a_2)$, если $(a_0, a_1) \in \zeta_1$, $(a_0, a_2) \in \zeta_2$ и всякий другой элемент с этим свойством является $\omega$-минорантом $a_0$. Двойственно определяется н. в. г. пары элементов. Если любые два элемента имеют обе точные грани, то получается псевдорешетка в смысле Б. М. Шайна [72, 6А319], а если рассматривать одну из точных граней — псевдополурешетка. Класс псевдополурешеток является многообразием. Операция в псевдорешетке $A$ ассоциативна тогда и только тогда, когда $A$ является идемпотентной полугруппой с тождеством $x_1x_2x_3x_4=x_1x_3x_2x_4$, и коммутативна тогда и только тогда, когда $A$ полурешетка. Устанавливается связь со строго дважды квазиупорядоченными множествами.

В работе Замбелли [71, 6А331] введены $q$-решетки и для них найдены аналоги теоремы Куроша-Оре.

И. К. Щербацкий [70, 2А269, 3А340] продолжил изучение решеток с операторами.

Алгебрам, построенным на основе решеток, посвящены работа Мацусимы [70, 3А190] и диссертация Уитмена [70,3А341].

Универсальным квазипорядкам посвящена работа Гедрлина [69, 12А396]. Свойства вполне квазиупорядоченностей рассматривали Дженкинс и Нэш-Уильямс [71, 2В338].

# СОДЕРЖАНИЕ

УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И РЕШЕТКИ

*Межвузовский научный сборник*

Выпуск третий

Редактор Л. И. Носова
Технический редактор Л. В. Агальцова
Корректор Е. К. Быковская

НГ21366. Сдано в набор 8.VIII-1974 г. Подписано к печати 11.VI.1975 г. Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Бумага тип. № 1. Усл.-печ. л. 6,04 (6,5). Уч.-изд. л. 5,7. Тираж 500. Заказ 1381. Цена 57 коп.

Издательство Саратовского университета, Университетская, 42
Типография издательства «Коммунист», Волжская, 28

УДК 519.48

Пашенков В. В. **Булевы алгебры.**

Упорядоченные множества и решетки, вып. 3. Изд-во Сарат. ун-та, 1975.

Обзор по материалам реферативного журнала «Математика» за 1969 — первую половину 1973 гг.

УДК 519.48

Фофанова Т. С. **Общая теория решеток.**

Упорядоченные множества и решетки, вып. 3. Изд-во Сарат. ун-та, 1975.

Обзор по материалам реферативного журнала «Математика» за 1969 — первую половину 1973 гг.

УДК 519.48

Игошин В. И., Фофанова Т. С. **Многообразия решеток. Категорные вопросы.**

Упорядоченные множества и решетки, вып. 3. Изд-во Сарат. ун-та, 1975.

Обзор по материалам реферативного журнала «Математика» за 1969 — первую половину 1973 гг.

УДК 519.48

Житомирский Г. И. **Решетки подмножеств. Топологические решетки.**

Упорядоченные множества и решетки, вып. 3. Изд-во Сарат. ун-та, 1975.

Обзор по материалам реферативного журнала «Математика» за 1969 — первую половину 1973 гг.

УДК 519.48

Салий В. Н. **Решетки многообразий. Решеточные отношения. Упорядоченные множества.**

Упорядоченные множества и решетки, вып. 3. Изд-во Сарат. ун-та, 1975.

Обзор по материалам реферативного журнала «Математика» за 1969 — первую половину 1973 гг.