УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И РЕШЕТКИ

МЕЖВУЗОВСКИЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

Выпуск четвертый

Издательство Саратовского университета
1977

УДК 519.4
У67

Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1977.

В четвертом выпуске сборника помещаются работы, посвященные как непосредственно изучению упорядоченных множеств и решеток, так и исследованию свойств, связанных с упорядоченностями различных алгебраических систем.

Сборник представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов алгебраических специальностей.

Рис. 9.

2—2—3
95—77

А. С. БОНДАРЕВ

О ПОЛНОТЕ ГОМОМОРФНЫХ ОБРАЗОВ ПОЛНЫХ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТОК И БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

Статья посвящена решению одного старого вопроса теории полуупорядоченных пространств [1]: когда фактор-линеал X/I условно полной векторной решетки (K-пространства) X по l-идеалу I оказывается K-пространством (теор. 6).

Частичный ответ на него был дан А. И. Векслером в той же статье [1]. А именно, фактор-линеал X/I K-пространства X по l-идеалу I есть K-пространство в том и только в том случае, если X/I есть архимедова векторная решетка (K-линеал) с проекциями. Этот ответ нельзя было считать окончательным, поскольку оставался открытым вопрос, когда X/I есть K-линеал с проекциями.

Сформулированная выше проблема тесно связана с рядом других задач. Одна из них возникла в теории булевых алгебр и была решена П. Дуингером в [2]: когда фактор-алгебра X/I полной булевой алгебры X по идеалу I будет полной булевой алгеброй (ранее эта задача рассматривалась в [3]). Другая носит чисто топологический характер: описать замкнутые подмножества экстремально несвязного бикомпакта, которые сами экстремально несвязны.

Изложение результатов в статье построено таким образом, что сначала рассматривается последняя топологическая задача, которой посвящен второй раздел статьи (теор. 1). В третьем разделе будет дано новое и, по-видимому, более простое решение вопроса о полноте фактор-алгебры полной булевой алгебры (теор. 3). Затем мы решим задачу об условной полноте фактор-линеалов K-пространства ограниченных элементов (теор. 5). И, наконец, рассмотрим общий случай (теор. 6). В четвертом разделе кратко остановимся на возможных обобщениях полученных результатов. Первый раздел статьи носит вспомогательный характер. В нем собраны некоторые предварительные сведения, ряд известных определений и результатов.

Отметим, что вопросы, аналогичные рассмотренным в данной работе, но применительно к случаю σ-полноты, решались в [4].

1. В булевой алгебре (K-линеале) X элементы x и y дизъюнктны (xdy), если $x\wedge y=0$ ($|x|\wedge|y|=0$); множества вида $H^d=\{x\in X: xdh$ для всякого $h\in H\}$, где $H\subset X$, называются компонентами. Говорят, что в булевой алгебре (K-линеале) X существует проекция элемента $x\in X$ на компоненту U, если $x=x_1\vee x_2$ ($x=x_1+x_2$), где $x_1\in U$, x_2dU (т. е. x_2du для всякого $u\in U$), и пишут $x_1=Pr_U x$. Проекцию x в некоторую компоненту назовем осколком x.

Если I-идеал (l-идеал) в булевой алгебре (K-линеале) X, то фактор X/I снова есть булева алгебра (K-линеал). Фактор-линеал X/I K-линеала X по l-идеалу I есть архимедов K-линеал тогда и только тогда, когда I—(r) — замкнут (в другой терминологии относительно равномерно замкнут, то есть когда из $\{x_n\}\subset I$, $x\in X$, $x_n \xrightarrow{(r)} x$ вытекает $x\in I\}$ [5].

Хорошо известно, что каждая полная булева алгебра может быть реализована в виде полной булевой алгебры (характеристических функций) открыто-замкнутых подмножеств стоунова экстремально несвязного бикомпакта (то есть бикомпакта, в котором замыкание каждого открытого множества открыто-замкнуто).

Пусть Q — топологическое пространство, $\Phi\subset Q$. Под открытым (замкнутым) подмножеством Φ будем понимать подмножество Φ, открытое (замкнутое) в относительной топологии на Φ. Для G', $G''\subset Q$ запись $G'dG''$ будет означать $G'\cap G''=\varnothing$.

2. В основе всех результатов статьи лежит следующая.

Теорема 1. Для замкнутого F в экстремально несвязном бикомпакте Q равносильны условия: 1) F — экстремально несвязно; 2) для любого открытого множества $G\subset Q$ найдется открыто-замкнутое в G подмножество $G'dF$ такое, что для любого открыто-замкнутого G'' в G из $G''d(G'\cup F)$ вытекает $\overline{G''}dF$.

Доказательство. Для произвольного открытого множества G в Q обозначим $F_0=\overline{G}\cap F$, $F_2=G\cap F$, $F_1=F_0-F_2$,

$F_1' = \{t\in F$: в G существует открыто-замкнутое подмножество $G'dF$ такое, что $\overline{G'}\ni t\}$, $F_1'' = F_1 - F_1'$ (очевидно, $F_1'\subset F_1$). По определению F_0 открыто-замкнуто в F (так как в силу экстремальной несвязанности Q множество $\overline{G}$ открыто-замкнуто в Q), F_2 открыто в F, F_1 замкнуто в F как разность открыто-замкнутого и открытого, F_1' открыто в F (т. к. каждая точка входит в F_1' с некоторой окрестностью). Очевидно также, что F_2, F_1', F_1'' попарно дизъюнктны и $F_1 = F_1'\cup F_1''$, $F_0 = F_1\cup F_2$.

Рассмотрим следующее вспомогательное условие: 3) для любого открытого $G\subset Q$ множество F_1' открыто-замкнуто в F. И покажем, что условия 1)—3) равносильны.

2)→3). Согласно условию 2) для выбранного нами произвольного открытого $G\subset Q$ найдется открыто-замкнутое в G подмножество $G'dF$ такое, что для любого другого открыто-замкнутого G'' в G из $G''d(G'\cup F)$ вытекает $\overline{G''}dF$. Для доказательства условия 3) достаточно показать что $F_1' = \overline{G'}\cap F$. Допустим противное, то есть $F_1'\neq\overline{G'}\cap F$ и покажем, что наше допущение противоречит выбору G'.

Так как по определению множества F_1' справедливо включение $F_1'\supset\overline{G'}\cap F$, то в силу нашего предположения существует $t\in F_1' - \overline{G'}\cap F$. Т. к. $t'\in F_1'$, то в G найдется открыто-замкнутое подмножество $G''dF$ такое, что $\overline{G''}\ni t$. Положим $G''' = G'' - \overline{G'}\cap G'' = G''\cap(Q-\overline{G'})$. Очевидно, G''' открыто-замкнуто в G и $G'''dF$ (т. к. $G'''\subset G''$ и $G''dF$). Замыкая теперь G''' в Q, имеем $\overline{G'''} = \overline{G''\cap(Q-\overline{G'})} = \overline{G''}\cap(Q-\overline{G'})\ni t$, поскольку $\overline{G''}\ni t$ и $t\in F_1'-\overline{G'}\cap F = F_1'-\overline{G'}\subset Q-\overline{G'}$.

Итак, G''' открыто-замкнуто в G, $G'''d(G'\cup F)$, но $\overline{G'''}dF$, что противоречит выбору G'.

3)→2). Пусть теперь для выбранного нами произвольного открытого $G\subset Q$ множество F_1' открыто-замкнуто в F. Согласно определению F_1' для всякого $t\in F_1'$ существует открыто-замкнутое в G подмножество $G_t dF$ такое, что $\overline{G_t}\ni t$. Так как F_1' замкнуто в F, а следовательно, и в Q, то F_1' есть бикомпакт. Множества $\{\overline{G_t}\cap F_1'\}_{t\in F_1'}$ открыто-замкнуты в бикомпакте F_1' и образуют его открытое покрытие. Следовательно, найдется конечное подпокрытие $\{\overline{G_{t_i}}\cap F_1'\}_1^n$ такое, что $\bigcup_1^n \overline{G_{t_i}}\cap F_1' = F_1'$.

Покажем теперь, что $G' = \bigcup G_{t_i}$ удовлетворяет условию

2) нашей теоремы. Очевидно, G' открыто-замкнуто в G (как конечное объединение открыто-замкнутых в G подмножеств); $G'dF$, так как каждое G_{t_i} дизъюнктно F и $\overline{G'}=\overline{\bigcup_1^n G_{t_i}}=\bigcup_1^n \overline{G_{t_i}} \supset F_1'$. Пусть G'' открыто-замкнутое в G подмножество, $G''d(G' \cup F)$. Так как бикомпакт Q экстремально несвязен, то $\overline{G''}d\overline{G'}$, а потому $\overline{G''}dF_1'$. Следовательно, $\overline{G''}dF$. Действительно, если $t \in \overline{G''} \cap F$, то по определению множества F_1' имеем $t \in F_1'$, что невозможно, т. к. $\overline{G''}dF_1'$. Импликация 3)→2) доказана.

Прежде чем устанавливать равносильность условий 1) и 3) покажем, что $cl_F F_2=F_2 \cup F_1''$. Так как F_0 открыто-замкнуто в F, то, очевидно, $cl_F F_2 \subset F_0=F_2 \cup F_1' \cup F_1''$. По определению F_1' для любого $t \in F_1'$ существует открыто-замкнутое в G подмножество $G'dF$ такое, что $\overline{G'} \ni t$. Для этого G' имеем $\overline{G'} \cap F_2=\overline{G'} \cap G \cap F=G' \cap F=\varnothing$. Следовательно, $cl_F F_2 dF_1'$, а потому $cl_F F_2 \subset F_2 \cup F_1''$. Докажем обратное включение. Пусть $t \in F_1''$ и Q' открыто-замкнутая в Q окрестность t. Положим $G'=G \cap Q' \neq \varnothing$. Тогда G' открыто-замкнуто в G, $\overline{G'}=\overline{G} \cap Q' \ni t$, а потому $G' \cap F=G' \cap F \cap G=G' \cap F_2 \neq \varnothing$ (т. к. в противном случае $t \in F_1'$ по определению множества F_1', что невозможно).

Из доказанного сейчас равенства $cl_F F_2=F_2 \cup F_1''$ вытекает, что $F_0=cl_F F_2 \cup F_1'$ и, очевидно, $cl_F F_2 dF_1'$.

1)→3). Так как F_2 открытое подмножество F, то из экстремально несвязности бикомпакта F вытекает, что $cl_F F_2$ открыто-замкнуто. Следовательно, $F_1'=F_0 - cl_F F_2$ как разность двух открыто-замкнутых в F подмножеств также открыто-замкнуто в F.

3)→1). Из определения F_0 и условия 3) вытекает, что F_0 и F_1' открыто-замкнутые подмножества F, а потому $cl_F F_2= F_0 - F_1'$ открыто-замкнуто в F. Так как F_2 произвольное открытое подмножество F, то экстремальная несвязность F доказана.

3. Критерий экстремальной несвязаности замкнутого подмножества экстремально несвязного бикомпакта, найденный в теореме 1, позволит нам получить новое решение вопроса о полноте фактор-алгебры полной булевой алгебры (теор. 3) и дать полный ответ на вопрос, когда фактор-линеал K-пространства сам есть K-пространство (теор. 6). Решение обоих

вопросов формулируется в терминах идеалов (l-идеалов) и их осколков, определение которых мы сейчас и приведем.

Определение. Пусть X — полная булева алгебра (K-пространство), A, $B \subset X$. Проекцией A на B назовем множество $(B)A = \{Pr_B^{dd} a : a \in A\}$. Осколком A назовем проекцию A в некоторую компоненту. Осколок A, содержащийся в идеале (l-идеале) I, назовем I-осколком A.

Очевидно, если A есть идеал (l-идеал), то $(B)A = A \cap B^{dd}$, а потому осколок A сам есть идеал (l-идеал).

Пусть $X = X(Q)$ полная булева алгебра характеристических функций открыто-замкнутых подмножеств экстремально несвязного бикомпакта Q (или K-пространство расширенных непрерывных вещественных функций с тождественной единицей на экстремально несвязном бикомпакте Q).

Носителем элемента $x \in X$ назовем открытое множество $Q(x) = \{t \in Q : x(t) \neq 0\}$, а носителем идеала ($l$-идеала) N в X назовем объединение носителей его элементов, то есть $Q(N) = \cup Q(x)$. Положим $F(N) = Q - Q(N)$. Очевидно, $N_F = \{x \in X : x(F(N)) = 0\}$ есть идеал (l-идеал) в X. В случае булевой алгебры $N_F = N$, то есть существует взаимно-однозначное соответствие между идеалами в булевой алгебре и замкнутыми подмножествами стоунова бикомпакта Q; если же $X(Q)$ есть K-пространство, то, вообще говоря, выполнено только $N \supset N_F$.

Простейшие свойства носителя, справедливые одновременно и для полной булевой алгебры и для K-пространства $X(Q)$, мы сформулируем в виде леммы, доказательство которой стандартно.

Лемма 2. 1) $Q(N^{dd}) = \overline{Q(N)}$; 2) если N_1 — осколок N, то $Q(N_1)$ открыто-замкнутое подмножество в $Q(N)$; 3) если G открыто-замкнуто в $Q(N)$, то существует N_1 — осколок N такой, что $Q(N_1) = G$; 4) если G открыто в Q, то найдется идеал (l-идеал) N в X, для которого $Q(N) = G$.

П. Дуингером в [2] было дано решение первого из указанных выше вопросов: фактор-алгебра X/I полной булевой алгебры X по идеалу I есть полная булева алгебра тогда и только тогда, когда для любых $\{x_\gamma\}_\Gamma \subset X$ и любого $p < \sup_\Gamma \{x_\gamma\}$ такого, что $p \wedge x_\gamma \in I$ для всех $\gamma \in \Gamma$ существует $q \in X - I$ такой, что $q < x \wedge (1 - p)$ и $q \wedge x_\gamma \in I$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Приводимая ниже теорема 3 дает новый и, по-видимому, более простой ответ на этот вопрос.

Теорема 3. Для идеала I полной булевой алгебры X равносильны условия: 1) X/I есть полная булева алгебра;

2) для любого идеала N в X найдется N_1—I-осколок N такой, что для любого N_2—I-осколка N из $N_1 d N_2$ вытекает $N_2^{dd} \subset I$.

Доказательство. Реализуем X в виде $X(Q)$ полной булевой алгебры характеристических функций открыто-замкнутых подмножеств стоунова экстремально несвязного бикомпакта Q. Хорошо известно, что замкнутое подмножество $F(I) \subset Q$ с относительной топологией может быть отождествлено со стоуновым пространством булевой алгебры X/I. Поэтому полнота X/I равносильная следующему вспомогательному условию: 3) $F(I)$ экстремально несвязано. Остается доказать эквивалентность условий 2) и 3).

2)$\Rightarrow$3). Для доказательства экстремальной несвязности $F(I)$ достаточно проверить условие 2) теор. 1. Пусть G — произвольное открытое подмножество в Q. По лемме 2,4) существует идеал N в X, для которого $Q(N) = G$. По условию 2) найдется N_1 — I-осколок N такой, что для любого N_2 — I-осколка N из $N_1 d N_2$ вытекает $N_2^{dd} \subset I$. По лемме 2,2) $G' = Q(N_1)$ есть открыто-замкнутое подмножество G и, т. к. $N_1 \subset I$, то $G' d F(I)$. Пусть G'' открыто замкнуто в G и $G'' d (G' \vee F(I))$. Тогда найдется N_2 — осколок N, для которого $Q(N_2) = G''$. Так как $G'' d G'$ и $G'' d F(I)$, то $N_2 d N_1$ и $N_2 \subset I$, а потому в силу условия 2) нашей теоремы $N_2^{dd} \subset I$. Но $\overline{Q(N_2)} = \overline{G''} = Q(N_2^{dd})$ (лемма 2,1). Следовательно, $\overline{G''} d F(I)$ и экстремальная несвязаность $F(I)$ доказана.

3)$\Rightarrow$2). Пусть N — идеал в X, $G = Q(N)$. По теор. 1,2) найдется открыто-замкнутое в G подмножество $G' d F(I)$ такое, что для любого G'' открыто-замкнутого в G из $G'' d (G' \cup F)$ вытекает $\overline{G''} d F(I)$. По лемме 2,3) найдется N_1 — осколок N, для которого $Q(N_1) = G'$. Из $G' d F(I)$ вытекает $N_1 \subset I$. Пусть теперь N_2 — I-осколок N такой, что $N_1 d N_2$. Тогда $G'' = Q(N_2)$ открыто-замкнуто в G (лемма 2,2), $G'' d G'$ (т. к. $N_2 d N_1$) и $G'' d F(I)$. (т. к. $N_2 \subset I$), а потому в силу условия 3) нашей теоремы $\overline{G''}\, d F(I)$. По лемме 2,1) $\overline{G''} = Q(N_2^{dd})$, откуда вытекает, что $N_2^{dd} \subset I$. Теорема доказана.

Вопрос об условной полноте гомоморфных образов К-пространства мы решим сначала для гомоморфизмов, ядра которых имеют специальный вид.

Предложение 4. Пусть $X = X(Q)$ есть К-пространство расширенных непрерывных функций с тождественной единицей на экстремально несвязном бикомпакте Q. Для l-идеала вида $I_F = \{x \in X(Q) : x(F) = 0\}$, где F — замкнутое подмножество Q, равносильны условия:

1) X/I_F есть К-пространство,

2) I_F — (r) — замкнут и $F=F(I_F)$ экстремально несвязано,

3) а) I_F—(r) — замкнут, б) для любого l-идеала N найдется N_1—I_F — осколок N, такой, что для любого N_2—I_F — осколка N из $N_1 d N_2$ вытекает $N_2^{dd} \subset I_F$.

Доказательство. 1)<=>2). Очевидно, X/I_F изоморфно К-линеалу $X(F)$ функций на F, являющихся следами на F функций из $X(Q)$. Так как по условию $X(F)$ архимедов, то множество точек бесконечности каждой функции из $X(F)$ есть нигде не плотное множество в F, а потому $X(F)$ есть архимедов К-линеал расширенных непрерывных функций на F. Из нормальности $X(Q)$ и того факта, что всякая $y \in C_\infty(F)$ может быть продолжена до некоторой $\tilde{y} \in C_\infty(Q)$ вытекает, что $X(F)$ есть нормальный К-линеал функций на F, т. е. из $y \in C_\infty(F)$ и $0 \leqslant y \leqslant x$ для некоторого $x \in X(F)$ вытекает $y \in X(F)$. Остается заметить, что, как известно, нормальный К-линеал с единицей $X(F)$ есть К-пространство тогда и только тогда, когда F экстремально несвязно.

2)<=>3) Дословно также, как при доказательстве теор. 3 можно показать, что условие 3,б) равносильно экстремальной несвязности $F(I_F)$. Так как в обоих случаях l-идеал I_F—(r)— замкнут, то эквивалентность 2) и 3) доказана.

Очевидным следствием предл. 4 является следующая.

Теорема 5. Для l-идеала I в К-пространстве ограниченных элементов X равносильны условия:

1 X/I есть К-пространство,

2) а) I—(r) — замкнут, б) для любого l-идеала N найдется N_1—I — осколок N, такой, что для любого N_2—I — осколка N из $N_1 d N_2$ вытекает $N_2^{dd} \subset I$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $X=C(Q)$, где Q — экстремально несвязный бикомпакт. Известно, что X/I есть К-пространство тогда и только тогда, когда $I=I_F$, где F — экстремально несвязное замкнутое подмножество Q (а X/I в этом случае изоморфно $C(F)$. Остается применить предл. 4.

Дадим теперь полное решение задачи об условной полноте гомоморфных образов условно полных векторных решеток. Пусть X — произвольное К-пространство. Через π обозначим канонический структурный гомоморфизм X на X/I, A_x и $A_{\pi x}$ — главные l-идеалы, порожденные x и πx соответственно в X и X/I.

Теорема 6. Для l-идеала I в К-пространстве X равносильны условия:

1) X/I есть К-пространство,

2) а) I—(r) — замкнут, б) для любого $x \in X^+$ и l-идеала $N \subset A_x$ найдется N_1—I — осколок N такой, что для любого N_2—I — осколка N из $N_1 d N_2$ вытекает $N_2^{dd} \cap A_x \subset I$ (или, что то же самое, $(N_2)x \in I$).

Доказательство. 1) >2). В силу [6] $A_x = \pi(A_x)$, а потому A^{π}_x изоморфно $A_x/A_x \cap I$. Известно, что архимедов К-линеал является К-пространством в том и только в том случае, если таковым является каждый его главный l-идеал. Поэтому надо доказать, что условие 2) нашей теоремы равносильно условию, что фактор-линеал К-пространства ограниченных элементов A_x по l-идеалу $A_x \cap I$ есть K-пространство. Остается применить теорему 5 и равносильность 1) и 2) доказана.

4. В заключение отметим, что полученные результаты можно обобщить на случай $\mathfrak{m}$ — полноты, где $\mathfrak{m}$ — бесконечный кардинал.

Приведем без доказательства соответствующий результат, например, для булевых алгебр. Под $\mathfrak{m}$-идеалом в булевой алгебре X будем понимать идеал, порожденный множеством $\{e_\beta\}$ в осколков 1, мощность которого меньше $\mathfrak{m}$, т. е. $\overline{\overline{B}} < \mathfrak{m}$. Тогда справедлива

Теорема 7. Для идеала I $\mathfrak{m}$-полной булевой алгебры X равносильны условия:

) X/I есть $\mathfrak{m}$-полная булева алгебра,

2) для любого $\mathfrak{m}$-идеала N в X найдется N_1—I — осколок N такой, что для любого N_2—I — осколка N из $N_1 d N_2$ вытекает $N_2^{dd} \subset I$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векслер А. И. О фактор-линеалах в векторных структурах. — Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена, 183 (1958), 107—127.

2. Dwinger Ph. On the completeness of the quotient algebras of a complete boolean algebra. — Proc. Nederl. Acad. Wet.; 1958, 61, N 4, 448—456.

3. Smith E. C., Tarski A. Higher degrees of distributivity and completeness in Boolean algebras. — Trans. Amer. Math. Soc., 1957, 84, 230—257.

4. Бондарев А. С. О наличии проекций в фактор-линеалах векторных решеток. — ДАН УзССР, 1974, № 8.

5. Векслер А. Понятие нормальной в себе линейной структуры и некоторые приложения этого понятия к теории линейных и линейных нормированных структур. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1966, № 4, 13—22.

6. Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C. Riesz spaces. N. Y., 1971.

А. И. ВЕКСЛЕР

АРХИМЕДОВЫ СВОБОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОБОЛОЧКИ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУПП

В работе рассматривается вопрос о «квалифицированном» погружении частично упорядоченной группы (G, P) (с подполугруппой положительных элементов P) в ч. у. векторное пространство (X, K) (с конусом положительных элементов K) над полем вещественных чисел. Ясно, что подобная задача заведомо неразрешима, если группа G некоммутативна либо имеет ненулевой периодический элемент, а также, если порядок не является изолированным. Поэтому под группой (ч. у. группой) всюду в работе будем понимать коммутативную группу без кручения (дополнительно с изолированным порядком). Далее, ч. у. группу (G, P) можно представить в виде прямого произведения $(G_1, P_1)\oplus(G_2, P_2)$, где $P_1-P_1=G_1$, а $P_2=\{0\}$. Поскольку задачу о погружении ч. у. группы с тривиальным порядком в ч. у. векторное пространство можно считать тривиальной, то дело сводится к случаю направленной ч. у. группы. Это дает нам основание всюду, где не оговаривается обратное, считать исходную ч. у. группу направленной.

Вопрос о погружении ч. у. группы в ч. у. векторное пространство ранее уже рассматривался, особенно вопрос о погружении l-группы в векторную решетку. Если (G, P) — l-группа, то по известной теореме П. Лоренцена [1] она представима в виде подпрямого произведения 0-групп. С другой стороны, из классической теоремы Г. Хана [2] о представлении 0-группы сразу следует, что 0-группу можно погрузить в 0-пространство (совершенно упорядоченное векторное пространство над полем вещественных чисел). Отсюда сразу ясно, что исходную l-группу можно погрузить в векторную решетку. Далее, из известных результатов А. Г. Пинскера [3] о представлении полной l-группы (заметим, кстати, что Л. Фукс в [4], не цитирует соответствующего результата А. Г. Пинскера, а вместо этого в самом конце § 1.V.9 приводит неверное утверждение о строении такой l-группы) сразу следует, что архимедову l-группу можно погрузить в архимедову векторную решетку. В последнее время вопрос о погружении l-группы в векторную решетку более тщательно рассматривался П. Конрадом [5] и Дж. Мартинецом [6]. Сейчас уточним рассматриваемую в работе постановку задачи о погружении (кстати, существенно отличающуюся от постановки задачи в [5] и [6]).

Предварительно договоримся элементы данной группы G обозначать буквами g, h (здесь и в дальнейшем предполагается, что буквы могут быть снабжены индексами). Для элементов данного векторного пространства X будем употреблять буквы x, y. Пространство вещественных (рациональных, натуральных) чисел будем обозначать буквой R (соответственно Q или N), а его элементы буквами λ, μ, ν (соответственно q, r или m, n, i, j, k, l). Для целых чисел будем употреблять букву a. Рациональный базис в группе с делением всегда будем обозначать буквой E, а для его элементов употреблять букву e. Базис в (G, P) всегда будем считать состоящим из положительных элементов. Неравенство $g \geqslant h$ в ч. у. группе (G, P) будет иметь тот же смысл, что и включение $g - h \in P$.

Определение 1. Пусть G — группа, являющаяся подгруппой векторного пространства (над полем вещественных чисел) X. Будем говорить, что X является свободной линейной оболочкой группы G, если выполнены условия 1)—2).

1) Всякий элемент $x \in X$ является линейной комбинацией элементов из G, то есть $x = \sum\limits_{i<n} \lambda_i g_i$.

2) Если $g_1, \ldots, g_n$ линейно независимы в G, то есть $(\sum\limits_{i<n} a_i g_i = 0) \Rightarrow (a_1 = \ldots = a_n = 0)$, то они линейно независимы и в X, то есть $(\Sigma \lambda_i g_i = 0) \Rightarrow (\{\lambda_i\} = \{0\})$.

Определение 2. Пусть $(G, P) \subset (X, K)$, где (G, P) — ч. у. група, а (X, K) — ч. у. векторное пространство. Будем говорить, что ч. у. (X, K) является свободной линейной оболочкой ч. у. группы (G, P), если X — свободная линейная оболочка группы и, кроме того, выполнено условие.

3) $P = K \cap G$.

Очевидно, свободная линейная оболочка группы G (коммутативной и без кручения) всегда существует и единственна. Достаточно взять делимую оболочку $\overline{G}$ группы G, выбрать в ней рациональный базис и за X взять совокупность всех линейных комбинаций базисных элементов (с естественным отождествлением), погрузив в X естественным образом исходную группу G. Отметим, что во избежание излишней громоздкости и избыточного формализма часто будем отождествлять изоморфные группы или векторные пространства. По этой, кстати, причине мы сразу считали, что $G \subset X$ (а не писали, что существует групповой изоморфизм группы G в подгруппу из X!).

В данной работе нас будет интересовать вопрос о существовании архимедовой свободной линейной оболочки у данной архимедовой ч. у. группы (G, P). Основные результаты в этом направлении получены в теоремах 1, 2 и частично в теореме 3. По ходу дела будет установлено, что всякая ч. у. (G, P) имеет свободную линейную оболочку (см. предл. 3). Отметим, что некоторые результаты работы были анонсированы в [7].

В силу сказанного выше вопрос о существовании архимедовой свободной линейной оболочки сводится к нахождению конуса K в свободной линейной оболочке X группы G такого, что $K \cap G = P$ и (X, K) архимедово. Очевидно, такая задача не всегда разрешима. Пусть, например, (G, P) — о-подгруппа о-группы (R, R^+), натянутая на образующие $g_1 = 1$ и $g_2 = \sqrt{2}$. Тогда X имеет линейную размерность, равную 2. Возьмем $x_0 = \sqrt{2} g_1 - g_2$. В силу условия 2), $x_0 \neq 0$ и легко сообразить, что если $K \cap G = P$, то элемент x_0 становится неархимедовым в (X, K). Значит, архимедова (G, P) не имеет архимедовой свободной линейной оболочки.

Пусть (G, P) — ч. у. группа, не обязательно направленная, $(\overline{G}, \overline{P})$ — ее делимая оболочка. Тогда всякий $\overline{g} \in \overline{G}$ имеет вид $\overline{g} = g/n$ (элементы вида g/n и mg/mn отождествляются) и при этом $\overline{g} \in \overline{P}$ тогда и только тогда, когда $g \in P$.

Лемма 1. Если (G, P) — направленная (архимедова, целозамкнутая, l-группа) группа, то и $(\overline{G}, \overline{P})$ — направленная (соответственно архимедова, целозамкнутая, l-группа) группа.

Доказательство. Все утверждения проверяются стандартным образом. Проверим, например, что если (G, P) — архимедова, то и $(\overline{G}, \overline{P})$ — архимедова. Пусть $-\overline{h} \leqslant n\overline{g} \leqslant \overline{h}$ $(n \in N)$. Имеем тогда $\overline{g} = g/m_1$, $\overline{h} = h/m_2$, $-h/m_2 \leqslant ng/m_1 \leqslant \leqslant h/m_2$. Отсюда $-m_1 h \leqslant n(m_2 g) \leqslant m_2 h$ $(n \in N)$.

Из архимедовости (Q, P) следует $m_2 g = 0$, $g = 0$, $\overline{g} = 0$.

Если $(G, P) \subset (X, K)$, то можно считать, что $(G, P) \subset \subset (\overline{G}, \overline{P}) \subset (X, K)$. При этом, если X — свободная линейная оболочка для G, то X является такой же оболочкой и для $\overline{G}$. Таким образом, решая задачу о существовании архимедовой свободной линейной оболочки, можно, не умаляя общности, считать ч. у. группу (G, P) ч. у. группой с делением (и изолированным порядком!). Впрочем, иногда условия, формулируемые для ч. у. групп с делением, требуют некоторых разъяснений для произвольных ч. у. групп.

Определение 3. Пусть G — группа. Под формальной линейной комбинацией будем понимать формальное выражение вида $\sum\limits_{i<n}{}' \lambda_i g_i$ (при этом предполагается, что все g_i различны, а среди коэффициентов λ_i допускаются и нулевые). Каждой формальной линейной комбинации $\Sigma' \lambda_i g_i$ соответствует в свободной линейной оболочке X группы G некоторый элемент $x = \sum\limits_{i<n} \lambda_i g_i$. Если этот $x=0$, то формальную линейную комбинацию будем называть тривиальной (ясно, что понятие это можно ввести и внутренним образом, не пользуясь свободной линейной оболочкой группы G). Если формальная разность двух формальных линейных комбинаций есть тривиальная комбинация (заметим, что при формальных действиях над формальными линейными комбинациями нулевые члены не отбрасываются, так $\Sigma' \lambda_i g_i + \Sigma' (-\lambda_i) g_i = \Sigma' 0 \cdot g_i$), то будем называть исходные комбинации эквивалентными. Если же исходные комбинации отличаются лишь нулевыми «слагаемыми», будем называть эти формальные линейные комбинации подобными. Формальную линейную комбинацию $\Sigma' r_i g_i$ с рациональными коэффициентами будем называть рациональной. Очевидно, если G — группа с делением, то найдется $g = \Sigma r_i g_i$.

Очевидно, если две комбинации подобны, то они и эквивалентны. В случае формальных линейных комбинаций по базисным элементам верно и обратное.

Определение 4. Пусть (G, P) — ч. у. группа с делением. Формальную линейную комбинацию $\Sigma' \lambda_i g_i$ будем называть полукритической сверху, если $g_i \geqslant 0$ и для любого вещественного $\varepsilon > 0$ найдутся r_i' такие, что $0 \leqslant r_i' - \lambda_i \leqslant \varepsilon$ и $\Sigma r_i' g_i \geqslant 0$. Будем называть $\Sigma' \lambda_i g_i$ полукритической снизу, если $g_i \geqslant 0$ и найдутся соответственно r_i'' такие, что $0 \leqslant \lambda_i - r_i'' \leqslant \varepsilon$ и $\Sigma r_i'' g_i \leqslant 0$. Полукритическую сверху и одновременно полукритическую снизу формальную линейную комбинацию будем называть критической. Если $\Sigma' r_i g_i$ — полукритическая сверху (полукритическая снизу, критическая) рациональная формальная линейная комбинация, то элемент $\Sigma r_i g_i$ будем называть полукритическим сверху (соответственно полукритическим снизу, критическим) элементом.

В дальнейшем надо иметь в виду, что для двух подобных формальных линейных комбинаций может оказаться так, что лишь одна из них является, скажем, полукритической сверху. Пусть, к примеру (G, P) — группа всех рациональных точек плоскости sOt с полугруппой P, определяемой соотношениями $t > 0$ либо $t = 0$ и $s \geqslant 0$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, $g_0 = (0, -1)$.

Тогда $g_0 = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = -1 \cdot e_1$, но лишь первое из этих представлений соответствует полукритической сверху комбинации.

Очевидно, совокупность всех полукритических сверху (полукритических снизу, критических) формальных линейных комбинаций замкнута относительно формального сложения (напомним, что нулевые «слагаемые» при этом не отбрасываются) и умножения на неотрицательное число. Ясно также, что если $\Sigma'\lambda_i g_i$ — полукритическая сверху комбинация, то $\Sigma'(-\lambda_i) g_i$ — полукритическая снизу комбинация, и наоборот. Наконец очевидно, что если $g = \Sigma r_i g_i \in P$, где $\{g_i\} \subset P$, то $\Sigma' r_i g_i$ — полукритическая сверху комбинация.

Лемма 2. Пусть $\sum\limits_{i<n}' \lambda_i g_i$ — полукритическая сверху (снизу) формальная линейная комбинация и $g_i = \sum\limits_{j<m} q^i{}_j h_j$, где $h_j \geqslant 0$. Тогда эквивалентная исходной формальная линейная комбинация $\Sigma' \mu_j h_j$, где $\mu_j = \sum\limits_{i<n} \lambda_i q_j{}^i$, тоже является полукритической сверху (снизу).

Доказательство. Рассмотрим случай полукритической сверху комбинации. Если $0 \leqslant r_i - \lambda_i \leqslant \varepsilon$ и $\Sigma r_i g_i \geqslant 0$, то $\sum\limits_{<m} (\sum\limits_{i<n} r_i q^i{}_j) h_j \geqslant 0$. При этом, очевидно, $\sum\limits_{i<n} r_i q^i{}_j - \mu_j \leqslant n\varepsilon$. Теперь в качестве q_j возьмем $\Sigma r_i q_j{}^i$, если $\Sigma r_i g_j{}^i - \mu_i \geqslant 0$ и 0, если $\Sigma r_i q_j{}^i - \mu_j < 0$. Тогда $\sum\limits_{j<m} q_j h_j \geqslant \sum\limits_{j<m} (\sum\limits_{i<n} r_i q^i{}_j) hj \geqslant 0$, и, кроме того, $0 \leqslant q_j - \mu_j \leqslant n\varepsilon$. Значит, действительно, $\Sigma' \mu_j h_j$ — полукритическая сверху.

Следствие 1. Если g — полукритический сверху (снизу) элемент, то найдется его представление $g = \Sigma r_i e_i$ через базисные элементы такое, что $\Sigma' r_i e_i$ — полукритическая сверху (снизу) формальная линейная комбинация.

Следствие 2. Если из двух эквивалентных формальных линейных комбинаций одна является полукритической сверху, а вторая — снизу, то найдется критическая комбинация (ее можно взять по базисным элементам), эквивалентная первым двум. В частности, всякий полукритический сверху и снизу элемент является критическим.

Доказательство. С помощью леммы 2 рассмотрим соответствующие комбинации $\Sigma' \mu_i e_i$ и $\Sigma' \mu_i e_j'$, эквивалентные двум исходным комбинациям, причем первая из этих комбинаций полукритична сверху, а вторая — снизу. Очевидно, на самом деле, две новые комбинации подобны, то есть отличаются лишь нулевыми слагаемыми. Взяв третью подобную этим двум комбинацию, составленную с помощью всех e_l и всех e_l', мы и получим искомую критическую комбинацию (заметим, что добавление нулевых «слагаемых» к полукритической сверху или снизу комбинации не меняет соответствующего ее свойства).

Понятия полукритических и критических формальных линейных комбинаций, а также элементов, может быть введено и в произвольной ч. у. группе, точно так же, как и в ч. у. группе с делением. Надо лишь объяснить смысл соотношения $\Sigma r_l g_l \geqslant 0$. Пусть $r_l = a_l/m$. Тогда будем считать, что соотношение $\Sigma r_l g_l \geqslant 0$ равносильно соотношению $\Sigma a_l g_l \geqslant 0$.

Лемма 3. Пусть (G, P) — ч. у. группа, $(\overline{G}, \overline{P})$ — ее делимая оболочка. Тогда $\Sigma' \lambda_l g_l$ является полукритической сверху (снизу) комбинацией в (G, P) и в $(\overline{G}, \overline{P})$ лишь одновременно. Более того, если $\Sigma' \overline{\lambda_l g_l}$ — полукритическая сверху (снизу) комбинация в $(\overline{G}, \overline{P})$, где $\overline{g_l} = a_l g_l/m$, то $\Sigma' (a_l \lambda_l/m) g_l$ — полукритическая сверху (снизу) комбинация в (G, P). Наконец, если $\Sigma r_l \overline{g_l}$ — полукритический сверху (снизу) элемент в $(\overline{G}, \overline{P})$, то $\Sigma a_l r_l g_l$ — полукритический сверху (снизу) элемент в (G, P) (здесь также $\overline{g_l} = a_l g_l/m$).

Доказательство стандартно.

Замечание. Эта лемма позволяет во всех последующих утверждениях о ч. у. группах рассматривать в доказательствах случай ч. у. групп с делением.

Сейчас будет выяснено значение понятий полукритических и критических элементов (см. лемму 4 и предл. 1, 2).

Лемма 4. Пусть (G, P) — ч. у. группа, $g \in G$. Для того чтобы нашелся $h \in G$, для которого выполнялись неравенства $ng \geqslant h$ $(ng \leqslant h)$ при всех $n \in N$, необходимо и достаточно, чтобы g был полукритическим сверху (снизу) элементом.

Доказательство. Необходимость. Пусть $ng \geqslant h$ $(n \in N)$. Выберем базисные элементы $e_1, \ldots, e_m$ такие, что g и h входят в подгруппу с делением, натянутую на эти элементы. Тогда $g = \sum\limits_{l \leqslant m} r_l e_l$, $h = \sum\limits_{l \leqslant m} q_l e_l$ (в суммах участвуют все выбранные базисные элементы, хотя некоторые коэффициенты могут оказаться и нулями). Так как $ng \geqslant h$, то $\Sigma (r_l + |q_l|/n) e_l \geqslant \Sigma (r_l - q_l/n) e_l = g - h/n \geqslant 0$. Но это и означает, что $\Sigma' r_l e_l$ — полукритическая сверху комбинация, а g — полукритический элемент.

Достаточность. Пусть $\Sigma' r_l g_l$ — полукритическая сверху комбинация и $g = \Sigma r_l g_l$. Обозначим все $r_j > 0$ через r_j', все $r_k < 0$ через $(-r_k'')$ и все $r_l = 0$ через r_l'''. Тогда $g = \Sigma r_j' g_j -$

$\Sigma r_k'' g_k + \Sigma r_l''' g_l$. Положим $h = -(\Sigma r_j' g_j + \Sigma r_k'' g_k + \Sigma g_l)$. Пользуясь тем, что $\Sigma' r_l g_l$ — полукритическая сверху комбинация, подберем рациональные q_j, q_k и q_l такие, что $q_j \geqslant r'_j$, $(n+1) r_j' \geqslant nq_j$, $q_k \leqslant r_k''$, $nq_k \geqslant (n-1) r_k''$, $0 \leqslant q_l \leqslant 1/n$ и $\Sigma q_j g_j - \Sigma q_k g_k + \Sigma q_l g_l \geqslant 0$. Теперь имеем $ng - h = (n+1) \Sigma r_j' g_j - (n-1) \Sigma \overline{r''}_k g_k + \Sigma g_l \geqslant n \Sigma q_j g_j - n \Sigma q_k g_k + n \Sigma q_l g_l = n(\Sigma q_j g_j - \Sigma q_k g_k + \Sigma q_l g_l) \geqslant 0$. Это и завершает доказательство.

С помощью доказанной леммы теперь почти сразу получаем условия того, что (G, P) архимедова или целозамкнута.

Предложение 1. Ч. у. группа (G, P) является архимедовой тогда и только тогда, когда в ней нет ненулевого критического элемента.

Доказательство. В силу леммы 4 элемент g является критическим тогда и только тогда, когда существуют $h_1, h_2 \in G$ такие, что $h_1 \leqslant ng \leqslant h_2 (n \in N)$. Но так как (G, P) — направленная группа, то последнее условие можно переписать так: $-h \leqslant ng \leqslant h (n \in N)$, взяв $h \geqslant h_2$, $h \geqslant (-h_1)$. Так как архимедовость (G, P) означает $[-h \leqslant ng \leqslant h(n \in N)] \Rightarrow g = 0$, то отсюда и следует справедливость предложения 1.

Предложение 2. Ч. у. группа (G, P) является целозамкнутой тогда и только тогда, когда всякий полукритический сверху элемент лежит в P.

Доказательство. Условие предложения в точности означает, что всякий полукритический снизу элемент отрицателен, что в силу леммы 4 равносильно выполнимости формулы: $[ng \leqslant h(n \in N)] \Rightarrow g < 0$, означающей целозамкнутость (G, P).

Замечание. Можно показать, что элемент g в ч. у. группе (G, P) с делением является полукритическим сверху тогда и только тогда, когда он является пределом относительно сходимости с регулятором последовательности положительных элементов, то есть найдутся $h \in P$ и $\{g_n\} \subset P$, а также $m_n \uparrow +\infty$ такие, что $-h/m_n \leqslant g - g_n \leqslant h/m_n (n \in N)$. Отсюда можно получить другие характеристики архимедовости и целозамкнутости. Именно, ч. у. группа (G, P) с делением является архимедовой (целозамкнутой) тогда и только тогда, когда всякий элемент, являющийся пределом относительно сходимости с регулятором одновременно последовательности положительных элементов и последовательности отрицательных элементов, равен 0 (соответственно когда полугруппа P замкнута относительно сходимости с регулятором).

Перейдем теперь к свободным линейным оболочкам ч. у. групп.

Пусть (G, P) — ч. у. группа, X — свободная линейная оболочка группы G. Положим

$$K_0 = \{x \in X : x = \Sigma\lambda_i g_i, \text{ где } \{g_i\} \subset P, \{\lambda\} \{\subset R^+\}.$$

Лемма 5. K_0 является конусом в X и притом наименьшим, дающим полугруппу P в пересечении с G.

Доказательство. Очевидно, K_0 — клин (т. е. полугруппа, замкнутая относительно умножения на неотрицательные числа). Покажем, что K_0 — конус. Предварительно установим, пользуясь условием 2), невозможность равенства $\sum_{i \leqslant n} \mu_i g_i = 0$, где $\mu_i > 0$, $g_i > 0$. Действительно, равенство невозможно при $n=1$. Пусть n — наименьшее, при котором равенство возможно.

Тогда
$$g_n = \sum_{i \leqslant n-1} (-\nu_i g_i),$$
где $\nu_i = \mu_i/\mu_n > 0$. Так как $g_1, ..., g_n$ линейно зависимы в X, то они линейно зависимы и в G в силу условия 2). Допустим сначала, что $g_1, ... g_{n-1}$ линейно независимы (в G). Тогда $g_n = \sum_{i<n} r_i g_i$. Тогда $\sum_{i<n-1} (r_i - \nu_i) g_i = 0$ и в силу линейной независимости $g_1, ..., g_n$ (уже в X) получаем $\nu_i = r_i$, откуда $g_n = -\sum_{i<n-1} r_i g_i$ при положительных r_i. Но это явно невозможно, так как $g_n > 0$. Итак, $g_1, ..., g_{n-1}$ линейно зависимы (в G). Тогда $\sum_{i<n-1} q_i g_i = 0$, где среди q_i имеются строго положительные и строго отрицательные. Можно найти $\lambda > 0$ такое, что все числа $\lambda q_i - \nu_i \leqslant 0$, причем 0 достигается. Теперь имеем $g_n = \sum_{i<n-1} (\lambda q_i - \nu_i) g_i$, причем в правой части есть хоть один нулевой член. Поэтому равенство $g_n + \sum_{i<n} (\nu_i - \lambda q_i) g_i = 0$ противоречит индукционному предположению.

Итак, пусть $x \in K_0$ и $(-x) \in K_0$. Можно найти общее для x и $(-x)$ семейство $\{g_i\}$ $(i \leqslant n)$, где $g_i > 0$, такое, что $x = \Sigma\lambda_i g_i$ $-x = \Sigma\lambda_i' g_i$ и $\lambda_i \geqslant 0$, $\lambda_i' \geqslant 0$. Тогда имеем $0 = \Sigma(\lambda_i + \lambda_i') g_i$. По доказанному в предыдущем абзаце $\lambda_i + \lambda_i' = 0$, $\lambda_i = \lambda_i' = 0$, $x = 0$. Итак, действительно, K_0 — конус.

Установим, что $K_0 \cap G = P$. Для этого достаточно проверить, что если $g = \sum_{i \leqslant n} \lambda_i g_i$, где $\lambda_i > 0$, $g_i > 0$, то $g \in P$. Это утверждение очевидно при $n=1$. Допустим, что оно верно для $1, 2, ..., n-1$ и докажем его справедливость для n. Мыслимы два варианта. Если $g_1, ..., g_n$ линейно независимы, то ввиду линейной зависимости $g, g_1, ..., g_n$ имеем $g = \sum_{i \leqslant n} r_i g_i$.

Теперь рассуждая так, как и двумя абзацами выше, получаем

$\lambda_1 = r_1$, откуда $g \in P$. Если же $g_1, \ldots, g_n$ линейно зависимы, то $\sum\limits_{i \leqslant n} r_i g_i = 0$ и найдется $r_{i_0} < 0$. Потому существует $\lambda > 0$ такое, что все $\lambda_i + \lambda r_i \geqslant 0$, причем 0 достигается. Но в этом случае $g = \sum\limits_{i \leqslant n} (\lambda_i + \lambda r_i) g_i \in P$ в силу индукционного предположения.

Наконец, если K — конус и $K \supset P$, то если $g_i \in P$ — очевидно $g_i \in K$ и $\Sigma \lambda_i g_i \in K$ при $\lambda_i \geqslant 0$. Иначе говоря $K \supset K_0$. Лемма полностью доказана.

Из леммы сразу следует

Предложение 3. Если (G, P) — ч. у. группа, то она имеет свободную линейную оболочку, именно (X, K_0), где X — свободная линейная оболочка группы G.

Теорема 1. Для того чтобы архимедова ч. у. группа (G, P) имела архимедову свободную линейную оболочку, необходимо и достаточно, чтобы в ней не было нетривиальных критических формальных линейных комбинаций. При соблюдении этого условия в качестве искомой оболочки можно взять (X, K_0), где X — свободная линейная оболочка группы G. Более того, K_0 — наименьший конус в X, дающий P в пересечении с G, а ч. у. группа (G, P) плотна в ч. у. векторном пространстве (X, K_0) (по другой терминологии — минорирует (X, K_0)) и потому погружается в (X, K_0) с сохранением всех имеющихся граней; наконец, в этом случае, всякая свободная линейная оболочка ч. у. группы (G, P) является архимедовой.

