УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И РЕШЕТКИ

МЕЖВУЗОВСКИЙ НАУЧНЫЙ СБОРНИК

Выпуск 5

Издательство
Саратовского университета
1978

УДК 519.4
У674

Упорядоченные множества и решетки. Межвузовский научный сборник, вып. 5. Изд-во Сарат. ун-та, 1978, с. 120.

В предлагаемом выпуске печатаются работы, относящиеся как непосредственно к теории решеток, так и к ее приложениям в различных областях алгебры.

Сборник может быть полезен научным работникам, аспирантам и студентам, занимающимся или интересующимся общей алгеброй.

$\frac{2-2-3}{75-78}$

Н. В. АММОСОВА

ГЛОБАЛЬНЫЕ ОПЕРАЦИИ В КВАЗИУПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Пусть на непустом множестве A задано отношение квазипорядка $\zeta\subset A\times A$, то есть бинарное отношение, удовлетворяющее двум аксиомам:

$$1)\ \Delta_A\subset\zeta, \qquad 2)\ \zeta^2\subset\zeta.$$

Получаем квазиупорядоченное множество (A, ζ). Элемент a квазиупорядоченного множества (A, ζ) называется инфимумом пары элементов a_1 и a_2, если

$$\overset{-1}{\zeta}<a>=\overset{-1}{\zeta}<a_1>\cap\overset{-1}{\zeta}<a_2>.$$

Двойственно определяется супремум пары элементов. Если любые два элемента квазиупорядоченного множества имеют по крайней мере один инфимум и по крайней мере один супремум, то имеем псевдорешетку. Псевдорешетки были определены в работе [4], где рассмотрены их свойства и приложения в теории меры.

Как известно [2], глобальной унарной операцией на множестве A называется однозначное бинарное отношение $o\subset \mathbf{P}(A)\times\mathbf{P}(A)$. Назовем множество всех инфимумов произвольного подмножества квазиупорядоченного множества глобальным инфимумом и обозначим Inf.

$$\mathrm{Inf}X=\{a/\overset{-1}{\zeta}<a>=\widehat{\overset{-1}{\zeta}}(X)\} \qquad \cdots (1)$$

Тогда получим глобальную операцию взятия Inf любого подмножества квазиупорядоченного множества. Двойственно определяется понятие глобального супремума Sup.

$$\mathrm{Sup}X=\{a/\zeta<a>=\widehat{\zeta}(X)\} \qquad \cdots (2)$$

В результате имеем глобальный унарный оператив (A, Inf), двойственно (A, Sup), и глобальный биоператив $(A, \mathrm{Inf}, \mathrm{Sup})$. По аналогии с полной решеткой [1] естественно $(A, \mathrm{Inf}, \mathrm{Sup})$ назвать полной псевдорешеткой, а (A, Inf), (A, Sup) — полной минорантной псевдополурешеткой и полной мажорантной псевдополурешеткой соответственно.

В [3] рассматривается понятие ассоциированности частичного бинарного оператива с частично упорядоченным множеством. Введем понятие ассоциированности глобального унарного оператива с квазиупорядоченным множеством. Глобальный унарный оператив $(A, \circ)$ назовем ассоциированным с квазиупорядоченным множеством, если на A можно задать квазипорядок так, чтобы глобальная унарная операция $\circ$ совпадала с операцией глобального инфимума Inf.

В [1] сообщены необходимые и достаточные условия того, чтобы глобальный унарный биоператив был полной решеткой. В данной работе решается задача нахождения абстрактной характеристики глобальных операций Inf и Sup в квазиупорядоченных множествах. Именно находятся необходимые и достаточные условия ассоциированности глобального унарного оператива и глобального унарного биоператива с квазиупорядоченным множеством.

Теорема 1. Для того, чтобы глобальный унарный оператив $(A, \circ)$ был ассоциирован с полной минорантной псевдополурешеткой, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$1^0 (\forall X \subset A)(\forall a \in \circ(X)) \circ(\{a\}) = \circ(X),$$
$$2^0 (\forall X_1, X_2 \subset A) \circ(X_1 \cup X_2) = \circ(\circ(X_1) \cup X_2),$$
$$3^0 (\forall X_1, X_2, X_3 \subset A) \circ(\circ(X_1 \cup X_2) \cup X_3) = \circ(X_1 \cup \circ(X_2 \cup X_3)).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть (A, Inf) — полная минорантная квазиполурешетка. Для операции Inf выполняются свойства 1°—3°. Проверим справедливость 1°:

$$(\forall X \subset A)(\forall a \in \mathrm{Inf} X)\mathrm{Inf}\{a\} = \mathrm{Inf} X.$$

В самом деле, учитывая (1), получаем:

$$\bar{a} \in \mathrm{Inf}\{a\} \overset{(1)}{\longleftrightarrow} (\overset{-1}{\zeta} < \bar{a} > = \overset{-1}{\zeta} < a > = \overset{\frown}{\overset{-1}{\zeta}}(X)) \longleftrightarrow \bar{a} \in \mathrm{Inf}\, X,$$

откуда следует требуемое.

Нетрудно проверить справедливость свойств

$$2^0: (\forall X_1, X_2 \subset A)\, \mathrm{Inf}(X_1 \cup X_2) = \mathrm{Inf}(\mathrm{Inf} X_1 \cup X_2) \text{ и}$$
$$3^0: (\forall X_1, X_2, X_3 \subset A)\, \mathrm{Inf}(\mathrm{Inf}(X_1 \cup X_2) \cup X_3) = \mathrm{Inf}(X_1 \cup \mathrm{Inf}(X_2 \cup X_3)).$$

Необходимость доказана.

Достаточность. В глобальном унарном оперативе $(A, \circ)$, удовлетворяющем свойствам 1° —3°, введем бинарное отношение $\zeta \subset A \times A$ следующим образом:

$$(a_1, a_2) \in \zeta \leftrightarrow \circ(\{a_1, a_2\}) = \circ(\{a_1\}) \ \ldots \qquad (3)$$

Докажем, что ζ есть отношение квазипорядка. Рефлективность

$$\Delta_A \subset \zeta \qquad \ldots (4)$$

очевидна. Далее,

$$(a_1,a_2) \in \zeta \wedge (a_2,a_3) \in \zeta \leftarrow \rightarrow$$
$$\leftarrow \rightarrow o(\{a_1,a_2\}) = o(\{a_1\}) \wedge o(\{a_2,a_3\}) = o(\{a_2\}) \rightarrow$$
$$\rightarrow o(\{a_1,a_3\}) = o(\{a_1\} \cup \{a_3\}) \overset{2^0}{=} o(o(\{a_1\}) \cup \{a_3\}) =$$
$$= o(o(\{a_1,a_2\}) \cup \{a_3\}) = o(o(\{a_1\} \cup \{a_2\}) \cup \{a_3\}) =$$
$$\overset{3^0}{=} o(\{a_1\} \cup o(\{a_2\} \cup \{a_3\})) = o(\{a_1\} \cup o(\{a_2,a_3\})) =$$
$$= o(\{a_1\} \cup o(\{a_2\})) \overset{2^0}{=} o(\{a_1\} \cup \{a_2\}) = o(\{a_1,a_2\}) = (\{a_1\}) \leftarrow \rightarrow$$
$$\leftarrow \rightarrow (a_1,a_3) \in \zeta, \text{ т.е. } \zeta^2 \subset \zeta \qquad \ldots (5)$$

На основании (3) и (4) получаем, что ζ — квазипорядок. Покажем, что $o(X) = \operatorname{Inf} X$ в смысле квазипорядка ζ. Заметим, что из $a \in X$ следует, что

$$o(X) = o(\{a\} \cup X) = o(o(\{a\}) \cup o(X)) \qquad \ldots (6)$$

Для любых $\bar{a} \in o(X)$ и $a \in X$ имеем:

$$o(\{\bar{a}\} \cup \{a\}) \overset{2^0}{=} o(o(\{\bar{a}\}) \cup \{a\}) \overset{1^0,2^0}{=} o(o(X) \cup o(\{a\})) =$$
$$\overset{(6)}{=} o(X) \overset{1^0}{=} o(\{\bar{a}\}), \text{ т. е. } (\bar{a}, a) \in \zeta \text{ для любых } \bar{a} \in o(X) \text{ и } a \in X.$$

Покажем, что если для любого $a \in X$ будет $(\bar{\bar{a}}, a) \in \zeta$, то $(\bar{\bar{a}}, a) \in \zeta$ для любого $\bar{a} \in o(X)$. Действительно,

$$o(\{\bar{\bar{a}}\} \cup \{\bar{a}\}) \overset{2^0}{=} o(\{\bar{\bar{a}}\} \cup o(\{\bar{a}\})) \overset{1^0}{=} o(\{\bar{\bar{a}}\} \cup o(X)) =$$
$$\overset{2^0}{=} o(\{\bar{\bar{a}}\} \cup X) \overset{(6)}{=} o(\{\bar{\bar{a}}\})$$

Достаточность доказана.

Пусть $[A, o_1, o_2)$ — глобальный унарный биоператив, где $o_i \subset \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(A)$, $i = 1, 2$.

Теорема 2. Для того, чтобы глобальный унарный биоператив (A, o_1, o_2) был ассоциирован с полной псевдорешеткой, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$1^0 - 1^0! \ (\forall X \subset A)(\forall a \in o_i(X))\, o_i(\{a\}) = o_i(X), \ i = 1,2;$$
$$2^0 - 2^0! \ (\forall X_1, X_2 \subset A)\, o_i(X_1 \cup X_2) = o_i(o_i(X_1) \cup X_2), \ i = 1,2,$$

$$3^0 - 3^0{}' \ (\forall X_1, X_2, X_3 \subset A)\, o_i(o_i(X_1 \cup X_2) \cup X_3) =$$
$$= o_i(X_1 \cup o_i(X_2 \cup X_3)),\ i = 1,2,$$
$$4^0 - 4^0{}' \ (\forall X_1, X_2 \subset A)\, o_i(X_1 \cup o_j(X_1 \cup X_2)) = o_i(X_1),\ i, j = 1,2.$$

Доказательство. Необходимость. Для $(A, \mathrm{Inf}, \mathrm{Sup})$ справедливость $\varphi^\circ - \varphi^{0\prime}$ проверяется непосредственно. Например, $\mathrm{Inf}(X_1 \cup \mathrm{Sup}(X_1 \cup X_2)) = \mathrm{Inf}\, X_1$ в силу определений (1) и (2).

Достаточность. Ясно, что выполняется равенство:

$$o_i(o_j(X_1) \cup X_2) = o_i(X_1 \cup X_2), \quad i, j = 1, 2. \qquad \ldots (7)$$

Введем на A бинарные отношения $\zeta_i \subset A \times A$, $i = 1, 2$ следующим образом:

$$(a_1, a_2) \in \zeta_i \longleftrightarrow o_i(\{a_1\} \cup \{a_2\}) = o_i(\{a_1\}),\ i = 1,2 \cdots \qquad (8)$$

Тогда

$$(a_2, a_1) \in \zeta_1 \overset{(8)}{\longleftrightarrow} o_1(\{a_2\} \cup \{a_1\}) = o_1(\{a_2\}) \to$$
$$\to o_2(\{a_1\} \cup o_1(\{a_2\} \cup \{a_1\})) = o_2(\{a_1\} \cup o_1(\{a_2\})) \longleftrightarrow$$
$$\overset{(7)}{\longleftrightarrow} o_2(o_1(\{a_1\} \cup \{a_2\}) \cup \{a_1\}) = o_2(\{a_1\} \cup \{a_2\}) \longleftrightarrow$$
$$\overset{4^0{}'}{\longleftrightarrow} o_2(\{a_1\}) = o_2(\{a_1\} \cup \{a_2\}) \overset{(8)}{\longleftrightarrow} (a_1, a_2) \in \zeta_2 \longleftrightarrow$$
$$\longleftrightarrow (a_2, a_1) \in \overset{-1}{\zeta_2},\ \text{т.е.}\ \zeta_1 \in \overset{-1}{\zeta_2}.$$

Аналогично показывается, что $\overset{-1}{\zeta_2} \subset \zeta_1$. Итак, $\overset{-1}{\zeta_1} = \zeta_2$. Согласно теореме 1 глобальная унарная операция o_1 совпадает с операцией Inf относительно квазипорядка ζ_1, а глобальная унарная операция o_2 совпадает с операцией Sup относительно ζ_2. Теорема доказана.

В заключение приведем пример.

Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\zeta = \Delta_A \cup \{(a_1, a_2), (a_3, a_1), (a_3, a_2), (a_2, a_1)\}$. Тогда

$$\mathrm{Inf}\{a_1\} = \mathrm{Inf}\{a_2\} = \mathrm{Inf}\{a_1, a_2\} = \{a_1, a_2\},$$
$$\mathrm{Inf}\{a_1, a_3\} = \mathrm{Inf}\{a_2, a_3\} = \mathrm{Inf}\{a_1, a_2, a_3\} =$$
$$= \mathrm{Inf}\{a_3\} = \{a_3\},$$
$$\mathrm{Sup}\{a_1\} = \mathrm{Sup}\{a_2\} = \mathrm{Sup}\{a_1, a_2\} = \mathrm{Sup}\{a_1, a_3\} =$$
$$= \mathrm{Sup}\{a_2, a_3\} = \mathrm{Sup}\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, a_2\},$$
$$\mathrm{Sup}\{a_3\} = \{a_3\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Теория структур. М., 1952.
2. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений. — В сб.: Теория полугрупп и ее приложения. Изд-во Сарат. ун-та, 1965, 3—178.
3. Розен В. В. Частичные идемпотентные оперативы, ассоциированные с упорядоченными множествами. — «Изв. вузов. Математика», 1966, № 4, 96—103.
4. Hsu J., Bentley H. L. Pseudolattices: theory and applications. — Ark. mat., 1971, 8, N 3, 259—270.

Д. А. БРЕДИХИН

RL-РЕШЕТКИ СООТВЕТСТВИЙ ГРУПП

Работы, посвященные изучению взаимосвязи свойств групп и решетки их подгрупп, занимает в литературе по теории групп значительное место (см. обзоры [1, 2]). Решетка подгрупп несет некоторую, в общем случае далеко не полную, информацию о строении группы. В свое время А. Г. Курошом была выдвинута программа изучения более «информационно емких» решеток, связанных с группами. К таким решеткам, например, можно отнести решетки смежных классов, симметрические решетки подполугрупп группы [3]. В настоящей заметке рассматривается вопрос определимости групп своими RL — решетками соответствий. Отметим, что эта тематика близка к тематике работ Г. И. Житомирского, в которых изучаются связки соответствий групп и полугрупп [9].

Необходимые сведения из теории групп можно найти в [4, 5], а теории бинарных отношений в [6].

Определение. RL-решеткой назовем алгебру $(S, \wedge, \vee, R, L)$, где $(S, \wedge, \vee)$ — решетка, а R и L — эндоморфизмы решетки $(S, \wedge, \vee)$, удовлетворяющие для любого $a \in S$ условиям: $R(L(a)) = L(a)$, $L(R(a)) = R(a)$.

Под соответствием группы G мы понимаем подгруппу ее прямого квадрата $G \times G$. Легко видеть, что множество всех соответствий группы G относительно отношения теоретико-множественного включения и операций $R(\rho) = \Delta_{\mathrm{pr}_1 \rho}$ и $L(\rho) = \Delta_{\mathrm{pr}_2 \rho}$ образует RL — решетку, которую мы назовем RL — решеткой соответствий группы G и обозначим через $K(G)$.

Основным результатом заметки является следующая

Теорема. Пусть $K(G) \cong K(H)$ и $E = A_0 \subset \ldots \subset A_n = G$ — разрешающий (центральный) ряд группы G, тогда существует разрешающий (центральный) ряд $E = B_0 \subset \ldots \subset B_n = H$ группы H такой, что $A_{i+1}/A_i \cong B_{i+1}/B_i$ $(i=0, \ldots, n-1)$. В частности, всякая абелева группа определяется своей RL-решеткой соответствий с точностью до изоморфизма.

Доказательство. Следующая лемма дает строение соответствий на группе.

Лемма 1. Пусть G — группа, A и B — ее подгруппы, M и N — нормальные делители подгрупп A и B соответственно, φ — изоморфизм групп A/M и B/N, тогда отношение

$$\rho = \bigcup_{X \in A/M} X \times \varphi(X)$$

является соответствием группы G, и всякое соответствие группы G имеет такое строение.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что отношение $\rho = \bigcup_{X \in A/M} X \times \varphi(X)$ является подгруппой $G \times G$. Обратно, если ρ — соответствие группы G, то, как легко видеть, ρ есть подпрямое произведение групп $A = \mathrm{pr}_1 \rho$ и $B = \mathrm{pr}\, \rho$, а тогда утверждение леммы непосредственно следует из теоремы 5.5.1 работы [5].

Пусть $K(G) \cong K(H)$ и F — отображение, осуществляющее этот изоморфизм.

Лемма 2. Если ρ — частично-тождественное соответствие группы G, то $F(\rho)$ — частично-тождественное соответствие группы H.

Действительно, если ρ — частично-тождественное отношение, то $R(\rho) = \rho$, откуда $R(F(\rho)) = F(\rho)$, т. е. $F(\rho)$ — частично-тождественное отношение.

Заметив, что всякой подгруппе $A \subset G$ соответствует частично-тождественное соответствие Δ_A, и используя лемму 2, получаем, что отображение F естественным образом индуцирует изоморфизм решеток подгрупп $S(G)$ и $S(H)$ групп G и H, который в дальнейшем будем обозначать через $\widetilde{F}$.

Напомним, что отношение ρ называется квадратным, если $\rho = \mathrm{pr}\, \rho \times \mathrm{pr}\, \rho$.

Лемма 3. Если A — подгруппа группы G, то

$$F(A \times A) = \widetilde{F}(A) \times \widetilde{F}(A).$$

Действительно, $A \times A = \mathrm{V}\{\rho \in K(G) \mid R(\rho) \mathrm{V} L(\rho) \subset \Delta_A\}$, откуда $F(A\times A)=\vee\{\rho\in K(H)\mid R(\rho)\vee L(\rho)\subset\Delta_{\widetilde{F}(A)}\}=\widetilde{F}(A)\times\widetilde{F}(A)$.

Из леммы 3 непосредственно следует.

Лемма 4. Если A — подгруппа группы G, то ограничение F на $K(A)$ осуществляет изоморфизм LR-решеток соответствий групп A и $\widetilde{F}(A)$.

Будем обозначать посредством ε_A конгруэнтность группы G, соответствующую нормальному делителю A.

Лемма 5. Пусть A — нормальный делитель группы G, тогда $\widetilde{F}(A)$ — нормальный делитель группы H и $F(\varepsilon_A)=\varepsilon_{\widetilde{F}(A)}$.

Заметив, что $\Delta_G=\mathrm{V}\{\rho\in K(G)\mid R(\rho)=\rho\}$, получаем $\mathrm{F}(\Delta_G)=$ $=\mathrm{V}\{\rho\in K(H)\mid R(\rho)=\rho\}=\Delta_H$. Пусть ε — конгруэнтность группы G, тогда $\Delta_G\subset\varepsilon$, откуда $\Delta_H\subset F(\varepsilon)$, следовательно, используя лемму 1, получаем, что $\mathrm{F}(\varepsilon)$ — конгруэнтность группы H. Если A — нормальный делитель группы G, то $A\times A$ — наибольшее квадратное отношение, включающееся в ε_A, откуда, используя лемму 3, получаем, что $\widetilde{F}(A)\times\widetilde{F}(A)$ — наибольшее квадратное отношение, включающееся в конгруэнтность $\mathrm{F}(\varepsilon_A)$, т. е. $\widetilde{F}(A)$ — нормальный делитель группы H и $F(\varepsilon_A)=$ $=\varepsilon_{\widetilde{F}(A)}$.

Лемма 6. Если A — нормальный делитель группы G, то $K(G/A)\cong K(H/\widetilde{F}(A))$.

Обозначим через $K_A(G)=\{\rho\in K(G)\mid A\times A\subset\rho\}$. Легко видеть, что множество $K_A(G)$ образует RL-подрешетку (т. е. подрешетку, замкнутую относительно операций R и L) RL-решетки $K(G)$. Далее, используя лемму 1, легко получаем, что отображение $\theta(\rho)=\eta\circ\rho\circ\eta^{-1}$, где $\eta: G\to G/A$ — канонический гомоморфизм, осуществляет изоморфизм RL-решеток $K_A(G)$ и $K(G/A)$. Аналогично показываем, что $K_{\widetilde{F}(A)}(H)\cong K(H/\widetilde{F}(A))$, где $K_{\widetilde{F}(A)}(H)=\{\rho\in K(H)\mid\widetilde{F}(A)\times\widetilde{F}(A)\subset\rho\}$. Учитывая, что $F(K_A(G))=K_{\widetilde{F}(A)}(H)$, получаем, что $K(G/A)\cong K(H/\widetilde{F}(A))$.

Лемма 7. Если группа G — абелева, то группа H — абелева.

Согласно результатам работы [7], подпрямо неразложимыми абелевыми группами являются циклические группы порядка p^n, группы типа p^∞, где p — простое число, и только они. Следовательно, существует семейство нормальных делителей $(A_i)_{i\in I}$ группы G такое, что $\bigcap_{i\in I}A_i=E$ и G/A_i — циклическая группа порядка p^n или группа типа p^∞, т. е. $S(G/A_i)$ — дистрибутивна (см. [4], стр. 276). Положим $B_i=F(A_i)$, тогда $\bigcap_{i\in I}B_i=E$, т. е. H является подпрямым произведением семейства групп $(H/B_i)_{i\in I}$ Согласно лемме 6 $K(G/A_i)\cong K(H/B_i)$, в частности, $S(G/A_i)\cong S(H/B_i)$, т. е. решетка $S(H/B_i)$ дистрибутивна, откуда H/B_i — абелева (см. [4], стр. 276) и, следовательно, H — абелева группа.

Лемма 8. Если G — циклическая группа простого порядка p, то $G\cong H$.

Так как $K(G)\cong K(H)$, то $S(G)\cong S(H)$, следовательно, H — циклическая группа простого порядка q. Легко видеть, что $K(G)=\{G\times G, \{1\}\times G, G\times\{1\}, \{(1, 1)\}\}\mathrm{U}\mathrm{Aut}G$ и $K(H)= =\{H\times H, \{1\}\times H, H\times\{1\}, \{(1, 1)\}\}\mathrm{U}\mathrm{Aut}\, C$, где $\mathrm{Aut}\, G$ и $\mathrm{Aut}\, H$ — множество автоморфизмов групп G и H соответственно. Отсюда следует, что $p=q$, ибо в противном случае $K(G)$ и $K(H)$ содержали бы различное число элементов.

Лемма 9. Если G — циклическая группа порядка p^n, то $G\cong H$.

Так как $S(G)\cong S(H)$, то H — циклическая группа порядка q^n (см. [4]). Так как G содержит циклическую группу порядка p, то согласно лемме 8 H содержит циклическую группу порядка p, т. е. $p=q$.

Лемма 10. Если G — циклическая группа, то $G\cong H$.

Если G — бесконечна, то $G\cong H$, так как $S(G)\cong S(H)$ (см. [4]). Если G — конечна, то $G=\sum\limits_{i\in I} G_i$, где G_i — циклические группы порядка, равного степени простого числа, откуда, используя леммы 5, 9, получаем, что $H=\sum\limits_{i\in I} H_i$ и $H_i\cong G_i$, т. е. $G\cong H$.

Напомним, что изоморфизм решеток подгрупп $\widetilde{F}$ называется сохраняющим индекс, если $(U:V)=(\widetilde{F}(U):\widetilde{F}(V))$ для каждой циклической подгруппы U из G и каждой подгруппы V из U (здесь $(U:V)$ — индекс группы U по подгруппе V). Из лемм 6, 10 непосредственно следует

Лемма 11. Изоморфизм $\widetilde{F}$ решеток подгрупп $S(G)$ и $S(H)$ сохраняет индекс.

Лемма 12. Если G — абелева группа, то $G\cong H$.

Согласно лемме 7 группа H абелева, а согласно лемме 11 существует изоморфизм решеток подгрупп $S(G)$ и $S(H)$, сохраняющий индекс, откуда $G\cong H$ (см. [8], стр. 4).

Лемма 13. Если A — коммутант группы G, то $\widetilde{F}(A)$ — коммутант группы H.

Пусть B — коммутант группы H. Так как A — коммутант G, то G/A — абелева, откуда, используя леммы 6, 7, получаем, что $H/\tilde{F}(A)$ — абелева, то есть $B \subset \tilde{F}(A)$. Аналогично показываем, что $A \subset \tilde{F}^{-1}(B)$, следовательно, $\tilde{F}(A) = B$.

Лемма 14. Если Z — центр группы G, то $\tilde{F}(Z)$ — центр группы H.

Элемент $a \in Z$ тогда и только тогда, когда для любого $b \in G$ подгруппа $\langle a, b \rangle$, порожденная элементами a и b, абелева. Отсюда, используя леммы 4, 7, непосредственно получаем, что $\tilde{F}(Z)$ — центр группы H.

Пусть теперь $E = A_0 \subset \ldots \subset A_n = G$ — разрешающий ряд группы G. Положим $B_i = \tilde{F}(A_i)$ $(i = 0, \ldots, n)$, тогда, используя леммы 4, 6, 12, получаем, что $E = B_0 \subset \ldots \subset B_n = H$ — разрешающий ряд группы H и $A_{i+1}/A_i \cong B_{i+1}/B_i$ $(i = 0, \ldots, n-1)$. Если ряд $E = A_0 \subset \ldots \subset A_n = G$ — центральный, то, как следует из лемм 4, 6, 13, 14, ряд $E = B_0 \subset \ldots \subset B_n = H$ — центральный. Теорема доказана полностью.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Б. М. Шайну за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский Л. Е. Некоторые теоретико-структурные вопросы теории групп. — УМН, 1968, 23, № 3, 123—178.

2. Аршинов М. Н., Садовский Л. Е. Некоторые теоретико-структурные свойства групп и полугрупп. — УМН, 1972, 27, № 6, 139—180.

3. Контарович П. Г., Кутыев К. М. Симметрические структуры. — «Сиб. матем. ж.», 1969, 10, № 3, 537—548.

4. Курош А. Г. Теория групп. М., 1967.

5. Холл М. Теория групп. М., 1962.

6. Вагнер В. В. Теория отношений и алгебра частичных отображений. — В сб.: Теория полугрупп и ее приложения. Изд-во Сарат. ун-та, 1965, 3—178.

7. Schein B. M. Homomorphisms and subdirect decomposition of semigroups. — «Pacif. J. Math.», 1966, 13, N 3, 529—547.

8. Baer R. The significance of the system of subgroups for the structure of the group. — «Amer. J. Math.», 1939, 61, N 1, 1—44.

9. Житомирский Г. И. Стабильные бинарные отношения на универсальных алгебрах. — «Матем. сб.», 1970, 82, № 2, 163—174.

Д. П. ЕГОРОВА

СТРУКТУРА КОНГРУЭНЦИЙ УНАРНОЙ АЛГЕБРЫ

Рассматриваются алгебры с одной унарной операцией f. Структуру конгруэнций унарной алгебры A обозначаем через $\Theta(A)$. В работе найдены необходимые и достаточные условия, при которых $\Theta(A)$ является соответственно цепью, дистрибутивной или дедекиндовой структурой.

Через N систематически обозначается множество неотрицательных целых чисел, причем $f^{0}(x)=x$ по определению. Связной компонентой алгебры A называется подмножество множества A такое, что для любых элементов x, y из этого подмножества существуют $m, n\in N$ такие, что $f^{m}(x)=f^{n}(y)$. Легко проверить, что всякая унарная алгебра представляется как объединение попарно не пересекающихся связных компонент. Запись $x\leqslant y$ означает, что $f^{k}(x)=y$ для некоторого $k\in N$. Нетрудно заметить, что отношение $\leqslant$ является квази-порядком. Некоторые особенности данного отношения описаны в [3].

Алгебра A называется циклом конечной длины $n=|C|$ или конечным циклом C, если она состоит из различных элементов $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, где $f(a_i)=a_{i+1}$, $i=0, 1, \ldots, n-2$ и $f(a_{n-1})=a_0$. Алгебра, у которой отношение $\leqslant$ является линейным порядком (т. е. алгебра является цепью относительно $\leqslant$), называется бесконечным циклом. Если эта цепь имеет наименьший элемент, то алгебра называется односторонним бесконечным циклом. Хвостом цикла C называется неодноэлементное подмножество алгебры A, являющееся цепью относительно $\leqslant$ с наибольшим элементом $a_l\in C$, который будем называть входом хвоста. Длиной хвоста назовем число элементов хвоста, не принадлежащих циклу. Хвост длины единица называется коротким. Положим $a^{\vartriangle}=\{f^{k}(a), k=0, 1, 2, \ldots\}$. Тройка (a, b, c), где $a, b, c\in A$, называется простым узлом, если $f(b)=f(c)=a$, $b\neq c$, $b, c\notin a^{\vartriangle}$ и $f(x)=a$ влечет $x=b$, c или $x\in a^{\vartriangle}$. Простой узел называется коротким, если в алгебре A нет элемента x такого, что $f(x)=b$ или $f(x)=c$. Четверка (a, b, c, d) различных элементов алгебры A называется сложным узлом, если $f(b)=f(c)=f(d)=a$, $b, c, d\notin a^{\vartriangle}$ и $f(x)=a$ влечет $x=b$, c, d или $x\in a^{\vartriangle}$. Элемент a назовем вершиной узла.

§ 1. Описание конгруэнций некоторых унарных алгебр

Конгруэнцией θ унарной алгебры A называется эквивалентность, удовлетворяющая условию:

$$(x, y)\in\theta\to(f(x), f(y))\in\theta.$$

Отметим два следствия этого определения:

Следствие 0.1. $\forall k, n\in N$, $(x, f^{k}(x))\in\theta\to(x, f^{kn}(x))\in\theta$.

Следствие 0.2. $\forall n\in N$, $(x, y)\in\theta\to(f^{n}(x), f^{n}(y))\in\theta$.

Ясно, что разбиение алгебры A на связные компоненты индуцирует конгруэнцию.

Если алгебра A состоит из одного конечного цикла C без хвостов, то $\Theta(A)$ изоморфна структуре делителей числа $|C|$ и дистрибутивна ([2], лемма 2, стр. 34), причем каждая конгруэнция $\theta\in\Theta(A)$ определяется некоторым числом $d|C$. Условимся обозначать такую конгруэнцию θ через (d), а число d назовем разностью конгруэнции θ.

Если алгебра A состоит из одного бесконечного цикла без хвостов, то возьмем в ней элемент x_0 и обозначим ее элементы так, что $f(x_0)=x_1, \ldots, f^n(x_0)=x_n$, $f(x_i)=x_{i+1}$, $f(x_{-1})=x_0$, $f^n(x_{-n})=x_0$, $f(x_{-i})=x_{-i+1}$. Если k — целое число или $\pm\infty$, а d — положительное целое число, то определяем на бесконечном цикле отношение $\equiv$, полагая

$$x_i\equiv x_j \underset{def}{=} \boxed{\text{если } i=j \text{ или } i,j\geqslant k \text{ и } d \text{ делит } i-j.}$$

Легко проверяется, что данное отношение является конгруэнцией, которую будем обозначать через (k, d). Число d назовем разностью конгруэнции, а k ее началом. Для однообразия условимся обозначать нулевую конгруэнцию через $(+\infty, 0)$.

Предложение 1. Всякая конгруэнция бесконечного цикла C имеет вид (k, d). При этом $(n, q)\leqslant(m, p)$ равносильно $m\leqslant n$ и $p|q$. Кроме того, $(n, q)\vee(m, p)=(\min\{m,n\}, HOD(p, q))$ и $(n, q)\wedge(m, p)=(\max\{m, n\}, HOK(p, q))$.

Доказательство. Пусть $\theta\in\Theta(C)$. Если все классы конгруэнции θ одноэлементны, то $\theta=(+\infty, 0)$ по определению. При наличии неодноэлементных смежных классов положим $k=-\infty$, если не существует наименьшего элемента, входящего в неодноэлементный смежный класс. В противном случае x_k — наименьший элемент среди входящих в неодноэлементные смежные классы. Далее обозначим через d наименьшую положительную разность номеров элементов, сравнимых по θ, и предположим, что эта наименьшая разность номеров встретилась между x_i и x_j, то есть $j=i+d$. Нетрудно показать, что $x_i\theta x_{i+sd}$ для любого целого неотрицательного s. Допустим, что $x_m\theta x_l$ и $m<l$. Если $m\geqslant i$, то, в силу определения бесконечного цикла, имеем $x_m=f^{m-i}(x_i)$, а по следствию 0.2

$$x_m=f^{m-i}(x_i)\theta f^{m-i}(x_{j+sd})=x_{j+sd+m-i}=x_{m+(s+1)d}.$$

Таким образом, элемент x_m сравним по θ с элементами, номера которых превышают m на число, кратное d. Предположим, что $l=m+sd+r$, где $0<r<d$. Тогда по только что доказанно-

му $x_m \theta x_{m+sd}$. Но $x_m \theta x_l$, откуда $x_{m+sd} \theta x_{m+sd+r}$. Следовательно, нашлись сравнимые по θ элементы, разность между номерами которых равна $r<d$. Противоречие. Итак, $d/l-m$ и, следовательно, $x_m(k, d)x_l$. Предположим теперь, что $m<i$. Тогда по следствию 0.2

$$x_{l+i-m} = f^{i-m}(x_l)\theta f^{l-m}(x_m) = x_l,$$

откуда $l-m \geqslant d$. Поэтому $l-m=sd+h$, где $0 \leqslant h<d$. Но

$$x_{l+i-m}\theta x_l \theta x_{i+sd} \theta x_{i+l-m-h}$$

и, следовательно, $h=0$. Таким образом, опять $d/l-m$ и $x_m(k, d)x_l$. Тем самым доказано, что $\theta \leqslant (k, d)$. Наоборот, предположим, что $x_m(k, d)x_r$, где $m<r$. Тогда $r=m+sd$. Если $i \leqslant m$, то, учитывая следствие 0.2, получаем

$$x_m = f^{m-i}(x_i)\theta f^{m-i}(x_{i+sd}) = x_{m+sd} = x_r.$$

Если же $m<i$, то $k \leqslant m$. Ввиду следствия 0.2, $x_m \theta x_l$ для некоторого $l \geqslant i$. В силу уже доказанного

$$x_m \theta x_l \theta x_{l+sd} = x_{l+r-m}\theta x_{m+(r-m)} = x_r.$$

Пусть $(n, q) \leqslant (m, p)$. Поскольку $x_n(n, q)x_{n+q}$ влечет $x_n(m, p)x_{n+q}$, имеем $m \leqslant n$, а разность $q=(n+q)-n$ должна делиться на p. С другой стороны, если $i>j$, $m \leqslant n$, $p|q$ и $x_i(n, q)x_j$, то $i>j \geqslant n \geqslant m$ и, поскольку $q|i-j$ и $p|q$, $p|i-j$. Отсюда $x_i(m, p)x_j$, то есть $(n, q) \leqslant (m, p)$. Теперь выведение соотношений для $\vee$ и $\wedge$ не представляет труда.

Пусть A — бесконечный цикл без узлов с отмеченным элементом x_0. Рассмотрим конгруэнцию $\tau \in \Theta(A)$ с единственным неодноэлементным смежным классом x_0^{Δ}, то есть $\tau = (0, 1)$. Ясно, что алгебра B, состоящая из одноэлементного цикла с хвостом бесконечной длины без узлов, является фактор-алгеброй алгебры A по конгруэнции τ. Тогда [1], стр. 76, следствие 3.12 позволяет отождествить множество конгруэнций алгебры B с множеством конгруэнций алгебры A вида (k, d), где $(k, d) \geqslant (0, 1)$. Учитывая предложение 1, получаем:

Предложение 2. Всякая конгруэнция унарной алгебры B, состоящей из одноэлементного цикла с хвостом без узлов, имеет вид $(k, 1)$, где $k \leqslant 0$, или $(+\infty, 0)$.

Рассмотрим алгебру A, состоящую из бесконечного цикла C с одним хвостом H произвольной длины. Перенумеруем элементы алгебры так, что вершиной простого узла является x_0, элементами цикла ..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, ... Элементы хвоста обозначим $y_0, y_{-1}, y_{-2}, \ldots$, где $f(y_{-1})=x_0=y_0$, $f(y_j)=y_{j+1}$ при любом $j<0$. Положим $K=x_0^{\wedge}$, $K_1=C$ и $K_2=K\cup H$. Ясно, что K, K_1 и K_2 являются подалгебрами алгебры A. Пусть $\theta\in\Theta(A)$. Тогда конгруэнция θ индуцирует конгруэнции θ_0, θ_1 и θ_2 соответственно на подалгебрах K, K_1 и K_2. Поскольку, согласно предложению 1, всякая конгруэнция на бесконечном цикле определяется двумя параметрами: началом k и разностью d, то конгруэнции θ_0, θ_1, θ_2 могут обладать различными началами, однако они должны иметь одну и ту же разность, так как θ_0 совпадает с ограничением конгруэнций θ_1 и θ_2 на подалгебре K. Кроме того, конгруэнция θ может иметь двуэлементные классы, содержащие по одному элементу из $K_1\setminus K$ и $K_2\setminus K$. Это замечание позволяет связать с конгруэнцией θ четверку k_1, k_2, d, l, где k_1 — начало конгруэнции θ_1, k_2 — начало конгруэнции θ_2, d — их общая разность, l — число двуэлементных смежных классов конгруэнции θ. Введенные обозначения используются до конца настоящего параграфа без ссылок.

П р е д л о ж е н и е 3. Двуэлементные классы конгруэнции θ имеют вид $\{x_{t_1-i}, y_{t_2-i}\}$, где $0<i\leqslant l$, $t_1=t_2=0$, если $k_1=k_2\geqslant 0$ и $t_1=k_1$, $t_2=k_2$, если $k_1, k_2\leqslant 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть элементы $\{x_{t_1-i}, x_{t_2-j}\}$ образуют двуэлементный класс относительно θ и $i\neq j$. Если $i<j$, то

$$x_{t_1}=f^{i}(x_{t_1-i})\theta f^{i}(y_{t_2-j})=y_{t_2-j+i}.$$

Если $t_1=k_1$, то, поскольку x_{k_1} входит в многоэлементный смежный класс конгруэнции θ, элемент y_{t_2-j+i} также обладает этим свойством, но

$$t_2-j+i\leqslant k_2-j+i<k_2.$$

Противоречие. Если же $t_1<k_1$, то, как и выше, приходим к соотношению $x_0\theta y_{i-j}$, откуда $k_2<0$, что несовместимо с $k_1>0$. Аналогично приходим к противоречию при $j<i$. Следовательно, $i=j$. Предположим, что $i>l$ и элементы x_{t_1-i} и y_{t_2-i} образуют двуэлементный смежный класс. Тогда все элементы $x_{t_1-i}\leqslant x<x_{t_1}$ входят в двуэлементные смежные классы, то есть число двуэлементных смежных классов превосходит l. Противоречие.

П р е д л о ж е н и е 4. Четверка целых чисел (k_1, k_2, d, l), связанная с конгруэнцией θ, удовлетворяет следующим условиям:

а) если $d=0$, то $k_1=k_2=+\infty$;

б) если $k_1>0$ или $k_2>0$, то $k_1=k_2$;

в) если $l>0$ и $d\neq 0$, то $d\mid k_1-k_2$.