Доказательство. Покажем сначала, что если в (G, P) имеется нетривиальная критическая комбинация, то (G, P) не имеет архимедовой свободной линейной оболочки. Пусть K — конус в X и $K \cap G = P$. Очевидно, всякая полукритическая сверху (снизу) комбинация $\Sigma' \lambda_i g_i$ остается такой же и в ч. у. группе (X, K). Теперь положим $x_i = |\lambda_i| g_i$, если $\lambda_i \neq 0$ и $r_i = \lambda_i$, $x_i = g_i$, если $\lambda_i = 0$. Ясно, что $\Sigma' r_i x_i$ теперь будет полукритической сверху (снизу) рациональной комбинацией в (X, K), а соответствующий элемент $x = \Sigma r_i x_i = \Sigma \lambda_i g_i$ полукритическим снизу. Отсюда и из следствия 2 к лемме 2 вытекает, что если в (G, P) есть нетривиальная критическая комбинация, то в (X, K) есть ненулевой критический элемент. С помощью предложения 1 теперь сразу убеждаемся, что в X не существует нужного архимедова порядка, то есть архимедова (G, P) не имеет архимедовой свободной линейной оболочки.

Пусть теперь в (G, P) нет нетривиальных критических комбинаций и (X, K) — свободная линейная оболочка группы (G, P). Последнее означает, что K — конус в X и $K \cap G = P$. Докажем архимедовость (X, K). Пусть $-y \leqslant nx < y \, (n \in N)$.

Представим x и y с помощью одного и того же набора $\{g_i\}\subset P$ в виде $x=\sum_{i\leqslant n}\lambda_i g_i$, $y=\sum_{i\leqslant n}\mu_i g_i$ (напр., можно получить такие представления из разложения x и y по базису). Не умаляя общности, можно считать $\mu_i>0$, заменяя в противном случае y на $\Sigma\mu_i' g_i$, где $\mu_i'=\max\{|\mu_i|, 1\}$. Теперь имеем

$$-\Sigma(\mu_i/n)g_i\leqslant\Sigma\lambda_i g_i\leqslant\Sigma(\mu_i/n)g_i.$$

Отсюда в силу произвольности n сразу следует, что $\Sigma'\lambda_i g_i$ — критическая комбинация в (G, P). В силу условия, $\Sigma'\lambda_i g_i$ — тривиальная комбинация, то есть $x=0$. Итак, (X, K) — архимедово.

Из остальных утверждений теоремы в силу леммы 5 и предложения 3 в доказательстве нуждается лишь утверждение о плотности (G, P) в (X, K_0). Но и это утверждение очевидно в силу определения конуса K_0. Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим на плоскости sOt группу G всех рациональных точек с конусом P, определяемым неравенствами $t>\sqrt{2}\,s$, $t>-\sqrt{2}\,s$. Тогда X можно отождествить со всеми точками плоскости, K_0 — определяется теми же неравенствами, (X, K_0) — архимедова свободная оболочка (G, P). Но такими же оболочками будут и ч. у. векторные пространства (X, K_i) $(i=1, 2, 3)$, где K_1 определяется неравенствами $t\geqslant\sqrt{2}\,s$, $t>-\sqrt{2}\,s$, K_2 неравенствами $t\geqslant\sqrt{2}\,s$, $t>-\sqrt{2}\,s$, а K_3 неравенствами $t>\sqrt{2}s$, $t\geqslant-\sqrt{2}s$. Заметим, что если в этом примере вместо $\sqrt{2}$ взять любое положительное рациональное число, то при $i=1, 2, 3$ для соответствующих конусов K_i будет $K_i\cap G\neq P$.

Перейдем к случаю целозамкнутой ч. у. (G, P).

Пусть (G, P) — ч. у. группа, X — свободная линейная оболочка группы G. Рассмотрим в X клин K_1, состоящий из всех элементов, допускающих представление вида $x=\Sigma\lambda_i g_i$, где $\Sigma'\lambda_i g_i$ — полукритическая сверху формальная линейная комбинация в (G, P). Ясно, что $K_1\supset K_0$. Однако клин K_1 в отличие от K_0 не обязан быть конусом, а если (G, P) не целозамкнута, то в силу предложения 2 $K_1\cap G\neq P$.

Теорема 2. Пусть (G, P) — целозамкнутая ч. у. группа. Для того, чтобы она допускала архимедову свободную линейную оболочку, необходимо и достаточно, чтобы в ней не было нетривиальных критических формальных линейных комбинаций. При соблюдении этого условия существует единственная целозамкнутая свободная линейная оболочка, именно (X, K_1), где X — свободная линейная оболочка группы G. Более того, в этом случае K_1 — наибольший конус, дающий полугруппу P в пересечении с G, а все архимедовы свободные линейные оболочки ч. у. группы (G, P) имеют вид (X, K), где K — конус в X и $K_0 \subset K \subset K_1$; при этом (G, P) погружается в (X, K) с сохранением всех имеющихся граней.

Доказательство. Первое утверждение содержится в теореме 1. Пусть теперь в (G, P) нет нетривиальных критических формальных линейных комбинаций. Тогда K_1 является конусом. Действительно, если $x \in K_1$ и $-x \in K_1$, то $x = \Sigma\lambda_i g_i = \Sigma\lambda'_i g_i$, где $\Sigma'\lambda_i g_i$ — полукритическая сверху, а $\Sigma'\lambda'_i g_i$ — полукритическая снизу комбинации. По следствию 2 к лемме 2 найдется критическая комбинация $\Sigma'\lambda_i'' g_i''$, эквивалентная двум предыдущим. По условию эта комбинация является тривиальной. Значит $x=0$, то есть K_1 — конус.

Покажем, что $K_1 \cap G = P$. Пусть $g \in K_1$ и $g = \Sigma\lambda_i g_i$, где $\Sigma'\lambda_i g_i$ — полукритическая сверху рациональная комбинация. По следствию 1 к лемме 2 можно представить $g = \Sigma r_j e_j$, где $\Sigma' r_j e_j$ — полукритическая сверху рациональная комбинация. Значит, $g \in P$ в силу целозамкнутости (G, P) (см предл. 2).

Из теоремы 1 следует, что (X, K_1) архимедово, а мы проверим, что ч. у. (X, K_1) даже целозамкнуто. Пусть $nx \leqslant y$ $(n \in N)$. Тогда можно представить $x = \sum\limits_{i \leqslant n} \lambda_i g_i$, $y = \sum\limits_{i \leqslant n} \mu_i g_i$. Не умаляя общности, можно считать $\mu_i > 0$. Тогда имеем $\Sigma\lambda_i g_i \leqslant \leqslant \Sigma(\mu_i/n) g$, $\Sigma(\lambda_i - \mu_i/n)\, g_i \leqslant 0$. Отсюда, $\Sigma'\lambda_i g_i$ — полукритическая снизу комбинация, $\Sigma'(-\lambda_i) g_i$ — полукритическая сверху комбинация — $x \geqslant 0$, $x \leqslant 0$, то есть (X, K_1) — целозамкнуто.

Далее пусть K — конус в X, $K \cap G \neq P$ и $x = \Sigma\lambda_i g_i \in K_1$, где $\{g_i\} \subset P$. Тогда $\Sigma'\lambda_i g_i$ заведомо не является полукритической сверху. Потому найдется комбинация $\Sigma' r_i g_i$, для которой $r_i \geqslant \lambda_i$, но $\Sigma r_i g_i \in P$ и значит $\Sigma r_i g_i \in K$. Но, очевидно, $\Sigma(r_i - -\lambda_i) g_i \in K_0 \subset K$ (ведь K_0 по теореме 1, наименьший конус в X, содержащий P). Так как $\Sigma r_i g_i = \Sigma\lambda_i g_i + \Sigma(r_i - \lambda_i) g_i$, то отсюда следует, что $x = \Sigma\lambda_i g_i \in K$. Таким образом, мы доказали, что K_1 — наибольший конус в X, дающий P в пересечении с G. Заметим, что из этого доказательства вытекает, что если (G, P) — целозамкнуто, то две эквивалентные комбинации могут быть полукритическими сверху только одновременно.

Докажем единственность целозамкнутой свободной линейной оболочки. Пусть (X, K) — целозамкнуто. По уже доказанному $K \subset K_1$. Возьмем теперь $x \in K_1$. Тогда $x = \Sigma\lambda_i g_i$, где $\Sigma'\lambda_i g_i$ — полукритическая сверху комбинация. Теперь так же, как и при доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что $x = \Sigma r_i x_i$, где $\Sigma' r_1 x_1$ — полукритическая сверху комбинация в (X, K). Значит x — полукритический сверху элемент в (X, K). В силу предложения 2 получаем $x \in K$, то есть $K_1 \subset K$. Окончательно, $K_1 = K$.

В силу теоремы 1, остается только убедиться, что (G, P) погружается в (X, K_1) с сохранением всех граней, ибо из этого и того факта, что (G, P) погружается в (X, K_0) с сохранением всех граней, будет следовать, что при $K_0 \subset K \subset K_1$ (G, P) будет погружаться в (X, K) тоже с сохранением всех граней.

Пусть $g = \sup_{(G, P)} \{g_\alpha\}$, но существует $x \in K_1$ такой, что $x \geqslant \{g_\alpha\}$, но при этом $x \not\geqslant g$. Пусть $x = \Sigma \lambda_i e_i$. Положим $g_0 = \Sigma e_i$ и выберем $g_m = \Sigma r_i e_i$, где $0 \leqslant r_i - \lambda_i \leqslant 1/m$. Очевидно $0 \leqslant g_m - x \leqslant g_0/m$. Если бы для любого $m \in N$ было бы $g_m \geqslant g$, то мы бы имели $g - x \leqslant g_0/m$, $m(g-x) \leqslant g_0 (m \in N)$. Но это бы означало в силу целозамкнутости (X, K_1), $g - x \leqslant 0$, $x \geqslant g$, вопреки допущению. Значит $g_{m_0} \not\geqslant g$, но в то же время $g_{m_0} \geqslant x \geqslant \{g_\alpha\}$, то есть $g_{m_0} \geqslant g$. Противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание. Ч. у. векторное пространство (X, K_1) из примера 1 является целозамкнутой свободной линейной оболочкой ч. у. группы (G, P), но при этом (G, P) не погружается в (X, K_1) плотным образом.

Определение 5. Пусть (G, P) — l-группа, ее свободную линейную оболочку (X, K) будем называть свободной l-оболочкой, если (X, K) — векторная решетка.

Из теоремы 2 видно, что (G, P) может иметь разве что одну архимедову (значит, в данном случае, и целозамкнутую) свободную l-оболочку, именно (X, K_1). Следующий пример показывает, однако, что даже если в архимедовой (значит, и целозамкнутой) l-группе нет нетривиальных критических формальных линейных комбинаций, тем не менее, ее целозамкнутая свободная линейная оболочка (X, K) может не быть векторной решеткой.

Пример 2. Пусть (G, P) — архимедова l-группа всех непрерывных функций на $[0, 1]$, представимых в виде кусочно-линейных функций с рациональными коэффициентами и с не более чем конечным числом стыков, притом лишь в рациональных точках, с естественным функциональным порядком. (G, P) имеет целозамкнутую свободную линейную оболочку (X, K_1), которую можно отождествить с подпространством в векторной решетке всех непрерывных кусочно-линейных функций (с вещественными коэффициентами) с такими же стыками и с функциональным же порядком. Ясно, что если $x \in X$, то x, рассматриваемая как функция на отрезке, дифференцируема во всех иррациональных точках. По указанной причине в (X, K_1) не существует $x_1 \vee x_2$, где $x_1(t)=1$, $x_2(t)=\sqrt{2}t$ при $t \in [0, 1]$. Отсюда (G, P) не имеет архимедовой свободной l-оболочки.

Все же для конечномерного случая, при выполнении условий теорем 1 и 2, задача решается положительно.

Теорема 3. Пусть (G, P) — конечномерная архимедова l-группа размерности n. Для того чтобы (G, P) имела архимедову свободную l-оболочку, необходимо и достаточно, чтобы в (G, P) не было нетривиальных критических формальных линейных комбинаций. Если это условие выполнено, то единственной такой оболочкой является ее целозамкнутая свободная оболочка (X, K_1), изоморфная в этом случае векторной решетке R^n (с покоординатным порядком).

Доказательство. В проверке нуждается лишь достаточность. В силу хорошо известных результатов (см., напр., [4], ч. 1, гл. 1, § 8) l-группу (G, P) можно представить в виде прямого произведения о-подгрупп (G_i, P_i) $(i \leqslant k)$ о-группы (R, R^+) вещественных чисел. Уже говорилось, что, не умаляя общности, можно считать исходную G группой с делением (см. замеч. к лемме 3). Поэтому в каждой (G_i, P_i) есть положительный рациональный базис. Допустим, что в некоторой (G_i, P_i) есть два базисных элемента $e_i = \lambda_i \in R^+ (i=1, 2)$. Тогда формальная линейная комбинация в (G, P), соответствующая выражению $\lambda_2 e_1 - \lambda_1 e_2$, является нетривиальной критической формальной линейной комбинацией в (G, P), чего быть не может по условию.

Значит любая (G_i, P_i) изоморфна о-группе (Q, Q^+) и $k=n$. Но такое представление исходной l-группы сразу делает очевидным доказываемый результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lorenzen P. Abstrakte Begründung der multiplikativen Idealtheorie. — Math. Zeitschr., 1939, 45, 533—553.

2. Hahn H. Über die nichtarchimedischen Grössensysteme. — S.—B. Akad. Wiss. Wien, 1907, 116, 11A, 601—655.

3. Пинскер А. Г. Разложение полуупорядоченных групп и пространств. — Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1949, 86, 235—284.

4. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М., 1965.

5. Conrad P. F. Minimal vector lattice covers. — Bull. Austral. Math. Soc., 1971, 4, N 1, 35—39.

6. Martinez J. The vector lattice cover of an abelian lattice—ordered group. — Notices AMS, 1970, 17, N 5, 759.

7. Векслер А. И. О линейных оболочках коммутативных l-групп.— XXIV Герценовские чтения. Математика (тезисы докладов), Л., 1971, 41—43.

М. Б. ДИХТЯРЬ

ЭПИМОРФИЗМЫ И МОНОМОРФИЗМЫ КАТЕГОРИИ ЧАСТИЧНЫХ Р-ОПЕРАТИВОВ

Бинарное отношение между подмножествами множества A и элементами этого множества называется **Р**-отношением в множестве A.

Однозначное **Р**-отношение о в множестве A называется частичной **Р**-операцией в A, а пара $(A, \circ)$ — частичным **Р**-оперативном. Совокупность подмножеств $\delta = pr_1 \circ$ называется отношением определенности частичной **Р**-операции о.

Пусть $(A, \circ)$ и $(B, \circ)$ два частичных **Р**-оператива. Отображение $\varphi \subset A \times B$ называется гомоморфизмом, если

$$(\forall X \subset A)(X \in \delta \rightarrow \breve{\varphi}(X) \in \delta \wedge \circ(\breve{\varphi}(X)) = \varphi(\circ(X)).$$

(Отметим, что гомоморфный образ частичного **Р**-оператива не всегда будет частичным **Р**-подоперативом).

Для любого подмножества $X \subset A$ существует наименьший частичный **Р**-оператив $(X, \circ)_A$, содержащий подмножество X. Если $(X, \circ)_A$ совпадает с $(A, \circ)$, то подмножество X порождает частичный **Р**-оператив $(A, \circ)$. Если φ — гомоморфизм $(A, \circ)$ в $(B, \circ)$ и множество $\varphi(A)$ порождает $(B, \circ)$, то φ называется гомоморфизмом $(A, \circ)$ «почти на» $(B, \circ)$.

Необходимые сведения по теории категорий содержатся в [1].

Категорией частичных **Р**-оперативов K является категория, объекты $Ob(K)$ которой частичные **Р**-оперативы, а морфизмы $M(K)$ — всевозможные гомоморфизмы между любыми двумя частичными **Р**-оперативами, принадлежащими классу $Ob(K)$.

Рассмотрим некоторые свойства эпиморфизмов и мономорфизмов категории:

1. В категории K всякий морфизм «почти на» является эпиморфизмом.

Доказательство. Пусть $(A, \circ)$, $(B, \circ)$, $(C, \circ) \in Ob(K)$, $\varphi \subset A \times B$ — морфизм категории K, α и β — морфизмы $(B, \circ)$ в $(C, \circ)$, удовлетворяющие условию $\alpha\varphi = \beta\varphi$. Тогда $\alpha = \beta$ на подмножестве $\breve{\varphi}(A) \subset B$, которое порождает $(B, \circ)$. Докажем, что $\alpha = \beta$ на $(B, \circ)$.

Пусть $X=\{x\in \breve{B} : \alpha(x)=\beta(x)\}$, $Y\subset X$, $Y\in\delta$. Так как α, β — гомоморфизмы и $\breve{\alpha}(Y)=\breve{\beta}(Y)$, то

$$\alpha(o(Y))=o(\breve{\alpha}(Y)=o(\breve{\beta}(Y))=\beta(o(Y))\to o(Y)\in X,$$

откуда получаем, что (X, o) является частичным **P**-подоперативном частичного **P**-оператива (B, o). Но так как $\breve{\varphi}(A)\subset X$ порождает (B, o), то $(\varphi(A), o)_B$ совпадает с (B, o). Таким образом, $\alpha=\beta$ на (B, o).

2. Если в категории K эпиморфизм $\varphi: (A, o)$ в (B, o) таков, что $\breve{o}(\mathbf{P}(B))\subset pr_2\varphi$, то φ — отображение «на».

Доказательство. Пусть эпиморфизм $\varphi\subset A\times B$ не является отображением «на», то есть существует, по крайней мере, один элемент $b_0\bar{\in}\breve{\varphi}(A)$.

Рассмотрим **P**-оператив $(\{c_1, c_2\}, o)=(C, o)$, где $o\subset\mathbf{P}(C)\times C$ определяется следующим образом:

$$(\forall X\subset C)(o(X)=c_1).$$

Построим два отображения $\alpha, \beta: (B, o)\to(C, o)$ такие, что $\alpha(b)=c_1$ для всех элементов $b\in B$, $\beta(b)=c_1$ для всех элементов $b\in\breve{\varphi}(A)$ и $\beta(b_0)=c_2$ для всех элементов $b_0\in B/\breve{\varphi}(A)$. Очевидно, $\alpha\neq\beta$.

Докажем, что β является гомоморфизмом.

Пусть $X\subset B$ и $X\in\delta$. По условию $o(X)\in\breve{\varphi}(A)$. Тогда $\beta(o(X))=c_1$. Но по построению (C, o), имеем: $o(\beta(X))=c_1$.

Очевидно, что α — гомоморфизм.

Итак, предполагая, что φ отображение не «на», получаем, что существуют неравные гомоморфизмы α и β, для которых $\alpha\varphi=\beta\varphi$, что невозможно.

3. Если объект (A, o) категории K таков, что $o\{a\}=a$ для любого $a\in A$, то всякий мономорфизм, определенный на (A, o), взаимно однозначен.

Всякое упорядоченное множество (A, ω) можно рассматривать как частичный **P**-оператив (A, o), где o есть некоторая частичная **P**-операция, определяемая в терминах порядка ω. Частичная **P**-операция Inf — это операция взятия наибольшего миноранта подмножества и частичная **P**-операция Min — это операция, сопоставляющая подмножеству его наименьший элемент.

K_1, K_2 — категории частичных **P**-оперативов, объектами которых являются соответственно частичные $\mathbf{P}$-оперативы (A, Min), (A, Inf).

Так как для частичных $\mathbf{P}$-оперативов (A, Min) и (A, Inf) выполняется $Inf\{a\}=Min\{a\}=a$, то из свойства 3 следует:

4. Мономорфизмы категорий K_1, K_2 совпадают со взаимнооднозначными отображениями.

Так как гомоморфизм относительно Min совпадает с изотонным отображением [2], а всякий эпиморфизм категории упорядоченных множеств с изотонными отображениями является отображением на [3], то

5. Эпиморфизмы категории K_1 совпадают с морфизмами «на».

6. Эпиморфизмы категории K_2 совпадают с морфизмами «почти на».

Доказательство. По свойству 1, всякий морфизм «почти на» категории K_2 является эпиморфизмом.

Докажем, что любой эпиморфизм является отображением «почти на».

Пусть (A, Inf), $(\overline{A}, Inf)\in Ob(K)$ и эпиморфизм $\varphi\subset A\times\overline{A}$ не является морфизмом «почти на». Тогда существует частичный $\mathbf{P}$-оператив (B, Inf), где $B\subset\overline{A}$, $B\neq\overline{A}$, содержащий $pr_2\varphi$. Пусть $x\in\overline{A}/B$.

Построим множества $\Phi(x)=\omega<x>$, $F_0=B\cap\omega<x>$, $F_1=Inf(\mathbf{P}(F_0))$, $F_2=\breve{\omega}(F_1)$, $F_3=Inf(\mathbf{P}(F_2)),\ldots$, $F_{2n+1}=Inf(F_{2n})$, $F_{2n+2}=\breve{\omega}(F_{2n+1})$, $F=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}F_i$.

Пусть $C=\{0, 1\}$ — двухэлементная цепь. Построим отображения α и β множества A в множестве C следующим образом:

$$\alpha(t)=\begin{cases}1, \text{ если } t\in\Phi\\ 0 \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$\beta(t)=\begin{cases}1, \text{ если } t\in F\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Докажем, что α и β — гомоморфизмы. Пусть $X\subset\overline{A}$. Так как (C, Inf) — $\mathbf{P}$-оператив, то

$$X\in\delta\rightarrow\breve{\alpha}(X),\quad \breve{\beta}(X)\in\delta.$$

Будем доказывать, что

$$\alpha(InfX)=Inf((\breve{\alpha}(X)). \tag{1}$$

а) Пусть $X\subset\Phi$. Так как x минорант X, то $InfX\geqslant x$, то есть $InfX\in\Phi$. Тогда (1) выполняется.

б) Пусть $X \not\subset \Phi$. Тогда в X найдется по крайней мере один элемент, меньший x или не сравнимый с x (в противном случае, если $InfX \geqslant x$, то x был бы минорантом X), то есть $Inf \bar{\in} \Phi$. А тогда (1) выполняется: $\alpha(InfX)=0$ и $Inf(\alpha(X))= =Inf\{0, 1\}=0$.

Докажем, что β — гомоморфизм, то есть

$$\beta(InfX)=Inf(\breve{\beta}(X)). \qquad (2)$$

а) Пусть $X \subset F$. По построению F, $InfX \in F$, тогда (2) выполняется.

б) Пусть $X \not\subset F$. Докажем, что $InfX \bar{\in} F$.

Если $InfX \in F$, то все элементы, большие $InfX$, включаются в F. Значит, $X \subset F$, что невозможно. Итак, $InfX \bar{\in} F$. Тогда $\beta(InfX)=0$ и $Inf(\breve{\beta}(X))=Inf(\{0, 1\})=0$.

Докажем, что $\alpha \neq \beta$, но $\alpha\varphi=\beta\varphi$.

Очевидно $x \in \Phi$. Покажем, что $x \bar{\in} F$.

а) Пусть F_0 имеет инфимум. Так как $F_0 \subset B$, а (B, Inf) — частичный Р-оператив, то $InfF_0 \in B$, откуда следует, что $InfF_0 > x$ (так как $x \bar{\in} B$). Из построения F следует, что всякое подмножество $X \subset F$ имеет $InfF_0$ минорантом. Тогда $InfX$ (если он существует) будет не меньше $InfF_0$, тогда $InfX > x$, то есть x не является инфимумом никакого подмножества X из F. Так как из построения F_0 следует, что $x \bar{\in} F_0$, то $x \bar{\in} F$.

б) F_0 не имеет инфимума. Тогда оно имеет по крайней мере два различных миноранта x и b. Из построения F следует, что всякое подмножество из F имеет минорантами x и b. Откуда следует, что x не является инфинумом никакого подмножества X из F. Так как из построения F_0 следует, что $x \bar{\in} F_0$, то $x \bar{\in} F$.

Итак, $\alpha(x) \neq \beta(x)$ и, следовательно, $\alpha \neq \beta$.

Поскольку $pr_2\varphi \cap \Phi = F_0 = pr_2\varphi \cap F$, то $\alpha\varphi = \beta\varphi$.

Итак, для эпиморфизма φ существует такие гомоморфизмы α и β, что $\alpha\varphi=\beta\varphi$, но $\alpha \neq \beta$. Это невозможно. И, следовательно, предположение, что φ не является морфизмом «почти на», неверно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Царенко М. С., Шульгейфер Е. Г. Лекции по теории категорий. Изд. МГУ, 1970.

2. Дихтярь М. Б. К общей теории частичных P-оперативов. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1972, № 2, 33—43.

3. Sekanina M. Categories of ordered sets. «Arch. math.», 1968, 4, N 1, 25—59.

Д. П. ЕГОРОВА, Л. А. СКОРНЯКОВ

О СТРУКТУРЕ КОНГРУЭНЦИЙ УНАРНОЙ АЛГЕБРЫ

Описываются унарные алгебры, структура конгруэнций которых является структурой с дополнениями, или дедекиндовой структурой с дополнениями, или булевой алгеброй.

Рассматриваются алгебры с одной унарной операцией f. Алгебра A называется циклом длины n, если она состоит из элементов $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, где $f(a_i)=a_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-2)$ и $f(a_{n-1})=a_0$. Длину цикла C условимся обозначать через $|C|$. Если алгебра A содержит цикл C и для всякого элемента $b \in A \setminus C$ имеем $f^k(b) \in C$ для подходящего k, то она называется циклом с хвостами. Если A цикл с хвостами и $k \leqslant 1$ для всех элементов b, то будем говорить, что алгебра A имеет короткие хвосты. Структуру конгруэнций алгебры A обозначаем через $\Theta(A)$.

Теорема 1. Структура конгруэнций унарной алгебры A с операцией f обладает дополнениями тогда и только тогда, когда A является объединением попарно не пересекающихся циклов, некоторые из которых могут иметь короткие хвосты, причем все циклы имеют одну и ту же длину n и n свободно от квадратов.

Доказательство необходимости. Пусть $\Theta(A)$ обладает дополнениями. Алгебра A распадается в объединение некоторого множества попарно непересекающихся компонент ([4], стр. 34), причем каждая конечная компонента является циклом с хвостами.

Лемма 1. Если B — подалгебра алгебры A, то Θ (B) — структура с дополнениями.

Доказательство. Поскольку $\Theta(A)$ структура с дополнениями, а B, являясь подалгеброй алгебры A, будет идеалом алгебры A ([3], стр 149), то $\Theta(B)$ — структура с дополнениями ([3], стр. 172, предл. 3.1).

Необходимость высказанных условий сразу следует из доказанных ниже лемм 2—4.

Лемма 2. Если $x_0 \in A$ и $f^k(x_0) \neq x_0$ при $k \geqslant 1$, то $f(x_0) = f^k(x_0)$ для некоторого $k \geqslant 2$. В частности, алгебра A не содержит бесконечных компонент и ее циклы допускают лишь короткие хвосты.

Доказательство. Рассмотрим множество $D = \{f^k(x_0) \mid k=0, 1, 2, \ldots\}$ (по определению, $f^0(x_0)=x_0$). В силу леммы 1, $\Theta(D)$ — структура с дополнениями. Рассмотрим разбиение алгебры D: выделив класс $\{f^k(x_0)\,|\,k=1, 2, \ldots,\}$ и считая остальные классы одноэлементными. Очевидно, оно определяет конгруэнцию $\theta\in\Theta(D)$. Пусть θ' дополнение к θ. Тогда $x_0\theta' f^i(x_0)$ для некоторого $i>0$, откуда $f(x_0)\theta' f^{i+1}(x_0)$. Отсюда $f(x_0)\,(\theta\wedge\theta')f^{i+1}(x_0)$, то есть $f(x_0)=f^{i+1}(x_0)$.

Лемма 3. Если I и J циклы алгебры A, то $|I|=|J|$.

Доказательство. Предположим, что $|I|<|J|$ и $I=\{x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}\}$. Так как J идеал алгебры A и $\Theta(A)$ структура с дополнениями, то J — ретракт алгебры A ([3], стр. 152, предложение 1.11), т. е. существует гомоморфизм $\varphi: A\to J$, при котором $\varphi(y)=y$ для всех $y\in J$. Отсюда $f^m(\varphi(x_0))=\varphi(f^m(x_0))=\varphi(x_0)$, что невозможно, ибо $|J|>m$.

Лемма 4. Если I — цикл алгебры A, то $|J|$ свободна от квадратов.

Доказательство. Структура конгруэнций $\Theta(I)$ по лемме 1 является структурой с дополнениями. Поскольку I цикл конечной длины, то $\Theta(I)$ изоморфна структуре делителей числа $|I|$ ([4], стр. 35). Следовательно, $\Theta(I)$ — атомная структура ([2], стр. 115, теорема 19), а значит $|I|$ свободна от квадратов ([4], стр. 37, теорема 2).

Рассмотрим теперь некоторые леммы, нужные для доказательства достаточности.

Лемма 5. Пусть унарная алгебра A является объединением подалгебры B и некоторого множества C, где $f(c)\in B$ для всех $c\in C$ и для каждого $c\in C$ существует $b(c)\in B$ такое, что $f(b(c))=f(c)$. Если $\Theta(B)$ — структура с дополнениями, то $\Theta(A)$ также структура с дополнениями.

Доказательство. Допустим, что $\theta\in\Theta(A)$. Конгруэнция θ индуцирует на множестве C эквивалентность θ_C, а на подалгебре B конгруэнцию θ_B. Поскольку $\Theta(B)$ — структура с дополнениями, то существует дополнение θ'_B конгруэнции θ_B в структуре $\Theta(B)$. В каждом из смежных классов эквивалентности θ_C выберем по одному представителю и разобьем получившееся множество представителей на два подмножества K и L таких, что K состоит из всех элементов сравнимых по θ с элементами из B, а L содержит все элементы, не сравнимые с элементами из B по θ. Пусть $B(K)=\{b(c)\,|\,c\in K\}$ и $B(L)=\{b(c)\,|\,c\in L\}$. Рассмотрим разбиение θ' множества A, смежные классы которого состоят из всех классов конгруэнции θ'_B, не содержащих элементов из $B(L)$, и смежных классов этой конгруэнции, содержащих элементы из $B(L)$, пополнённых соответствующими элементами из L. Остальные классы одноэлементны. Ясно, что $\theta' \in \Theta(A)$. Допустим, что $x \equiv y(\theta \wedge \theta')$. Если $x, y \in B$, то $x \equiv y(\theta_B)$ и $x \equiv y(\theta'_B)$, следовательно, $x=y$. Если $x, y \in C$, то $x \equiv y(\theta_C)$ и $x \equiv y(\theta')$, значит, $x=y$, так как смежные классы конгруэнции θ' содержат ровно по одному элементу из смежных классов эквивалентности θ_C. Если же $x \in B$ и $y \in C$, то из $x \equiv y(\theta)$ следует $x \equiv \tilde{y}(\theta)$, где $y \equiv \tilde{y}(\theta_C)$ и $\tilde{y} \in K$. С другой стороны, $x \equiv y(\theta')$ влечет $y \in L$. Противоречие. Далее, для произвольных элементов $x, y \in A$ возможны три случая: 1) $x, y \in B$; 2) $x \in B$ и $y \in C$; 3) $x, y \in C$. В первом случае имеем $x \equiv y(\theta_B V \theta'_B)$, откуда $x \equiv y(\theta V \theta')$. Во втором случае выберем $\tilde{y} \in K \cup L$ так, что $y \equiv \tilde{y}(\theta_C)$. Если $\tilde{y} \in K$, то $y \equiv z(\theta)$ для некоторого $z \in B$. В силу доказанного $x \equiv z(\theta V \theta')$, а значит и $x \equiv y((\theta V \theta')$. Если же $\tilde{y} \in L$, то $\tilde{y} \equiv b(\tilde{y})(\theta')$, что также влечет $x \equiv y(\theta V \theta')$. В третьем случае достаточно заметить, что по доказанному $x \equiv z(\theta V \theta')$ и $y \equiv z(\theta V \theta')$ для произвольного $z \in B$. Таким образом, $\theta \wedge \theta' = \mathbf{0}_A$ и $\theta V \theta' = \mathbf{1}_A$.

Л е м м а 6. Если алгебра A является циклом, возможно, с короткими хвостами, и длина цикла свободна от квадратов, то $\Theta(A)$ структура с дополнениями.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если A является циклом и $|A|$ свободна от квадратов, то $\Theta(A)$, будучи изоморфной структуре делителей числа $|A|$, оказывается атомной дистрибутивной структурой конечной длины и, следовательно, булевой алгеброй ([2], стр. 115, теорема 19). При наличии хвостов утверждение вытекает из леммы 5.

Легко проверяется:

Л е м м а 7. Если $A = \bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha$, $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$ и $\theta_\alpha \in \Theta(A_\alpha)$, то $\bigcup_{\alpha \in \Omega} \theta_\alpha \in \Theta(A)$.

Л е м м а 8. Пусть $A = \bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha$, $A_\alpha \cup A_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$ и $\theta \in \Theta(A)$, причем для любых $\alpha, \beta \in \Omega$ существует $x_\alpha \in A_\alpha$, $y_\beta \in A_\beta$ такие, что $(x_\alpha, y_\beta) \in \theta$. Если каждая конгруэнция θ_α, индуцированная конгруэнцией θ на A_α, имеет дополнение θ'_α в $\Theta(A_\alpha)$, то θ имеет дополнение в $\Theta(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\theta' \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\alpha \in \Omega} \theta'_\alpha$. В силу леммы 7, $\theta' \in \Theta(A)$. Возьмем произвольные элементы $x, y \in A$. Тогда $x \in A_\alpha$, $y \in A_\beta$. Если $\alpha = \beta$, то $(x, y) \in \mathbf{1}_{A_\alpha} = \theta_\alpha V \theta'_\alpha$, то есть существует цепь $x = z_1, z_2, \ldots, z_n = y$ элементов из A_α

таких, что z_i и z_{i+1} сравнимы или по θ_α или по θ'_α при $i=1, 2, \ldots, n-1$. По определению конгруэнций θ и θ' получаем, что $(x, y) \in \theta \vee \theta'$. Если $\alpha \neq \beta$, то по условию существуют $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$ такие, что $(a, b) \in \theta \leqslant \theta \vee \theta'$. В силу только что доказанного, $(x, a) \in \theta \vee \theta'$ и $(y, b) \in \theta \vee \theta'$. Следовательно, $(x, y) \in \theta \vee \theta'$. Предположим теперь, что $(x, y) \in \theta \wedge \theta'$. Тогда $(x, y) \in \theta$ и $x, y \in A_\alpha$ для некоторого α. Отсюда $(x, y) \in \theta_\alpha$, а в силу определения θ', $(x, y) \in \theta'_\alpha$. Таким образом, $(x, y) \in \theta_\alpha \wedge \theta'_\alpha$, откуда $x=y$. Следовательно, θ' является дополнением конгруэнции θ в структуре $\Theta(A)$.

Лемма 9. Пусть $A = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} A_\alpha$, $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$ и $\Theta(A)$ содержит конгруэнцию π со свойствами:

1) каждый неодноэлементный класс конгруэнции π содержит по одному и только по одному элементу из каждой A_α;

2) для каждого α множество элементов алгебры A_α, входящих в неодноэлементные классы конгруэнции π, образуют идеал I_α. Если θ конгруэнция алгебры A, не содержащая пар с элементами из разных A_α, θ_α — конгруэнция, индуцированная конгруэнцией θ на A_α, и всякая конгруэнция $\delta_\alpha \in \Theta(A_\alpha)$, где $\delta_\alpha \geqslant \theta_\alpha$, имеет дополнение в $\Theta(A_\alpha)$, то θ имеет дополнение в $\Theta(A)$.

Доказательство. В силу условий, наложенных на θ, $\theta = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} \theta_\alpha$, где θ_α — конгруэнция, индуцированная конгруэнцией θ на A_α. Обозначим через ρ_α дополнение конгруэнции $[I_\alpha] \vee \theta_\alpha$ в $\Theta(A_\alpha)$, где $[I_\alpha]$ — конгруэнция, склеивающая все элементы из I_α, а остальные классы считаются одноэлементными.

Отметим следующие утверждения:

(*) Для каждого $y \in A_\alpha$ существует $x \in I_\alpha$ такой, что $(x, y) \in \rho_\alpha \vee \theta_\alpha$.

В самом деле, возьмем произвольное $t \in I_\alpha$. Тогда $(y, t) \in 1_{A_\alpha} = \rho_\alpha \vee [I_\alpha] \vee \theta_\alpha$ Это означает, что существует цепь элементов $y = z_1, z_2, \ldots, z_n = t$, таких, что z_i сравним с z_{i+1} или по $[I_\alpha]$, или по $\rho_\alpha \vee \theta_\alpha$ при $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Можно считать, что все z_i различны. Пусть k — наименьший номер, для которого $z_k \in I_\alpha$. Если $i<k$, то $z_i \notin I_\alpha$ и, следовательно, $(z_i, z_{i+1}) \in \rho_\alpha \vee \theta_\alpha$. Отсюда $(y, z_k) \in \rho_\alpha \vee \theta_\alpha$, что и требовалось.

(**) Если $(x, y) \in \pi$, $(y, z) \in \rho_\alpha$, $(z, t) \in \pi$ и $x, t \in A_\alpha$, то $y=z$.

Действительно, $y, z \in I_\alpha$ по определению конгруэнции π, а значит $(y, z) \in ([I_\alpha] \vee \theta_\alpha) \wedge \rho_\alpha$, откуда $y=z$.

Теперь зафиксируем индекс α_0, положим $\sigma = (\pi \vee (\bigvee\limits_{\alpha \neq \alpha_0} \rho_\alpha) \vee \theta)_\alpha$.

и обозначим через σ' дополнение конгруэнции σ в $\Theta(A_{\alpha_0})$. Пусть

$$\theta' = \pi \vee \left(\bigvee_{\alpha \neq \alpha_0} \rho_\alpha \right) \vee \sigma',$$

Тогда

$$\theta \vee \theta' = \theta \vee \pi \left(\bigvee_{\alpha \neq \alpha_0} \rho_\alpha \right) \vee \sigma' = \theta \vee \pi \vee \left(\bigvee_{\alpha \neq \alpha_0} \rho_\alpha \right) \vee \sigma \vee \sigma' =$$
$$= \theta \vee \pi \vee \left(\bigvee_{\alpha \neq \alpha_0} \rho_\alpha \right) \vee 1_{A_{\alpha_0}}.$$

Возьмем произвольные $x, y \in A$. Если $x, y \in A_{\alpha_0}$, то $(x, y) \in 1_{A_{\alpha_0}}$ и, следовательно, $(x, y) \in \theta \vee \theta'$. Пусть $x \in A_{\alpha_0}$, $y \in A_\alpha$, $\alpha \neq \alpha_0$. В силу утверждения (*) найдется $b \in I_\alpha$ такой, что $(b, y) \in \rho_\alpha \vee \theta_\alpha$. Разумеется, $(b, y) \in \theta \vee \theta'$. Используя определение конгруэнции π, найдем $a \in A_{\alpha_0}$ такое, что $(a, b) \in \pi$. Конечно, $(a, b) \in \theta \vee \theta'$. Так как $x, a \in A_{\alpha_0}$, то $(x, a) \in \theta \vee \theta'$. Таким образом, $(x, y) \in \theta \vee \theta'$. Если $x \in A_\alpha$, $y \in A_\beta$ и $\alpha, \beta \neq \alpha_0$, то возьмем произвольное $z \in A_{\alpha_0}$. По только что доказанному $(x, z) \in \theta \vee \theta'$ и $(z, y) \in \theta \vee \theta'$. Отсюда $(x, y) \in \theta \vee \theta'$. Таким образом, $\theta \vee \theta' = 1_A$.

Предположим теперь, что $(x, y) \in \theta'$. Тогда по определению конгруэнции θ' существует цепь элементов $x = z_1, z_2, \ldots, z_n = y$ таких, что z_i сравним с z_{i+1} или по π, или по ρ_α, где $\alpha \neq \alpha_0$, или по σ' при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Выберем самую короткую из таких цепей. Отсюда, в частности, следует, что пары (z_{i-1}, z_i) и (z_i, z_{i+1}) сравнимы по различным из перечисленных конгруэнций.

(***) Если $(x, y) \in \theta'$ и $x, y \in A_{\alpha_0}$, то $(x, y) \in \sigma'$.

В самом деле, если $(x, y) \bar{\in} \sigma'$, то найдется наименьшее $z_i \in A_{\alpha_0}$ такое, что $(z_i, z_{i+1}) \bar{\in} \sigma'$. Поэтому $z_{i+1} \bar{\in} A_{\alpha_0}$. Отсюда $(z_i, z_{i+1}) \in \pi$, $(z_{i+1}, z_{i+2}) \in \rho_\alpha$, где $\alpha \neq \alpha_0$. Ясно, что $i+2 \neq n$. Так как $z_{i+2} \in A_\alpha$, причем $\alpha \neq \alpha_0$, то соотношение $(z_{i+2}, z_{i+3}) \in \sigma'$ невозможно. По доказанному выше утверждению (**) невозможно и соотношение $(z_{i+2}, z_{i+3}) \in \pi$. Соотношение же $(z_{i+2}, z_{i+3}) \in \rho_\alpha$ не совместимо с тем, что рассматривается самая короткая цепь. Полученное противоречие доказывает нужное утверждение.

Допустим, что $(x, y) \in \theta \Delta \theta'$. Если $x, y \in A_{\alpha_0}$, то, в силу (***), имеем $(x, y) \in \sigma' \wedge \sigma$, то есть $x = y$. Пусть теперь $x, y \in A_\beta$, где $\beta \neq \alpha_0$. Допустим, что $z_k \in A_{\alpha_0}$ для некоторого k. Пусть z_l — первый из элементов цепи, а z_m — последний, принадлежащий A_{α_0}. Так как $(z_l, z_m) \in \theta'$ и $z_l, z_m \in A_{\alpha_0}$, то, согласно (***), имеем $(z_l, z_m) \in \sigma'$. Кроме того, z_l и z_m соединены цепью элементов, сравнимых или по π, или по ρ_α, $\alpha \neq \alpha_0$, или по θ, то есть $(z_i, z_m) \in \sigma$. Таким образом, $z_i = z_m$. Отсюда $z_{i-1} \pi z_i \pi z_{i+1}$, что противоречит выбору цепочки. Тем самым доказано, что $z_i \in A_{\alpha_0}$ для всех i, а значит $(x, y) \in \pi V(\bigvee_{\alpha \neq \alpha_0} \rho_\alpha)$. Допустим, что $(x, y) \overline{\in} \rho_\beta$. Тогда существует наименьшее $z_i \in A_\beta$ такое, что $(z_i, z_{i+1}) \overline{\in} \rho_\beta$, то есть $z_{i+1} \in A_\gamma, \gamma \neq \beta$, α_0 и $(z_i, z_{i+1}) \in \pi$. Так как $z_{i+1} \in A_\gamma$, то $z_{i+2} \in A_\gamma$ и $(z_{i+1}, z_{i+2}) \in \rho_\gamma$, ибо выбрана самая короткая цепь. Соотношение $(z_{i+2}, z_{i+3}) \in \pi$ невозможно по доказанному выше утверждению (**). Из-за выбора цепи невозможно и соотношение $(z_{i+2}, z_{i+3}) \in \rho_\gamma$. Отсюда $(x, y) \in \rho_\beta$. Но $(x, y) \in \theta$ и, следовательно, $(x, y) \in \rho_\beta \wedge ([I_\beta] \vee \theta_\beta)$, то есть $x = y$.

Доказательство достаточности. Пусть $A = \bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha$, где A_α циклы с короткими хвостами, указанные в формулировке, и $\theta \in \Theta(A)$. Определим отношение $\sim$ на множестве Ω, полагая

$$\alpha \sim \beta \underset{\text{def}}{=} (x, y) \in \theta \;\boxed{\text{для некоторых } x \in A_\alpha,\ y \in A_\beta,}$$

Рефлексивность и симметричность отношения $\sim$ очевидны.

Допустим, что $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$, то есть существует $x \in A_\alpha$, $y \in A_\beta$, $u \in A_\beta$, $v \in A_\gamma$, такие, что $(x, y) \in \theta$ и $(u, v) \in \theta$. Очевидно, что $f^k(y) = f^l(u)$ для подходящих k и l. Отсюда, $f^k(x) \theta f^k(y) = f^l(u) \theta f^l(v)$, то есть $\alpha \sim \gamma$. Таким образом, можно рассматривать фактор-множество $\overline{\Omega} = \Omega / \sim$. Если Ω^i — класс из $\overline{\Omega}$, то положим

$$A^i = \bigcup_{\alpha \in \Omega^i} A_\alpha.$$

Пусть θ^i — конгруэнция, индуцированная конгруэнцией θ на A^i. Выделим в каждом классе Ω^i индекс α_i и обозначим через I^i — цикл, принадлежащий алгебре A_{α_i}. По условию, $I^i = \{a^i_0, a^i_1, \ldots, a^i_{n-1}\}$. Положим $\Pi^k = \{a^i_k \mid i \in \overline{\Omega}\}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Подмножества Π^k вместе с одноэлементными подмножествами из $A \setminus \bigcup \Pi^k$ определяют разбиение множества A. Легко проверяется, что соответствующая эквивалентность оказывается конгруэнцией из $\Theta(A)$, которую обозначим через π. Ясно, что π обладает свойствами, указанными в лемме 9. Пусть $\delta^i \geqslant \theta^i$ и $\alpha, \beta \in \Omega^i$. Так как $\alpha \sim \beta$, то $(x, y) \in \theta$ для некоторых $x \in A_\alpha$ и $y \in A_\beta$. Разумеется, $(x, y) \in \theta^i$, а значит $(x, y) \in \delta^i$. В силу лемм 6 и 8, δ^i имеет дополнение в $\theta(A_i)$. Но тогда из леммы 9 вытекает существование дополнения и к конгруэнции θ.

Лемма 10. Если унарная алгебра A содержит неодноэлементные подалгебры B и D, причем $B\cong D$, $B\cap D=\varnothing$, то структура конгруэнций $\Theta(A)$ не дедекиндова.