Доказательство. Если $d=0$, то индуцированные конгруэнции θ_1, θ_2 имеют вид $(+\infty, 0)$, то есть $k_1=k_2=+\infty$. Если $0<k_2<k_1$, то $d\neq 0$, $x_{k_1}\in K_2$ и $x_{k_1-1}\theta x_{k_1-1+d}$. Значит, $x_{k_1-1}\theta_1 x_{k_1-1+d}$. Противоречие, поскольку

$$0\leqslant k_1-1<k_1\leqslant k_1-1+d.$$

Если $l>0$ и $d\neq 0$, то, ввиду предложения 3, $y_{k_2-1}\theta x_{k_1-1}$, откуда $x_{k_1}\theta y_{k_2}$. При некотором целом $s>0$ имеем k_1+ds, $k_2+ds>0$. Но $x_{k_1+ds}\theta x_{k_1}\theta y_{k_2}\theta x_{k_2+ds}$, поэтому $d\,|\,[(k_1+ds)-(k_2+ds)]$, а значит $d\,|\,k_1-k_2$.

Допустим, что задана четверка целых чисел, удовлетворяющая условиям а) —в). Если $y=f^i(x)$, то положим $\rho(x, y)=i$. Определим на алгебре A отношение θ, полагая

$$x\theta y \underset{def}{=} \left|\begin{array}{l} \text{1) } d/\rho(x,z)-\rho(y,z) \text{ для некоторого } z\geqslant x,y \text{ и} \\ \text{имеет место } x\geqslant x_{k_1},\ y\geqslant y_{k_2}, \text{ или } x\geqslant y_{k_2},\ y\geqslant x_{k_1}, \\ \text{или } x,y\geqslant x_{k_1}; \text{ или } x,y\geqslant y_{k_2}. \\ \text{или 2) } x=x_{k_1-s},\ y=y_{k_2-s}, \text{ или } x=y_{k_2-s},\ y=x_{k_1-s}, \\ \text{где } 0<s\leqslant l,\ k_1,k_2\leqslant 0. \\ \text{или 3) } x=x_{-s},\ y=y_{-s} \text{ или } x=y_{-s},\ y=x_{-s}, \text{ где} \\ 0<s\leqslant l,\ k_1=k_2\geqslant 0. \\ \text{или 4) } x=y. \end{array}\right|$$

Докажем, что θ — конгруэнция. Действительно, рефлексивность и симметричность отношения θ очевидны. Пусть $x\theta y$ и $y\theta u$. Скажем, что имеет место случай (i, j), если x и y связаны условием i, а y и u — условием j $(i, j=1, 2, 3, 4)$. В случаях $(i, 4)$ и $(4, j)$ для любого i, j, очевидно, имеем $x\theta u$. Этот же вывод очевиден в случаях (2,2) и (3,3). В случае (1,1) найдутся z' и z'' такие, что $d\,|\,\rho(x, z')-\rho(y, z')$ и $d\,|\,\rho(y, z'')-\rho(u, z'')$. При $z'\leqslant z''$ имеем

$$[\rho(x, z')-\rho(y, z')]+[\rho(y, z'')-\rho(u, z'')]=\rho(x, z')+$$
$$+[\rho(y, z'')-\rho(y, z')]-\rho(u, z'')=[\rho(x, z')+\rho(z', z'')]-$$
$$-\rho(u, z'')=\rho(x, z'')-\rho(u, z''),$$

а при $z''<z'$ получаем

$$[\rho(x, z')-\rho(y, z')]+[\rho(y, z'')-\rho(u, z'')]=$$
$$=\rho(x, z')-[\rho(y, z')-\rho(y, z'')]-\rho(u, z'')=\rho(x, z')-$$
$$-[\rho(u, z'')+\rho(z'', z)]=\rho(x, z')-\rho(u, z').$$

В первом случае $d|\rho(x, z'')-\rho(u, z'')$, а во втором — $d|\rho(x, z')-\rho(u, z')$, то есть $x\theta u$. В случаях (1, 2) и (1, 3) должно быть или $y < x_{k_1} \leqslant y$, или $y < x_{k_1}$ и $x_{k_2} \leqslant y < x_0$, или $y < x_{k_2} \leqslant y$ $y < x_{k_2}$ и $x_{k_1} \leqslant y < x_0$. Однако ни один из этих случаев невозможен. Аналогично доказывается невозможность случаев (2,1) и (3,1). В случаях (2,3) и (3,2) имеем $k_1=k_2=0$, откуда легко выводится $x=u$. Таким образом, отношение θ является эквивалентностью. Если $x\theta y$ установлено по правилам 1, 3, 4, то очевидно, что $f(x)\theta f(y)$. В случае применения правила 2 приходим к тому же выводу, если $s>1$. При $s=1$ имеем $f(x)=x_{k_1}$, $f(y)=y_{k_2}$. но $x_{k_1}\theta y_{k_2}$ по правилу 1, так как в качестве z можно взять x_0. Итак, θ — конгруэнция, которую будем обозначать через (k_1, k_2, d, l).

Предложение 5. Если (k_1, k_2, d, l) — четверка, связанная с конгруэнцией θ, то $\theta=(k_1, k_2, d, l)$.

Доказательство. Допустим, что $x\theta y$, $x\neq y$ и (k_1, k_2, d, l) четверка чисел, связанная с θ описанным выше способом. Если $x, y\in K_1$ или $x, y\in K_2$, то, взяв в качестве z больший из этих элементов, получим $x(k_1, k_2, d, l)y$ по правилу 1. Если $x\in K_1$, $y\in K_2$ и $x\geqslant x_{k_1}$, $y\geqslant y_{k_2}$, то, в силу определения индуцированных конгруэнций θ_1 и θ_2 и предложения 1, можно найти такое целое число $s>0$, что $x=x_i\theta_1 x_{i+sd}$, $y=y_j\theta_2 x_{j+sd}$ и x_{i+sd}, $x_{j+sd}\in K$. Ясно, что $x_{i+sd}\theta x\theta y\theta x_{j+ds}$ и снова возьмем в качестве z наибольший из x_{i+sd} и x_{j+sd}. Так как $d|\rho(x, z)-\rho(y, z)$, то $x(k_1, k_2, d, l)y$ по правилу 1. Случай, когда $x\in K_2$, $y\in K_1$ и $x\geqslant y_{k_2}$, $y\geqslant x_{k_1}$, рассматривается аналогично. Если $x<x_{k_1}$, $y<y_{k_2}$ или $x<y_{k_2}$, $y<x_{k_1}$, то из предложения 3 следует, что $x(k_1, k_2, d, l)y$ по правилу 2 или 3. Соотношения $x<x_{k_1}$, $y>y_{k_2}$ и $x>x_{k_1}$, $y<y_{k_2}$ невозможны, так как один из этих элементов входит в многоэлементный смежный класс, а другой — в двуэлементный или в одноэлементный смежный класс. Итак, $\theta\leqslant(k_1, k_2, d, l)$. Наоборот, предположим, что $x(k_1, k_2, d, l)y$. Если x, y сравнимы по правилу 1, то существует $z\in K$ такое, что $x\theta_1 z\theta_2 y$, то есть $x\theta y$. Если $x(k_1, k_2, d, l)y$ по правилу 2 или 3, то, в силу предложения 3, $x\theta y$. Таким образом, $(k_1, k_2, d, l)\leqslant\theta$ и, следовательно, $\theta=(k_1, k_2, d, l)$.

Предложение 6. Если $\theta=(k_1, k_2, d, l)$ и $\tilde\theta=(\tilde k_1, \tilde k_2, \tilde d, \tilde l)$, то $\theta\leqslant\tilde\theta$ тогда и только тогда, когда

1. $l=0$, $\widetilde{l}\geqslant 0$, $\widetilde{d}/d$, $\widetilde{k_1}\leqslant k_1$, $\widetilde{k_2}\leqslant k_2$;

или

2. $l\neq 0$, $\widetilde{l}\geqslant 0$, $\widetilde{d}/d$, $k_1=k_2\geqslant 0$, $\widetilde{k_1}=\widetilde{k_2}\geqslant 0$, $\widetilde{k_1}\geqslant k_1$, $l\leqslant\widetilde{l}$;

или

3. $l\neq 0$, $\widetilde{l}\geqslant 0$, $\widetilde{d}/d$, $k_1=k_2\geqslant 0$, $\widetilde{k_1}=\widetilde{k_2}\leqslant 0$, $l\leqslant\widetilde{l}+/\widetilde{k_1}/$;

или

4. $l\neq 0$, $\widetilde{l}\leqslant 0$, $\widetilde{d}/d$, $k_1=k_2\geqslant 0$, $\widetilde{k_1}$, $\widetilde{k_2}\leqslant 0$, $\widetilde{k_1}\neq\widetilde{k_2}$, $\widetilde{l}\leqslant\min(/\widetilde{k_1}/, /\widetilde{\kappa_2}/)$;

или

5. $l\neq 0$, $\widetilde{l}\geqslant 0$, $\widetilde{d}/d$, k_1, $k_2\leqslant 0$, $\widetilde{k_1}$, $\widetilde{k_2}\leqslant 0$, $\widetilde{k_1}\leqslant k_1$, $\widetilde{k_2}\leqslant k_2$ и $k_1-\widetilde{k_1}=k_2-\widetilde{k_2}$, $l\leqslant\widetilde{l}+(k_1-\widetilde{k_1})$;

или

6. $l\neq 0$, $\widetilde{l}\geqslant 0$, $\widetilde{d}/d$, k_1, $k_2\leqslant 0$, $\widetilde{k_1}$, $\widetilde{k_2}\leqslant 0$, $\widetilde{k_1}\leqslant k_1$, $\widetilde{k_2}\leqslant k_2$, $k_1-\widetilde{k_1}\neq k_2-\widetilde{k_2}$ и $l\leqslant\min((k_1-\widetilde{k_1}), (k_2-\widetilde{k_2}))$.

Доказательство. Допустим, что $\theta\leqslant\widetilde{\theta}$. Тогда индуцированные конгруэнции удовлетворяют неравенствам $(k_1, d)\leqslant(\widetilde{k_1}, \widetilde{d})$ и $(k_2, d)\leqslant(\widetilde{k_2}, \widetilde{d})$. Ввиду предложения 1, имеем $\widetilde{k_1}\leqslant k_1$, $\widetilde{k_2}\leqslant k_2$ и $\widetilde{d}/d$. Если $l=0$, то выполняется условие 1. Если же $l\neq 0$, то рассматриваем различные расположения начал конгруэнций. При $k_1=k_2\geqslant 0$ возможно: а) $\widetilde{k_1}=\widetilde{k_2}\geqslant 0$, б) $\widetilde{k_1}=\widetilde{k_2}\leqslant 0$, в) $\widetilde{k_1}$, $\widetilde{k_2}\leqslant 0$ и $\widetilde{k_1}\neq\widetilde{k_2}$. Если имеет место а), то, ввиду предложения 3, $l\leqslant\widetilde{l}$ и выполняется условие 2. Если выполняется б), то, в силу предложения 3, конгруэнция $\widetilde{\theta}$ может иметь двуэлементные смежные классы, как совпадающие с двуэлементными смежными классами конгруэнции $\widetilde{\theta}$, так и входящие в многоэлементные смежные классы конгруэнции $\widetilde{\theta}$, причем число двухэлементных смежных классов второго типа не превосходит $/\widetilde{k_1}/=/\widetilde{k_2}/$. Отсюда следует, что $l\leqslant\widetilde{l}+/\widetilde{k_1}/$, то есть выполняется условие 3. Если же имеет место в), то по предложению 3 двуэлементные смежные классы конгруэнции θ не могут быть таковыми для $\widetilde{\theta}$. Поэтому $l\leqslant\min(/\widetilde{k_1}/, /\widetilde{k_2}/)$, и, следовательно, выполняется условие 4. При k_1, $k_2\leqslant 0$ возможно только, $\widetilde{k_1}$, $\widetilde{k_2}\leqslant 0$ и либо а$'$) $k_1-\widetilde{k_1}=k_2-\widetilde{k_2}$, либо б$'$) $k_1-\widetilde{k_1}\neq k_2-\widetilde{k_2}$. Если выполняется а$'$), то, дословно повторяя рассуждения, проведенные в случае б), получаем

$$l\leqslant\widetilde{l}+(k_1-\widetilde{k_1})=\widetilde{l}+(k_2-\widetilde{k_2}).$$

Таким образом, выполняется условие 5. Если же имеем $k_1-\widetilde{k_1}\neq k_2-\widetilde{k_2}$, то, в силу предложения 3, совпадающих двуэлементных смежных классов у конгруэнций θ и $\tilde{\theta}$ нет, а значит, $l \leqslant \min((k_1-\tilde{k}_1), (k_2-\tilde{k}_2))$, то есть выполнено условие 6. С другой стороны, пусть $x(k_1, k_2, d, l)y$ и выполнено одно из условий 1—6. Любое из этих условий влечет соотношения $\tilde{k}_1 \leqslant k_1$, $\tilde{k}_2 \leqslant k_2$ и $\tilde{d}/d$. В случае, когда $x\theta y$ по правилу 4, справедливость соотношения $x\tilde{\theta}y$ очевидна. Если $x\theta y$ по правилу 1, то $x\tilde{\theta}y$ также по правилу 1. Предположим, что $x\theta y$ по правилу 2. Тогда могут быть выполнены лишь условия 5 или 6. В первом случае имеем $x=x_{k_1-s}$ и $y=y_{k_2-s}$, где $0<s\leqslant l\leqslant l+(k_1-\tilde{k}_1)$. Если $s\leqslant k_1-\tilde{k}_1=k_2-\tilde{k}_2$, то $\tilde{k}_1\leqslant -s+k_1$, $\tilde{k}_2\leqslant -s+k_2$. Кроме того,

$$\rho(x, x_0)-\rho(y, x_0)=0+s-k_1-s+k_2=k_2-k_1,$$

делится на $\tilde{d}$ в силу предложения 4в, поскольку $l>0$. Значит, $x\tilde{\theta}y$ по правилу 1. Если же $s>k_1-\tilde{k}_1=k_2-\tilde{k}_2$, то $s=\tilde{s}+k_1-\tilde{k}_1=\tilde{s}+k_2-\tilde{k}_2$, откуда, ввиду $s\leqslant\tilde{l}+(k_1-\tilde{k}_1)$, получаем $0<\tilde{s}\leqslant\tilde{l}$. Отсюда $x=x_{k_1-s}=x_{\tilde{k}_1-\tilde{s}}$, $y=y_{k_2-s}$ и $x\tilde{\theta}y$ по правилу 2. При выполнении условия 6 имеем $x=x_{k_1-s}$, $y=y_{k_2-s}$, где

$$0<s\leqslant l\leqslant\min((k_1-\tilde{k}_1), (k_2-\tilde{k}_2)).$$

Следовательно, $s\leqslant k_1-\tilde{k}_1$ и $s\leqslant k_2-\tilde{k}_2$, то есть $\tilde{k}_1\leqslant k_1-s$, $\tilde{k}_2\leqslant k_2-s$. Взяв в качестве z элемент x_0, получим

$$\rho(x, x_0)-\rho(y, x_0)=0-(k_1-s)-0+(k_2-s)=k_2-k_1.$$

Но k_2-k_1 делится на $\tilde{d}$, так как при $l>0$, в силу предложения 4в, d/k_2-k_1. Итак, $x\tilde{\theta}y$ по правилу 1. Если, наконец, $x\theta y$ по правилу 3, то должны выполняться условия 2, 3 или 4. В первых двух случаях соотношение $x\tilde{\theta}y$ устанавливается по правилу 2 или 3, используя предложение 3. При выполнении же условия 4 имеем, в силу предложения 3, например, $x=x_{-s}$, $y=y_{-s}$, причем $-s\geqslant\tilde{k}_1$, $\tilde{k}_2$. Отсюда $\rho(x, x_0)-\rho(y, x_0)=0$ и, следовательно, $x\tilde{\theta}y$ по правилу 1.

П р е д л о ж е н и е 7. Пусть $t_1'=t_2'=0$, если $k_1'=k_2'\geqslant 0$ и $t_1'=k^{1'}$, $t^{2'}=k_2'$, если k_1', $k_2'\geqslant 0$. Если $\theta=(k_1, k_2, d, l)$, $\theta'=(k_1', k_2', d', l')$ и $x_r\theta y_s$, где $r<t_1'-l'$, k_1 и $s<t_2-l'$, k_2, то x_r и y_s образуют двуэлементный смежный класс относительно $\theta V\theta''$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 3 и условия $r<t_1'-l'$, $s<t_2'-l'$, получаем, что x_r и y_s образуют одноэлементные смежные класы относительно θ'. Из условия $r<k_1$,

$r<k_2$, $x_r \theta y_s$ и предложения 3 следует, что x_r вместе с y_s составляют двуэлементный смежный класс по θ. Таким образом, элементы x_r и y_s образуют двуэлементный смежный класс относительно $\theta V \theta'$.

§ 2. Структуры конгруэнций унарных алгебр и их свойства.

Лемма 1. Пусть A — унарная алгебра с операцией f. Тогда:

1) Если алгебра A состоит более чем из трех связных компонент, то $\Theta(A)$ не дедекиндова.

2) Если алгебра A состоит более чем из двух связных компонент, то $\Theta(A)$ не дистрибутивна.

3) Если алгебра A содержит две и более неодноэлементные связные компоненты, то $\Theta(A)$ не цепь.

Доказательство. Допустим, что A содержит, по крайней мере, четыре связные компоненты C_1, C_2, C_3, C_4. Определим на A разбиения ρ, σ, τ, γ, θ, полагая $\rho \underset{def}{=} \{C_1\}\{C_2\}\{C_3\}\{C_4\}$,

$\sigma \underset{def}{=} \{C_1C_3\}\{C_2C_4\}$, $\tau \underset{def}{=} \{C_1C_2\}\{C_3\}\{C_4\}$, $\gamma \underset{def}{=} \{C_1C_2\}\{C_3C_4\}$,
$\theta \underset{def}{=} \{C_1C_2C_3C_4\}$. Каждый из остальных элементов алгебры A образует одноэлементный смежный класс. В дальнейшем это будет подразумеваться. Нетрудно проверить, что $\rho, \sigma, \tau, \gamma, \theta \in \Theta(A)$, причем $\tau<\gamma$ и $\tau \vee \sigma = \gamma \vee \sigma = \theta$, $\tau \wedge \sigma = \gamma \wedge \sigma = \rho$. Получена недедекиндова пятиэлементная подструктура $\{\rho, \sigma, \tau, \gamma, \theta\}$, то есть $\Theta(A)$ не дедекиндова. Предположим, что A содержит, по крайней мере, три связные компоненты C_1, C_2, C_3. Определим на A разбиения α, β, γ, ρ, θ, положив $\alpha \underset{def}{=} \{C_1C_2\}$.

$\beta \underset{def}{=} \{C_1C_3\}$, $\gamma \underset{def}{=} \{C_2C_3\}$, $\rho \underset{def}{=} \{C_1\}\{C_2\}\{C_3\}$, $\theta \underset{def}{=} \{C_1C_2C_3\}$.

Очевидно, α, β, γ, ρ, $\theta \in \Theta(A)$, $\alpha \vee \beta = \alpha \vee \gamma = \beta \vee \gamma = \theta$, $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge \gamma = \beta \wedge \gamma = \rho$. Пятиэлементная подструктура $\{\alpha, \beta, \gamma, \rho, \theta\}$ не дистрибутивна, следовательно, $\Theta(A)$ не дистрибутивна. Если алгебра A содержит, по крайней мере, две неодноэлементные связные компоненты C_1, C_2, то определим на A разбиения α, β, полагая $\alpha \underset{def}{=} \{C_1\}$, $\beta \underset{def}{=} \{C_2\}$. Ясно, что $\alpha, \beta \in \Theta(A)$ и конгруэнции α, β не сравнимы, если C_1 и C_2 одновременно являются неодноэлементными связными компонентами, то есть $\Theta(A)$ не цепь.

Лемма 2. Пусть A — унарная алгебра с операцией f. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Структура конгруэнций $\Theta(A)$ не цепь, если A содержит бесконечный цикл.

2) Структура конгруэнций $\Theta(A)$ не дистрибутивна, если A содержит простые узлы.

3) Структура конгруэнций $\Theta(A)$ не дедекиндова, если A содержит сложные узлы.

Доказательство. Пусть $\Theta(A)$ — цепь и алгебра A содержит бесконечный цикл. Определим на A две конгруэнции α и β так, что на бесконечном цикле они имеют общее начало и взаимно простые разности, а остальные классы одноэлементны. Ясно, что $\alpha, \beta \in \Theta(A)$ и α не сравнима с β. Противоречие. Допустим, что в алгебре A есть простой узел (a, b, c). Подалгебра, порожденная элементом a, определяет конгруэнцию $\alpha \in \Theta(A)$, смежным классом которой служит a^{Δ}, а остальные классы одноэлементны. Подалгебры b^{Δ}, c^{Δ} и $b^{\Delta} \cup c^{\Delta}$ аналогичным образом определяют конгруэнции β, γ и θ. При этом $\alpha < \gamma < \theta$ и $\beta < \theta$. Рассмотрим разбиение $\rho \underset{def}{=} \{b,c\}\{a^{\Delta}\}$. Легко проверить, что $\rho \in \Theta(A)$ и $\beta \vee \gamma = \beta \vee \rho = \rho \vee \gamma = \theta$, $\beta \wedge \gamma = \beta \wedge \rho = \rho \wedge \gamma = \alpha$. Таким образом, пятиэлементная подструктура $\{\alpha, \beta, \gamma, \rho, \theta\}$, а значит, и $\Theta(A)$ не дистрибутивна. Предположим, что A обладает сложным узлом (a, b, c, d). Определим на A разбиения $\rho, \tau, \gamma, \sigma$ и θ, положив: $\rho \underset{def}{=} \{a^{\Delta}\}$, $\tau \underset{def}{=} \{d^{\Delta}\}$, $\gamma \underset{def}{=} \{b,c\}\{d^{\Delta}\}$, $\sigma \underset{def}{=} \{c,d\}\{b^{\Delta}\}$, $\theta \underset{def}{=} \{b^{\Delta} \cup c^{\Delta} \cup d^{\Delta}\}$. Нетрудно проверить, что $\rho, \tau, \gamma, \sigma, \theta \in \Theta(A)$, $\tau < \gamma$, $\sigma \vee \tau = \sigma \vee \gamma = \theta$ и $\sigma \wedge \tau = \sigma \wedge \gamma = \rho$. Таким образом, в структуре $\Theta(A)$ существует недедекиндова пятиэлементная подструктура $\{\rho, \tau, \gamma, \sigma, \theta\}$, т. е. $\Theta(A)$ не дедекиндова.

Из леммы 2 вытекают:

Лемма 3. Структура конгруэнции $\Theta(A)$ не дистрибутивна, если алгебра A содержит бесконечный цикл с хвостом или конечный цикл с двумя хвостами, имеющими общий вход.

Лемма 4. Структура конгруэнций $\Theta(A)$ не дедекиндова, если алгебра A содержит бесконечный цикл с двумя хвостами и общим входом или конечный цикл с тремя хвостами и общим входом.

Лемма 5. Структура конгруэнций $\Theta(A)$ унарной алгебры не дедекиндова, если A содержит два цикла конечной длины и длины циклов не взаимно просты, или бесконечный цикл и неодноэлементный конечный цикл, или два бесконечных цикла, или бесконечный цикл и одноэлементный цикл с хвостом.

Доказательство. Допустим, что алгебра A содержит, по крайней мере, два конечных цикла $C_1=\{x_0, x_1, ..., x_{rp-1}\}$ и $C_2=\{y_0, y_1, ..., y_{sp-1}\}$, где $p\neq 1$. Определим на A разбиения ρ, σ, τ, γ, θ, положив: $\rho \underset{def}{=} \{x_0, x_p, \cdots, x_{ip}\}\{x_1, x_{p+1}, \cdots, x_{ip+1}\}\cdots$

$$\cdots\{x_{p-1}, x_{2p-1}, \cdots x_{rp-1}\}\{y_0, y_p, \cdots, y_{jp}\}\{y_1, y_{p+1}, \cdots,$$

$$y_{jp+1}\}\cdots\{y_{p-1}, y_{2p-1}, \cdots, y_{sp-1}\}, \tau \underset{def}{=} \{x_0, x_p, \cdots, x_{ip}\}\cdots$$

$$\cdots\{x_{p-1}, x_{2p-1}, \cdots, x_{rp-1}\}\{C_2\}, \sigma \underset{def}{=} \{x_0, x_p, \cdots x_{ip},$$

$$y_0, y_p, \cdots, y_{jp}\}\{x_1, x_{p+1}, \cdots, x_{ip+1}, y_1, y_{p+1}, \cdots$$

$$\cdots, y_{jp+1}\}\{x_{p-1}, x_{2p-1}, \cdots, x_{rp-1}, y_{p-1}, y_{2p-1}, \cdots$$

$$\cdots, y_{sp-1}\}, \text{ где } 1\leqslant i<r,\ 1\leqslant j<s,$$

$\gamma \underset{def}{=} \{C_1\}\{C_2\}$, $\theta \underset{def}{=} \{C_1C_2\}$. Ясно, что эти разбиения определяют конгруэнции алгебры A, $\tau<\gamma$, $\gamma\vee\sigma=\tau\vee\sigma=\theta$ и $\gamma\wedge\sigma=\tau\wedge\sigma=\rho$, то есть пятиэлементная подструктура $\{\rho, \tau, \gamma, \sigma, \theta\}$ структуры $\Theta(A)$ не дедекиндова. Предположим, что A содержит бесконечный цикл с отмеченным элементом x_0 и неодноэлементный цикл $C_2=\{y_0, y_1, ..., y_{p-1}\}$. Определим на A разбиения ρ, τ, γ, σ, θ, полагая, $\rho \underset{def}{=} \{x_0, x_p, x_{2p}, \cdots\}\{x_1, x_{p+1}, x_{2p+1}, \cdots\}\cdots$

$$\cdots\{x_{p-1}, x_{2p-1}, x_{3p-1}, \cdots\},$$

$$\tau \underset{def}{=} \{x_0, x_p, x_{2p}, \cdots\}\{x_1, x_{p+1}, x_{2p+1}, \cdots\}\cdots$$

$$\cdots\{x_{p-1}, x_{2p-1}, x_{3p-1}, \cdots\}\{C_2\},$$

$$\gamma \underset{def}{=} \{x_0^\Delta\}\{C_2\}, \quad \sigma \underset{def}{=} \{y_0, x_0, x_p,$$

$$x_{2p}, \cdots\}\{y_1, x_1 x_{p+1}, x_{2p+1}, \cdots\}\cdots$$

$$\cdots\{y_{p-1}, x_{p-1}, x_{2p-1}, \cdots\}, \theta \underset{def}{=} \{x_0^\Delta \cup C_2\}.$$

Снова получим недедекиндову пятиэлементную подструктуру $\{\rho, \tau, \gamma, \sigma, \theta\}$ структуры $\Theta(A)$, где $\tau<\gamma$, $\gamma\vee\sigma=$ $=\tau\vee\sigma=\theta, \gamma\wedge\sigma$, $\tau\wedge\sigma=\rho$. Если A содержит два бесконечных цикла, то в качестве p берем произвольное простое число и аналогично доказываем, что $\Theta(A)$ не дедекиндова. Пусть в алгебре A есть бесконечный цикл с отмеченным элементом x_0 и одноэлементный цикл $a=f(a)$ с хвостом, т. е. существует элемент $b\neq a$, $f(b)=a$. Определим на A разбиения ρ, τ, γ, σ, θ, полагая

$$\rho \underset{def}{=} \{x_1^\Delta\}, \quad \tau \underset{def}{=} \{x_0^\Delta\}, \quad \gamma \underset{def}{=} \{a,b\}\{x_0^\Delta\}, \sigma \underset{def}{=} \{x_0, b\}\{a \cup x_1^\Delta\},$$

$\theta \underset{def}{=} \{a \cup b \cup x_0^A\}$. . Очевидно, $\rho, \tau, \gamma, \sigma, \theta \in \Theta(A)$, $\tau < \gamma$, $\tau \nabla \sigma = \gamma \nabla \sigma = \theta$, $\tau \Delta \sigma = \gamma \Delta \sigma = \rho$ и пятиэлементная подструктура $\{\rho, \tau, \gamma, \sigma, \theta\}$ структуры $\Theta(A)$ не дедекиндова.

Теорема 1. Структура конгруэнций $\Theta(A)$ унарной алгебры A является цепью тогда и только тогда, когда A или конечный цикл, длина которого равна некоторой степени простого числа или единице, или объединение такого же цикла с одноэлементным, или одноэлементный цикл с хвостом произвольной длины без узлов.

Доказательство. Предположим, что $\Theta(A)$ — цепь. В силу леммы 1, алгебра A состоит или из одной связной компоненты, или из двух связных компонент, из которых хотя бы одна одноэлементна. Из леммы 2 и [4] (лемма 11) следует, что неодноэлементная связная компонента является или конечным циклом без хвостов, или конечным циклом с одним хвостом без узлов. Более того, в последнем случае цикл должен быть одноэлементным. Действительно, если A содержит неодноэлементный конечный цикл C с некоторым хвостом, то есть существует $b \notin C$, такое, что $f(b) = a_1 \in C$ и $f(a_0) = a_1$, то определим на A разбиения α и β, положив: $\alpha \underset{def}{=} \{b, a_0\}$, $\beta \underset{def}{=} \{C\}$. Очевидно, что $\alpha, \beta \in \Theta(A)$ и при $/C/ > 1$ конгруэнция α не сравнима с β. Убедимся, что $\Theta(A)$ не является цепью, если A — объединение одноэлементного цикла C_1 и одноэлементного цикла C_2 с хвостом. Действительно, пусть $b \notin C_2$ и $f(b) \in C_2$. Тогда конгруэнции, определяемые разбиениями $\{C_1, C_2\}$ и $\{b, C_2\}$, не сравнимы. Пусть теперь A состоит из одного конечного цикла C. Тогда структура конгруэнций $\Theta(A)$ изоморфна структуре делителей числа $/C/$ ([2], стр. 34, лемма 2), следовательно, $\Theta(A)$ — цепь тогда и только тогда, когда $/C/ = p^k$, где p — простое число или 1. Допустим, что алгебра A состоит из одноэлементного цикла $b = f(b)$ и конечного цикла $C = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. Тогда каждая нетривиальная конгруэнция $\alpha \in \Theta(A)$ является нетривиальной конгруэнцией на цикле C, причем элемент b не сравним ни с одним элементом из C. В самом деле, если $b \beta a_i$, то $b \beta a_{i+1}$, значит $\beta = 1_A$. По доказанному выше, $/C/ = p^k$, где p — простое число или 1. Таким образом, структура конгруэнций $\Theta(A)$ является цепью длины $k+1$, в частности, $\Theta(A)$ — двуэлементная цепь, когда $k = 1$, т. е. $/C/$ — простое число или 1. Если A — одноэлементный цикл с хвостом произвольной длины, то, ввиду предложения 2, любые две конгруэнции из $\Theta(A)$ сравнимы, причем та конгруэнция больше, которая в своем единственном неодноэлементном смежном классе содержит элемент, более удаленный от a_0.

Замечание. На одно условие, достаточное для того, чтобы структура конгруэнций унарной алгебры была цепью, указал Йонсон ([7], стр. 206, лемма 4.7.4).

Лемма 6. Пусть A — унарная алгебра с операцией f. Тогда структура конгруэнций $\Theta(A)$ дистрибутивна, если A является циклом конечной длины, или бесконечным циклом, причем бесконечный цикл может быть односторонним, или конечным циклом с одним хвостом произвольной длины без узлов.

Доказательство. Допустим, что A — бесконечный цикл (возможно односторонний) и θ, φ, $\gamma\in\Theta(A)$. В силу предложения 1, $\theta=(m, p)$, $\varphi=(n, q)$, $\gamma=(l, r)$ и $(\theta\vee\varphi)\wedge\gamma=$

$$=(\max(\min(m, n), l), \text{НОК } (r, \text{НОД } (p, q)))=$$
$$=(\min(\max(m, l), \max (n, l)), \text{НОД } (\text{НОК } (r, p),$$
$$\text{НОК } (r, q)))=(\theta\wedge\gamma)\vee(\varphi\wedge\gamma).$$

Для завершения доказательства заметим, что конечный цикл с одним хвостом произвольной длины без узлов является гомоморфным образом бесконечного цикла, возможно, одностороннего в зависимости от длины хвоста. Тогда структура конгруэнций конечного цикла с одним хвостом или без него изоморфна интервалу структуры конгруэнций бесконечного цикла ([1], стр. 76, следствие 3.12) и, следовательно, дистрибутивна.

Лемма 7. Пусть алгебра $A=B\cup C_1$, где C_1 — конечный цикл без хвостов, B — связная компонента, содержащая конечный цикл C_0, причем НОД $(/C_0/, /C_1/)=1$. Если $\theta\in\Theta(A)$, $u\in B$, $v\in C_1$ и $u\theta v$, то $x\theta y$ для всех $x\geqslant u$ и любого $y\in C_1$.

Доказательство. Обозначим элементы цикла C_0 через $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$, а элементы C_1 через $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$. Допустим, что $u\theta v$ для некоторых $u\in B$, $v=b_j\in C_1$. Если $u\in C_0$, скажем $u=a_i$, то конгруэнция θ склеивает оба цикла в один смежный класс. Действительно, поскольку $(s, n)=1$, то существуют целые числа t, m такие, что $ts+mn=1$. Для удобства введем в рассмотрение символ a_k, где k — произвольное целое число, обозначающий элемент $a_r\in C_0$ и $k=sq+r$, $0\leqslant r<s$. Ясно, что $f(a_k)=a_{k+1}$. Аналогичный смысл имеет символ b_k. Из определения конгруэнции θ получаем

$$b_{j+1}\theta a_{i+1}=a_{i+ts+mn}=a_{i+mn}\theta b_{j+mn}=b_j\theta a_i,$$

откуда легко вывести, что $a_i\theta b_j$ при любых i и j. Если $u\in C_0$, то, ввиду связности компоненты B, для подходящих k и i имеем $f^k(u)=a_i$. Поэтому $a_i\theta b_{j+k}$. В силу доказанного выше множество $C_0 \cup C_1$ принадлежит одному смежному классу конгруэнции θ. Легко заметить, что все элементы x, где $x \geqslant u$, также принадлежат этому смежному классу.

Лемма 8. Если унарная алгебра A состоит из двух конечных циклов, длины которых взаимно просты, причем самое большее один из них имеет один хвост без узлов, то структура конгруэнций $\Theta(A)$ дистрибутивна.

Доказательство. Пусть $A = B \cup C_2$, B — конечный цикл с одним хвостом, C_2 — конечный цикл и $\theta \in \Theta(A)$. Заметим, что B является гомоморфным образом бесконечного цикла. Ввиду предложения 1 и [1] (стр. 76, следствие 3.12) каждая конгруэнция на B имеет при надлежащем отождествлении вид (k, p), а каждая конгруэнция на C_2 определяется своей разностью q и может быть обозначена через (q). Если конгруэнция θ не имеет смежных классов, содержащих элементы из разных связных компонент, то θ принадлежит прямому произведению структур $\Theta(B)$ и $\Theta(C_2)$ и может быть обозначена через (k, p, q), где (k, p) и (q) проекции конгруэнции θ на $\Theta(B)$ и $\Theta(C_2)$, соответственно. Если же какой-нибудь смежный класс конгруэнции θ содержит элементы из разных компонент, то, в силу леммы 7, этому смежному классу принадлежат все элементы циклов и некоторые элементы хвоста. Условимся обозначать такую конгруэнцию через $[m]$, где m — номер наименьшего элемента хвоста, принадлежащего единственному многоэлементному смежному классу. Разумеется, возможно, что $m = -\infty$ или 0. Нетрудно заметить, что все конгруэнции второго типа образуют цепь Ξ в структуре конгруэнций $\Theta(A)$. Для произвольных $\alpha, \beta, \gamma \in \Theta(A)$ возможны 8 различных случаев: 1) $\alpha = [k]$, $\beta = [m]$, $\gamma = [l]$; 2) $\alpha = (k, p, q)$, $\beta = (m, r, s)$, $\gamma = (l, t, d)$; 3) $\alpha = [k]$, $\beta = [m]$, $\gamma = (l, t, d)$; 4) $\alpha = [k]$, $\beta = (m, r, s)$, $\gamma = [l]$; 5) $\alpha = (k, p, q)$, $\beta = [m]$, $\gamma = (l, t, d)$; 6) $\alpha = (k, p, q)$, $\beta = (m, r, s)$, $\gamma = [l]$; 7) $\alpha = (k, p, q)$, $\beta = [m]$, $\gamma = [l]$; 8) $\alpha = [k]$, $\beta = (m, r, s)$, $\gamma = (l, t, d)$. В первом случае $\alpha, \beta, \gamma \in \Xi$, где Ξ — цепь, а во втором — принадлежат прямому произведению дистрибутивных структур $\Theta(B)$ и $\Theta(C_2)$. Поэтому в обоих случаях справедливо равенство $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma = (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$. Учитывая предложение 1, составим таблицу 1. Для всех случаев легко усмотреть равенство двух последних строк, т. е. $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma = (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$. Ввиду равноправия конгруэнций α и β, случаи 7 и 8 аналогичны случаям 4 и 5 соответственно.

Лемма 9. Если A содержит конечный цикл $C = \{x_0, x_1, \ldots \ldots, x_{n-1}\}$, где $n > 1$ с хвостом $x_0, y_{-1}, y_{-2}, \ldots$, имеющим простой,

Таблица 1

Случаи / Конгруэнции	3	4	5	6
α	$[k]$	$[k]$	(k, p, q)	(k, p, q)
β	$[m]$	(m, r, s)	$[m]$	(m, r, s)
γ	(l,t,d)	$[l]$	(l, t, d)	$[l]$
$\alpha\vee\beta$	$[\min (k,m)]$	$[\min (k, m)]$	$[\min (k, m)]$	$(\min (k, m)$, НОД(p, r), НОД $(q, s))$
$\alpha\wedge\gamma$	$(\max(k,l),t,d)$	$[\max (k, l)]$	$(\max (k, l)$, НОК (p, t), НОК $(q, d))$	$(\max (k, l), p, q)$
$\beta\wedge\gamma$	$(\max(m,l),t,d)$	$(\max (m, l), r, s)$	$(\max (m, l), t, d)$	$(\max (m, l), r, s)$
$(\alpha\vee\beta)\wedge\gamma$	$(\max(l,\min(k,m)),t;d)$	$[\max (l, \min (k, m))]$	$(\max (l, \min (k, m)), t, d)$	$(\max (l, \min (k, m))$, НОД (p, r), НОД $(q, s))$
$(\alpha\wedge\gamma)\vee(\beta\wedge\gamma)$	$(\min(\max(k,l), (\max(m,l)),t,d)$	$[\min (\max (k, l), \max (m, l))]$	$(\min (\max (k, l), \max (m, l))$, НОД(НОК$(p, t), t)$, НОД(НОК$(q, d),d))$	$(\min (\max (k, l), \max (m, l))$, НОД$(p, r)$, НОД (q, s)

но не короткий узел, то структура конгруэнций $\Theta(A)$ не дедекиндова.

Доказательство. Допустим, что алгебра A имеет простой, но не короткий узел $(y_{-i},\ y_{-i-1},\ b)$, где $0 \leqslant i$ и существует $c \in A$ такое, что $f(c) = y_{-i-1}$ или b. Если $f(c) = y_{-i-1}$, то определим на A разбиения ρ, τ, σ, полагая

$$\rho \underset{def}{=} \{y_{-i-1}^{\Delta}\},\ \tau \underset{def}{=} \{y_{-i-1}^{\Delta}\}\{b,c\},\quad \sigma \underset{def}{=} \{c,\ f^{n}(c),\ f^{2n}(c),\ \cdots\}$$

$\{b, f(c),\ f^{n+1}(c)\ \cdots\} \cdots \{f^{n-1}(c),\ f^{2n-1}(c),\ \cdots\}$. Ясно, что ρ, τ, $\sigma \in \Theta(A)$ и $\rho < \tau$. Кроме того, $\rho \wedge \sigma = \{f(c), f^{n+1}(c), f^{2n+1}(c), \cdots\} \cdots \{f^{n-1}(c), f^{2n-1}(c), \cdots\}\{f^{n(c)}, f^{2n}(c), \cdots\} = \tau \wedge \sigma$ и $\rho \vee \sigma = \{c^{\Delta} \cup b^{\Delta}\} = \tau \vee \sigma$.

Таким образом, структура конгруэнций $\Theta(A)$ содержит недедекиндову пятиэлементную подструктуру $\{\rho \wedge \sigma,\ \rho,\ \tau,\ \sigma,\ \rho \vee \sigma\}$, т. е. $\Theta(A)$ не дедекиндова. Аналогично доказывается невозможность $f(c) = b$.

Из леммы 9 следует:

Лемма 10. Структура конгруэнций унарной алгебры A не дедекиндова, если A содержит неодноэлементный конечный цикл C, имеющий два хвоста с общим входом и хотя бы один из этих хвостов не короткий.

Лемма 11. Если A — односторонний бесконечный цикл с началом x_0 и хвостом, имеющим вход x_i, и $\Theta(A)$ — дедекиндова, то хвост короткий и $i = 1$.

Доказательство. Допустим, что $\Theta(A)$ дедекиндова и хвост не короткий или $i > 1$. Заметим, что алгебра B, состоящая из двухэлементного цикла с хвостом конечной длины, имеющим простой, но не короткий узел, является гомоморфным образом алгебры A. Ввиду [1], стр. 76, следствие 3.12, $\Theta(B)$, будучи изоморфна подструктуре структуры $\Theta(A)$, должна быть дедекиндовой, что противоречит лемме 9.

Лемма 12. Если A содержит бесконечный цикл с хвостом любой длины, то $\Theta(A)$ не дедекиндова.

Доказательство. Допустим, что $\Theta(A)$ дедекиндова. Тогда алгебра B, состоящая из двухэлементного цикла с хвостом бесконечной длины, имеющим простой, но не короткий узел, является гомоморфным образом алгебры A. Ввиду [1], стр. 76, следствие 3.12, $\Theta(B)$, будучи изоморфна подструктуре структуры $\Theta(A)$, должна быть дедекиндовой, что противоречит лемме 9.

Лемма 13. Если унарная алгебра A является односторонним бесконечным циклом с коротким простым узлом, то $\Theta(A)$ дедекиндова структура.

Доказательство. Ввиду предложения 5 и [1], стр. 76, следствие 3.12, конгруэнции из $\Theta(A)$ представляются как четверки (k_1, k_2, d, l), причем $l=0$ или 1, а $k_1, k_2 \geqslant -1$. Пусть $\theta=(k_1, k_2, d, l)$, $\tilde{\theta}=(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{d}, \tilde{l}) \in \Theta(A)$. Если $\theta<\tilde{\theta}$, то должно иметь место одно из соотношений 1—6 предложения 6. Соотношения 1 и 2 можно подразделить на следующие случаи:

1а. $l=\tilde{l}=0$, $\tilde{d}/d$, $\tilde{k}_1 \leqslant k_1$, $\tilde{k}_2 \leqslant k_2$, $\tilde{d} \neq d$;

1б. $l=\tilde{l}=0$, $d=\tilde{d}$, $\tilde{k}_1<k_1$, $\tilde{k}_2 \leqslant k_2$;

1в. $l=\tilde{l}=0$, $d=\tilde{d}$, $\tilde{k}_1=k_1$, $\tilde{k}_2<k_2$;

1г. $l=0$, $\tilde{l}=1$, $0 \leqslant \tilde{k}_1=\tilde{k}_2 \leqslant k_1=k_2$, $\tilde{d}/d$;

2а. $l=\tilde{l}=1$, $0 \leqslant \tilde{k}_1=\tilde{k}_2 \leqslant k_1=k_2$, $\tilde{d} \neq d$, $\tilde{d}/d$;

2б. $l=\tilde{l}=1$, $0 \leqslant \tilde{k}_1=\tilde{k}_2<k_1=k_2$, $\tilde{d}=d$.

Соотношение 3 может быть записано в форме

3. $l=1$, $\tilde{l}=0$, $\tilde{d}/d$, $-1=\tilde{k}_1=\tilde{k}_2$, $k_1=k_2 \geqslant 0$.

Действительно, если $\tilde{l}=1$, то $\tilde{k}_1=\tilde{k}_2 \geqslant 0$ и выполняются условия соотношения 2. Если же $\tilde{l}=\tilde{k}_1=\tilde{k}_2=0$, то возникает невозможное соотношение $1=l \leqslant \tilde{l}+|\tilde{k}_1|=0$. Далее заметим, что соотношение 4 влечет $l=1$, $\tilde{l} \geqslant 0$ и $1=l \leqslant \min(|\tilde{k}_1|, |\tilde{k}_2|) \leqslant 0$, что, разумеется, невозможно. Из соотношения 5 вытекает, что $l=1$, $\tilde{l} \geqslant 0$, $k_1=k_2=0$ и $l \leqslant \tilde{l}+(k_1-\tilde{k}_1)=\tilde{l}+|\tilde{k}_1|$, то есть выполняются условия соотношения 3. В случае выполнения соотношения 6 получаем $l=1$, $k_1=k_2=0$, $\tilde{k}_1 \neq \tilde{k}_2$, $\max(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2)=0$, что приводит к невозможному соотношению

$$1=l \leqslant \min((k_1-\tilde{k}_1), (k_2-\tilde{k}_2))=0.$$

Для доказательства леммы достаточно установить, что из справедливости соотношений $\theta<\tilde{\theta}$ и $\theta \wedge \theta'=\tilde{\theta} \wedge \theta'$, где $\theta'=(k_1', k_2', d', l') \in \Theta(A)$, следует

$$\theta \vee \theta'<\tilde{\theta} \vee \theta' \quad (*).$$

В дальнейших рассуждениях многократно используется предложение 1. В случаях 1а и 2а имеем $\text{НОК}(d, d')=\text{НОК}(\tilde{d}, d')$, $\tilde{d}/d$, $\tilde{d} \neq d$. Следовательно, $\text{НОД}(\tilde{d}, d')<\text{НОД}(d, d')$, откуда и вытекает (*). В случае 1б получаем $\max(k_1, k_1')=\max(\tilde{k}_1, k_1')$, откуда легко выводится $k_1' \geqslant k_1>\tilde{k}_1$ и неравенство (*) справедливо, поскольку элемент $x_{\tilde{k}_1}$ входит в многоэлементные смежные классы конгруэнций $\tilde{\theta}$ и $\tilde{\theta} \vee \theta'$, но образует, самое большее, двухэлементный смежный класс относительно конгруэнции $\theta\vee\theta'$. В самом деле, если бы $x_{\tilde{k}_1}$ входил в многоэлементный смежный класс, то $\tilde{k}_1=-1$, $k_1\geqslant 0$ и $x_{-1}\theta' y_{-1}\theta x_i$, $i\geqslant 0$, откуда $\tilde{k}_2\leqslant k_2=-1$. Таким образом, $k_1>\tilde{k}_1=\tilde{k}_2=k_2=-1$, а в силу предложения 4б, $k_1=0$. Поскольку $l=0$, элементы x_{-1} и y_{-1} образуют одноэлементные смежные классы относительно конгруэнции $\theta\wedge\theta'$, в то время как $x_{-1}\theta' y_{-1}$ и $x_{-1}\tilde{\theta} x_{\tilde{d}-1}\tilde{\theta}_{y-1}$, что противоречит равенству пересечений. Случай 1в аналогичен случаю 1б. В случае 1г из равенства пересечений имеем $l'=0$ и $k_1'=k_2'\geqslant k_1=k_2\geqslant\tilde{k}_1=\tilde{k}_2\geqslant 0$. Следовательно, x_{-1} и y_{-1} образуют одноэлементные смежные классы относительно конгруэнции $\theta\vee\theta'$ и входят в двухэлементный смежный класс по $\tilde{\theta}\vee\theta'$ и неравенство (*) доказано. В случае 2б приходим к тому же выводу, заметив, что элементы x_i, где $\tilde{k}_1\leqslant i<k_1$, образующие одноэлементные смежные классы относительно $\theta\vee\theta'$, входят в многоэлементные смежные классы конгруэнции $\tilde{\theta}\vee\theta'$. В третьем случае равенство пересечений влечет $l'=0$ и $0\leqslant k_1=k_2\leqslant k_1'=k_2'$. Поэтому $\{x_{-1}, y_{-1}\}$ образуют двухэлементный смежный класс относительно конгруэнции $\theta\vee\theta'$, но входят в многоэлементный класс конгруэнции $\tilde{\theta}\vee\theta'$.

Из леммы 13 и [1] (стр. 76, следствие 3.12) получаем:

Лемма 14. Структура конгруэнций унарной алгебры A, состоящей из конечного цикла с хвостом, имеющим короткий простой узел, или из такого же цикла с двумя короткими хвостами, имеющими общий вход, дедекиндова.

Лемма 15. Если унарная алгебра A состоит из одноэлементного цикла с хвостом произвольной длины, имеющим один простой узел, то $\Theta(A)$ дедекиндова структура.

Доказательство. В силу предложения 5 и, [1], стр. 76, следствие 3.12, ненулевые конгруэнции из $\Theta(A)$ представляются четверками (k_1, k_2, d, l), причем по предложению 2 $d=1$. Пусть $\theta=(k_1, k_2, d, l)$, $\tilde{\theta}=(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{d}, \tilde{l})$, $\theta'=(k_1', k_2', d' l')$ и выполняются соотношения $\theta\leqslant\tilde{\theta}$, $\theta\wedge\theta'=\tilde{\theta}\wedge\theta'$ и $\theta\vee\theta'=$ $=\tilde{\theta}\vee\theta'$. В силу предложения 1, имеем $\max(k_1, k_1')=$ $=\max(\tilde{k}_1, k_1')$, $\max(k_2, k_2')=\max(\tilde{k}_2, k_2')$ и $\min(k_1, k_1')=$ $=\min(\tilde{k}_1, k_1')$, $\min(k_2, k_2')=\min(\tilde{k}_2, k_2')$. Следовательно, $k_1=\tilde{k}_1$ и $k_2=\tilde{k}_2$ по [6] (стр. 121, теорема 1). Предположим теперь, что $l<\tilde{l}$. Полагаем

$$l_0=\begin{cases} l, \text{ если } k_1\leqslant 0\\ l+k_1, \text{ если } k_1=k_2>0.\end{cases}$$

$$\tilde{l}_0 = \begin{cases} \tilde{l}, \text{ если } \hat{\tilde{k}}_1 \leqslant 0 \\ \hat{l} + \tilde{k}_1, \text{ если } \hat{k}_1 = \tilde{k}_2 > 0. \end{cases}$$

$$l' = \begin{cases} l', \text{ если } k_1' \leqslant 0, \\ l' + k_1', \text{ если } k_1' = k_2' > 0. \end{cases}$$

Если $k_1' < k_1 - l_0$ и $k_2' < k_2 - l_0$, то

$$x_{k_1-(l_0+1)} \not\equiv y_{k_2-(l_0+1)} (\theta \wedge \theta'),$$

$$\text{но } x_{k_1-(l_0+1)} (\tilde{\theta} \wedge \theta') \, y_{k_2-(l_0+1)}.$$

Если же $k_1' < k_1 - l_0$, а $k_2' \geqslant k_2 - l_0$, то

$$x_0 \theta' x_{k_1-(l_0+1)} \tilde{\theta} y_{k_2-(l_0+1)}.$$

Но $y_{k_2-(l_0+1)}$ образует одноэлементный смежный класс по θ, а по θ' может быть сравним только с x_r, где $r < k_1'$, то есть

$$y_{k_2-(l_0+1)} \not\equiv x_0 (\theta \vee \theta').$$

Аналогично доказывается невозможность $k_1' \geqslant k_1 - l_0$ и $k_2' < k_2 - l_0$. Таким образом, $k_1' \geqslant k_1 - l_0$ и $k_2' \geqslant k_2 - l_0$. Отсюда и в силу неравенства $l_0 < \tilde{l}_0$, элемент $x_{k_1 - \tilde{l}_0}$ или образует одноэлементный смежный класс относительно θ' и, следовательно, относительно $\theta \vee \theta'$, или сравним по θ' только с элементом y_s. Если $s = k_2 - \tilde{l}_0$, то

$$x_{k_1 - \tilde{l}_0} (\tilde{\theta} \wedge \theta') \, y_{k_2 - \tilde{l}_0},$$

$$\text{но } x_{k_1 - \tilde{l}_0} \not\equiv y_{k_2 - \tilde{l}_0} (\theta \wedge \theta').$$

Так что $s \neq k_2 - \tilde{l}_0$, то есть $x_{k_1 - \tilde{l}_0} \not\equiv y_{k_2 - \tilde{l}_0} (\theta \vee \theta')$. Но $x_{k_1 - \tilde{l}_0} (\tilde{\theta} \vee \theta') y_{k_2 - \tilde{l}_0}$. Противоречие. Следовательно, $l = \tilde{l}$, т. е. $\theta = \tilde{\theta}$, что, ввиду [6] (стр. 97, теорема 1) и доказывает лемму.

Лемма 16. Если унарная алгебра $A = S \cup \{a_1\} \cup \{a_2\}$, где $\{a_i\}$ — одноэлементные циклы, S — связная компонента, θ, $\tilde{\theta} \in \Theta(A)$, причем $\theta_S = \tilde{\theta}_S$, где θ_S — ограничение конгруэнции θ на S, и для $x, y \in S$, $x \theta a_i$, $y \tilde{\theta} a_i$, то $x \theta_S y$.

Доказательство. В силу связности компоненты S, существуют $m, n \in N$ такие, что $f^m(x) = f^n(y) = z \in S$, значит, $x \theta a_i \theta z$ и $y \theta a_i \tilde{\theta} z$, то есть $x \theta_S z$ и $y \tilde{\theta}_S z$, и следовательно, $x \theta_S y$.

Лемма 17. Если унарная алгебра $A = S \cup \{a\} \cup \{b\}$ или $A = S \cup \{a\}$, где $\{a\}$, $\{b\}$ — одноэлементные циклы, S — связная компонента, то $(\theta \vee \theta')_S = \theta_S \vee \theta_S'$ и $(\theta \wedge \theta') = \theta_S \wedge \theta_S'$ где θ_S —

ограничение конгруэнции θ на связной компоненте S, $\theta,\theta' \in \Theta(A)$.

Доказательство. Ввиду очевидности неравенства $\theta s \vee \theta s' \leqslant (\theta \vee \theta')s$, достаточно доказать справедливость соотношения $(\theta \vee \theta')s \leqslant \theta s \vee \theta s'$. Пусть $x(\theta \vee \theta')sy$. Тогда $x, y \in S$ и существует цепочка $x = t_1, t_2, \ldots, t_n = y$ такая, что каждая пара рядом стоящих элементов сравнима по θ или по θ'. Можно считать, что выбранная цепочка является самой короткой из возможных. Если $t_i \in S$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$, то $x(\theta s \vee \theta s')y$. Если $t_i \notin S$ только для одного номера i, то, в силу связности компоненты S, существуют $m, n \in N$ такие, что $f^m(t_{i-1}) = f^n(t_{i+1})$. Отсюда,

$$t_{i-1}\theta t_i = f^m(t_i)\theta f^m(t_{i-1}) = $$
$$= f^n(t_{i+1})\theta' f^n(t_i) = t_i\theta' t_{i+1}$$
$$\text{или } t_{i-1}\theta' t_i = f^m(t_i)\theta' f^m(t_{i-1}) =$$
$$= f^n(t_{i+1})\theta f^n(t_i) = t_i\theta t_{i+1}.$$

В обоих случаях рассмотрение цепочки $t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, f^m(t_{i-1}) = f^n(t_{i+1}), t_{i+1}, \cdots, t_{n-1}, t_n$ показывает, что $x(\theta s \vee \theta s')y$. Если же $t_i, t_j \in S$ для двух различных номеров, то $t_k \in S$ для всех $k \neq i, j$, поскольку в противном случае можно перейти к более короткой цепочке. Если $i < j-1$, то поскольку $t_{i-1}, t_{i+1}, t_{j-1}, t_{j+1} \in S$ можно, как и выше, перейти к цепочке элементов из S. Предположим, что $t_i, t_{i+1} \notin S$. В этом случае, из-за выбора самой короткой цепочки, возможно $t_i = a$, $t_{i+1} = b$ или $t_i = b$, $t_{i+1} = a$. Ввиду равноправия a и b достаточно рассмотреть один из этих случаев. Допустим, что

$$t_{i-1}\theta a\theta' b\theta t_{i+2} \text{ или } t_{i-1}\theta' a\theta b\theta' t_{i+2} \text{ и } t_{i-1}, t_{i+2} \in S,$$

то есть существуют $m, n \in N$ такие, что $f^m(t_{i-1}) = f^n(t_{i+2})$. Тогда

$$t_{i-1}\theta a = f^m(a)\theta f^m(t_{i-1}) = f^n(t_{i+2})\theta f^n(b) = b$$

или

$$t_{i-1}\theta' a = f^m(a)\theta' f^m(t_{i-1}) = f^n(t_{i+2})\theta' f^n(b) = b$$

и, следовательно, в обоих случаях цепочка допускает сокращение, причем в первом случае $t_{i-1}\theta t_{i+2}$, а во втором — $t_{i-1}\theta' t_{i+2}$. Таким образом, неравенство $(\theta \vee \theta')s \leqslant \theta s \vee \theta s'$ справедливо для произвольных элементов $x, y \in S$. Пусть $x(\theta \wedge \theta')y$. Тогда $x, y \in S$ и $x\theta y$, $x\theta' y$, то есть $x\theta sy$ и $x\theta s'y$, значит $x(\theta s \wedge \theta s')y$.

Обратное включение очевидно, поэтому $(\theta\wedge\theta')_S=\theta_S\wedge\theta_S'$.

Лемма 18. Если $A=S\cup\{a\}$, где S — связная компонента, $\{a\}$ — одноэлементный цикл и $\Theta(S)$ дистрибутивная структура, то $\Theta(A)$ дистрибутивна.

Доказательство. Предположим, что $\theta, \tilde{\theta}, \theta'\in\Theta(A)$ и $\theta\wedge\theta'=\tilde{\theta}\wedge\theta'$, $\theta\vee\theta'=\tilde{\theta}\vee\theta'$. В силу леммы 17 и дистрибутивности структуры $\Theta(S)$ получаем $\theta_S=\tilde{\theta}_S$. Если a образует одноэлементный смежный класс относительно конгруэнции θ и $\tilde{\theta}$, то $\theta=\tilde{\theta}$. Допустим, что $a\theta x$ для некоторого $x\in S$, но a образует одноэлементный смежный класс по θ. Тогда если a образует одноэлементный смежный класс относительно θ', то $\theta\vee\theta'\neq\tilde{\theta}\vee\theta'$. Если же $a\theta' y$ для некоторого $y\in S$, то ввиду связности компоненты S существуют $m, n\in N$ такие, что $z=f^m(x)=f^n(y)$. Следовательно, $a(\theta\wedge\theta')z$, хотя $a\not\equiv z(\tilde{\theta}\wedge\theta')$. Итак, $a\tilde{\theta}y$ для некоторого $y\in S$. В силу леммы 16 имеем $x\tilde{\theta}_S y$, то есть $a\tilde{\theta}x$. Аналогично доказывается, что $a\tilde{\theta}x$, где $x\in S$ влечет $a\theta x$. Следовательно, $\theta=\tilde{\theta}$ и в силу [6], стр. 121, теорема 1, $\Theta(A)$ — дистрибутивная структура.

Лемма 19. Пусть $A=S\cup\{a\}\cup\{b\}$, где S — связная компонента, $\{a\}$, $\{b\}$ — одноэлементные циклы и θ, $\theta'\in\Theta(A)$. Тогда:

1) Если $a\theta x$ и $a\theta' y$ для некоторых $x, y\in S$, то $a(\theta\wedge\theta')z$ для некоторого $z\in S$.

2) Если $a\theta x$ и $b\theta' y$ для некоторых $x, y\in S$, то $a(\theta\vee\theta')b$.

Доказательство. В силу связности S, существуют $m, n\in N$ такие, что $f^m(x)=f^n(y)=z$. Следовательно, $a\theta z$ и $a\theta' z$, то есть $a(\theta\wedge\theta')z$. Далее имеем $a\theta z\theta' b$, значит, $a(\theta\vee\theta')b$.

Лемма 20. Если $A=S\cup\{a\}\cup\{b\}$, где S—связная компонента, $\{a\}$ и $\{b\}$ — одноэлементные циклы и $\Theta(S)$ — дедекиндова структура, то структура конгруэнций $\Theta(A)$ дедекиндова.

Доказательство. Пусть $\theta, \tilde{\theta}, \theta'\in\Theta(A)$ и $\theta\leqslant\tilde{\theta}$, $\theta\wedge\theta'=\tilde{\theta}\wedge\theta'$, $\theta\vee\theta'=\tilde{\theta}\vee\theta'$. Каждая конгруэнция $\theta\in\Theta(A)$ относится к одному из следующих типов: 1) a и b образуют одноэлементные смежные классы по θ; 2) $a\not\equiv b(\theta)$, но $a\theta x$ для некоторого $x\in S$; 3) $a\not\equiv b(\theta)$, но $b\theta y$ для некоторого $y\in S$; 4) $a\theta b$, но $a\not\equiv s(\theta)$ для всех $s\in S$; 5) $a\theta x$ и $b\theta y$ для некоторых $x, y\in S$. Ясно, что в данном случае $a\theta b$, поскольку существуют $m, n\in N$ такие, что $f^m(x)=f^n(y)=z$ и $a\theta z\theta b$. Скажем, что имеет место случай (i, j), если конгруэнция θ типа i, а конгруэнция $\tilde{\theta}$ типа j, где i, $j=1, 2, 3, 4, 5$. Условие, $\theta\leqslant\tilde{\theta}$ влечет невозможность случаев (2,1), (2,4), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3) и (5,4). Для случаев (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,5), (3,5) и (4,5) составим таблицу 2, из которой видно, что к какому бы типу ни относилась θ', имеем $\theta\vee\theta'\neq\tilde{\theta}\vee\theta'$ или $\theta\wedge\theta'\neq\tilde{\theta}\wedge\theta'$. При составлении таблицы 2 неоднократно используется лемма 19.

Таким образом, конгруэнции θ и $\tilde{\theta}$ должны быть одного и того же типа. Из дедекиндовости структуры $\Theta(S)$ и леммы 17 получаем $\theta_S=\tilde{\theta}_S$. В случае (1,1) отсюда сразу вытекает, что $\theta=\tilde{\theta}$. В случае (2,2) допустим, что $a\tilde{\theta}x$. Поскольку θ имеет тип 2, то имеем $a\theta y$ для некоторого $y\in S$. Используя лемму 16, получаем $x\theta_S y$ и, следовательно, $a\theta x$, то есть $\tilde{\theta}\leqslant\theta$. Итак, $\theta=\tilde{\theta}$. Случай (3,3) рассматривается аналогично случаю (2,2). В случае (4,4) элементы a и b образуют двуэлементный смежный класс по θ и по $\tilde{\theta}$, значит, $\theta=\tilde{\theta}$. Наконец, в случае (5,5) допустим что $a\tilde{\theta}x$ для некоторого $x\in A$. Если $x=b$, то $a\theta b$, так как конгруэнция θ имеет тип 5. Если же $x\in S$, то, ввиду леммы 16, имеем $a\theta x$. Таким образом, $\tilde{\theta}\leqslant\theta$, то есть $\theta=\tilde{\theta}$. Для завершения доказательства леммы достаточно принять во внимание [6], стр. 121, теорему 1.

Лемма 21. Если унарная алгебра $A=B\cup C$, где B и C — подалгебры алгебры A и $B\cap C=\varnothing$, то $\Theta(B)$ изоморфна подструктуре структуры $\Theta(A)$.

Доказательство. Если $\rho\in\Theta(B)$, то положим $\bar{\rho}=\rho\cup 1_C$. Очевидно, $\bar{\rho}$ — эквивалентность на A. Если $x\bar{\rho}y$ и $x, y\in B$, то есть $x\rho y$, то $f(x), f(y)\in B$ и $f(x)\rho f(y)$, следовательно, $f(x)\bar{\rho}f(y)$. Если же $x, y\in C$, то $f(x), f(y)\in C$, значит, $f(x)\bar{\rho}f(y)$. Итак, $\bar{\rho}\in\Theta(A)$. Допустим, что $\rho_1\neq\rho_2$, то есть существуют элементы $x, y\in B$ такие, что $x\rho_1 y$, но $x\not\equiv y(\rho_2)$ или $x\rho_2 y$, но $x\not\equiv y(\rho_1)$. Пусть $\bar{\rho}_1=\bar{\rho}_2$. Тогда из $x\rho_1 y$ следует $x\bar{\rho}_2 y$, где $x, y\in B$, то есть $x\rho_2 y$. Противоречие. Аналогично доказывается невозможность $x\rho_2 y$ и $x\not\equiv y(\rho_1)$. Предположим, что $x(\bar{\rho}_1\wedge\bar{\rho}_2)y$. Тогда $x\bar{\rho}_1 y$ и $x\bar{\rho}_2 y$, т. е. либо $x, y\in C$, либо $x, y\in B$ и $x\rho_1 y$, $x\rho_2 y$. Таким образом, $x(\overline{\rho_1\wedge\rho_2})y$. Обратно, пусть $x(\overline{\rho_1\wedge\rho_2})y$. Если $x, y\in C$, то имеем $x\bar{\rho}_1 y$ и $x\bar{\rho}_2 y$. Если же $x, y\in B$, то $x(\rho_1\wedge\rho_2)y$ или $x\rho_1 y$ и $x\rho_2 y$, поэтому $x\bar{\rho}_1 y$ и $x\bar{\rho}_2 y$. Итак, $\overline{\rho_1\wedge\rho_2}=\bar{\rho}_1\wedge\bar{\rho}_2$. Допустим, что $x(\overline{\rho_1\vee\rho_2})y$. Тогда существует цепочка элементов $t_1, \ldots, t_n\in A$ такая, что $x=t_1\rho_1 t_2\rho_2 t_3\ldots t_{n-1}\rho_1 t_n=$ $=y$. Ясно, что при $x\in C$ имеем $x=t_1, t_2, \ldots, t_n=y\in C$, то есть $x(\bar{\rho}_1\vee\bar{\rho}_2)y$. Если же $x\in B$, то $t_2, \ldots, t_n=y\in B$ и $x=t_1\rho_1 t_2\rho_2 t_3\ldots$

Таблица 2

θ	$\tilde{\theta}$ \ θ'	1	2	3	4	5
1	2	$\forall x \in S$ $a \not\equiv x(\theta \vee \theta')$ $\exists x \in S$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')x$	$\forall x \in S$ $a \not\equiv x(\theta \wedge \theta')$ $\exists x \in S$ $a(\tilde{\theta} \wedge \theta')x$	$a \not\equiv b(\theta \vee \theta')$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')b$	$\forall x \in S$ $b \not\equiv x(\theta \vee \theta')$ $\exists x \in S$ $b(\tilde{\theta} \vee \theta')x$	$\forall x \in S$ $a \not\equiv x(\theta \wedge \theta')$ $\exists x \in S$ $a(\tilde{\theta} \wedge \theta')x$
1	3	$\forall x \in S$ $b \not\equiv x(\theta \vee \theta')$ $\exists x \in S$ $b(\tilde{\theta} \vee \theta')x$	$a \not\equiv b(\theta \vee \theta')$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')b$	$\forall x \in S$ $b \not\equiv x(\theta \wedge \theta')$ $\exists x \in S$ $b(\tilde{\theta} \wedge \theta')x$	$\forall x \in S$ $a \not\equiv x(\theta \vee \theta')$ $\exists x \in S$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')x$	$\forall x \in S$ $b \not\equiv x(\theta \wedge \theta')$ $\exists x \in S$ $b(\tilde{\theta} \wedge \theta')x$
1	4	$a \not\equiv b(\theta \vee \theta')$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')b$	$a \not\equiv b(\theta \vee \theta')$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')b$	$a \not\equiv b(\theta \vee \theta')$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')b$	$a \not\equiv b(\theta \wedge \theta')x$ $a(\tilde{\theta} \wedge \theta')b$	$a \not\equiv b(\theta \wedge \theta')$ $a(\theta \wedge \theta')b$
1	5	$a \not\equiv b(\theta \vee \theta')$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')b$	$a \not\equiv b(\theta \vee \theta')$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')b$	$a \not\equiv b(\theta \vee \theta')$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')b$	$a \not\equiv (\theta \wedge \theta')$ $a \not\equiv (\tilde{\theta} \wedge \theta')b$	$a \not\equiv b(\theta \wedge \theta')$ $a(\theta \wedge \tilde{\theta})b$
2	5	$a \not\equiv b(\theta \vee \theta')$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')b$	$a \not\equiv b(\theta \vee \theta')$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')b$	$\forall x \in S$ $b \not\equiv x(\theta \wedge \theta')$ $\exists x \in S$ $b(\tilde{\theta} \wedge \theta')x$	$a \not\equiv b(\theta \wedge \theta')$ $a(\tilde{\theta} \wedge \theta')b$	$a \not\equiv b(\theta \wedge \theta')$ $a(\tilde{\theta} \wedge \theta')b$
3	5	$a \not\equiv b(\theta \vee \theta')$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')b$	$\forall x \in S$ $a \not\equiv x(\theta \wedge \theta')$ $\exists x \in S$ $a(\tilde{\theta} \wedge \theta')x$	$a \not\equiv b(\theta \vee \theta')$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')b$	$a \not\equiv b(\theta \wedge \theta')$ $a(\tilde{\theta} \wedge \theta')b$	$a \not\equiv b(\theta \wedge \theta')$ $a(\tilde{\theta} \wedge \theta')b$
4	5	$\forall x \in S$ $a \not\equiv x(\theta \vee \theta')$ $\exists x \in S$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')x$	$\forall x \in S$ $a \not\equiv x(\theta \wedge \theta')$ $\exists x \in S$ $a(\tilde{\theta} \wedge \theta')x$	$\forall x \in S$ $b \not\equiv x(\theta \wedge \theta')$ $\exists x \in S$ $b(\tilde{\theta} \wedge \theta')x$	$\forall x \in S$ $a \not\equiv x(\theta \vee \theta')$ $\exists x \in S$ $a(\tilde{\theta} \vee \theta')x$	$\forall x \in S$ $a \not\equiv x(\theta \wedge \theta')$ $\exists x \in S$ $a(\theta \wedge \theta')x$

...$t_{n-1}\rho_2 t_n = y$, то есть $x(\rho_1 \vee \rho_2)y$, значит, $x(\overline{\rho_1 \vee \rho_2})y$. Пусть $x(\overline{\rho_1 \vee \rho_2})y$. Если $x, y \in C$, то $x(\overline{\rho_1} \vee \overline{\rho_2})y$. Если $x, y \in B$, то $x(\rho_1 \vee \rho_2)y$ и существует цепочка $x = t_1, t_2, \ldots, t_n = y$ элементов из B такая, что $x = t_1 \rho_1 t_2 \rho_2 t_3 \ldots t_{n-1} \rho_2 t_n = y$, следовательно, $x = t_1 \overline{\rho_1} t_2 \ldots t_{n-1} \overline{\rho_2} t_n = y$, то есть $x(\overline{\rho_1} \vee \overline{\rho_2})y$. Таким образом, $\overline{\rho_1 \vee \rho_2} = \overline{\rho_1} \vee \overline{\rho_2}$, чем и завершается доказательство леммы.

Из лемм 20 и 21 выводится:

Лемма 22. Если $A = S \cup \{a\}$, где S — связная компонента, $\{a\}$ — одноэлементный цикл и $\Theta(S)$ — дедекиндова структура, то $\Theta(A)$ — дедекиндова структура.

Из лемм 13, 14, 15, 20 и 22 следует:

Лемма 23. Структура конгруэнций $\Theta(A)$ дедекиндова, если:

1. A является объединением бесконечного цикла без хвостов с не более чем двумя одноэлементными циклами.

2. A — объединение одностороннего бесконечного цикла, возможно, с коротким узлом с не более чем двумя одноэлементными циклами.

3. A — объединение конечного цикла, возможно, с хвостом, имеющим короткий простой узел, с одним или двумя одноэлементными циклами.

4. A — объединение конечного цикла, возможно, с двумя короткими хвостами, имеющими общий вход, с одним или двумя одноэлементными циклами.

5. A — объединение не более трех одноэлементных циклов, один из которых может иметь хвост с простым узлом.

Пусть унарная алгебра $A = C_0 \cup C_1 \cup C_2$, где C_1, C_2 — конечные циклы без хвостов, C_0 или одноэлементный цикл w, возможно, с хвостом, имеющим простой узел, или конечный цикл C, возможно, с хвостом, имеющим один короткий узел, или конечный цикл C с двумя короткими хвостами, имеющими общий вход, причем $(|C_0|, |C_1|) = (|C_0|, |C_2|) = (|C_1|, |C_2|) = 1$. Применяя лемму 7, несложно доказать, что всякая конгруэнция $\theta \in \Theta(A)$ относится к одному из следующих типов:

1) Каждый из смежных классов целиком лежит в одной из связных компонент.

2) Каждый из смежных классов целиком лежит в $C_0 \cup C_1$ или в C_2 и существует смежный класс, содержащий все элементы из C_1 и некоторый элемент из C_0.

3) Каждый из смежных классов целиком лежит в $C_0 \cup C_2$ или в C_1 и существует смежный класс, содержащий все элементы из C_2 и некоторый элемент из C_0.

4) Существует смежный класс, содержащий все элементы из $C_1 \cup C_2$ и некоторый элемент из C_0.

5) Существует смежный класс, совпадающий с объединением $C_1 \cup C_2$, и никакая пара $\{x, y\}$, где $x \in C_0$, $y \in C_1$ или $x \in C_0$, $y \in C_2$ не попадет в один смежный класс.

Пусть A, C_0, C_1, C_2 имеют тот же смысл, что и выше.

Лемма 24. Для каждой связной компоненты C_i, $i=0, 1, 2$ справедливы соотношения:

$$(\theta \vee \theta')_{C_i} = \theta_{C_i} \vee \theta'_{C_i}, \quad (\theta \wedge \theta')_{C_i} = \theta_{C_i} \wedge \theta'_{C_i}.$$

Доказательство. Допустим, что $u(\theta \vee \theta')_{C_i} v$. Тогда $u, v \in C_i$ и существует цепочка $u = t_1 \theta t_2 \theta' t_3 \ldots t_{n-1} \theta' t_n = v$. Если все $t_j \in C_i$ при $1 \leqslant j \leqslant n$, то $u(\theta_{C_i} \vee \theta'_{C_i})v$. Предположим, что t_l — первый, а t_k — последний элементы в цепочке, не принадлежащие данной компоненте C_i. Если $t_{l-1} \theta t_l$ и $t_k \theta t_{k+1}$, то, в силу леммы 7 и определения связной компоненты, для подходящих m и n получаем

$$t_{l-1} \theta_{C_i} f^m(t_{l-1}) = f^n(t_{k+1}) \theta_{C_i} t_{k+1},$$

то есть $u(\theta_{C_i} \vee \theta'_{C_i})v$. Если же $t_{l-1} \theta t_l$, а $t_k \theta' t_{k+1}$, то, снова применяя лемму 7 и учитывая связность C_i, получим

$$t_{l-1} \theta_{C_i} f^m(t_{l-1}) = f^n(t_{k+1}) \theta'_{C_i} t_{k+1}.$$

Случаи, когда $t_{l-1} \theta' t_l$ и $t_k \theta' t_{k+1}$ или $t_{l-1} \theta' t_l$ и $t_k \theta t_{k+1}$, рассматриваются аналогично. Итак, $(\theta \vee \theta')_{C_i} \leqslant \theta_{C_i} \vee \theta'_{C_i}$. Обратное неравенство очевидно, поэтому $(\theta \vee \theta')_{C_i} = \theta_{C_i} \vee \theta'_{C_i}$. Пусть $u(\theta \wedge \theta')_{C_i} v$. Тогда $u, v \in C_i$ и $u \theta v$, $u \theta' v$, следовательно, $u(\theta_{C_i} \wedge \theta'_{C_i})v$. Ввиду очевидности обратного включения, получаем $(\theta \wedge \theta')_{C_i} = \theta_{C_i} \wedge \theta'_{C_i}$.

Лемма 25. Пусть $A = C_0 \cup C_1 \cup C_2$. Тогда:

1) Если $x \theta t$, $y \theta' z$ для некоторых $x, y \in C_1$ или $x, y \in C_2$, $t, z \in C_0$, то $x(\theta \wedge \theta')y$.

2) Если $x \theta t$ и $y \theta' z$ для некоторых $x \in C$, $y \in C_2$, $t, z \in C_0$, то $x(\theta \vee \theta')y$.

Доказательство. В первом случае, ввиду леммы 7, из $x \theta t$ и $y \theta' z$ следует, что $y \theta x$ и $y \theta' x$, поэтому $x(\theta \wedge \theta')y$. Во втором случае, ввиду связности компоненты C_0, найдутся m, $n \in N$ такие, что $f^m(t) = f^n(z) = v$. Используя лемму 7, получим $x\theta v\theta' y$, т. е. $x(\theta \vee \theta')y$.

Лемма 26. Если $A = C_0 \cup C_1 \cup C_2$, то $\Theta(A)$ дедекиндова структура.