Доказательство. Пусть φ изоморфизм подалгебры B на подалгебру D. Определим на A отношения σ, ρ, τ, полагая

$$x\sigma y_{\mathrm{def}} = \boxed{x\in B,\ y=\varphi(x),\ \text{или}\ x\in D,\ y=\overset{-1}{\varphi}(x),\ \text{или}\ x=y},$$

$$x\rho y_{\mathrm{def}} = \boxed{x, y\in B,\ \text{или}\ x=y}$$

и

$$x\tau y_{\mathrm{def}} = \boxed{x, y\in D,\ \text{или}\ x, y\in B\ \text{или}\ x=y}.$$

Ясно, что σ, ρ, $\tau\in\Theta(A)$ и $\mathbf{O}_A<\rho<\tau$. Предположим, что $(x, y)\in\tau\vee\sigma$. Это означает, что существует цепочка различных элементов $x=z_1, z_2, \ldots, z_r=y$ таких, что $(z_i, z_{i+1})\in\tau$ или $(z_i, z_{i+1})\in\sigma$, где $1\leqslant i\leqslant r-1$. Если $(z_i, z_{i+1})\in\tau$ и z_i, $z_{i+1}\in B$, то $(z_i, z_{i+1})\in\rho$. Если же z_i, $z_{i+1}\in D$, то, поскольку $B\cong D$, существуют b_1, $b_2\in B$, такие, что $\varphi(b_1)=z_i$, $\varphi(b_2)=z_{i+1}$. Отсюда $(z_i, b_1)\in\sigma$, $(b_1, b_2)\in\rho$ и $(b_2, z_{i+1})\in\sigma$, то есть $(z_i, z_{i+1})\in\sigma\vee\rho$. Следовательно, $(x, y)\in\rho\vee\sigma$, то есть $\tau\vee\sigma\leqslant\rho\vee\sigma$. Легко доказать, что $\tau\wedge\sigma=\rho\wedge\sigma=\mathbf{O}_A$. Таким образом, структура конгруэнций $\Theta(A)$ содержит недедекиндову пятиэлементную подструктуру $\{\mathbf{O}_A, \sigma, \rho, \tau, \tau\vee\sigma\}$ и, следовательно, $\Theta(A)$ не дедекиндова.

Лемма 11. Пусть унарная алгебра A содержит подалгебру C, обладающую следующими свойствами:

1) существуют элементы a, $b\in C$ такие, что $f(a)$, $f(b)\in C$ и $f(a)\neq f(b)$;

2) найдутся x, $y\in C$ такие, что $f(a)=f(x)$ и $f(b)=f(y)$.

Тогда структура конгруэнций $\Theta(A)$ не дедекиндова.

Доказательство. Определим на A отношения эквивалентности

$$u\rho v_{\mathrm{def}} = \boxed{u, v\in C,\ \text{или}\ u=v},$$

$$u\sigma v_{\mathrm{def}} = \boxed{\begin{array}{l} u=x,\ v=a,\ \text{или}\ u=a,\ v=x,\ \text{или}\ u=y,\ v=b \\ u=b,\ v=y,\ \text{или}\ u=v, \end{array}}$$

и

$$u\tau v_{\mathrm{def}} = \boxed{u, v\in C,\ \text{или}\ u=a,\ v=b,\ \text{или}\ u=b,\ v=a,\ \text{или}\ u=v}.$$

Очевидно, $\tau, \sigma, \rho \in \Theta(A)$, причем $\mathbf{O}_A < \rho < \tau$ и $\rho \wedge \sigma = \tau \wedge \sigma = \mathbf{O}_A$. Предположим, что $(u, v) \in \tau \vee \sigma$, то есть существует цепочка различных элементов $u = z_1, z_2, \ldots, z_r = v$ таких, что $(z_i, z_{i+1}) \in \tau$ или $(z_i, z_{i+1}) \in \sigma$ для $1 \leqslant i \leqslant r-1$. Допустим, что $(z_i, z_{i+1}) \in \tau$. Если $z_i, z_{i+1} \in C$, то $(z_i, z_{i+1}) \in \rho$. Если же $z_i, z_{i+1} \in C$, то имеем, например, $z_i = a$, $z_{i+1} = b$. Поэтому $z_i \sigma x$ и $y \sigma z_{i+1}$. Но $x, y \in C$, а значит $(x, y) \in \rho$. Итак, $(z_i, z_{i+1}) \in \tau$ влечет $(z_i, z_{i+1}) \in \rho \vee \sigma$, откуда $\tau \vee \sigma \leqslant \rho \vee \sigma$. Поскольку обратное включение очевидно, имеем $\tau \vee \sigma = \rho \vee \sigma$. Таким образом, получена недедекиндова пятиэлементная подструктура $\{\mathbf{O}_A, \sigma, \rho, \tau, \tau \vee \sigma\}$, то есть структура $\Theta(A)$ не дедекиндова.

Лемма 12. Если унарная алгебра $A = B \cup \{x, y, z\}$, где B — подалгебра и существует $a_0 \in B$, $f(a_0) = f(x) = f(y) = f(z) = a_1$, x, y, z — различные элементы, не принадлежащие B, то структура конгруэнций $\Theta(A)$ не дедекиндова.

Доказательство. Рассмотрим на A отношения ρ, σ, τ, положив

$$u \rho v \underset{\text{def}}{=} \boxed{u = a_0,\ v = x, \text{ или } u = x,\ v = a_0, \text{ или } u = v},$$

$$u \sigma v \underset{\text{def}}{=} \boxed{\begin{array}{c} u = z,\ v = x, \text{ или } u = x,\ v = z, \text{ или } u = y,\ v = a_0, \\ \text{или } u = a_0,\ v = y, \text{ или } u = v \end{array}}$$

и

$$u \tau v \underset{\text{def}}{=} \boxed{\begin{array}{c} u = a_0,\ v = x \text{ или } u = x,\ v = a_0, \text{ или } u = y,\ v = z, \\ \text{или } u = z, v = y, \text{ или } u = v. \end{array}}$$

Очевидно, что $\rho, \sigma, \tau \in \Theta(A)$ и $\rho < \tau$. Пусть $(u, v) \in \sigma \vee \tau$. Тогда существует цепочка различных элементов $u = t_1, t_2, \ldots, t_r = v$ таких, что каждая пара соседних элементов сравнима по σ или τ. Если $(t_i, t_{i+1}) \in \tau$, то $(t_i, t_{i+1}) = (y, z)$, (a_0, x), (z, y), (x, a_0). В первом случае имеем $(y, a_0) \in \sigma$, $(a_0, x) \in \rho$ и $(x, z) \in \sigma$, то есть $(t_i, t_{i+1}) \in \rho \vee \sigma$, во втором случае — $(t_i, t_{i+1}) \in \in \rho \leqslant \rho \vee \sigma$. Последние два случая рассматриваются аналогично. Таким образом, $\sigma \vee \tau \leqslant \rho \vee \sigma$. Обратное включение очевидно, ибо $\rho \leqslant \tau$. Итак, $\sigma \vee \tau = \rho \vee \sigma$. Нетрудно проверить, что $\rho \wedge \sigma = \tau \wedge \sigma = \mathbf{O}_A$. Отсюда следует, что $\Theta(A)$ обладает недедекиндовой пятиэлементной подструктурой $\{\mathbf{O}_A, \rho, \tau, \sigma, \rho \vee \sigma\}$, то есть $\Theta(A)$ не дедекиндова.

Лемма 13. Пусть A содержит цикл $C=\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ и $f(x)=a_1$ для всех $x\in A\setminus C$. Тогда:

1) если $\theta\in\Theta(A)$, $b\in A\setminus C$ и $(b, a_k)\in\theta$, то $(b, a_0)\in\theta$;

2) если α, $\beta\in\Theta(A)$, u, $v\in C$ и $(u, v)\in\alpha\vee\beta$, то $(u, v)\in\in\alpha_C\vee\beta_C$, где через θ_C обозначена конгруэнция, которую θ индуцирует на цикле.

Доказательство. Конгруэнция θ_C определяется числом d, делящим n. Поскольку $a_1\theta_C a_{k+1}$, то d делит k. Отсюда $a_k\theta a_0$ и по транзитивности $b\theta a_0$. Пусть u, $v\in C$ и $(u, v)\in\alpha\vee\beta$. Тогда существует цепочка различных элементов $u=z_1$, z_2, ..., $z_r=v$ таких, что $(z_i, z_{i+1})\in\alpha$ или β. Если все $z_i\in C$, то $(u, v)\in\alpha_C\vee\beta_C$. Допустим, что z_i, $z_j\overline{\in}C$, $z_s\in C$ при $s=1, \ldots, i-1$, $j+1, \ldots, r$, и, например, $(z_{i-1}, z_i)\in\alpha$, $(z_j, z_{j+1})\in\beta$. Тогда, по только что доказанному, $(z_i, a_0)\in\alpha$ и $(z_j, a_0)\in\beta$, по транзитивности $(z_{i-1}, a_0)\in\alpha$ и $(a_0, z_{j+1})\in\beta$. Но z_{i-1}, a_0, $z_{i+1}\in C$. Отсюда $(z_{i-1}, a_0)\in\alpha_C$, $(a_0, z_{j+1})\in\beta_C$ и $(z_{i-1}, z_{i+1})\in\alpha_C\vee\beta_C$. Следовательно, u и v соединены цепочкой элементов, принадлежащих циклу, причем каждая пара соседних элементов сравнима по α_C или по β_C. Таким образом, $(u, v)\in\alpha_C\vee\beta_C$.

Лемма 14. Если $A=C\cup\{x\}$, где $x\overline{\in}C$, $f(x)\in C$ и $C=\{a_0, a_1, ..., a_{n-1}\}$ — цикл, то структура конгруэнций $\Theta(A)$ дистрибутивна.

Доказательство. Пусть $(u, v)\in(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma$, где α, β, $\gamma\in\Theta(A)$. Если u, $v\in C$, то по лемме 13 $(u, v)\in\gamma_C$ и $(u, v)\in\alpha_C\vee\beta_C$. Как известно, $\Theta(C)$—дистрибутивная структура. Поэтому $(u, v)\in(\alpha_C\vee\beta_C)\wedge\gamma_C=(\alpha_C\wedge\gamma_C)\vee(\beta_C\wedge\gamma_C)==(\alpha\wedge\gamma)_C\vee(\beta\vee\gamma)_C\leqslant(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$. Предположим теперь, что $u\in C$ и $(u, x)\in(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma$. В силу леммы 13, $(a_0, x)\in(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma$, то есть $(a_0, x)\in\gamma$ и $(a_0, x)\in\alpha\vee\beta$. Существует цепочка $a_0=z_1$, z_2, ..., $z_r=x$ различных элементов, соединяющая a_0 с x таких, что каждая пара соседних элементов сравнима по α или по β. Если $(x, z_{r-1})\in\alpha$, то по лемме 13 $(x, a_0)\in\alpha$. Аналогично $(z_{r-1}, x)\in\beta$ влечет $(x, a_0)\in\beta$. Отсюда следует, что $(a_0, x)\in(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$. Поскольку $(u, x)\in(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma$ и $(x, a_0)\in(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma$, то $(u, a_0)\in(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma$, где u, $a_0\in C$. Отсюда, в силу уже доказанного, имеем $(u, a_0)\in(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$, откуда $(u, x)\in(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$. Таким образом, в обоих случаях $(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma\leqslant(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$. Обратное включение общеизвестно. Следовательно, $\Theta(A)$ — дистрибутивная структура.

Лемма 15. Пусть $A=B\cup\{x, y\}$, где x, $y\overline{\in}B$, $f(x)=f(y)=$

$=a_1 \in B$, $x \neq y$, B — подалгебра, $a_0 \in B$ и $f(a_0)=a_1$. Тогда структура конгруэнций $\Theta(A)$ не дистрибутивна.

Доказательство. Определим на A отношения, положив

$$u\alpha v_{\text{def}} = \boxed{u=x,\ v=y, \text{ или } u=y,\ v=x, \text{ или } u=v},$$

$$u\beta v_{\text{def}} = \boxed{u=x,\ v=a_0, \text{ или } u=a_0,\ v=x, \text{ или } u=v},$$

$$u\gamma v_{\text{def}} = \boxed{u=y,\ v=a_0, \text{ или } u=a_0,\ v=y, \text{ или } u=v}$$

и

$$u\theta v_{\text{def}} = \boxed{\begin{array}{c} u=x,\ v=y, \text{ или } u=y,\ v=x, \text{ или } u=x,\ v=a_0, \\ \text{или } u=a_0,\ v=x, \text{ или } u=y,\ v=a_0, \text{ или } u=a_0, \\ v=y \text{ или } u=v. \end{array}}.$$

Ясно, что α, β, γ, $\theta \in \Theta(A)$, причем $\alpha \vee \gamma = \alpha \vee \beta = \beta \vee \gamma = \theta$, $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \gamma = \beta \wedge \gamma = 0_A$. Следовательно, $\Theta(A)$ содержит недистрибутивную пятиэлементную подструктуру $\{0_A, \alpha, \beta, \gamma, \theta\}$, то есть $\Theta(A)$ не дистрибутивна.

Лемма 16. Если унарная алгебра $A=B \cup C \cup D$, где B, C, D — различные связные компоненты, возможно, одноэлементные, то $\Theta(A)$ не дистрибутивна.

Доказательство. Пусть отношение α на A склеивает компоненты B и C в один класс, а D — во второй, отношение β склеивает B и D в один класс, C — во второй, γ склеивает C и D в один класс, B—во второй, отношение ρ склеивает элементы B в один класс, C — во второй, D — в третий и отношение σ склеивает все три компоненты в один класс. Легко доказать, что α, β, γ, ρ, $\sigma \in \Theta(A)$, причем $\alpha \vee \beta = \alpha \vee \gamma = \beta \vee \gamma = \sigma$ и $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \gamma = \beta \wedge \gamma = \rho$. Следовательно, $\Theta(A)$ обладает недистрибутивной пятиэлементной подструктурой $\{\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma\}$, то есть $\Theta(A)$ не дистрибутивна.

Лемма 17. Пусть унарная алгебра A является объединением k одноэлементных циклов, возможно, имеющих короткие хвосты.

Тогда:

(1) Структура конгруэнций $\Theta(A)$ дедекиндова тогда и только тогда, когда $k \leqslant 3$, причем, самое большее, один цикл имеет хвосты, число которых не превосходит двух;

(2) структура $\Theta(A)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда $k \leqslant 2$, причем, самое большее, один цикл имеет хвост и при том только один.

Доказательство. Пусть $\Theta(A)$ — дедекиндова структура и A содержит четыре одноэлементных цикла $x=f(x)$, $y=f(y)$, $z=f(z)$, $t=f(t)$. Тогда неодноэлементные подалгебры $B=\{x, y\}$ и $C=\{z, t\}$ изоморфны. Следовательно, по лемме 10 получаем противоречие. Итак, алгебра A не содержит четырех одноэлеметных циклов. Предположим теперь, что два одноэлементных цикла $x=f(x)$, $y=f(y)$ имеют хвосты: $f(a)=x$ и $f(b)=y$. Снова в алгебре A существует две неодноэлементные, изоморфные подалгебры $B=\{a, x\}$ и $C=\{b, y\}$. Противоречие. Таким образом, только один одноэлементный цикл может иметь короткие хвосты, причем, в силу леммы 12, число хвостов не превосходит двух.

Допустим, что $\Theta(A)$ — дистрибутивная структура и A состоит из одноэлементных циклов с короткими хвостами. Ввиду только что доказанного и лемм 15 и 16, A содержит не более двух одноэлементных циклов и только один цикл может иметь один короткий хвост.

С другой стороны, пусть алгебра A удовлетворяет условиям леммы. Если A состоит из двух одноэлементных циклов, то $\Theta(A)$ — двухэлементная цепь $\{0_A, 1_A\}$. Если же один из этих циклов имеет короткий хвост, то структура конгруэнций $\Theta(A)$ четырехэлементна, причем две нетривиальные конгруэнции не сравнимы, то есть $\Theta(A)$ дистрибутивна. Если A состоит из трех одноэлементных циклов, или один из них имеет два или один короткий хвост, то соответствующие структуры конгруэнций изображены на рис. 1, 2 и 3. Ясно, что они самодуальны. С другой стороны, в силу результатов Бермана [4], стр. 38, теорема 3), они полумодулярны сверху. Следовательно, все эти

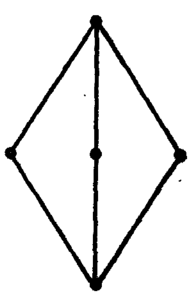

Рис. 1

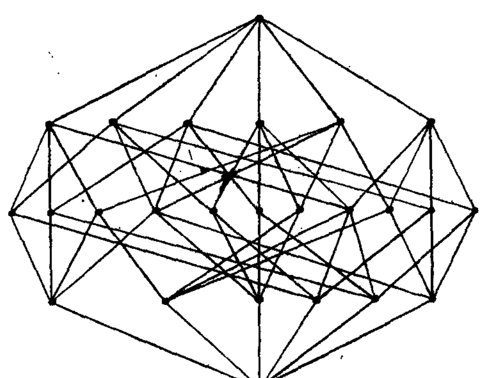

Рис. 2

структуры дедекиндовы (см. например, [2], стр. 105, теорема 13).

Теорема 2. Структура конгруэнций $\Theta(A)$ унарной алгебры A является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда A — или цикл, длина которого свободна от квадратов, или такой же цикл с одним коротким хвостом, или объединение не более чем двух одноэлементных циклов, причем только один из них может иметь один короткий хвост.

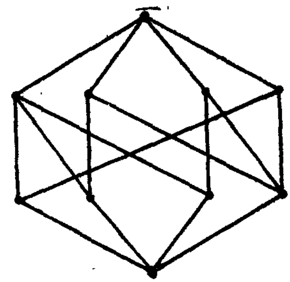

Рис. 3

Доказательство. Необходимость высказанных условий следует из теоремы 1 и лемм 10, 11, 15, 16, 17, а достаточность — из лемм 6, 14, 17.

Теорема 3. Структура конгруэнций унарной алгебры A является дедекиндовой структурой с дополнениями тогда и только тогда, когда A или цикл C, длина которого свободна от квадратов, или такой же цикл с не более чем двумя короткими хвостами $x, y \notin C$, причем $f(x)=f(y)$, или объединение не более, чем трех одноэлементных циклов, один из которых может иметь один или два коротких хвоста.

Доказательство. Допустим, что $\Theta(A)$ — дедекиндова структура с дополнениями. Из теоремы 1, лемм 10, 11, 12, 17 вытекает необходимость условий теоремы. Для доказательства достаточности, в силу лемм 6, 14 и 17, остается установить дедекиндовость структуры $\Theta(A)$, когда $A=C\cup\{x, y\}$, $C=\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, $x, y \notin C$, $x\neq y$, $f(x)=f(y)=a_1$ и $|C|$ свободна от квадратов. Для произвольных элементов $u, v\in A$ таких, что $(u, v)\in(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma$, где α, β, $\gamma\in\Theta(A)$ и $\alpha\leqslant\gamma$, имеются три возможности: 1) $u, v\in C$; 2) $u, v\notin C$; 3) $u\in C$, $v\notin C$. Если $u, v\in C$, то, применяя лемму 13 и учитывая дистрибутивность структуры Θ (C), получаем $(u, v)\in\alpha_C\vee(\beta_C\wedge\gamma_C)\leqslant\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)$. Во втором случае возьмем $u=x$, $v=y$. Тогда $(x, y)\in\gamma$ и $(x, y)\in\alpha\vee\beta$, значит существует цепочка различных элементов $x=t_1, t_2, \ldots, t_r=y$ таких, что каждая пара соседних элементов сравнима по α или по β. Допустим, что $r=2$. Тогда $(x, y)\in\alpha$ или $(x, y)\in\beta$, откуда $(x, y)\in\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)$. Пусть $r>2$, следовательно, $t_2\in C$, $t_{r-1}\in C$ и $(x, t_2)\in\alpha$, $(t_{r-1}, y)\in\alpha$, или $(x, t_2)\in\beta$, $(t_{r-1}, y)\in\beta$, или $(x, t_2)\in\alpha$, $(t_{r-1}, y)\in\beta$ или $(x, t_2)\in\beta$, $(t_{r-1}, y)\in\alpha$. В силу леммы 13, получим $(x, y)\in\alpha$, или $(x, y)\in\beta$, или $(x, a_0) \in \alpha$, $(a_0, y) \in \beta$, или $(x, a_0) \in \beta$, $(a_0, y) \in \alpha$. В первых двух случаях справедливость включения $(x, y) \in \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$ тривиальна. Третий и четвертый случаи рассматриваются аналогично, поэтому возьмем $(x, a_0) \in \alpha$, $(a_0, y) \in \beta$. Так как $\alpha \leqslant \gamma$, то $(x, a_0) \in \gamma$. Но $(x, y) \in \gamma$, значит $(a_0, y) \in \beta \wedge \gamma$. Отсюда $(x, y) \in \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$. Если $u \in C$, $v \in C$, например, $v = x$, то, в силу леммы 13, $(x, a_0) \in (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$. Отсюда $(u, a_0) \in (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$, и, в силу уже доказанного, $(u, a_0) \in \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$. Поскольку $(a_0, x) \in (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$, то существует цепочка различных элементов $a_0 = t_1, t_2, \ldots, t_r = x$ таких, что $(t_i, t_{i+1}) \in \alpha$ или β. Если $t_{r-1} \neq y$, то $t_{r-1} \in C$ и $(t_{r-1}, x) \in \alpha$ или $(t_{r-1}, x) \in \beta$. В первом случае по лемме 13 $(x, a_0) \in \alpha$ и, значит, $(x, a_0) \in \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$. Во втором случае имеем $(x, a_0) \in \beta$ и $(x, a_0) \in \gamma$, откуда $(x, a_0) \in \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$. Если $t_{r-1} = y$, то $t_{r-2} \in C$ и $(y, x) \in \alpha$, $(t_{r-2}, y) \in \beta$ или $(y, x) \in \beta$, $(t_{r-2}, y) \in \alpha$. Если $(x, y) \in \alpha$, то $(x, y) \in \gamma$, откуда $(a_0 y) \in (\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$. Кроме того, $(t_{r-2}, y) \in \beta$, откуда $(a_0, y) \in \beta$ по лемме 13. Следовательно, $(a_0, y) \in \beta \wedge \gamma$, а значит $(a_0, x) \in \alpha V (\beta \wedge \gamma)$. Если же $(x, y) \in \beta$, то имеем $(y, t_{r-2}) \in \alpha$, что влечет $(a_0, y) \in \alpha$. Так как $\alpha \leqslant \gamma$, то $(a_0, y) \in \gamma$ и, поскольку $(x, a_0) \in \gamma$, $(x, y) \in \gamma \wedge \beta$. Отсюда $(a_0, x) \in \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$. Таким образом, $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \leqslant \alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$. Ввиду очевидности обратного неравенства, дедекиндовость структуры $\Theta(A)$ доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кон П. Универсальная алгебра. М., 1968.
2. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М., 1970.
3. Скорняков Л. А. Дополнения в структуре конгруэнций. — Матем. сб., 1972, 88, № 5, 148—181.
4. Berman J. On the congruence lattices of unary algebras. — Pros. Amer. Math. Soc., 1972, 36, N 1, 34—38.

Г. И. ЖИТОМИРСКИЙ

О ТОЧНЫХ ДИАГРАММАХ В КАТЕГОРИЯХ РЕШЕТОК

В статье вводится понятие точной диаграммы в категориях универсальных алгебр и доказываются две теоремы о точных диаграммах в категориях решеток с нулем и единицей.

1. Пусть **К** — произвольная категория, относительно которой будем предполагать только следующее: каждый ее морфизм есть произведение некоторого полярного эпиморфизма и

мономорфизма. Напомним, что эпиморфизм $\eta: A \longrightarrow B$ называется полярным, если для любого морфизма $\varphi: A \longrightarrow C$ такого, что при любых $\alpha, \beta: X \longrightarrow A$

$$\eta\circ\alpha=\eta\circ\beta \Longrightarrow \varphi\circ\alpha=\varphi\circ\beta,$$

существует $\gamma: B \longrightarrow C$, при котором $\varphi=\gamma\circ\eta$. Относительно этого и других используемых ниже понятий теории категорий см. [1], универсальных алгебр — [2].

Всякое представление $\varphi=\nu\circ\eta$, где η — полярный эпиморфизм, а ν — мономорфизм, будем называть поляризацией морфизма φ; ясно, что η и ν определяются здесь однозначно с точностью до изоморфизма.

Рассмотрим диаграмму

$$A' \xrightarrow{\nu} A \xrightarrow{\eta} A''. \qquad (1)$$

Она называется согласованной, если определяемый поляризацией морфизма $\eta\circ\nu$ коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\xi"'] & {} \arrow[d, "\eta"] \\ {} \arrow[r, "\lambda"'] & {} \end{tikzcd} \qquad (2)$$

является одновременно универсальным и коуниверсальным.

Легко заметить, что при выполнении этого условия η оказывается полярным эпиморфизмом, а ν — мономорфизмом. Если согласованная диаграмма (1) такова, что для любой другой согласованной диаграммы $A' \xrightarrow{\nu} A \xrightarrow{\varphi} B$ имеет место $\eta=\gamma\circ\varphi$ для некоторого γ, то (1) называется согласованной точной диаграммой, при этом ν называется факторизуемым мономорфизмом, а однозначно определенный факторобъект $[\eta, A'']$ объекта A называется фактором A по подобъекту $[A', \nu]$, что записывается в виде $[\eta]=\mathrm{Fact}\,\nu$.

Пусть $\varphi=\gamma\circ\eta$ — поляризация, положим $\mathrm{Ep}\,\varphi=[\eta]$ и, если ν факторизуем, то $\mathrm{Fact}\,\varphi=\mathrm{Fact}\,\nu$.

Диаграмма $B \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} C$ называется точной, если $Ep\,\psi=\mathrm{Fact}\,\varphi$. Ясно, что это эквивалентно существованию таких полярных эпиморфизмов η и ξ и таких мономорфизмов ν и μ, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & & C \\
A' \arrow[r, "\nu"] & A \arrow[r, "\eta"'] \arrow[ur, "\psi"] & A'' \arrow[u, "\mu"'] \\
B \arrow[u, "\xi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd} \qquad (3)$$

коммутативна и ее строка точна.

Если **K** — категория с нулём и в диаграмме (1) $\eta\circ\nu=O_{A''A'}$, то нетрудно показать, что эта диаграмма согласована, а в этом случае и точна тогда и только тогда, когда $\nu=\ker\eta$ и $\eta=\operatorname{coker}\nu$. Таким образом, наше понятие точной диаграммы можно считать распространением соответствующего понятия из теории категорий с нулем на более широкий класс категорий; оно должно работать в теории универсальных алгебр в тех случаях, когда рассматриваемые категории не обладают нулем.

Теорема 1. Пусть **K** — полная подкатегория категории всех универсальных алгебр сигнатуры Ω (операции могут быть и бесконечноместными) и их гомоморфизмов, замкнутая относительно гомоморфных образов и обладающая хотя бы одной свободной алгеброй над непустым множеством. Тогда диаграмма $B\xrightarrow{\varphi}A\xrightarrow{\psi}C$ этой категории точна тогда и только тогда, когда выполняются условия: (1) $\varphi(B)$ насыщено относительно ядра (ядерной конгруэнтности) ψ, то есть

$$(\overset{-1}{\psi}\circ\psi)(\varphi(B))\subset\varphi(B).$$

(2). Ядерная конгруэнтность ψ порождается своим следом на $\varphi(B)$, то есть всякая конгруэнтность ε, для которой $\overset{-1}{\psi}\circ\psi\cup\varphi(B)\times\varphi(B)=\varepsilon\cap\varphi(B)\times\varphi(B)$, содержит $\overset{-1}{\psi}\circ\psi$;
(3) для всякой конгруэнтности ε в A, относительно которой $\varphi(B)$ насыщено, имеет место $\varepsilon\cap\varphi(B)\times\varphi(B)\subset\overset{-1}{\psi}\circ\psi$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $\mathbf{K}$-мономорфизмы и полярные $\mathbf{K}$-эпиморфизмы — это, соответственно, инъективные и сюръективные гомоморфизмы, причем каждый гомоморфизм из $\mathbf{K}$ естественно представляется в виде произведения сюръективного и инъективного гомоморфизмов. Поэтому можно воспользоваться коммутативной диаграммой (3). Точность диаграммы $B\xrightarrow{\varphi}A\xrightarrow{\psi}C$ эквивалентна точности диаграммы $A'\xrightarrow{\nu}A\xrightarrow{\eta}A''$, где ν — инъективный, а η — сюръективный гомоморфизмы, причем $\varphi(B)=\nu(A')$ и $\eta^{-1}\circ\eta=\psi^{-1}\circ\psi$.

Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\xi"'] & A \arrow[d, "\eta"] \\ Q \arrow[r, "\lambda"'] & A'' \end{tikzcd} \qquad (4)$$

где ζ сюръективно, а λ инъективно.

Лемма 1. Квадрат (4) коуниверсален тогда и только тогда, когда $(\eta^{-1}\circ\eta)(\nu(A'))\subset\nu(A')$.

Действительно, пусть квадрат (4) коуниверсален. Предположим, что $a_1\in\nu(A')$ и $(a_1, a_2)\in\eta^{-1}\circ\eta$. Найдется $a_1'\in A'$ такой, что $a_1=\nu(a_1')$, положим $q=\zeta(a_1')$. Теперь возьмем свободную алгебру X в категории $\mathbf{K}$, например, с одним порождающим элементом x и построим гомоморфизмы $\alpha: X\longrightarrow A$ и $\beta: X\longrightarrow Q$, полагая $\alpha(x)=a_2$ и $\beta(x)=q$. Ясно, что $\eta\circ\alpha=\lambda\circ\beta$, поэтому найдется такой гомоморфизм $\gamma: X\to A'$, что $\alpha=\nu\circ\gamma$, отсюда следует, что $a_2\in\nu(A')$. Мы доказали: $(\eta^{-1}\circ\eta)(\nu(A'))\subset\nu(A')$. Обратно, если это включение имеет место, то из равенства $\eta\circ\alpha=\lambda\circ\beta$ для некоторых $\alpha: E\longrightarrow A$ и $\beta: E\longrightarrow Q$ сразу следует, что $\alpha(E)\subset\nu(A')$. Поэтому существует $\gamma: E\longrightarrow A'$, при котором $\alpha=\nu\circ\gamma$. Этим равенством γ определено однозначно, и далее $\lambda\circ\beta=\eta\circ\alpha=\eta\circ\nu\circ\gamma=\lambda\circ\zeta\circ\gamma$, следовательно, $\beta=\zeta\circ\gamma$. Мы доказали, что квадрат (4) коуниверсален.

Лемма 2. Квадрат (4) универсален тогда и только тогда, когда $\eta^{-1}\circ\eta$ порождается отношением $\eta^{-1}\circ\eta\cap\nu(A')\times\nu(A')$.

Действительно, если квадрат (4) универсален, то для любого гомоморфизма $\alpha: \dot{A} \longrightarrow E$ такого, что $\overset{-1}{\alpha}\circ\alpha \cap \nu(A') \times \nu(A') = \overset{-1}{\eta}\circ\eta \cap \nu(A') \times \nu(A')$ получаем: ядро (конгруэнтность) $\alpha\circ\nu$ рано ядру $\eta\circ\nu$ и, следовательно, совпадает с ядром ζ, поэтому существует $\beta: Q \longrightarrow E$, при котором $\alpha\circ\nu = \beta\circ\zeta$, последнее влечет $\alpha = \gamma\circ\eta$ для некоторого $\gamma: A'' \longrightarrow E$, а это значит, что $\overset{-1}{\eta}\circ\eta \subset \overset{-1}{\alpha}\circ\alpha$.

Обратно, пусть $\overset{-1}{\eta}\circ\eta$ порождается своим следом на $\nu(A')$. Если $\alpha: A \longrightarrow E$ и $\beta: Q \longrightarrow E$ таковы, что $\alpha_0\nu = \beta\circ\zeta$, то

$$\overset{-1}{\alpha}\circ\alpha \cap \nu(A') \times \nu(A') = \overset{-1}{\nu}\circ\overset{-1}{\nu}\circ\overset{-1}{\alpha}\circ\alpha\circ\nu\circ\nu = \nu\circ\overset{-1}{\zeta}\circ\overset{-1}{\beta}\circ\beta\circ\zeta\circ\overset{-1}{\nu} =$$

$$= \overset{-1}{\eta}\circ\eta \cap \nu(A') \times \nu(A')$$

и потому $\overset{-1}{\eta}\circ\eta \subset \overset{-1}{\alpha}\circ\alpha$. Последнее влечет существование такого γ, что $\alpha = \gamma\circ\eta$; γ этим равенством определено однозначно и $\beta = \gamma\circ\lambda$, значит, квадрат (4) универсален.

Таким образом, выполнение условий (1) и (2) равносильно согласованности диаграммы $A' \xrightarrow{\nu} A \xrightarrow{\eta} A''$. Пусть выполнено условие (3). Возьмем какую-нибудь согласованную диаграмму $A' \xrightarrow{\nu} A \xrightarrow{\alpha} E$. Получаем, что $\overset{-1}{\alpha}\circ\alpha \cap \nu(A') \times \nu(A') \subset \overset{-1}{\eta}\circ\eta$ и отсюда, так как $\overset{-1}{\alpha}\circ\alpha$ порождается своим следом на $\nu(A')$, $\overset{-1}{\alpha}\circ\alpha \subset \overset{-1}{\eta}\circ\eta$, следовательно, $\eta = \gamma\circ\alpha$ для некоторого γ. Таким образом, первая диаграмма точна. Обратно, пусть исходная диаграмма точна. Возьмем конгруэнтность ε в A такую, что $\varepsilon(\nu(A')) \subset \nu(A')$, и пусть конгруэнтность θ порождается следом ε на $\nu(A')$. Тогда $\theta(\nu(A')) \subset \nu(A')$ и $\theta \cap \nu(A') \times \nu(A') = \varepsilon \cap \nu(A') \times \nu(A')$. В силу лемм 1 и 2 получаем, что диаграмма $A' \xrightarrow{\nu} A \xrightarrow{\tilde{\theta}} A/\Theta$, где $\tilde{\Theta}$ — канонический гомоморфизм с ядром θ, согласована. Следовательно, $\eta = \gamma\circ\tilde{\Theta}$ для некоторого γ, что дает включение: $\varepsilon \cap \nu(A') \times \nu(A') \subset \overset{-1}{\eta}\circ\eta$. Таким образом, условие (3) выполнено. Теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е. Если в сигнатуре Ω нет символов бесконечноместных операций, то при условиях теоремы 1 каждый мономорфизм категории **K** факторизуем.

Действительно, пусть $\nu: A' \longrightarrow A$ мономорфизм в **K**. Обозначим $\nu(A')$ через H. Среди всех конгруэнтностей в A, относительно которых H насыщено, есть наибольшая — ε; обозначим через $\varepsilon_H{}^A$ конгруэнтность, порожденную отношением $\varepsilon \cap H \times H$, а фактор-алгебру по этой конгруэнтности — через A/H. Тогда по доказанной теореме диаграмма $A' \xrightarrow{\nu} A \xrightarrow{\eta} A/H$, где η — канонический эпиморфизм, точна, т. е. $[\eta] = \mathrm{Fact}\,\nu$.

В точных диаграммах такого вида (диаграмма (1), ν — мономорфизм, η — полярный эпиморфизм) уместно назвать A расширением A' посредством A''. Например, в категории (Ω) (все операции конечноместны) всякая Ω — алгебра A является расширением своей подалгебры A' посредством алгебры A/A'.

2. В этом пункте **K** — категория всех решеток с сигнатурными 0 и 1 и их гомоморфизмов. Поскольку это — многообразие алгебр в сигнатуре $(0, 1, \vee, \wedge)$, то условия теоремы 1 и ее следствия выполняются тривиально.

Теорема 2. Всякая дистрибутивная решетка, являющаяся расширением булевой решетки посредством булевой решетки, тоже является булевой.

Доказательство. Пусть L — дистрибутивная решетка с 0 и 1, S — ее подрешетка, содержащая 0 и 1, и $\nu : S \to L$, $\eta : L \to L/S$ — канонические гомоморфизмы, т. е. имеем точную диаграмму $S \xrightarrow{\nu} L \xrightarrow{\eta} L/S$. Надо доказать, что если S и L/S — решетки с дополнениями, то таковой же является L.

Возьмем $a \in L$, найдется такой элемент $\bar{a} \in L$, что $\eta(a \wedge \bar{a}) = 0$ и $\eta(a \vee \bar{a}) = 1$. Из условия (1) предыдущей теоремы получаем, что $(a \wedge \bar{a}) \in S$ и $(a \vee \bar{a}) \in S$. Пусть u и v, соответственно, дополнения этих элементов в решетке S. Положим $a' = (\bar{a} \wedge u) \vee v = (\bar{a} \vee v) \wedge u$. Тривиальный подсчет показывает, что a' — дополнение a в решетке L, что доказывает теорему.

3. Пусть $\mathfrak{m}$ — кардинальное число. Мы здесь рассматриваем решетки с 0 и 1, в которых каждое индексированное семейство элементов $(x_i)_{i \in I}$ при $|I| = \mathfrak{m}$ имеет точную верхнюю грань $\bigvee_{i \in I} x_i$. Такие решетки мы будем рассматривать как алгебры с двумя нульарными, двумя бинарными и одной $\mathfrak{m}$-арной операцией. Все такие решетки и их гомоморфизмы (как алгебр указанного типа) образуют категорию, которую мы обозначим $\mathbf{K}_\mathfrak{m}$. Если $\mathfrak{m}$ конечно, то $\mathbf{K}_\mathfrak{m}$ естественно отождествляется с категорией **K**, рассмотренной в предыдущем пункте. Нетрудно заметить, что категория $\mathbf{K}_\mathfrak{m}$ при любом кардинальном $\mathfrak{m}$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Обозначим двухэлементную решетку символом O. Для произвольной решетки L из $\mathbf{K}_\mathfrak{m}$ существует единственный гомоморфизм: $O \to L$, то есть O — инициальный объект категории

K_m (однако, не нуль). Легко заметить, что диаграмма $O \to S' \xrightarrow{\nu} L$ в категории K_m точна тогда и только тогда, когда ν мономорфизм. Точность диаграммы $\ldots \to A_i \xrightarrow{\varphi_i} A_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} A_{i+2} \to \ldots$ как обычно означает точность каждой соседней пары стрелок.

Пусть X — произвольное упорядоченное множество, а L — решетка из K_m. Обозначим через $F(X, L)$ множество всех изотонных отображений X и L. На этом множестве, естественно, вводится структура алгебры того же типа, что и L. Таким образом, $F(X, L)$ с указанной структурой есть объект категории K_m. Далее, каждому гомоморфизму $\varphi: S \to L$ категории K_m соответствует гомоморфизм этой же категории $\varphi^*: F(X, S) \to F(X, L)$, определяемый формулой: $\varphi^*(f) = \varphi_0 f$ для любого $f \in F(X, S)$. Ясно, что это соответствие носит функторный характер, и мы получаем ковариантный эндофунктор категории K_m, ассоциированный с упорядоченным множеством X. Следующая теорема говорит о точности этого функтора слева.

Теорема 3. Для любой точной диаграммы

$$0 \to S \xrightarrow{\nu} L \xrightarrow{\eta} T \qquad (*)$$

категории K_m и любого упорядоченного множества X, мощность которого не превосходит $\mathfrak{m}$, точна диаграмма

$$0 \to F(X, S) \xrightarrow{\nu^*} F(X, L) \xrightarrow{\eta^*} F(X, T). \qquad (**)$$

Доказательство. То, что ν^* — мономорфизм, очевидно. Поэтому для доказательства точности диаграммы (**) надо показать, что для пары ν^* и η^* выполняются условия (1), (2), (3) теоремы 1, учитывая, что для пары ν и η эти условия выполняются.

Проверим первое условие. Пусть $f, g \in F(X, L)$ и $\eta \circ f = \eta \circ g$. Тогда, если $f = \eta \circ h$, где $h \in F(X, S)$, то для любого $x \in X$ $f(x) \in \nu(S)$ и $(f(x), g(x)) \in \eta^{-1} \circ \eta$. Отсюда (по условию (1)) $g(x) \in \nu(S)$ для любого $x \in X$. Следовательно, $pr_2 g \subset pr_2 \nu$. Отсюда $g = \nu \circ (\overset{-1}{\nu} \circ g)$ и $(\overset{-1}{\nu} \circ g) \in F(X, S)$. Таким образом, $(\overset{-1}{\eta^*} \circ \eta^*)(pr_2 \nu^*) \subset pr_2 \nu^*$.

Проверим второе условие. Пусть ε — конгруэнтность в $F(X, L)$, след которой на $pr_2 \nu^*$ совпадает со следом на этом множестве конгруэнтности $\overset{-1}{\eta^*} \circ \eta^*$. Каждой паре $(x, a) \in X \times L$ ставим в соответствие изотонное отображение $\pi_a^x: X \to L$ следующим образом:

$$\pi_a^x(u)=\begin{cases}a, \text{ если } u\geqslant x,\\ 0 \text{ в противном случае,}\end{cases}$$

Построим отношение ε_x в L, полагая

$$(a, b)\in\varepsilon_x\leftarrow\rightarrow(\pi_a^x,\pi_b^x)\in\varepsilon.$$

Несложные выкладки показывают, что ε_x—конгруэнтность в L и $\overset{-1}{\eta}\circ\eta\cap pr_2\nu\times pr_2\nu\subset\varepsilon_x$. Из точности диаграммы (*) следует, что $\overset{-1}{\eta}\circ\eta\subset\varepsilon_x$. Возьмем $(f, g)\in\overset{-1}{\eta^*}\circ\eta^*$, то есть для любого $x\in X\,(f(x), g(x))\in\overset{-1}{\eta}\circ\eta$, отсюда по только что доказанному включению получаем $(f(x), g(x))\in\varepsilon_x$, что дает $(\pi^x{}_{f(x)}, \pi^x{}_{g(x)})\in\varepsilon$. Наконец, легко заметить, что $f=\underset{x\in X}{\Upsilon}\pi^x{}_{f(x)}$ и $g=\underset{x\in X}{\Upsilon}\pi^x{}_{g(x)}$, а так как по условию $|X|\leqslant\mathfrak{m}$, то $(f, g)\in\varepsilon^{x\in X}$. Таким образом, $\overset{-1}{\eta^*}\circ\eta^*\subset\varepsilon$.

Перейдем к третьему условию. Каждой конгруэнтности ε в $F(X, L)$ и каждому $x\in X$ поставим в соответствие отношение ε'_x в L:

$$(a, b)\in\varepsilon'_x\leftarrow\rightarrow\underset{(f,g)\in\varepsilon}{\exists}\ \underset{u\in\varepsilon}{\forall}\,(u<x=>f(u)=g(u)=0\wedge f(x)=$$
$$=a\wedge g(x)=b).$$

Обозначим через σ_a^x отображение X в L, полагая для $x\in X$ и $a\in L$:

$$\sigma_a^x(u)=\begin{cases}0, \text{ если } u<x\\ a, \text{ если } u=x\\ 1 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Ясно, что σ_a^x — изотонные отображения. Заметим, что если $f\in F(X, L)$ таково, что $f(u)=0$ для всех $u<x$, то $f\wedge\sigma_0^x=\sigma^x{}_{f(x)}$. Отсюда следует, что $(a, b)\in\varepsilon'_x<=>(\sigma_a^x, b_b^x)\in\varepsilon$. Из этого выражения для ε'_x видно, что при любом $x\in X$ это — конгруэнтность в L.

Если $\varepsilon(pr_2\nu^*)\subset pr_2\nu^*$, то $\varepsilon'_x(pr_2\nu)\subset pr_2\nu$ и потому (точность диаграммы *) $\varepsilon'_x\cap pr_2\nu\times pr_2\nu\subset\overset{-1}{\eta}\circ\eta$. Пусть $(f, g)\in\varepsilon\cap pr_2\nu^*\times pr_2\nu^*$. Тогда $(f\wedge\sigma_1^x, g\wedge\sigma_1^x)\in\varepsilon\cap pr_2\nu^*\times pr_2\nu^*$. Но $(f\wedge\sigma_1^x)(u)=(g\wedge\sigma_1^x)(u)=0$, если $u<x$, и $(f\wedge\sigma_1^x)(x)=f(x)$, $(g\wedge\sigma_1^x)(x)=g(x)$. Поэтому $(f(x), g(x))\in\varepsilon'_x\cap pr_2\nu\times pr_2\nu$, откуда следует $(f(x), g(x))\in\overset{-1}{\eta}\circ\eta$. В силу произвольности $x\in X$ получаем $\eta\circ f=\eta\circ g$. Таким образом, $\varepsilon\cap pr_2\nu^*\times pr_2\nu^*\subset\overset{-1}{\eta^*}\circ\eta^*$.

Теорема доказана.

Следствие. Утверждение предыдущей теоремы имеет место для категории всех решеток с 0 и 1 при любом конечном X и для категории всех полных решеток с сигнатурными 0 и 1 и полных гомоморфизмов при любом X.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цаленко М. С., Шульгейфер Е. Г. Лекции по теории категорий. Изд-во МГУ, 1970.

2. Кон П. Универсальная алгебра. М., 1968.

В. К. ЗАХАРОВ

ОРТОПОПОЛНЕНИЕ МОДУЛЕЙ, КОЛЕЦ И БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

В теории решеточно упорядоченных групп и колец важную роль играют расширения l-группы или l-кольца, каждый элемент которых, в некотором смысле, «локально построен» из элементов исходной l-группы или l-кольца и которые являются наибольшими из всех расширений с этим свойством. К ним относятся максимальное расширение, введенное А. Г. Пинскером ([1]) и Х. Накано ([2]), ортопополнение, введенное С. Бернау ([3]) и латеральное пополнение, построенное Р. Конрадом ([4]).

В данной работе используется эта идея для построения ортопополнения произвольных модулей и колец. В модули и кольца вводится некоторый порядок, относительно которого становится ясным, что ортопополнение модулей и колец является аналогом ортопополнения l-групп и l-колец. Устанавливаются различные свойства этого пополнения. Дается описание ортопополнения модуля как подмодуля делимой относительно плотных идеалов оболочки X, состоящего из всех элементов делимой оболочки, которые «локально построены» из элементов модуля X. Описывается класс колец, для которых ортопополнение модуля совпадает с его делимой оболочкой. В конце приводятся применения к булевым алгебрам.

В работе все кольца будем предполагать коммутативными, полупервичными (то есть без нильпотентных элементов) и с единицами, а модули и гомоморфизмы колец — унитарными. Будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в монографиях [5]—[8].

§ 1. Ортопополнение модулей и колец

Подмножество D кольца R будем называть плотным в R, если D аннулируется только нулевым элементом из R. R-модуль Y называется модулем без кручения относительно фильтра $\mathbf{F}_R$ всех плотных идеалов из R, если никакой ненулевой элемент Y не аннулируется никаким плотным идеалом из R (см. [7]).

Для любого множества $\{u_\alpha \in R \mid \alpha \in A\}$ рассмотрим в Y подмодули $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\}^{\perp\perp} \equiv \{y \in Y \mid (ru_\alpha = 0, \forall \alpha)$ влечет $ry = 0\}$ и $\{u_\alpha \mid \alpha \in A\}^{\perp} \equiv \{y \in Y \mid u_\alpha y = 0, \forall \alpha\}$. Если Y без кручения относительно $\mathbf{F}_R$, то $\{u_\alpha\}^{\perp\perp} \cap \{u_\alpha\}^{\perp} = \{0\}$. Для $u \in R$ будем писать также $Y_u \equiv \{u\}^{\perp\perp}$ и $Y_u^{\perp} \equiv \{u\}^{\perp}$. Назовем модуль YR — ортополным, если: а) для любого $u \in R$ справедливо $Y = Y_u \oplus Y_u^{\perp}$, в) для любой системы попарно ортогональных элементов $\{r_\alpha \in R \mid \alpha \in A\}$ и любого множества $\{y_\alpha \in Y_{r_\alpha} \mid \alpha \in A\}$ существует $y \in Y$ такой, что $r_\alpha(y - y_\alpha) = 0$ для любого $\alpha \in A$ и $ry_\alpha = 0$ для всех α влечет $ry = 0$. Назовем кольцо S ортополным, если S — модуль S является S — ортополным.