Доказательство. Пусть $\tilde{\theta}$, $\theta' \in \Theta(A)$ и $\theta \leqslant \tilde{\theta}$, $\theta \vee \theta' = \tilde{\theta} \vee \theta'$, $\theta \wedge \theta' = \tilde{\theta} \wedge \theta'$. В силу лемм 6, 14, 15 и 24, имеем $\tilde{\theta}_{C_i} = \theta_{C_i}$, $i = 0, 1, 2$. Скажем, что имеет место случай (k, l), если конгруэнция θ типа k, а $\tilde{\theta}$ типа l, где k, $l = 1, 2, 3, 4, 5$. Условие $\theta \leqslant \tilde{\theta}$ исключает случаи (2,1), (2,3), (2,5), (3,1), (3,2), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3). Для случаев (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,4), (3,4) и (5,4), используя лемму 25, составим таблицу 3, в которой θ' имеет тип 1, 2, 3, 4, 5:

Таким образом, имеет место один из случаев $(l, l) = 1, \ldots, 5$. В случае (1,1) $\theta = \tilde{\theta}$ сразу следует из $\theta_{C_i} = \tilde{\theta}_{C_i}$, $i = 1, 2, 3$. В случае (5,5) $\theta_{C_0} = \tilde{\theta}_{C_0}$, а компоненты C_1 и C_2 входят в один смежный класс конгруэнций θ и $\tilde{\theta}$. Если имеет место случай (2,2) и $x\tilde{\theta}y$, то при x, $y \in C_i$, в силу $\theta_{C_i} = \tilde{\theta}_{C_i}$, имеем $x\theta y$. Пусть $x \in C_0$, $y \in C_1$ и $x\tilde{\theta}y$. Так как конгруэнция θ имеет тип 2, то существует $z \in C_0$ такое, что $y\theta z$. Ввиду леммы 7, все элементы из z^{Δ} сравнимы с y по θ, а все элементы из x^{Δ} сравнимы с y по $\tilde{\theta}$. В силу связности компоненты C_0, существует $t \in z^{\Delta} \cap x^{\Delta}$, причем $t\theta_{C_0}z$ и $t\tilde{\theta}_{C_0}x$. Поскольку $\theta_{C_0} = \tilde{\theta}_{C_0}$, имеем $x\theta_{C_0}z$ и, следовательно, $x\theta y$. Аналогично рассматривается случай, когда $x \in C_1$, $y \in C_0$. Итак, $\tilde{\theta} \leqslant \theta$, а значит, $\theta = \tilde{\theta}$. Дословным повторением этих рассуждений доказывается равенство $\theta = \tilde{\theta}$ в случае (3,3). Наконец, в случае (4,4) элементы связных компонент C_1 и C_2 входят в один смежный класс конгруэнций θ и $\tilde{\theta}$, поэтому достаточно рассмотреть произвольную пару элементов x, y, сравнимых по $\tilde{\theta}$ и $x \in C_0$, $y \in C_1$ или $x \in C_0$, $y \in C_2$. Снова, как и в случае (2,2), получаем $x\theta y$, то есть $\tilde{\theta} \leqslant \theta$, откуда $\theta = \tilde{\theta}$ и структура конгруэнций $\Theta(A)$ дедекиндова.

Из леммы 26 и 21 вытекает:

Лемма 27. Если $A = C_0 \cup C_1$, то $\Theta(A)$ — дедекиндова структура.

Теорема 2. Структура конгруэнций $\Theta(A)$ унарной алгебры A дистрибутивна тогда и только тогда, когда A или цикл конечной длины, возможно, с хвостом произвольной длины без

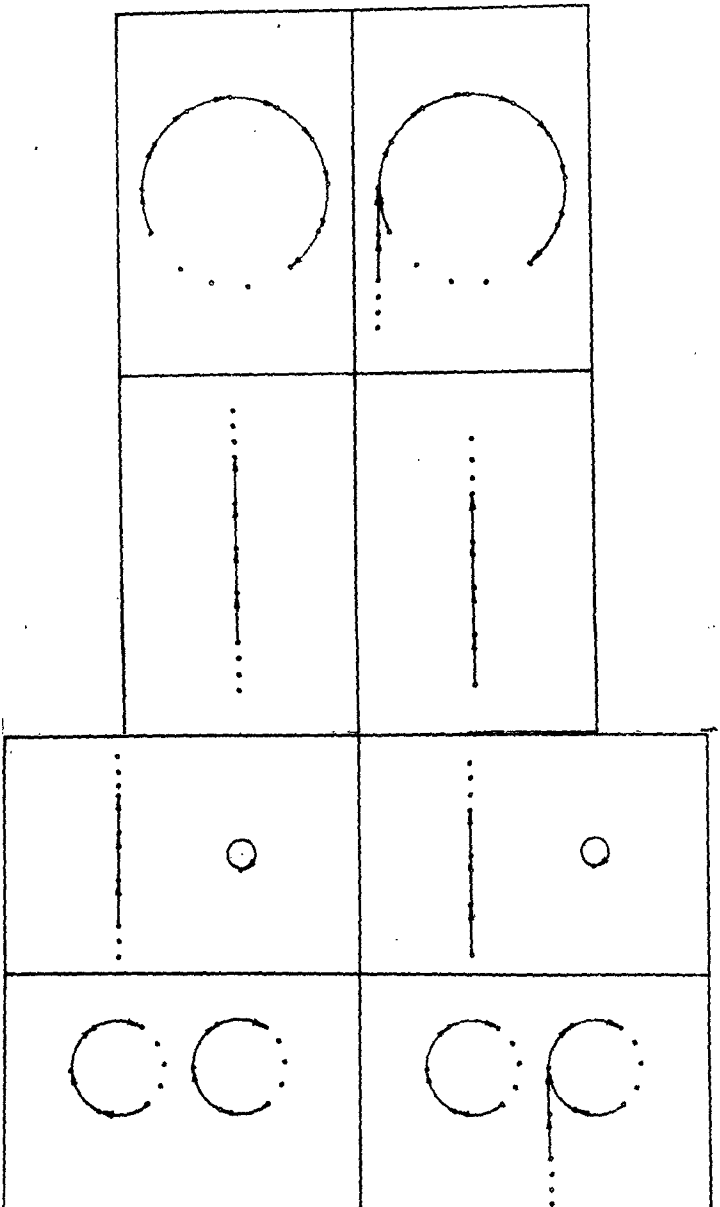


Рис. 1

узлов, или бесконечный цикл без хвостов, возможно, односторонний, или объединение бесконечного цикла без хвостов, возможно, одностороннего с одноэлементным циклом, или объединение двух конечных циклов с взаимно простыми длинами, причем только один из циклов может иметь один хвост без узлов. (см. рис. 1).

Доказательство. Необходимость высказанных условий теоремы следует из лемм 1, 2, 3, 5 и, [4, лемма 11], а достаточность — из лемм 6, 8 и 18.

Теорема 3. Структура конгруэнций $\Theta(A)$ унарной алгебры A дедекиндова тогда и только тогда, когда алгебра A удовлетворяет одному из следующих условий (см. рис. 2):

1. A — конечный цикл C, $/C/\geqslant 1$, возможно, с одним хвостом, который может иметь один короткий узел.

2. A — конечный цикл C с двумя короткими хвостами, имеющими общий вход.

3. A — бесконечный цикл без хвостов.

4. A — односторонний бесконечный цикл, возможно, с одним коротким узлом;

5. A — одноэлементный цикл с хвостом, имеющим один простой узел.

6. A — объединение не более чем трех конечных циклов с попарно взаимно простыми длинами, причем только один из циклов может иметь один хвост, возможно, с одним коротким узлом.

7. A — объединение не более чем трех конечных циклов, с попарно взаимно простыми длинами, причем только один из циклов может иметь два коротких хвоста с общим входом.

8. A — объединение не более чем трех конечных циклов с попарно взаимно простыми длинами и, если один из циклов одноэлементен, то он может иметь только один хвост, возможно, с одним простым узлом.

9. A — объединение одного или двух одноэлементных циклов со связной компонентой, удовлетворяющей одному из условий 1, 2, 3, 4 или 5.

Доказательство. Необходимость высказанных условий теоремы следует из лемм 1, 2, 4, 5, 9, 10, 11, 12 и, [4] (лемма 11), а достаточность — из лемм 6, 13, 14, 15, 23, 26 и 27.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Л. А. Скорнякову за внимание к моей работе.

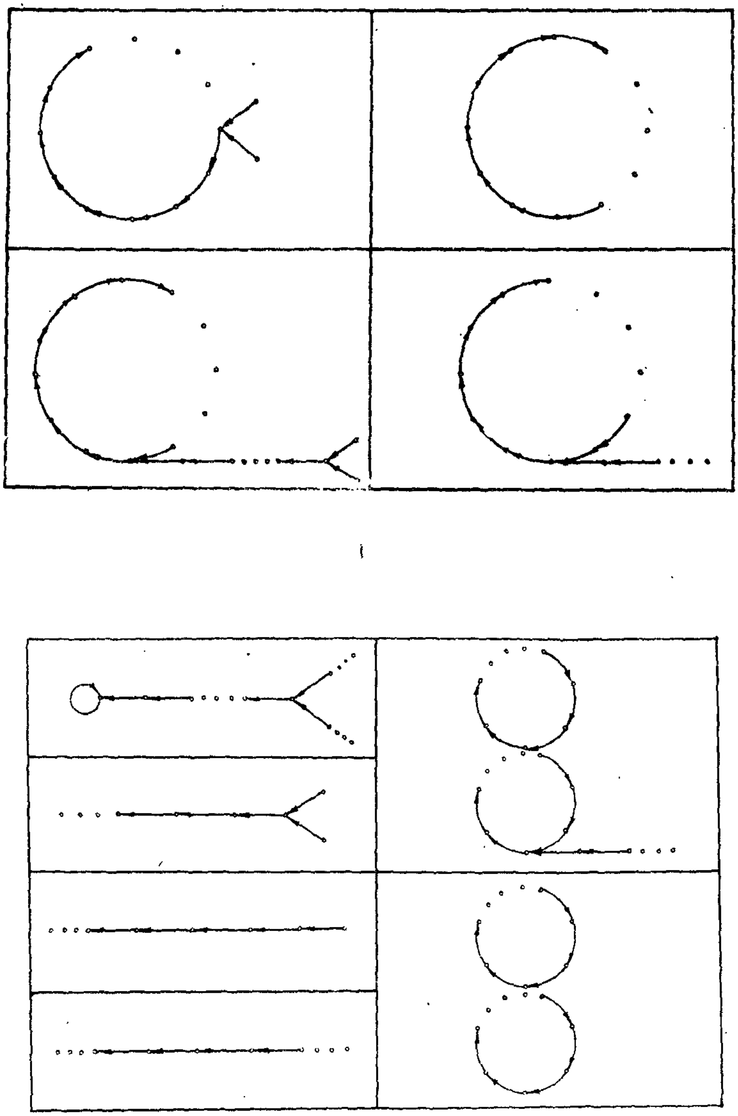
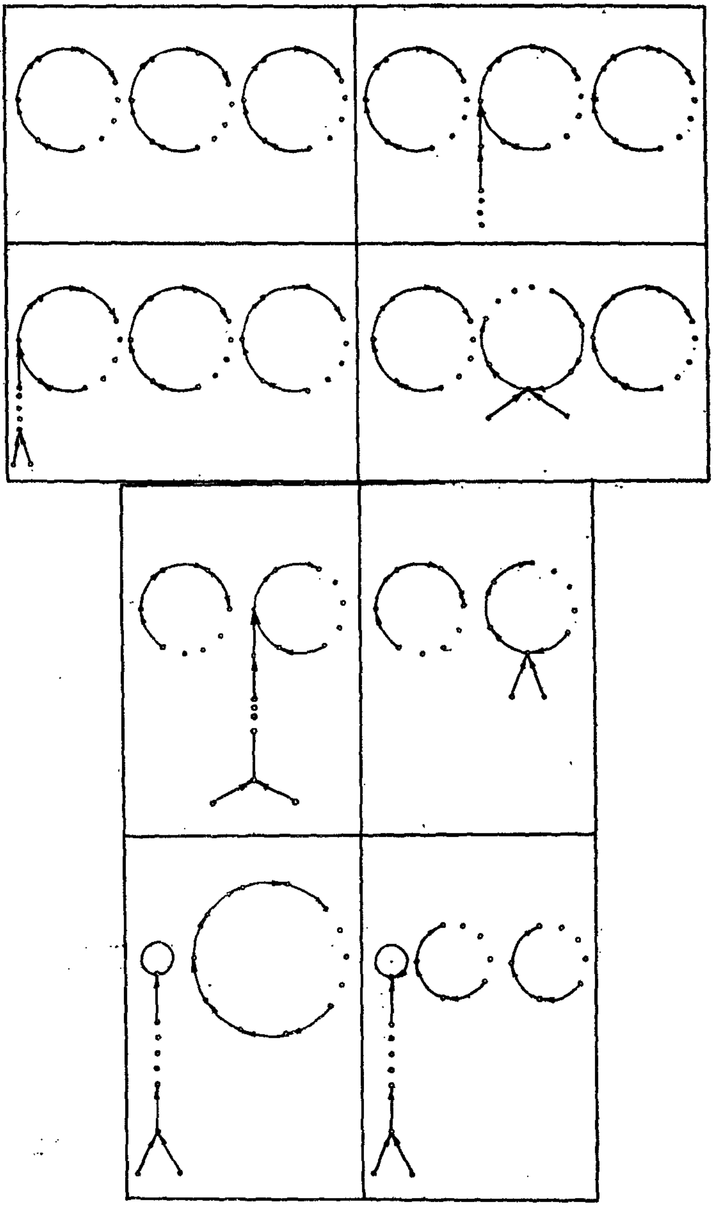
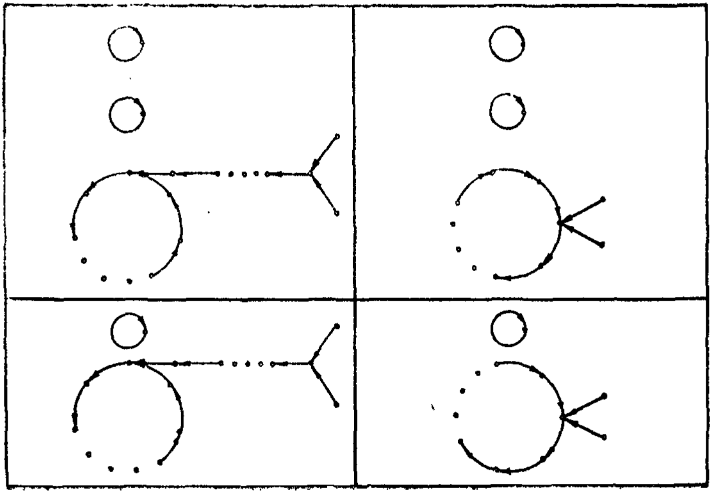
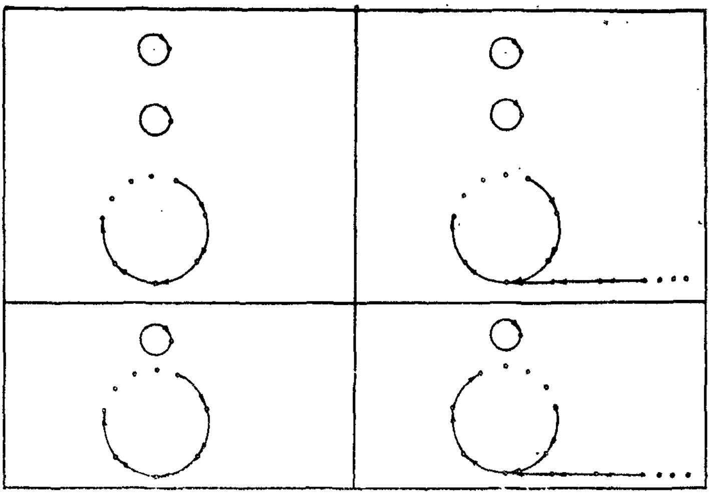
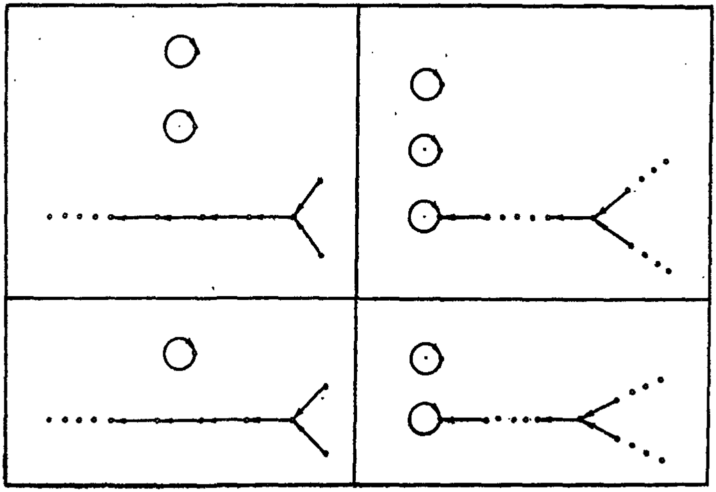


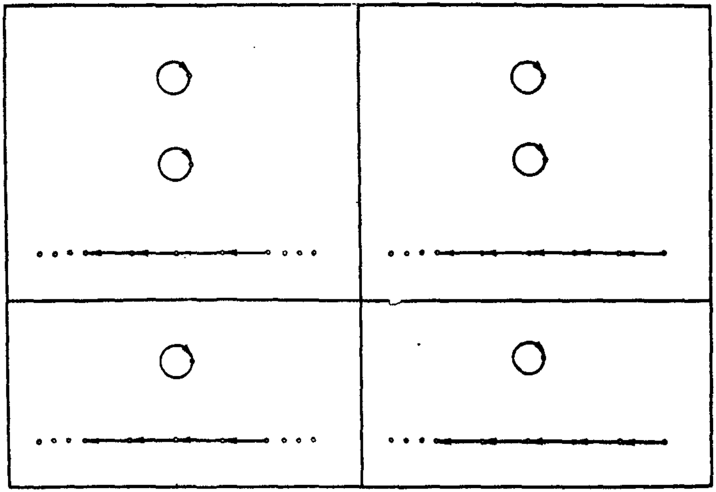
Рис. 2











ЛИТЕРАТУРА

1. Кон П. Универсальная алгебра. М., 1968.
2. Berman J. On the congruence lattices of unary algebras. — «Proc. Amer. Math. Soc.», 1972, 36, N 1, 34—38.
3. Varlet J. C. Endomorphisms and fully invariant congruences in unary algebras <A, Г>. — «Bull. Soc. roy. sci. Liege», 1970, 39, N 11—12, 575—589.
4. Егорова Д. П., Скорняков Л. А. О структуре конгруэнций унарной алгебры. — В сб.: Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та. 1976.
5. Скорняков Л. А. Дополнения в структуре конгруэнций. — «Матем. сб.», 1972, 88, № 5, 148—181.
6. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М., 1970.
7. Jonsson B. Topics in universal algebra. — «Lect. Notes Math.», v. 250, Berlin, 1972.

В. И. ИГОШИН

О РЕШЕТКАХ КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

Настоящая работа содержит результаты, касающиеся решеток квазимногообразий алгебраических систем и решеток квазимногообразий решеток. В первом параграфе доказано, что все решетки квазимногообразий удовлетворяют некоторому квазитождеству, называемому законом V-полудистрибутивности (или, короче, полудистрибутивности). Затем в этом параграфе исследуется квазимногообразие полудистрибутивных решеток: дается критерий принадлежности решетки этому квазимногообразию; доказывается нехарактеризуемость [1] этого квазимногообразия в многообразии всех решеток и в качестве следствия показывается существование квазимногообразия решеток, собственно содержащего квазимногообразие полудистрибутивных решеток и имеющего с ним одни и те же конечные решетки. Далее в этом же параграфе дан критерий того, когда всякое собственное подквазимногообразие локально конечного многообразия является многообразием. Во втором параграфе в дополнение к результатам работы [2] показана континуальность всякого неодноэлементного дуального идеала в решетке всех квазимногообразий решеток. В заключение описана решетка всех подмногообразий многообразия, порожденного пятиэлементной немодулярной решеткой и всеми решетками высоты два, и показано, что всякое подквазимногообразие этого многообразия является многообразием.

1. Решетки квазимногообразий алгебраических систем

Решетка называется $\vee$-полудистрибутивной (или, короче, полудистрибутивной), если она удовлетворяет следующему квазитождеству:

$$(SD)\ x\vee z = y\vee z \rightarrow x\vee z = (x\wedge y)\vee z.$$

Теорема 1. Решетка всех подквазимногообразий любого квазимногообразия алгебраических систем полудистрибутивна.

Доказательство. Возьмем любые три квазимногообразия K_1, K_2, K_3 из рассматриваемой решетки квазимногообразий, удовлетворяющих посылке квазитождества полудистрибутивности: $K_1\vee K_3 = K_2\vee K_3$. Ясно, что $(K_1\wedge K_2)\vee K_3 \subseteq K_1\vee K_3$. Покажем обратное включение. Возьмем любую подпрямо $(K_1\vee K_3)$ — неразложимую алгебраическую систему $A\in K_1\vee K_3$. Тогда $A\in K_1$ или $A\in K_3$ (это непосредственно вытекает из предложения 1.1 [3]).

Рассмотрим два случая.

а) $A\in K_1$. Поскольку $K_1\vee K_3 = K_2\vee K_3$, то $A\in K_2\vee K_3$ и, следовательно, аналогично (т. к. A $(K_2\vee K_3)$ — подпрямо неразложима), $A\in K_2$ или $A\in K_3$. Если $A\in K_2$, то $A\in K_1\wedge K_2$ и, следовательно, $A\in(K_1\wedge K_2)\vee K_3$. Если $A\in K_3$, то $A\in(K_1\wedge K_2)\vee$ $\vee K_3$.

б) $A\in K_3$. Тогда $A\in(K_1\wedge K_2)\vee K_3$. Итак, мы заключаем, что $A\in(K_1\wedge K_2)\vee K_3$, то есть всякая подпрямо $(K_1\vee K_3)$ — неразложимая система из квазимногообразия $K_1\vee K_3$ принадлежит квазимногообразию $(K_1\wedge K_2)\vee K_3$. Следовательно, и всякая система из $K_1\vee K_3$ принадлежит $(K_1\wedge K_2)\vee K_3$, то есть $K_1\vee K_3\subseteq(K_1\wedge K_2)\vee K_3$. Окончательно, $K_1\vee K_3 = (K_1\wedge K_2)\vee K_3$. Теорема доказана.

Эта теорема отмечалась нами в [4].

Частичной решеткой называется такая частичная алгебра с двумя частичными бинарными операциями, которые могут быть расширены до решеточных операций (см. [5]).

Предложение 1. Для того, чтобы решетка принадлежала квазимногообразию $\vee$-полудистрибутивных решеток, необходимо и достаточно, чтобы она не имела частичной подрешетки, изоморфной какой-либо из следующих двух частичных решеток (см. рис. на стр. 46).

Причем частичные операции в них определяются следующим образом: $A\wedge B = O$; $O\vee C = C$; $A\vee C = B\vee C = F$; $A\vee B = M$ (рис. 1); $A\vee B = F$ (рис. 2).

Доказательство. Если решетка имеет частичную подрешетку, изоморфную одной из двух указанных частичных решеток, то квазитождество (SD) не выполняется в ней при $x=A$, $y=B$, $z=C$.

Обратно, пусть решетка L не является $\vee$-полудистрибутивной. Тогда в L найдутся элементы a, b, c такие, что квазитождество (SD) не выполняется в L при $x=a$, $y=b$, $z=c$, то есть имеет место $a\vee c=b\vee c$, но $a\vee c\neq(a\wedge b)\vee c$. Рассмотрим в L

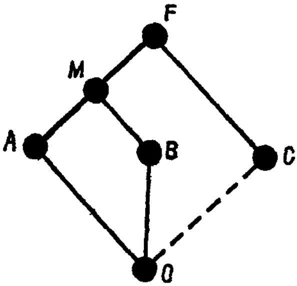


Рис. 1

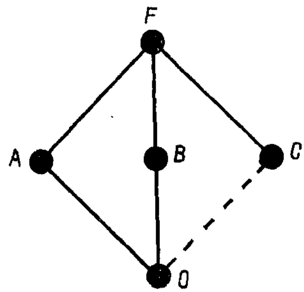


Рис. 2

следующие элементы: $A=a$, $B=b$, $C=(a\wedge b)\vee c$, $O=a\Delta b$, $F=a\vee c=b\vee c$, $M=a\vee b$ и покажем, что при $F\neq M$ они образуют частичную подрешетку, изоморфную той, диаграмма которой изображена на рис. 1, а при $F=M$ — той, диаграмма которой изображена на рис. 2. Нетрудно проверить, что элементы A, B, C, O, F, M, за исключением, быть может, F и M, попарно различны, поскольку в противном случае квазитождество (SD) выполнялось бы в L при $x=a$, $y=b$, $z=c$. Осталось посмотреть на результаты частичных операций: $A\wedge B=$ $=a\wedge b=O, A\vee C=a\vee(a\wedge b)\vee c=a\vee c=F$, $B\vee C=b\vee(a\wedge b)\vee$ $\vee c=b\vee c=F$. Наконец $A\vee B=a\vee b=M$, если $M\neq F$, и $A\vee B=F$, если $M=F$. Предложение доказано.

Предложение 2. Квазимногообразие S $\vee$-полудистрибутивных решеток не характеризуемого в многообразии всех решеток.

Это следует из того (см. [1], теорема 1.1), что существует решетка (см. [6], рис. 3), не принадлежащая квазимногообразию S, все конечные подрешетки которой этому квазимногообразию принадлежат.

Наименьший характеризуемый класс $X(K)$ решеток, содержащий класс решеток K, называется характеристическим замыканием класса K. В работе [7] показано, что классы K и $X(K)$ обладают одинаковыми совокупностями конечных членов и что, если K — квазимногообразие, то $X(K)$ — тоже квазимногообразие.

Следствие. $X(S)=N_\Lambda\ (L_1, L_2, L_3, L_3{}^d L_4)$, где $L_1, L_2, L_3, L_3{}^d, L_4$—решетки из работы [6], а Λ — многообразие всех решеток. Причем $S\subseteq X(S)$ и $S\neq X(S)$.

Следующее предложение и следствия из него касаются (квази)многообразий, все собственные подквазимногообразия которых являются многообразиями.

Предложение 3. Для квазимногообразия Q алгебраических систем конечной сигнатуры следующие условия эквивалентны: (1). Любое характеризуемое собственное подквазимногообразие квазимногообразия Q является многообразием в Q (т. е. определяется в Q совокупностью тождеств). (2). Любая конечная подпрямо Q-неразложимая [8] система из Q слабо Q-проективна. (Напомним [1], что система из Q называется слабо Q-проективной, если она вкладывается во всякую Q-систему, гомоморфно на нее отображающуюся).

Доказательство. (1)$\to$(2). Если система A конечна и подпрямо Q-неразложима, то класс $N_Q(A)$ есть подквазимногообразие в Q, и тогда по условию (1) он есть многообразие в Q. Следовательно, A слабо Q-проективна.

(2)$\to$(1). Пусть $N_Q(\chi)$ — характеризуемое подквазимногообразие в Q. Пусть $\chi_n, \chi_{n+k_1}, \chi_{n+k_2}, \cdots$ — все непустые слои (т. е. совокупности), состоящие из систем из χ порядков $n, n+k_1, n+k_2,\ldots$ соответственно ($k_1<k_2<\ldots$). Тогда по теореме 2.2 из [1] все системы из χ_n подпрямо Q-неразложимы и, следовательно, по условию (2) слабо Q-проективны. Поэтому класс $N_Q(\chi_n)$ в Q является многообразием. Далее по той же теореме все системы из χ_{n+k_1} подпрямо $N_Q(\chi_n)$-неразложимы и, следовательно (так как $N_Q(\chi_n)$, есть многообразие в Q), подпрямо Q-неразложимы. Тогда, по условию, все системы из χ_{n+k_1} слабо Q-проективны, откуда класс $N_Q(\chi_n \cup \chi_{n+k_1})$ является многообразием в Q. И так далее. Окончательно класс $N_Q(\chi_n \cup \chi_{n+k_1} \cup \chi_{n+k_2} \cup \cdots)$, совпадающий с классом $N_Q(\chi)$, является многообразием в Q как пересечение семейства классов, являющихся многообразиями в Q:

$$N_Q(\chi)=N_Q(\chi_n)\cap\bigcap_{i=1}^{\infty}N_Q(\chi_{n+k_i}).$$

Предложение доказано.

Обозначим символом $\mathrm{Fin}(K)$ совокупность всех конечных алгебраических систем из класса систем K.

Следствие 1. Для локально конечного квазимногообразия Q алгебраических систем конечной сигнатуры следующие условия эквивалентны: (1). Любое собственное подквазимногообразие квазимногообразия Q является многообразием в Q. (2). Любая конечная подпрямо Q-неразложимая система из Q слабо Q-проективна. (3). Любая конечная подпрямо Q-неразложимая система из Q слабо $\mathrm{Fin}(Q)$-проективна.

Эквивалентность утверждений (1) и (2) вытекает из предложения 3 и того факта, что всякое подквазимногообразие локально конечного квазимногообразия характеризуемо в последнем. Эквивалентность утверждений (2) и (3) легко видеть.

Следствие 2. Для локального конечного многообразия V алгебраических систем конечной сигнатуры следующие условия эквивалентны: (1). Любое собственное подквазимногообразие многообразия V является многообразием. (2). Любая конечная подпрямо неразложимая система из V слабо V-проективна. (3) Любая конечная подпрямо неразложимая система из V слабо $\mathrm{Fin}\ (V)$-проективна.

Это следствие вытекает непосредственно из предыдущего следствия. Оно обобщает теорему 2 из [9] и отмечалось нами в [10].

2. Решетки квазимногообразий решеток

Сначала мы рассмотрим вопрос о мощности дуальных идеалов в решетке $L_q(\Lambda)$ всех квазимногообразий решеток. Этот вопрос представляет интерес в связи с тем, что существуют решетки квазимногообразий, в которых все дуальные идеалы конечны, все неодноэлементные дуальные идеалы счетны, или имеются как счетные, так и континуальные дуальные идеалы (см. [2]).

Теорема 2. В решетке $L_q(\Lambda)$ всех квазимногообразий решеток всякий неодноэлементный дуальный идеал имеет мощность континуума.

Доказательство. Покажем сначала, что всякий главный дуальный идеал в решетке $L_q(\Lambda)$ имеет мощность континуума. Пусть Q — произвольное, отличное от многообразия Λ всех решеток, квазимногообразие решеток. Так как $Q \neq \Lambda$, то существует конечная решетка, не принадлежащая Q (см. [11], стр. 1278 и [12], стр. 133, следствие 1). Следовательно, существует конечная подпрямо неразложимая решетка A такая, что $A \notin Q$. Рассмотрим теперь счетную совокупность решеток $\{B_k \mid k \geqslant 4\}$, рис. 3.

Все решетки B_k, $k \geqslant 4$ просты и попарно друг в друга не вкладываются. Для каждого $k \geqslant 4$ построим решетку A_k следующим образом. Наибольший элемент решетки A отождествим с наибольшим элементом решетки B_k, а наименьший эле-

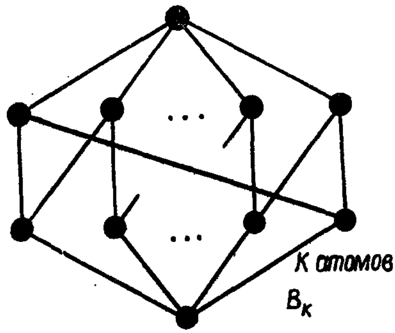


Рис. 3

мент из A отождествим с наименьшим элементом из B_k. Операции в A_k определим следующим образом:

$$a \wedge b = \begin{cases} a \wedge b \text{ в решетке } A, \text{ если } a, b \in A \\ a \wedge b \text{ в решетке } B_k, \text{ если } a, b \in B_k \\ 0, \text{ если } a \in A, b \in B_k \end{cases}$$

$$a \vee b = \begin{cases} a \vee b \text{ в решетке } A, \text{ если } a, b \in A \\ a \vee b \text{ в решетке } B_k, \text{ если } a, b \in B_k \\ 1, \text{ если } a \in A, b \in B_k. \end{cases}$$

В силу простоты решеток B_k, $k \geqslant 4$ и подпрямой неразложимости решетки A и в силу того, что всякая конгруэнция на A_k, отождествляющая элемент из A с элементом из B_k, является универсальной, заключаем, что все решетки A_k, $k \geqslant 4$ подпрямо неразложимы. Легко понять также, что ввиду невложимости друг в друга разных решеток из совокупности $\{B_k | k \geqslant 4\}$, не будут попарно вкладываться друг в друга и разные решетки из совокупности $\{A_k | k \geqslant 4\}$.

Укажем теперь континуальную совокупность элементов в главном фильтре решетки $L_q(\Lambda)$, порожденном квазимногообразием Q. Пусть M — совокупность всех подмножеств следующего множества натуральных чисел $\{4, 5, 6, ...\}$. Тогда мощность M равна континууму. Для каждого $\mu \in M$ рассмотрим следующий класс решеток $K_\mu = N_\Lambda(\{A_k \mid k \in \mu\})$. Последний является квазимногообразием (см. [13]). Кроме того, поскольку для любого $k \geqslant 4$ $A_k \notin Q$, то $Q \subseteq K_\mu$. Следовательно, K_μ, $\mu \in M$, континуальная совокупность квазимногообразий в главном дуальном идеале решетки $L_q(\Lambda)$, порожденном элементом Q. Тогда и всякий дуальный идеал решетки $L_q(\Lambda)$ имеет мощность континуума. Теорема доказана.

В оставшейся части работы опишем решетку всех подквазимногообразий многообразия $V(N_5, M_\infty)$, порожденного пятиэлементной немодулярной решеткой N_5 и решеткой M_∞, имеющей высоту два и содержащей счетное число атомов. Обозначим для натурального $n \geqslant 3$ символом M_n решетку высоты два, имеющую n атомов. Обозначим далее через $V(A)$ и $Q(A)$ соответственно многообразие и квазимногообразие, порожденные решеткой A. Символами $L_v(V)$ и $L_q(V)$ обозначим решетки всех подмногообразий и всех подквазимногообразий многообразия V. Наконец, обозначим для краткости $I = V(N_5, M_\infty)$. Предварительно приведем три леммы, которые нам понадобятся при доказательстве теоремы 3.

Лемма 1. [13, лемма]. Во всякое подпрямое произведение решеток $M_{k_1}, M_{k_2}, \ldots, M_{k_p}$ $(k_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant k_p)$ вкладывается решетка M_{k_p}.

Лемма 2. Во всякое подпрямое произведение решетки N_5 и решетки L, в которую вкладывается M_3, вкладывается решетка M_3.

Доказательство. Обозначим через $0, p, q, r, 1$ элементы решетки N_5, причем порядок определим следующим образом: $0 < p < q < 1$, $0 < r < 1$. Атомы решетки M_3 обозначим a_1, a_2, a_3, а наименьший и наибольший ее элементы — соответственно 0 и 1. Упорядоченную пару (a, b) будем обозначать ab. Тогда во всяком подпрямом произведении решеток N_5 и L найдется совокупность упорядоченных пар следующего вида

$$x0,\ ya_1,\ za_2,\ sa_3,\ t1, \qquad (*)$$

где $x, y, z, t, s \in \{0, p, q, r, 1\}$. Перебирая всевозможные случаи расположения на первых проекциях пар совокупности (*) элементов решетки N_5, можно показать, что все эти подпрямые произведения решеток N_5 и L будут непременно содержать совокупность упорядоченных пар следующего вида

$$\alpha 0,\ \alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \alpha a_3,\ \alpha 1, \qquad (**)$$

где $\alpha \in \{0, p, q, r, 1\}$. Совокупность (**) будет образовывать подрешетку подпрямого произведения решеток N_5 и L, изоморфную решетке M_3.

Лемма 3. Решетка M_n ($n \geqslant 3$) вкладывается во всякое подпрямое произведение решетки N_5 и решетки L, в которую вкладывается M_n.

Доказательство. Докажем индукцией по n ($n \geqslant 3$) следующее утверждение: во всяком подпрямом произведении решетки N_5 и решетки L, в которую вкладывается M_n, найдется совокупность упорядоченных пар следующего вида:

$$\alpha 0,\ \alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \ldots,\ \alpha a_n,\ \alpha 1, \qquad (***)$$

образующая подрешетку, изоморфную решетке M_n. (Символами $a_1, \ldots, a_n$ обозначены все атомы решетки M_n, а 0 и 1 — ее наименьший и наибольший элементы). Для $n=3$ утверждение доказано в лемме 2. Предположим теперь, что во всяком подпрямом произведении решетки N_5 и решетки M_{n-1} найдется совокупность упорядоченных пар следующего вида

$$\alpha 0,\ \alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \ldots,\ \alpha a_{n-1},\ \alpha 1, \qquad (**)$$

образующая подрешетку, изоморфную решетке M_{n-1}.

Рассмотрим любое подпрямое произведение решетки N_5 и решетки L, в которую вкладывается решетка M_n. Тогда, учитывая предположение индукции, заключаем, что в этом подпрямом произведении найдется совокупность упорядоченных пар следующего вида:

$$\alpha 0,\ \alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \ldots,\ \alpha a_{n-1},\ \beta a_n,\ \alpha 1. \qquad (***)$$

Рассмотрим несколько случаев.

1) $\alpha=0$. Тогда этому подпрямому произведению принадлежит пересечение $\alpha 1 \wedge \beta a_n = 01 \wedge \beta a_n = 0a_n = \alpha a_n$ и, следовательно, совокупность $00, 0a_1, \ldots, 0a_n, 01$ образует подрешетку, изоморфную M_n.

2) $\alpha=1$. В таком подпрямом произведении найдется совокупность пар $10, 1a_1, \ldots, 1a_n, 11$, причем $1a_n = 10 \vee \beta a_n$.

3) $\alpha=r: r0, ra_1, \ldots, ra_{n-1}, \beta a_n, r1$. Рассмотрим четыре подслучая: а) $\beta=0$. Тогда в этом подпрямом произведении находится элемент $ra_n = r0 \vee 0a_n$. б) $\beta=p$. Этому произведению принадлежит элемент $0a_n = r1 \wedge pa_n$ и $ra_n = r0 \vee 0a_n$. в) $\beta=q$. В этом произведении имеется элемент $0a_n = r1 \wedge qa_n$, и $ra_n = r0 \vee 0a_n$. г) $\beta=1$. Здесь имеется элемент $ra_n = r1 \wedge 1a_n$.

4) $\alpha=p: p0, pa_1, \ldots, pa_{n-1}, \beta a_n, p1$. Также рассмотрим четыре подслучая: а) $\beta=0$. В этом подпрямом произведении на-

ходится элемент $pa_n = p0 \vee 0a_n$. б) $\beta = r$. Здесь элемент pa_n получается следующим образом: $0a_n = p1 \wedge ra_n$, $pa_n = p0 \vee 0a_n$. в) $\beta = q$. Получаем $pa_n = p1 \wedge qa_n$. г) $\beta = 1$. Здесь находим $pa_n = p1 \wedge 1a_n$.

5) $\alpha = q : q0, qa_1, \ldots, qa_{n-1}, \beta a_n, q1$. Рассмотрим четыре подслучая для β: а) $\beta = 0$. В этом подпрямом произведении имеется элемент $qa_n = q0 \vee 0a_n$. б) $\beta = r$. Здесь элемент qa_n находится так: $0a_n = q1 \wedge ra_n$, $qa_n = q0 \vee 0a_n$. в) $\beta = p$. Находим $qa_n = q0 \vee pa_n$. г) $\beta = 1$. Здесь имеем $qa_n = q1 \wedge 1a_n$.

Итак, во всякое подпрямое произведение решеток N_5 и L вкладывается решетка M_n. Лемма полностью доказана.