Введем в Y частичный порядок, положив $y' \geqslant y''$, если y'' является проекцией y' на некоторый подмодуль $\{u_\alpha \mid \beta \in B\}^{\perp\perp}$, то есть $y' = y'' + y'''$, где $y'' \in \{u_\beta \mid \beta \in B\}^{\perp\perp}$ и $y''' \in \{u_\beta \mid \beta \in B\}^{\perp}$. Если Y ортополон, то можно показать, что для любой системы попарно ортогональных элементов $\{r_\alpha \in R \mid \alpha \in A\}$ и любого множества $\{y_\alpha \in Y_{r_\alpha} \mid \alpha \in A\}$ существует $\sup\limits_\alpha y_\alpha$ относительно данного порядка. Обратно, если в Y выполнено условие а) из определения ортополноты и для любой системы попарно ортогональных элементов $\{r_\alpha \in \mathrm{R} \mid \alpha \in A\}$ и любого множества $\{y_\alpha \in Y_{r_\alpha} \mid \alpha \in A\}$ существует $y = \sup\limits_\alpha y_\alpha$ относительно данного порядка, то в Y выполнено и условие в) и, значит, Y является ортополным модулем. Отсюда следует, что понятие ортополноты R-модулей является прямым аналогом понятия ортополноты l-групп и f-колец.

Назовем модуль Y орторасширением подмодуля X, если для любого $0 \neq y \in Y$ существуют плотная система попарно ортогональных элементов $\{u_i \in R \mid i \in I\}$ и множество $\{x_i \in X \mid i \in I\}$ такие, что $u_i(y - x_i) = 0$ для любого $i \in I$ и $u_i y \neq 0$ для некоторого i. Отметим, что если Y — орторасширение X и X без кручения относительно $\mathbf{F}_R$; то и Y без кручения относительно $\mathbf{F}_R$. Аналогичным образом, кольцо S назовем орторасширением подкольца R, если R — модуль S является орторасширением R — модуля R.

Ортопополнением R-модуля X назовем любой R-ортополный R-модуль Y, являющийся орторасширением X. Ортопополнением кольца R назовем любое кольцо S, являющееся S-ортополным модулем и орторасширением R. Ниже мы докажем существование и единственность ортопополнения модуля и кольца.

Пусть $[x_i, u_i | i \in I]$ обозначает набор, такой, что $\{u_i | i \in I\}$ — система попарно ортогональных элементов из R и $\{x_i | i \in I\}$ — подмножество из X. Будем считать два набора $[x_i, u_i | i \in I]$ и $[x_j, u_j | j \in J]$ θ — эквивалентными, если аннуляторы множеств $\{u_i | i \in I\}$ и $\{u_j | j \in J\}$ совпадают и $u_i u_j (x_i - x_j) = 0$ для любых i и j. Из определения ясно, что если $\{v_j | j \in J\}$ — плотная система в R, то наборы $[x_i, u_i | i \in I]$ и $[r_i, u_i v_j | i \in J, j \in I]$ эквивалентны. Также ясно, что наборы $[x_i, u_i]$ и $[x_i, u_i^2]$ эквивалентны. Набор $[x_i, u_i]$ назовем плотным, если $\{u_i\}$ является плотной системой в R. Если в плотном наборе какую-нибудь часть заменить на эквивалентную, то получится плотный набор, эквивалентный старому. Множество классов Θ — эквивалентных наборов обозначим через $M(X)$. Нетрудно убедиться, что определение операций путем $\Theta[x_i, u_i] + \Theta[x_j, u_j] \equiv \Theta[x_i + x_j, u_i \ u_j | i \in I, j \in J]$ и $\Theta[r_i, u_i]\Theta[x_j, u_j] \equiv \Theta[r_i x_j, u_i u_j]$ является корректным и превращает $M(R)$ в кольцо, содержащее R, а $M(X)$ в $M(R)$ — модуль, содержащий X. Отметим, что каждому элементу $x \in X$ сопоставляется элемент $\Theta[x, 1] \in M(X)$. Приведем без доказательства следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть X — модуль без кручения относительно $\mathbf{F}_R$ над (коммутативным полупервичным) кольцом R с единицей. Тогда $M(X)$ является $M(R)$ — модулем без кручения относительно $\mathbf{F}_{M(R)}$ и R-модулем без кручения относительно $\mathbf{F}_R$.

Лемма 2. Пусть X — модуль без кручения относительно $\mathbf{F}_R$ над кольцом R. Тогда для любого $u \in R$

$$M(X)_u = M(X)_{\theta[u,1]} \text{ и } M(X)_u{}^{\perp} = M(X)^{\perp}{}_{\theta[u,1]}.$$

Предложение 1. Пусть X — модуль без кручения относительно $\mathbf{F}_R$ над кольцом R. Тогда $M(X)$ является $M(R)$ — ортополным $M(R)$ — модулем и R-ортополным R-модулем.

Доказательство. Пусть $z \equiv \Theta[x_i, u_i] \in M(X)$ и $s \equiv \equiv \Theta[r_j, u_j] \in M(R)$. Предположим сначала, что для любого $r \in R$, $r \neq 0$, $rs \neq 0$, то есть существует $j_0 = j_0(r)$, при котором

$rr_{j_0}u_{j_0}\neq 0$. Тогда $M(X)_s=M(X)$ и $M(X)^{\perp}{}_s=\{0\}$. Действительно, пусть $t\equiv\Theta[r_k, u_k]\in M(R)$, $ts=0$ и $0\neq y\equiv\Theta[x_l, u_l]\in M(X)$. Из $ts=0$ следует $r_k r_j u_k u_j=0$ для любых k и j. Отсюда в силу предположения вытекает $r_k u_k=0$. Значит, $t=0$, $ty=0$ и $M(X)_s=M(X)$. Из леммы I следует, что $M(X)^{\perp}{}_s=\{0\}$. Таким образом, $M(X)=M(X)_s\oplus M(X)^{\perp}{}_s$.

Предположим теперь, что существует $0\neq r\in R$, для которого $rs=0$. Тогда найдется и максимальная система попарно ортогональных элементов $\{r_\alpha\in R\,|\,\alpha\in A\}$ такая, что $r_\alpha s=0$. Так как $u_j r_j=u_j s\in R$, то $r_\alpha u_j r_j=r_\alpha u_j s=0$ для любых $\alpha\in A$ и $j\in J$, то есть элементы r_α и $u_j r_j$ попарно ортогональны. Пусть $J'\equiv\equiv\{j\in J\,|\,u_j r_j\neq 0\}$. Системы попарно ортогональных элементов $\{r_\alpha,\ u_j r_j\,|\,\alpha\in A,\ j\in J'\}$ и $\{u_i r_\alpha,\ u_i u_j r_j\,|\,\alpha\in A,\ i\in I,\ j\in J'\}$ являются плотными в R. Действительно, если $rr_\alpha=0$ и $ru_j r_j=0$, то $rs=0$ и, в силу максимальности $\{r_\alpha\}$, $r=0$. Обозначим через

$$z_1\equiv\theta\{[0,\ u_i r_\alpha\,|\,i\in I,\ \alpha\in A]\cup[x_i,\ u_i u_j r_j\,|\,i\in I,\ j\in J']\},$$

класс эквивалентности набора, состоящего из двух различных частей. Обозначим также

$$z_2\equiv\theta\{[x_i,\ u_i r_\alpha\,|\,i\in I,\ \alpha\in A]\cup[0, u_i u_j r_j\,|\ i\in I, j\in J']\}.$$

Тогда из определения Θ — эквивалентности следует, что

$$z_1+z_2=\theta\{[x_i,(u_i r_\alpha)^2]\cup[x_i,\ (u_i u_j r_j)^2]\}=$$
$$=\theta\{[x_i,u_i r_\alpha]\cup[x_i,\ u_i u_j r_j]\}=\theta[x_i,\ u_i]=z.$$

Если $t=\Theta[r_k,\ u_k]\in M(R)$ и $ts=0$, то $u_k u_j r_k r_j=0$. Поэтому $u_k u_i u_j r_j r_k x_i=(u_k u_j r_k r_j)u_i x_i=0$ и, значит,

$$tz_1=\theta\{[0,\ u_k u_i r_\alpha]\cup[r_k x_i, u_k\ u_i u_j r_j]\}=0.$$

Следовательно, $z_1\in M(X)_s$. Кроме того,

$$sz_2=\theta\{[r_j x_i, u_j, u_i r_\alpha]\cup[0,\ u_j, u_i u_j r_j]\}=0.$$

Значит, $z_2\in M(X)^{\perp}{}_s$. Таким образом, и в этом случае для $M(X)$ выполнено условие а) в определении ортополноты.

Проверим теперь выполнимость условия в). Пусть $\{s_\alpha\equiv\equiv\theta[r_i^\alpha;\ u_i^\alpha|i\in I_\alpha]\,|\,\alpha\in A\}$ — система попарно ортогональных элементов из $M(R)$ и $\{z_\alpha\equiv\Theta[x_j^\alpha,\ u_j^\alpha\,|\,j\in I_\alpha]\,|\,\alpha\in A\}$ — множество из $M(X)$ такое, что $z_\alpha\in M(X)_{s_\alpha}$. Так как $s_\alpha\ s_\beta=0$ для $\beta\neq\alpha$, то $u_i^\alpha\ u_j^\beta\ r_i^\alpha\ r_j^\beta=0$ для любых α, $\beta\in A$, $i\in I_\alpha$, $j\in I_\beta$, $\alpha\neq\beta$ или $i\neq j$. Обозначим $I'_\alpha\equiv\{i\in I_\alpha\,|\,u^\alpha{}_i\ r^\alpha{}_i\neq 0\}$. Пусть $\{r_\gamma\,|\,\gamma\in\Gamma\}$ — максимальная система попарно ортогональных элементов из R таких, что r_γ ортогонально $u_j^\alpha\ u_i^\alpha\ r_i^\alpha$

для любых $\alpha\in A$, $j\in J_\alpha$ и $i\in I'_\alpha$. Тогда $\{r_\gamma, u_j^\alpha u_i^\alpha r_i^\alpha \mid \gamma\in\Gamma, \alpha\in A, j\in J_\alpha, i\in I'_\alpha\}$ является плотной системой попарно ортогональных элементов в R. Рассмотрим элемент

$$z\equiv\theta\{[0, r_\gamma \mid \gamma\in\Gamma]\cup[x_j^\alpha, u_i^\alpha u_j^\alpha r_i^\alpha \mid \alpha\in A, j\in J_\alpha, j\in I'_\alpha]\}$$

из $M(X)$. Докажем, что для любого $\beta\in A$ $s_\beta z = s_\beta z_\beta$ и, если $s\in M(R)$ и $sz_\beta = 0$ для всех $\beta\in A$, то $sz=0$.

Закрепим индекс $\beta\in A$ и обозначим через $\{r'_\delta \mid \delta\in\Delta\}$ максимальную систему попарно ортогональных элементов таких, что r_δ ортогонально $u_k^\beta r_k^\beta$ для всех $k\in I'_\beta$. Тогда $\{r_\delta, u_k^\beta r_k^\beta \mid \delta\in\Delta, k\in I'_\beta\}$ является плотной системой попарно ортогональных элементов в R. Поэтому из определения Θ — эквивалентности следует, что

$$s_\beta = \theta[r_k^\beta, u_k^\beta \mid k\in I_\beta] = \theta\{[0, r_\delta \mid \delta\in\Delta[\cup[r_k^\beta, u_k^\beta r_k^\beta \mid k\in I'_\beta]\}.$$

Отсюда получается

$$\begin{gathered} s_\beta z = \theta\{[0, r_\delta r_\gamma \mid \delta\in\Delta, \gamma\in\Gamma]\cup \\ \cup[0, r_\delta u_j^\alpha u_i^\alpha r_i^\alpha \mid \delta\in\Delta, \alpha\in A, j\in J_\alpha, i\in I'_\alpha]\cup \\ \cup[0, u_k^\beta r_k^\beta r_\gamma \mid k\in I'_\beta, \gamma\in\Gamma]\cup \\ \cup[r_k^\beta x_j^\alpha, u_k^\beta r_k^\beta u_j^\alpha u_i^\alpha r_i^\alpha \mid k\in I'_\beta, \alpha\in A, j\in J_\alpha, i\in I'_\alpha]\}. \end{gathered}$$

Так как $\{r_\gamma\ u_j^\alpha u_i^\alpha r_i^\alpha \mid \gamma\in\Gamma, \alpha\in A, j\in J_\alpha, i\in I_\alpha'\}$ является плотной системой попарно ортогональных элементов, то объединение первого и второго наборов в этом объединении эквивалентно набору $[0, r_\delta \mid \delta\in\Delta]$ и, значит набору $[0, r_\delta u^\beta_j \mid \delta\in\Delta, j\in J_\beta]$. Из того, что $u_j^\beta u_k^\beta r_k^\beta r_\gamma = 0$ для любых $j\in J_\beta$ и $k\in I'_\beta$, в силу плотности $\{u_j^\beta \mid j\in J_\beta\}$ следует $u_k^\beta r_k^\beta r_\gamma = 0$. Значит, третий набор в этом объединении равен нулю и поэтому его можно отбросить. В силу того, что $u_k^\beta r_k^\beta u_i^\alpha r_i^\alpha = 0$ для любых $\alpha\neq\beta$ и $k\neq i$, четвертый набор эквивалентен набору

$$[r_k^\beta x_j^\beta, u_k^\beta r_k^\beta u_j^\beta u_k^\beta r_k^\beta \mid k\in I'_\beta, j\in J_\beta].$$

Поэтому

$$s_\beta z = \theta\{[0, r_\delta u_j^\beta \mid \delta\in\Delta, j\in J_\beta]\cup[r_k^\beta x_j^\beta, (u_k^\beta r_k^\beta)^2 u_j^\beta \mid k\in I'_\beta j\in J_\beta]\}.$$

Так как набор $[r_k^\beta x_j^\beta, (u_k^\beta r_k^\beta)^2 u_j^\beta]\Theta[x_j^\beta r_k^\beta, u_k^\beta r_k^\beta, u_j^\beta]$, то окончательно получаем, что $s_\beta z = s_\beta z_\beta$. Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что если $sz_\beta = 0$ для всех $\beta\in A$, то $sz=0$. Значит, $M(X)$ является $M(R)$ — ортополным $M(R)$ — модулем. Отсюда в силу леммы 2 следует, что $M(X)$ является и R-ортополным R-модулем.

Будем называть модуль Y расширением X, если X является подмодулем в Y. Пусть E обозначает какой-нибудь подкласс класса всех расширений X. Будем говорить что расширение $Z \in E$ является наименьшим в классе E, если для любого расширения $Y \in E$ существует инъективный гомоморфизм из Z в Y, тождественный на X. Аналогично определим наибольшее расширение в классе E.

Теорема 1. Пусть X — модуль без кручения относительно F_R над кольцом R. Тогда

a) $M(X)$ является наибольшим R — модулем среди всех орторасширений X.

b) $M(X)$ является (единственным) универсальным расширением X относительно гомоморфизмов из X в ортополные R-модули без кручения относительно F_R, то есть таким, что для любого гомоморфизма Φ из X в ортополный R — модуль Y без кручения относительно F_R существует единственный гомоморфизм Ψ из $M(X)$ в Y, продолжающий Φ.

c) $M(X)$ является наименьшим среди R-ортопольных R-модулей без кручения относительно F_R, являющихся расширением X.

d) $M(X)$ является единственным R-ортополным R-модулем среди всех орторасширений X.

Доказательство. Пусть $0 \neq z \equiv \Theta[x_i, u_i] \in M(X)$. Так как $u_i z_i = u_i x_i$, то $u_i(z - x_i) = 0$ для любого i. Так как $z \neq 0$, то для некоторого i_0 $u_{i_0} x_{i_0} \neq 0$. Значит, и $u_{i_0} z \neq 0$. Таким образом, $M(X)$ является орторасширением X.

Пусть Y — орторасширение X. Тогда для $0 \neq y \in Y$ существуют плотная в R система попарно ортогональных элементов $\{u_i | \in I\} \subset R$ и множество $\{x_i | i \in I\} \subset X$ такие, что $u_i(y - x_i) = 0$. Рассмотрим элемент $\overline{y} \equiv \Theta[x_i, u_i] \in M(X)$. Легко проверить, что отображение $\Phi_0 : Y \rightarrow M(X)$, определенное путем $\Phi_0(y) \equiv \overline{y}$, является инъективным гомоморфизмом. Тем самым установлена справедливость утверждения a).

Пусть Y является R-ортополным R-модулем без кручения относительно F_R, $\Phi \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ и $z \equiv \Theta[x_i, u_i] \in M(X)$. Обозначим через $Pr_{u_i} \Phi x_i$ проекцию элемента Φx_i на Y_{u_i}. В силу ортополноты Y найдется $y \in Y$ такой, что $u_i(y - Pr_{u_i} \Phi x_i) = 0$ для любого i. Легко проверить, что элемент y определяется однозначно элементом z. Поэтому мы можем корректно определить отображение $\Psi : M(X) \rightarrow Y$, сопоставляя элементу z элемент $\Psi z \equiv y$. Проверим линейность отображения Ψ. Пусть $z_1 \equiv \Theta[x_i, u_i]$, $z_2 \equiv \Theta[x_j, u_j]$ и $z_1 + z_2 = \Theta[x_i + x_j, u_i u_j]$. Тогда $u_i u_j [\Psi(z_1 + z_2) - Pr_{u_i u_j} \Phi(x_i + x_j)] = 0$ для любых i и j. Так как

$$u_iu_j[\Psi(z_1+z_2)-\Psi z_1-\Psi z_2]=$$
$$=u_iu_j[\Psi(z_1+z_2)-Pr_{u_iu_j}\Phi(x_i+x_j)]+$$
$$+u_iu_j\,[Pr_{u_iu_j}\Phi x_i-Pr_{u_i}\Phi x_i]+$$
$$+a_iu_j[Pr_{u_iu_j}\Phi x_j-Pr_{u_j}\Phi x_j]+$$
$$+u_iu_j[Pr_{u_i}\Phi x_i-\Psi z_1]+u_iu_j[Pr_{u_i}\Phi x_j-\Phi z_2]=0,$$

то получаем $\Psi(z_1+z_2)=\Psi z_1+\Psi z_2$. Совсем просто проверить, что $\Psi(rz)=r\Psi z$ и $\Psi x=\Phi x$. Таким образом, Ψ является гомоморфизмом, продолжающим Φ. Проверим единственность продолжающего гомоморфизма. Пусть существует $\Psi':M(X)\to Y$, продолжающий Φ. Так как $u_iz=u_ix_i$, то $u_i\Psi'z=\Psi'(u_iz)=\Psi'(u_ix_i)=u_i\Psi'x_i=u_i\Phi x_i=u_i\Psi x_i=\Psi(u_ix_i)=\Psi(u_iz)=u_i\Psi z$ для любого i. Отсюда в силу того, что модуль Y без кручения относительно $\mathbf{F}_R$, следует $\Psi'z=\Psi z$ для любого $z=M(X)$. Таким образом, утверждение в) доказано.

Если гомоморфизм $\Phi:X\to Y$ является инъективным и $\Psi_z=0$, то $u_i\Phi x_i=0$ для любого i. Тогда $\Phi(u_ix_i)=0$, следовательно, $u_ix_i=0$ и, значит, $z=0$. Поэтому $\Psi:M(X)\to Y$ является инъективным гомоморфизмом. Отсюда в силу предложения I и вытекает утверждение с).

Утверждение d) является простым следствием из а), с) и предложения 1.

Эта теорема показывает, что R — модуль $M(X)$ является ортопополнением R-модуля X и что ортополнение X единственно. Из этой теоремы следует, что полная подкатегория ортополных R-модулей без кручения относительно $\mathbf{F}_R$ рефлексивна и функтор M является рефлектором.

Назовем унитарный гомоморфизм Φ из кольца R в кольцо S плотным, если Φ любое плотное множество из R переводит в плотное в S. Для коммутативных полупервичных колец это определение эквивалентно тому, что Φ переводит любую плотную систему попарно ортогональных элементов из R в плотную S.

Будем называть кольцо S плотным расширением кольца R, если существует плотный инъективный гомоморфизм из R в S. Пусть E обозначает какой-нибудь подкласс класса всех плотных расширений R. Будем говорить, что плотное расширение $T\in E$ является плотно наименьшим в классе E, если для любого плотного расширения $S\in E$ существует плотный инъективный гомоморфизм из T в S, тождественный на R. Аналогично определим плотно наибольшее расширение в классе Е.

Теорема 2. Пусть R — коммутативное полупервичное кольцо с единицей. Тогда

a) $M(R)$ является плотно наибольшим среди всех орторасширений R;

b) $M(R)$ является (единственным) универсальным расширением R относительно плотных гомоморфизмов из R в ортополные кольца;

c) $M(R)$ является плотно наименьшим среди всех ортополных колец, являющихся плотными расширениями R;

d) $M(R)$ является единственным ортополным кольцом среди всех орторасширений R.

Доказательство этой теоремы использует предложение 1 и лишь немногими деталями отличается от доказательства теоремы 1. Поэтому мы не будем его приводить.

Эта теорема показывает, что кольцо $M(R)$ является ортопополнением кольца R и что ортопополнение R единственно. Из этой теоремы следует, что подкатегория ортополных колец и плотных гомоморфизмов является рефлексивной подкатегорией категории колец и обычных гомоморфизмов и функтор M является рефлектором.

Отметим, что, как указал А. И. Векслер, подкатегория ортополных колец и обычных гомоморфизмов не является рефлексивной. Действительно, пусть R есть булево кольцо всех непрерывных отображений из экстремально несвязного бикомпакта B в булево кольцо $\mathbf{Z}_2$, значения которых в двух данных неизолированных точках t_1 и t_2 совпадают. Тогда в силу утверждения d) теоремы 2 ортопополнение R совпадает с кольцом всех непрерывных отображений из B в $\mathbf{Z}_2$. Зададим гомоморфизм $\Phi: R \longrightarrow Z_2$, полагая $\Phi r = r(t_1) = r(t_2)$. Тогда гомоморфизмы Ψ_1 и Ψ_2 из $M(R)$ в $\mathbf{Z}_2$, определяемые путем $\Psi_1 \equiv z(t_1)$ и $\Psi_2 z \equiv z(t_2)$, являются различными продолжениями Φ.

§ 2. Связь ортопополнения модуля с его делимой оболочкой относительно плотных идеалов

Напомним сначала некоторые факты из [7] и [5]. Модуль Y над R называется $\mathbf{F}_R$-делимым, если для любого плотного идеала D и любого $\Phi \in \mathrm{Hom}_R(D, Y)$ существует $\Psi \in \mathrm{Hom}_R(R, Y)$, продолжающий Φ. Подмодуль X модуля Y называется $\mathbf{F}_R$-плотным, если для любого $0 \neq y \in Y$ $y^{-1}X \equiv$

$=\{r\in R\,|\,ry\in X\}$ является плотным идеалом и называется $\mathbf{F}_R$-существенным, если, кроме того, и $(y^{-1}X)y\neq\{0\}$. Для любого модуля X существует единственный $\mathbf{F}_R$-делимый модуль $D_{\mathbf{F}_R}(X)$, являющийся $\mathbf{F}_R$-существенным расширением X. Он называется $\mathbf{F}_R$-делимой (или $\mathbf{F}_R$-инъективной) оболочкой X. Кольцо S называется рационально полным, если оно $\mathbf{F}_S$ — делимо как S — модуль. Для любого кольца R существует единственное рационально полное кольцо $Q(R)$, являющееся как R-модуль $\mathbf{F}_R$ — существенным расширением R-модуля R. Оно называется полным кольцом частных кольца R (или рациональным пополнением R). Как R-модуль $Q(R)$ изоморфно $D_{\mathbf{F}_R}(X)$.

Назовем коммутативное полупервичное кольцо R локально обратимым, если для любого $r\in R$ и любого $0\neq t\in\langle r\rangle$ существуют $s\in R$ и $0\neq u\in\langle t\rangle$ такие, что $(rs-1)u=0$. (Здесь $\langle r\rangle$ и $\langle t\rangle$ обозначают главные идеалы, порожденные элементами r и t). Если кольцо R гармоническое, то есть такое, что пространство максимальных идеалов R хаусдорфово, то оно является и локально обратимым. Таким образом, класс локально обратимых колец довольно широк.

Теорема 3. Пусть R — коммутативное полупервичное кольцо с единицей и X — модуль над R без кручения относительно $\mathbf{F}_R$. Тогда

а) модуль $M(X)$ изоморфен подмодулю модуля $D_{\mathbf{F}_R}(X)$, состоящему из всех элементов $z\in D_{\mathbf{F}_R}(X)$, для которых существуют плотная система попарно ортогональных элементов $\{u_i\in R\,|\,i\in I\}$ и множество $\{x_i\in X\,|\,i\in I\}$ такие, что $u_i(z-x_i)=0$ для любого $i\in I$;

в) если кольцо R локально обратимо, то $M(X)$ и $D_{\mathbf{F}_R}(X)$ изоморфны как R-модули, а $M(R)$ и $Q(R)$ изоморфны как кольца;

с) если кольца $M(R)$ и $Q(R)$ изоморфны, то кольцо R локально обратимо.

Доказательство. Пусть $0\neq z\equiv\Theta[x_i,u_i]\in M(X)$. Так как $u_iz=u_ix_i\in X$ для любого i и $u_{i_0}z=u_{i_0}x_i\neq0$ для некоторого i_0, то $M(X)$ является $\mathbf{F}_R$ — существенным расширением X. Из того, что $D(X)$ является максимальным $\mathbf{F}_R$ — существенным расширением X (см., например, [6], предл. 1.59), следует, что существует инъективный гомоморфизм $\Phi:M(X)\to D(X)$, тождественный на X.

Пусть $z\in D(X)$ такое, что $u_i(z-x_i)=0$. Рассмотрим $y\equiv\theta[x_i,u_i]\in M(X)$. Так как $u_iy=u_ix_i$, то $u_i\Phi y=\Phi(u_iy)=$

$=\Phi(u_1x_1)=u_1x_1=u_1z$. В силу того, что $D(X)$ не имеет кручения относительно плотных идеалов, получаем $\Phi y=z$. Тем самым утверждение а) доказано.

Пусть теперь кольцо R локально обратимо и $z\in D(X)$. Тогда $z^{-1}X$ является плотным идеалом. Рассмотрим максимальную систему попарно ортогональных элементов $\{r_i\in z^{-1}X\,|\,i\in I\}$. В силу локальной обратимости кольца R для каждого r_i найдется максимальная система попарно ортогональных элементов $\{u^i_\alpha\in R\,|\,\alpha\in A_i\}$ такая, что для u^i_α найдется s^i_α, для которого $u^i_\alpha(r_is^i_\alpha-1)=0$. Система $\{u^i_\alpha\,|\,\alpha\in A_i,\ i\in I\}$ плотна в R. Действительно, пусть существует $0\neq r\in R$ такой, что $ru^i_\alpha=0$ для любых α и i. Так как $\{r_i\}$ плотна в R, то $rr_{i_0}\neq 0$ для некоторого $i_0\in I$. По условию для r_{i_0} и $0\neq rr_{i_0}\in\langle r_{i_0}\rangle$ существуют $s\in R$ и $0\neq u\in\langle rr_{i_0}\rangle$ такие, что $u(r_{i_0}s-1)=0$. Так как $u=$ $=\sigma rr_{i_0}$ для некоторого $\sigma\in R$, то $uu^{i_0}_\alpha=\sigma rr_{i_0}u_\alpha{}^{i_0}=\sigma r_{i_0}(ru_\alpha{}^{i_0})=$ $=0$, что противоречит максимальности системы $\{u_\alpha{}^{i_0}\}$. Из равенства $u^i_\alpha(r_is^i_\alpha-1)=0$ следует, что $u^i_\alpha(s^i_\alpha r_iz-z)=0$. Обозначив $x'_\alpha\equiv s^i_\alpha r_iz\in X$, получим $u^i_\alpha(z-x^i_\alpha)=0$ для любых α и i. Значит, $D(X)$ является орторасширением X. По теореме 1 $M(X)$ является наибольшим из всех орторасширений X. Поэтому существует инъективный гомоморфизм $\Psi:D(X)\to$ $\to M(X)$, тождественный на X.

Если $z\equiv\Theta[x_i,u_i]\in M(X)$, то $u_i\Psi(\Phi z)=\Psi(\Phi(u_iz))=$ $=\Psi(\Phi(u_ix_i))=u_i\Psi(\Phi x_i)=u_i\Psi x_i=u_ix_i=u_iz$. Так как по лемме 1 $M(X)$ не имеет кручения относительно плотных идеалов, то $\Psi(\Phi z)=z$. Аналогично проверяется, что если $z\in D(X)$, то $\Phi(\Psi z)=z$. Следовательно, отображения Φ и Ψ устанавливают изоморфизм R-модулей $M(X)$ и $D(X)$.

Отсюда следует, что отображение Ψ устанавливает изоморфизм R-модулей $Q(R)$ и $M(R)$. Пусть $z_1, z_2\in Q(R)$ и $r\in z_1^{-1}R$. Тогда имеем $r\Psi(z_1z_2)=\Psi((rz_1)z_2)=rz_1\Psi z_2=$ $\Psi(rz_1)\Psi z_2=r\Psi z_1\Psi z_2$. Так как $M(R)$ не имеет кручения относительно плотных идеалов, то $\Psi(z_1z_2)=\Psi z_1\cdot\Psi z_2$. Значит, Ψ является изоморфизмом колец.

Обратно, пусть кольца $M(R)$ и $Q(R)$ изоморфны и $0\neq$ $\neq r\in R$. Так как $Q(R)$ — регулярное кольцо, то существуют $s\in Q(R)$ и $e\in Q(R)$ такие, что $rs-e\doteq 0$ и $re=r$. Из предположения следует, что $s\in M(R)$ и потому найдутся плотные в R системы попарно ортогональных элементов $\{u_i\in R\,|\,i\in I\}$ и $\{u_j\in R\,|\,j\in J\}$ и множества $\{r_i\in R\}$ и $\{e_j\in R\}$ такие, что $u_i(s-$ $-r_i)=0$ и $u_j(e-e_j)=0$. Так как $u_iu_j(rs-e)=0$, то $u_iu_j(rr_i-$ $-e)=0$, $u_iu_j(rr_i-e_j)=0$ и $u_iu_jr(rr_i-e_j)=0$. Из равенства $r=re$ вытекает, что $u_iu_jr(1-e)=0$, $u_iu_jr(1-e_j)=0$ и $u_iu_jr(rr_i-$

$-1)=0$. Пусть $0 \neq t \in \langle r \rangle$. Тогда $rt \neq 0$ и, следовательно, в силу плотности $\{u_i u_j\}$ найдутся i_0, j_0, при которых $u_{i_0} u_{j_0} rt \neq 0$. Обозначив $u = u_{i_0} u_{j_0} rt \in \langle t \rangle$, получаем окончательно $u(rr_{i_0} - 1) = 0$. Следовательно, кольцо R локально обратимо.

Следствие. Пусть X — модуль без кручения относительно $\mathrm{F_R}$ над локально обратимым кольцом R. Следующие утверждения эквивалентны:

а) X $\mathrm{F_R}$ — делим (соответственно, R рационально полно).

в) X ортополон (соответственно, R ортополно).

Назовем модуль X над кольцом R регулярным, если для любых $x \in X$ и $0 \neq u \in R$ существует $x' \in X$ такой, что $ux'u = ux$. Всегда можно считать, что $x' \in X_u$. Для колец данное свойство эквивалентно регулярности в смысле фон Неймана.

С помощью понятий ортополноты и регулярности можно дать следующий критерий делимости модуля относительно плотных идеалов.

Теорема 4. Пусть X модуль без кручения относительно плотных идеалов над полупервичным кольцом R. Следующие утверждения эквивалентны:

а) X делим относительно плотных идеалов,

в) X регулярен и ортополон.

Поэтому $D_{\mathrm{F_R}}(X)$ является единственным регулярным ортополным $\mathrm{F_R}$ — существенным расширением X.

Доказательство. Пусть выполнено утверждение а). Проверим, что X регулярен. Пусть $0 \neq u \in R$ и $x \in X$. Рассмотрим максимальную систему $\{u_\alpha \in R \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$ попарно ортогональных элементов таких, что $u_\alpha u = 0$ для любого α. Обозначим через D идеал в R, состоящий из элементов вида $d \equiv \equiv \sum\limits_\alpha r_\alpha u_\alpha + ru^2$, где лишь конечное число коэффициентов $r_\alpha \in R$ и $r \in R$ отлично от нуля. Определим гомоморфизм Φ из D в X, положим $\Phi d \equiv rux$. В силу делимости X существует гомоморфизм Ψ из R в X, продолжающий Φ. Положим $x' \equiv \Psi(1) \in X$. Тогда получим $ux'u = u\Psi(1)u = \Psi(u^2) = \Phi(u_2) = ux$. Значит, модуль X регулярен.

Проверим теперь ортополноту X. Пусть $u \in R$ и $x \in X$. В силу регулярности X найдется $x' \in X$ такой, что $ux'u = ux$. Положим $x_1 \equiv ux' \in X_u$. Так как $u(x - x_1) = ux - ux_1 = ux - ux'u = = ux - ux = 0$, то $(x - x_1) \in X_u{}^\perp$. Следовательно, выполнено условие а) из определения ортополноты модуля. Пусть $\{u_\alpha \in R \mid \alpha \in A\}$ система попарно ортогональных элементов и $\{x_\alpha \in X_{u_\alpha} \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$. Рассмотрим максимальную систему $\{u_\gamma \in$

$\in R \mid \gamma \in \Gamma\}$ попарно ортогональных элементов таких, что $u_\gamma u_\alpha = 0$. Обозначим через D идеал в R, состоящий из элементов вида $d = \sum r_\alpha u_\alpha + \sum r_\gamma u_\gamma$, где лишь конечное число коэффициентов $r_\alpha \in R$, $r_\gamma \in R$ отлично от нуля. Определим гомоморфизм Φ из D в X, положив $\Phi d = \sum r_\alpha u_\alpha x_\alpha$. Рассмотрим гомоморфизм Ψ из R в X, продолжающий φ, и элемент $x = \Psi(1)$. Тогда $u_\alpha(x - x_\alpha) = u_\alpha \Psi(1) - u_\alpha x_\alpha = \Psi u_\alpha - u_\alpha x_\alpha = u_\alpha x_\alpha - u_\alpha x_\alpha = 0$. Если же $r x_\alpha = 0$, то $u_\alpha(r x) = u_\alpha r x_\alpha = 0$, $u_\gamma(r x) = u_\gamma r \Psi(1) = r \Psi(u_\gamma) = 0$ и, значит, $rx = 0$. Следовательно, выполнено и условие в) из определения ортополноты. Таким образом, модуль X ортополон.

Обратно, пусть X регулярен и ортополон. Пусть D — плотный идеал в R, $\Phi \in \mathrm{Hom}_R(D, X)$ и $\{u_\alpha\}$ — максимальная система попарно ортогональных элементов из D. Возьмем для u_α и Φu_α элемент $x_\alpha \in X_{u_\alpha}$ такой, что $u_\alpha x_\alpha u_\alpha = u_\alpha \Phi u_\alpha$. В силу ортополноты X найдется элемент x такой, что $u_\alpha (x - x_\alpha) = 0$ и $r x_\alpha = 0$ для всех α влечет $rx = 0$. Определим гомоморфизм Ψ из R в X, положив $\Psi r \equiv rx$. Тогда для любого $\beta \neq \alpha$

$$u_\beta \Psi u_\alpha = u_\beta u_\alpha x = 0 = u_\beta \Phi u_\alpha \text{ и } u_\alpha \Psi u_\alpha = u_\alpha u_\alpha x = u_\alpha u_\alpha x_\alpha = u_\alpha \Phi u_\alpha.$$

В силу плотности системы $\{u_\alpha\}$ получаем $\Psi u_\alpha = \Phi u_\alpha$. Отсюда легко выводится, что гомоморфизм Ψ является продолжением Φ. Значит, X является делимым модулем. Теорема доказана.

§ 3. Применения к булевым алгебрам

Напомним, что подмножество C булевой алгебры R называется полным в R, если в R не существует ненулевого элемента, дизъюнктного всем элементам из C. Гомоморфизм Φ из булевой алгебры R в булеву алгебру S называется полным ([8]), если Φ сохраняет все грани. Дедекиндово пополнение булевой алгебры R будем обозначать через $D(R)$.

Приводимая ниже лемма, по-видимому, известна. Поэтому приведем ее без доказательства.

Лемма 3. Пусть Φ — гомоморфизм из булевой алгебры R в булеву алгебру S. Следующие утверждения эквивалентны.

а) Φ — полный гомоморфизм,

в) Φ переводит любую полную систему попарно дизъюнктных элементов из R в полную в S.

Будем называть булеву алгебру S регулярным (соответственно, плотным) расширением булевой алгебры R, если R является регулярной подалгеброй в S, то есть существует полный инъективный гомоморфизм из R в S (соответственно, R является плотной подалгеброй в S). Пусть E обозначает какой-нибудь подкласс класса всех регулярных расширений R. Будем говорить, чте регулярное расширение $T \in E$ является регулярно наименьшим в классе E, если для любого регулярного расширения $S \in E$ существует полный инъективный гомоморфизм из T в S, тождественный на R. Аналогично определим регулярно наибольшее расширение в классе E.

Теорема 4. Пусть R — булева алгебра. Тогда

а) $D(R)$ является регулярно наибольшим из всех плотных расширений R.

в) $D(R)$ является (единственным) универсальным расширением R относительно полных гомоморфизмов из R в полные булевы алгебры.

с) $D(R)$ является регулярно наименьшей из всех полных булевых алгебр, являющихся регулярными расширениями R.

Доказательство. Пусть S является плотным расширением R. Тогда для любого $s \in S$ существует множество $\{r_\alpha\} \subset R$ такое, что $s = \sup\limits_\alpha r_\alpha$. Рассмотрим максимальное множество $\{u_i\}$ попарно дизъюнктных элементов из R таких, что для каждого i найдется α, при котором $u_i \leqslant r_\alpha$. Тогда $s = \sup_i u_i$. Действительно, пусть $s' \geqslant u_i$ для всех i. Если бы для некоторого α_0 было $s' \wedge r_{\alpha_0} < r_{\alpha_0}$, то нашелся бы $u \in R$ такой, что $u \leqslant (r_{\alpha_0} - s' \wedge r_{\alpha_0})$. Тогда из $u \wedge s' = 0$ следовало бы или $u_i = 0$ для всех i и, кроме того, было бы $u \leqslant r_{\alpha_0}$. Но это противоречило бы максимальности системы $\{u_i\}$. Следовательно, для любого α $s' \wedge r_\alpha = r_\alpha$ и, значит, $s' \geqslant r_\alpha$. Поэтому $s' \geqslant \sup\limits_\alpha r_\alpha = s$. Таким образом, $s = \sup\limits_i u_i$.

Пусть $\{u_j\}$ — максимальная система попарно дизъюнктных элементов из R, таких, что u_j дизъюнктно каждому u_i. Тогда $\{u_i, u_j | i \in I, j \in J\}$ — полная система в R, $(s - u_i) \wedge u_i = 0$ для любого i и $(s - 0) \wedge u_j = 0$ для любого j. Переходя к булевым кольцам R' и S', получим, что $\{u_i, u_j\}$ — плотная система в R', $(s - u_i) u_i = 0$ и $(s - 0) u_j = 0$. Значит, кольцо S' является орторасширением кольца R'. Из утверждения а) теоремы 2 следует, что существует плотный инъективный гомоморфизм Φ из S' в $M(R')$. Аналогично, и кольцо $(D(R))'$ является орторасширением кольца R'. Так как $(D(R))'$ к тому же является и ортополным кольцом, то в силу утверждения d) теоремы 2 $(D(R))' \cong M(R')$. Значит, Φ является плотным инъективным гомоморфизмом из S' в $(D(R))'$. Переходя обратно к булевым алгебрам, получаем в силу леммы 3, что Φ является полным инъективным гомоморфизмом из S в $D(R)$. Утверждение а) доказано.

Пусть Φ — полный гомоморфизм из R в полную булеву алгебру S. Переходя к булевым кольцам R' и S', мы получим в силу леммы 3, что Φ является плотным гомоморфизмом из R' в S'. Из утверждения в) теоремы 2 следует, что существует единственный плотный гомоморфизм Ψ из $M(R')$ в S', продолжающий Φ. Так как $M(R') \cong (D(R))'$, то Φ является плотным гомоморфизмом из $(D(R))'$ в S'. Переходя обратно к булевым алгебрам, получаем в силу леммы 3, что Ψ является полным гомоморфизмом из $D(R)$ в S, продолжающим Φ. Из того, что для любого $z \in D(R)$ $z = \sup\limits_{\alpha} r_\alpha$ для $\{r_\alpha\} \subset R$ и $\Psi z = \Psi(\sup r =$ $= \sup \Psi r_\alpha = \sup \Phi r_\alpha$ следует единственность продолжающего гомоморфизма. Утверждение в) установлено.

Утверждение с) является немедленным следствием из в).

Из этой теоремы следует, что подкатегория полных булевых алгебр и полных гомоморфизмов является рефлексивной подкатегорией категории булевых алгебр и обычных гомоморфизмов и функтор D является рефлектором. Пример, аналогичный приведенному в конце первого параграфа, показывает, что подкатегория полных булевых алгебр и обычных гомоморфизмов не является рефлексивной!

ЛИТЕРАТУРА

1. Пинскер А. Г. О расширении полуупорядоченных пространств.— ДАН СССР, 1938, 21, 6—10.
2. Nakano H. Modern spectral theory. Tokyo, 1950.
3. Bernau S. J. Orthocompletion of lattice groups. — Proc. London Math. Soc., 1966, 16, 107—130.
4. Conrad R. The lateral completion of a lattice ordered group. — Proc. London Math. Soc., 1969, 19, 444—480.
5. Ламбек И. Кольца и модули. М., 1971.
6. Мишина А. П., Скорняков Л. А. Абелевы группы и модули. М., 1969.
7. Steinström B. Rings and modules of quotients. Lecture notes in Math. 237. N. Y., 1971.
8. Сикорский Р. Булевы алгебры. М., 1969.

В. И. ИГОШИН

О РЕШЕТКАХ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ И КВАЗИМНОГООБРАЗИЯХ РЕШЕТОК

Поставленные А. И. Мальцевым [7] на Международном конгрессе математиков в Москве в 1966 году задачи описания решеток, которые могут быть реализованы в виде решеток многообразий алгебр, и решеток, которые могут быть реализованы в виде решеток квазимногообразий алгебр, еще достаточно далеки от своих решений. В настоящей работе устанавливается ряд свойств, которыми обладают решетки квазимногообразий произвольных алгебр и решетка квазимногообразий решеток. Доказано, что решетка всех подквазимногообразий квазимногообразия, порожденного одной конечной алгеброй, есть дуально атомная решетка с конечным числом дуальных атомов. Приведено достаточное условие неразложимости квазимногообразия алгебр в решетке всех своих подквазимногообразий в объединение конечного числа элементов. Установлено, что решетка всех подмногообразий многообразия алгебр с дистрибутивными решетками конгруэнций является подрешеткой решетки всех подквазимногообразий этого многообразия (второй пункт). В третьем пункте показано, что в решетке всех квазимногообразий решеток многообразие всех решеток не представимо в виде объединения конечного числа элементов. Следствием этих результатов является утверждение, доказанное Йонссоном [13], а также Дином и Ивенсом [11], о неразложимости многообразия всех решеток в решетке всех многообразий решеток в объединение конечного числа элементов. В первом пункте выводится формула для квазиэквационального замыкания произвольного класса алгебр, которая используется в дальнейших рассуждениях.

1. Квазиэквациональное замыкание класса алгебр

Для произвольного класса K алгебр обозначим через $I(K)$, $S(K)$, $P(K)$, $P_u(K)$, $P_s(K)$ классы, состоящие соответственно из всех изоморфных копий, подалгебр, прямых произведений, ультрапроизведений и подпрямых произведений алгебр из класса K. Класс K с добавленной единичной алгеброй обозначим через K_e. Наконец пусть $Q(K)$ обозначает наименьшее квазимногообразие, содержащее класс K (т. е. — квазиэквациональное замыкание класса K).

Предложение 1.1. $Q(K) = IP_s ISP_u(K)_e$.

Доказательство. Ясно, что если в правой части этого выражения стоит квазимногообразие, то это квазимногообразие наименьшее, содержащее класс K, поскольку всякое квазимногообразие замкнуто относительно всех операторов, участвующих в этом выражении. Обозначим через K^* класс $IP_s ISP_u(K)_e$. Покажем, что K^* квазимногообразие. Заметим сначала, что наименьший универсально аксиоматизируемый класс $U(K)$, содержащий класс K, есть $ISP_u(K)$. Далее, ясно, что $K^* \subseteq ISPU(K)_e$. Обратное включение. Всякая алгебра, изоморфная подалгебре прямого произведения алгебр из $U(K)$, изоморфна подпрямому произведению подалгебр перемножаемых алгебр, которые (подалгебры) принадлежат классу $U(K)$. Следовательно, $ISPU(K)_e \subseteq K^*$. Таким образом, $K^* = ISPU(K)_e$. Отсюда, ввиду следствия 9 из книги [6], стр. 295, заключаем, что класс K^* является квазимногообразием.

Пусть K — квазимногообразие алгебр. Алгебра A из K называется подпрямо K-неразложимой [8], если при всяком разложении A в подпрямое произведение алгебр $(A_i)_{i \in I}$ из K одно из проектирований $A \to A_i$ является изоморфизмом. Или: алгебра A из K подпрямо K-неразложима тогда и только тогда, когда на A не существует разделяющее семейство (см. [5], стр. 114) K-конгруэнций (то есть конгруэнций, факторы по которым принадлежат K) или тогда и только тогда, когда среди всех K-конгруэнций на A существует наименьшая нетождественная конгруэнция.

Следствие 1.2. Всякая подпрямо $Q(K)$ — неразложимая алгебра из $Q(K)$ изоморфно вложима в ультрапроизведение алгебр из класса K, то есть принадлежит классу $ISP_u(K)$.

Это непосредственно вытекает из введенного определения и доказанного предложения.

Следствие 1.3. Если K есть конечное множество конечных алгебр, то $Q(K) = IP_s IS(K)_e$, и всякая подпрямо $Q(K)$ — неразложимая алгебра из $Q(K)$ вложима в некоторую алгебру из K, то есть принадлежит классу $IS(K)$.

Это следствие вытекает из предложения 1.1 ввиду того, что в этом случае $P_u(K) \subseteq I(K)$ (см. [12], следствие 2.3).

Следствие 1.4. Пусть K — квазимногообразие алгебр. Если A и B не изоморфные конечные подпрямо K-неразложимые алгебры из K и если порядок A не превосходит порядка B, то существует квазитождество, которое выполняется в A и не выполняется в B.

Доказательство. Рассмотрим квазимногообразие $Q(\{A\})$. В силу следствия 1.3, $Q(\{A\})=IP_sIS(\{A\})$. Тогда $B\in Q(\{A\})$, поскольку в противном случае ввиду подпрямой K-неразложимости (и, следовательно, — подпрямой $Q(\{A\})$ — неразложимости) по следствию 1.3 мы заключили бы, что B изоморфно вложима в A. Последнее противоречило бы условию. Следовательно, некоторое квазитождество, определяющее квазимногообразие $Q(\{A\})$, не выполняется в алгебре B.

Заметим, что в последнем следствии условие подпрямой K-неразложимости алгебр A и B можно заметить более сильным условием их подпрямой неразложимости.

2. Решетки квазимногообразий

Все квазимногообразия алгебр данной сигнатуры образуют решетку, операция пересечения в которой является теоретико-множественным пересечением классов, а решеточным объединением двух квазимногообразий является наименьшее квазимногообразие, содержащее оба данных.

Теорема 2.1. Решетка $K_{Q(A)}$ всех подквазимногообразий квазимногообразия $Q(A)$, порожденного одной конечной алгеброй A, есть дуально атомная решетка (то есть каждый элемент, кроме наибольшего, меньше некоторого дуального атома) с конечным числом дуальных атомов.

Доказательство. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — совокупность всех тех подпрямо $Q(A)$ — неразложимых алгебр из $Q(A)$, которые не вкладываются ни в какие подпрямо $Q(A)$ — неразложимые алгебры из $Q(A)$. Согласно следствию 1.3, такая совокупность существует, все ее алгебры вложимы в алгебру A, и поэтому сами конечны и число их также конечно. Заметим, что если A подпрямо $Q(A)$ — неразложима, то указанная совокупность состоит из единственной алгебры A.

Обозначим через $N(A_1)$ класс всех алгебр из $Q(A)$, в которые не вкладывается изоморфно алгебра A_1, и рассмотрим следующую совокупность классов:

$$N(A_1), \ldots, N(A_n). \qquad (*)$$

Ввиду подпрямой $Q(A)$ —неразложимости алгебр $A_1, \ldots, A_n$, каждый из классов совокупности (*) является квазимногообразием [4]. Покажем, что совокупностью (*) исчерпываются все дуальные атомы решетки подквазимногообразий квазимногообразия $Q(A)$. Пусть для некоторого квазимногообразия Q имеют место включения: $N(A_1)\subseteq Q\subset Q(A)$. Так как квазимногообразие $Q(A)$ локально конечно (см. теорему 4 на стр. 361 в [6]), то для квазимногообразия Q найдется такая совокупность $\varkappa$ конечных алгебр из $Q(A)$, что $Q=N(\varkappa)$, то есть Q состоит из всех тех алгебр из $Q(A)$, в которые не вкладывается изоморфно ни одна алгебра из $\varkappa$ [3]. Следовательно, $N(A_1)\subseteq N(\varkappa)$. Тогда алгебра A_1 вкладывается во всякую алгебру из $\varkappa$. Увидим, что A_1 изоморфна некоторой алгебре из $\varkappa$, откуда последует равенство $Q=N(A_1)$. Допустим противное, то есть что A_1 строго вкладывается во все алгебры из $\varkappa$, и выберем в $\varkappa$ любую алгебру $\overline{A_1}$ наименьшего порядка. Как уже было сказано, $A_1\subseteq\overline{A_1}$, причем $A_1\neq\overline{A_1}$. Ясно, что алгебра $\overline{A_1}$ подпрямо $Q(A)$ — неразложима, поскольку в противном случае, класс $N(\varkappa)$ не был бы квазимногообразием. Но тогда это противоречит принадлежности алгебры A_1 к совокупности $A_1, \ldots, A_n$. Следовательно, каждое из квазимногообразий совокупности (*) является дуальным атомом решетки $K_{Q(A)}$.

Покажем теперь, что каждое подквазимногообразие Q квазимногообразия $Q(A)$ включается в максимальное. Для этого заметим предварительно, что квазимногообразие $Q(A)$ порождается своими подпрямо $Q(A)$-неразложимыми алгебрами и, следовательно, порождается совокупностью $A_1, \ldots, A_n$, так как каждая подпрямо $Q(A)$-неразложимая алгебра вложима в некоторую алгебру этой совокупности. Тогда для всякого квазимногообразия $Q\subset Q(A)$ найдется алгебра A_i из совокупности $A_1, \ldots, A_n$, которая не вкладывается ни в одну алгебру из Q, поскольку в противном случае квазимнообразию Q принадлежали бы все системы совокупности $A_1, \ldots, A_n$ и, как было замечено, Q совпадало бы с $Q(A)$, что не так. Следовательно, $Q\subseteq N(A_i)$. Теорема доказана.

Теорема 2.2. Если K_0 — квазимногообразие алгебр, обладающее тем свойством, что любые две алгебры из него могут быть вложены в подпрямо K_0-неразложимую алгебру из K_0, то в решетке всех своих подквазимногообразий K_0 не разлагается в объединение конечного числа элементов, то есть для любых двух подквазимногообразий $K_1, K_2\subseteq K_0$ имеет место:

$$K_1\vee K_2=K_0 \rightarrow K_1=K_0 \text{ или } K_2=K_0.$$

Доказательство. Если имеют место собственные включения $K_1 \subset K_0$ и $K_2 \dot{\subset} K_0$, то существуют алгебры $A_1, A_2 \in K_0$ такие, что $A_1 \bar{\in} K_1$ и $A_2 \bar{\in} K_2$. По условию, существует подпрямо K_0-неразложимая алгебра B из K_0, в которую вкладываются алгебры A_1 и A_2. Увидим, что $B \in K_1 \vee K_2$. Поскольку $K_1 \vee K_2 = Q(K_1 \cup K_2) = IP_s IS_u(K_1 \cup K_2) = IP_s(ISP_u(K_1) \cup ISP_u(K_2)) = IP_s(K_1 \cup K_2)$, то принадлежность $B \in IP_s(K_1 \cup K_2)$, ввиду подпрямой K_0 — неразложимости алгебры B влечет, что $B \in K_1 \cup K_2$. Тогда отсюда вытекает, что $A_1 \in K_1$ или $A_2 \in K_2$, что неверно. Поэтому, в самом деле, $B \bar{\in} K_1 \vee K_2$. Тогда $K_1 \vee K_2 \neq K_0$, что и доказывает теорему.

Следствие 2.3. Если любые две алгебры многообразия V вкладываются в одну подпрямо неразложимую алгебру из этого многообразия, то такое многообразие не разложимо в решетке $\mathbf{K}_V$ в объединение конечного числа своих подквазимногообразий.

Это следствие вытекает из теоремы 2.2 ввиду равносильности для многообразия V подпрямой неразложимости и подпрямой V-неразложимости.

Следствие 2.4. Каждое из следующих многообразий: всех групп, всех полугрупп, всех инверсных полугрупп в решетке всех своих подквазимногообразий не разложимо в объединение конечного числа элементов.

Доказательство. Любые две группы вложимы в их прямое произведение, и каждая группа вложима в простую (в смысле гомоморфизмов) группу [9], [10]. Мы попадаем в условия предыдущего следствия. Аналогично доказывается утверждение и для случая полугрупп и инверсных полугрупп. При этом используются соответствующие теоремы вложения, полученные Л. А. Бокутем [2] и Э. Г. Шутовым [10].

Теорема 2.5. Решетка всех подмногообразий многообразия алгебр с дистрибутивными решетками конгруэнций является подрешеткой решетки всех подквазимногообразий этого многообразия.

Доказательство. Пусть V_0 многообразие, все алгебры которого обладают дистрибутивными решетками конгруэнций. Обозначим через $\mathbf{M}_{V_0}$ решетку всех подмногообразий V_0. Нужно доказать, что $\mathbf{M}_{V_0} \subset \mathbf{K}_{V_0}$. Для любого класса K алгебр обозначим через $V(K)$ наименьшее многообразие, содержащее класс K (то есть — эквациональное замыкание класса K). Пусть теперь $V_1, V_2 \in \mathbf{M}_{V_0}$. Тогда ясно, что решеточное пересечение этих многообразий в обеих решетках $\mathbf{M}_{V_0}$ и $\mathbf{K}_{V_0}$ является одним и тем же многообразием, равным их теоретико-множественному пересечению. Для объединений V_q и V_v соответственно в решетках $\mathbf{K}_{V_0}$ и $\mathbf{M}_{V_0}$ имеем следующее (используем формулу из предложения 1.1):

$$V_1 \vee_q V_2 = Q(V_1 \cup V_2) = IP_s ISP_u(V_1 \cup V_2) =$$
$$= IP_s(ISP_u(V_1) \cup ISP_u(V_2)) = IP_s(V_1 \cup V_2) =$$
$$= IP_s(HSP_u(V_1) \cup HSP_u(V_2)) =$$
$$= IP_s HSP_u(V_1 \cup V_2) = V(V_1 \cup V_2) = V_1 \vee_v V_2.$$

Здесь символ $H(K)$ обозначает класс всех гомоморфных образов алгебр из класса K, и предпоследнее равенство написано ввиду результата Йонссона [13], теорема 3.3. Этим завершается доказательство.

3. Квазимногообразия решеток

Теорема 3.1. Наименьшее квазимногообразие решеток, содержащее некоторую совокупность K решеток, тогда и только тогда совпадает с многообразием всех решеток, когда наименьший универсально аксиоматизируемый класс, содержащий K, совпадает с многообразием всех решеток.

Доказательство. Пусть наименьшее квазимногообразие, содержащее совокупность K, совпадает с многообразием всех решеток, то есть $L = Q(K)$. Тогда по предложению 1.1, $L = IP_s ISP_u(K)_e$ и по следствию 1.2, всякая подпрямо неразложимая решетка принадлежит классу $ISP_u(K)$. Ввиду того, что всякая решетка вкладывается в подпрямо неразложимую решетку (лемма 5.1 из [13]), заключаем, что все решетки исчерпываются классом $ISP_u(K)$. Последний является в точности наименьшим универсально аксиоматизируемым классом, содержащим совокупность K. Достаточность вытекает из того факта, что наименьший универсальный класс, содержащий K, включается в наименьшее квазимногообразие, содержащее K.

Предложение 3.2. В решетке $\mathbf{K}_L$ всех квазимногообразий решеток элемент L не представим в виде теоретико-решеточного объединения конечного числа отличных от L элементов.

Доказательство. Любые две решетки вкладываются в третью решетку, являющуюся их прямым произведением. В силу леммы 5.1 из [13], любая решетка вкладывается в подпрямо неразложимую решетку. Следовательно, любые две решетки вкладываются в подпрямо неразложимую решетку. Осталось применить следствие 2.3.

Предложение 3.3. Решетка всех многообразий решеток является (0,1) — подрешеткой решетки всех квазимногообразий решеток.

Это следует из теоремы 2.5 ввиду дистрибутивности решеток конгруэнций на решетках.

Следствие 3.4. [13], [11]. В решетке всех многообразий решеток многообразие L всех решеток не разложимо в теоретико-решеточное объединение конечного числа отличных от L элементов.

Доказательство. Если бы элемент L разлагался в решетке $\mathbf{M}_L$ всех многообразий решеток в теоретико-решеточное объединение конечного числа отличных от L элементов, то ввиду того, что $\mathbf{M}_L$ является (0,1) — подрешеткой решетки $\mathbf{K}_L$, он разлагался бы и в решетке $\mathbf{K}_L$ в теоретико-решеточное объединение конечного числа отличных от L элементов. Но последнее не имеет места согласно предложению 3.2.

Автор признателен С. Р. Когаловскому и В. Н. Салию за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Теория структур. М., 1952.

2. Бокуть Л. А. Некоторые теоремы вложения для колец и полугрупп (1). — Сибирск. матем. ж., 1963, 4, № 3, 500—518.

3. Игошин В. И. Характеризуемые классы алгебраических систем.— XII Всесоюзн. алгебраич. коллоквиум (тезисы сообщений), Свердловск, 1973, 274.

4. Игошин В. И. Квазимногообразия решеток. — Матем. заметки, 1974, 16, № 1, 49—56.

5. Кон П. Универсальная алгебра. М., 1968.

6. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М., 1970.

7. Мальцев А. И. О некоторых пограничных вопросах алгебры и логики. — Международный конгресс математиков (Тезисы докладов по приглашению), М., 1968, 217—231.

8. Мальцев А. И. Подпрямые произведения моделей. — ДАН СССР, 1956, 109, № 2, 264—266.

9. Цаленко М. С. Несколько замечаний о бесконечных простых группах. — Сибирск. матем. ж., 1963, 4, № 1, 227—231.

10. Шутов Э. Г. Погружения полугрупп в простые и полные полугруппы. — Матем. сб., 1963, 62, № 4, 496—511.

11. Dean R. A., Evans T. A remark on varieties of lattices and semigroups. — Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 21, N 2, 394—396.

12. Frayne T., Morel A. C., Scott D. Reduced direct products.— Fund. Math., 1962, 51, 195—226.

13. Jónsson B. Algebras whose congruence lattices are distributive. — Math. Scand., 1967, 21, 110—121.

В. С. КОРНИЕНКО

О ПЛОСКИХ ПОЛИГОНАХ НАД ДИСТРИБУТИВНЫМИ СТРУКТУРАМИ

Пусть D — дистрибутивная структура с нулем O_D и единицей 1_D. Полуструктура $<A, +, O_A>$ с нулем O_A называется левым D-полигоном, если для каждого элемента $a \in A$ и каждого $\lambda \in D$ определено произведение $\lambda a \in A$, причем для любых x, $y \in A$, λ, $\mu \in D$, справедливы равенства:

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y,$$

$$(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x,$$

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x),$$

$$O_D x = \lambda O_A = O_A,$$

$$1_D x = x.$$

Аналогично определяются правые D-полигоны. В данной работе строится тензорное произведение полигонов, которое используется для введения понятия плоского полигона. Доказывается критерий плоскостности полигона (теорема 2) и указывается его применение.

Всюду в дальнейшем через i_A будем обозначать тождественный автоморфизм произвольной полуструктуры A, а через 2 — полуструктуру, состоящую из двух элементов 0 и 1, где $0 < 1$. Заметим, что каждую полуструктуру с нулем можно рассматривать как 2-полигон. При этом 2-гомоморфизмами являются гомоморфизмы полуструктур, сохраняющие нуль и только они (см. [4]).

Определение 1. Пусть M и N соответственно правый и левый D-полигон над произвольной дистрибутивной структурой D, P — полуструктура с нулем. Отображение f декартово произведения множеств $M \times N$ в полуструктуру P называется *сбалансированным*, если:

$$(i)\ f(m_1+m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n),$$

$$(ii)\ f(m, n_1+n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2),$$

$$(iii)\ f(m, \lambda n) = f(m\lambda, n),$$

для всех $\lambda \in D$, m, $m_i \in M$, n, $n_i \in N$ $(i=1, 2)$.

Определение 2. Пусть $f: M\times N\to P$ и $\varphi: M\times N\to T$ сбалансированные отображения. Скажем, что отображение f *факторизуемо* парой (T, φ), если существует единственный гомоморфизм $f^*: T\to P$ такой, что $f=f^*\varphi$. Изоморфизм пар (T, t) и (T', t') означает существование такого изоморфизма $\varphi: T\longrightarrow T'$, что $\varphi t=t'$.

Теорема 1. Пусть M и N соответственно правый и левый D-полигоны. Существует единственная с точностью до изоморфизма пара (T, t), где T — полуструктура, t — сбалансированное отображение из $M\times N$ в T, такая, что любое сбалансированное отображение из $M\times N$ в произвольную полуструктуру P факторизуемо парой (T, t).

Доказательство. Пусть F — свободная полуструктура с нулем, порожденная множеством $M\times N$, и w — каноническое включение $M\times N$ в F. Пусть Λ — множество всех пар вида:

$$(w(m_1+m_2, n), w(m_1, n)+w(m_2, n)),$$

$$(w(m, n_1+n_2), w(m, n_1)+w(m, n_2)),$$

$$(w(m, \lambda n), w(m\lambda, n)),$$

где $m, m_1, m_2\in M$, $n, n_1, n_2\in N$ и $\lambda\in D$.

Обозначим через ε — наименьшую конгруэнцию на полуструктуре F, содержащую Λ. Пусть $T=F/\varepsilon$, k — канонический гомоморфизм из F на T, и $t=kw$. Покажем, что t — сбалансированное отображение и что любое сбалансированное отображение из $M\times N$ в произвольную полуструктуру P факторизуемо парой (T, t).

Действительно,

$$t(m_1+m_2, n)=kw(m_1+m_2, n)=$$
$$=k(w(m_1, n)+w(m_2, n))=kw(m_1, n)+kw(m_2, n)=$$
$$=t(m_1, n)+t(m_2, n).$$

Аналогично доказывается, что

$$t(m, n_1+n_2)=t(m, n_1)+t(m, n_2).$$

Наконец,

$$t(m, \lambda n)=kw(m, \lambda n)=kw(m\lambda, n)=t(m\lambda, n).$$

Таким образом, t — сбалансированное отображение. Пусть v — некоторое сбалансированное отображение из $M\times N$ в полуструктуру P. В силу определения свободной полуструктуры существует единственный гомоморфизм f из F в P такой, что $v=fw$. Так как v — сбалансированное отображение, то ker f содержит все пары из Λ. Но ε — наименьшая конгруэнция, содержащая все пары из Λ. Поэтому ker $k=\varepsilon\subseteq$ ker f и, следовательно, $f=uk$ для некоторого единственного гомоморфизма u из T в P. Таким образом, $v=fw=ukw=ut$.

Пусть (T', t') — другая такая пара, что любое сбалансированное отображение из $M\times N$ в произвольную полуструктуру факторизуемо парой (T', t'). Покажем, что пары (T, t) и (T', t') изоморфны. В самом деле, поскольку (T, t) удовлетворяет условию теоремы, то существует единственный гомоморфизм $\varphi: T\longrightarrow T'$, для которого $\varphi t=t'$. Точно так же существует единственный гомоморфизм $\psi: T'\longrightarrow T$, для которого $\psi t'=t$. Так как $\psi\varphi t=\psi(\varphi t)=\psi t'=t=i_T t$ и t — эпиморфизм, то $i_T=\psi\varphi$. Совершенно аналогично доказывается, что $i_{T'}=\varphi\psi$. Таким образом, φ — изоморфизм и $\varphi t=t'$, то есть пары (T, t) и (T', t') изоморфны.

Определение 3. Пара (T, t), построенная в предыдущей теореме, называется *тензорным произведением полигонов* M и N.

В дальнейшем полуструктуру T будем обозначать через $M\otimes N$, а образ пары (m, n) при отображении t — через $m\otimes n$.

Из доказательства предыдущей теоремы следует, что

$$(m_1+m_2)\otimes n=m_1\otimes n+m_2\otimes n,$$
$$m\otimes(n_1+n_2)=m\otimes n_1+m\otimes n_2,$$
$$m\lambda\otimes n=m\otimes\lambda n.$$

Предложение 1. Имеет место естественный изоморфизм полуструктур

$$D\otimes M\cong M.$$

Доказательство. В силу теоремы 1, для сбалансированного отображения $\psi': D\times M\to M$, определяемого условием $\varphi'(\lambda, m)=\lambda m$, существует такой 2-гомоморфизм: $\varphi: D\otimes\otimes M\to M$, что $\varphi(\lambda\otimes m)=\lambda m$. При этом из равенства $\lambda m=\mu n$ следует, что $\lambda\otimes m=1\otimes\lambda m=1\otimes\mu n=\mu\otimes n$, то есть φ — мономорфизм, и $\varphi(1\otimes m)=m$ для любого $m\in M$, то есть φ является изоморфизмом.

Замечание. Аналогично можно показать, что $M\otimes D\cong M$.

Далее, пусть A, A'-правые D-полигоны, B, B' — левые D-полигоны, f—D-гомоморфизм из A в A', g—D-гомоморфизм из B в B', $(T, t)=A\otimes B$, $(T', t')=A'\otimes B'$. Определим отображение $\eta : A\times B\to A'\times B'$, полагая $\eta(a, в)=(f(a), g(в))$ для любого элемента $(a, в)$ из $A\times B$. Покажем, что $t'\eta$ — сбалансированное отображение из $A\times B$ в T'. Действительно, если $a_1, a_2\in A$, $в\in B$, $\lambda\in D$, то

$$t'\eta(a_1+a_2, в)=t'(f(a_1+a_2), g(в))=t'(f(a_1)+f(a_2), g(в))=$$
$$=t'(f(a_1), g(в))+t'(f(a_2), g(в))=t'\eta(a_1, в)+t'\eta(a_2\, в).$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$t'\eta(a, в_1+в_2)=t'\eta(a, в_1)+t'\eta(a, в_2).$$

Далее,

$$t'\eta(a\lambda, в)=t'(f(a\lambda), g(в))=t'(f(a)\lambda, g(в))=$$
$$=t'(f(a), \lambda g(в))=t'(f(a), g(\lambda в))=t'\eta(a, \lambda в).$$

Таким образом, $t'\eta$ — сбалансированное отображение из $A\times B$ в T'. Обозначим через $f\otimes g$ единственный гомоморфизм из T в T', для которого $(f\otimes g)t=t'\eta$, существующий в силу теоремы 1.

Пусть F, k, w и F', k', w' имеют соответственно для множеств $A\times B$ и $A'\times B'$ тот же смысл, что в доказательстве теоремы 1, а $\bar\eta$ обозначает единственный гомоморфизм из F в F' такой, что $\bar\eta w=w'\eta$. Из определения $f\otimes g$ видно, что

$$k'\bar\eta w=k'w'\eta=(f\otimes g)kw,$$

так что $k'\bar\eta=(f\otimes g)k$ (рис. 1).

$$\begin{tikzcd}
A\times B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "w"] & A'\times B' \arrow[d, "w'"] \\
F \arrow[r, "\bar\eta"] \arrow[d, "k"] & F' \arrow[d, "k'"] \\
T \arrow[r, "f\otimes g"'] & T'
\end{tikzcd}$$

Рис. 1

Замечание. Напомним, что в обеих категориях эпиморфизмы являются гомоморфизмами «на», то есть наложениями (см. [7]).

Предложение 2. Если f и g — эпиморфизмы категории D-полигонов, то $f\otimes g$ — эпиморфизм категории полуструктур с нулем.

Доказательство. Так как η— наложение, то $\bar\eta$ — наложение, следовательно, $(f\otimes g)k=k'\bar\eta$, а, значит, и $f\otimes g$ — наложение, что и требовалось доказать.

Так как все полигоны над фиксированной дистрибутивной структурой D образуют многообразие универсальных алгебр, то мы можем говорить о прямом произведении $\prod\limits_i A_i$ семейства $\{A_i\}_i D$ — полигонов A_i (см. [11], стр. 63).

При этом справедливо

Предложение 3. Прямое произведение $\prod\limits_{i} A_i$ семейства D-полигонов $\{A_i\}_i$ инъективно тогда и только тогда, когда инъективен каждый сомножитель A_i (см. [10], стр. 71).

Замечание. Напомним, что прямые суммы и копроизведения в категории D-полигонов совпадают см. [6]).

Лемма 1. Пусть дано семейство левых D-полигонов $\{A_i\}_i$ и 2 — левый D-полигон. Тогда имеет место изоморфизм

$$\prod_{i}(\mathrm{Hom}_2(A_i, 2)) \cong \mathrm{Hom}_2(\bigoplus_{i} A_i, 2),$$

где $\bigoplus\limits_{i} A_i = A$ — прямая сумма семейства $\{A_i\}_i$.

Доказательство вполне аналогично стандартному доказательству этого факта для случая модулей над кольцами (см., например, [12], стр. 40, упр. 2).

Лемма 2. Отображение $\varphi: A \to 2$ 2-полигона A в 2-полигон 2 будет 2-гомоморфизмом тогда и только тогда, когда множество $\{x \in A \mid \varphi(x) = 0\}$ является идеалом полуструктуры A.

Доказательство. Так как полными прообразами нуля при любом полуструктурном гомоморфизме, сохраняющем нуль, являются идеалы, то в одну сторону утверждение очевидно. Пусть $A' = \{x \in A \mid \varphi(x) = 0\}$ — идеал в A. Ясно, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \in A' \\ 1, \text{ если } x \overline{\in} A'. \end{cases}$$

Покажем, что φ является 2-гомоморфизмом. Действительно, если $x, y \in A'$, то $(x+y) \in A'$ и $\varphi(x+y) = 0 = 0 + 0 = \varphi(x) + \varphi(y)$. Если же $x \overline{\in} A'$ или $y \overline{\in} A'$, то $(x+y) \overline{\in} A'$, поскольку A' — идеал. Значит, $\varphi(x+y) = 1$, причем $\varphi(x) = 1$ или $\varphi(y) = 1$, то есть $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Так как $0 \in A'$, то $\varphi(0) = 0$, и доказательство закончено.

Покажем, что полуструктура 2 удовлетворяет следующим свойствам:

(i) 2 — инъективный полигон в категории 2-полигонов,

(ii). Для любой полуструктуры A с нулем существует 2-гомоморфизм φ, который переводит заданные элементы $a_1, a_2 \in A$ в различные элементы из 2.

В самом деле, в силу [5], 2 является инъективным 2-полигоном. Пусть, далее, a и $в$ различные элементы полуструктуры A с нулем. Не ограничивая общности, можно считать, что $в \not\leqslant a$. Определим отображение $\varphi: A \to 2$, полагая $\varphi(x) = 0$, если $x \leqslant a$, и $\varphi(x) = 1$ в противном случае. Из леммы 2 следует, что отображение φ является 2-гомоморфизмом. При этом $\varphi(a)=0\neq 1=\varphi(в)$.

Пусть M — произвольная полуструктура с нулем, а $I(M)$ — структура ее идеалов. Рассматривая M как 2-полигон, определим $M^*=\mathrm{Hom}_2(M, 2)$. Для всякого $\varphi\in M^*$ через I_φ будем обозначать полный прообраз 0. Конечно, по лемме 2, $I_\varphi\in I(M)$ и для задания гомоморфизма φ достаточно задать идеал I_φ.

Лемма 3. Множество M^* можно превратить в структуру, полагая для любых $\varphi, \psi\in M^*$

$$\varphi+\psi=\nu, \text{ где } I_\nu=I_\varphi\cap I_\psi,$$
$$\varphi\cdot\psi=\mu, \text{ где } I_\mu=I_\varphi\cup I_\psi,$$

(символами $\cap$ и $\cup$ обозначаются операции в структуре $I(M)$).

Доказательство. Согласно лемме 2, $\nu, \mu\in M^*$. Выполнение аксиом структуры для введенных операций немедленно следует из справедливости их в $I(M)$.

Замечание. Нетрудно проверить, что $(\varphi+\psi)x=\varphi(x)+\psi(x)$ для любого $x\in M$.

Предложение 4. Если M — произвольная полуструктура с нулем, то отображение $\varphi\to I_\varphi$ осуществляет дуальный изоморфизм структуры M^* на структуру $I(M)$.

Доказательство. Ясно, что отображение $\varphi\to I_\varphi$ является вложением. Покажем, что данное отображение — наложение. Действительно, ввиду леммы 2, каждый элемент $I_0\in I(M)$ можно рассматривать как I_{φ_0} для гомоморфизма $\varphi_0\in M^*$, определенного следующим образом:

$$\varphi_0(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\in I_0 \\ 1, & \text{если } x\,\overline{\in}\, I_0. \end{cases}$$

Таким образом, отображение $\varphi\to I_\varphi$ — биективно. После этого дуальный изоморфизм структур M^* и $I(M)$ вытекает из определения операций в M^* (см. формулировку леммы 3).

Предложение 5. Если M — правый D-полигон, то, полагая

$$(\lambda\varphi)m=\varphi(m\lambda),$$

для любых $\varphi\in M^*$ и $\lambda, \mu\in D$, превращаем M^* в левый D-полигон.

Доказательство состоит в непосредственной проверке аксиом полигона:

$$(\lambda(\varphi+\psi))m=(\varphi+\psi)(m\lambda)=\varphi(m\lambda)+\psi(m\lambda)=(\lambda\varphi)m+(\lambda\psi)m,$$
$$((\lambda+\mu)\varphi)m=\varphi(m(\lambda+\mu))=\varphi(m\lambda+m\mu)=\varphi(m\lambda)+\varphi(m\mu)=$$

$$=(\lambda\varphi)m+(\mu\varphi)m,$$

$$((\lambda\mu)\varphi)m=\varphi(m(\lambda\mu))=\varphi((m\lambda)\mu)=(\mu\varphi)m\lambda=(\lambda(\mu\varphi))m,$$

$$(0_D\varphi)m=\varphi(m0_D)=\varphi(0)=0=(\lambda 0)m=0(m\lambda),$$

$$(1_D\varphi)m=\varphi(m1_D)=\varphi(m).$$

Аналогично, если M — левый D-полигон, то M^* — правый D-полигон.

Определение 4. Назовем полигон M^* *полигоном характеров* D*-полигона* M.

Лемма 4. Если A — конечный D-полигон, то существует биективное отображение множества A на множество A^*.

Доказательство. Пусть A — конечный D-полигон. Тогда все его идеалы являются главными. Ясно, что отображение $a\to\varphi_a$, где $a\in A$, $\varphi_a\in A^*$ такое, что $I_{\varphi_a}=\{x\in A\mid x\leqslant a\}$, является и вложением и наложением.

Лемма 5. Всякий D-полигон M можно вложить в D-полигон M^{**}.

Доказательство. Покажем, что отображение $m\to\theta_m$, где $m\in M$ и $\theta_m(\varphi)=\varphi(m)$ для всякого $\varphi\in M^*$, осуществляет вложение полигона M в полигон M^{**}. Поскольку

$$\theta_m(\varphi_1+\varphi_2)=(\varphi_1+\varphi_2)m=\varphi_1(m)+\varphi_2(m)=\theta_m(\varphi_1)+\theta_m(\varphi_2)$$

и $\theta_m(0)=0(m)=0$, то $\theta_m\in M^{**}$. Пусть $m_1\neq m_2$ в M, но $\theta_{m_1}=\theta_{m_2}$. Тогда $\theta_{m_1}(\varphi)=\theta_{m_2}(\varphi)$ для любого $\varphi\in M^*$. Поэтому $\varphi(m_1)=\theta_{m_1}(\varphi)=\theta_{m_2}(\varphi)=\varphi(m_2)$ для всякого $\varphi\in M^*$, что противоречит свойству (*ii*) 2 — полигона 2. Таким образом, отображение $m\to\theta_m$ является вложением. Согласно определению θ_m, имеем

$$\theta_{m_1+m_2}(\varphi)=\varphi(m_1+m_2)=\varphi(m_1)+\varphi(m_2)=\theta_{m_1}(\varphi)+\theta_{m_2}(\varphi),$$

и

$$(\theta_m\lambda)\varphi=\theta_m(\lambda\varphi)=(\lambda\varphi)m=\varphi(m\lambda)=\theta_{m\lambda}(\varphi).$$

Следовательно, отображение $m\to\theta_m$ является D-гомоморфизмом.

Предложение 6. Если M — конечный D-полигон, то полигоны M и M^{**} изоморфны.

Доказательство. Пусть M — конечный полигон. Тогда по лемме 4 полигоны M и M^{**} имеют одинаковое число элементов и, следовательно, вложение, построенное в лемме 5, является изоморфизмом.

Пусть A, B — правые D-полигоны и $\varphi: A\to B$ их D-гомоморфизм. Определим отображение $\varphi^*: B^*\to A^*$, полагая $(\varphi^* b^*)a=b^*\varphi(a)$ для любых $b^*\in B^*$ и $a\in A$. Так как для любых b_1^*, $b_2^*\in B^*$ и $\lambda\in D$ имеем

$$(\varphi^*(в_1^*+в_2^*))a=(в_1^*+в_2^*)(\varphi a)=(в_1^*(\varphi a)+в_2^*(\varphi a)=$$
$$(\varphi^* в_1^*)a+(\varphi^* в_2^*)a,$$
$$(\varphi^*(\lambda в^*))a=(\lambda в^*)(\varphi a)=\lambda(в^*(\varphi a))=\lambda((\varphi^* в^*)a),$$
то φ^* является гомоморфизмом D-полигонов B^* и A^*.

Лемма 6. Пусть A и B — D-полигоны. Гомоморфизм $\varphi : A \to B$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $\varphi^* : B^* \to A^*$ — эпиморфизм.

Доказательство. Пусть $\varphi : A \to B$ — мономорфизм и $a^* \in A^*$. Так как 2 — инъективный 2-полигон (см. (i)), то существует 2-гомоморфизм $в^* \in B^*$, такой, что $в^* \varphi^* = a^*$. Но $a^* a = (в^* \varphi) a = (\varphi^* в^*) a$. Таким образом, $a^* = \varphi^* в^*$, следовательно, φ^* — эпиморфизм. Пусть теперь $\varphi^* : B^* \to A^*$ — эпиморфизм. Тогда для любого $a^* \in A^*$ существует такой $в^* \in B^*$, что $\varphi^* в^* = a^*$. Если $\varphi a_1 = \varphi a_2$ для некоторых $a_1, a_2 \in A$, то

$$a^* a_1 = (\varphi^* в^*) a_1 = в^*(\varphi a_1) = в^*(\varphi a_2) = (\varphi^* в^*) a_2 = a^* a_2$$

для любого $a^* \in A^*$. Следовательно, $a_1 = a_2$, так как в противном случае, согласно свойству (ii), существовал бы такой гомоморфизм $a_0^* : A \to 2$, что $a_0^* a_1 \neq a_0^* a_2$. Значит, φ — мономорфизм.

Пусть R, P, C — левые D-полигоны и φ — D-гомоморфизм из R в P. Определим отображение $\psi : \mathrm{Hom_D}(P, C) \to \mathrm{Hom_D}(R, C)$, полагая $(\psi f) r = f(\varphi r)$ для любых $f \in \mathrm{Hom_D}(P, C)$ и $r \in R$. Покажем, что ψ — 2-гомоморфизм. Пусть $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom_D}(P, C)$. Тогда

$$(\varphi(f_1+f_2))r=(f_1+f_2)(\varphi r)=f_1(\varphi r)+f_2(\varphi r)=(\psi f_1)r+(\psi f_2)r$$

и

$$(\psi 0) r = 0(\varphi r) = 0.$$

Положим $\psi = \mathrm{Hom}(\varphi, C)$.

Лемма 7. Для того, чтобы при любом мономорфизме φ 2 — гомоморфизм $\mathrm{Hom}(\varphi, C)$ являлся эпиморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы D-полигон C был инъективным.

Доказательство. Пусть $\psi = \mathrm{Hom}(\varphi, C)$ — эпиморфизм при любом мономорфизме $\varphi : R \to P$ и $f \in \mathrm{Hom_D}(R, C)$. Так как ψ эпиморфизм, то существует такой гомоморфизм $\nu \in \mathrm{Hom_D}(P, C)$, что $\psi\nu = f$. А это означает, что $(\psi\nu) r = \nu(\varphi r) = f(r)$ для всех $r \in R$, то есть $\nu\varphi = f$ и C — инъективный D-полигон. Достаточность очевидна.

Лемма 8. Пусть M и C — D-полигоны. Тогда $\mathrm{Hom_D}(C, M^*)$ и $(M \otimes C)^*$ изоморфны как 2 - полигоны.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_D(C, M^*)$, $c \in C$, $m \in M$. Определим отображение $f : M \times C \to 2$, полагая $f(m, c) = (\varphi c)m$, и покажем, что оно является сбалансированным. В самом деле,

$$f(m_1+m_2, c) = (\varphi c)(m_1+m_2) = (\varphi c)m_1 + (\varphi c)m_2 = \\ = f(m_1, c) + f(m_2, c).$$

Аналогично доказывается, что $f(m, c_1+c_2) = f(m, c_1) + f(m, c_2)$

Пусть $\lambda \in D$. Тогда:

$$f(m\lambda, c) = (\varphi c)(m\lambda) = (\lambda(\varphi c))m = (\varphi(\lambda c))m = f(m, \lambda c).$$

Согласно теореме 1, существует единственный гомоморфизм f' из $M \otimes C$,в 2 такой, что $f = f't$. Таким образом, мы получили отображение $\Phi : \mathrm{Hom}_D(C, M^*) \to (M \otimes C)^*$, определяемое условием $\Phi(\varphi) = f'$. Пусть φ, φ_1, $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}_D(C, M^*)$, а f, f_1, f_2 — соответствующие им сбалансированные отображения из $M \times C$ в 2. Если $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, то

$$f(m, c) = ((\varphi_1+\varphi_2)c)m = (\varphi_1 c + \varphi_2 c)m = (\varphi_1 c)m + (\varphi_2 c)m = \\ = f_1(m, c) + f_2(m, c) = (f_1+f_2)(m, c),$$

то есть $f_1 + f_2 = f$. Полагая $\Phi(\varphi) = f'$, $\Phi(\varphi_1) = f_1'$ и $\Phi(\varphi_2) = f_2'$ мы получим ввиду определения Φ, что $f'(t) = f_1'(t) + f_2'(t) = (f_1+f_2)t$, откуда $f' = f_1' + f_2'$, так как t — эпиморфизм. Очевидно, что $\Phi(0) = 0$. Значит, Φ является 2-гомоморфизмом. С другой стороны, мы можем определить отображение $\theta : (M \otimes C)^* \to \mathrm{Hom}_D(C, M^*)$, положив $\theta(f') = \varphi$, где $(\varphi c)m = f'(m \otimes c)$ для любого $f' \in (M \otimes C)^*$ и для всех $c \in C$ и $m \in M$. В самом деле, $(\varphi c) \in \mathrm{Hom}_D(C, M^*)$, поскольку для всех $m \in M$ имеем

$$(\varphi(c_1+c_2))m = f'(m \otimes (c_1+c_2)) = f'(m \otimes c_1) + f'(m \otimes c_2) = \\ = (\varphi c_1)m + (\varphi c_2)m = (\varphi c_1 + \varphi c_2)m,$$

и

$$(\varphi(\lambda c))m = f'(m \otimes \lambda c) = (\varphi c)(m\lambda) = (\lambda(\varphi c))m,$$

откуда $\varphi(c_1+c_2) = \varphi(c_1) + \varphi(c_2)$ и $\varphi(\lambda c) = \lambda(\varphi(c))$. Если далее $f' = f_1' + f_2'$, $\theta(f') = \varphi$, $\theta(f_1') = \varphi_1$, $\theta(f_2') = \varphi_2$, то

$$(\varphi c)m = f'(m \otimes c) = (f_1' + f_2')(m \otimes c) = f_1'(m \otimes c) + f_2'(m \otimes c) = \\ = (\varphi_1 c)m + (\varphi_2 c)m,$$

то есть $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Наконец, если $(\varphi c)m = 0(m\otimes c) = 0$ для всех $c\in C$, $m\in M$, то $\varphi = 0$, то есть $\theta(0) = 0$. Таким образом, θ является 2-гомоморфизмом.

Покажем, что гомоморфизмы θ и Φ взаимно обратны, то есть являются изоморфизмами. В самом деле, пусть $\theta\Phi(\varphi) = \varphi'$ и $\Phi(\varphi) = f'$. Тогда $(\varphi' c)m = f'(m\otimes c) = f't(m, c) = f(m, c) = (\varphi c)m$, то есть $\varphi = \varphi'$. Равенство $\Phi\theta = i$ проверяется точно так же. Лемма доказана.

Определение 5. Полигон M называется *плоским*, если для любого мономорфизма $f: A\to B$ индуцированный гомоморфизм $i_M\otimes f: M\otimes A\to M\otimes B$ также является мономорфизмом.

Теорема 2. Правый D-полигон M является плоским тогда и только тогда, когда левый D-полигон M^* инъективен.

Доказательство. Пусть мономорфизм $g\in \mathrm{Hom}_D(A, B)$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\theta(i_M\otimes g)^*\Phi : \mathrm{Hom}_D(B, M^*)\to \mathrm{Hom}_D(A, M^*).$$

Для любых $a\in A$, $m\in M$ и $\varphi\in \mathrm{Hom}_D(B, M^*)$, используя соответствующие определения, получаем

$$\begin{aligned}((\theta(i_M\otimes g)^*\Phi\varphi)a)m &= ((i_M\otimes g)^*\Phi\varphi)(m\otimes a) = \\ &= (\Phi\varphi)((i_M\otimes g)(m\otimes a)) = (\Phi\varphi)(m\otimes ga) = \\ &= (\Phi\varphi)(t(m, ga)) = (\varphi(ga))m.\end{aligned}$$

Следовательно, $(\theta(i_M\otimes g)^*\Phi\varphi)a = \varphi(ga)$ для всех $a\in A$ и $\varphi\in \mathrm{Hom}_D(B, M^*)$, откуда $\theta(i_M\otimes g)^*\Phi = \mathrm{Hom}(g, M^*)$. Поскольку θ и Φ — изоморфизмы, то отсюда из леммы 6 вытекает, что инъективность полигона M^* равносильна эпиморфности гомоморфизма $(i_M\otimes g)^*$ для всякого мономорфизма g. Применяя лемму 6 для 2-полигона, убедимся, что последнее условие равносильно мономорфности гомоморфизма $i_M\otimes g$ для всех мономорфизмов g или, что то же самое, плоскостности полигона M. Теорема доказана.

Теорема 3. Прямая сумма семейства $\{A_i\}_I$ D-полигонов является плоским D-полигоном тогда и только тогда, когда каждый полигон A_i плоский.

Доказательство. В силу теоремы 2, прямая сумма семейства $\{A_i\}_I$ является плоским полигоном тогда и только тогда, когда ее полигон характеров $\mathrm{Hom}_2(\bigoplus_i A_i, 2)$ инъективен, то есть когда инъективен полигон $\prod_i A_i^*$ (см. лемму 1). Но последнее, в силу предложения 3, равносильно инъективности каждого из полигонов A_i^*, то есть плоскостности каждого из полигонов A_i (см. теорему 2).

П р е д л о ж е н и е 7. Полигон D является плоским.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi: A \to B$ — мономорфизм. Согласно предложению 1, $D\otimes A\cong A$, и $D\otimes B\cong B$, откуда следует, что $i_D\otimes\varphi: D\otimes A\to D\otimes B$ — мономорфизм.

П р е д л о ж е н и е 8. Если D-полигон M является плоским, то для любого идеала I из D имеет место изоморфизм полуструктур $M\otimes I\cong MI$. (Здесь MI — полуструктура, порожденная элементами вида $m\lambda$, где $m\in M$, $\lambda\in I$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если M — плоский D-полигон и: $\varphi: I\to D$ — мономорфизм, то $i_M\otimes\psi: M\otimes I\to M\otimes D$ также мономорфизм. В силу замечания к предложению 1, существует изоморфизм $\psi: M\otimes D\to M$. Тогда $\psi(i_M\otimes\varphi): M\otimes I\to M$ — мономорфизм, образом которого является полуструктура MI. Значит, $M\otimes I\cong MI$.

Т е о р е м а 4. Всякий проективный D-полигон является плоским.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предварительно установим, что имеет место:

Л е м м а. Каждый ретракт плоского D-полигона является плоским полигоном.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A — ретракт плоского D-полигона M. Тогда существует D-мономорфизм $i: A\to M$ и D-эпиморфизм $\pi: M\to A$ такие, что $\pi i=i_A$. Пусть $j: C\to P$ — произвольный мономорфизм из полигона C в полигон P. Так как $\pi i=i_A$, то $i_C\otimes\pi i=i_C\otimes i_A$. Из определения отображения $i_C\otimes i_A$ вытекает, что оно является тождественным автоморфизмом полуструктуры $C\otimes A$. Покажем теперь, что $(i_C\otimes\pi)(i_C\otimes i)=i_C\otimes i_A$. Для этого рассмотрим диаграмму (рис. 2).

$$\begin{tikzcd}
C\times A \arrow[rr, shift right, "\eta"'] \arrow[d, "t"'] & & C\times M \arrow[ll, shift right, "\eta'"'] \arrow[d, "t'"] \\
C\otimes A \arrow[rr, shift left, "i_C\otimes i"] & & C\otimes M \arrow[ll, shift left, "i_C\otimes\pi"]
\end{tikzcd}$$

Рис. 2

где $\eta(c, a)=(c, i(a))$, $\eta'(c, m)=(c, \pi(m))$.

Пусть $c\otimes a\in C\otimes A$. Тогда $c\otimes a=t(c, a)$, откуда

$$(i_C\otimes\pi)(i_C\otimes i)(c\otimes a)=(i_C\otimes\pi)(i_C\otimes i)t(c, a)=(i_C\otimes\pi)t'\eta(c, a)=$$

$$=(i_C\otimes\pi)t'(c, i(a))=t\eta'(c, i(a))=t(c, \pi i(a))=$$

$$=t(c, a)=c\otimes a=(i_C\otimes i_A)(c\otimes a).$$

Таким образом, $(i_C\otimes\pi)(i_C\otimes i)=i_C\otimes i_A$. Поскольку $i_C\otimes i_A$ — мономорфизм, то $i_C\otimes i$ является мономорфизмом.

Покажем теперь, что $(i_P\otimes i)(j\otimes i_A)=(j\otimes i_M)(i_C\otimes i)$. Для этого рассмотрим диаграмму (рис. 3),

где $\eta(c,\ a)=(j(c),\ a)$, $\varphi(c,\ a)=(c,\ i(a))$, $\psi(p,\ a)=(p,\ i(a))$, $\eta'(c,\ m)=(j(c),\ m)$. Имеем

$$(i_P\otimes i)(j\otimes i_A)(c\otimes a)=(i_P\otimes i)(j\otimes i_A)t(c,\ a)=(i_P\otimes i)t'\eta(c,\ a)=$$
$$=(i_P\otimes i)t'(j(c),\ a)=t'''\psi(j(c),\ a)=t'''(j(c),\ i(a)).$$

С другой стороны,

$$\begin{tikzcd}
 & CXA \arrow[rr, "\varrho"] \arrow[d, "t"] \arrow[dddl, "\varphi"'] & & PXA \arrow[d, "t'"'] \arrow[dddr, "\psi"] & \\
 & C\otimes A \arrow[rr, "j\otimes i_A"] \arrow[d, "i_C\otimes i"] & & P\otimes A \arrow[d, "i_P\otimes i"'] & \\
 & C\otimes M \arrow[rr, "j\otimes i_M"] & & P\otimes M & \\
CXM \arrow[ur, "t''"] \arrow[rrrr, "\varrho'"'] & & & & PXM \arrow[ul, "t'''"']
\end{tikzcd}$$

Рис. 3

$$(j\otimes i_M)(i_C\otimes i)(c\otimes a)=(j\otimes i_M)(i_C\otimes i)t(c,\ a)=(j\otimes i_M)t''\varphi(c,a)=$$
$$=(j\otimes i_M)t''(c,\ i(a))=t'''\eta'(c,\ i(a))=t'''(j(c),\ i(a)).$$

Следовательно, $(i_P\otimes i)(j\otimes i_A)=(j\otimes i_M)(i_C\otimes i)$. Поскольку $i_C\otimes i$ и $j\otimes i_M$ — мономорфизмы, то $j\otimes i_A$ является мономорфизмом, что означает плоскостность D-полигона A.

Переходя к доказательству теоремы, предположим, что P — проективный D-полигон. Тогда P является ретрактом свободного D-полигона $F=\bigoplus\limits_{\alpha} D_\alpha$, $\alpha\in I$, где $D_\alpha\cong\mathbf{D}$ для всех $\alpha\in I$ ($\bigoplus\limits_{\alpha} D_\alpha$ означает прямую сумму полигонов D_α) (см. [6]). Поскольку структура D является плоским D-полигоном (см. предложение 7), то F — плоский D-полигон (см. теорему 3). Согласно предыдущей лемме, D-полигон P также является плоским. Теорема доказана.

Теорема 5. Категория полигонов над любой дистрибутивной структурой с нулем и единицей инъективно полна, то есть каждый ее объект можно вложить в инъективный.