Теорема 3. Решетка всех подмногообразий многообразия $V(N_5, M_\infty)$ имеет вид, показанный на рис. 4. Всякое подквазимногообразие многообразия $V(N_5, M_\infty)$ является многообразием, то есть $L_q(I) = L_v(I)$. При этом имеют место следующие соотношения:

$V(M_\infty) = N_I(N_5)$;

$V(M_n) = N_I(N_5, M_{n+1})$, $n = 1, 2, \ldots$ (здесь M_1 — одноэлементная решетка, а M_2 — двухэлементная решетка);

$V(N_5) = N_I(M_3)$;

$V(N_5, M_n) = N_I(M_{n+1})$, $n = 3, 4, \ldots$.

Доказательство. Покажем сначала, что $V(N_5, M_\infty) = V(N_5, M_3, M_4, \ldots)$. В работе [14] показано, что $M_\infty \in V(M_3, M_4, \ldots)$. Отсюда следует указанное равенство.

Поскольку, ввиду следствия 3.4 из [15], подпрямо неразложимые решетки многообразия $V(N_5, M_n)$ исчерпываются совокупностью $N_5, M_2, M_3, \ldots, M_n$, то для любого $n \geqslant 3$ решетка всех подмногообразий этого многообразия имеет вид, показанный на рис. 4. Так как $V(N_5, M_\infty) = V(N_5) \vee V(M_\infty)$, то по лемме 4.1 из [15] всякая подпрямо неразложимая решетка из $V(N_5, M_\infty)$ принадлежит $V(N_5)$ или $V(M_\infty)$, и, следовательно, по следствию 3.4 из [15] и по теореме из [14] заключаем, что все подпрямо неразложимые решетки из $V(N_5, M_\infty)$ суть следующие: $N_5, M_2, M_3, \ldots, M_\infty$. Поскольку каждое многообразие порождается своими подпрямо неразложимыми членами, то решетка $L_v(I)$ имеет вид, показанный на рис. 4.

Покажем теперь, что $L_q(I) = L_v(I)$. Заметим сначала, что многообразие $V(N_5, M_\infty)$ локально конечно, так как порождается равномерно локально конечной совокупностью решеток N_5, M_∞ (см. [16], стр. 360). Поэтому всякое подквазимногообразие Q этого многообразия порождается как квазимногообразие совокупностью всех конечных подпрямо Q-неразложимых своих решеток. Возьмем любое подквазимногообразие

$Q \subseteq V(N_5, M_\infty)$ и соберем в нем все решетки вида N_5, M_2, M_3, ... Рассмотрим случаи, которые могут представиться при этом: 1) N_5, M_2, M_3, ... $\in Q$, Тогда $Q = V(N_5, M_\infty)$. 2) M_2, M_3, ... $\in Q$,

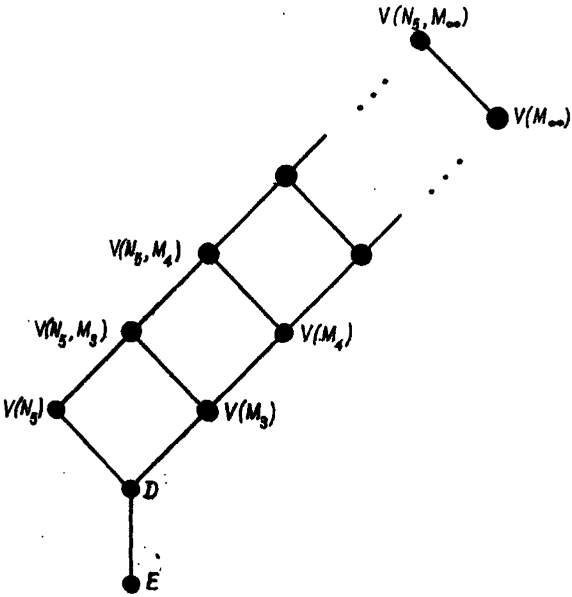


Рис. 4

N_5 Q. Тогда $Q = V(M_\infty)$. 3) M_2, M_3, ..., $M_n \in Q$, $N_5 \notin Q$, $M_i \notin Q$, $i > n$. Тогда $Q = V(M_n)$ (см. [13]). 4) N_5, M_2, M_3, ..., $M_n \in Q$, $M_i \notin Q$, $i > n$. Тогда $Q \subseteq V(N_5, M_n)$. Возьмем конечную решетку $A \in V(N_5, M_n)$. Покажем, что A разлагается в подпрямое произведение решеток N_5, M_2, M_3, ..., M_n. Допустим, что в разложении A на подпрямо неразложимые множители есть решетка M_k, $k > n$. Тогда по лемме I, M_k вкладывается в подпрямое произведение B решеток M_{k_1}, ..., M_{k_p}, M_k $(k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_p < k)$, составляющих разложение A. По лемме 3, всякое подпрямое произведение решеток N_5 и B имеет подрешетку, изоморфную M_k. Следовательно, $M_k \in Q$. Это противоречит тому, что $Q \subseteq V(N_5, M_n)$. Итак, A разлагается в подпрямое произведение решеток N_5, M_2, M_3, ..., M_n. Тогда $A \in Q$. Следовательно, $V(N_5, M_n) \subseteq Q$, и окончательно $Q = V(N_5, M_n)$.

Наконец, проверим соотношения, утверждающиеся в теореме. В силу предложения 1 [13], все характеризуемые классы, стоящие в правых частях приводимых равенств, являются квазимногообразиями. Тогда по только что доказанному все эти классы являются многообразиями. Так как $V(M_\infty)\subseteq\subseteq N_{\mathrm{I}}(N_5)$ и многообразие $V(M_\infty)$ является дуальным атомом решетки $L_{\mathrm{v}}(I)$, то $V(M_\infty)=N_{\mathrm{I}}(N_5)$.

Ясно, что $V(M_{\mathrm{n}})\subseteq N_{\mathrm{I}}(N_5,\ M_{\mathrm{n+1}})$. Поскольку каждое многообразие, содержащее $V(M_{\mathrm{n}})$, $n\geqslant 2$, содержит $V(M_{\mathrm{n+1}})$ или $V(N_5,\ M_{\mathrm{n}})$, но $V(M_{\mathrm{n+1}})\not\subseteq N_{\mathrm{I}}(N_5,\ M_{\mathrm{n+1}})$ и $V(N_5,\ M_{\mathrm{n}})\not\subseteq N_{\mathrm{I}}(M_{\mathrm{n+1}})$, то $N_{\mathrm{I}}(M_{\mathrm{n+1}})=V(M_{\mathrm{n}})$.

Далее, $V(N_5,\ M_{\mathrm{n}})\subseteq N_{\mathrm{I}}(M_{\mathrm{n+1}})$, $n=2,\ 3,\ \ldots$. Поскольку всякое многообразие, содержащее $V(N_5,\ M_{\mathrm{n}})$, содержит многообразие $V(M_{\mathrm{n+1}})$, а $N_{\mathrm{I}}(M_{\mathrm{n+1}}\not\subseteq V(M_{\mathrm{n+1}})$ то $N_{\mathrm{I}}(M_{\mathrm{n+1}})=V(N_5,\ M_{\mathrm{n}})$. Теорема доказана. Примечание при корректуре. После того, как рукопись была сдана в печать, автору стало известно, что теорема 2 независимо доказана В. П. Белкиным («Алгебра и логика», 1976, 15, № 1, 12—21, теорема 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Игошин В. И. Характеризуемые классы алгебраических систем. — В сб.: Исследования по алгебре, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1974, 27—42.
2. Белкин В. П., Горбунов В. А. Фильтры решеток квазимногообразий алгебраических систем. — «Алгебра и логика», 1975, 14, № 4, 373—392.
3. Игошин В. И. О решетках квазимногообразий и квазимногообразиях решеток. — В сб.: Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1976, 62—68.
4. Игошин В. И. Реферат статьи 6. — РЖ «Математика», 1976, 2А384.
5. Gratzer G. Lattice Theory. First concepts and distributive lattices. San Francisco, 1971.
6. Davey B. A., Poguntke W., Rival I. A characterisation of semi-distributivity. — «Algebra univers.», 1975, 5, N 1, 72—75.
7. Игошин В. И. Проективные плоскости и характеристические замыкания универсальных классов. — В сб.: Дифференциальная геометрия. Изд-во Сарат. ун-та, 1974. 36—40.
8. Мальцев А. И. Подпрямые произведения моделей. — «ДАН СССР», 1956, 109, № 2, 264—266.
9. Slavik V. A note on subquasivarieties of some varieties of lattices. — «Comment. math. Univ. carol.», 1975, 16, N 1, 173—181.
10. Игошин В. И. Реферат статьи 9. — РЖ «Математика», 1975, 11А390.
11. Негру И. С. Об алгебраических свойствах совокупности логик высказываний. — «ДАН СССР», 1974, 218, № 6, 1276—1279.
12. Будкин А. И., Горбунов В. А. К теории квазимногообразий алгебраических систем. — «Алгебра и логика», 1975, 14, № 2, 123—142.
13. Игошин В. И. Квазимногообразия решеток. — «Матем. заметки», 1974, 16, № 1, 49—56.

14. Jonsson B. Equational classes of lattices. — «Math. Scand.», 1968, 22, N 2, 187—196.
15. Jonsson B. Algebras whose congruence lattices are distributive. — «Math. Scand.», 1967, 21, N 1, 110—121.
16. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М., 1970.

Б. Б. КОВАЛЕНКО

ОБОБЩЕННЫЕ МОДУЛИ НАД ИНВЕРСНЫМИ ПОЛУКОЛЬЦАМИ

Целью данной заметки является рассмотрение с абстрактно алгебраической точки зрения конструкций, встречающихся при исследовании пучков колец [2]. Основную роль при этом играют инверсные полукольца, которые были по существу введены в [1] и изучались далее в [3] и [6].

Обобщенный модуль над инверсным полукольцом, определяемый в заметке, является модификацией понятия пучка модулей над пучком колец, взятым над топологическим пространством [2].

По аналогии с тем, как это делается в теории колец [5], вводится понятие радикала инверсного полукольца, описывается ряд его свойств. Оказывается, что фактор коммутативного инверсного полукольца по его радикалу является полупростым.

Инверсным полукольцом называется [3] алгебра G с ассоциативными бинарными операциями умножения и сложения такими, что

1) $g_1+g_2=g_2+g_1$,

2) для всякого $g\in G$ существует (и он будет единственным) элемент $-g$ такой, что

$$g+(-g)+g=g \text{ и } -g+g+(-g)=-g,$$

3) $g_1(g_2+g_3)=g_1g_2+g_1g_3$ и $(g_1+g_2)g_3=g_1g_3+g_2g_3$,

4) сумма двух аддитивных идемпотентов алгебры G равна их произведению.

Сумма $g_1+(-g_2)$ записывается в виде g_1-g_2 и называется разностью элементов g_1 и g_2. Множество всех аддитивных идемпотентов в G обозначим через E.

Пусть сигнатура Ω не содержит нульарных и содержит не только унарные операции.

Ω-алгебра A называется жесткой коммутативной связкой [4] семейства Ω-алгебр из многообразия V, если на A можно задать такую конгруэнцию θ, что

1) всякий класс θ является подалгеброй алгебры A и принадлежит многообразию V,

2) фактор-алгебра $E=A/\theta$ есть Ω-полурешетка (т. е. полурешетка в сигнатуре Ω),

3) для любых e, $f\in E$ при $e\leqslant f$ определен направляющий гомоморфизм $\varphi_{e,f}: A_f\to A_e$ (A_e, A_f — соответствующие классы конгруэнции θ), причем

а) $\varphi_{e,e}=\Delta_{A_e}$,

б) $\varphi_{e,f}\circ\varphi_{f,k}=\varphi_{e,k}$, $e\leqslant f\leqslant k$,

в) для любой n-арной операции $o\in\Omega$, если $a=o(a_1, ..., a_n)$, то $$a=o(\varphi_{\theta<a>,\theta<a_1>}(a_1), \ldots, \varphi_{\theta<a>,\theta<a_n>}(a_n)).$$

Как известно [3], инверсное полукольцо G является жесткой коммутативной связкой колец. Кольцо связки G, соответствующее $e\in E$, обозначается через G_e.

В дальнейшем будем считать, что полурешетка $(E,+)$ аддитивных идемпотентов инверсного полукольца G содержит 0 и 1.

Непустое подмножество I инверсного полукольца G называется правым идеалом [6], тогда и только тогда, когда

1) если i_1, $i_2\in I$, то $i_1+i_2\in I$, 2) если $i\in I$, то $-i\in I$, 3) если $i\in I$ и $g\in G$, то $ig\in I$, 4) $E\subset I$.

Заменяя пункт 3) пунктом

3′) если $i\in I$ и $g\in G$, то $gi\in I$,

получаем определение левого идеала.

Множество I, являющееся одновременно левым и правым идеалом, называется (двусторонним) идеалом.

Пусть I — правый идеал в G и $I_e=I\cap G_e$ для всех $e\in E$. Ясно, что I — жесткая коммутативная связка колец I_e, которые являются правыми идеалами в соответствующих кольцах G_e.

Зададим на G бинарное отношение σ_I следующим образом:

$(p, g)\in\sigma_I$ тогда и только тогда, когда $p-p=g-g=e$ и $p-g\in I_e$ для некоторого $e\in E$. Как показано в [6], σ_I является конгруэнцией. Классы ее совпадают с классами конгруэнций, заданными всеми правыми идеалами I_e в соответствующих кольцах G_e. Таким образом, каждый класс конгруэнции σ_I можно записать в виде I_e+p, где $p-p=e$, а сумма и произведение классов соответственно равны:

$$(I_e+p)+(I_f+g)=I_{e+f}+(p+g),$$
$$(I_e+p)(I_f+g)=I_{ef}+pg.$$

Фактор-алгебра G/σ_I обозначается через G/I.

Пусть φ—гомоморфизм кольца G в кольцо G', а M и M' — модули соответственно над G и G'. Отображение ψ модуля M в модуль M' называется гомоморфизмом модулей, совместимым с гомоморфизмом φ [2], если

1) ψ есть гомоморфизм аддитивной группы $(M, +)$ в аддитивную группу $(M', +)$,

2) $\psi(mg)=\psi(m)\varphi(g)$ для всех $m\in M$ и всех $g\in G$.

Определение. Пусть G — инверсное полукольцо, а M — аддитивная коммутативная обобщенная группа, такая, что между полурешеткой $(E, +)$ аддитивных идемпотентов инверсного полукольца G и полурешеткой идемпотентов обобщенной группы M существует изоморфизм α.

Упорядоченную тройку (G, M, α) назовем обобщенным G — модулем, если определено отображение $M\times G\to M$ (переводящее (m, g) в mg), удовлетворяющее следующим условиям:

1) $m(g_1+g_2)=mg_1+mg_2$,

2) $(m_1+m_2)g=m_1g+m_2g$,

3) $(mg_1)g_2=m(g_1g_2)$ для любых m_1, m_2, $m\in M$ и любых g_1, g_2, $g\in G$,

4) если $e_1, e_2\in E$, то $\alpha(e_1)e_2=\alpha(e_1e_2)$.

В дальнейшем $\alpha(e)$ для каждого $e\in E$ будем обозначать через e, тем самым отождествляя полурешетку $(E, +)$ аддитивных идемпотентов инверсного полукольца с полурешеткой идемпотентов обобщенного модуля без ущерба для изложения.

Иногда для краткости обобщенный модуль (G, M, α) будем обозначать через M.

Обобщенный модуль M по сложению является обобщенной группой Клиффорда, которая разлагается в жесткую коммутативную связку групп. Группу связки, соответствующую $e\in E$, обозначим через M_e.

Пусть $e, f\in E, m\in M_e$ и $g\in G_f$. Тогда $mg-mg=m(g-g)=$ $=mf=m(f-f)=mf-mf=(m-m)f=ef$, то есть $mg\in M_{ef}$. Отсюда, в частности, следует, что если $g\in G_e$ и $m\in M_e$, то $mg\in M_e$, то есть $M_eG_e\subset M_e$ для любого $e\in E$.

Таким образом, каждая группа M_e является модулем над соответствующим кольцом G_e, причем отображение $M_e \times G_e \to M_e$ индуцируется отображением $M \times G \to M$.

Пусть $\psi_{e,f}$ — произвольный направляющий гомоморфизм в связке M групп M_e, $e \in E$, и пусть $m \in M_f$ и $g \in G_f$. Тогда

$$\psi_{e,f}(m)\,\varphi_{e;f}\,(g) = (m+e)(g+e) = mg+eg+me+ee =$$
$$= mg+3e = mg+e = \psi_{e,f}(mg).$$

Следовательно, $\psi_{e,f}$ является гомоморфизмом модулей, совместимым с направляющим гомоморфизмом $\varphi_{e,f}$.

Положим $m \in M_e$, $g \in G_f$ и $ef = h$. Тогда $\psi_{h,e}(m)\varphi_{h;f}(g) = (m+h)(g+h) = mg+mh+hg+hh = mg+3h = mg+h = mg$.

Следовательно, обобщенный модуль M естественно назвать жесткой коммутативной связкой модулей.

Примеры.

1. Пусть G — произвольное инверсное полукольцо и I — правый идеал в G. Тогда I — обобщенный G — модуль.

2. Пусть I — правый идеал инверсного полукольца G, а G/I — обобщенная фактор-группа G по I, где G и I рассматриваются как обобщенные группы по сложению. Элементами G/I являются множества вида I_e+p, где $e \in E$, $I_e = I \wedge G_e$, $p \in G_e$.

Положим $(I_e+p)g = I_{eg}+pg$ для любых $I_e+p \in G/I$ и $g \in G$. Тогда G/I является обобщенным G-модулем.

Определение. Если M есть обобщенный G-модуль, то
$$A(M) = \{g \in G \mid Mg \subset E\}.$$

Лемма I. $A(M)$ — двусторонний идеал инверсного полукольца G.

Доказательство не представляет трудностей.

Определение. Пусть (G, M, α) и (G, M', α') — два обобщенных G-модуля. Отображение γ множества M в множество M' назовем (G—) гомоморфизмом (G, M, α) в (G, M', α'), если:

1. γ является гомоморфизмом обобщенной группы $(M, +)$ в обобщенную группу $(M', +)$,

2. $\gamma \circ \alpha = \alpha'$,

3. $\gamma(mg) = \gamma(m)g$ для всех $m \in M$ и всех $g \in G$.

γ индуцирует (G_e—) гомоморфизм γ_e модуля M_e в модуль M'_e для любого $e \in E$.

Определение. Обобщенный G — модуль (G, M, α) назовем неприводимым, если:

1) Каждый модуль M_e связки M неприводим [5],

2) для любых $e, f \in E$ таких, что $e \leqslant f$, направляющий гомоморфизм $\psi_{e,f}$ является «ненулевым», то есть

$$\psi_{e,f}(M_f) \neq e.$$

Определение. Идеал I инверсного полукольца G назовем E-максимальным, если он распадается в связку колец I_e, $e \in E$, каждый из которых является максимальным идеалом в соответствующем кольце G_e.

Лемма 2. Пусть G — инверсное полукольцо и k — его наибольший аддитивный идемпотент. Если M — неприводимый обобщенный G — модуль, то M изоморфен (как обобщенный модуль) обобщенному модулю G/I для некоторого E — максимального правого идеала I в G. Далее, существует элемент $a \in G$, такой, что $a—a=k$ и $g—ag \in I$ для всех $g \in G$. Обратно, если I есть E — максимальный правый идеал в G и существует элемент $a \in G$, такой, что $a—a=k$ и $g—ag \in I$ для всех $g \in G$, то обобщенный G — модуль G/I неприводим.

Доказательство. Необходимость. Так как обобщенный G-модуль M имеет наименьший аддитивный идемпотент и все направляющие гомоморфизмы связки M модулей— «ненулевые», то найдется такой элемент $m \in M_k$, что $\psi_{e,k}(m) = m + e \neq e$ для любого $e \in E$.

По условию теоремы каждый модуль M_e связки M неприводим над соответствующим кольцом G_e, следовательно, $mG_e = (m+e)G_e = M_e$ для любого $e \subset E$. Значит, $mG = M$. Определим отображение $\gamma : G \to M$, полагая $\gamma(g) = mg$ для любого $g \in G$. Легко видеть, что γ является гомоморфизмом обобщенной группы $(G, +)$ в обобщенную группу $(M, +)$. Из равенства $mG = M$ следует, что γ есть гомоморфизм *на*. Пусть $e \in E$; имеем $\gamma(e) = me \in M_e$, то есть $me = e = \alpha(e)$. Таким образом, γ индуцирует на множестве E изоморфизм α. Следовательно, γ есть гомоморфизм *на*, разделяющий аддитивные идемпотенты (p — гомоморфизм [6]).

Так как кольца G_e, $e \in E$ не одноэлементны, то прообразом e не является все кольцо G_e, то есть $\gamma^{-1}(e) \neq G_e$ для любого $e \in E$. Поэтому множество $I = \operatorname{Ker} \gamma = \{g \in G \mid mg \in E\}$ является правым идеалом в G, не содержащим никакого G_e.

Построим обобщенный G — фактор-модуль G/I по правому идеалу I. Так как γ есть p — гомоморфизм *на*, то по теореме 12 [6] обобщенные группы $(G/I, \underline{+})$ и $(M, +)$ изоморфны. Обозначим этот изоморфизм через $\bar{\gamma}$. Для доказательства изоморфизма G/I и M как обобщенных G — модулей осталось проверить справедливость равенства

$$\bar{\gamma}((I_e+p)g)=\bar{\gamma}(I_e+p)g.$$

Предварительно докажем, что $\bar{\gamma}(I_e+p)=mp$, где $p-p=e$. Для этого достаточно показать, что $\gamma(i+p)=mp$ для некоторого $i+p\in I_e+p$, где $i\in I_e$, $p\in G_e$.

Заметив, что mi является идемпотентом (так как $i\in I=\operatorname{Ker}\gamma$) и $mp\in M_e$, получаем $\gamma(i+p)=m(i+p)=mi+mp=e+mp=$
$=mp.$

Отсюда следует справедливость доказываемого равенства:

$$\bar{\gamma}((I_e+p)g)=\bar{\gamma}(I_{eg}+pg)=m(pg)=(mp)g=\bar{\gamma}(I_e+p)g.$$

Изоморфизм $\bar{\gamma}$ индуцирует изоморфизм $\gamma_e: G_e/I_e\to M_e$ для любого $e\in E$, следовательно, по лемме 1,1.3 [5], $I_e=I\cap G_e$ — максимальный правый идеал в G_e. Таким образом, $I=\cup I_e$ есть E-максимальный правый идеал в G. Далее, так как $mG=M$, то существует $a\in G$, такое, что $a-a=k$ и $ma=m$. Значит, для любого $g\in G$ $mag=mg$, $m(g-ag)\in E$, то есть $\gamma(g-ag)\in E$. Следовательно, $g-ag\in\operatorname{Ker}\gamma=I$.

Достаточность. Пусть I-правый E-максимальный идеал в G и существует $a\in G$, такой, что $a-a=k$ и $g-ag\in I$ для всех $g\in G$. Отсюда следует, что $a+e\notin I_e$ для любого $e\in E$, ибо в противном случае для любого $g\in G_e$ $g-ag\in I_e$ и $ag\in I_e$, то есть $g\in I_e$, что невозможно, так как $G_e\neq I_e$. Таким образом, в $(G/I)_k$ существует элемент I_k+a, такой, что для любого $e\in E$ $(I_k+a)+(I_e+e)=I_e+(a+e)\neq I_e$ (так как $a+e\notin I_e$), то есть гомоморфные образы элемента I_k+a при любом направляющем гомоморфизме связки G/I модулей не являются идемпотентами. Следовательно, в G/I нет «нулевых» направляющих гомоморфизмов. Так как в каждом кольце G_e связки G есть элемент $a+e$, такой что $g-(a+e)g\in I_e$ для любого $e\in E$, то согласно лемме 1.1.3 [5] каждый модуль $(G/I)_e=G_e/I_e$ неприводим. Значит, неприводим и обобщенный G — модуль G/I. Лемма доказана полностью.

Согласно лемме 2, каждый неприводимый обобщенный G — модуль получается как обобщенный модуль G/I, где I есть некоторый E-максимальный правый идеал в G, обладающий свойством: существует элемент $a\in G$, такой, что $a-a=k$ и $g-ag\in I$ для всех $g\in G$.

Определение. Правый идеал I инверсного полукольца G назовем регулярным, если существует такой элемент $a\in G$, что $a-a=k$ и $g-ag\in I$ для всех $g\in G$.

Определение. Радикалом инверсного полукольца G назовем совокупность элементов $g\in G$, для которых $Mg\subset E$, где

M пробегает всевозможные неприводимые обобщенные G — модули, или само инверсное полукольцо G, если неприводимых обобщенных G-модулей не существует.

Обозначим радикал через $J(G)$.

По определению $J(G) = \bigcap A(M)$, где M пробегает всевозможные неприводимые обобщенные G — модули.

Аналогично [5] введем следующее обозначение:

$$(I : G) = \{g \in G \mid Gg \subset I\}.$$

Пусть I является E-максимальным регулярным правым идеалом в G и пусть $M = G/I$. Если $g \in A(M)$, то $Mg \subset \mathbf{E} = \{I_e \mid e \in E\}$, то есть $(I_e + p)g \in \mathbf{E}$ для любого $e \in E$ и любого $p \in G_e$. Следовательно, $(I_e + p)g = I_{eg}$, то есть $pg \in I_{pg-pg} \in \boldsymbol{E}$ для любого $p \in G$. Значит, $Gg \subset I$, то есть $A(M) \subset (I : G)$.

Пусть теперь $g \in (I : G)$. Это значит, что $Gg \subset I$, то есть $pg \in I_{pg-pg}$ для любого $p \in G$. Отсюда следует, что$(I_{p-p} + p)g = I_{pg-pg} \in \boldsymbol{E}$, то есть $Mg \subset \mathbf{E}$, где $M = \{I_{p-p} + p \mid p \in G\}$. Значит, $g \in A(M)$, то есть $(I : G) \subset A(M)$.

Имеем теперь $A(M) = (I : G)$. Далее, из $g \in (I : G)$ имеем, что $Gg \subset I$. Отсюда следует, что $ag \in I_{g-g}$. С другой стороны. $g - ag \in I_{g-g}$. Значит, $g \in I_{g-g} \subset I$, то есть $(I : G) \subset I$.

Легко видеть, что $A(M) = (I : G)$ — наибольший двусторонний идеал инверсного полукольца G, лежащий в I.

Таким образом, в силу леммы 2 имеет место

Теорема 1. $J(G) = \bigcap (I : G)$, где I пробегает все регулярные E-максимальные правые идеалы инверсного полукольца G, а $(I : G)$ — наибольший двусторонний идеал из G, лежащий в I.

Отметим два важных следствия для коммутативных инверсных полуколец.

Теорема 2. $J(G) = \bigcap I$, где I пробегает все регулярные E-максимальные идеалы коммутативного инверсного полукольца G.

Этот результат непосредственно следует из теоремы 1.

Теорема 3. Если G коммутативно, то $J(G/J(G)) = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — множество всех аддитивных идемпотентов инверсного полукольца $G/J(G)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.2.4 [5].

Определение. Инверсное полукольцо G назовем полупростым, если $J(G) = E$.

Теорема 3 утверждает, что для коммутативного G инверсное полукольцо $G/J(G)$ полупростое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вагнер В. В. Алгебраическая теория касательных пространств высших порядков. — «Тр. семинара по векторному и тензорному анализу», вып. 10. Изд-во МГУ, 1956, 31—88.
2. Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. М., 1961.
3. Салий В. Н. К теории инверсных полуколец. — «Изв. вузов. Математика», 1969, № 3, 52—60.
4. Салий В. Н. Лекции по теории решеток. Саратов, 1970.
5. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М., 1972.
6. Yusuf S. M. Ideals in additively inversive semirings. — J. Natur. Sci. Math., 1965, 5, N 1, 45—56.

А. В. КОЛДУНОВ

ГЕНЕРАТОРЫ И КОГЕНЕРАТОРЫ В КАТЕГОРИЯХ ВНУТРЕННЕ НОРМАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТОК

В работе рассматриваются генераторы и когенераторы и связанные с ними объекты в двух близких по строению категориях.

В работе, в основном, используется терминология и обозначения из [2], [3].

Определение 1 ([1]). Пусть $D_\infty(B)$ есть решетка всех непрерывных расширенных (т. е. принимающих бесконечные значения на нигде не плотных множествах) функций на бикомпакте B.

Векторная решетка (в. р.) $X(B)\subset D_\infty(B)$ называется нормальной в $D_\infty(B)$, если для любого $y\in D(B)$, такого, что $0\leqslant y\leqslant x\in X(B)$, всегда $y\in X(B)$.

В р. X называется внутренне нормальной, если X можно реализовать в виде нормальной векторной подрешетки $X(B)\subset D_\infty(B)$ для некоторого B.

Замечание. В [1] Б. З. Вулих показал, что если $X(B)$ нормально в $D(B)$, то для любого $x\in X(B)$ имеем $\beta(B-x^{-1}(+\infty))=B$ (где $\beta(B-x^{-1}(+\infty))$ есть бикомпактификация $B-x^{-1}(+\infty)$ по Стоуну-Чеху (см., например, [3]).

Введем следующие обозначения: пусть

$$Z_\infty(B)=\{x^{-1}(+\infty):\beta(B/x^{-1}(+\infty))=B,\ x\in D_\infty(B)\}$$

$$O(X(B))=\bigcap_{x\in X(B)} x^{-1}(0),\quad \text{где}\quad X(B)\subset D_\infty(B)$$

Определение 2 ([4]). Линейное отображение ψ в. р.

X в в. р. $У$ будем называть решеточным (квазирешеточным), если $\psi(a \vee b) = \psi(a) \vee \psi(b)$ $(|\psi(|a| \vee |b|)| = |\psi(a)| \vee |\psi(b)|)$

Замечание. Если ψ квазирешеточно, то $|\psi(a)| \wedge |(b)|) = |\psi(a)| \wedge |\psi(b)|$ и $|\psi(a)| = |\psi(|a|)|$.

([4])

Определение 3. Пусть $X \subset D_\infty(B_1)$, $У \subset D_\infty(B_2)$. Будем говорить, что отображение $\varphi : X \to У$ задается отображением $\varphi^* : B_2 \to B_1$, если $\varphi(x) = x \circ \varphi^*$ $(x \in X)$.

Замечание. Если в. р. $X(B_1) \subset D_\infty(B_1)$, в. р. $У(B_2) \subset D_\infty(B_2)$, $\varphi : X(B_1) \to У(B_2)$ задается $\varphi^* : B_2 \to B_1$, тогда φ решеточно. Если в. р. $X(B_1)$ нормальна в $D_\infty(B_1)$, то φ^* непрерывно на $B_2 - \varphi^{*-1}[O(X(B_1))]$.

Определение 4 ([3]). Объект $A_1(A_2)$ категории K называется генератором (когенератором), если для любых $D_1, D_2 \in obK, \alpha_1 \neq \alpha_2 \in \mathrm{Mor}_K(D_1, D_2)$ найдется $\gamma \in \mathrm{Mor}_K(A_1, D_1)$ $(\delta \in \mathrm{Mor}_K(D_2, A_2))$, т. ч. $\alpha_1 \circ \gamma \neq \alpha_2 \circ \gamma$ $(\delta \circ \alpha_1 \neq \delta \circ \alpha_2)$.

В работе будут рассмотрены две категории:

— категория K_1, объектами которой являются внутренне нормальные в. р., а морфизмами — квазирешеточные отображения;

— категория K_2, объектами которой являются нормальные в. р. $X(B) \subset D_\infty(B)$ для различных B, а морфизмы $\alpha \in \mathrm{Mor}_{K_2} \times \times (X(B_1), У(B_2))$ задаются непрерывными отображениями $\alpha^* : B_2 \to B_1$, причем $[\alpha^*]^{-1}(x^{-1} \subset +\infty)) \in Z_\infty(B_2)$ $(x \in X(B_1))$.

Теорема 1. Для того, чтобы объект X являлся генератором в K_1, необходимо и достаточно, чтобы в X существовал ненулевой решеточный функционал.

Теорема 2. Для того, чтобы объект $X(B)$ являлся генератором в K_2, необходимо и достаточно, чтобы существовало непрерывное $\sigma^* : [0,1] \to B$, причем $\sigma^*[0,1] \cap O(X(B)) \neq \varnothing$, $\sigma^*[0,1] - 0(X(B)) \neq \varnothing$.

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$У = \{x \in C[0,1] : x(0) = 0\}, \ \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = 0.$$

Тогда $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Mor}_{K_2}(У, У)$ и $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Тогда существует $\gamma \in \mathrm{Mor}_{K_2}(X(B), У)$, т. ч. $\varphi_1 \circ \gamma \neq \varphi_2 \circ \gamma$, то есть $\gamma^* : [0,1] \to B$ требуемое.

Достаточность. Пусть $\sigma^* : [0,1] \to B$, по условию найдутся $a, в \in [0,1]$, т. ч.

$$\sigma^*(a) = O(X(B)), \ \sigma^*(b) \neq O(X(B)).$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Mor}_{K_2}(У(B_1), W(B_2))$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то есть $\alpha_1^*(t) \neq \alpha_2^*(t)$ для некоторого $t \in B_2$.

Пусть $B_1 \xrightarrow{\delta^*} [0,1]$, причем $\alpha_1^*(t) \in \mathrm{int}\,\delta^{*-1}(a)$ и $\delta^*(\alpha_2^*(t)) = b$. Положим $\beta^* = \sigma^* \mathrm{O} \delta^*$; поскольку $Z_\infty([0,1]) = \varnothing$, для $z \in Z_\infty(B)$ всегда $z \cap \sigma^*[0,1] = \varnothing$ и $У(B_1)$ нормально в $D_\infty(B_1)$, то $\beta(x) = x \mathrm{O} \beta^* \in У(B_1)$,

$$\beta \in \mathrm{Mor}_{K_2}(X(B), У(B_1)).$$

По построению $(\alpha_1 \mathrm{O} \beta)(x)(t) \neq (\alpha_2 \mathrm{O} \beta)(x)(t)$, где $x \in X(B)$ и $x(\sigma^*(b)) \neq 0$. Таким образом, $X(B)$ есть генератор.

Определение 5 ([3]). Генератор X категории K называется базисно-копрямым, если X удовлетворяет следующим условиям:

1) если $У \in obK$ есть генератор в K, то существуют $\alpha \in \mathrm{Mor}_K(У, X)$ и $\beta \in \mathrm{Mor}_K(X, У)$ т. ч. $\alpha \mathrm{O} \beta$ есть тождественное отображение (т. е. X является ретрактом $У$);

2) если генератор $У$ является ретрактом X, то X изоморфен $У$.

Теорема 3. В категории K_1 базисно-копрямым объектом является R; категория K_2 не обладает базисно-копрямыми объектами.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что R есть базисно-копрямой объект в K_1.

Предположим, что $X(B)$ есть базисно-копрямой объект в K_2. Пусть $У = \{x \in C[0,1] : o \in \mathrm{int}\,x^{-1}(0)\}$, тогда $У$ есть генератор в K_2, а $X(B)$ ретракт $У$, то есть существуют $B \xrightarrow{\beta^*} [0,1] \xrightarrow{\alpha^*} B$ причем β^* взаимно-однозначно и α^* на B. Поскольку R не является генератором в K_2, то B гомеоморфно $[0,1]$.

Пусть $a = O(X(B)) \in [0,1]$. Положим

$$W = \{x \in C[0,1] : \quad a \in \mathrm{int}\,x^{-1}(0)\}.$$

Получаем, что W генератор в K_2. По предположению найдутся $X(B) \xrightarrow{\delta} W \xrightarrow{\tau} X(B)$, причем $\delta^* \mathrm{O} \tau^*$ тождественное. Из этого следует, что $X(B) = W$.

Положим $V = \{x \in C[0,1] : x(a) = 0\}$. Аналогично найдутся $W \xrightarrow{\delta_1} V \xrightarrow{\tau_1} W$, такие что $\delta_1^* \mathrm{O} \tau^*$ есть тождественное, из чего следует $V = W$, что неверно.

Замечание. 3. Семадени ([3]) связывает существование проективных объектов с существованием базисно-копрямых объектов. Поэтому в смысле книги [3] в K_2 не существует проективных объектов. В случае категории K_1 определение проективного объекта совпадает с обычным определением проективного объекта.

Определение 6. Объект P категории K называется проективным, если для $\alpha \in \mathrm{Mor}_K(P, X)$ и отображения $\gamma \in \mathrm{Mor}_K(У, X)$, являющимся отображением на X, найдется $\beta \in \mathrm{Mor}_K(P, У)$, т. ч. $\nu \circ \beta = \alpha$.

Далее будет указан ряд проективных объектов (в смысле определения 6) в K_1 и K_2.

Предложение 1. Если B есть конечное множество, то $C(B)$ есть проективный объект в K_1, но не в K_2.

Предложение 2. Если B есть ретракт тихоновского куба (см., например, [3]), $t_0 = f^{-1}(0)$, $f = C(B)$, тогда $X(B) = \{x \in C(B) : t_0 \in \mathrm{int}\, x^{-1}(0)\}$ является проективным объектом в K_2, но не в K_1.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{Mor}_{K_2}(X(B), У(B_1))$, отображение $\nu \in \mathrm{Mor}_{K_2}(W(B_2), У(B_1))$ на $У(B_1)$, то есть $\alpha^* : B_1 \to B$ и $\nu^* : B_1 \to B_2$ взаимно-однозначно. Поскольку B есть ретракт тихоновского куба, то найдется $h^* : B_2 \to B$, т. ч. $\alpha^* = h^* \circ \nu^*$, и $Z_\infty(B) = \varnothing$; и $h \circ \nu = \alpha$, то есть $X(B)$ проективный объект в K_2.

Далее, существуют $t_n \in B \setminus t_0$, т. ч. $t_n \to t_0$. Пусть $У = \{x \in C(\alpha N) : \alpha N / N \in \mathrm{int}\, x^{-1}(0)\}$, где αN есть александровская бикомпактификация N (см., например, [3]); пусть $\tau : X(B) \to У$, где $\tau(x) = \{x(t_n)\}^\infty_{n=1}$.

Пусть $P[0,1] \xrightarrow{p} [0,1]$, где $P[0,1]$ есть абсолют $[0,1]$ ([3]). Выберем $S_k \in p^{-1}(r_k)$, где $\{r_k\}$ множество всех рациональных чисел из $[0,1]$, тогда $\bigcup\limits_1^\infty S_k$ плотно в $P[0,1]$.

Положим

$$W = \{y \in D_\infty(P[0,1]) : \frac{|y|}{|x - r_k| \circ P}(S_k < +\infty,$$

$$\{k \in N : \frac{|y|}{|x - r_k| \circ P}(S_k) \neq 0 \text{ конечное}\}.$$

Пусть $\delta(x) = \left\{ \dfrac{y}{|x - r_k| \circ P}(S_k) \right\}_{k=1}^{\infty}$, тогда $\delta \in \mathrm{Mor}_{K_1}(W, У)$ есть отображение на $У$.

Предположим, что существует $h \in \mathrm{Mor}_{K_1}(X(B), W)$, т. ч. $\delta \circ h = \tau$.