Доказательство. Пусть A — произвольный D-полигон. Согласно лемме 5, существует D-мономорфизм $\varphi: A \longrightarrow A^{**}$. Но A^* является эпиморфным образом некоторого свободного D-полигона $F(\pi: F \longrightarrow A^*)$. Согласно лемме 6, $\pi^*: A^{**} \longrightarrow F^*$ — мономорфизм. Значит, $\pi\varphi: A \longrightarrow F^*$ — мономорфизм. Остается заметить, что ввиду теоремы 4 полигон F является плоским и, следовательно, полигон F^* — инъективен (см. теорему 2).

Из доказанной теоремы и теоремы 2 работы 13 получается

Следствие. Каждый объект категории D-полигонов обладает инъективной оболочкой.

В [4] (см. предложение 4) отмечалось, что исходя из гомоморфизма $D \longrightarrow 2$, каждую полуструктуру с 0 можно считать D-полигоном. Такие полигоны будем называть *тривиальными*.

Теорема 6. Следующие свойства дистрибутивной структуры D эквивалентны:

(1) все конечные D-полигоны плоские;

(2) все конечные D-полигоны инъективны;

(3) все конечные D-полигоны проективны;

(4) все проективные D-полигоны свободные;

(5) D — одноэлементная структура.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если A — произвольный конечный D-полигон, то полигон A^* также является конечным (см. лемму 4) и, следовательно, плоским. Так как D-полигоны A и A^{**} изоморфны (см. предложение 6), то и полигон A является инъективным.

(2) $\Rightarrow$ (5). Доказательство этой импликации дословно совпадает с доказательством теоремы 5 [6], где в качестве Q следует взять пятиэлементную недистрибутивную структуру, которая в категории полуструктур не является инъективной (см. [9]).

(3) $\Rightarrow$ (5). Пусть D — неодноэлементная дистрибутивная структура, все конечные полигоны над которой проективны. Тогда, в частности, проективным будет тривиальный D-полигон A, где A — пятиэлементная недистрибутивная структура, что невозможно ввиду [3].

(4) $\Rightarrow$ (5). Справедливость этой импликации следует из работы [14], теорема 3.

Импликации (5) $\Rightarrow$ (3), (5) $\Rightarrow$ (4) и (5) $\Rightarrow$ (1) следуют из того, что над одноэлементной структурой существует единственный полигон — нулевой (см. [4]).

Следствие. Если все D-полигоны плоские, то D — одноэлементная структура.

Теорема 7. Произвольный полигон M над булевой алгеброй B является плоским тогда и только тогда, когда полуструктура M является дистрибутивной структурой.

Доказательство. Сначала докажем:

Лемма. Если D — произвольная дистрибутивная структура с нулем, то структура $I(D)$ удовлетворяет тождеству

$$x \cap (\bigcup_i y_i) = \bigcup_i (x \cap y_i) \qquad (1)$$

для всех $x, y_i \in I(D)$.

Доказательство. Известно, что структура $I(D)$ изоморфна структуре всех подалгебр некоторой алгебры A. Действительно, пусть A состоит из элементов структуры D, на которой заданы унарные операции f_a, по одному для каждого $a \in D$, определяемые посредством соотношения $f_a(x) = ax$ и бинарная операция $+$, совпадающая для любых $x, y \in D$ $x+$ $+y$. Нетрудно убедиться в том, что подалгебрами A являются идеалы структуры D и только они. Таким образом, структура $I(D)$ изоморфна структуре всех подалгебр алгебры A. Следовательно, $I(D)$ является компактно порожденной* (см. [2], стр. 108). Кроме того, она дистрибутивна вследствие дистрибутивности структуры D. Но каждая компактно порожденная дистрибутивная структура является бесконечно дистрибутивной, то есть удовлетворяет тождеству (1) (см. [8]).

Переходя к доказательству теоремы, предположим, что M — плоский B-полигон. Тогда, по теореме 2, полигон M^* инъективен и, согласно [5], M^* — дистрибутивная структура. Поскольку при дуальном изоморфизме дистрибутивность сохраняется, то структура $I(M)$ также дистрибутивна (см. предложение 4), что, в свою очередь, равносильно дистрибутивности структуры M (см. [1], стр. 131). Пусть теперь M — дистрибутивная структура. Поскольку структура $I(M)$ удовлетворяет тождеству (1) (см. предыдущую лемму) и M^* дуально изоморфна структуре $I(M)$ (см. предложение 4), то структура M^* удовлетворяет двойственному тождеству $x + \bigwedge_i y_i = \bigwedge_i (x + y_i)$. Следовательно, структура M^* полная, ∞ — дистрибутивная. Значит, ввиду [5], B-полигон M^* является инъектив-

* Определение компактнопорожденной стеруктуры см.: например, в [2].

ным. Отсюда и из теоремы 2 вытекает плоскостность B-полигона M.

Следствие. Каждый инъективный полигон над булевой алгеброй B является плоским B-полигоном.

Доказательство немедленно вытекает из теоремы 7 и критерия инъективности (см. [5]).

Теорема 8. Следующие свойства булевой алгебры B эквивалентны:

(1) все конечные B-полигоны плоские;
(2) все конечные B-полигоны инъективны;
(3) все конечные B-полигоны проективны;
(4) все плоские B-полигоны проективны;
(5) все плоские B-полигоны инъективны;
(6) все инъективные B-полигоны проективны;
(7) все проективные B-полигоны инъективны;
(8) все проективные B-полигоны свободные;
(9) все свободные B-полигоны инъективны;
(10) B — одноэлементная структура.

Доказательство. Предварительно установим:

Лемма. Если тривиальный D-полигон A с наибольшим элементом проективен, то полуструктура A конечна.

Доказательство. Пусть A — проективный тривиальный D-полигон с наибольшим элементом. Обозначим через $\bar{A}$ полуструктуру, полученную из A отбрасыванием нуля 0_A, то есть $\bar{A}=A\setminus 0_A$. Так же, как в [6], § 5, теорема 5, можно показать, что в категории полуструктур $\bar{A}$ проективна. Поскольку $\bar{A}$ — полуструктура с наибольшим элементом, то $\bar{A}$, а, следовательно, и A является конечной. Действительно, согласно критерию проективности полуструктур, полученному Хорном и Кимурой в [9], полуструктура N проективна (в категории всех полуструктур) тогда и только тогда, когда $N*0$ * является дистрибутивной структурой и, кроме того, идеал $\{n\in N\,|\,n\leqslant x\}$ конечен для любого $x\in N$ **.

(4) => (10). Пусть B — неодноэлементная булева алгебра, для которой имеет место утверждение (4). Согласно теореме 7, любая бесконечная дистрибутивная структура с наибольшим элементом, рассматриваемая как тривиальный B-поли-

* Здесь $N*0$ — полуструктура, полученная внешним присоединением нуля к полуструктуре N, если N не обладает нулем и $N*0=N$, если N обладает нулем.

** В [9] этот результат сформулирован для полуструктур с мультипликативно записанной операцией.

гон, в этом случае оказывается проективной, что невозможно в силу доказанной леммы.

(6) => (10). Пусть B — неодноэлементная булева алгебра, все инъективные полигоны над которой проективны. Структура A всех неотрицательных чисел, упорядоченных по делимости, является полной, ∞ — дистрибутивной (см. [1], стр. 129). Рассматривая A как тривиальный B-полигон, получаем, что он инъективен (см. [5]) и ввиду (10) проективен, что опять-таки противоречит лемме.

(5) => (10). Пусть B — неодноэлементная булева алгебра, все плоские полигоны над которой инъективны. Согласно теореме 7, инъективным B-полигоном, в частности, будет B-полигон A, где A — неполная дистрибутивная структура с нулем. Получили противоречие с признаком инъективности полигонов (см. [5]).

(9) => (10). Пусть B — неодноэлементная булева алгебра. Тогда не все свободные B-полигоны являются полными. Согласно [5], не все они инъективны.

Импликация (7) => (10) очевидна. Равносильность свойств (1), (2), (3), (8) и (10) вытекает из теоремы 6. Импликации (10) => (7), (10) => (6), (10) => (5), (10) => => (4) и (10) => (9) следуют из того, что над одноэлементной структурой существует единственный полигон — нулевой (См. 4). Теорема доказана.

В заключение горячо благодарю профессора Льва Анатольевича Скорнякова, руководившего этой работой, а также Татьяну Сергеевну Фофанову, внимательно прочитавшую рукопись данной работы и сделавшую ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М., 1970.

2. Курош А. Г. Общая алгебра (лекции 1969—1970 учебного года). М., 1974.

3. Фофанова Т. С. Полигоны над дистрибутивными структурами. Автореферат диссертации. М., 1971.

4. Фофанова Т. С. Полигоны над дистрибутивными структурами. — Сибирск. матем. ж., 1971, 12, № 5, 1158—1163.

5. Фофанова Т. С. Инъективность полигонов над булевыми алгебрами. — Сибирск. матем. ж., 1972, 13, № 2, 452—458.

6. Фофанова Т. С. Полигоны над дистрибутивными структурами. Диссертация, М., 1971.

7. Фофанова Т. С. Свободные расширения частичных полигонов.— В сб. «Упорядоченные множества и решетки», вып. 2. Изд-во Саратовск. ун-та, 1974, 99—108.

8. Каролинская Л. Н. Структура когруэнций на дистрибутивных структурах. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1964, 28, № 5, 1037—1054.
9. Horn A., Kimura N. The category of semilattices. — Algebra univers., 1971, 1, N 1, 26—38.
10. Mitchell B. Theory of categories. N. Y. — London, 1965.
11. Кон П. Универсальная алгебра. М., 1968.
12. Маклейн С. Гомология. М., 1966.
13. Daigneault A. Conditions pour l'existence d'envelopes injectives. — C. R. Acad. Sci. Paris, 1968, 266, 2, A 40—A42.
14. Раднев П. Универсальные полигоны над дистрибутивными структурами. — В сб.: Упорядоченные множества и решетки. Изд-во Саратовск. ун-та (в печати).

И. И. МЕЛЬНИК

МАЖОРАНТНЫЕ СДВИГИ И РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ

§ 1. Эффективные и α-эффективные сдвиги

Для произвольного многообразия полугрупп τ обозначим через $L\tau$ решетку подмногообразий τ. Под мажорантным сдвигом на $L\tau$ понимается отображение $\mu_\gamma : x \to x+\gamma$, где γ — фиксированный элемент решетки $L\tau$.

Сдвиг μ_γ называется α-эффективным, если он изоморфно отображает решетку $L\alpha$ на решетку $L(\alpha+\gamma)/L\alpha$, где $\alpha \in D(\gamma) = \{x : x+\gamma \neq x\}$. Если для каждого α из $D(\gamma)$ сдвиг μ_γ α — эффективен, то он называется эффективным сдвигом. Наконец, сдвиг μ_γ называется α-регулярным, если он изоно отображает интервал $[\alpha \cap \gamma, \alpha]$ на интервал $[\gamma, \alpha+\gamma]$.

В [1], [2], [3] изучались сдвиги $\mu_H, \mu_P, \mu_G, \mu_T$ и μ_Q-определяемые соответственно, многообразиями $H = \{xy = zt\}$, $P = \{xy = yx, x = x^2\}$, $G = \{yxy = x\}$, $T = \{xy = x\}$ и $Q = \{yx = x\}$. Доказано [1], [2], что μ_H и μ_P — эффективные сдвиги на решетке всех многообразий полугрупп L, а также установлен ряд свойств сдвигов μ_G, μ_T и μ_Q. Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении.

Рассмотрим полугруппу $S \in \tau$ и два произвольных многообразия γ, δ из $L\tau$.

Определение. Полугруппа S называется (γ, δ)-связкой, если на S найдется такая конгруэнция θ, что

A1) $S/\theta \in \delta$ и $\theta(i) \in \gamma$, где $\theta(i)$ — класс, являющийся подполугруппой S;

A2) Всякое тождество, истинное как на факторе S/θ, так и на классах $\theta(i)$, необходимо выполняется и на самой полугруппе S.

Заметим, что не исключено, что ни один из классов θ не есть подполугруппа S, но тогда требуется, чтобы все тождества, истинные на факторе, выполнялись на полугруппе S.

Если обозначить $S(\gamma, \delta)$ совокупность всех (γ, δ)-связок, то будем иметь следующие очевидные включения:

$$\gamma\cup\delta\subset S(\gamma, \delta)\cap S(\delta, \gamma) \text{ и } S(\gamma, \delta)\cup S(\delta, \gamma)\subset\gamma+\delta.$$

Пара многообразий (γ, δ) называется точной парой, если во второй формуле вместо знака включения можно поставить знак равенства. Будем говорить, что для многообразий α и γ выполняется условие $\Delta(\alpha, \gamma)$, если для каждого x из интервала $[\alpha\cap\gamma, \alpha]$ пара (x, γ) — точна. Имеет место

Теорема 1. Если для многообразий α и γ выполняется условие $\Delta(\alpha, \gamma)$, то сдвиг $\mu_\gamma\alpha$ — регулярен.

Доказательство. Пусть $\alpha\in D(\gamma)$, $x, y\in[\alpha\cap\gamma, \Delta]$ и $\delta\in\in[\gamma, \alpha+\gamma]$. Покажем, что

$$(x+\gamma)\cap\alpha=x \text{ и } (\delta\cap\alpha)+\gamma=\delta.$$

Если полугруппа $S\in(x+\gamma)\cap\alpha$ и она является (x, γ)-связкой, тогда из формул $\theta(i)\in x$ и $S/\theta\in\gamma\cap\alpha\subset x$ немедленно следует $S\in x$. В случае, когда S—(γ, x) — связка, имеем $S/\theta\in x$ и $\theta(i)\in\gamma\cap\alpha$, что влечет $S\in x$. Тем самым получили включение $(x+\gamma)\cap\alpha\subset x$. Обратное включение очевидно.

Допустим, что $S\in\delta$ и S—(α, γ) — связка. Тогда из $S/\theta\in\gamma$ и $\theta(i)\in\alpha\cap\delta$ следует $S\in(\delta\cap\alpha)+\gamma$. Если же S есть (γ, α) — связка, тогда условия $S/\theta\in\alpha\cap\delta$ и $\theta(i)\in\gamma$ дают $S\in(\delta\cap\alpha)+\gamma$. Тем самым и второе равенство доказано.

Если допустить, что $x+\gamma=y+\gamma$, то будем иметь $x==(x+\gamma)\cap\alpha=(y+\gamma)\cap\alpha=y$, то есть μ_γ — взаимно однозначное отображение. А так как $\delta=(\delta\cap\alpha)+\gamma$, то μ_γ является отображением на весь интервал $[\gamma, \alpha+\gamma]$.

Покажем теперь, что $(x\cap y)+\gamma=(x+\gamma)\cap(y+\gamma)$. Так как в одну сторону включение очевидно, то пусть $S\in(x+\gamma)\cap\cap(y+\gamma)$. Если S — (x, γ) — связка, то $\theta(i)\in x$ и $S/\theta\in\gamma$. Но так как $x\cap(y+\gamma)\subset y$, то $\theta(i)\in y$. Следовательно, $S\in(x\cap y)+\gamma$. В случае, когда S есть (γ, x) — связка, получаем $\theta(i)\in\gamma$ и $S/\theta\in x\cap y$ и, поэтому, $S\in(x\cap y)+\gamma$. Теорема доказана.

Договоримся писать, что многообразия α и γ удовлетворяют условию $\varkappa(\alpha, \gamma)$, если любой элемент $x\in[\alpha\cap\gamma, \alpha]$ представим в виде $x=\alpha\cap\delta$, для некоторого $\delta\supset\gamma$.

Следствие. Если для многообразия α и γ имеем

1) (α, γ) — точная пара;

2) выполняется условие $\varkappa(\alpha, \gamma)$, тогда сдвиг $\mu_\gamma \alpha$ — регулярен.

Доказательство. Покажем, что многообразия α и γ удовлетворяют условию $\Delta(\alpha, \gamma)$. Пусть $x \in [\alpha \cap \gamma, \alpha]$ и $S \in x+\gamma$. Если S является (α, γ) — связкой, тогда $\theta(i) \in \alpha \cap \delta$ и $S/\theta \in \gamma$, то есть S есть (x, γ) — связка. В случае, когда S — (γ, x) — связка, имеем $\theta(i) \in \gamma$ и $S/\theta \in \alpha \cap \delta$ и, поэтому, S есть (γ, x) — связка. Теперь осталось лишь применить теорему 1.

Теорема 2. Если для многообразий α и γ выполняются условия $\Delta(\alpha, \gamma)$ и $\Delta(\gamma, \alpha)$, то интервал $[\alpha \cap \gamma, \alpha+\gamma]$ изоморфен решетке $L(\alpha, \gamma) = [\alpha \cap \gamma, \alpha] \times [\alpha \cap \gamma, \gamma]$.

Доказательство. Пусть $x, z \in [\alpha \cap \gamma, \alpha]$ и $y, t \in [\alpha \cap \gamma, \gamma]$. Определим отображение $F : L(\alpha, \gamma) \to [\alpha \cap \gamma, \alpha+\gamma]$, полагая $F(x, y) = x+y$. Допустим, что $F(x, y) = F(z, t)$. Тогда $(x+y) \cap \alpha = (z+t) \cap \alpha$, и так как $(x+y) \cap \alpha \subset (x+\gamma) \cap \alpha = x$, то $(x+y) \cap \alpha = x$. Точно так же получаем равенство $(z+t) \cap \alpha = z$, то есть $x = z$. Аналогично выводим, что $y = t$. Получили $(x, y) = (z, t)$, то есть F есть взаимно однозначное отображение. Покажем, что это отображенне есть отображение на весь ннтервал $[\alpha \cap \gamma, \alpha+\gamma]$. Возьмем произвольный элемент δ из этого иитервала и рассмотрим пару $(\delta \cap \alpha, \delta \cap \gamma)$. Ясно, что $(\delta \cap \alpha) + (\delta \cap \gamma) \subset \delta$. Пусть $S \in \delta$ и S является (α, γ) — связкой. Тогда из $\theta(i) \in \delta \cap \alpha$ и $S/\theta \in \delta \cap \gamma$ вытекает, что $S \in (\delta \cap \alpha) + (\delta \cap \gamma)$. Если же S есть (γ, α) — связка, тогда $\theta(i) \in \delta \cap \gamma$ и $S/\theta \in \delta \cap \alpha$, что также дает $S \in (\delta \cap \alpha) + (\delta \cap \gamma)$. Следовательно, $\delta = (\delta \cap \alpha) + (\delta \cap \gamma)$.

Далее, $F((x, y) + (z, t)) = F(x, y) + F(z, t)$ и остается лишь убедиться в том, что $F((x, y) \cap (z, t)) = F(x, y) \cap F(z, t)$. Для этого, очевидно, достаточно установить включение $(x+y) \cap (z+t) \subset (x \cap z) + (y \cap t)$. Пусть полугруппа $S \in (x+y) \cap (z+t)$ и допустим, что она является (x, y) — связкой. Тогда $\theta(i) \in x$ и $S/\theta \in y$. Учитывая, что $x \cap (z+t) \subset x \cap z$ и $y \cap (z+t) \subset y \cap t$, получаем $\theta(i) \in x \cap z$ и $S/\theta \in y \cap t$, что влечет $S \in (x \cap z) + (y \cap t)$. Аналогичные выкладки проводятся и в случае, когда S есть (y, x) — связка. Теорема доказана.

Следствие 1. Если α и γ удовлетворяют условиям $\Delta(\alpha, \gamma)$ и $\Delta(\gamma, \alpha)$, причем $\alpha \cap \gamma = E$, где E — многообразия одноэлементных полугрупп, то решетка $L(\alpha+\gamma)$ изоморфна прямому произведению решеток $L\alpha$ и $L\gamma$. Достаточно лишь заметить, что $L(\alpha+\gamma) = [E, \alpha+\gamma]$, $L\alpha = [E, \alpha]$ и $L\gamma = [E, \gamma]$.

Следствие 2. Если многообразия α и γ удовлетворяют условию $\Delta(\alpha, \gamma)$ и γ — атом решетки $L\tau$, то решетка $L(\alpha+\gamma)$ изоморфна удвоению решетки $L\alpha$. Действительно, $\Delta(\alpha, \gamma)$ влечет условие $\Delta(\gamma, \alpha)$, так как γ — атом. Следовательно, $L(\alpha+\gamma)\cong L\alpha\times L\gamma$, а так как $L\alpha$ — двухэлементная решетка, то все установлено.

Следствие 3. Если многообразия α и γ образуют точную пару, удовлетворяющую условиям $\varkappa(\alpha, \gamma)$ и $\varkappa(\gamma, \alpha)$, причем $\alpha\cap\gamma=E$, то $L(\alpha+\gamma)\cong L\alpha\times L\gamma$. Это утверждение непосредственно следует из следствия теоремы 1 и следствия 1.

Предложение 1. Следующие утверждения для многообразия γ равносильны.

B_1) μ_γ — эффективный сдвиг;

B_2) γ — атом и для любых $\alpha\in D(\gamma)$ и $y\in L(\alpha+\gamma)$ выполняется равенство $(\alpha\cap y)+\gamma=(\alpha+\gamma)\cap(y+\gamma)$, причем α и γ удовлетворяют условию $\varkappa(\alpha, \gamma)$;

B_3) γ — атом и для произвольных многообразий $\alpha\in D(\gamma)$, $x\in D_\alpha(\gamma)$ и $y\in L(\alpha+\gamma)$ имеем: $(y+\gamma)\cap x=y\cap x$ и $(y\cap\alpha)+\gamma=y+\gamma$.

Доказательство. $B_1)\to B_2)$. Если $y\subset\alpha$, то равенство выполняется, ибо μ_γ — изоморфизм решетки $L\alpha$ на решетку $L(\alpha+\gamma)\diagdown L\alpha$. Пусть поэтому $y\supset\gamma$. Для $(\alpha+\gamma)\cap y$ найдется такое многообразие $x\subset\alpha$, что $(\alpha+\gamma)\cap y=x+\gamma$. Отсюда вытекает, что $x\subset\alpha\cap y$. С другой стороны, включение $(\alpha\cap y)+\gamma\subset\subset x+\gamma$ влечет $\alpha\cap y\subset x$ и, следовательно, $\alpha\cap y=x$. Тогда имеем $(\alpha\cap y)+\gamma=(\alpha+\gamma)\cap y=(\alpha+\gamma)\cap(y+\gamma)$. Наконец, из равенства $(x+\gamma)=((x+\gamma)\cap\alpha)+\gamma$ вытекает равенство $x=(x+\gamma)\cap\alpha$. А так как x — произвольный элемент решетки $L\alpha$, то заключаем, что пара (α, γ) удовлетворяет условию $\varkappa(\alpha, \gamma)$. $B_2)\to B_3)$. Для многообразия $x\subset\alpha$ имеем $\alpha\cap(x+\gamma)=\alpha\cap((\alpha\cap\delta)+\gamma)==\alpha\cap(\alpha+\gamma)\cap(\delta+\gamma)=\alpha\cap\delta\cap(\alpha+\gamma)=x\cap(\alpha+\gamma)=x$. Если теперь x — произвольный элемент из $D_\alpha(\gamma)$, тогда $x=x\cap(\alpha+\gamma)\cap\cap(x+\gamma)=x\cap((\alpha\cap x)+\gamma)=\alpha\cap x$, то есть $x\subset\alpha$. Пусть x, $y\in\in D_\alpha(\gamma)$. Найдется такое многообразие $\delta\subset\gamma$, что $x=\alpha\cap\delta$. Согласно установленному $y\subset\alpha$, поэтому $(y+\gamma)\cap x=(y+\gamma)\cap\alpha\cap\delta==y\cap\delta\cap\alpha=y\cap x$. Для доказательства второго равенства возьмем $y\supset\gamma$. Имеем, $(y\cap\alpha)+\gamma=(\alpha+\gamma)\cap y=y$ и, следовательно, $(y\cap\alpha)+\gamma=y+\gamma$, для любого $y\in L(\alpha+\gamma)$. $B_3)\to B_1)$. Если $x\in D_\alpha(\gamma)$, то $x\subset(x+\gamma)\cap x\subset\alpha\cap x\subset\alpha$. Далее, пусть $x+\gamma=y+\gamma$, где x, $y\in L\alpha$. Тогда $x=x\cap\alpha=(x+\gamma)\cap\alpha=(y+\gamma)\cap\alpha=y\cap\alpha=y$, то есть μ_γ — взаимно однозначное отображение. Прообразом элемента z из $L(\alpha+\gamma)\setminus L\alpha$ является элемент $z\cap\alpha$, ибо $z=z+\gamma=(z\cap\alpha)+\gamma$. Наконец, $\mu_\gamma(x\cap y)=\mu_\gamma(x\cap y\cap\alpha)=$

$=\mu_\gamma(\mu_\gamma(x)\cap\mu_\gamma(y)\cap\alpha)=\mu_\gamma(x)\cap\mu_\gamma(y)$. Предложение доказано.

Договоримся обозначать через $\mu_\gamma{}^\alpha$ ограничение сдвига μ_γ на интервале $[\alpha\cap\gamma, \alpha]$. Отображение $\nu_\alpha: x\to x\cap\alpha$ называется минорантным сдвигом. Ограничение ν_α на интервале $[\gamma, \alpha+\gamma]$ обозначается $\nu_\alpha{}^\gamma$. Сдвиг ν_α называется γ — регулярным, если он изоморфно отображает интервал $[\nu, \alpha+\gamma]$ на интервал $[\alpha\cap\gamma, \alpha]$.

Предложение 2. Следующие условия равносильны:

C_1) μ_γ — α — регулярен;

C_2) ν_α — γ — регулярен;

C_3) — для любых многообразий x из $[\alpha\cap\gamma, \alpha]$ и y из $[\gamma, \alpha+\gamma]$ выполняются равенства $(x+\gamma)\cap\cap\alpha=x$, $(y\cap\alpha)+\gamma=y$;

C_4) $\mu_\gamma{}^\alpha$ — взаимно однозначное отображение на интервал $[\gamma, \alpha+\gamma]$;

C_5) $\nu_\alpha{}^\gamma$ — взаимно однозначное отображение на интервал $[\gamma\cap\alpha, \alpha]$;

C_6) $\nu^\gamma{}_\alpha$ и $\mu^\alpha{}_\gamma$ — взаимно однозначные отображения.

Доказательство. $C_1)\leftrightarrow C_3)$. Из взаимной однозначности μ_γ вытекает равенство $(x+\gamma)\cap\alpha=x$, а из гомоморфности μ_γ следует $(y\cap\alpha)+\gamma=y$. Докажем обратное. Для этого достаточно лишь установить гомоморфность сдвига μ_γ. Для $x, z\in[\alpha\cap\gamma, \alpha]$ имеем

$$(x\cap z)+\gamma=((x+\gamma)\cap\alpha\cap(z+\gamma)\cap\alpha)+\gamma=$$

$$=((x+\gamma)\cap(z+\gamma)\cap\alpha)+\gamma=(x+\gamma)\cap(z+\gamma)$$

и тем самым все доказано. $C_2)\leftrightarrow C_3)$. Пусть ν_α — γ — регулярный сдвиг. Так как равенство $((y\cap\alpha)+\gamma)\cap\alpha=y\cap\alpha$ выполняется на любой решетке, то в силу взаимно однозначности ν_α имеем $(y\cap\alpha)+\gamma=y$. Первое равенство из C_3) очевидно. Для доказательства обратного утверждения возьмем $y, z\in[\gamma, \alpha+\gamma]$, тогда $(y+z)\cap\alpha=((y\cap\alpha)+\gamma+(z\cap\alpha)+\gamma)\cap\alpha=(y\cap\alpha)+(z\cap\alpha)$. Если теперь $y\cap\alpha=z\cap\alpha$, то $y=(y\cap\alpha)+\gamma=(z\cap\alpha)+\gamma=z$, то есть ν_α — взаимно однозначное отображение. То, что это отображение на весь интервал $[\alpha\cap\gamma, \alpha]$, вытекает из равенства $(x+\gamma)\cap\alpha=x$. $C_3)\leftrightarrow C_4)\leftrightarrow C_5)$ и $C_3\to C_6$) — очевидные утверждения. Для доказательства $C_6)\to C_3$) заметим, что $((x+\gamma)\cap\alpha)+\gamma=x+\gamma$ и $((y\cap\alpha)+\gamma)\cap\alpha=y\cap\alpha$ выполняются на любой решетке, откуда в силу взаимной однозначности $\mu_\gamma{}^\alpha$ и $\nu_\alpha{}^\gamma$ получаем требуемые равенства. Предложение доказано.

Заметим, что если γ — атом и для любых y; $x \in D(\gamma)$ имеем $x+y \in D(\gamma)$, то α — регулярность μ_γ для любого $\alpha \in D(\gamma)$ влечёт эффективность сдвига μ_γ на решетке L. Действительно, пусть $\alpha \in D(\gamma)$. Возьмем $x \in D_\alpha(\gamma) = L(\alpha+\gamma) \cap D(\gamma)$ и покажем, что $x \subset \alpha$. Согласно условию интервал $[E, \alpha+x]$ изоморфен интервалу $[\gamma, \alpha+\gamma]$. С другой стороны, найдется такое многообразие $z \subset \alpha$, что $z+\gamma = x+\gamma$. Следовательно, $z = x \subset \alpha$. Установленный факт $x \subset \alpha$ и означает, что μ_γ α — эффективен.

Пусть $\alpha \in D(\gamma)$. Обозначим совокупность всех x таких, что $x = \alpha \cap y$, для некоторого $y \supset \gamma$, через $H(\alpha, \gamma)$.

Предложение 3. Если (α, γ) — точная пара, и $H(\alpha\ \gamma)$ является подрешеткой решетки $[\alpha \cap \gamma, \alpha]$, то μ изоморфно отображает $H(\alpha, \gamma)$ на $[\gamma, \alpha+\gamma]$.

Доказательство. Покажем, что $(y \cap \alpha)+\gamma = y$, для любого $y \in [\gamma, \alpha+\gamma]$. Пусть $S \in y$ и S есть (α, γ) — связка. Тогда $S/\theta \in \gamma$ и $\theta(i) \in \alpha$. Следовательно, $\theta(i) \in \alpha \cap y = x$, то есть $S \in (\alpha \cap y)+\gamma$. В случае, когда $S/\theta \in \alpha$ и $\theta(i) \in \gamma$ имеем $S/\theta \in \alpha \cap y$, что влечет $S \in (\alpha \cap y)+\gamma$. Получили, что $y \subset (y \cap \alpha)+\gamma$ и, следовательно, равенство установлено. Таким образом прообразом элемента $y \in [\gamma, \alpha+\gamma]$ является элемент $\alpha \cap y \in H(\alpha, \gamma)$. Если для $x, z \in H(\alpha, \gamma)$ имеем $x+\gamma = z+\gamma$, тогда $x = \alpha \cap y_1 = \alpha \cap ((\alpha \cap y_1)+\gamma) = \alpha \cap ((y_2 \cap \alpha)+\gamma) = \alpha \cap y_2 = z$. Далее $(x \cap z)+\gamma = (\alpha \cap y_1 \cap \alpha \cap y_2)+\gamma = (y_1 \cap y_2 \cap \alpha)+\gamma$. Очевидно, в равенстве $x = \alpha \cap y$ можно предполагать, что $y \in [\gamma, \alpha+\gamma]$, поэтому $(y_1 \cap y_2 \cap \alpha)+\gamma = y_1 \cap y_2 = (x+\gamma) \cap (z+\gamma)$. Предположение доказано.

Следствие 1. В условиях предложения 3 отображение ν_α^γ является изоморфным вложением интервала $[\gamma, \gamma+\alpha]$ в интервал $[\alpha \cap \gamma, \alpha]$. Действительно, равенство $(y \cap \alpha)+\gamma = y$ означает, что $\nu_\alpha^\gamma(y) \in H(\alpha, \gamma)$. Пусть $y, z \in [\gamma, \alpha+\gamma]$, тогда

$$(y+z) \cap \alpha = ((y \cap \alpha)+\gamma+(z \cap \alpha)+\gamma) \cap \alpha = ((y \cap \alpha)+(z \cap \alpha)+\gamma) \cap \alpha.$$

Так как $(y \cap \alpha)+(z \cap \alpha) \in H(\alpha, \gamma)$, то найдется такой элемент $t \in [\gamma, \alpha+\gamma]$, что $(y \cap \alpha)+(z \cap \alpha) = \alpha \cap t$. Следовательно, $(y+z) \cap \alpha = ((\alpha \cap t)+\gamma) \cap \alpha = t \cap \alpha = (y \cap \alpha)+(z \cap \alpha)$. Наконец, если $y \cap \alpha = z \cap \alpha$, то $y = (y \cap \alpha)+\gamma = (z \cap \alpha)+\gamma = z$.

Предложение 4. Если (γ, α) — точная пара, $H(\alpha, \gamma)$ и $H(\gamma, \alpha)$ подрешетки соответственно интервалов $[\alpha \cap \gamma, \alpha]$ и $[\alpha \cap \gamma, \gamma]$, тогда решетка $H(\alpha, \gamma) \times H(\gamma, \alpha)$ изоморфно вкладывается в интервал $[\alpha \cap \gamma, \alpha+\gamma]$.

Доказательство. Для произвольной точной пары многообразий α и γ всегда $x = (x \cap \alpha)+(x \cap \gamma)$, $x \in [\alpha \cap \gamma, \alpha+\gamma]$.

Рассмотрим отображение $F: H(\alpha, \gamma) \times H(\gamma, \alpha) \to [\alpha \cap \gamma, \alpha + \gamma]$, полагая $F(x, y) = x + y$. Так как $(x+y) \cap \alpha = x$, то F взаимно однозначное отображение (см. доказательство теоремы 2). Покажем, что $(x+y) \cap (z+t) \subset (x \cap z) + (y \cap t)$, где $z \in H(\alpha, \gamma)$ и $t \in H(\gamma, \alpha)$. Пусть $S \in (x+y) \cap (z+t)$ и $x = \alpha \cap y$, $y = \gamma \cap x_1$, для некоторых $y_1 \in [\gamma, \alpha+\gamma]$ и $x_1 \in [\alpha, \alpha+\gamma]$. Если S есть (α, γ) — связка, тогда $S/\theta \in \gamma \cap x_1$ и $\theta(i) \in \alpha \cap y_1$ и, следовательно, S есть (y, x) — связка. Если S — (γ, α) — связка, тогда необходимо S есть (x, y) — связка. Дальше рассуждаем точно так же, как и при доказательстве теоремы 2.

Предложение 5. Пусть $\alpha \in D(\gamma)$. Если γ покрывает $\alpha \cap \gamma$ и (α, γ) — точная пара, то $\alpha + \gamma$ покрывает α и $[\alpha \cap \gamma, \alpha] = D_\alpha(\gamma) \cap [\alpha \cap \gamma, \alpha + \gamma]$.

Доказательство. Так как $H(\gamma, \alpha) = [\alpha \cap \gamma, \gamma]$, то согласно предложению 3 интервал $[\alpha \cap \gamma, \gamma]$ изоморфен интервалу $[\alpha, \alpha + \gamma]$ и, следовательно, $\alpha + \gamma$ покрывает многообразие α.

Пусть $x \in D_\alpha(\gamma) \cap [\alpha \cap \gamma, \alpha + \gamma]$. Для любой полугруппы S из x имеем или $S/\theta \in \alpha \cap x$ и $\theta(i) \in \gamma \cap x$ или $S/\theta \in \gamma \cap x$ и $\theta(i) \in \alpha \cap x$. Так как $x \cap \gamma = \gamma \cap \alpha$, то $\theta(i) \in \alpha \cap x$ и, следовательно, $S \in \alpha \cap x$ для первого случая. Во втором случае $S/\theta \in \gamma \cap x = \gamma \cap \alpha \subset \alpha \cap x$ и поэтому также $S \in \alpha \cap x$. Таким образом, $x \subset \alpha \cap x$, то есть $x \subset \alpha$. Предложение доказано.

§ 2. Изоморфные интервалы и решетки многообразий

Покажем как применяются результаты § 1 к описанию решеточных интервалов и некоторых решеток многообразий.

Введем следующие обозначения. Пусть u — произвольное полугрупповое слово. Тогда через $l_i(u)$ (соотв. $r_i(u)$ обозначаем i-ю букву от начала (конца) слова u. Длину слова u обозначаем посредством $|u|$. Так, например, для слова $u = x^2yzxy$ имеем: $l_1(u) = x$, $l_4(u) = z$, $r_2(u) = x$ и $|u| = 6$.

Рассмотрим следующие многообразия (1), ..., (23), определяемые, соответственно, системами тождеств:

$\Sigma_1 = \{x = y\}$, $\Sigma_2\{xy = zt\}$, $\Sigma_3 = \{xyz = pqr,\ xy = yx,\ x^2 = y^2\}$,

$\Sigma_4 = \{xyz = pqr,\ x^2 = y^2\}$, $\Sigma_5 = \{xy = x\}$, $\Sigma_6\{xy = xz\}$,

$\Sigma_7 = \{xyz = xpq,\ x^2 = x^3\}$, $\Sigma_8 = \{xyz = xy\}$, $\Sigma_9 = \{xyt = xyz,$ $x^2 = x^3\}$, $\Sigma_{10} = \{yx = x\}$, $\Sigma_{11} = \{yx = zx\}$, $\Sigma_{12} = \{zyx = qpx,\ x^2 = x^3\}$, $\Sigma_{13} = \{xyx = x\}$, $\Sigma_{14} = \{xyz = xz\}$, $\Sigma_{15} = \{xyz = xtz,\ x^2 = x^3\}$,

$\Sigma_{16}=\{xyzy=xy\}$, $\Sigma_{17}=\{xtyz=xtz,\ x^2=x^3\}$, $\Sigma_{18}=\{zyx=yx\}$, $\Sigma_{19}=\{tyx=zyx,\ \ x^2=x^3\}$, $\Sigma_{20}=\{yzyx=yx\}$, $\Sigma_{21}=\{zytx=ztx,$ $x^2=x^3\}$, $\Sigma_{22}=\{xyzxy=xy\}$, $\Sigma_{23}=\{xyzpq=xypq,\ x^2=x^3,\ xyz=$

$$=(xyz^2\}.$$

Предложение 6. Решетка подмногообразий многообразия (9) описывается диаграммой, изображенной на рис. 1.

Доказательство. Решетка $L(8)$ описана в [4], а решетка $L(4)$ в [5]. Покажем, что ((4), (5)) — точная пара. Пусть $S\in(4)+(5)$ и $I=S^3$. Ясно, что $S/I\in(4)$ и $I\in(5)$. Рассмотрим произвольное тождество $u=v$, выполняющееся на полугруппах I и S/I. Если $u=v$ не выводимо из Σ_5, то $S\cong S/I$ и все доказано. Допустим, что $\Sigma_5|=u=v$. Можно предположить, что $u=v$ не доказуемо из системы Σ_4. Если $|u|=1$, то $S/I\in(1)$ и поэтому $S\in(5)$ и все доказано. Пусть $|u|>1$ и $|v|>1$, но тогда $u=v$ необходимо имеет вид $xy=xz$. Отсюда вытекает, что для любых элементов x, y и z из S имеем $xy, xz\in I$, и, следовательно, $xyxz=xy$. Так как это последнее соотношение выполняется тождественно на S, то, используя Σ_7, получаем,что $xy=xz$ выполняется на S. Рассмотрим теперь произвольное тождество $u=v$, выводимое как из Σ_5, так и из Σ_4. Если $|u|=2$, то необходимо $u=x^2$ и, следовательно, $\Sigma_7|=u=v$. Пусть $|u|=3$ и $|v|=3$. Так как $l_1(u)=l_1(v)$, то $\Sigma_7|=u=v$. Таким образом, $(7)=(5)+(4)$.

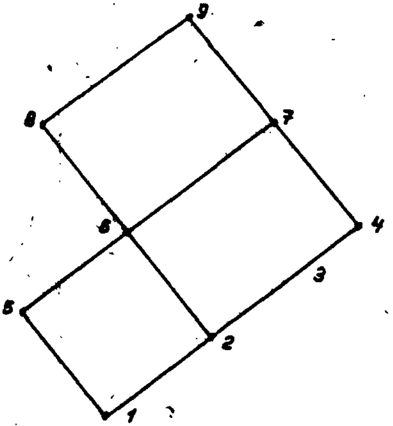

Рис. 1

Далее, очевидно $H((4),\ (5))=\{(1),\ (2),\ (4)\}$ есть подрешетка интервала [(1), (4)]. Поэтому согласно предложению 3 интервал [(5), (7)] изоморфен $H((4),\ (5))$ и содержит следующие три многообразия: (5), $(6)=(5)+(2)$, (7). Так как (5) — атом, то по предложению 5 многообразие (7) необходимо покрывает (4), причем других точек, кроме указанных на диаграмме, интервал [(1), (7)] не содержит.

Для завершения доказательства предложения покажем, что

(7) и (8) являются единственными дуальными атомами решетки $L(9)$. Пусть $u=v$ — произвольное тождество, не выводимое из системы Σ_9. Если $l_1(u)\neq l_1(v)$, то $u=v$ имеет вид $xu_1=yv_1$ и поэтому $u=v\models xyz=xpq$. Пусть $l_1(u)=l_1(v)$, $l_2(v)\neq l_2(u)$, тогда $u=v\models xyz=xpq$. Наконец, если $l_i(u)=l_i(v)$, $i=1, 2$, и $|u|=2$, то $u=v\models xy=xyz$. Предложение доказано полностью.

Система тождеств Σ называется квазиидемпотентной [3], если она удовлетворяет условию

$$\Sigma\models u=v \rightarrow \Sigma\models u=u^2,$$

для любого нетривиального тождества $u=v$. Многообразие, определяемое квазиидемпотентной системой называется квазиидемпотентным многообразием.

Предложение 7.

1) Если $\alpha\in D(G)$ и α — квазиидемпотентное многообразие, то α и G образуют точную пару.

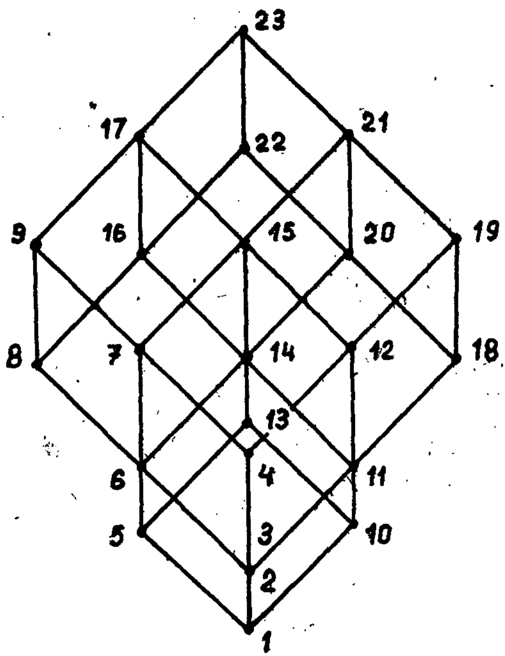

Рис. 2

2) Если $\alpha\in D(T)$ и α — квазиидемпотентное многообразие, то α и T образуют точную пару.

3) Если $\alpha\in D(Q)$ и α — квазиидемпотентное многообразие, то α и Q образуют точную пару.

Это предложение непосредственно вытекает из теоремы 3 работы [3]. Заметим, что в [3] (Теоремы 4 и 5) указан алгоритм, позволяющий вычислить систему тождеств для многообразия $\alpha+G$ (соотв. $\alpha+T$ и $\alpha+Q$), если α — квазиидемпотентное многообразие. Легко видеть, что Σ_9 — квазиидемпотентная система тождеств и, следовательно многообразия (9) и (10) образуют точную пару. Вычисляя систему тождеств для (9)+(10) (согласно [3], теорема 5), получаем многообразие (17). Далее, легко видеть, что для интервала [(1), (9)] $H((9), (10))=\{(1), (2), (4), \ldots, (9)\}$ — подрешетка. Следовательно, согласно предложению 3 интервал [(10), (17)] изоморфен $H((9), (10))$. Далее, так как (10) атом, то на основании предложения 4 имеем: $[(1), (17)]=[(1), (9)]\cup[(10), (17)]$. Учитывая, что каждое x из $H((9), (10))$ является квазиидемпотентным, мы можем вычислить систему тождеств, определяющую многообразие $x+(10)$.

Предложение 8. Решетка подмногообразий многообразия $L(23)$ описывается диаграммой, изображенной на рис. 2.

Доказательство. Вычисляя систему тождеств для $x+(10)$, где $x\in H((9), (10))$, получаем решетку многообразий $L(17)$, указанную на диаграмме. В силу двойственности, строим аналогичным образом решетку $L(21)$. Равенство $(16)+(20)=(22)$ доказано в [4]. Для завершения доказательства достаточно установить, что многообразия (17), (22) и (21) являются единственными дуальными атомами решетки $L(23)$.

Рассмотрим произвольное тождество $u=v$, не выводимое из системы тождеств Σ_{23}. Очевидно, можно предполагать, что $|u|\geqslant 2$ и $|v|\geqslant 2$, ибо в противном случае $u=v|=x=x^2$ и, следовательно, $u=v|=xyx=x$. Рассмотрим последовательно случаи:

1) $l_1(u)\neq l_1(v)$, то есть $u=v\sim xu_1=yv_1|=xzu_2=ytv_2|=xzpq=ytpq$;

2) $r_1(u)\neq r_1(v)$, тогда аналогично 1) получаем $u=v|=\Sigma_{17}$;

3) $l_1(u)=l_1(v)$ и $l_2(u)\neq l_2(v)$. Тогда $u=v|=xyu_1=x^2v_1$ или $u=v|=xyu_1=xzv_1$ В обоих случаях получаем, что $u=v|=xypq=xzpq|=\Sigma_{21}$;

4) $r_1(u)=r_1(v)$ и $r_2(u)\neq r_2(v)$. Аналогично пункту 3) выводим $u=v|=\Sigma_{17}$;

5) $l_i(u)=l_i(v)$ и $r_i(u)=r_i(v)$, $i=1, 2$. Рассмотрим подслучаи:

а) $|u|=2$. Если $|v|=2$, то $\Sigma_{23}|=u=v$, что по условию не допускается. Пусть $|v|\geqslant 3$, тогда $u=v\sim xy=xy\cdot v_1$ или $u=v\sim x^2=x^2\cdot v_1$. В первом случае $u=v\sim xy=(xy)^2$, а во втором случае $u=v\sim x^2=x^4$, что быть не может. Следовательно, $u=v|=\Sigma_{22}$;

б) $|u|=3$ и $|v|\geqslant 3$. Если $|v|=3$, тогда $\Sigma_{23}|=u=v$: Допустим, что $|v|=4$. Тогда учитывая, что u может иметь один из следующих видов xyx, xy^2, x^2y или x^3 и, соответственно, v должно быть таким xy^2x, xy^3, x^3y или x^4. Поэтому $\Sigma_{23}| = u = v$.

в) $|u| = 4$ и $|v| = 4$. Ясно, что в этом случае $\Sigma_{23}| = u = v$. Таким образом, мы приходим к выводу, что любое подмногообразие многообразия (23) содержится или в (17), или в (21), или в (22). Предложение доказано.

Рассмотрим многообразие G_n, определяемое системой $G_n = \{x^n = y^n, x = x^{n+1}\}$. Ясно, что $(23) \in D(G_n)$. Имеет место

Предложение 9.

1) Решетка $H((23), G_n)$ изоморфна интервалу $[G_n, (23) + + G_n]$, причем изоморфизм осуществляется отображением $\mu : x \rightarrow x + G_n$;

2) Интервал $[(1), G_n]$ изоморфен интервалу $[(23), (23) + + G_n]$, причем изоморфизм задается отображением $\mu : y \rightarrow y + + (23)$.

Доказательство. Легко видеть, что $H(23), G_n)$ содержит все элементы решетки $L(23)$ за исключением многообразия (3). Действительно, любой элемент $x \neq (3)$ представим в виде $x = (23) \cap y$, где $y \in [G_n, (23) + G_n]$. Покажем, что этим свойством (3) не обладает. Допустим противное, то есть $(3) = = (23) \cap y$ и пусть Σ определяет многообразие y. Тогда тождество $xy = yx$ должно быть доказуемо из системы $\Sigma_{23} \cup \Sigma$, то есть можно построить цепочку вида $xy = u_1 = ... = u_k = yx$, где тождество $u_i = u_{i+1}$ доказуемо из Σ_{23} или из Σ. Учитывая, что $xy = yx$ не выводимо только из системы Σ_{23}, заключаем, что найдется такое i, для которого тождество $u_i = u_{i+1}$ доказуемо из системы Σ. Так как это тождество не тривиальное, то или $|u_i| \geqslant 3$ или $|v_i| \geqslant 3$. Таким образом получаем, что $\Sigma_{23} \cup \Sigma | = xy = w$, причем $|w| \geqslant 3$. Отсюда, в силу равенства $(23) \cap y = (3)$, выводим, что $\Sigma_3 | = xy = zt$, что невозможно. Далее, из диаграммы вытекает, что $H((23), G_n)$ есть подрешетка решетки $L(23)$.

Пусть теперь $y \in [(1), G_n]$ и система тождеств Σ задает многообразие y. Для любого тождества $u = v \in \Sigma$ имеем:

$$\{u = v\} \cup \sigma_n \sim \{u^n u u^n = u^n v u^n\} \cup \sigma_n,$$

поэтому многообразие y представимо в виде $y = G_n \cap x$, для некоторого $x \supset (23)$. Следовательно, $H(G_n, (23)) = [(1), G_n]$.

Если мы теперь докажем, что $((23), G_n)$ — точная пара, то все будет доказано. Пусть полугруппа $S \in (23) + G$. Определим конгруэнцию θ на S полагая $(x, y) \in \theta$ тогда и только тогда, когда $x = y$ или $x = x^{n+1}$, $y = y^{n+1}$ и $x^n = y^n$. Легко видеть, что все неодноэлементные классы являются полугруппами из G_n, а фактор $S/\theta\in(23)$. Рассмотрим произвольное тождество $u(x_1, ..., x_n)=v$, выполняющееся на S/θ и на всех подполугруппах вида $\theta(x)$. Если $u(x_1, ..., x_n)$ принадлежит одноэлементному классу θ, то равенство $u=v$ выполняется на S. Пусть $u\in\theta(x)$, где $\theta(x)\in G_n$. Но тогда $v\in\theta(x)$ и $u=u^{n+1}$, $v=v^{n+1}$. Учитывая, что тождество $(x^n zy^n)^n=x^n y^n$ выполняется на полугруппе S, имеем:

$$u(x_1, ..., x_k)=u(u^n x_1 u^n, ..., u^n x_k u^n)=$$
$$=v(u^n y_1 u^n, ..., u^n y_e u^n)=v(y_1, ..., y_e).$$

Таким образом, тождесто $u=v$ истинно на полугруппе S, что и означает, что G_n и (23) образуют точную пару. Предложение доказано.

Следствие 1.

1) Интервал [(1), (22)] изоморфен интервалу $[G_n, G_n+(22)]$;

2) Интервал $[(1), G_n]$ изоморфен интервалу $[(22), (22)+G_n]$;

3) Решетка $L((22)+G_n)$ изоморфна прямому произведению решеток $L(22)$ и LG_n.

Действительно, для любого $x\in[(23), G_n]$ пара (x, G_n) — точна и, учитывая, что $H((22), G_n)=L(22)$, можем применить теорему 2. Заметим, что утверждения 1) и 3) этого следствия доказаны в работе [6].

Пусть (α, γ) точная пара и $y\subset\gamma$, тогда если $y\in H(\gamma, \alpha)$, то (α, y) также точная пара. Отсюда получаем следующий результат (см. [6]). Пусть $A_n=\{x^n=y^n, xy=yx, x=x^{n+1}\}$.

Следствие 2.

1) Интервал [(1), (22)] изоморфен интервалу $[A_n, A_n+(22)]$;

2) Интервал $[(1), A_n]$, нзоморфен интервалу $[(22), (22)+A_n]$. Наконец, учитывая, что μ_P — эффективный сдвиг, мы получаем следующий факт, доказанный в [6]: решетка $L((22)+G_n+P)\cong L((22))\times LG_n\times LP$. В работе [2] указан способ нахождения системы тождеств, определяющей многообразие вида $\alpha+P$, а в работе [1] разработан алгоритм нахождения системы тождеств, определяющей многообразие вида $\alpha+H$, по системе тождеств, задающей α.

Следствие 3.

Решетка подмногообразий многообразия $(22)+G$ описывается диаграммой, изображенной на рис. 3. Действительно, G — атом и, следовательно, $(22)+G$ покрывает (22).

Следствие 4.

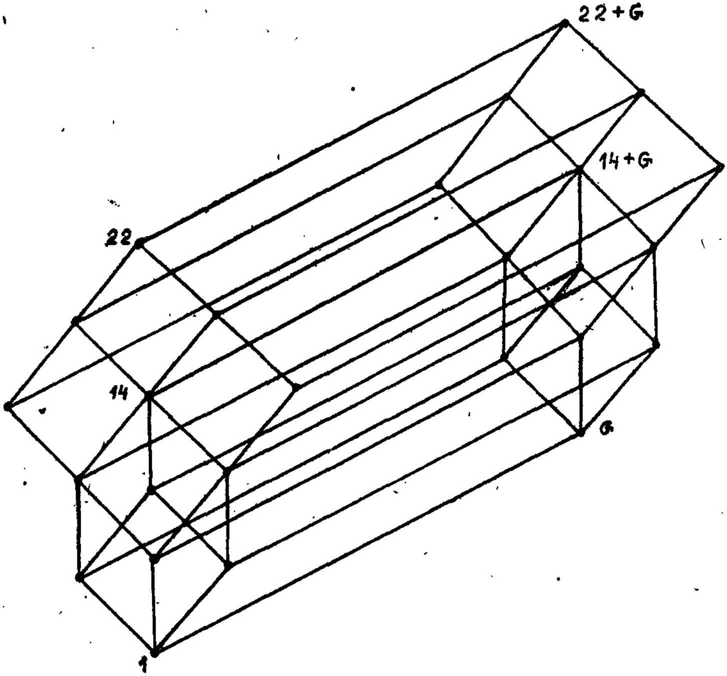

Рис. 3.

Решетка подмногообразий многообразия $\alpha=Q+T+G+$ $+H+P$ изоморфна удвоению решетки (14)$+G$. Легко видеть, что (14)$=Q+T+H$. Учитывая, что μ_P — эффективный сдвиг, получаем требуемое. Вычисляя систему тождеств Σ^* для $Q+T+G+P$, имеем $\Sigma^*=\{x=x^3,\ xzy^2t=xy^2zt\}$, а многообразие α задается системой

$$\Sigma=\{xy=x^3y,\ xy=xy^3,\ xy=(xy)^3,\ xzy^2t=xy^2zt\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельннк И. И. Ннльпотентные сдвнгн многообразнй. — «Матем. заметки», 1973, 14, № 5, 703—712.

2. Мельник И. И. О многообразнях н решетках многообразнй полугрупп. — В сб.: Исследования по алгебре. Вып. 2, Изд-во Сарат. ун-та, 1970, 47—57.

3. Мельннк И. И. Мажорантные сдвиги многообразнй. — В сб.: Исследовання по алгебре. Вып. 4, Изд-во Сарат. ун-та, 1974, 70—78.

4. Мельннк И. И. Об одном семействе многообразнй полугрупп. — «Изв. высш. учебн. заведеннй. Математнка», 1971, 12, 103—108.

5. Мельник И. И. Описание некоторых решеток многообразий. — «Изв. высш. учебн. заведений. Математика», 1972, 7, 65—74.
6. Petrich M. All subvarieties of a certain variety of semigroups. — Semigroup Forum, 1974, 7, N 1, 104—152.

В. В. РОЗЕН

АКСИОМАТИЗАЦИЯ ОПЕРАЦИЙ ИНФИМУМА И СУПРЕМУМА НА БАЗЕ ПОНЯТИЯ СВЯЗИ ГАЛУА

Как известно, система аксиом решетки представляет собой аксиоматику бинарных операций инфимума и супремума в решеточно упорядоченных множествах. Аксиоматика частичных операций инфимума и супремума в произвольных упорядоченных множествах дана в работах автора [4, 5]. Настоящая заметка основана на том обстоятельстве, что если (A, ω) — упорядоченное множество, то пара отображений $(\overset{\frown}{\omega}, \overset{\frown}{\omega^{-1}})$ образует связь Галуа на множестве $\mathbf{P}(A)$, причем частичные операции инфимума и супремума (как двухэлементных, так и произвольных подмножеств) легко могут быть выражены с помощью этих отображений. Оказывается, что связь Галуа $(\overset{\frown}{\omega}, \overset{\frown}{\omega^{-1}})$ допускает простую и удобную для приложений аксиоматизацию, которая дается в теореме 1.

Пусть P отображение $\mathbf{P}(A)$ в $\mathbf{P}(A)$, которое взаимно однозначно на одноэлементных подмножествах:

$$P(\{a_1\}) = P(\{a_2\}) \to a_1 = a_2 \tag{1}$$

Тогда на A определена частичная $\mathbf{P}$ — операция $\overset{\vee}{P}$ следующим образом:

$$\overset{\vee}{P}(X) = a \overset{df}{\longleftrightarrow} P(X) = P(\{\dot{a}\})(X \subset A, a \in A), \tag{2}$$

которая называется производной для отображения P.

Теорема 1. Для того, чтобы частичные $\mathbf{P}$ — операции φ и Ψ, определенные на множестве A, совпадали, соответственно с частичной $\mathbf{P}$-операцией взятия инфимума и частичной $\mathbf{P}$-операцией взятия супремума подмножеств в некотором упорядоченном множестве (A, ω), необходимо и достаточно, чтобы φ и Ψ были производными для некоторых отображений

P, Q; $\mathbf{P}(A) = > \mathbf{P}(A)$ взаимно однозначных на одноэлементных подмножествах и удовлетворяющих условиям:

1. (P, Q) образуют связь Галуа на $\mathbf{P}(A)$.
2. $P(Q(\{a\})) = P(\{a\})$, $Q(P(\{a\})) = Q(\{a\})$ $(a \in A)$

Доказательство. Необходимость.

Пусть (A, ω) — упорядоченное множество, $\varphi = \mathbf{P}\inf\limits_{\omega}$, $\Psi = \mathbf{P}\sup\limits_{\omega}$. Известно [2], что $(\overset{\frown}{\omega}, \overset{\frown}{\overset{-1}{\omega}})$ есть связь Галуа на $\mathbf{P}(A)$. Легко видеть, что выполняются эквивалентности:

$$\omega < a_2 > \subset \omega < a_1 > \leftrightarrow a_1 \leqslant a_2, \tag{3}$$

$$\overset{-1}{\omega} < a_1 > \subset \overset{-1}{\omega} < a_2 > \leftrightarrow a_1 \leqslant a_2. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что ограничения отображений $\overset{\frown}{\omega}$, $\overset{\frown}{\overset{-1}{\omega}}$ на одноэлементных подмножествах являются взаимно однозначными.

Имеем. $\overset{\frown}{\overset{-1}{\omega}}(\overset{\frown}{\omega}(\{a\})) = \bigcap\limits_{a \leqslant_{\omega} x} \overset{-1}{\omega} < x >$.

Ввиду (4) для всех $a \leqslant_{\omega} x$ выполняется $\overset{-1}{\omega} < a > \subset \overset{-1}{\omega} < x >$; в то же время среди множеств, стоящих под знаком пересечения, есть $\overset{-1}{\omega} < a >$, откуда $\overset{\frown}{\overset{-1}{\omega}}(\overset{\frown}{\omega})\{a\})) = \overset{\frown}{\overset{-1}{\omega}}(\{a\})$. Равенство $\overset{\frown}{\omega}(\overset{\frown}{\overset{-1}{\omega}}(\{a\})) = \overset{\frown}{\omega}(\{a\})$ получается двойственным образом. Остается установить эквивалентности:

$$\mathbf{P}\sup_{\omega}(X) = a \leftrightarrow \overset{\frown}{\omega}(X) = \overset{\frown}{\omega}(\{a\}), \tag{5}$$

$$\mathbf{P}\inf_{\omega}(X) = a \leftrightarrow \overset{\frown}{\overset{-1}{\omega}}(X) = \overset{\frown}{\overset{-1}{\omega}}(\{a\}), \tag{6}$$

которые легко проверяются с помощью (3) и (4).

Достаточность. Определим на множестве A бинарное отношение ω, полагая $(a_1, a_2) \in \omega \leftrightarrow Q(\{a_2\}) \subset Q(\{a_1\})$. Ясно, что ω рефлексивно и транзитивно, а ввиду взаимной однозначности Q на элементах ω также антисимметрично, то есть ω отношение порядка (называемое в дальнейшем каноническим). Покажем $Q(X) = \overset{\frown}{\omega}(X)$, что равносильно выполнению эквивалентности:

$$a \in Q(X) \longleftrightarrow \bigwedge_{x \in X} Q(\{a\}) \subset Q(\{x\}). \tag{7}$$

Пусть $a \in Q(X)$. Так как $Q \circ P$ экстенсивно, то получим $Q \circ P(\{a\}) \subset Q \circ P(Q(X)) = Q \circ P \circ Q(X)$. Так как (P, Q) связь Галуа, то $Q \circ P \circ Q = Q$, и ввиду условия 2 теоремы $Q \circ P(\{a\}) = Q(\{a\})$; получаем $Q(\{a\}) \subset Q(X)$. Для любого $x \in X$ по антиизотонности Q выполняется $Q(X) \subset Q(\{x\})$, откуда имеем $Q(\{a\}) \subset Q(\{x\})$, то есть показали выполнимость в (7) импликации слева направо. Покажем обратную импликацию. Пусть для любого $x \in X$ имеет место $Q(\{a\}) \subset Q(\{x\})$. По антиизотонности P имеем $P(Q(\{a\})) \supset P(Q(\{x\}))$, но $P(Q(\{x\})) \supset \{x\}$, и по условию 2 теоремы выполняется $P(Q(\{a\})) = P(\{a\})$, поэтому для любого $x \in X$ имеет место $\{x\} \subset P(\{a\})$, значит $X \subset P(\{a\})$. Ввиду антиизотонности Q получаем отсюда $Q(P(\{a\})) \subset Q(X)$, а так как $a \in Q(P(\{a\}))$, то $a \in Q(X)$.

Ввиду равноправия P и Q в условиях теоремы, получаем $P(X) = \widehat{\omega_1}(X)$, где ω_1 отношение порядка, определяемое формулой: $(a_1, a_2) \in \omega_1 \leftrightarrow P(\{a_2\}) \subset P(\{a_1\})$. Используя антиизотонность Q и условие 2 теоремы, имеем:

$$(a_1, a_2) \in \omega_1 \leftrightarrow P(\{a_2\}) \subset P(\{a_2\}) \rightarrow Q(P(\{a_1\})) \subset Q(P(\{a_2\}))$$
$$\leftarrow\rightarrow Q(\{a_1\}) \subset Q(\{a_2\}) \leftarrow\rightarrow (a_2, a_1) \in \omega,$$

то есть $\omega_1 \subset \overset{-1}{\omega}$. Аналогично получаем обратное включение, откуда $\omega_1 = \overset{-1}{\omega}$ и $P(X) = \widehat{\overset{-1}{\omega}}(X)$. Доказательство достаточности теперь немедленно следует из формул (5), (6).

Удобство приведенной в теореме 1 аксиоматики состоит в том, что при изучении свойств частичных операций инфимума и супремума она позволяет сводить рассуждения в терминах упорядоченности к алгебраическим преобразованиям. В качестве примера рассмотрим в рамках этой аксиоматики доказательство теоремы [1], что если в упорядоченном множестве каждое подмножество имеет инфимум, то оно является полной решеткой. Надо показать, что уравнение: $Q(X) = Q(\{x\})$ (*) разрешимо при всяком $X \subset A$ относительно $x \in A$. Действуя на обе части (*) отображением P и используя условие 2 теоремы имеем $P(Q(X)) = P(\{x\})$ (**). Обратно, действуя на обе части (**) отображением Q и используя равенство $Q \circ P \circ Q = Q$ и условие 2 теоремы, получим $Q(X) = Q(\{x\})$. Таким образом, уравнения (*) и (**) равносильны, а (**) разрешимо относительно $x \in A$ при любом $X \subset A$.

Назовем связь Галуа, удовлетворяющую условиям теоремы 1, специальной. Далее рассмотрены некоторые свойства специальных связей Галуа.

I. Индуцированные связи Галуа.

Пусть (P, Q) связь Галуа на $\mathbf{P}(A)$, $B \subset A$. Положим для каждого $X \subset B$:

$$P_B(X) = P(X) \cap B, \quad Q_B(X) = Q(X) \cap B.$$

Тогда (P_B, Q_B) есть связь Галуа на $\mathbf{P}(B)$. Кроме того, если (P, Q) специальная, то таковой будет и (P_B, Q_B).

Действительно:

$$X_1 \subset X_2 \to P(X_2) \subset P(X_1) \to P(X_2) \cap B \subset P(X_1) \cap B \leftrightarrow P_B(X_2) \subset P_B(X_1)$$

Получаем, что P_B антиизотонно. Покажем, что $P_B \circ Q_B$ экстенсивно. Пусть $X \subset B$. Так как $Q_B(X) \subset Q(X)$, то $P(Q(X)) \subset \subset P(Q_B(X))$, но $X \subset P(Q(X))$ и $X \subset B$, откуда $X \subset P(Q_B(X)) \cap \cap B = P_B(Q_B(X))$.

Ввиду равноправия P и Q утверждение для связей Галуа доказано. Пусть теперь связь Галуа (P, Q) специальная. Предположим, что для $b_1, b_2 \in B$ выполняется $P_B(\{b_1\}) = P_B(\{b_2\})$, то есть $P(\{b_1\}) \cap B = P(\{b_2\}) \cap B$. Так как $b_1 \in P(Q(\{b_1\})) = = P(\{b_1\})$ и $b_1 \in B$, то $b_1 \in P(\{b_2\})$, откуда $Q(\{b_1\}) \supset \supset Q(P(\{b_2\})) = Q(\{b_2\})$; обратное включение получается аналогично, откуда $Q(\{b_1\}) = Q(\{b_2\})$ и $b_1 = b_2$.

Покажем выполнимость условия 2 теоремы для (P_B, Q_B). Пусть $b \in B$. Так как $b \in Q(P(\{b\})$, то получаем $b \in Q_B(\{b\})$, откуда по антиизотонности P_B имеем $P_B(\{b\}) \supset P_B(Q_B(\{b\}))$. Обратно, $P_B(\{b\}) = P(\{b\}) \cap B = P(Q(\{b\})) \cap B \subset P(Q_B(\{b\})) \cap \cap B = P_B(Q_B(\{b\})$.

Связь Галуа (P_B, Q_B) называется индуцированной связью Галуа. Если (P, Q) специальная связь Галуа на $\mathbf{P}(A)$ и ω каноническое отношение порядка, то легко проверить, что каноническое отношение порядка индуцированной связи Галуа (P_B, Q_B) есть $\omega \cap B \times B$.

II. Прямое произведение связей Галуа.

Пусть (P_i, Q_i) связь Галуа на $\mathbf{P}(A_i)$ $(i \in I)$. Введем отображения $\boxed{\times}_{i \in I} P_i$, $\boxed{\times}_{i \in I} Q_i$ множества $\mathbf{P}(\times_{i \in I} A_i)$ в себя, полагая:

$$\overline{\boxed{\times}_{i \in I} P_i}(\rho) = \times_{i \in I} P_i(pr_i \rho), \quad \overline{\boxed{\times}_{i \in I} Q_i}(\rho) = \times_{i \in I} Q_i(pr_i \rho).$$

(где $\rho \subset \times_{i \in I} A_i$, pr_i есть каноническое проектирование $\times_{i \in I} A_i$ в A_i).

Легко проверить, что $(\boxed{\times}_{i \in I} P_i, \boxed{\times}_{i \in I} Q_i)$ есть связь Галуа на

$\mathbf{P}(\underset{i\in I}{\times} A_i)$, при этом если для каждого $i\in I$ (P_i, Q_i) есть специальная связь Галуа, то таковой будет и $(\underset{i\in I}{|\times|} P_i, \underset{i\in I}{|\times|} Q_i)$.

III. Гомоморфизмы связей Галуа.

Рассмотрим связь Галуа (P, Q) на $\mathbf{P}(A)$ и связь Галуа (P_1, Q_1) на $\mathbf{P}(B)$. Отображение $f: A \underset{\text{на}}{=>} B$ называется гомоморфизмом связей Галуа, если для любого $X\subset A$

$$\breve{f}(P(X)) = P_1(\breve{f}(X)), \breve{f}(Q(X)) = Q_1(\breve{f}(X)).$$

Пусть рассматриваемые связи Галуа являются специальными, ω, ω_1 — канонические порядки на A и B, соответственно.

По теореме 1 имеем: $P(X) = \overset{-1}{\widehat{\omega}}(X)$, $Q(X) = \widehat{\omega}(X)$, $P_1(Y) = \overset{-1}{\widehat{\omega}}_1(Y)$, $Q_1(Y) = \widehat{\omega_1}(Y)$, $(X\subset A,\ Y\subset B)$. Обозначим H множество всех гомоморфизмов $(A, \underset{\omega}{\mathbf{P}\mathrm{inf}}, \underset{\omega}{\mathbf{P}\mathrm{sup}})$ на $(B, \underset{\omega_1}{\mathbf{P}\mathrm{inf}}, \underset{\omega_1}{\mathbf{P}\mathrm{sup}})$, H^* множество всех сильных гомоморфизмов, $\bar{H}$ множество гомоморфизмов связей Галуа. Тогда

$$H^*\subset\bar{H}\subset H. \tag{8}$$

Действительно, пусть $f\in\bar{H}$, тогда имеем: $\underset{\omega}{\mathbf{P}\mathrm{inf}}(X) = a \longleftrightarrow P(X) = P(\{a\}) \rightarrow \breve{f}(P(X)) = \breve{f}(P(\{a\}) \rightarrow P_1(\breve{f}(X)) = P_1(\{f(a)\} \longleftrightarrow \underset{\omega_1}{\mathbf{P}\mathrm{inf}}(\breve{f}(X)) = f(a)$. Для супремума рассуждение аналогично, и получаем $\bar{H}\subset H$. Пусть теперь $f\in H^*$. Тогда выполняются следующие импликации:

$$P(X) = P(\{a\}) \rightarrow P_1(\breve{f}(X)) = P_1(\{f(a)\}), \tag{9}$$

$$Q(X) = Q(\{a\}) \rightarrow Q_1(\breve{f}(X)) = Q_1(\{f(a)\}), \tag{10}$$

$$\underset{b\in B}{V} P_1(\breve{f}(X)) = P_1(\{b\}) \rightarrow \underset{a\in A}{V} P(X) = P(\{a\}), \tag{11}$$

$$\underset{b\in B}{V} Q_1(\breve{f}(X)) = Q(\{b\}) \rightarrow \underset{a\in A}{V} Q(X) = Q(\{a\}). \tag{12}$$

Докажем вспомогательную эквивалентность:

$$a\in \mathrm{P}(X) \longleftrightarrow P(X\cup\{a\}) = P(\{a\}). \tag{13}$$

Действительно, пусть $a\in P(X)$, тогда $Q(\{a\}) \supset Q(P(X)) \supset X$, кроме того, $Q(\{a\})=Q(P(\{a\}))\supset\{a\}$, откуда $Q(\{a\})\supset X\cup\{a\}$. Действуя на обе части последнего включения отображением P и учитывая, что $P(Q(\{a\}))=P(\{a\})$, получаем $P(\{a\}\subset P(X\cup\{a\})$. Обратное включение выполняется по антиизотонности P, и показали в (13) импликацию слева направо. Пусть теперь выполняется правая часть эквивалентности (13), тогда $a\in P(Q(\{a\}))=P(\{a\})=P(X)\cup\{a\})\subset P(X)$. Покажем теперь, что f является гомоморфизмом связей Галуа. Пусть $b\in\breve{f}(P(X))$, то есть $b=f(a)$ для некоторого $a\in P(X)$. Согласно (13) $P(X\cup\{a\})=P(\{a\}$ и ввиду (9) $P_1(\breve{f}(X\cup\{a\}))=P_1(\{f(a)\})$, то есть $P_1(\breve{f}(X)\cup\{f(a)\})=P_1(\{f(a)\})$, что ввиду (13) эквивалентно $f(a)\in P_1(\breve{f}(X))$, то есть $b\in P_1(\breve{f}(X))$. Получили включение $\breve{f}(P(X))\subset P_1(\breve{f}(X))$. Покажем обратное включение. Пусть $b\in P_1(\breve{f}(X))$. Так как f отображение на B, то $b=f(\bar{a})$ для некоторого $\bar{a}\in A$. Принадлежность $f(\bar{a})\in P_1(\breve{f}(X))$, согласно (13) эквивалентна равенству $P_1(\breve{f}(X)\cup\{f(\bar{a})\})=P_1(\{f(\bar{a})\})$, которое можно переписать в виде $P_1(\breve{f}(X\cup\{\bar{a}\}))=P_1(\{f(\bar{a})\})$. По условию сильного гомоморфизма (11), получаем, что для некоторого $a\in A$ выполняется $P(X\cup\{a\})=P(\{a\})$, откуда ввиду (9) $P_1(\breve{f}(X\cup\{a\}))=P_1(\{f(a)\})$. Получаем $P_1(\{f(\bar{a})\})=P_1(\{f(a)\})$, и в силу взаимной однозначности P_1 на элементах $f(\bar{a})=f(a)$. Из доказанного равенства $P(X\cup\{\bar{a}\})=P(\{a\})$ имеем: $a\in P(Q(\{a\}))=P(\{a\})=P(X\cup\{\bar{a}\})\subset P(X)$. Таким образом, $b=f(\bar{a})=f(a)\in\breve{f}(P(X))$, и получаем $P_1(\breve{f}(X))\subset\breve{f}(P(X))$, что завершает доказательство (8).

Для полных решеток все три понятия: гомоморфизма, сильного гомоморфизма и гомоморфизма связей Галуа — равнозначны. Простые примеры показывают, что в общем случае включения в формуле (8) строгие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Теория структур. М., 1952.
2. Оre O. Galois connexions. Trans. Amer. Math. Soc., 1944, 55, 493—513.
3. Вагнер В. В. Теория отношения и алгебра частичных отображений. — В сб.: Теория полугрупп и ее приложения, вып. 1, Изд-во Саратовск. ун-та, 1965, 3—178.

4. Розен В. В. Частичные идемпотентные оперативы, ассоциированные с упорядоченными множествами. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1966, № 4, 96—103.

5. Розен В. В. Применение общей теории алгебраических операций к теории упорядоченных множеств. — В сб.: Некоторые приложения теории бинарных отношений, Изд-во Саратовск. ун-та, 1966, 3—9.

В. Н. САЛИЙ

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О КВАЗИБУЛЕВЫХ РЕШЕТКАХ

Изучение алгебраических свойств решеточных преобразований приводит к выделению класса немодулярных в общем случае решеток, тесно связанных с булевыми алгебрами [2]. Здесь будут рассмотрены некоторые категорные свойства этого класса. В частности, построены ковариантные функторы в категорию группоидов специального вида. Эта конструкция устанавливает также ковариантную функторную связь между категорией полных булевых алгебр и категорией групп.

§ 1. Основные понятия

1. Пусть L — полная решетка. Совокупность $(l_i)_{i\in I}$ ее элементов называется ортогональной системой, если $l_i\wedge l_j=0$, как только $i\neq j$. Ортогональная система называется независимой, если для любого разбиения $I=J\cup K$, $J\cap K=\varnothing$, имеет место равенство

$$\bigvee_{j\in J} l_j\wedge\bigvee_{k\in K} l_k=0.$$

Предложение 1. Ортогональные системы решетки L независимы, если (и только если) для каждой ортогональной системы $(l_i)_{i\in I}$ выполняется условие:

$$l_i\wedge\bigvee_{j\in I/\{i\}} l_j=0 \qquad (*)$$

при любом $i\in I$.

Доказательство. В самом деле, если $(l_i)_{i\in I}$ есть ортогональная система, удовлетворяющая условию $(*)$, то для любого подмножества $J \subset I$ совокупность $(l_i)_{i \in I/J}, \bigvee_{j \in J} l_j$ также будет ортогональной системой:

$$l_i \wedge \bigvee_{j \in J} l_j < l_i \wedge \bigvee_{j \in I/\{i\}} l_j = 0.$$

И снова можно применить условие (*):

$$(\bigvee_{j \in J} l_j) \wedge \bigvee_{i \in I/J} l_i = 0.$$

Примеры. Не во всякой полной дистрибутивной решетке ортогональные системы независимы. Например, в решетке неотрицательных целых чисел, упорядоченных делимостью (нуль — наибольший элемент, единица — наименьший) всякая бесконечная совокупность простых образует ортогональную, но не независимую систему. Конечно, бесконечный дистрибутивный закон

$$l \wedge \bigvee_{i \in I} l_i = 0.$$

(для любого элемента $l \in L$ и любой совокупности $(l_i)_{i \in I} \subset L$) обеспечивает независимость всех ортогональных систем решетки L.

2. В дальнейшем будем иметь дело с полными решетками, в которых каждый элемент имеет по крайней мере одно дополнение.

Полная решетка с дополнениями называется полубулевой, если в ней всякая ортогональная система независима.

Например, любая полная булева решетка (то есть булева алгебра в сигнатуре решетки) является полубулевой. Заметим, что известная пятиугольная (немодулярная) решетка также полубулева.

Оказывается, в решетках с дополнениями для установления полубулевости не нужно исследовать независимость всех ортогональных систем. Ортогональная система $(l_i)_{i \in I}$ называется полной, если $\bigvee_{i \in I} l_i = 1$.

Предложение 2. Решетка с дополнениями тогда (и только тогда) является полубулевой, когда всякая ее полная ортогональная система независима.

Доказательство. Пусть $(l_i)_{i \in I}$ есть некоторая ортогональная система полной решетки с дополнениями L. Пусть

l_0 есть какое-то дополнение элемента $\bigvee\limits_{i\in I} l_i$. Тогда $(l_i)_{i\in I\cup\{0\}=I_0}$ является полной ортогональной системой. Если она независима, то для любого $i\neq 0$ имеем:

$$l_i\wedge\bigvee_{j\in I/\{i\}} l_j\leqslant l_i\wedge(l_0\vee\bigvee_{j\in I/\{i\}} l_j)=l_i\wedge\bigvee_{j\in I_0/\{i\}} l_j=0,$$

то есть $(l_i)_{i\in I}$ независима.

3. Напомним [2], что полная решетка с дополнениями называется квазибулевой, если она допускает гомоморфизм на булеву решетку, который 1) взаимно однозначен в нуле и единице и 2) сохраняет точные верхние грани ортогональных систем.

Теорема 1. Решетка L квазибулева тогда и только тогда, когда она полубулева и $l_1\vee l_2=l_2\vee l_3=l_3\vee l_1=1\to l_1\vee(l_2\wedge\wedge l_3)=1$ для любых $l_1, l_2, l_3\in L$.

Это исправляет теорему 1 из [2], делая очевидным пункт 1 в доказательстве достаточности.

§ 2. Категория квазибулевых решеток

Пусть L_1, L_2 — две полные решетки. Гомоморфизм $\varphi: L_1\to L_2$ называется (0,1) — гомоморфизмом, если $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$.

Через Λ будем обозначать категорию квазибулевых решеток с (0, 1) — гомоморфизмами, сохраняющими точные верхние грани ортогональных систем.

Теорема 2. Мономорфизмами категории Λ являются взаимно однозначные вложения.

Доказательство. Пусть L, $\overline{L}$ — две квазибулевы решетки и $\varphi: L\to\overline{L}$ есть мономорфизм, т. е. из равенства $\varphi^\circ\varphi_1=\varphi^\circ\varphi_2$ следует равенство $\varphi_1=\varphi_2$. Предположим, что φ не взаимно однозначно, то есть найдутся различные элементы $l_1, l_2\in L$ такие, что $\varphi(l_1)=\varphi(l_2)$. Могут представиться два случая.

А. Элементы l_1, l_2 не экстремальные.

1) Если l_1 и l_2 имеют общее дополнение l, то взяв четырехэлементную булеву решетку $L_0=\{0, l_0, l_0', 1\}$, определим отображения $\varphi_1, \varphi_2: L_0\to L$, полагая $\varphi_1(l_0)=l_1$, $\varphi_2(l_0)=l_2$, $\varphi_1(l_0')=\varphi_2(l_0')=l$. Тогда $\varphi_1\neq\varphi_2$, но $\varphi^\circ\varphi_1=\varphi^\circ\varphi_2$, что невозможно.

2) l_1 и l_2 не имеют общего дополнения. Не нарушая общности, будем считать, что $l_1\leqslant l_2$ (в противном случае можно взять элементы $l_1\wedge l_2$ и $l_1\vee l_2$, ибо $\varphi(l_1\wedge l_2)=\varphi(l_1\vee l_2)$. Пусть l_1' и l_2' такие дополнения для l_1 и l_2 соответственно, что $l_1'\geqslant l_2'$

(если $\overline{l_1}$ и $\overline{l_2}$ произвольные дополнения для l_1 и l_2, то, согласно [1], $\overline{l_1}\wedge\overline{l_2}$ есть дополнение для $l_1\vee l_2=l_2$, а $\overline{l_1}\vee\overline{l_2}$ — дополнение для $l_1\wedge l_2=l_1$, и тогда можно взять $l_1'=\overline{l_1}\vee\overline{l_2}$, $l_2'=\overline{l_1}\wedge\overline{l_2}$).

Рассмотрим элемент $l=(l_1\vee l_2')\wedge l_1'$.

Имеем:

$$l\vee l_2=((l_1\vee l_2')\wedge l_1')\vee l_2\geqslant((l_1\vee l_2')\wedge l_2')\vee l_2=l_2'\vee l_2=1$$

и

$$l\wedge l_2=((l_1\vee l_2')\wedge l_1'\wedge l_2=(l_1\vee l_2')\wedge(l_1'\wedge l_2)=0,$$

поскольку (снова [1]) $l_1'\wedge l_2$ есть дополнение для $l_1\vee l_2'$.

Далее,

$$\varphi(l)=\varphi((l_1\vee l_2')\wedge l_1')=(\varphi(l_1)\vee\varphi(l_2'))\wedge\varphi(l_1')=$$
$$=(\varphi(l_2)\vee\varphi(l_2'))\wedge\varphi(l_1')=\varphi(l_2\vee l_2')\wedge\varphi(l_1')=\varphi(1)\wedge\varphi(l_1')=$$
$$=1\wedge\varphi(l_1')=\varphi(l_1').$$

Теперь строим $\varphi_1, \varphi_2: L_0\to L$ следующим образом: $\varphi_1(l_0)=$ $=l_1$, $\varphi_1(l_0')=l_1'$, $\varphi_2(l_0)=l_2$, $\varphi_2(l_0')=l$. Тогда $\varphi_1\neq\varphi_2$, но $\varphi^\circ\varphi_1=$ $\varphi^\circ\varphi_2$, что невозможно.

Б. Если нет таких неэкстремальных элементов $l_1\neq l_2$, что $\varphi(l_1)=\varphi(l_2)$, то решетка L оказывается четырехэлементной булевой. В самом деле, пусть $l_2=0$ и l_1' некоторое дополнение элемента l_1. Если в L существует элемент l, отличный от 0, 1, l_1, l_1', то, вследствие независимости ортогональных систем в L, из $l\wedge l_1=0$ следует, что $l\wedge l_1'\neq0$, и $l\wedge l_1'=0$ влечет $l\wedge l_1\neq0$. Так что если, например, $l\wedge l_1'\neq0$, то $\varphi(l\wedge l_1')=\varphi(l)\wedge\varphi(l_1')=$ $=\varphi(l)$, но элементы l, $l\wedge l_1'$ оба неэкстремальные, что невозможно.

Итак, L есть четырехэлементная булева решетка: $L\triangleq\{0, l_1, l_1', 1\}$. Строим $\varphi_1, \varphi_2: L_0\to L$, полагая $\varphi_1(l_0)=\varphi_2(l_0')=$ $=l_1$, $\varphi_1(l_0')=\varphi_2(l_0)=l_1'$. Ясно, что $\varphi_1\neq\varphi_2$, но $\varphi^\circ\varphi_1=\varphi^\circ\varphi_2$, что невозможно.

Теорема 3. Эпиморфизмами категории Λ являются наложения.

Доказательство. Используем стандартную для упорядоченных множеств конструкцию [4]. Пусть L и $\overline{L}$ две квазибулевы решетки, $\varphi:\overline{L}\to L$ эпиморфизм. Предположим, что существует элемент $l\in L$ такой, что $l\notin\mathrm{pr}_2\varphi$. Пусть ω обозначает естественный порядок в решетке L. Тогда подмножества

$$\omega\langle l\rangle=\{l^*\in L: l^*\geqslant l\} \text{ и } \breve{\omega}(\omega\langle l\rangle\cap\mathrm{pr}_2\varphi)$$

суть различные фильтры в L. Получаем, что морфизмы φ_1, $\varphi_2 : L \to \{0, 1\}$, определяемые этими фильтрами, различны, но $\varphi_1 \circ \varphi = \varphi_2 \circ \varphi$. Противоречие.

3. Гомоморфизм φ полной решетки L_1 в полную решетку L_2 называется полным, если он сохраняет все (то есть и бесконечные) точные грани.

Через Λ_0 будем обозначать подкатегорию категории Λ, объектами которой являются полные булевы решетки, и только они.

Теорема 4. *Морфизмами подкатегории Λ_0 являются полные булевы гомоморфизмы.*

Доказательство. Пусть $(l_i)_{i \in I}$ есть произвольное подмножество полной булевой решетки L, $\varphi : L \to \bar{L}$ есть $(0, 1)$ — гомоморфизм L в полную булеву решетку $\bar{L}$, причем φ сохраняет точные верхние грани ортогональных систем. Очевидно, что φ есть булев гомоморфизм L в $\bar{L}$.

Покажем, что $\varphi(\bigvee_{i \in I} l_i) = \bigvee_{i \in I} \varphi(l_i)$ и $\varphi(\bigwedge_{i \in I} l_i) = \bigwedge_{i \in I} \varphi(l_i)$ (конечно, второе равенство является следствием первого — в нашей ситуации).

Итак, докажем, что φ сохраняет все точные верхние грани.

1) Вполне упорядочим $(l_i)_{i \in I_0}$ обозначив $l_0 = \bigwedge_{i \in I} l_i$, $I_0 = I \cup \{0\}$.

Положим $l_0^* = l_0$, $l_i^* = l_i / \bigvee_{j<i} l_j = l_i \wedge (\bigvee_{j<i} l_j)'$.

Тогда, если $i < k$, то

$$l_i^* \wedge l_k^* = l_i \wedge (\bigvee_{j<i} l_j)' \wedge l_k \wedge (\bigvee_{m<k} l_m)' =$$

$$= l_i \wedge l_k \wedge (\bigvee_{m<k} l_m)' \leqslant l_i \wedge l_k \wedge l_i' = 0.$$

Значит, $(l_i^*)_{i \in I_0}$ — ортогональная система.

2) Покажем, что для любого $i \in I_0$ имеет место равенство

$$\bigvee_{j \leqslant i} l_j^* = \bigvee_{j \leqslant i} l_j.$$

Трансфинитная индукция: если $\bigvee_{k<j} l_k^* = \bigvee_{k<j} l_k$ для всех $j < i$, то

$$\bigvee_{j \leqslant i} l_j^* = l_i^* \vee \bigvee_{j<i} \bigvee_{k<j} l_k^* = l_i^* \vee \bigvee_{j<i} \bigvee_{k<j} l_k =$$

$$= l_i^* \vee \bigvee_{j<i} l_j = (l_i \wedge (\bigvee_{j<i} l_j)') \vee \bigvee_{j<i} l_j =$$

$$=l_i \vee \bigvee_{j<i} l_j = \bigvee_{j<i} l_j.$$

3) Очевидно, что $\bigvee_{i\in I_0} l_i^* \leqslant \bigvee_{i\in I} l_i$.

Так как

$$l_i \leqslant \bigvee_{j<i} l_j^* = \bigvee_{j<i} l_j^* \leqslant \bigvee_{i\in I_0} l_i^*,$$

то $\bigvee_{i\in I} l_i \leqslant \bigvee_{i\in I_0} l_i^*$.

Итак, $\bigvee_{i\in I_0} l_i^* = \bigvee_{i\in I} l_i$.

4) Используя полученное соотношение, имеем:

$$\varphi(\bigvee_{i\in I} l_i) = \varphi(\bigvee_{i\in I_0} l_i^*) = \bigvee_{i\in I_0} \varphi(l_i^*) \leqslant \bigvee_{i\in I} \varphi(l_i),$$

то есть $\varphi(\bigvee_{i\in I} l_i) \leqslant \bigvee_{i\in I} \varphi(l_i)$.

Обратное неравенство обеспечивается изотонностью φ.

§ 3. Функторы

1. Пусть L — полная решетка с дополнениями, A — непустое множество. Бинарные L-отношения на A суть отображения $f: A\times A\to L$.

Бинарное L-отношение f называется L-преобразованием множества A, если

$$f(a, a_1)\wedge f(a, a_2)=0$$

для любого $a\in A$ и различных $a_1, a_2\in A$.

L-преобразование f называется взаимно однозначным, если

$$f(a_1, a) \wedge f(a_2, a)=0$$

для любого $a\in A$ и различных $a_1, a_2\in A$, и полным, если

$$\bigvee_{\bar{a}\in A} f(a, \bar{a}) = \bigvee_{\bar{a}\in A} f(\bar{a}, a)=1,$$

для всякого $a\in A$.

Совокупность всех полных взаимно однозначных L-преобразований множества A обозначим через $K_L(A)$.

Если f_1, f_2 два бинарные L-отношения на A, то их суперпозицией, или произведением, назовем бинарное L-отношение $f_2 \circ f_1$ такое, что

$$f_2{}^0 f_1(a_1, a_2) = \bigvee_{a \in A} (f_1(a_1, a) \wedge f_2(a, a_2)).$$

для любых $a_1, a_2 \in A$.

Все определенные сейчас конструкции в случае, когда в качестве L берется двухэлементная решетка $\{0, 1\}$, превращаются в хорошо известные теоретико-множественные аналоги.

2. Конечно, в общем случае (то есть при произвольном выборе решетки L и неодноэлементном A) совокупность $K_L(A)$ не всегда будет замкнутой относительно введенной суперпозиции L-преобразований.

Теорема [2]. Пусть L есть полная решетка с дополнениями. Совокупность $K_L(A)$ тогда и только тогда замкнута относительно умножения (при любом A), когда решетка L квазибулева.

Группоид $\mathbf{A} = \langle A, {}^\circ \rangle$ называется ассоциацией, если 1) в $\mathbf{A}$ есть единица, 2) каждый элемент имеет обратный, 3) умножение ассоциативно по единице, то есть во всяком произведении, равном единице, скобки можно расставлять произвольно.

Например, всякая группа является ассоциацией. С другой стороны, ассоциация с однозначной обратимостью есть группа.

В [2] доказано, что группоиды вида $K_L(A)$ всегда являются ассоциациями, причем $K_L(A)$ тогда и только тогда есть группа, когда решетка L булева.

3. Через А обозначим категорию всех ассоциаций с гомоморфизмами, а через A_0 ее подкатегорию, объектами которой являются группы, и только они.

Пусть A есть некоторое фиксированное непустое множество. Следующим образом определим отображение F_A из категории Λ квазибулевых решеток в категорию А ассоциаций. Если L квазибулева решетка, положим $F_A(L) = K_L(A)$. Если $\varphi : L \to \overline{L}$ есть морфизм категории Λ, то, по определению, $F_A(\varphi)$ сопоставляет каждому $f \in K_L(A)$ бинарное $\overline{L}$-отношение $F_A(\varphi)(f)$, определенное на множестве A и такое, что

$$F_A(\varphi)(f)(a_1, a_2) = \varphi(f(a_1, a_2))$$

для любой пары $a_1, a_2 \in A$.

1) Покажем, что, на самом деле, $F_A(\varphi)(f) \in K\overline{L}(A)$.

Действительно, если $a \in A$ произвольный элемент и $a_1 \neq a_2$, то

$$F_A(\varphi)(f)(a, a_1) \wedge F_A(\varphi)(f)(a, a_2) =$$

$$=\varphi(f(a,a_1)\wedge\varphi(f(a,a_2))=\varphi(f(a,a_1))\wedge\varphi(f(a,a_2))=$$
$$=\varphi(0)=0,$$

поскольку φ сохраняет ноль.

Аналогично

$$F_A(\varphi)(f)(a_1,a)\wedge F_A(\varphi)(f)(a_2,a)=0,$$

то есть $F_A(\varphi)(f)$ взаимно однозначно.

Далее, поскольку $(f(a,\bar{a}))_{\bar{a}\in A}$ есть ортогональная система, а морфизмы в Λ сохраняют точные верхние грани ортогональных систем, получаем, что

$$\bigvee_{\bar{a}\in A} F_A(\varphi)(f)(a,\bar{a})=\bigvee_{\bar{a}\in A}\varphi(f(a,\bar{a}))=$$
$$=\varphi(\bigvee_{\bar{a}\in A} f(a,\bar{a}))=\varphi(1)=1.$$

Аналогично

$$\bigvee_{\bar{a}\in A} F_A(\varphi)(f)(\bar{a},a)=1.$$

то есть $F_A(\varphi)(f)$ есть полное взаимно однозначное $\overline{L}$-преобразование множества A,

2) Оказывается, что $F_A(\varphi)$ является гомоморфизмом ассоциации $K_L(A)$ в ассоциацию $K_L(A)$.

Прежде чем доказать это, заметим, что при любых $a_1, a_2 \in A$ и $f_1, f_2 \in K_L(A)$ совокупность $(f_1, (a_1, a)\wedge f_2(a, a_2))_{a\in A}$ является ортогональной системой.

Тогда

$$F_A(\varphi)(f_2\circ f_1)(a_1,a_2)=\varphi(f\circ f_1(a_1,a_2))=$$
$$=\varphi(\bigvee_{a\in A}(f_1(a_1,a)\wedge f_2(a,a_2))=\bigvee_{a\in A}\varphi(f_1(a_1,a)\wedge f_2(a,a_2))=$$
$$=\bigvee_{a\in A}(\varphi(f_1(a_1,a))\wedge\varphi(f_2(a,a_2)))=$$
$$=\bigvee_{a\in A}(F_A(\varphi)(f_1)(a_1,a)\wedge F_A(\varphi)(f_2)(a,a_2))=$$
$$=(F_A(\varphi)(f_2)\circ F_A(\varphi))(f_1)(a_1,a_2),$$

то есть $F_A(\varphi)(f_2\circ f_1)=F_A(\varphi)(f_2)\circ F_A(\varphi)(f_1)$, что и требовалось доказать.