Найдутся $f_n \in X(B)$, для которых $f_n(t_k) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$ и $|f_n| \wedge |f_m| = 0$ $(m \neq n)$. Существует $\kappa_0 \in N$, $\kappa_0 > 1$, для которого $S_{k_0} \in |h(f_1)|^{-1}(0, +\infty)$.

$|h(f_1)| \wedge |h(f_{k_0})| = 0$, а $h(f_{k_0})(S_{k_0}) \neq 0$

(т.к. $\delta \circ h(f_{k_0}) = \tau(f_{k_0})$) и $h(f_1)(S_{k_0}) \neq 0$, т.е. $0 \neq$

$$\neq |h(f_1)| \wedge |h(f_{k_0})|.$$

Таким образом, не существует h, для которого $\delta \bigcirc h = \tau$ и $C(B)$ не есть проективный объект в K_1.

Предложение 3. Если B есть ретракт тихоновского куба, то $C(B)$ есть проективный объект в K_1, но не в K_2.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \mathrm{Mor}_{K_1}(C(B), X(B_1))$ $\nu \in \mathrm{Mor}_{K_1}(У(B_2), X(B_1))$, причем ν есть отображение на $X(B_1)$., Положим $x_0 = \alpha(1)$, $y_0 \in \nu(\alpha(1))$, где $1(t) = 1$ для $t \in B$. Существует взаимно-однозначное квазирешеточное γ:

$$\widetilde{X}(B_1) = \{x \in X(B_1) : |x| \leqslant n|x_0|\} \xrightarrow{\text{на}} C(\beta|x_0|^{-1}(0, +\infty)),$$

причем $\gamma(x_0) = 1$, тогда $\tau = \gamma \circ \alpha \in \mathrm{Mor}_{K_1}(C(B), C(\beta|x_0|^{-1}(0, +\infty))$ решеточное, так как $\tau(1) = 1$ ([4]) и найдется непрерывное $\tau^* : \beta|x_0^{-1}(0, +\infty) \to B$, задающее τ.

Аналогично существует взаимно-однозначное квазирешеточное отображение δ:

$$C(\beta|y_0|^{-1}(0, +\infty)) \xrightarrow{\text{на}} \widetilde{У}(B_2) = \{y \in У(B_2) : |y| \leqslant n|y_0|\}$$

Поскольку $\nu[\widetilde{У}(B_2)] \subset \widetilde{X}(B_1)$, то

$$\mu = \gamma \circ \nu \circ \delta \in \mathrm{Mor}_{K_1}(C(\beta|y_0|^{-1}(0, +\infty)), C(\beta|x_0|^{-1}(0, +\infty))).$$

Отображение μ решеточно и $\mu(1) = 1$, то есть μ задается

$$\mu^* : \beta|x_0|^{-1}(0, +\infty) \to \beta|y_0|^{-1}(0, +\infty).$$

Покажем, что μ^* взаимно-однозначно. Пусть

$$t_1, t_2 \in \beta|x_0|^{-1}(0, +\infty), t_1 \neq t_2.$$

Существует $x \in C(\beta|x_0|^{-1}(0, +\infty))$, т. ч. $x(t_1) = 0$, $x(t_2) = 1$. Найдется $x_1 \in X(B_1)$, $n \in N$, т. ч. $\gamma(x_1) = x$ и $|x_1| \leqslant n|x_0|$; существует $y \in У(B_2)$, для которого $\nu(y) = x_1$; тогда $|y| \wedge h|y_0| \in \widetilde{У}(B_2)$. Найдется $y_1 \in C(\beta|y_0|^{-1}(0, +\infty))$, т. ч. $\delta(y_1) = |y| \wedge h|y_0|$. Тогда $|\gamma \bigcirc \nu \bigcirc \delta(y_1)| = |\gamma \bigcirc \nu(|y| \wedge h|y_0|)| = |\gamma(|x_1| \wedge h|x_0|)| = |\gamma(x_1)| = |x|$, то есть $|\mu(y_1)| = x$ и $\mu(y_1)(t_1) = 0$, $\mu(y_1)(t_2) \neq 0$. Тогда $\mu^*(t_1) \neq \mu^*(t_2)$.

Поскольку B есть ретракт тихоновского куба, то найдется $h^* : \beta|y_0|^{-1}(0, +\infty) \to B$, т. ч. $\tau^* = h^* \bigcirc \mu^*$. Тогда $h(x) = x \bigcirc h^* \in C(B|y_0|^{-1}(0, +\infty))$, $\delta \bigcirc h = \alpha$. Таким образом,

$C(B)$ проективный объект в K_1, т. к. $1 \in C(B)$, то $C(B)$ не является проективным объектом в K_2.

Предложение 4. Пусть B есть бикомпакт, тогда существует такой экстремальный бикомпакт Q, что для любого непрерывного $\tau : B \to Q$ найдется $z \in Z_\infty(Q)$, т. ч. $\tau[B] \subset z$.

Теорема 4. Категории K_1, K_2 не обладают когенераторами.

Доказательство. Пусть $X(B)$ когенератор в K_2, Q есть экстремальный бикомпакт, указанный в предложении 4. Пусть T состоит из точек a и b. Положим ε^*_a, $\varepsilon^*_b : Q \to Q \times T$, где $\varepsilon^*_a(t) = t \times a$, $\varepsilon^*_b(t) = t \times b$; $\varepsilon_a(x) = x \circ \varepsilon^*_a$, $\varepsilon_b(x) = x \circ \varepsilon^*_b$. Тогда $\varepsilon_a, \varepsilon_b \in \mathrm{Mor}_{K_2}(D_\infty(Q \times \overline{T}, D_\infty(Q))$, $\varepsilon_a \neq \varepsilon_b$. Из предположения следует, что существует $\gamma \in \mathrm{Mor}_{K_2}(D_\infty(Q), X(B))$, т. ч. $\gamma \circ \varepsilon_a \neq \neq \nu \circ \varepsilon_b$. Но $\gamma^* : B \to Q$ и по выбору Q имеем $\gamma^*[B] \subset z \in Z_\infty(Q)$, что противоречит определению K_2. Таким образом, K_2 не содержит когенераторов.

Подобным образом этот факт доказывается и для K_1.

Замечание. В [3] З. Семадени связывает существование инъективных объектов с существованием когенераторов, поэтому в смысле [3] в K_1, K_2 не существует когенераторов.

Если исходить из обычного определения инъективного объекта, то можно показать, что в K_1 и K_2 нет инъективных объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулих Б. З. Некоторые вопросы теории линейных полуупорядоченных пространств. — «Изв. АН СССР. Сер. матем.», 1953, 17, № 4, 365—388.
2. Ленг С. Алгебра. М., 1968.
3. Semadeni Z. Banach spaces of continuous functions. I. W., 1971.
4. Колдунов А. В. Линейные отображения, близкие к решеточным. — В сб.: Современная алгебра, вып. 3. Изд-во ЛГУ, 1975, 70—74.

Г. Ч. КУРИННОЙ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ИЗОМЕТРИЧЕСКОЙ ВЛОЖИМОСТИ КОНЕЧНОМЕРНОЙ МОДУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ В МОДУЛЯРНУЮ СТРУКТУРУ С ДОПОЛНЕНИЯМИ

1. В настоящей работе все структуры предполагаются конечномерными. Знаки $+$, $\cdot$ или Σ, Π используются для обозначения структурных операций «объединения» и «пересече-

ния», а $\leqslant$, $<$ для обозначения отношений порядка и покрытия соответственно. Если L конечномерная структура, то $O(L)$ наименьший, $1(L)$ — наибольший ее элементы, а $d(L)$ — наибольшее целое число, для которого существует последовательность $0(L)=a_0<a_1<\ldots<a_{d(L)}=1(L)$.

Под изометрическим вложением $\varphi: L\to D$ конечномерной модулярной структуры L в модулярную структуру с дополнениями D понимаем структурный гомоморфизм φ, сохраняющий отношение покрытия, и такой, что $\varphi(0(L))=0(D)$; $\varphi(1(L))=1(L)$.

В каждой конечномерной модулярной структуре L вводим два отображения: если $x\in L$, то

$$x\to x^*=\begin{cases}\sum\limits_{y>x} y, \text{ если } x\neq 1(L),\\ 1(L), \text{ если } x=1(L)\end{cases}$$

$$x\to x_*=\begin{cases}\prod\limits_{y<x} y, \text{ если } x\neq 0(L),\\ 0(L), \text{ если } x=0(L).\end{cases}$$

Эти два отображения определяют множество $S(L)$ интервалов $[a, b]=Sca\subset L$, для которых $a^*=b$ и $b_*=a$. Полагая $Sca_1\leqslant Sca_2$ при $a_1\leqslant a_2$, превращаем $S(L)$ в структуру. Для конечной модулярной структуры L структура $S(L)$ рассматривалась автором в [4], [7]. Для конечномерных модулярных структур L X. Герман ввел и использовал структуру $S(L)$ в работах [5] и [6].

В статьях [4]—[7] проверены равенства $Sca+Scb=Sc(a+b)$; $Sca\cdot Scb=Sc(a^*\cdot b^*)_*=[(a^*\cdot b^*)_*, a^*\cdot b^*]$.

Для векторного пространства V через $\widetilde{V}$ обозначаем его структуру подпространств; $<x, y, \ldots>$— линейная оболочка векторов $x, y, \ldots\in V$; can: $V\to V/W$ линейное отображение, ставящее в соответствие каждому вектору из V его факторкласс в факторпространстве V по подпространству W.

Пусть U_1, U_2 — левые векторные пространства над телами K_1 и K_2 соответственно, $\mu: K_1\to K_2$ — гомоморфизм тел. Отображение $\lambda: U_1\to U_2$ называем полулинейным относительно μ (или просто «полулинейным», если не может возникнуть недоразумений), если для любых $x, y\in U_1$; $\alpha, \beta\in K_1$ выполняется равенство

$$\lambda(\alpha x+\beta y)=\mu(\alpha)\lambda(x)+\mu(\beta)\lambda(y).$$

В случае, когда λ переводит линейно независимые векторы из U_1 в линейно независимые векторы из U_2 и размерности

U_1, U_2 совпадают, полулинейное отображение λ индуцирует изометрическое вложение $\overline{\lambda}: \overline{U}_1 \to \overline{U}_2$. λ определяется по правилу: как только $x, y, ... \in \overline{U}_1$, то

$$\overline{\lambda}(<x, y, ...>) = <\lambda(x), \lambda(y), ...>.$$

Аналогично основной теореме проективной геометрии (см. [3], теор. 2.26) проверяются следующие утверждения.

Если $\dim U_1 = \dim U_2 \geqslant 3$ и $\sigma: \overline{U}_1 \to \overline{U}_2$ — изометрическое вложение, то существует гомоморфизм $\mu: \kappa_1 \to \kappa_2$ и полулинейное относительно μ отображение λ, такие, что $\overline{\lambda} = \sigma$.

Если $\dim U_1 = \dim U_2 \geqslant 2$; μ_1, $\mu_2: \kappa_1 \to \kappa_2$ — гомоморфизмы тел; λ_1, λ_2 — полулинейные относительно μ_1, μ_2 соответственно отображения, переводящие линейно независимые векторы из U_1 в линейно независимые векторы из U_2 и $\overline{\lambda}_1 = \overline{\lambda}_2$, то существует $t \in \kappa_2$ такое, что для всех $x \in U_1$, $\alpha \in \kappa_1$ выполняются равенства $\lambda_2(x) = t \cdot \lambda_1(x)$, $\mu_2(\alpha) = t \cdot \mu_1(\alpha) \cdot t^{-1}$.

Вопрос об изометрической вложимости конечномерной модулярной структуры в модулярную структуру с дополнениями рассматривался М. Холлом и Р. П. Дилуорсом в [1]. Его важность отмечена Г. Биркгофом (см. [2], проблема 55). Сформулируем необходимые условия для изометрической вложимости конечномерной модулярной структуры в модулярную структуру с дополнениями, доказанные в [1].

А. Любая конечномерная модулярная структура L может быть разложена в подпрямое произведение простых (не допускающих собственных отношений конгруэнтности) модулярных структур. Если L является подпрямым произведением модулярных структур L_1, L_2, ..., то L изометрически вложима в модулярную структуру с дополнениями тогда и только тогда, когда этим свойством обладают структуры L_1, L_2, ...

Б. Простая конечномерная модулярная структура может быть изометрически вложена лишь в простую модулярную структуру с дополнениями.

В дальнейшем L обозначает конечномерную модулярную структуру, которая может быть изометрически вложена в модулярную структуру с дополнениями.

В. Если L проста, $S(L)$ содержит более одного элемента, $Sca \in S(L), d(Sca) \geqslant 3$ и Sca прост, то Sca является дезарговой проективной геометрией.

Г. Если Sca, $Scb \in S(L)$ различные дезарговы проективные геометрии, координатизуемые телами κ_a и κ_b, структура L проста, то характеристики тел κ_a и κ_b должны совпадать.

Д. Пусть Sca, $Scb \in S(L)$ различные проективные геометрии, $d([a, b^*]) = 2$. Если элементы $x_1, x_2, x_3, x_4 \in L$; $x_1, x_2, x_3, x_4 > a$ и x_1, x_2, x_3, x_4 являются четверкой гармонических точек в Sca, то x_1, x_2, x_3, x_4 являются четверкой гармонических точек в проективной геометрии, двойственной к Scb.

Х. Германом в [6] доказано:

Е. Если L — квазипланарная модулярная структура (т. е. для всех $Sca \in S(L)$ выполняется $d(Sca) \leqslant 2$), то она (может быть изометрически вложена в модулярную структуру с дополнениями.

В следующем разделе L обозначает простую конечномерную модулярную структуру, для которой существует левое векторное пространство V над телом κ и изометрическое вложение $\varphi : L \to \overline{V}$. Предполагаем, что для каждого $Sca \in S(L)$, $d(Sca) \geqslant 3$ определено тело κ_a, левое векторное пространство V_a над κ_a и структурный изоморфизм $\sigma_a : Sca \to \overline{V}_a$. Полулинейные отображения, индуцирующие изометрические вложения

$$\varphi \cdot \sigma_a^{-1} : \overline{V}_a \to [\varphi(a), \varphi(a^*)] \cong \overline{\varphi(a^*)/\varphi(a)}$$

будем обозначать через λ_a, а соответствующие им гомоморфизмы $\kappa_a \to \kappa$ через μ_a.

II. На множестве $\{Sca \in S(L) \mid d(Sca) \geqslant 3\}$ введем отношение «быть нижним соседом» или нс. Будем считать, что Sca нс Scb, если $d(Sca) \geqslant 3$, $d(Scb) \geqslant 3$ и $b^* \geqslant a^*$, $d([b, a^*]) \geqslant 2$.

Теорема 1. Если Sca нс Scb, то существует полулинейное отображение $\lambda_{a,b} : V_a \to V_b$ такое, что для всех $x \in V_a$ выполняется равенство

$$\sigma_a^{-1}(<x>) + b = \sigma_b^{-1}(<\lambda_{a,b}(x)>). \qquad (1)$$

Доказательство. Полулинейное отображение $\lambda_{a,b}$ мы будем искать в виде композиции

$$\begin{tikzcd} V_a \arrow[r, "\lambda_{a,b}"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & V_b \\ V_a/\sigma_a(b) \arrow[r, "\lambda'_{a,b}"] & \sigma_b(a^*) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

где $\lambda'_{a,b}$ переводит линейно независимые векторы из $V_a/\sigma_a(b)$ в линейно независимые векторы из $\sigma_b(a^*)$, а i здесь и в дальнейшем обозначает вложение.

Изометрическое вложение φ определяет два полулинейные отображения λ'_a и λ'_b, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
V_a \arrow[r, "can"] \arrow[d, "\lambda_a"'] & V_a/\sigma_a(b) \arrow[d, "\lambda'_a"] \\
\varphi(a^*)/\varphi(a) \arrow[r, "can"] & \varphi(a^*)/\varphi(b)
\end{tikzcd}$$

и диаграмма

$$\begin{tikzcd}
V_b \arrow[d, "\lambda_в"'] & \sigma b(a^*) \arrow[l, "i"'] \arrow[d, "\lambda'_b"] \\
\varphi(b^*)/\varphi(b) & \varphi(a^*)/\varphi(b). \arrow[l, "i"']
\end{tikzcd}$$

Записав равенства

$$\bar{\lambda}'_a = \varphi \cdot \sigma_a^{-1} \,|[\sigma_a(b), \sigma_a(a^*)];$$

$$\bar{\lambda}'_b = \varphi \cdot \sigma_b^{-1} \,|[\sigma_b(b), \sigma_b(a^*)]$$

видим, что множители, с точностью до которых определяются λ_a и λ_b, могут быть выбраны так, чтобы $\mathrm{Im}\lambda'_a = \mathrm{Im}\lambda'_b$. В этом случае можно положить $\lambda'_{a,\,b} = (\lambda'_b)^{-1} \cdot \lambda'_a$.

Очевидно, для того, чтобы $\lambda_{a,\,b}$ удовлетворяло условию (1), достаточно чтобы $\lambda'_{a,\,b}$ переводило линейно независимые векторы из $V_a/\sigma_a(b)$ в линейно независимые векторы из $\sigma_b(a^*)$ и для всех $x \in V_a/\sigma_a(b)$ выполнялось равенство $\sigma_a(<x>) = \sigma_b(<\lambda'_{a,\,b}(x)>)$.

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 и ее доказательства вытекает

Следствие 1. Если определено полулинейное отображение $\lambda_{a,\,b}: V_a \to V_b$, удовлетворяющее (1), то множитель, с точностью до которого определяется λ_b можно выбрать так, чтобы была коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
V_a \arrow[rr, "\lambda(a,b)"] \arrow[d, "\lambda_a"'] & & V_b \arrow[d, "\lambda_b"] \\
\varphi(a^*)/\varphi(a) \arrow[r, "can"] & \varphi(a^*)/\varphi(b) \arrow[r, "i"] & \varphi(b^*)/\varphi(b).
\end{tikzcd}$$

В дальнейшем эту диаграмму будем обозначать через $D(a, b)$.

Отметим также

Следствие 2. Если $\lambda_{a,\,b}(x) \neq 0$ для одного какого-то вектора из V_a и $D(a, b)$ на этом векторе коммутативна, то она коммутативна на всех векторах из V_a.

Будем называть последовательность $Sca_1, Sca_2, ..., Sca_n \in S(L)$ допустимой, если для любого $i=1, 2, ..., n-1$ Sca_i нс Sca_{i+1}.

Если последовательность $Sca_1, ..., Sca_n$ допустима и

$$\lambda_{a_1,a_2}, \cdot\cdot\cdot\cdot, \lambda_{a_{n-1},a_n}$$

определены, то будем обозначать

$$\Lambda(a_1,a_2, \cdot\cdot\cdot, a_n) = \\ = \lambda_{a_{n-1},a_n} \cdot\cdot\cdot\cdot \cdot \lambda_{a_1,a_2}.$$

Из доказательства теоремы 1 и следствия 2 вытекает

Следствие 3. Пусть даны две допустимые последовательности

$$Sca, Sca_1, ..., Sca_n, Scb;$$

$$Sca, Scb_1, ..., Scb_m, Scb$$

и $\Lambda(a, a_1, ..., a_n, b)(x) = \Lambda(a, b_1, ..., b_m, b)(x) \neq 0$ для некоторого вектора $x \in V_a$. Тогда $\Lambda(a, a_1, ..., a_n, b) = \Lambda(a, b_1, ..., b_m, b)$.

Теорема 2. Для всех пар Scc нс Scd одновременно могут определены λ_{cd} так, чтобы для любых двух допустимых последовательностей.

$$Scu, Scu_1, ..., Scu_n, Sca;$$

$$Scu, Scv_1, ..., Scv_m, Sca$$

выполнялось равенство

$$\Lambda(u, u_1, ..., u_n, a) = \Lambda(u, v_1, ..., v_m, a). \qquad (2)$$

Доказательство теоремы проведем индукцией по $d([0(S), Sca])$.

Для всех $Sca > Sc0(L)$, $Sc0(L)$ нс Sca зафиксируем множитель, с точностью до которого определяется $\lambda_{0(L), a}$ произвольным образом.

Будем считать, что для некоторого $p=1, 2, ...$ и для всех Scc нс Scd, $d([0(S), Scd]) < p$ уже выбраны $\lambda_{c, d}$ так, что [2] справедливо в каждом случае, когда $d([0(S), Sca]) < p$.

Пусть $d([0(S), Sca]) = p$. Если для двух допустимых последовательностей.

$$Scu, Scu_1, ..., Scu_n, Sca;$$

$$Scu, Scv_1, ..., Scv_m, Sca$$

определены $\Lambda(u, u_1, .., u_n, a)$, $\Lambda(u, v_1, v_2, ..., v_m, a)$ и $\Lambda(u, u_1, ..., u_n, a) \neq 0$, то для некоторого $x \in V_u$ справедливо $\sigma_u^{-1}(<x>)+a>a$. Записав неравенства $u^* \leqslant u_n^* \leqslant a^*$, $u \leqslant a < u_n^*$, видим, что $\sigma_u^{-1}(<x>)+a<u_n^*$, $\sigma_u^{-1}(<x>)+a<V_m^*$ и $u_n^* \cdot V_m^* > a$. В связи с этим на множестве

$$M = \{Scc \in S(L) \,|\, Scc \neq Sca,\ Scc \text{ нс } Sca\}$$

введем отношение эквивалентности $\sim$, полагая $Scc_1 \sim Scc_2$, если существует конечная последовательность

$$Scc_1 = Scd_0,\ Scd_1,\ ...,\ Scd_r = Scc_2$$

элементов из M такая, что $d^*_{i-1} \cdot d^*_i > a$ $(i=1,2, ..., r)$.

Пусть N — не пустой класс эквивалентных $Scc \in M$; T — множество $Scc \in S(L)$, которые могут быть представлены в виде пересечения конечного числа элементов из N. Так как L конечномерна, то $T \subset S(L)$ имеет минимальный элемент

$$Scb = \prod_{Sc \in N} Scc.$$

Лемма 1. Если левая и правая части (2) определены и не нулевые, то для некоторых $Scc, ..., Scd$ определены

$$\Lambda(u, c, ..., d, (u_n^* \cdot u_m^*)_*, u_n, a),$$

$$\Lambda(u, c, ..., d, (u_n^* \cdot u_m^*)_*, v_m, a).$$

Прежде чем доказывать лемму 1, сформулируем ее в более общем виде:

Если $\Lambda(u_0, u_1, ..., u_n, a)$ определено, отлично от нуля и Scv_m нс Sca, $Scu_0 \leqslant Scv_m$, то существует допустимая последовательность

$$Scu_0,\ Scv_1,\ ...,\ Scv_m,\ Sca.$$

А это утверждение докажем индукцией по n.

При $n=0$ будет $d([a, u_0^*]) \geqslant 2$ и неравенства $u_0 \leqslant v_m \leqslant \leqslant a < u_0^* \leqslant v_m^*$ показывают, что Scu_0 нс Scv_m нс Sca.

Пусть утверждение верно при $n=\kappa$ и докажем его при $n=\kappa+1$. Так как $v_m^*+a \geqslant u_0^*+a>a$, то $Scv_m \cdot Scu_{\kappa+1}$ нс Scv_m, $Scv_m \cdot Scu_{\kappa+1}$ нс $Scu_{\kappa+1}$, $Scu_0 \leqslant Scu_{\kappa+1} \cdot Scv_m$ и существует допустимая последовательность

$Scu, ..., Scu_{\kappa+1} \cdot Scv_m, Scv_m, Sca$. Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 вытекает

Лемма 2. Если (2) справедливо для всех $Scu \in T$, то (2) справедливо для всех $Scu \in S(L)$.

Действительно, используя лемму 1 и предположение индукции, для некоторых $\mathrm{Sc}c$, ..., $\mathrm{Sc}d$ справедливо

$$\Lambda(u, c \ldots, d, (u_n^* \cdot v_m^*)_*, \ u_n) = \Lambda(u, u_1 \ldots, u_n).$$

Так как $\mathrm{Sc}(u_n^* \cdot v_m^*)_* \in T$, то

$$\Lambda((u_n^* \cdot v_m^*)_*, u_n, a) = \Lambda((u_n^* \cdot v_m^*)_*, v_m, \ a).$$

Равенство

$$\Lambda(u, c, \ldots, d, \ (u_n^* \cdot v_m^*)_*, v_m) = \Lambda(u, v_1, \ldots, v_m)$$

следует из предположения индукции. Поэтому мы можем записать $\Lambda(u, u_1, \ldots, u_n, a) = \Lambda(u, c, \ldots, \ d, \ (u_n^* \cdot v_m^*)_*, u_n, a) = \Lambda(u, c, \ldots, d, (u_n^* \cdot v_m^*)_*, \ v_m, \ a) = \Lambda(u, v_1, \ldots, v_m)$.

Лемма 3. $\mathrm{Sc}c \in T \to \ d(\mathrm{Sc}c) \geqslant 3$.

Доказательство. Если $d([a, \ c^*]) \geqslant 2$, то утверждение следует из неравенств $c < a < c^*$.

Если $d([a, c^*]) = 1$, то существуют $\mathrm{Sc}c_1$, $\mathrm{Sc}c_2 \in N$, $\mathrm{Sc}c_1 \geqslant \mathrm{Sc}c_2$ такие, что $\mathrm{Sc}c \leqslant \mathrm{Sc}c_1 \cdot \mathrm{Sc}c_2 < \mathrm{Sc}c_2$. В этом случае утверждение следует из неравенств

$$c \leqslant (c_1^* \cdot c_2^*)_* < c_2 < a < c^*.$$

Если $a = c^*$, то существуют $\mathrm{Sc}c_1$, $\mathrm{Sc}c_2$, $\mathrm{Sc}c_3 \in N$ такие, что $\mathrm{Sc}c_1 \leqslant \mathrm{Sc}c_2$, $\mathrm{Sc}c_1 \cdot \mathrm{Sc}c_2 \leqslant \mathrm{Sc}c_3$ и $\mathrm{Sc}c \leqslant \mathrm{Sc}c_1 \cdot \mathrm{Sc}c_2 \cdot \mathrm{Sc}c_3$. В этом случае утверждение следует из неравенств

$$c \leqslant (c_1^* \cdot c_2^* \cdot c_3^*)_* < (c_1^* \cdot c_2^*)_* < c_1 < a.$$

Лемма 4. Для любого $\mathrm{Sc}c \in T$ существует $\mathrm{Sc}\,u \in T$, для которого последовательность $\mathrm{Sc}b$, $\mathrm{Sc}u$, $\mathrm{Sc}c$ допустима и $\Lambda(b, u, c) \neq 0$.

Доказательство. Утверждение леммы очевидно, если $\mathrm{Sc}b$ нс $\mathrm{Sc}c$. Неравенства $c < a \leqslant b^*$ показывают эквивалентность условий $\mathrm{Sc}b$, $\overline{\text{нс}}$ $\mathrm{Sc}c$ и $c < b^*$. Из леммы 3 следует, что $c < b^* \to \mathrm{Sc}c$ нс $\mathrm{Sc}a$. Так как $\mathrm{Sc}b \neq \mathrm{Sc}c$, то существует $\mathrm{Sc}d$ нс $\mathrm{Sc}a$ такой, что $\mathrm{Sc}d \geqslant \mathrm{Sc}c$, $d^* \cdot c^* > a$. Записав это в виде $(d^* \cdot c^*)_* < c < b^* < c^* \cdot d^* < c^*$, видим $\mathrm{Sc}b$ нс $\mathrm{Sc}u = \mathrm{Sc}c \cdot \mathrm{Sc}d$ нс $\mathrm{Sc}c$. Вследствие $b^* + c = b^* \neq c$ справедливо $\Lambda(b, u, c) \neq 0$.

Лемма 5. Для каждого $\mathrm{Sc}c \in T$ можно определить λ_c так, чтобы для всех $\mathrm{Sc}c_1$ нс $\mathrm{Sc}c_2$; $\mathrm{Sc}c_1$, $\mathrm{Sc}c_2 \in T$ диаграмма $D(c_1, c_2)$ была коммутативна.

Доказательство. Произвольным образом определим λ_b. Лемма 4 позволяет определить для всех $\mathrm{Sc}c \in T$ λ_c так, чтобы диаграмма $D(b, c)$ была коммутативной.

Пусть $\mathrm{Sc}c_1$, $\mathrm{Sc}c_2 \in T$. В силу леммы 4 существуют $\mathrm{Sc}u_1$, $\mathrm{Sc}u_2$, для которых

$$\Lambda(b, u_1, c_1) \neq 0, \ \Lambda(b, u_2, c_2) \neq 0.$$

Отсюда последовательность Scb, Scu_1, Scc_1, Scc_2 допустима и $\Lambda(b, u_1, c_1, c_2) \neq 0$.

Так как диаграммы

$$\begin{tikzcd}
V_b \arrow[rr, "\Lambda(b,u_1,c_1)"] \arrow[d, "\lambda_b"'] & & V_{c_1} \arrow[d, "\lambda_{c_1}"] \\
\varphi(b^*)/\varphi(b) \arrow[r, "can"] & \varphi(b^*)/\varphi c_1 \arrow[r, "i"] & \varphi(c_1{}^*)/\varphi(c_1).
\end{tikzcd}$$

и

$$\begin{tikzcd}
V_b \arrow[rr, "\Lambda(b,u_2,c_2)"] \arrow[d, "\lambda_b"'] & & V_{c_2} \arrow[d, "\lambda_{c_2}"] \\
\varphi(b^*)/\varphi(b) \arrow[r, "can"] & \varphi(b^*)/\varphi(c_2) \arrow[r, "i"] & \varphi(c_2{}^*)/\varphi(c_2)
\end{tikzcd}$$

коммутативны по определению λ_{c_1} и λ_{c_2}, то и $D(c_1, c_2)$ коммутативна.

Лемма 5 доказана.

Зафиксируем множитель, с точностью до которого определяется $\lambda_{a_0 a}$, для некоторого $Sca_0 \in N$. Определим λ_a так, чтобы $D(a_0, a)$ была коммутативной.

Л е м м а 6. Для всех $Scc \in N$ существуют $\lambda_{c,a}$ такие, что диаграммы $D(c, a)$ коммутативны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению N для любого $Scc \in N$ существует конечная последовательность

$$Sca_0 = Scd_0, \ Scd_1, \ \ldots, \ Scd_n = Scc \in N$$

такая, что $d^*_{i-1} \cdot d_i{}^* > a$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Применим индукцию по $n \cdot \lambda_{aa}$ определено так, что утверждение леммы справедливо при $n = 0$. Допустим, λ_c определено для всех $Scc \in N$, для которых $n \leqslant к$ и определим для тех, у которых $n = к + 1$. Так как отображения $\lambda_{x,y}$ для всех Scx нс Scy; Scx, $Scy \in S(L)$ полулинейны относительно изоморфизмов $\mu_{x,y} : к_x \to к_y$, то, обозначив $d = (d_к{}^* \cdot d_{к+1}{}^*)_*$, имеем $d^* + a \neq a$, $\Lambda(d, d_к, a) \neq 0$. Поэтому $\lambda_{d_{k+1}, a}$ можно определить так, чтобы для некоторого вектора $x \in V_d$ выполнялось $\Lambda(d, d_к, a)(x) = \Lambda(d, d_{к+1}, a)(x) \neq 0$.

Тогда коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
V_d & & \xrightarrow{\Lambda(d,d_{k+1},a)} & & V_a \\
\downarrow{\lambda_d} & & & & \downarrow{\lambda_a} \\
\varphi(d^*)/\varphi(d) & \xrightarrow{can} & \varphi(d^*)/\varphi(a) & \xrightarrow{i} & \varphi(a^*)/\varphi(a)
\end{array}$$

влечет коммутативность $\lambda(d_{k+1}, a)$.

Лемма 6 доказана.

Когда $\lambda_{0,a}$ определены для всех $Scc \in N$, как указано при доказательстве леммы 6, равенство (2) будет выполняться для всех $Scu \in T$. Доказательство теоремы 2 завершается использованием леммы 2.

Условия изометрической вложимости конечномерной модулярной структуры L в модулярную структуру с дополнениями, сформулированные теоремами 1 и 2, являются достаточными, если $S(L)$ квазипланарна или дистрибутивна. Доказательство этих утверждений будет опубликовано в другой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall M., Dilworth R. P. The imbedding problem for modular lattices. — «Ann Math.», 1944, 45, N 3, 450—456.
2. Биркгоф Г. Теория структур. М., 1952.
3. Артин Э. Геометрическая алгебра. М., 1969.
4. Куринной Г. Ч. Об одном классе конечных модулярных решеток. — В сб.: Тр. зонального объединения матем. кафед. пед. ин-тов Сибири вып. 2, Омск, 1972, 64—74.
5. Herrman Ch. S-verklebte Summen von Verbanden. — «Math. Z.», 1973, 130, 255—274.
6. Herrman Ch. Quasiplanare Verbanden. — «Arch. Math.», 1973, 24, 240—246.
7. Куринной Г. Ч. Новое доказательство теоремы Дилуорса. — «Вестник Харьковского ун-та. Математика», вып. 38. Харьков, 1973, № 93, 11—15.

В. В. ПАШЕНКОВ

О ВЛОЖЕНИЯХ ДИСТРИБУТИВНЫХ СТРУКТУР В БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

Переманс [1] привел непосредственное доказательство (не используя теоремы о представлениях дистрибутивных структур) того факта, что любая дистрибутивная структура может быть изоморфно вложена в булеву алгебру. Вместе с тем известно [4], что любая бесконечно дистрибутивная структура может быть полно (то есть с сохранением всех существующих в ней точных верхних и нижних граней) вложена в булеву алгебру. Целью настоящей заметки является доказательство того, что при указанном в [1] вложении сохраняются все существующие дистрибутивные грани. Отсюда, в частности, вытекает результат Фунаямы [4]. Доказательство будет проведено с использованием компонентного частично упорядоченного множества (см. [2], [3], [5]).

Пусть P есть частично упорядоченное множество (ч. у. множество). Операции взятия точной верхней и нижней грани в P (если таковые существуют) будем обозначать $a \overset{P}{+} b$ и $a \overset{P}{-} b$ или $\sup^P\{a_\alpha\}$ и $\inf^P\{a_\alpha\}$ соответственно; $a, b \in P$; $\{a_\alpha\} \subset P$. Наименьший элемент ч. у. множества P будем называть нулем и обозначать через O_P. Там, где это не может привести к недоразумению, мы будем упрощать нашу систему обозначений и вместо $a \overset{P}{+} b$; $a \overset{P}{\cdot} b$; $\sup^P\{a_\alpha\}$; $\inf^P\{a_\alpha\}$; O_P будем просто писать $a+b$; $a\cdot b$; $\sup\{a_\alpha\}$; $\inf\{a_\alpha\}$; O соответственно. Под словом мономорфизм мы будем понимать взаимно однозначное и взаимно изотонное вложение одного ч. у. множества в другое. Для любого элемента $p \in P$ обозначим главный идеал, порожденный элементом p, через p^+;

Определение 1. Пусть L — дистрибутивная структура. Обозначим через R множество всех пар элементов $\{(a, b)\}$, где $a, b \in L$. На множестве R определим следующее бинарное отношение: $(a, b) \lhd (c, d) \longleftrightarrow a \leqslant b+c$ и $ad \leqslant b$.

Лемма 1. Если для элементов u, v, h дистрибутивной структуры выполняются соотношения $u \leqslant v+h$ и $uh \leqslant v$, то $u \leqslant v$.

Доказательство. Действительно,

$$u = u\cdot u \leqslant u(v+h) = uv + uh \leqslant v+v = v.$$

Лемма 2 (см. [1]). Отношение $\lhd$ на множестве R (определение 1) есть отношение квазипорядка.

Доказательство. Рефлексивность отношения $\lhd$ очевидна. Докажем его транзитивность. Пусть $(a, b) \lhd (c, d)$ и $(c, d) \lhd (p, s)$. По определению, имеем $a \leqslant b+c$; $ad \leqslant b$; $c \leqslant d+p$; $cs \leqslant d$. Используя эти неравенства, получим

$$a \leqslant b+c \leqslant b+d+p = (b+p)+d, \tag{1}$$

$$ad \leqslant b \leqslant b+p, \tag{2}$$

$$as \leqslant (b+c)s = bs+cs \leqslant b+d, \tag{3}$$

$$(as)d=(ad)s\leqslant bs\leqslant b. \qquad (4)$$

Полагая в соотношениях (1), (2) $a=u$; $b+p=v$; $d=h$, а в соотношениях (3), (4) $as=u$; $b=v$; $d=h$ и используя лемму 1, получим $a\leqslant b+p$ и $as\leqslant b$, что и означает $(a, b) \lhd (p, s)$.

Замечание 1. Введем во множестве R бинарное отношение $\sim$, положив $(a, b)\sim(c, d)$, если $(a, b) \lhd (c, d)$ и $(c, d) \lhd (a, b)$. В силу теоремы 3 (из [6], стр. 20) $\sim$ есть отношение эквивалентности. Обозначим через $\overline{L}$ фактор-множество $R/\sim$. Пусть $\overline{(a, b)}$ обозначает класс элементов множества R, содержащий элемент $(a, b)\in R$. Положив $\overline{(a, b)}\leqslant\overline{(c, d)} \leftarrow\rightarrow (a, b) \lhd (c, d)$ для произвольных элементов $\overline{(a, b)}$, $\overline{(c, d)}\in\overline{L}$, мы превратим $\overline{L}$ в ч. у. множество.

Лемма 3. Для любой дистрибутивной структуры L элемент $\overline{(a, b)}$ является нулем в $\overline{L}$ тогда и только тогда, когда для элементов $a, b\in L$ выполняется неравенство $a\leqslant b$.

Доказательство. Пусть $a\leqslant b$. Тогда для любого элемента $\overline{(c, d)}\in\overline{L}$ мы имеем $a\leqslant b+c$ и $ad\leqslant b$, то есть $\overline{(a, b)}\leqslant\overline{(c, d)}$. Значит, $\overline{(a, b)}=O_{\overline{L}}$. Обратно, если $\overline{(a, b)}=O_{\overline{L}}$, то $\overline{(a, b)}\leqslant\overline{(b, b)}$ то есть $(a, b) \lhd (b, b)$ во множестве R, откуда, в частности $a\leqslant b+b=b$.

Определение 2. Подмножества X, Y ч. у множества P назовем дизъюнктными (обозначение X_*Y), если для любых элементов $x\in X$, $y\in Y$ выполняется соотношение $x^+\cap y^+=\varnothing$. Наибольшее подмножество дизъюнктивное к подмножеству $X\subset P$ назовем дизъюнктным дополнением множества X и обозначим через X_*. Подмножество $X\subset P$ назовем компонентой, если $X_{**}=(X_*)_*=X$.

Определение 3. Ч. у. множество P назовем компонетным, если для любого $p\in P$ главный идеал p^+ есть компонента.

Определение 4. Подмножество B булевой алгебры A назовем плотным, если нулевой элемент алгебры A не входит в B и для всякого элемента $a\in A$; $a\neq O_A$ найдется такой элемент $b\in B$, что $b\leqslant a$.

Замечание 2. В [5] (см. также [2], [3]) доказано, что упорядоченная по включению совокупность всех компонент $K(P)$ компонентного ч. у. множества P является булевой алгеброй, причем соответствие $p\xrightarrow{\psi}p^+$ мономорфно вкладывает ч. у. множество P в булеву алгебру $K(P)$. При этом множество $\psi(P)$ плотно в $K(P)$.

Лемма 4. Для любой дистрибутивной структуры

L ч. у. множество $\widetilde{L}=\overline{L}\setminus\{O_{\overline{L}}\}$ является компонентным.

Доказательство. Включение $\overline{(c,\ d)}_{**}\supset\overline{(c,\ d)}^{+}$ — очевидно при любом элементе $\overline{(c,\ d)}\in\widetilde{L}$. Для доказательства обратного включения предположим, что элемент $\overline{(a,\ b)}\in\widetilde{L}$ удовлетворяет соотношению $\overline{(a,\ b)}\in\overline{(c,\ d)}_{**}\setminus\overline{(c,\ d)}^{+}$. Поскольку $(a,\ b)$ не меньше $(c,\ d)$, справедливо хотя бы одно из следующих двух соотношений: 1) a не меньше $b+c$; 2) ad не меньше b. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1) Пусть a не меньше $b+c$. Тогда в силу леммы 3 элемент $\overline{(a,\ b+c)}\neq O_{\overline{L}}$, то есть $\overline{(a,\ b+c)}\in\widetilde{L}$. Покажем, что

$$\overline{(a,\ b+c)}\in\overline{(c,\ d)}_{*},\tag{5}$$

то есть $\overline{(a,\ b+c)}^{+}\cap\overline{(c,\ d)}^{+}=\varnothing$. Допустив противное, мы можем найти такой элемент $\overline{(u,\ v)}\in\widetilde{L}$, что $\overline{(u,\ v)}\leqslant\overline{(a,\ b+c)}$ и $\overline{(u,v)}\leqslant\overline{(c,\ d)}$, откуда, в силу определения порядка во множестве $\overline{L}$, будем, в частности, иметь $u\leqslant v+c$ и $u(b+c)\leqslant v$. Из последнего неравенства получим $uc\leqslant u(b+c)\leqslant v$, что вместе с неравенством $u\leqslant v+c$ дает, в силу леммы 1, $u\leqslant v$, то есть, по лемме 3, $\overline{(u,\ v)}=O_{\overline{L}}$, а это противоречит выбору элемента $\overline{(u,\ v)}\in\widetilde{L}$. Таким образом, (5) доказано. Кроме того, очевидно, что $\overline{(a,\ b+c)}\leqslant\overline{(a,\ b)}\in\overline{(c,\ d)}_{**}$. Следовательно, $\overline{(a,\ b+c)}\in\overline{(c,\ d)}_{**}$, то есть $\overline{(a,\ b+c)}\in\overline{(c,\ d)}_{*}\cap\overline{(c,\ d)}_{**}$. Противоречие.

2) Пусть ad не меньше b, то есть $\overline{(ad,\ b)}\neq O_{\overline{L}}$; $\overline{(ad,\ b)}\in\widetilde{L}$. Покажем, что

$$\overline{(ad,\ b)}\in\overline{(c,\ d)}_{*},\tag{6}$$

то есть $\overline{(ad,\ b)}^{+}\cap\overline{(c,\ d)}^{+}=\varnothing$. Допустив противное, мы можем найти такой элемент $\overline{(u,\ v)}\in\widetilde{L}$, что $\overline{(u,\ v)}\geqslant\overline{(ad,\ b)}$ и $\overline{(u,\ v)}\leqslant\overline{(c,\ d)}$, откуда, в частности, получим $u\leqslant v+ad\leqslant v+d$ и $ud\leqslant v$. Значит, ввиду лемм 1 и 3, $\overline{(u,\ v)}=O_{\overline{L}}$, то есть $\overline{(u,\ v)}\notin\widetilde{L}$, что противоречит выбору элемента $\overline{(u,\ v)}$. Этим (6) доказано. Очевидно, что $\overline{(ad,\ b)}\leqslant\overline{(a,\ b)}\in\overline{(c,\ d)}_{**}$, следовательно, $\overline{(ad,\ b)}\in\overline{(c,\ d)}_{**}$, то есть $\overline{(ad,\ b)}\in\overline{(c,\ d)}_{*}\cap\overline{(c,\ d)}_{**}$. Противоречие.

Таким образом, $\overline{(c,\ d)}_{**}\subset\overline{(c,\ d)}^{+}$, и компонентность ч. у. множества $\widetilde{L}$ доказана.

Следствие 1. На основании леммы 4 и замечания 2 заключаем, что отображение $\psi:\overline{(a,\ b)}\longrightarrow\overline{(a,\ b)}^{+}$ является мономорфизмом ч. у. множества L в булеву алгебру всех его компонент $K(\widetilde{L})$. Этот мономорфизм можно продолжить до мономорфизма $\overline{\psi}:\overline{L}\to K(\widetilde{L})$, положив $\psi(O_{\overline{L}})=O_{K(\widetilde{L})}$ ($O_{K(\widetilde{L})}$ — пустая компонента).

Лемма 5. Построенный в следствии 1 мономорфизм $\overline{\psi}:\overline{L}\to K(\widetilde{L})=K$ является полным по пересечениям.

Доказательство. Пусть $\overline{x}=\inf^{\overline{L}}\{x_\alpha\}$. Ясно, что элемент $\overline{\psi}(x)$ является нижней гранью для множества $\{\psi(x_\alpha)\}$. Пусть r — другая нижняя грань для множества $\{\psi(x_\alpha)\}$ в $K(\widetilde{L})$. Обозначим через $[\psi(x)]'$ дополнение элемента $\overline{\psi}(x)$ в булевой алгебре $K(\widetilde{L})$. Покажем, что $r\cdot[\overline{\psi}(x)]'=O_K$. Допустив противное, мы можем найти, в силу плотности множества $\overline{\psi}(\widetilde{L})$ в K, такой элемент $\overline{\psi}(y)$, что $\overline{\psi}(y)\leqslant r\cdot[\overline{\psi}(x)]'$; $y\in L$. Поскольку $\overline{\psi}(y)\leqslant r\leqslant\overline{\psi}(x_\alpha)$ и ψ — мономорфизм, мы имеем $y\leqslant x_\alpha$ для всех α, откуда $y\leqslant x=\inf^{\overline{L}}\{x_\alpha\}$. Значит, $\overline{\psi}(y)\leqslant\overline{\psi}(x)$. Следовательно, ввиду $\overline{\psi}(y)\leqslant[\overline{\psi}(x)]'$, имеем $\overline{\psi}(y)\leqslant\overline{\psi}(x)\overset{K}{\cdot}[\overline{\psi}(x)]'=$ $=O_K$, что противоречит плотности подмножества $\psi(L)$ в K Таким образом, $r\cdot[\overline{\psi}(x)]'=O_K$, то есть $r\leqslant\overline{\psi}(x)$ и, значит, $\overline{\psi}(x)=\inf^K\{\overline{\psi}(x_\alpha)\}$.

Определение. 5. Назовем элемент s структуры S дистрибутивной верхней (нижней) гранью для подмножества $(s_\alpha)\subset S$, если $s=\sup^S\{s_\alpha\}$ (соответственно $s=\inf^S\{s_\alpha\}$) и для любого элемента $t\in S$ имеет место равенство $st=\sup^S\{s_\alpha t\}$ (соответственно $s+t=\inf_S\{s_\alpha+t\}$). Тот факт, что s является дистрибутивной верхней (нижней) гранью для подмножества $\{s_\alpha\}$, будем обозначать так: $s\uparrow\{s_\alpha\}$ (соответственно $s\downarrow\{s_\alpha\}$). Будем говорить, что мономорфизм $f:S\to P$ структуры S в ч. у. множество P сохраняет дистрибутивные верхние (нижние) и грани структуры S, если из $s\uparrow\{s_\alpha\}$ следует $f(s)=\sup^P\{f(s_\alpha)\}$, (соответственно из $s\downarrow\{s_\alpha\}$ следует $f(s)=\inf^P\{f(s_\alpha)\}$) и писать $f(S)\subset{}^\delta P$ (соответственно $f(S)\subset{}_\delta P$).

Лемма 6. Пусть L — дистрибутивная структура, $x\downarrow\{x_\alpha\}$ и $y\uparrow\{y_\alpha\}$. Тогда $\overline{(x,y)}=\inf^{\overline{L}}\{\overline{x_\alpha,y_\alpha}\}$.

Доказательство. Ясно, что $\overline{(x,y)}\leqslant\overline{(x_\alpha,y_\alpha)}$ при всех α. Пусть элемент $\overline{(u,v)}\in\overline{L}$ является произвольной нижней гранью для множества $\{\overline{(x_\alpha,y_\alpha)}\}$, то есть $u\leqslant v+x_\alpha$ и $uy_\alpha\leqslant v$ при всех α. Тогда $u\leqslant\inf^L\{(v+x_\alpha)\}=v+\inf\{x_\alpha\}=v+x$ и $uy=u\cdot\sup^L\{y_\alpha\}=\sup^L\{uy_\alpha\}\leqslant v$, то есть $\overline{(u,v)}\leqslant\overline{(x,y)}$, что и доказывает лемму.

Следствие 2. В силу дистрибутивности структуры L, соотношения $x=x_1\cdot x_2$ и $y=y_1+y_2$ влекут $x\downarrow\{x_1, x_2\}$ и $y\uparrow\{y_1, y_2\}$. Следовательно, по лемме 6, мы имеем $\overline{(x_1, y_1)}^{L}\cdot\overline{(x_2, y_2)}=$ $=\overline{(x_1\cdot x_2, y_1+y_2)}=\overline{(x, y)}$, для любых элементов $x_1, x_2, y_1, y_2\in L$.

Пусть L — дистрибутивная структура с нулем. Отобразим L в ч. у. множество $\overline{L}$, положив для любого элемента $l\in L$; $\varphi(l)=\overline{(l, 0)}$. Легко видеть, что φ — мономорфизм. Обозначим через f сквозной мономорфизм $f=\tilde{\psi}\varphi: L\longrightarrow K(\tilde{L})$.

Теорема. Для любой дистрибутивной структуры с нулем L имеет место соотношение $f(L)\subset_{\delta}^{\delta}K(\tilde{L})=K$.

Доказательство. Покажем, что $f(L)\subset_{\delta}K$. Пусть $x\downarrow\{x_{\alpha}\}$ в L. Поскольку соотношение $0\uparrow\{0_{\alpha}\}$ (здесь $0_{\alpha}=0_{L}$ при всех α), очевидно, имеем, на основании леммы 6, $\overline{(x, 0)}=\inf^{\overline{L}}\{\overline{(x_{\alpha}, 0)}\}$. Значит, $\varphi(L)\subset_{\delta}\overline{L}$, что вместе с леммой 5 дает $f(L)\subset_{\delta}K$.

Покажем, что $f(L)\subset^{\delta}K$. Пусть $z\uparrow\{z_{\alpha}\}$ в L. Можно считать, что $z\neq 0_{L}$, ибо в противном случае все $z_{\beta}=0_{L}$, и утверждение очевидно. Поскольку f мономорфизм и $z\geqslant z_{\beta}$ при всех β, $f(z)=\overline{(z, 0)}^{+}$ является верхней гранью для множества $\{\overline{(z_{\beta}, 0)}^{+}\}$ в K. Пусть $N=\sup^{K}\{f(z_{\beta})\}$ и N_{*} — дизъюнктное дополнение компоненты N во множестве $\tilde{L}$. Для любого элемента $\overline{(u, v)}\in N_{*}$ имеем, по определению, $\overline{(u, v)}^{L}\cdot\overline{(z_{\beta}, 0)}=0_{\overline{L}}$. С другой стороны, по следствию 2, имеем $\overline{(u, v)}^{L}\cdot\overline{(z, 0)}=$ $=\overline{(uz, v)}$. Следовательно, по лемме 3, будет $uz_{\beta}\leqslant v_{\beta}$ при всех β откуда $\sup^{L}\{uz_{\beta}\}=u\cdot\sup^{L}\{z_{\beta}\}=uz\leqslant v$, то есть $\overline{(u, v)}^{L}\cdot\overline{(z, 0)}=$ $=\overline{(uz, v)}=0_{L}$. Значит, $\overline{(z, 0)}\in N_{**}=N$, откуда $f(z)=$ $=\overline{(z, 0)}^{+}\leqslant N$ в K. Таким образом, $N=f(z)$, что и нужно.

Следствие 3. Из теоремы следует, что если структура L полна и бесконечно дистрибутивна, то вложение L в K будет полным, и мы получаем результат Фунаямы [4].

Следствие 4. Легко видеть, что из соотношения $f(L)\subset$ $\subset_{\delta}^{\delta}K$ следует $f(L)\subset_{\delta}^{\delta}A$ для любой подструктуры A булевой алгебры K, содержащей структуру $f(L)$. Переманс [1] отметил следующее свойство (он назвал это свойство «свободой») построенной им булевой алгебры $A(L)$. Булева алгебра $A(L)$ содержит в себе изоморфный образ дистрибутивной структуры L и любое изоморфное вложение структуры L в некоторую булеву алгебру K может быть продолжено до изоморфизма булевой алгебры $A(L)$ в K. Используя сделанное нами выше замечание, мы можем заключить, что вложение L в

$A(L)$ происходит с сохранением всех дистрибутивных верхних и нижних граней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peremans W. Embedding of a distributive lattice into a Boolean algebra. — «Proc. Koninkl. nederl. akad. wet.», 1957, A60, N 1, 73—81.

2. Buchi J. R. Die Boolesche Partialordnung und die Paarung von Gefugen. — «Portug. Math.», 1948, 7, 119—190.

3. Sikorski R. On dense subsets of Boolean algebras. — «Coll. Math.», 1963, 10, 189—190.

4. Funayama N. Imbedding infinitely distributive lattices completely isomorphically into Boolean algebras. — «Nagoya Math. J.», 1959, 15, 71—81.

5. Пашенков В. В. О компонентных частично упорядоченных множествах. — «Матем. заметки», 1971, 9, № 3, 275—283.

6. Биркгоф Г. Теория структур. М., 1952.

П. РАДНЕВ

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПОЛИГОНЫ НАД ДИСТРИБУТИВНЫМИ СТРУКТУРАМИ

Приведем некоторые определения из [1]. Пусть $P(\leqslant)$ — частично упорядоченное множество с нулем 0_P и D — дистрибутивная структура с нулем 0_D и единицей 1_D. Точную верхнюю грань элементов $a_1, \ldots, a_n \in P$, если она существует, будем называть их суммой и обозначать $a_1 + \ldots + a_n$.

Определение 1. Назовем P частичным D — полигоном, если для всех $a \in P$, $\lambda \in D$ определено произведение $\lambda a \in P$, причем выполняются условия:

1) $\lambda a + \mu a$ всегда существует и $\lambda a + \mu a = (\lambda + \mu) a$;
2) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu) a$;
3) $1_D a = a$;
4) $0_D a = 0_P$

для всех $\lambda, \mu \in D$, $a \in P$.

Замечание. В определение частичного D-полигона Т. С. Фофанова [1] требует еще, чтобы $\lambda 0_P = 0_P$ для каждого $\lambda \in D$. Нетрудно заметить, что это условие следует из остальных. Действительно, для всех $\lambda \in D$, $a \in P$ имеем $a = 1_D a = (1 + \lambda) a = a + \lambda a$, т. е. $\lambda a \leqslant a$. В частности, $\lambda 0_P \leqslant 0_P$ и, следовательно, $\lambda 0_P = 0_P$. Аналогичное замечание имеет место для определения D-полигона (см. [2]).

Выделим систему **A** конечных подмножеств элементов частичного полигона P, обладающую следующими свойствами: 1) $\{\lambda a, \mu a\} \in \mathbf{A}$ для любых $\lambda, \mu \in D$, $a \in P$; 2) если $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbf{A}$, то сумма $a_1 + \ldots + a_n$ определена в P и для любого $\lambda \in D$ множество $\{\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n\} \in \mathbf{A}$, причем $\lambda(a_1 + \ldots + a_n) = \lambda a_1 + \ldots + \lambda a_n$.

Определение 2. D-полигон F называется $\mathbf{A}$-свободным расширением частичного D-полигона P, если:

(1) существует изоморфизм θ частично упорядоченного множества P в полуструктуру $\mathbf{F}$, причем $\theta(\lambda a) = \lambda\theta(a)$ для всех $a \in P$, $\lambda \in D$;

(2) F порождается, как полуструктура, множеством $\theta(P)$;

(3) если $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbf{A}$, то $\theta(a_1 + \ldots + a_n) = \theta(a_1) + \ldots + \theta(a_n)$;

(4) если φ — изотонное отображение множества P в D — полигон N такое, что $\varphi(a_1 + \ldots + a_n) = \varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n)$ и $\varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$ для любого $\{a_1, \ldots, a_n\} \in \mathbf{A}$, то существует такой гомоморфизм ψ полигона F в полигон N, что $\psi\theta = \varphi$.

В [1] приводится конструкция $\mathbf{A}$ — свободного расширения частичного D-полигона и тем самым доказывается его существование.

Теорема 1. Пусть M — частично упорядоченное множество и D — дистрибутивная структура с нулем 0_D и единицей 1_D. Существует D-полигон $\overline{M}^*$ и изоморфизм f частично упорядоченного множества M в D-полигон $\overline{M}^*$, так что:

а) $\overline{M}^*$ порождается, как D-полигон, множеством $f(M)$;

б) если g — изотонное отображение множества M в D-полигон $\mathbf{A}$, то существует единственный гомоморфизм $\overline{g}^*$ полигона $\overline{M}^*$ в полигон $\mathbf{A}$ такой, что $\overline{g}^* f = g$;

в) $\overline{M}^*$ единствен с точностью до изоморфизма над M.

Сначала докажем лемму.

Лемма. Пусть M — частично упорядоченное множество и D — дистрибутивная структура с нулем 0_D и единицей 1_D. Существует частичный D-полигон $\overline{M}$ и изоморфизм φ частично упорядоченного множества M в частичный D-полигон $\overline{M}$ такой, что α) каждый элемент $\overline{m} \in \overline{M}$ записывается в виде $\overline{m} = \lambda\varphi(m)$, где $\lambda \in D$, $m \in M$; β) если g — изотонное отображение множества M в D — полигон $\mathbf{A}$, то существует такое изотонное отображение $\overline{g}$ частично упорядоченного множества $\overline{M}$ в D — полигон $\mathbf{A}$, что $\overline{g}\varphi = g$, $\overline{g}(\lambda\overline{m}) = \lambda\overline{g}(\overline{m})$ и $\overline{g}(\lambda\overline{m} + \mu\overline{m}) = \overline{g}(\lambda\overline{m}) + \overline{g}(\mu\overline{m})$ для всех $\lambda, \mu \in D$, $\overline{m} \in \overline{M}$.

Доказательство леммы. Рассмотрим декартово произведение $(D\setminus\{0\})\times M$ с каноническим порядком, т. е. $(\lambda, n)\leqslant(\mu, m)$ тогда и только тогда, когда $\lambda\leqslant\mu$ и $n\leqslant m$. Пусть $\overline{M}=((D\setminus\{0\})\times M)\cup 0_{\overline{M}}$, где $0_{\overline{M}}\notin(D\setminus\{0\})\times M$ и $0_{\overline{M}}\leqslant\overline{m}$ для каждого $\overline{m}\in\overline{M}$. Для любых $\lambda\in D$, $\overline{n}\in\overline{M}$ определим произведение $\lambda\overline{n}\in\overline{M}$ условиями:

$$\lambda\overline{n}=\begin{cases}0_{\overline{M}}, & \text{если } \overline{n}=0_{\overline{M}}\\ 0_{\overline{M}}, & \text{если } \overline{n}=(\nu, n),\ \nu\in D,\ n\in M \text{ и } \lambda\nu=0_D\\ (\lambda\nu, n), & \text{если } \overline{n}=(\nu, n) \text{ и } \lambda\nu\neq 0_D\end{cases} \qquad (*)$$

Покажем, что $\overline{M}$ становится частичным D-полигоном.

1) $\lambda\overline{n}+\mu\overline{n}$ всегда существует и $\lambda\overline{n}+\mu\overline{n}=(\lambda+\mu)\overline{n}$.

Действительно, если $\overline{n}=0_{\overline{M}}$, то 1) очевидно. Если $\overline{n}=(\nu, n)$ и $\lambda\nu=\mu\nu=0$, то опять все ясно. Если $\overline{n}=(\nu, n)$, $\lambda\nu=0$ и $\mu\nu\neq\neq0$, то $\lambda\overline{n}+\mu\overline{n}=(\mu\nu, n)$, так как $\lambda\overline{n}=0_{\overline{M}}<(\mu\nu, n)$. С другой стороны, $(\lambda+\mu)\nu=\lambda\nu+\mu\nu=\mu\nu\neq0$, откуда $(\lambda+\mu)\overline{n}=((\lambda+\mu)\nu, n)=(\mu\nu, n)=\lambda\overline{n}+\mu\overline{n}$.

Аналогично рассматривается случай $\overline{n}=(\nu, n)$, $\lambda\nu\neq0$ и $\mu\nu=0$.

Наконец, если $\overline{n}=(\nu, n)$, $\lambda\nu\neq0$ и $\mu\nu\neq0$, то $\lambda\overline{n}=(\lambda\nu, n)\leqslant\leqslant(\lambda\nu+\mu\nu, n)=((\lambda+\mu)\nu, n)=(\lambda+\mu)\overline{n}$
и

$\mu\overline{n}=(\mu\nu, n)\leqslant(\lambda\nu+\mu\nu, n)=((\lambda+\mu)\nu, n)=(\lambda+\mu)\overline{n}$.

Пусть $\overline{m}\in\overline{M}$, $\overline{m}\geqslant\lambda\overline{n}$ и $\overline{m}\geqslant\mu\overline{n}$. Ясно, что $\overline{m}\neq0_{\overline{M}}$. Если $\overline{m}=(\varkappa, m)$, то $\lambda\nu\leqslant\varkappa$, $\mu\nu\leqslant\varkappa$ и $n\leqslant m$. Из $\lambda\nu\leqslant\varkappa$ и $\mu\nu\leqslant\varkappa$ следует неравенство, $\lambda\nu+\mu\nu\leqslant\varkappa$, которое вместе с $n\leqslant m$ дает

$$(\lambda+\mu)\overline{n}=((\lambda+\mu)\nu, n)=(\lambda\nu+\mu\nu, n)\leqslant(\varkappa, m)=\overline{m}.$$

Этим доказано существование суммы $\lambda\overline{n}+\mu\overline{n}$, совпадающей с $(\lambda+\mu)\overline{n}$.

2) $\lambda(\mu\overline{n})=(\lambda\mu)\overline{n}$.

Если либо $\overline{n}=0_{\overline{M}}$, либо $\lambda\mu=0$, то все очевидно. Если $\overline{n}=(\nu, n)$ и $\lambda\mu\nu=0$, то опять все ясно. Если же $\overline{n}=(\nu, n)$ и $\lambda\mu\nu\neq0$, то

$$\lambda(\mu\overline{n})=\lambda(\mu(\nu, n))=\lambda(\mu\nu, n)=(\lambda(\mu\nu), n)=((\lambda\mu)\nu, n)=$$
$$=(\lambda\mu)(\nu,n)=(\lambda\mu)\overline{n}.$$

3) $1_D\bar{n}=\bar{n}$.

Если $\bar{n}=\bar{0}_M$, то $1_D\bar{n}=0_{\bar{M}}=\bar{n}$. Если $\bar{n}=(\nu, n)$, то $1_D\bar{n}=$
$=(1\gamma, n)=(\nu, n)=\bar{n}$.

4) $0_D\bar{n}=0_{\bar{M}}$. Сразу следует из (*).

Легко проверяется, что отображение $\varphi: M\to\bar{M}$, где $\varphi(m)=(1, m)$ для каждого $m\in M$, является изоморфизмом частично упорядоченного множества M в частичный D — полигон $\bar{M}$. Если $\bar{m}\in\bar{M}$ и $\bar{m}=0_{\bar{M}}$, то $\bar{m}=0_D\varphi(n)$ для любого $n\in M$. Если $\bar{m}=(\mu, m)$, то $\bar{m}=(\mu, m)=\mu(1, m)=\mu\varphi(m)$. Тем самым проверено условие α).

Пусть $_DA$ — полигон и $g: M\to A$ — изотонное отображение. Определим отображение $\bar{g}: \bar{M}\to A$, полагая $\bar{g}(0_{\bar{M}})=0_A$ и $\bar{g}((\lambda, n))=\lambda g(n)$. Проверим изотонность отображения $\bar{g}$. Действительно, если $(\lambda, n)\leqslant(\mu, m)$, то $\lambda\leqslant\mu$ и $n\leqslant m$. Из последнего неравенства, ввиду изотонности отображения g, следует, что $g(n)\leqslant g(m)$. Но тогда $\bar{g}((\lambda, n))=\lambda g(n)\leqslant\mu g(m)=\bar{g}((\mu, m))$. Кроме того, из определения $\bar{g}$ имеем $\bar{g}(0_{\bar{M}})\leqslant\bar{g}(\bar{n})$ для каждого $\bar{n}\in\bar{M}$.

Если $m\in M$, то $(\bar{g}\varphi)(m)=\bar{g}(1, m)=1g(m)=g(m)$, т. е. $\bar{g}\varphi=g$.

Проверим равенство $\bar{g}(\lambda\bar{m})=\lambda\bar{g}(\bar{m})$. Если $\bar{m}=0_{\bar{M}}$, то $\lambda\bar{m}=0_{\bar{M}}$ и, по определению $\bar{g}$ и D-полигона (см. [2]), имеем $\bar{g}(\lambda\bar{m})=\bar{g}(0_{\bar{M}})=0_A=\lambda 0_A=\lambda\bar{g}(\bar{m})$. Если $\bar{m}=(\mu, m)$ и $\lambda\mu=0$, то, по (*), $\lambda\bar{m}=0_{\bar{M}}$ и $\bar{g}(\lambda\bar{m})=\bar{g}(0_{\bar{M}})=0_A$, а с другой стороны

$$\lambda\bar{g}(\bar{m})=\lambda\bar{g}((\mu, m))=\lambda(\mu g(m))=(\lambda\mu)g(m)=0g(m)=0_A.$$

Наконец, используя равенство $\bar{g}(\lambda\bar{m})=\lambda\bar{g}(\bar{m})$, покажем, что $\bar{g}(\lambda\bar{m}+\mu\bar{m})=\bar{g}(\lambda\bar{m})+\bar{g}(\mu\bar{m})$. Действительно, $\bar{g}(\lambda\bar{m}+\mu\bar{m})=\bar{g}((\lambda+\mu)\bar{m})=(\lambda+\mu)\bar{g}(\bar{m})=\lambda\bar{g}(\bar{m})+\mu\bar{g}(\bar{m})=$
$=\bar{g}(\lambda\bar{m})+\bar{g}(\mu\bar{m})$.

Доказательство теоремы 1. Если M — частично упорядоченное множество, то пусть $\bar{M}$ и $\varphi: M\to\bar{M}$ обозначают то же, что и в лемме. Обозначим через M^***A**-свободное расширение частичного D-полигона $\bar{M}$, где **A** состоится только из пар $\{\lambda\bar{m}, \mu\bar{m}\}$, $\bar{m}$ пробегает $\bar{M}$. Пусть θ изоморфизм частично упорядоченного множества $\bar{M}$ в полуструктуру $\bar{M}^*$ (см. (1) из определения 2). Положим $f=\theta\varphi$. Ясно, что f является изоморфизмом частично упорядоченного множества M в полуструктуру $\overline{M}^*$. Проверяем условия а), б) и в).

а) по (2) из определения 2, $\overline{M}^*$ порождается, как полуструктура, множеством $\theta(M)$, т. е. если $x \in \overline{M}^*$, то $x=\theta(\overline{m_1})+ +\ldots+\theta(\overline{m_k})$, где $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_k} \in \overline{M}$. По α) из леммы, имеем $\overline{m_i}= =\lambda_i\varphi(m_i)$, где $m_i \in M$, $\lambda_i \in D$, $i=1, 2, \ldots, k$. На основе (1) из определения 2 и определения f, получаем

$$\begin{aligned} x&=\theta(\lambda_1\varphi(m_1))+\ldots+\theta(\lambda_k\varphi(m_k))= \\ &=\lambda_1(\theta\varphi)(m_1)+\ldots+\lambda_k(\theta\varphi)(m_k)= \\ &=\lambda_1 f(m_1)+\ldots+\lambda_k f(m_k), \end{aligned}$$

т. е. $\overline{M}^*$ порождается, как D-полигон, множеством $f(M)$.

б) Если g — изотонное отображение частично упорядоченного множества M в D-полигон A, то, по лемме, существует изотонное отображение $\overline{g}: \overline{M} \to A$, так что имеет место β). Но тогда, по (4) из определения 2, существует гомоморфизм $\overline{g}^*$ полигона $\overline{M}^*$ в полигон A, причем $\overline{g}^*\theta=\overline{g}$. В таком случае

$$\overline{g}^* f=\overline{g}^*(\theta\varphi)=(\overline{g}^*\theta)\varphi=\overline{g}\varphi=g.$$

Единственность гомоморфизма $\overline{g}^*$ следует из а) и $\overline{g}^* f=g$.

в) следует, как обычно, из а) и б).

При $D=\{0, 1\}$, $0<1$, получаем

Следствие 1. Пусть M — частично упорядоченное множество. Существует полуструктура с нулем M^* и изоморфизм f частично упорядоченного множества M в полуструктуру M^*, так что:

а) M^* порождается множеством $f(M)$;

б) если g—изотонное отображение частично упорядоченного множества M в полуструктуру A, то существует единственный гомоморфизм g^* полуструктуры M^* в полуструктуру A такой, что $g^*f=g$;

в) M^* единственна с точностью до изоморфизма над M.

Следствие 2. D-полигон F свободен тогда и только тогда, когда он изоморфен $\overline{E}^*$ для некоторого тривиально упорядоченного множества E.

Определение 3. D-полигон $\overline{M}^*$, построенный в теореме 1, будем называть универсальным полигоном.

Замечание. В дальнейших рассмотрениях будем отождествлять M с его образом при изоморфизме f.

Теорема 2. Пусть M, D и $\overline{M}^*$ обозначают то же, что и в теореме 1. Универсальный полигон $\overline{M}^*$ проективен тогда и только тогда, когда множество $\nabla(m)=\{x|x\in M,\ x\leqslant m\}$ конечно для любого $m\in M$.

Доказательство. Отметим, что в категории D-полигонов эпиморфизмы и мономорфизмы совпадают соответственно с наложениями и вложениями (см. [1] с. 106 и [4] с. 17—18). Пусть $\overline{M}^*$ — проективный D-полигон. Обозначим через F свободный D-полигон с таким множеством свободных образующих E, что $|E|=|M|$. Пусть f — эпиморфизм D-полигона F на D-полигон $\overline{M}^*$, являющийся продолжением взаимно-однозначного отображения множества E на множество M. Так как $\overline{M}^*$ — проективный D-полигон, то существует такой мономорфизм D-полигонов $g:\overline{M}^*\longrightarrow F$, что fg — тождественное преобразование множества $\overline{M}^*$. Для любого $x\in\overline{M}^*$ положим $x_\Delta=\{j|j\in\overline{M}^*,\ j\leqslant x\}$. Докажем две леммы.

Лемма 1. Каждый элемент $x\in\overline{M}^*$ может быть записан в виде

$$x=\lambda_1 m_1+\ldots+\lambda_k m_k,$$

где $\lambda_i\in D$, $m_i\in M$, так что

$$x_\Delta=\{\mu_1 m_1+\ldots+\mu_k m_k|\mu_i\leqslant\lambda_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ k\}.$$

В самом деле, если $x\in\overline{M}^*$, то

$$g(x)=\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_k e_k,$$

где $\lambda_i\in D$, $e_i\in E$. Тогда

$$x=(fg)(x)=\lambda_1 m_1+\ldots+\lambda_k m_k,$$

где $m_i=f(e_i)$. Если $j\leqslant x$, то $g(y)\leqslant g(x)$ и

$$g(y)=\mu_1 e_1+\ldots+\mu_k e_k,$$

где $\mu_i\leqslant\lambda_i$. В таком случае

$$y=(fg)(y)=\mu_1 m_1+\ldots+\mu_k m_k.$$

Если $z=\nu_1 m_1+\ldots+\nu_k m_k$, где $\nu_i\in D$ и $\nu_i\leqslant\lambda_i$, то ясно, что $z\leqslant x$, т. е. $z\in x^\Delta$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если $m\in M$ и $m=\lambda_1 m_1+\ldots+\lambda_k m_k$, где $\lambda_i\in D$, $m_i\in M$, то $m=m_1+\ldots+m_k$.

Действительно, если m допускает данную запись, то $m\geqslant\geqslant\lambda_i m_i$. Из этих неравенств следуют неравенства $m\geqslant m_i$, $i=1$, 2, ..., k (см. теорема 1, определение порядка в $\overline{M}$). Но тогда $m\geqslant m_1+\ldots+m_k$. С другой стороны,

$$m=\lambda_1 m_1+\ldots+\lambda_k m_k \leqslant m_1+\ldots+m_k$$

и, следовательно, $m=m_1+\ldots+m_k$.

Теперь закончим доказательство необходимости. Пусть $m \in M$ и $m=\lambda_1 m_1+\ldots+\lambda_k m_k$ та запись элемента m, существование которой утверждается в лемме 1. По лемме 2, $m=m_1+\ldots+m_k$. Еще раз применив леммы 1 и 2, имеем $\nabla(m)=m_\nabla \cap \cap M=\{\mu_1 m_1+\ldots+\mu_k m_k \mid \mu_i$ принимают значения 0 и 1$\}$. Тогда очевидно, что $\nabla(m)$ — конечно.

Пусть, теперь, $\nabla(m)$ — конечно для каждого $m \in M$. Пусть, далее, F — свободный D-полигон и $\varphi: F \rightarrow \overline{M^*}$ — эпиморфизм полигонов. Для каждого $m \in M$ выберем некоторый элемент $m' \in F$, так что $\varphi(m')=m$. Определим отображение $\psi: M \rightarrow F$, полагая $\psi(m)=\bigvee\{n' \mid n' \in F, n \in \nabla(m)\}$. Очевидно, что ψ—изотонное отображение частично упорядоченного множества M в D-полигон F и $(\varphi\psi)(m)=m$ для каждого $m \in M$. По теореме 1 б), ψ можно продолжить до гомоморфизма D-полигонов $\psi^*: \overline{M^*} \rightarrow F$. Так как M порождает D-полигон $\overline{M^*}$, то $(\varphi\psi^*)(m)=m$ для каждого $m \in \overline{M^*}$. Итак, $\overline{M^*}$ является ретрактом свободного D-полигона и, значит, проективным D-полигоном.

Значение теоремы 1 и 2 подчеркивает следующий факт.

Теорема 3. Следующие свойства дистрибутивной структуры D эквивалентны:

а) каждый проективный D-полигон свободен;

б) каждый конечнопорожденный проектный D-полигон свободен;

в) D — одноэлементная структура.

Доказательство. Импликация а)→б) очевидна, а импликация в)→а) следует из того, что над одноэлементной структурой существует единственный полигон — нулевой (см. [2], предложение 2).

Пусть M — двуэлементная цепь. По теореме 2, D-полигон $\overline{M^*}$ проективен. Докажем, что $\overline{M^*}$ не является свободным D-полигоном и этим доказательство теоремы 3 будет закончено. Так как, по теореме 1, каждый элемент из $\overline{M^*}$ записывается в виде $\lambda 0+\mu 1$, где $\lambda, \mu \in D$, то 1 является наибольшим элементом полигона $\overline{M^*}$. Отсюда следует, что $\overline{M^*}$ не может быть циклическим D-полигоном. Действительно, если допустим, что $\overline{M^*}$ является циклическим D-полигоном, то он должен порождаться элементом 1. Но элемент 0 невозможно записать в виде $\lambda 1$, где $\lambda \in D$. Допустим, что $\overline{M^*}$ является свободным D-полигоном с базисом e_1, e_2. Пусть $e_i = \lambda_i 0 + \mu_i 1$, λ_i, $\mu_i \in D$, $i=1,2$. Покажем, что $\lambda_1\lambda_2 = \mu_1\mu_2 = 0$. Действительно, если хотя бы один из этих элементов отличен от 0, то элемент $a = \lambda_1\lambda_2 0 + \mu_1\mu_2 1 \neq 0_{\overline{M}}$ и. $a \leqslant e_1$, $a \leqslant e_2$. Но тогда $0_{\overline{M}} = e_1 e_2 \geqslant a \neq 0_{\overline{M}}$, что невозможно. Так как $\lambda_1\mu_1 e_2 = \lambda_1\mu_1\lambda_2 0 + \lambda_1\mu_1\mu_2 1 = 0_{\overline{M}}$, то $\lambda_1\mu_1 = 0$. Аналогично из $\lambda_2\mu_2 1 = 0_{\overline{M}}$ следует $\lambda_2\mu_2 = 0$. Учитывая полученные равенства и определение D—полигона, имеем

$$(\lambda_1+\mu_1)e_1 = (\lambda_1+\mu_1)(\lambda_1 0+\mu_1 1) = \lambda_1 0+\mu_1 1 = e_1$$

т. е. $\lambda_1+\mu_1 = 1$. Умножив последнее равенство сначала на λ_2, а потом на μ_2, получаем $\mu_1\lambda_2 = \lambda_2$, $\lambda_1\mu_2 = \mu_2$ и $\lambda_1\mu_2 = \lambda_1$. Но тогда $\lambda_2 = \mu_1\lambda_2 = \mu_1$ и $\mu_2 = \lambda_1\mu_2 = \lambda_1$. Итак имеем, что $e_1 = \lambda_1 0 + \mu_1 1$, $e_2 = \mu_1 0 + \lambda_1 1$, $\lambda_1\mu_1 = 0$ и $\lambda_1+\mu_1 = 1$. Учитывая полученные равенства, непосредственным подсчетом, приходим к

$$\lambda_1 e_1 + \mu_1 e_1 = \lambda_1(\lambda_1 0 + \mu_1 1) + \mu_1(\mu_1 0 + \lambda_1 1) =$$
$$= \lambda_1 0 + \mu_1 0 = 0 < 1 = 1_D 1 = (\lambda_1+\mu_1) 1 = \lambda_1 1 + \mu_1 1 =$$
$$= \lambda_1(\mu_1 0 + \lambda_1 1) + \mu_1(\lambda_1 0 + \mu_1 1) = \lambda_1 e_2 + \mu_1 e_1.$$

Но тогда

$$\lambda_1 e_1 + \mu_1 e_2 + \mu_1 e_1 + \lambda_1 e_2 = \mu_1 e_1 + \lambda_1 e_1,$$

откуда

$$(\lambda_1+\mu_1)e_1 + (\lambda_1+\mu_1)e_2 = \mu_1 e_1 + \lambda_1 e_2,$$

что, в свою очередь, влечет $\lambda_1+\mu_1 = \mu_1$ и $\lambda_1+\mu_1 = \lambda_1$, то есть $\lambda_1 = \mu_1$. Но равенство $\lambda_1 = \mu_1$ несовместимо с равенствами $\lambda_1\mu_1 = 0$ и $\lambda_1+\mu_1 = 1$. Полученное противоречие доказывает, что $\overline{M}^*$ не может быть свободным. Теорема 3 доказана.