3) Конечно, тождественному автоморфизму квазибулевой

решетки L отображение F_A сопоставляет тождественый автоморфизм ассоциации $K_L(A)$.

4) Пусть $\varphi: L\to\overline{L}$, $\psi: \overline{L}\to\overline{\overline{L}}$ будут морфизмами категории Λ, $f\in K_L(A)$, a_1, $a_2\in A$ — произвольные элементы соответствующих множеств. Тогда

$$F_A(\psi\circ\varphi)(f)(a_1, a_2)=\psi\circ\varphi(f(a_1, a_2))=\psi(\varphi(f(a_1, a_2)))=$$
$$=\psi(F_A(\varphi)(f)(a_1, a_2))=F_A(\psi)(F_A(\varphi)(f))(a_1, a_2)=$$
$$=(F_A(\psi)\circ F_A(\varphi))(f)(a_1, a_2),$$

то есть $F_A(\psi\circ\varphi)=F_A(\psi)\circ F_A(\varphi)$.

Напомнив еще, что для полной булевой решетки L ассоциация $K_L(A)$ всегда является группой, получаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. Отображение $F_A: \Lambda\to A$ является ковариантным функтором из категории квазибулевых решеток в категорию ассоциаций. Ограничение F_A на подкатегории Λ_0 полных булевых решеток есть ковариантный функтор из Λ_0 в категорию A_0 всех групп.

4. Меняя множество A, мы можем рассматривать совокупность функторов F_A как двухместный функтор, ковариантный или контравариантиый по индексу A, в зависимости от того, какие морфизмы между множествами нас будут интересовать. Однако эта интерпретация выглядит несколько искусственной, и мы ограничимся лишь одним, почти очевидным, замечанием.

Предложение 3. Если множества A и $\overline{A}$ равномощны, то функторы F_A и $F_{\overline{A}}$ естественно изоморфны.

Доказательство. Из равномощности множеств A и $\overline{A}$ следует изоморфность ассоциаций $K_L(A)$ и $K_L(\overline{A})$ для любой квазибулевой решетки L. Тогда функция $\Phi: \mathrm{Ob}\Lambda\to \mathrm{Mor}A$ сопоставляющая решетке L изоморфизм ассоциаций $K_L(A)$ и $K_L(\overline{A})$, очевидно, будет естественной эквивалентностью функторов F_A и $F_{\overline{A}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пашенков В. В. Об одном классе структур с неединственными дополнениями. — Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 191—201.

2. Салий В. Н. Гомоморфизмы решеток на булевы решетки и группоиды решеточных преобразований. — В сб.: «Исследования по алгебре», вып. 4, Саратов, 1974, 102—109.

3. Цаленко М. С., Шульгейфер Е. Г. Лекции по теории категорий. Изд-во МГУ, 1970.

4. Horn A., Kimura N. The category of semilattices. — Algebra univers., 1971, 1, N 1, 26—38.

Ю. СОКОЛ

О 27-й ПРОБЛЕМЕ БИРКГОФА

В известной монографии [1] Г. Биркгоф определяет характеристические многочлены для элементов конечных частично упорядоченных множеств с единицей, удовлетворяющих условию Жордана-Дедекинда. В связи с этим возникают два вопроса: во-первых, какие частично упорядоченные множества определены с точностью до изоморфизма характеристическим многочленом своей единицы, и, во-вторых, какие определены множеством характеристических многочленов всех своих элементов. Эти вопросы были поставлены Биркгофом в 1948 году, но до сих пор была опубликована единственная работа, в которой дается решение только для некоторых отдельных случаев (см. [2]).

В настоящей работе определяется операция присоединения частично упорядоченных множеств с единицей, с помощью которой автору удалось получить новые результаты о характеристических многочленах (см. теоремы 1 и 2 и следствие 3). В частности, дан полный ответ на первый вопрос (см. следствие 2).

§ 1. Обозначения и основные определения

Множество P называется частично упорядоченным, если в нем для некоторых пар элементов установлено рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение порядка, обозначаемое символом $\leqq$. Если элементы x, $y \in P$ таковы, что $x<y$ и не существует такого элемента $z \in P$, для которого бы выполнялись отношения $x<z<y$, то мы будем говорить, что y покрывает x в P (здесь, как всегда, $x<y$, если $x \leqq y$ и $x \neq y$).

Единицей частично упорядоченного множества P называют такой элемент $I \in P$, что $x \leqq I$ для всех $x \in P$. Очевидно, что если частично упорядоченное множество содержит единицу, то она единственна.

Цепью мы будем называть такое конечное (то есть состоящее из конечного числа элементов) частично упорядоченное множество A, что для любых элементов a, $b \in A$ имеет место либо отношение $a \leqq b$, либо отношение $b<a$. Если цепь A состоит из n элементов, то число $n-1$ мы будем называть ее высотой и обозначать $h(A)$. Если цепь A является подмножеством частично упорядоченного множества P и для любых

элементов a, $b \in A$ отношение $a \leqq b$ имеет место в A тогда и только тогда, когда это отношение имеет место в P, то мы ее будем называть цепью в P. Мы будем говорить, что цепь A в P является связной в P, если она удовлетворяет следующему условию: если элементы a, $b \in A$ таковы, что b покрывает a в A, то b покрывает a в P. Если C — непустая связная цепь в P и элементы x, $y \in C$ таковы, что $x \leqq c \leqq y$ или $y \leqq c \leqq x$ для всех $c \in C$ (при этом не исключается возможность $x = y$), то будем говорить, что цепь C соединяет элементы x и y в P. Будем считать, что пустая цепь (высота которой по определению равна -1) соединяет элементы x и y в P тогда и только тогда, если они не сравнимы (то есть если ни одно из отношений $x \leqq y$ и $y \leqq x$ не имеет место в P). Говорят, что конечное частично упорядоченное множество P удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда, если для любой пары элементов x, $y \in P$ выполняется следующее условие: у всех связных цепей, соединяющих x и y в P, одинаковая высота.

Говоря о частично упорядоченном множестве, мы в дальнейшем всегда будем предполагать, что оно, конечно, содержит единицу и удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда. Выполнение этих предположений не будем оговаривать.

Целочисленную функцию, которая каждому элементу частично упорядоченного множества ставит в соответствие высоту связной цепи, соединяющей этот элемент с единицей, мы будем обозначать g. Очевидно, что для каждого частично упорядоченного множества такая функция существует и она единственна.

Высоту $h(x)$ элемента $x \in P$ определяют как максимум высот всех таких цепей в P, для которых x является единицей. Высота $h(P)$ частично упорядоченного множества P — это высота его единицы.

Изоморфизм частично упорядоченных множеств определяется очевидным образом (см. [1]). Класс всех частично упорядоченных множеств, изоморфных частично упорядоченному множеству P, мы будем обозначать $[P]$.

Характеристический многочлен $P_x(\lambda)$ элемента x в P определяется формулой

$$P_x(\lambda) = \lambda^{h(x)+1} - \sum_{y < x} P_y(\lambda). \tag{1}$$

Заметим, что если $h(x) = 0$, то $P_x(\lambda) = \lambda$.

Согласно Биркгофу (см. [1]) имеет место равенство

$$P_x(\lambda) = \sum_{y \leqq x} \mu(y, x) \lambda^{h(y)+1}, \tag{2}$$

где функция Мебиуса $\mu(y, x)$ определяется следующим образом:

(i) $\mu(x, x)=1$,

(ii) $\mu(y, x)=0$, если $x<y$ или элементы x и y не сравнимы,

(iii) $\mu(y, x)=-\sum\limits_{z<x}\mu(y, z)$ если $y<x$. (3)

Заметим, что вместо (3) можно использовать двойственное условие:

$$\mu(y, x)=-\sum_{t>y}\mu(t, x) \text{ если } y<x. \tag{4}$$

Действительно, выражение (4) очевидно, если $g(y)-g(x)=1$, и индукцией по $g(y)-g(x)$ мы получим:

$$\mu(y, x)=-\sum_{z<x}\mu(y, z)=-\sum_{z<x}\left(-\sum_{t>y}\mu(t, z)\right)=$$

$$=-\sum_{t>y}\left(-\sum_{z<x}\mu(t, z)\right)=-\sum_{t>y}\mu(t, x).$$

Аналогично можно доказать, что из условия (4) вытекает условие (3), так что эти условия равносильны.

Характеристический многочлен единицы I в P мы будем называть характеристическим многочленом частично упорядоченного множества P и обозначать $P(\lambda)$. Итак, по определению

$$P(\lambda)=P_{\mathrm{I}}(\lambda).$$

Очевидно, что характеристические многочлены изоморфных частично упорядоченных множеств совпадают.

§ 2. Операция присоединения

Пусть P и Q — два непересекающиеся частично упорядоченные множества и пусть непустое подмножество $X\subset P$ обладает тем свойством, что для любых u, $v\in X$ выполняется равенство $g(u)=g(v)$. В $P\cup Q$ мы установим такое отношение порядка, чтобы выполнялись следующие четыре условия:

(A1) Для любых x, $y\in P$ отношение $x\leqq y$ имеет место в $P\cup Q$ тогда и только тогда, когда это отношение имеет место в P.

(A2) Для любых x, $y\in Q$ отношение $x\leqq y$ имеет место в $P\cup Q$ тогда и только тогда, когда это отношение имеет место в Q.

(A3) Если $x\in P$ и $y\in Q$, то в $P\cup Q$ не выполняется отношение $x\leqq y$.

(A4) Если $x \in Q$ и $y \in P$, то отношение $x \leqq y$ имеет место в $P \cup Q$ тогда и только тогда, если существует такой элемент $u \in X$, что $u \leqq y$ в P.

Очевидно, что такое отношение порядка превращает $P \cup Q$ в частично упорядоченное множество (его единицей является единица частично упорядоченного множества P и условие Жордана-Дедекинда выполняется в силу того, что $g(u) = g(v)$ для любых $u, v \in X$). Множество $P \cup Q$ с этим отношением порядка мы обозначим $P \cup_X Q$ и будем говорить, что частично упорядоченное множество $P \cup_X Q$ получено присоединением частично упорядоченного множества Q к частично упорядоченному множеству P вдоль множества X. Если множество X состоит из единственного элемента u, то вместо $P \cup_X Q$ мы будем писать $P \cup_u Q$. В аналогичном смысле мы будем использовать обозначение $P \cup_{u, v} Q$, если множество X состоит из двух элементов $u, v \in P$.

Чтобы не спутать функции g, h и μ в P или Q с соответствующими функциями в $P \cup_X Q$, то мы последние будем снабжать штрихом. Например, если $x \in P$, то $h(x)$ — высота элемента x в P, а $h'(x)$ — высота того же элемента в $P \cup_X Q$.

Напомним, что (согласно обозначениям, введенным в § 1) $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ и $P \cup_X Q(\lambda)$ — это характеристические многочлены частично упорядоченных множеств P, Q и $P \cup_X Q$, соответственно.

Единицы частично упорядоченных множеств P и Q обозначим соответственно I и J.

Теорема 1. Если $u \in P$, $u \neq I$ и $h(u) > h(Q)$, то

$$P(\lambda) = P U_u Q(\lambda).$$

Доказательство. Если в определении функции Мебиуса заменить условие (3) равносильным условием (4), то сразу становится очевидным, что

$$\mu(x, y) = \mu'(x, y) \text{ для любых } x, y \in P.$$

Кроме того, поскольку $h(u) > h(Q)$, то

$$h(x) = h'(x) \text{ для всех } x \in P.$$

Итак, в силу равенства (2) достаточно доказать, что $\mu'(z, I) = 0$ для всех $z \in Q$ (напомним, что I является единицей частично упорядоченного множества $P \cup Q_u$). Мы это докажем индукцией по $g(z)$.

Во-первых,

$$\mu'(J, I) = -\sum_{t > J} \mu'(t, I) = -\sum_{t \geqq J} \mu'(t, I) =$$

$$=-\mu'(u, I)-\sum_{t>u}\mu'(t,I)=$$
$$=-\mu'(u, I)+\mu'(u, I)=0.$$

Во-вторых, мы предположим, что $\mu'(t, I)=0$ для всех $t\in Q$, $t>z$. Тогда

$$\mu'(z, I)=-\sum_{t>z}\mu'(t, I)=$$
$$=-\sum_{j\geqslant t>z}\mu'(t, I)-\sum_{t>j}\mu'(t, I)=\mu'(J, I)=0.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Если $h(P)>1$, то всегда существует частично упорядоченное множество S, не изоморфное частично упорядоченному множеству P и такое, что $S(\lambda)=P(\lambda)$.

Доказательство. Пусть Q — частично упорядоченное множество, состоящее из единственного элемента J. Если $h(P)>1$, то существует такой элемент $u\in P$, что I покрывает u в P и $h(u)>0=h(Q)$. Тогда $P\cup_u Q$ не изоморфно P и по теореме 1 $P\cup_u Q(\lambda)=P(\lambda)$.

Фрухт (см. [2]) доказал, что если $h(P)\leqq 1$, то класс $[P]$ определяется однозначно многочленом $P(\lambda)$. Итак, учитывая следствие 1, мы получаем такой результат:

Следствие 2. Класс $[P]$ определяется однозначно многочленом $P(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $h(P)\leqq 1$.

§ 3. Допустимые многочлены

Если дан многочлен

$$\lambda^{n+1}+a_n\lambda_n+\ldots a_1\lambda, \qquad (5)$$

то возникает вопрос, какими должны быть его коэффициенты, чтобы существовало частично упорядоченное множество, для которого этот многочлен является характеристическим. В этом параграфе дан полный ответ на этот вопрос (теорема 2).

Лемма 1. Пусть (5) является характеристическим многочленом частично упорядоченного множества P. Тогда если $a_n=-1$ и индекс $m<n$ таков, что $a_i=0$ для всех $i>m$, $i\neq n$, то $a_m\leqq 0$.

Доказательство будем проводить постепенно, доказывая шаг за шагом утверждения, которые мы потом используем в доказательстве леммы.

Мы будем употреблять следующие обозначения:

$$\pi=\{z\in P \mid I \text{ покрывает } z \text{ в } P\},$$

$$H_i = \{z \in P \mid h(z) = i\},$$

(i — целое неотрицательное число).

(Б1) Если целое число i такое, что

$$1 \leqq i \leqq n, \text{ то}$$

$$a_i = \sum_{y \in H_{i-1}} \mu(y, I).$$

Доказательство. Это вытекает из того факта, что если в правой части равенства (2) x заменить на I, то она равна многочлену (5).

(Б2) $\mu(y, I) = -1$ для всех $y \in \pi$.

Это вытекает из (4).

(Б3) Множество H_n состоит из единственного элемента, который мы обозначим s.

Доказательство. В силу (Б1) мы получаем:

$$\sum_{y \in H_{n-1}} \mu(y, I) = a_n = -1.$$

Учитывая, что $H_{n-1} \subset \pi$, и сопоставляя это с (Б2), мы получаем требуемый результат.

Мы введем следующие обозначения:

$$S = \{z \in P \mid z < s\},$$

$$S_i = S \cap H_i,$$

$$\pi_i = \pi \cap H_i,$$

$$T_x = \{z \in P \mid z > x\},$$

$$H_i(x) = T_x \cap H_i.$$

(Б4) Пусть индекс $k < n$ таков, что для всех

$$y \in \bigcup_{k < l < n} H_{l-1}.$$

выполняется следующее условие:

$$y \in S \text{ и } \mu(y, I) = 0. \qquad (6)$$

Тогда $H_{k-1} \subset S \cup \pi$ и $\mu(y, I) = 0$ для всех $y \in S_{k-1}$. В частности, $H_{n-2} \subset S \cup \pi$ и $\mu(y, I) = 0$ для всех $y \in S_{n-2}$.

Доказательство. Пусть $z \in H_{k-1}$ не принадлежит множеству S. Тогда существует такой элемент $y \in \pi$, что $y \geqq z$. Допустим, что $y > z$. Тогда $h(y) > h(z) = k-1$. Но с другой стороны $y \neq I$ (поскольку $y \in \pi$) и $y \neq s$ (поскольку z не принадлежит множеству S). Поэтому $k-1 < h(y) < n-1$ и

$$y \in \bigcup_{k < l < n} H_{l-1}.$$

Следовательно, $y \in S$ и $z < y < s$, что противоречит тому, что z не принадлежит множеству S. Итак, $z = y$, но тогда $z \in \pi$. Тем самым доказано, что $H_{k-1} \subset S \cup \pi$.

Пусть $y \in S_{k-1}$. Если $t > y$, то $h(t) > h(y) = k-1$ и

$$t \in \bigcup_{l > k} H_{l-1}.$$

Следовательно, если $t \neq I$ и $t \neq s$, то

$$t \in \bigcup_{k < l < n} H_{l-1}.$$

Значит,

$$T_y \subset \{I, s\} \cup (\bigcup_{k < l < n} H_{l-1})$$

Поэтому, учитывая, что I, $s \in T_y$, получаем:

$$T_y = \{I, s\} \cup (\bigcup_{k < l < n} H_{l-1}(y)).$$

Если $i \neq j$, то множества $H_{i-1}(y)$ и $H_{j-1}(y)$ не пересекаются. Следовательно, в силу (4), (Б2) и предположения (6)

$$\mu(y, I) = -\sum_{t > y} \mu(t, I) =$$

$$= -\mu(I, I) - \mu(s, I) - \sum_{k < l < n} (\sum_{t \in H_{l-1}(y)} \mu(t, I)) = 0$$

Утверждение (Б4) доказано.

(Б5) Если индекс $k < n$ таков, что

$$H_{k-1} \subset S \cup \pi \text{ и } \mu(y, I) = 0$$

для всех $y \in S_{k-1}$, то $a_k \leqq 0$ и множество π_{k-1} состоит из $-a_k$ элементов. В частности, если $a_k = 0$, то множество π_{k-1} пусто.

Доказательство вытекает из (Б1) и (В2), если учесть, что множества S_{k-1} и π_{k-1} не пересекаются и $S_{k-1} \cup \pi_{k-1} = H_{k-1}$ (поскольку предполагается, что $H_{k-1} \subset S \cup \pi$).

Доказательство леммы 1. Индукцией можно доказать, что условие (6) выполняется для всех

$$y \in \bigcup_{m < l < n} H_{l-1}.$$

Действительно, во-первых, в силу (Б4) $H_{n-2} \subset S \cup \pi$ и $\mu(y, I) = 0$ для всех $y \in S_{n-2}$. Следовательно, если $m = n-1$, то утверждение леммы вытекает из (Б5). Поэтому мы можем предполагать, что $m \leqq n-2$. Но тогда $a_{n-1} = 0$ и в силу (Б5) множество π_{n-2} пусто. Значит, $H_{n-2} \subset S$ и условие (6) выполняется для всех $y \in H_{n-2}$. Во-вторых, пусть условие (6) выполняется для всех

$$y \in \bigcup_{k<i<n} H_{i-1}.$$

Тогда из (Б4) следует, что $H_{k-1} \subset SU\pi$ и $\mu(y, I)=0$ для всех $y \in S_{k-1}$. Если $k > m$, то $a_k = 0$ и в силу (Б5) множество π_{k-1} пусто. Значит, $H_{k-1} \subset S$ и поэтому условие (6) выполняется для всех $y \in H_{k-1}$. Тем самым мы закончили второй шаг индукции. Теперь лемма уже непосредственно следует из (Б4) и (Б5).

В дальнейшем мы будем употреблять обозначения параграфа 2.

Л е м м а 2. $\mu'(z, I)=0$ в $PU_x Q$ для всех $z \in Q$, $z \neq J$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы будем доказывать это индукцией по $g(z)$ в Q. Во-первых, если $g(z)=1$, то

$$\mu'(z, I) = -\sum_{t>z} \mu'(t, I) = -\sum_{t \geqq J} \mu'(t, I) =$$

$$= -\sum_{t>J} \mu'(t, I) - \mu'(J, I) =$$

$$= \mu'(J, I) - \mu'(J, I) = 0.$$

Во-вторых, если утверждение леммы доказано для всех $y \in Q$ таких, что $g(y) < g(z)$, то

$$\mu'(z, I) = -\sum_{t>z} \mu'(t, I) =$$

$$= -\sum_{t \geqslant J} \mu'(t, I) = 0.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 3. Если элементы $u, v \in P$ таковы, что $u \neq v$ и $g(u) = g(z) = 1$, то $\mu'(J, I) = 1$ в $PU_{u,v}Q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $g(u) = g(v) = 1$, то I покрывает u и v в P. Поэтому I покрывает u и v в $PU_{u,v}Q$. Следовательно, $\mu'(u, I) = \mu'(v, I) = -1$ и в силу (4)

$$\mu'(J, I) = -\mu'(u, I) - \mu'(v, I) = \mu'(I, I) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Пусть Q — частично упорядоченное множество и i — целое неотрицательное число. В множестве всех упорядоченных пар (z, i), где $z \in Q$, мы введем отношение порядка следующим образом: $(z, i) \leqq (y, i)$ тогда и только тогда, если $z \leqq y$ в Q. Мы получили новое частично упорядоченное множество, которое мы обозначим Q_1. Очевидно, что Q и Q_1 канонически изоморфны.

Если подмножество $X \subset P$ такое, что $g(u)=g(v)$ для любых $u,\ v \in X$ и k — положительное целое число, то символом PU_XkQ мы будем обозначать частично упорядоченное множество

$$(\dots((PU_XQ_1)\,U_XQ_2)\dots U_XQ_{k-1})\,U_XQ_k.$$

Удобно считать, что $PU_XOQ=P$.

Заметим, что PU_XQ и PU_X1Q канонически изоморфны, но не равны.

Согласно обозначениям, введенным в §1, $PU_XkQ(\lambda)$ — это характеристический многочлен частично упорядоченного множества PU_XkQ.

Лемма 4. Если $h(P)>h(Q)$, то

$$PU_IkQ(\lambda)=P(\lambda)-k\lambda^{h(J)+1},$$

Доказательство. Лемма тривиальна для $k=O$. Мы предположим, что лемма верна для некоторого $k-1$. Поскольку I покрывает J в $(PU_I(k-1)Q)\,U_IQ$, то $\mu'(J,I)=-1$ (μ' — функция Мебиуса в $(PU_I(k-1)Q)\,U_IQ$). Если в определении функции Мебиуса заменить условие (3) условием (4), то сразу становится очевидным, что $\mu(x,y)=\mu'(x,y)$ для любых x, $y \in PU_I(k-1)Q$ (здесь μ — функция Мебиуса в $PU_I(k-1)Q$). Кроме того, поскольку $h(P)>h(Q)$, то $h(x)=h'(x)$ для всех $x \in PU_I(k-1)Q$ (здесь $h(x)$ и $h'(x)$ — высоты элемента x в $PU_I(k-1)Q$ и $(PU_I(k-1)Q)\,U_IQ$, соответственно). Поэтому в силу равенства (2) и леммы 2

$$(PU_I(k-1)Q)U_IQ(\lambda)=PU_I(k-1)Q(\lambda)-\lambda^{h(J)+1}=$$
$$=P(\lambda)-(k-1)\lambda^{h(J)+1}-\lambda^{h(J)+1}=P(\lambda)-k\lambda^{h(J)+1}.$$

Теперь утверждение леммы вытекает из того, что PU_IkQ и $(PU_I(k-1)Q)\,U_IQ$ изоморфны.

Лемма 5. Если элементы $u,\ v \in P$ таковы, что $u \neq v$, $g(u)=g(v)=1$, $h(u)>h(Q)$ и $h(v)>h(Q)$, то $PU_{u,v}kQ(\lambda)=$ $=P(\lambda)+k\lambda^{h(J)+1}$.

Доказательство этой леммы мы не будем проводить, поскольку оно аналогично доказательству леммы 4. Разница заключается только в том, что здесь в силу леммы 3 $\mu'(J,I)=$ $=1$, а не -1.

Теорема 2. Если дан многочлен (5), то частично упорядоченное множество, для которого этот многочлен является характеристическим, существует тогда и только тогда, если коэффициенты $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ являются целыми числами, $a_n \leqq -1$ и выполняется следующее условие:

(В) Если $a_n = -1$ и индекс $m < n$ таков, что $a_i = 0$ для всех $i > m$, $i \neq n$, то $a_m \leqq 0$.

Доказательство. Пусть многочлен (5) таков, что $a_n, a_{n-1}, \ldots$, являются целыми числами, $a_n \leqq -1$ и выполняется условие (В). Сконструируем частично упорядоченное множество, для которого (5) является характеристическим многочленом. Эту конструкцию мы будем проводить по индукции.

Пусть $P^n = A^n U_I (1-a_n) A^{n-1}$, где A^n и A^{n-1} — две непересекающиеся цепи, высоты которых равны n и $n-1$, соответственно, и I — единица цепи A^n. Для любого целого числа k, такого, что $1 \leqq k < n$, мы сконструируем частично упорядоченное множество P^k. Мы предположим, что P^{k+1} уже сконструировано. Если $a_k \leqq 0$, то пусть $P^k = P^{k+1} U_I (-a_k) A^{k-1}$, где A^{k-1} — цепь, непересекающаяся с P^{k+1} и такова, что $h(A^{k-1}) = k-1$. Если $a_k > 0$, то (в силу (В) и конструкции частично упорядоченного множества P^{k+1}) существуют два элемента $u, v \in P^{k+1}$ такие, что $u \neq v$ и $g(u) = g(v) = 1$ в P^{k+1}. Тогда мы определим: $P^k = P^{k+1} U_{u,v} a_k A^{k-1}$.

На основании леммы 4 и 5 нетрудно доказать, что

$$P^k(\lambda) = \lambda^{n+1} + a_n \lambda^n + \ldots a_k \lambda^k.$$

Итак,

$$P^1(\lambda) = \lambda^{n+1} + a_n \lambda^n + \ldots + a_1 \lambda.$$

Обратное утверждение теоремы вытекает из леммы 1 и определения характеристического многочлена (1).

Следствие 3. Если P — частично упорядоченное множество, $x \in P$, $h(x) \geqq 1$, то многочлен $P_x(\lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Доказательство вытекает из того факта, что x является единицей подмножества

$$P_x = \{y \in P \mid y \leqslant x \text{ в } P\}$$

частично упорядоченного множества P с индуцированным отношением порядка.

Замечание. Автор хочет выразить свою благодарности профессорам М. Колибиару и Л. А. Скорнякову, которые своими советами помогли автору устранить некоторые неточности и подготовить текст к печати.

Братислава (ЧССР)

ЛИТЕРАТУРА

1. Birkhoff G. Lattice theory. Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, 25, N. Y., 1967.
2. Frucht W. R. Sombre el problema 6 de Birkhoff. — Scientia, ano XXXI, N 124, Valparaiso, 1964, 5—21.

Т. С. ФОФАНОВА

О ПРОЕКТИВНОСТИ ПОЛИГОНОВ НАД ДИСТРИБУТИВНЫМИ СТРУКТУРАМИ

Определение полигона над произвольной дистрибутивной структурой D (D-полигона) можно найти в работах [1] и [3]. Введем обозначения: P — категория всех D-полигонов; если D — конечная булева алгебра, то эту категорию обозначим B; N — категория всех полуструктур; N_0 — категория всех полуструктур с нулем (и сохраняющими нуль гомоморфизмами).

Как было показано в [5], в категории P свободные объекты являются проективными. Стандартными рассуждениями (вполне аналогичными доказательствам подобных фактов для модулей над кольцом) проверяется, что 1) каждый свободный D-полигон изоморфен прямой сумме $\oplus D_\alpha$, $\alpha \in I$, где все D_α изоморфны структуре D, рассматриваемой как полигон над собой; 2) в категории P свободное произведение (или копроизведение, по терминологии Митчелла) любого непустого семейства непересекающихся D-полигонов совпадает с их прямой суммой.

Теорема 1. Если A является проективным D-полигоном. то полуструктура A оказывается дистрибутивной структурой.

Доказательство. Если D-полигон A проективен, то он является ретрактом свободного D-полигона $F = \oplus A_\alpha$, где $A_\alpha \cong D$ для всех α. Очевидно, что структура F дистрибутивна. Пусть $\psi: A \to F$ и $\varphi: F \to A$ такие гомоморфизмы полигонов, что $\psi\varphi$ является тождественным гомоморфизмом полигона A. Если $a, b \in A$ и $\inf\{a\psi, b\psi\} = a\psi \cdot b\psi$, то, ввиду изотонности отображения φ, очевидно, что $(a\psi \cdot b\psi)\varphi \leqslant a, b$. Если же $m \in A$ и $m \leqslant a, b$, то $m\psi \leqslant a\psi, b\psi$ и тем самым $m\psi \leqslant a\varphi \cdot b\psi$. Но тогда $m = m\psi\varphi \leqslant (a\psi \cdot b\psi)\varphi$. Таким образом, доказано, что A является структурой, причем, $a \cdot b = \inf\{a, b\} = (a\psi \cdot b\psi)\varphi$ для любых $a, b \in A$. Далее имеем $(a+b)c = [(a+b)\psi \cdot c\psi]\varphi = [(a\psi +$

$+b\psi]\cdot c\psi]\varphi = (a\psi\cdot c\psi + b\psi\cdot c\psi)\varphi = (a\psi\cdot c\psi)\varphi + (b\psi\cdot c\psi)\varphi = a\cdot c + b\cdot c$, то есть структура A дистрибутивна.

Теорема 2. В категории P проективными циклическими полигонами оказываются главные идеалы структуры D и только они (с точностью до изоморфизма).

Доказательство. Для любого главного идеала $[0, a]$ структуры D отображение $\varphi: D \to [0, a]$, определяемое условием $d\varphi = da$ для всех $d \in D$, является гомоморфизмом D-полигонов, причем $d\varphi = d$ для всех $d \in [0, a]$. Отсюда видно, что каждый главный идеал структуры D является ее ретрактом и, следовательно, проективным полигоном ([8], стр. 79).

Если циклический D-полигон I с образующим e проективен, то эпиморфизм $\varphi: D \to I$, задаваемый условием $I_D\varphi = e$, является ретракцией ([8], стр. 70), то есть существует такой гомоморфизм $\psi: I \to D$, что $\psi\varphi$ — тождественный гомоморфизм полигона I. Пусть $e\psi = \gamma$. Для произвольного элемента $\lambda e \in I$ справедливы равенства $(\lambda e)\psi = \lambda(e\psi) = \lambda\gamma \in [0, \gamma]$, откуда $I\psi \subseteq [0, \gamma]$. Если же $\mu \in [0, \gamma]$, то $(\mu e)\psi = \mu(e\psi) = \mu\gamma = \mu$, то есть ψ отображает I на $[0, \gamma]$. Так как взаимная однозначность этого отображения очевидна, то полигон I изоморфен главному идеалу $[0, \gamma]$.

Теорема 3. Кроме одноэлементной, не существует такой дистрибутивной структуры, категория полигонов над которой проективна или инъективна.

(Напомним, что инъективной [проективной] называется категория, все объекты которой инъективны [проективны]).

Доказательство. Пусть P — произвольная полуструктура, $\varphi: P \to N$ — гомоморфизм полуструктур и $\alpha: M \to N$ — эпиморфизм полуструктур. Присоединяя к P, M и N внешним образом наименьшие элементы 0_P, 0_M и 0_N, соответственно, и полагая $0_P\varphi = 0_N$ и $0_M\alpha = 0_N$, мы можем рассматривать φ и α как гомоморфизм и эпиморфизм в категории N_0 и, ввиду [3], как гомоморфизм и эпиморфизм в категории P. Если D неодноэлементна и все D-полигоны проективны, то существует такой D-гомоморфизм $\psi: P \cup 0_P \to M \cup 0_M$, что $\psi\alpha = \varphi$. Так как $p\varphi \neq 0_N$ для всех $p \in P$ и $0_M\alpha \cong 0_N$, то $p\psi \neq 0_M$ для всех $p \in P$. Значит, ограничение ψ гомоморфизма ψ на P является таким гомоморфизмом полуструктур $P \to M$, что $\psi\alpha = \varphi$. Таким образом, произвольная полуструктура P оказывается проективной в категории N, что неверно (см. [6]).

При доказательстве второй части теоремы нужно, рассматривая диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & N \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\
Q &
\end{tikzcd}
$$

(где α — мономорфизм полуструктур, а φ — гомоморфизм), взять в качестве Q произвольную полуструктуру с нулем, а к полуструктурам M и N добавить O_M и O_N. После этого окажется, что каждая полуструктура с нулем инъективна в категории N, что также неверно [6].

Теорема 4. Счетно-порожденный идеал булевой алгебры D является проективным D-полигоном.

Доказательство. Для подмножества $M \subseteq D$ выражением $I(M)$ обозначим идеал, порожденный множеством M. Пусть I — идеал структуры D, причем $I = I(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots)$, $\lambda_n \in D$. Очевидно, что $I = \cup I_k$, где $I_k = I(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Обозначив элемент $\lambda_k \overline{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1})}$ через λ'_k, для всех $k \geqslant 2$ и считая что $\lambda'_1 = \lambda_1$, убедимся с помощью простой индукции, что равенство $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = \lambda'_1 + \ldots + \lambda'_k$ справедливо для любого натурального k*:

$$
\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1} + \lambda_k(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1}) + \lambda_k\overline{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1})} =
$$
$$
= \lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1} + \lambda'_k = \lambda'_1 + \ldots + \lambda'_{k-1} + \lambda'_k.
$$

Кроме того, $\lambda'_k(\lambda'_1 + \ldots + \lambda'_{k-1}) \leqslant \lambda'_k\, \overline{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1})} = 0$, то есть для любого k множество элементов $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k$ независимо (см. [2], стр. 99). Отсюда для любого k вытекают равенства $I_k = I(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) = I(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) = I(\lambda'_1 \dot{+} \ldots \dot{+} \lambda'_k) = I(\lambda'_1) \oplus \ldots \oplus I(\lambda'_k)$, из которых следует, что $I_k = I_{k-1} \oplus I(\lambda'_k)$ для всех $k = 2, \ldots$ (Здесь $\dot{+}$ — сумма независимых элементов, а $\oplus$ — прямая сумма полуструктур). Таким образом, $I = \oplus I(\lambda'_k)$ и, ввиду теоремы 2, I является проективным D-полигоном.

Замечание 1. Как показал Капланский ([7], стр. 85), все счетно-порожденные идеалы любого регулярного (и, значит, любого булева) кольца проективны.

Теорема 5. Полигон P над конечной булевой алгеб-

* Через $\bar{a}$ обозначается дополнение элемента a в алгебре D.

рой D длины n проективен в категории B тогда и только тогда, когда полуструктура P проективна в категории N**.

Доказательство. Сначала заметим, что полуструктура $A \in N_0$ проективна в категории N_0 тогда и только тогда, когда она проективна в категории N. В самом деле, пусть $A \in N_0$, $B, C \in N$, $\varphi : A \longrightarrow C$ и $\psi : B \longrightarrow C$ — гомоморфизм и эпиморфизм полуструктур, соответственно, и допустим, что полуструктура A проективна в N_0. Возьмем элемент $c \in C$, $c = 0_A\varphi$ и такой элемент $b \in B$, что $b\psi = c$. Если теперь $c^\Delta = \{m \mid m \in C,\ m \geqslant c\}$ и $b^\Delta = \{n \mid n \in B,\ n \geqslant b\}$, то c^Δ, $b^\Delta \in N_0$, $A\varphi \subseteq c^\Delta$ и $b^\Delta\psi \subseteq c^\Delta$. Ввиду проективности полуструктуры A, существует такой гомоморфизм α: $A \rightarrow b^\Delta \subseteq B$, что $\alpha\psi = \varphi$. Тем самым показано, что A прективна в категории N. Обратное утверждение очевидно.

Пусть P — проективный D-полигон. Ввиду [3], $P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n$. При этом все P_i являются тривиальными проективными D-полигонами. Если теперь

$$\begin{tikzcd} & P_i \arrow[dl, dashed, "\psi_i"'] \arrow[d, "\varphi_i"] \\ M_i \arrow[r, "\alpha_i"'] & N_i \end{tikzcd} \qquad (A)$$

диаграмма в категории N_0 (φ_i — гомоморфизм и α_i — мономорфизм), то ввиду тривиальности полигона P_i и предложения 4 [3] можно рассматривать ее как диаграмму в категории B. Ввиду проективности полигона P_i, существует такой гомоморфизм $\psi_i : P_i \longrightarrow M$, что $\psi_i\alpha_i = \varphi_i$. Отсюда следует, что полуструктура P_i проективна в N_0 для всех $i = 1, \ldots, n$. Так как категория N_0 изоморфна категории полигонов над двухэлементной структурой, то прямая сумма в N_0 совпадает со свободным произведением, и, следовательно, полуструктура P проективна в N_0 и, значит, в N.

** Одной из характеристик проективных объектов категории N, полученных в [6], является следующая: полуструктура P проективна тогда и только тогда, когда множество $\{y \mid y \leqslant x\}$ конечно для любого $x \in P$ и когда P (если 0_P существует) или P с внешне присоединенным нулем (если 0_P не существует) является дистрибутивной структурой.

Если полуструктура P проективна в категории N, то она проективна и в N_0. Следовательно, и все полуструктуры P_i оказываются проективными в N_0. Каждая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ M \arrow[r, "\alpha"'] & N \end{tikzcd} \qquad (B)$$

(где α — эпиморфизм, φ — гомоморфизм) в категории B ввиду предложения 4, [3], индуцирует n диаграмм вида (A) в категории N_0. Поэтому наличие гомоморфизма ψ, дополняющего диаграмму (B) до коммутативной, вытекает из существования гомоморфизмов ψ_i, замыкающих диаграммы (A). Следовательно, полигон P проективен в B. Теорема доказана.

Пример полигона над булевой алгеброй D, не разлагающегося ни в прямую сумму (ни в прямое произведение) фиксаторов атомов алгебры D.

Пусть D — прямое произведение счетного числа экземпляров двуэлементной структуры **2**, то есть каждый элемент $\alpha \in D$ имеет вид $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_i, ...)$, где $\alpha_i = 0$ или 1. Для любых $\alpha, \beta \in D$ $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_i, ...)$, $\beta = (\beta_1, ..., \beta_i, ...)$ положим $\alpha \sim \beta$ в том и только в том случае, если $\alpha_i = \beta_i$ почти всюду (то есть для всех i, кроме, быть может, конечного числа). Ясно, что отношение $\sim$ является эквивалентностью на множестве D. Кроме того, если $\alpha \sim \beta$ ($\alpha_i = \beta_i$ всюду, кроме n мест) и $\gamma \sim \delta$ ($\gamma_i = \delta_i$ всюду, кроме m мест), то $\alpha + \gamma \sim \beta + \delta$, так как $\alpha_i + \gamma_i = \beta_i + \delta_i$ всюду, кроме, самое большее, $m+n$ мест. Таким образом, множество $A = D/\sim$ является полуструктурой. Нетрудно видеть также, что условие $\beta \sim \gamma$ (β; $\gamma \in D$) влечет соотношение $\alpha\beta \sim \alpha\gamma$ для любого $\alpha \in D$. Следовательно, полуструктура A является D-полигоном, в котором умножение на элементы $\lambda \in D$ индуцируется обычным структурным умножением в D. При этом $\lambda_i a = 0_A$ для любого атома λ_i структуры D и для всех $a \in A$, то есть все фиксаторы атомов алгебры D совпадают с нулем 0_A.

Этот пример показывает невозможность получения характеристики проективных полигонов над бесконечной (даже атомной) булевой алгеброй, исходя из характеристики проектных полуструктур так, как это сделано в теореме 5.

Существует ли булева алгебра D, все проективные полигоны над которой являются инъективными?

Если D — такая булева алгебра, то сама она как свободный D-полигон должна быть инъективной. Из теоремы 4, [4], следует, что в этом случае алгебра D является полной.

Теорема 6. Все проективные полигоны с наибольшим элементом над полной булевой алгеброй D являются инъективными.

(Требование наибольшего элемента здесь естественно, поскольку, если проективный полигон инъективен, то он полон и, следовательно, обладает наибольшим элементом. Из теоремы 5 и характеристики проективных полуструктур видно, что проективные полигоны без единицы существуют уже над конечными булевыми алгебрами).

Доказательство. Если A — проективный полигон над полной булевой алгеброй D, то A является ретрактом свободного D-полигона $F=\oplus A_\alpha$, $A_\alpha \simeq D$, то есть существуют такие гомоморфизмы $\varphi : A \to F$ и $\psi : F \to A$, что гомоморфизм $\varphi\psi$ тождественный. Пусть 1_A — наибольший элемент полигона A и $1_A\varphi = f = (\ldots, f_\alpha, \ldots)$, причем только координаты $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n}$ отличны от нуля. Так как $a \leqslant 1_A$, то $a\varphi \in \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$ для всех $a \in A$, и мы можем считать полигон A ретрактом полного, бесконечно дистрибутивного полигона $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$, который инъективен ввиду теоремы 6. Следовательно, и сам полигон A является инъективным.

Замечание 2. Теорема 6 интересна тем, что для случая полных булевых алгебр она несколько усиливает результат теоремы 1.

Хотя в настоящей работе и нет полного описания проективных полигонов над произвольной булевой алгеброй, полученные свойства позволяют установить отличие категории B от категории N, с одной стороны, и категории модулей над булевым кольцом, с другой (о некотором сходстве между ними говорят теоремы 4 и 5).

А) Для любой алгебры D в категории полигонов B сама алгебра D является проективным объектом, в то время как в категории N булева алгебра проективна тогда и только тогда, когда она конечна.

В) Каждая конечная дистрибутивная структура проективна в категории N и, значит, в категории N_0. Следовательно, ее можно рассматривать как проективный объект категории B

для случая, когда D является двухэлементной алгеброй. Однако она может и не разлагаться в прямую сумму полигонов, изоморфных главным идеалам алгебры D (в данном случае, двухэлементных полигонов). В качестве примера достаточно взять трехэлементную цепь. Значит, теорема Капланского о разложимости проективного модуля над регулярным кольцом (булево кольцо регулярно) в прямую сумму модулей, изоморфных главным идеалам кольца, в категории B места не имеет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корниенко В. С. О плоских полигонах над дистрибутивными структурами. — В сб.: Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Саратовск. ун-та.

2. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М., 1970.

3. Фофанова Т. С. Полигоны над дистрибутивными структурами. — Сибирск. матем. ж., 1971, 12, № 5, 1195—1199.

4. Фофанова Т. С. Инъективность полигонов над булевыми алгебрами. — Сибирск. матер. ж., 1972, 13, № 2, 452—458.

5. Фофанова Т. С. Свободные расширения частичных полигонов. — В сб.: Упорядоченные множества и решетки, вып. 2, Изд-во Саратовск. ун-та, 1974, 99—108.

6. Horn A., Kimura N. The category of semilattices. — Algebra Univers., 1971, 1, N 1, 26—38.

7. Kaplansky I. On the dimension of modules and algebras X, A right hereditary ring which is not left hereditary. — Nagoya Math. J., 1958, 13, 85—88.

8. Mitchell B. Theory of categories. N. Y. — London, 1965.

СОДЕРЖАНИЕ

УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И РЕШЕТКИ

Межвузовский научный сборник

Выпуск четвертый

Редактор Л. И. Носова
Технический редактор Н. И. Добровольская
Корректор И. Ю. Бучко

НГ73183. Сдано в набор 12.II.1976 г. Подписано к печати 6.IV.1977 г. Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Бумага тип. № 3. Усл.-печ. л. 7,90(8,5). Уч.-изд. л. 7,6. Тираж 400. Заказ 2716. Цена 1 р. 14 к.

Издательство Саратовского университета, Университетская, 42
Саратов, типография издательства «Коммунист», Волжская, 28

УДК 519.4

Бондарев А. С. **О полноте гомоморфных образцов полных векторных решеток и булевых алгебр.** Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1977, с. 3—10.

Найдены условия, при которых фактор-линеал K-пространства по l-идеалу оказывается K-пространством. Рассматриваются алгебраические и топологические приложения.

Библ. — 6 наим.

УДК 519.4

Векслер А. И. **Архимедовы свободные линейные оболочки частично упорядоченных групп.** Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1977, с. 11—23.

Исследуются погружения частично упорядоченной группы в частично упорядоченное векторное пространство над полем вещественных чисел.
Библ. — 7 наим.

УДК 519.4

Дихтярь М. Б. **Эпиморфизмы и мономорфизмы категории частичных Р-оперативов.** Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1977, с. 24—27.

Эпиморфизмы категории упорядоченных множеств с частичной P-операцией взятия инфимума подмножества совпадают с отображениями «почти на».

Библ. — 3 наим.

УДК 519.4

Егорова Д. П., Скорняков Л. А. **О структуре конгруэнций унарной алгебры.** Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1977, с. 28—40.

Описываются унарные алгебры, структура конгруэнций которых является структурой с дополнениями, или дедекиндовой структурой с дополнениями, или булевой алгеброй.

Рис. — 3, библ. — 4 наим.

УДК 519.4

Житомирский Г. И. **О точных диаграммах в категориях решеток.** Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1977, с. 40—48.

Вводится понятие точной диаграммы в категориях универсальных алгебр и доказываются две теоремы о точных диаграммах в категориях решеток с нулем и единицей.

Библ. — 2 наим.

УДК 519.4

Захаров В. К. **Ортодополнение модулей, колец и булевых алгебр.** Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1977, с. 48—61.

Строятся ортодополнения произвольных модулей и колец и изучаются их свойства. Рассматриваются применения к булевым алгебрам.

Библ. — 8 назв.

УДК 519.4

Игошин В. И. **О решетках квазимногообразий и квазимногообразиях решеток.** Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1977, с. 62—68.

Устанавливается ряд свойств, которыми обладают решетки квазимногообразий произвольных алгебр, в частности, решеток.

Библ. — 13 назв.

УДК 519.4

Корниенко В. С. **О плоских полигонах над дистрибутивными структурами.** Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1977, с. 69—85.

С помощью тензорного произведения вводится понятие плоского полигона, доказывается критерий плоскостности и рассматриваются его приложения.

Рис. — 3, библ. — 13 назв.

УДК 519.4

Мельник И. И. **Мажорантные сдвиги на решетках многообразий.** Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1977, с. 85—98.

На решетках многообразий полугрупп изучаются мажорантные сдвиги, определяемые различными многообразиями. Общие свойства применяются для построения конкретных решеток многообразий.

Рис. — 3, библ. — 6 назв.

УДК 519.4

Розен В. В. **Аксиоматизация операций инфимума и супремума на базе понятия связи Галуа.** Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1977, с. 98—104.

Аксиоматизируются операции инфимума в супремума упорядоченных множествах с использованием понятия связи Галуа.

Библ. — 5 назв.

УДК 519.4

Салий В. Н. **Несколько замечаний о квазибулевых решетках.** Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1977, с. 104—112.

Исследуются категорные свойства квазибулевых решеток. Строится функтор из этой категории в категорию ассоциаций — группоидов с единицей и обратными элементами, ассоциативных по единице.

Библ. — 4 назв.

УДК 519.4

Сокол Ю. **О 27-й проблеме Биркгофа.** Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1977, с. 113—122.

Исследуются характеристические многочлены элементов конечных частично упорядоченных множеств. В частности, описаны частично упорядоченные множества, определяемые с точностью до изоморфизма характеристическими многочленами единицы.

Библ. — 2 назв.

УДК 519.4

Фофанова Т. С. **О проективности полигонов над дистрибутивными структурами.** Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Из-во Сарат. ун-та, 1977, с. 122—129.

Изучаются вопросы, связанные с проективностью полигонов над дистрибутивными структурами.

Библ. — 8 назв.