Замечание. Имея в виду теорему 3, естественно поставить такой вопрос: существуют ли ненулевые дистрибутивные структуры, над которыми каждый циклический проективный полигон свободен? Ответ на этот вопрос оказывается положительным. Действительно, Т. С. Фофанова [3] доказала, что циклический D — полигон проективен тогда и только тогда, когда он изоморфен главному идеалу структуры D. Отсюда, сразу следует, что каждый циклический проективный D-полигон свободен тогда и только тогда, когда каждый главный идеал структуры D свободен. Ясно, что конечные дистрибутивные структуры с этим свойством одноэлементны или двуэлементны. Приведем простой пример дистрибутивной структуры, в которой каждый ненулевой идеал изоморфен структуре, то есть свободен. Пусть P — множество отрицательных целых чисел с естественным порядком. Обозначим $\overline{P} = P \cup \{a\}$, где $\overline{a \in P}$

и $a<p$ для каждого $p \in P$. Тогда $\overline{P}$ является дистрибутивной структурой с нулем и единицей и каждый ее ненулевой идеал — главный и изоморфен структуре P. На этот пример обратила мое внимание Т. С. Фофанова. В книге Сикорского ([5], стр. 171) приведены примеры булевых алгебр, в которых каждый главный ненулевой идеал изоморфен алгебре, то есть свободен.

Автор выражает благодарность Л. А. Скорнякову за ценные замечания. В частности, он заметил, что импликация б)→в) в теореме 3 не следует сразу из теоремы 2. Автор благодарит также Т. С. Фофанову за то, что она любезно предоставила рукописи своих неопубликованных работ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фофанова Т. С. Свободные расширения частичных полигонов. — В сб.: Упорядоченные множества и решетки, вып. 2., Изд-во Сарат. ун-та, 1974, 99—108.

2. Фофанова Т. С. Полигоны над дистрибутивными структурами. — «Сибирск. матем. ж.», 1971, 12, № 5, 1158—1163.

3. Фофанова Т. С. О проективных полигонах над дистрибутивными структурами. — В сб.: Упорядоченные множества и решетки, вып. 4. Изд-во Сарат. ун-та, 1976, 128—134.

4. Курош А. Г., Лившиц А. Х., Шульгейфер Е. Г. Основы теории категорий. — УМН, 1961, 15, № 6, 3—52.

5. Сикорский Р. Булевы алгебры. М., 1969.

В. В. РОЗЕН

ИГРЫ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ ИСХОДАМИ И МОНОКОМПАКТНО ПОРОЖДЕННЫЕ РЕШЕТКИ

Многие авторы, занимающиеся теорией решеток, указывали на связь этой теории с другими разделами математики и физики. В настоящей заметке показана взаимосвязь между теорией решеток и теорией игр. При этом в теоретико-игровых конструкциях естественно выделяется некоторый подкласс класса бесконечно дистрибутивных решеток, названных монокомпактно порожденными[1]. Изучению свойств таких решеток посвящен § 1.

---

[1] Заметим, что под таким же названием Г. И. Житомирский [4] рассматривал более широкий класс решеток, который в случае дистрибутивности совпадает с нашим.

§ 1. Монокомпактно порожденные решетки

Элемент l полной решетки $(L, \leqslant)$ называется монокомпактным, если он удовлетворяет условию: $l \leqslant \bigvee_{i \in I} l_i$ влечет $l \leqslant l_{i_0}$ для некоторого $i_0 \in I$. Полная решетка $(L, \leqslant)$ называется монокомпактно порожденной, если множество монокомпактных элементов образует ее $\bigvee$ — базис.

Пусть ρ — отношение квазипорядка на множестве A. Отображение, сопоставляющее каждому $X \subset A$ срез $\overset{-1}{\breve{\rho}}(X)$, является операцией замыкания на $P(A)$, поэтому множество всех срезов $\{\overset{-1}{\breve{\rho}}(X) \mid X \subset A\}$, упорядоченное включением, образует полную решетку; ввиду того, что $\bigcup_{i \in I} \overset{-1}{\breve{\rho}}(X_i) = \overset{-1}{\breve{\rho}}(\bigcup_{i \in I} X_i)$, получаем, что эта решетка является полной подрешеткой полной решетки всех подмножеств множества A. Будем обозначать ее L_ρ и называть решеткой, ассоциированной с отношением квазипорядка ρ. Для монокомпактных решеток основную роль играет следующая

Теорема 1. (Теорема о представлении).

1. Всякая решетка, ассоциированная с отношением квазипорядка, монокомпактно порожденная.

2. Всякая монокомпактно порожденная решетка изоморфна решетке, ассоциированной с некоторым отношением квазипорядка. Имеет место следующая

Лемма. Пусть $\alpha = (L, \omega)$, $\beta = (S, \sigma)$ — монокомпактно порожденные решетки, B и C — множества монокомпактных элементов в α и β соответственно. Всякий порядковый изоморфизм B на C можно продолжить до изоморфизма решетки α на решетку β[2].

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Подмножества вида $\overset{-1}{\rho}\langle a \rangle$ $(a \in A)$ являются монокомпактными элементами решетки L_ρ, так как из $\overset{-1}{\rho}\langle a \rangle \subset \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{\breve{\rho}}(X_i)$ следует, что $a \in \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{\breve{\rho}}(X_i)$, значит $a \in \overset{-1}{\breve{\rho}}(X_i)$ для некоторого

[2] Доказательство леммы содержится в [4].

$i \in I$, откуда $\overset{-1}{\rho} \langle a \rangle \subset \overset{-1}{\breve{\rho}}(X_i)$. Ясно, что элементами указанного вида исчерпываются все монокомпактные элементы решетки L_ρ; для всякого $X \subset A$ выполняется $\overset{-1}{\breve{\rho}}(X) = \bigcup\limits_{a \in X} \overset{-1}{\rho} \langle a \rangle$, что доказывает первое утверждение теоремы. Пусть теперь $L = (L, \omega)$ монокомпактно порожденная решетка и B — множество ее монокомпактных элементов. Так как выполняется эквивалентность $l_1 \leqslant l_2 \longleftrightarrow \overset{-1}{\omega_B} \langle l_1 \rangle \subset \overset{-1}{\omega_B} \langle l_2 \rangle$, где $\omega_B = \omega \cap B^2$, $l_1, l_2 \in B$, то соответствие $l \to \overset{-1}{\omega_B} \langle l \rangle$ является порядковым изоморфизмом B на множестве монокомпактных элементов решетки L_{ω_B}. По лемме $L \cong L_{\omega_B}$.

Следствие 1. Если (A, ω) упорядоченное множество, то отображение θ: $a \to \overset{-1}{\omega} \langle a \rangle$ есть вложение (A, ω) в монокомпактно порожденную решетку L_ω, причем образ A при этом вложении совпадает с множеством монокомпактных элементов решетки L_ω.

Следствие 2. Упорядоченные множества (A, ω) и (S, σ) изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны решетки L_ω и L_σ.

Действительно, очевидно, что изоморфизм упорядоченных множеств влечет изоморфизм решеток. Обратно, пусть θ — изоморфизм L_ω на L_σ. Легко видеть, что изоморфизм переводит монокомпактные элементы в монокомпактные. Учитывая также, что подмножество $\overset{-1}{\sigma} \langle s \rangle$ определяет элемент $s \in S$ однозначно, введем отображение $\theta_1 : A \xrightarrow{\text{на}} S$:

$$\theta_1(a) = s \longleftrightarrow \theta(\overset{-1}{\omega} \langle a \rangle) = \overset{-1}{\sigma} \langle s \rangle.$$

Выполняется эквивалентность

$$\overset{-1}{\omega} \langle a_1 \rangle \subset \overset{-1}{\omega} \langle a_2 \rangle \longleftrightarrow \overset{-1}{\sigma} \langle \theta_1(a_1) \rangle \subset \overset{-1}{\sigma} \langle \theta_1(a_2) \rangle;$$

левая часть этой эквивалентности означает, что $(a_1, a_2) \in \omega$, правая, что $(\theta(a_1), \theta(a_2)) \in \sigma$.

Следствие 3. Пусть ρ — отношение квазипорядка на A, ρ/ε — отношение порядка, полученное факторизацией ρ по эквивалентности $\varepsilon = \rho \cap \overset{-1}{\rho}$. Тогда решетки L_ρ и $L_{\rho/\varepsilon}$ изоморфны.

Действительно, имеет место эквивалентность

$$(a_1,a_2) \in \rho \longleftrightarrow (\widetilde{\varepsilon}(a_1),\ \widetilde{\varepsilon}(a_2)) \in \rho/\varepsilon,$$

которую можно переписать в виде

$$\overset{-1}{\rho} < a_1 > \subset \overset{-1}{\rho} < a_2 > \longleftrightarrow \overset{-1}{\overline{\rho/\varepsilon}} < \widetilde{\varepsilon}(a_1) > \subset \overset{-1}{\overline{\rho/\varepsilon}} < \widetilde{\varepsilon}(a_2) >.$$

Получаем, что отображение $\overset{-1}{\rho} < a > \longrightarrow \overset{-1}{\overline{\rho/\varepsilon}} < \widetilde{\varepsilon}(a) >$ является порядковым изоморфизмом множества монокомпактных элементов решетки L_ρ на множество монокомпактных элементов решетки $L_{\rho/\varepsilon}$ (отношение порядка — включение). Остается воспользоваться леммой.

Следствие 4. Всякая монокомпактно порожденная решетка бесконечно дистрибутивна[3].

Обращение следствия 4 неверно, однако справедливо.

Предложение 1. Полная бесконечно дистрибутивная решетка, удовлетворяющая условию минимальности, является монокомпактно порожденной, причем множество ее монокомпактных элементов совпадает с множеством ее $\vee$ — неразложимых элементов.

В самом деле, ясно, что всякий монокомпактный элемент является $\vee$ — неразложимым. Обратно, пусть l $\vee$ — неразложим, тогда условие $l \leqslant \bigvee_{i \in I} l_i$ влечет $l = l \wedge \bigvee_{i \in I} l_i = \bigvee_{i \in I} (l \wedge l_i)$, откуда $l = l \vee l_i$, для некоторого $i \in I$, т. е. $l \leqslant l_i$. Остается заметить, что в решетке, удовлетворяющей условию минимальности, множество $\vee$—неразложимых элементов образует $\vee$—базис.

Предложение 2. Полная булева алгебра является монокомпактно порожденной тогда и только тогда, когда она атомная; в этом случае множество ее монокомпактных элементов состоит из нуля и всех атомов.

Для доказательства сформулированного утверждения покажем, что в полной булевой алгебре понятия «атом» и «монокомпактный элемент, отличный от нуля» — равнозначны. Действительно, пусть l — монокомпактный элемент и $l_1 < l$. Так как $l \leqslant l_1 \vee l'_1$, то $l \leqslant l_1$ или $l \leqslant l'_1$, но первое неравенство противоречит предложению. Получаем $l_1 < l \leqslant l'_1$, то есть $l_1 < l'_1$, откуда $l_1 = l_1 \wedge l'_1 = 0$. Таким образом l атом или $l = 0$. Обратно, так как полная булева алгебра бесконечно дистрибутивна, то, используя предложение 1, получаем, что всякий $\vee$—неразложимый элемент является монокомпактным, но атом, очевидно, $\vee$ — неразложим.

[3] Специальный случай этого следствия отмечен в [4].

Предложение 3. Монокомпактно порожденная решетка является булевой алгеброй тогда и только тогда, когда каждый ее элемент имеет единственное представление в виде объединения некоторого семейства ненулевых монокомпактных элементов.

В самом деле, если монокомпактно порожденная решетка L является булевой алгеброй, то по предложению 2 она атомная и по теореме Тарского L изоморфна булевой алгебре всех подмножеств некоторого множества T; в этой последней ненулевыми монокомпактными элементами являются одноэлементные подмножества, следовательно, свойство единственности, указанное в предложении 3, выполняется. Обратно, пусть для монокомпактно порожденной решетки $L=(L, \leqslant)$ выполняется условие единственности разложения и $B=(l_i)_{i\in I}$ множество всех ее монокомпактных элементов (считаем, что индексирование взаимно однозначное). Покажем, что всякий монокомпактный элемент, отличный от нуля, есть атом, т. е. $l<l_i \to l=0$ для любого монокомпактного элемента l_i. Действительно, l есть объединение монокомпактных элементов:

$$l = \bigvee_{j\in J} l_j$$

Если $l<l_i$, то $l_i = l \vee l_i = (\bigvee_{j\in J} l_j) \vee l_i$. Из условия единственности разложения для l_i получаем, что $J=\varnothing$, откуда $l = \bigvee_{j\in J} l_j = 0$. Определим отображение $\varphi: L\to L$ следующим образом. Пусть $l = \bigvee_{j\in J} l_j$, тогда $\varphi(l)=\bigvee_{j\in I/J} l_j$ (определение корректно ввиду единственности разложения). Имеем:

$$l \vee \varphi(l) = (\bigvee_{j\in J} l_j) \vee (\bigvee_{j\in I/J} l_j) = \bigvee_{j\in I} l_j = 1$$

Далее, используя, что L по следствию 4 теореме 1 бесконечно дистрибутивна, получаем:

$$l\wedge\varphi(l) = (\bigvee_{i\in J} l_i) \wedge (\bigvee_{j\in I/J} l_j) = \bigvee_{\substack{i\in J\\ j\in I/J}} (l_i \wedge l_j)$$

При всех $i\in I$, $j\in I/I$ выполняется $l_i\neq l_j$, и т. к. по доказанному каждый из элементов l_i, l_j есть или нуль, или атом, получаем, $l_i \wedge l_j=0$, откуда $l\wedge\varphi(l)=0$. Таким образом, $\varphi(l)$ есть дополнение элемента l и L булева алгебра.

Предложение 4. Пусть ε — отношение эквивалентности на A. Тогда L_ε — монокомпактно порожденная булева алгебра. Обратно, всякая монокомпактно порожденная булева алгебра так представима.

Достаточно показать в прямом утверждении предл. 4, что решетка L_ε с дополнениями. Легко проверить, что дополнением $\breve{\varepsilon}(X)$ является $\breve{\varepsilon}(A)/\breve{\varepsilon}(X))$. Обратно, если L — монокомпактно порожденная булева алгебра, то по предл. 2 она атомная, поэтому L изоморфна булевой алгебре всех подмножеств некоторого множества T, то есть L изоморфна L_{Δ_T}.

§ 2. Игры с упорядоченными исходами

Исходя из общего определения игры [2], можно рассматривать антагонистическую игру как систему $\langle X, У, A, f\rangle$, где X, $У$, A — абстрактные множества, f — отображение $X\times Y$ в L. При этом X, Y интерпретируются как множества стратегий первого и второго игрока, $f(x, y)$ — как исход игры, получающийся при применении игроком (1) стратегии $x\in X$ и игроком (2) стратегии $y\in Y$; элементы множества $X\times Y$ называются ситуациями в игре. Множество A наделяется некоторой дополнительной структурой; обычно A есть множество действительных чисел. В этом случае функция f представляет собой измерение предпочтения игрока (1), имеющегося для него на множестве ситуаций. Ввиду многих трудностей, возникающих при измерениях [3], представляет интерес рассмотрение того случая, когда структурой, отражающей предпочтения игрока, является отношение порядка, что приводит к следующему определению.

Антагонистической игрой двух лиц с упорядоченными исходами (кратко-игрой с упорядоченными исходами) будем называть систему $\Gamma=\langle X, Y, L, \leqslant, F\rangle$, где X, Y — абстрактные множества, $(L, \leqslant)$ — упорядоченное множество, F — отображение $X\times Y$ в L.

Будем говорить, что исход $l\in L$ гарантируется первым игроком, если выполняется $\exists\, x\in X\,\forall\, y\in Y(F(x, y)\geqslant l)$, и что исход l запрещается вторым игроком, если выполняется $\exists\, y\,\forall\, x\in X(F(x, y)\geqslant l)$. Игра называется альтернативной по подмножеству $L_1\subset L$, если каждый исход $l\in L_1$ либо гарантируется первым игроком, либо запрещается вторым игроком.

Если $(L, \leqslant)$ — полная решетка, то равенство

$$\bigvee_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y} F(x,y)=\bigwedge_{y\in Y}\bigvee_{x\in X} F(x,y) \qquad (1)$$

будем называть равенством максиминов.

Роль монокомпактно порожденных решеток для игр с упорядоченными исходами определяется следующими двумя теоремами.

Теорема 2. Пусть $\Gamma = \langle X, Y, L, \leqslant, F \rangle$ игра с упорядоченными исходами и $(L, \leqslant)$ монокомпактно порожденная решетка, причем B множество ее монокомпактных элементов. Равенство максиминов выполняется тогда и только тогда, когда Γ альтернативна по B.

Доказательство. Необходимость. Предположим, равенство максиминов выполняется и обозначим p левую и правую часть равенства (1). Пусть $l \in B$. Возможны два случая: I. $l \leqslant p$, 2. $\neg l \leqslant p$. В первом случае имеем: $l \leqslant \bigvee_{x \in X} \bigwedge_{y \in Y} F(x,y)$; ввиду монокомпактности l получаем, что $l \leqslant \bigwedge_{y \in Y} F(x_0, y)$ для некоторого $x_0 \in X$; тогда для любого $y \in Y$ выполняется $l \leqslant F(x_0, y)$, то есть игрок (1) гарантирует l. Во втором случае выполняется $(\neg l \leqslant \bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} F(x,y))$, то есть $\neg(\forall y \in Y(l \leqslant \bigvee_{x \in X} F(x,y)))$. Очевидно, что в определении монокомпактного элемента можно импликацию заменить эквивалентностью, поэтому последняя формула равносильна тому, что $\neg(\forall y \in Y \exists x \in X\ (l \leqslant F(x, y)))$, отсюда по закону Де-Моргана $\exists y \in Y \forall x \in X \neg(l \leqslant F(x,y))$, то есть l запрещается вторым игроком.

Достаточность. Нужно проверить

$$\bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} F(x,y) \leqslant \bigvee_{x \in X} \bigwedge_{y \in Y} F(x,y) \tag{2}$$

т. к. обратное неравенство выполняется тождественно [1]. Обозначим элементы, стоящие в левой и правой части (2), соответственно, p и q. Пусть B_l — множество монокомпактных элементов, не превосходящих l. Ясно, что $\bigvee B_l = l$ для любого $l \in L$. Пусть $l_1 \in B_p$, тогда $l_1 \leqslant p = \bigwedge_{y \in Y} \bigvee_{x \in X} F(x,y)$; учитывая монокомпактность l_1, получаем $\forall y \in Y \exists x \in X (l_1 \leqslant F(x, y))$. Отсюда следует, что исход l_1 не запрещается, значит по условию теоремы исход l_1 гарантируется, то есть выполняется $\exists x \in X \forall y \in Y(l_1 \leqslant F(x,y))$. Таким образом, при некотором $x_0 \in X$ $l_1 \leqslant \bigwedge_{y \in Y} F(x_0,y)$, тем более $l_1 \leqslant \bigvee_{x \in X} \bigwedge_{y \in Y} F(x,y) = q$. Показали, что $B_p \subset B_q$, откуда $p = \bigvee B_p \leqslant \bigvee B_q = q$, что заканчивает доказательство теоремы.

Теорема 3. Для того, чтобы игра с упорядоченными исходами $\Gamma = \langle X, Y, L, \omega, F \rangle$ (где (L, ω) — произвольное упорядоченное множество) была альтернативна по L, необходимо и достаточно, чтобы

$$\bigcup_{x\in X}\bigcap_{y\in Y}\overset{-1}{\omega}<F(x,y)>=\bigcap_{y\in Y}\bigcup_{x\in X}\overset{-1}{\omega}<F(x,y)>$$

Доказательство. Пусть $M(\overset{-1}{\omega})$ — множество минорантно стабильных в (L, ω) подмножеств. Непосредственно проверяется, что альтернативность игры Γ по L равносильна альтернативности игры

$$\Gamma_1=<X,Y,M(\overset{-1}{\omega}),\subset,\overset{\smile}{\overset{-1}{\omega}}\circ F>$$

по множеству $B=\{\overset{-1}{\omega}<l>|l\in L\}$. По теореме 1 $(M(\overset{-1}{\omega}),\ \subset)$ монокомпактно порожденная решетка и B — множество ее монокомпактных элементов. Доказательство теоремы 3 теперь непосредственно следует из теоремы 2, т. к. $(M(\overset{-1}{\omega}),\ \subset)$ является полной подрешеткой полной решетки всех подмножеств множества L.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Теория структур. М., 1952.
2. Воробьев Н. Н. Совремеииое состояиие теории игр. — УМН, 1970, 21, № 2, 81—140.
3. Психологические измереиия. М., 1967.
4. Житомирский Г. И. Стабильиые бииариые отиошеиия иа обобщеииых грудах. Диссертация, Саратов, 1965.
5. Розеи В. В. Примеиеиие теории бииариых отиошеиий к общей теории игр. — В сб.: Математические методы решеиия экоиомических задач. Новосибирск, 1971, 127—152.
6. Розеи В. В. Моиокомпактиые решетки. — XII Всесоюзи. алгебраический коллоквиум. Тезисы сообщ. Свердловск, 1973, 303.

О. И. САВЕЛЬЗОН

0-МОДУЛЯРНЫЕ РЕШЕТКИ

Понятие 0-модулярных решеток было введено Варле и Грийе [4]. В этой работе рассматривались в основном вопросы, связанные с нахождением тех дополнительных условий, которые усилили бы 0-модулярность до модулярности и дистрибутивности. Там же выделены три относящиеся к этой тематике проблемы. Одну из них просто разрешает теорема 3, а следствия из теорем 4 и 5 дают частичные ответы на две другие.

Но, оказывается, 0-модулярные решетки интересны и сами по себе. Дело в том, что некоторые известные для модулярных решеток результаты могут быть доказаны с использованием одной только 0-модулярности. Например, предложения 1—4 являются таким обобщением теорем из учения о независимости, теорема 1 — теоремы Куроша-Орэ. Таким образом, требование модулярности при доказательстве этих результатов можно считать чисто традиционным.

Стоит отметить, что 0-модулярные решетки не образуют многообразия (простой пример показывает отсутствие стабильности относительно гомоморфизмов). Несмотря на это, можно доказать, что 0-модулярным решеткам присуще характерное для решеток, образующих многообразия, свойство: решетка идеалов 0-модулярной решетки 0-модулярна.

§ 1. Теорема Куроша-Орэ

Решетка называется 0-модулярной, если она имеет наименьший элемент (обозначаемый 0) и из $a_1 \leqslant a_2$ и $a_2 \wedge a_3 = 0$ следует:

$$(a_1 \vee a_3) \wedge a_2 = a_1.$$

Двойственным образом определяется I-модулярность. Легко показать, что решетка является 0-модулярной (I-модулярной) тогда и только тогда, когда она не содержит в качестве подрешетки немодулярную пятиэлементную решетку, наименьший (наибольший) элемент которой совпадает с 0 (1).

Элемент решетки a называется неприводимым, если он не может быть представлен в виде пересечения двух элементов, каждый из которых отличен от a. Двойственным образом определяется неразложимый элемент.

Представление $0 = a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$, где a_i — неприводимые элементы, называется несократимым, если ни один из a_i не может быть отброшен.

Следующая теорема усиливает результат Куроша-Орэ.

Т е о р е м а 1. Пусть в 0-модулярной решетке L даны два представления наименьшего элемента 0 в виде несократимого пересечения неприводимых элементов:

$$0 = p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \quad (1)$$

$$0 = q_1 \wedge \ldots \wedge q_m \quad (2)$$

Тогда $n=m$ и каждый элемент p_i может быть замещен на некоторый элемент q_j, т. е. после подходящего изменения нумерации элементов $q_1, \ldots, q_m$ получаем:

$$0=q_1\wedge\ldots\wedge q_i\wedge p_{i+1}\wedge\ldots p_n\,(i=1, \ldots, n) \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть $p'_1=p_2\wedge\ldots\wedge p_n$, тогда в силу несократимости данного представления $p'_1>0$ и $p_1\wedge p'_1=0$. Положим $a_j=p'_1\wedge q_j$, тогда $0\leqslant a_j\leqslant p'_1$; следовательно, $p_1\leqslant p_1\vee a_j\leqslant p_1\vee p'_1$. Теперь p_1 неприводим в $[p_1, p_1\vee p'_1]$; если мы докажем, что 0 неприводим в $[0, p'_1]$, то, так как $a_1\wedge\ldots\wedge a_m=0$, тогда $a_j=0$ для некоторого j, скажем, для $j=1$. Но это означает, что $0=q_1\wedge p_2\wedge\ldots\wedge p_n$.

Это представление снова несократимо, потому что q_1 не может быть отброшен, а если бы можно было отбросить какой-нибудь p_i, то, заменяя q_1 на некоторое p_j из (1), мы получили бы более короткое представление наименьшего элемента относительно одних только элементов $p_1, \ldots, p_n$, что невозможно по условию теоремы. Поэтому, повторяя этот процесс и заменяя p_2 на некоторый q_j, мы должны получить $j\neq 1$ и после изменения нумерации элементов $q_1, \ldots, q_m$ можем считать, что $j=2$.

Продолжая действовать таким образом, получаем (3); при $i=n$ это показывает, что $n\geqslant m$, а в силу симметрии заключаем, что $m=n$.

Таким образом, для доказательства теоремы осталось проверить неприводимость 0 в $[0, p'_1]$.

Предположим противное, то есть существуют два элемента a и b, меньшие p'_1, такие, что $a\wedge b=0$, причем каждый из элементов a и b отличен от 0.

Так как $a\wedge p_1=b\wedge p_1=0$, то без элементов $p_1\vee b$ и $p_1\vee a$, отличных от $p_1\vee p'_1$, возникают две характеристические для 0-модулярности подрешетки $\{p'_1, b, p_1, p_1\vee p'_1, 0\}$ и $\{p'_1, a, p_1, p'_1\vee p_1, 0\}$.

Есть два варианта соотношений между $p_1\vee b$ и $p_1\vee a$: 1) $a\vee p_1$ и $b\vee p_1$ сравнимы; 2) $a\vee p_1$ и $b\vee p_1$ несравнимы.

Противоречивость первого варианта условиям теоремы устанавливается тривиально.

Рассмотрим второй вариант (см. рис. 1). Так как p'_1 неприводим в $[p_1, p_1\vee p'_1]$, то $(b\vee p_1)\wedge(a\vee p_1)>p_1$.

Рассмотрим подрешетку, порожденную элементами $a\vee p_1$, a, $(b\vee p_1)\wedge(a\vee p_1)$, p_1, 0. Ясно, что $a\wedge[(b\wedge p_1\vee(a\wedge\wedge p_1)]=a\vee p_1$. Равенство нулю $a\wedge p_1$ следует из того, что $p_1\wedge p'_1=0$. В силу этого обязан существовать элемент $k=a\wedge$

$\wedge[(a\vee p_1)\wedge(b\vee p_1)]$, меньший a и больший 0, так как иначе появится пятиэлементная характеристическая для 0-модулярности подрешетка. Аналогичными рассуждениями устанавливается существование элемента $n=b\wedge[(a\vee p_1)\wedge(b\vee p_1)]$, меньшего b и большего 0. Точная верхняя грань $k\vee n$ должна быть меньше p'_1 и $(a\vee p_1)\wedge(b\vee p_1)$, являющихся верхними гранями элементов k и n. Так как $p_1\wedge k=p_1\wedge(k\vee n)=p_1\wedge p'_1=$ $=p_1\wedge n=0$, то должны существовать элементы $p_1\vee k$, и $p_1\vee n$, отличные от p_1, $(a\vee p_1)\wedge(b\vee p_1)$ и друг от друга. В противном

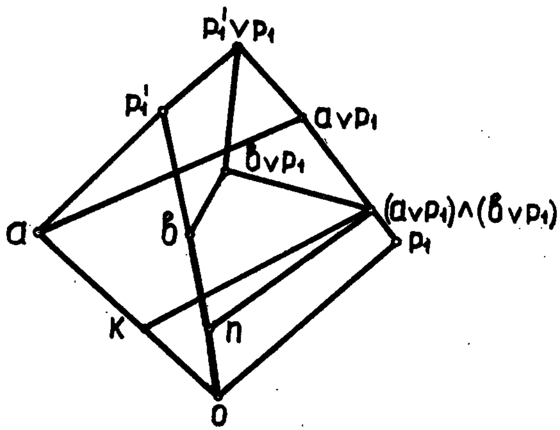


Рис. 1

случае появятся характеристические для 0-модулярности пятиэлементные подрешетки $\{(k\vee n)\vee p_1, p_1, k\vee n, k, 0\}$ и $\{(k\vee n)\vee$ $\vee p_1, p_1, k\vee n, n, 0\}$. В силу неприводимости p_1 существует элемент $r=(k\vee p_1)\wedge(n\vee p_1)>p_1$. Элемент r не может быть меньше элемента n, т. к. в этом случае $p_1<r<n<p'_1$, но p_1 и p'_1 несравнимы. Если $n<r=(k\vee p_1)\wedge(n\vee p_1)$, то $n\vee p_1=r<k\vee$ $\vee p_1$, но $k\wedge n\leqslant a\wedge b=0$ и, следовательно, $k\wedge n=0$. Таким образом, у нас есть два несравнимых элемента k и n (если бы они были сравнимы, то $a\wedge b$ не равнялся бы 0), точная нижняя грань которых равна 0 и верхние грани с элементом p_1 сравнимы, то есть мы находимся в условиях I варианта, который невозможен. Осталось предположить, что элементы k и n несравнимы.

Рассмотрим теперь подрешетку, порожденную элементами n, p_1, r, $n\vee p_1$ и 0.

$n\vee p_1\leqslant n\vee r$, так как $p_1<r$, но с другой стороны $r\leqslant n\vee p_1$ и,

следовательно, $n\vee p_1 = n\vee r$. Так как $n\wedge p_1 = 0$, то для исключения характеристической для 0-модулярности пятиэлементной подрешетки $\{o, n, p_1, n\vee p_1, r\}$ приходится предполагать наличие неравного нулю и элементу n элемента $m = r\wedge n = n\wedge[(k\vee p_1)\wedge(n\vee p_1)] = [n\wedge(n\vee p_1)\wedge(k\vee p_1] = n\wedge(k\vee p_1)$. Элемент $m\vee k$ больше элемента k, так как в противном случае $a\wedge b$ будет не меньше элемента m, который больше нуля.

Рассмотрим подрешетку, порожденную элементами k, $(m\vee \vee k)$, p_1.

$$\text{Тогда } p_1\wedge k = p_1\wedge(m\vee k) = p_1\wedge p'_1 = 0,$$

$$p_1\vee k = (p_1\vee k)\vee[p_1\vee k)\wedge n] = p_1\vee[k\vee((p_1\vee k)\wedge n] = $$
$$= p_1\vee(m\vee k).$$

Следовательно, эти элементы порождают характеристическую для 0-модулярности пятиэлементную подрешетку $\{0, p_1\vee k, k, p_1, m\vee k\}$, что и доказывает противоречивость второго варианта.

Теорема полностью доказана.

Двойственный результат верен в I — модулярных решетках. В 0-модулярных же решетках верна более слабая.

Теорема 2. Пусть L — 0-модулярная решетка, $a\in L$ и $a = p_1 + ... + p_n = q_1 + ... \vee q_m$, где p_i, q_j — атомы. Тогда $m = n$ и $a = p_1 + ... + p_{n-1} + q_j$ для некоторого номера j (элементы $a_1, ..., a_n$ решетки L с 0 называются независимыми, если $0 = (a_1 + ... \vee a_{i-1}\vee a_{i+1}\vee ... \vee a_n)\wedge a_i$ для всех $i = \overline{1, n}$ объединение независимых элементов будем называть прямым и обозначать через $a + ... + a_n$).

Доказательство. Обозначим $p_1 + ... + p_{n-1}$ через a'. Рассмотрим всевозможные пересечения a' с элементами q_j. Если все они не равны 0, то, в силу того, что q_j — атомы, $a'\wedge q_j = q_j$ для любого j. Следовательно, $a' > q_j$ для любого j, но тогда $a' \geqslant q + ... + q_m = a$, что противоречит условию теоремы.

Значит, найдется такой элемент q_j, что $a'\wedge q_j = 0$. Рассмотрим элемент $a'\wedge q_1$. Если $a'\vee q_1 < a$, то подрешетка $\{0 < p_m < a, 0 < a' < a'\vee q_j < a\}$ будет характеристической для 0 — модулярности. Таким образом, учитывая предложение 1 (см. ниже), получаем $a = a' + q_1 = p_1 + ... + p_{m-1} + q_j$.

§ 2. Достаточные условия модулярности в 0 — модулярных решетках. Композиционные ряды

Предложение 1. Если в 0-модулярной решетке элементы $a_1, ..., a_n$ независимы и

$$a_1 = a_{11} + \ldots + a_{1k},$$

то элементы $a_{11}, \ldots, a_{1k}, \ldots, a_{nk}$ — независимы.

Предложение 2. Если в 0-модулярной решетке для всякого $i = \overline{1-n}$ $(a_1 \vee \ldots \vee a_{i-1}) \wedge a_i = 0$, то $a_1, \ldots, a_n$ независимы.

Предложение 3. Пусть в 0-модулярной решетке

$$a = b \vee p_1 \vee .. \vee p_n,$$

где p_i — атомы. Тогда при подходящей нумерации имеем $a = b \dot{\vee} p_1 \dot{\vee} \ldots \dot{\vee} p_m$ (m может быть 0).

Предложение 4. Если в 0-модулярной решетке элементы $a_1, \ldots, a_n$ независимы, а I и J — некоторые подмножества $\{1, \ldots, n\}$, то

$$(\bigvee_{i \in I} a_i) \wedge (\bigvee_{j \in J} a_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } I \cap j \text{ пусто,} \\ \bigvee_{i \in I \cap J} a_i & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Несложные доказательства этих утверждений мы опустим. Если в решетке с дополнениями среди дополнений каждого элемента a можно выбрать элемент $a^{\perp}$, причем выделенные дополнения подчиняются следующим свойствам:

$$(a \wedge b)^{\perp} = a^{\perp} \vee b^{\perp};$$

$$(a \wedge b)^{\perp} = a^{\perp} \vee b^{\perp};$$

$$(a^{\perp})^{\perp} = a,$$

то решетка называется решеткой с ортодополнениями. Справедлива следующая, разрешающая проблему Варле-Грийе [4]

Теорема 3. 0-модулярная решетка с ортодополнениями модуляра.

Доказательство. Предположим противное. Тогда в решетке есть пятиэлементная немодулярная подрешетка $\{a < e < d,\ a < b < c < d\}$. Элементы $c \vee d'$ и $b \vee d'$ должны быть отличны от 1, т. к. в противном случае возникают характеристические для 0-модулярности подрешетки $\{0, c, d, d', 1\}$ и $\{0, b, d, d', 1\}$. К тому же, $b \vee d' < c \vee d'$, иначе подрешетка $\{0, b, c, d', c \vee d'\}$ была бы характеристической для 0-модулярности.

Рассмотрим подрешетку, порожденную элементами e, $b \vee d'$ и $c \vee d'$.

$$e \vee (b \vee d') = e \vee (c \vee d') = d \vee d' = 1;$$

$$e \wedge (b \vee d') = e \wedge d \wedge (b \vee d') = e \wedge b = a;$$

в силу О-модулярности (заметим, что 0-модулярная решетка с ортодополнениями 1-модулярна, т. к. $1^{\perp}=0$ и ортодополнения характеристической для 1-модулярности подрешетки образуют подрешетку, характеристическую для 0-модулярности). Таким же образом $e\wedge(c\vee d')=a$.

Следовательно, мы получили противоречие, обнаружив характеристическую для 1-модулярности подрешетку $\{a, e, b\vee d', c\vee d', 1\}$.

Цепь $a_0<\ldots<a_n$, принадлежащая частично упорядоченному множеству с 0 и 1, называется композиционным рядом, если $a_0=0$, $a_n=1$ и все интервалы $[a_{i-1}, a_i]$ $(i=1, \ldots, n)$ — простые. Число n называется длиной композиционного ряда.

Решетка L с 0 называется решеткой со слабыми дополнениями, если для любой пары a, b $(a<b)$ элементов из L найдется такой элемент c, что $a\wedge c=0$ и $b\wedge c\neq 0$.

Лемма. Если в 0-модулярной решетке L со слабыми дополнениями a и b — два различных элемента, то если интервал $[b, a\vee b]$ не прост, не прост и интервал $[a\wedge b, a]$.

Доказательство. Другими словами, требуется доказать, что если в L существует пятиэлементная немодулярная подрешетка $\{a\wedge b<b<c<a\vee b,\ a\wedge b<a<a\}$, то между $a\wedge b$ и a есть хотя бы один элемент (см .рис. 2).

В силу слабой дополнительности, существует элемент a' такой, что $a\wedge a'=k\neq 0$, $(a\wedge b)\wedge a'=0$. Ясно, что элемент $k\wedge\wedge b=0$, т. к. $k\wedge b\leqslant a\wedge b$ и, следовательно, $k\wedge b\leqslant k\wedge(a\vee b)==0$. Точно так же $k\wedge c=0$. Рассмотрим подрешетку, порожденную элементами k, b, c. Элементы $k\vee b$ и $k\vee c$ обязательно должны быть различны, иначе эта подрешетка будет характеристической для 0-модулярности. Т. к. элементы $k\vee b$ и a являются верхними гранями элементов $k, a\wedge b$, то a и $k\vee b$ больше $k\vee(a\wedge b)$, то есть между элементами $a\wedge b$ и a появляется элемент $k\vee(a\wedge b)$.

Теорема 4. В 0-модулярной решетке со слабыми дополнениями, обладающей композиционным рядом, не может быть цепей большей длины.

Доказательство. Отделом назовем интервал, наименьший и наибольший элементы которого являются элементами какого-либо композиционного ряда. То есть $[a, b]$ — отдел, если элементы a и b принадлежат какому-то композиционному ряду; этот отдел будем обозначать $|a, b|$.

Длиной отдела $|a, b|$ назовем количество элементов в кратчайшем среди всех пролегающих между элементами

a и элементом b отрезков композиционных рядов.

Так как, в силу обладания композиционным рядом, вся решетка — тоже отдел ($|0, 1|$), то теорему можно доказывать индукцией по длине отдела.

1) Длина отдела равна трем, ясно, что между элементами a и c (см. рис. 3) не может пролегать цепь большей, чем три, длины, так как по лемме в простом интервале $[a, b]$ должен появиться элемент d.

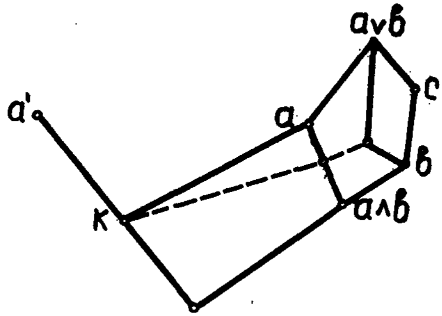


Рис. 2

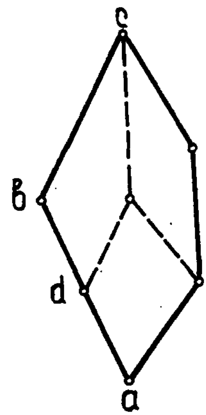


Рис. 3

2) Предположим, что мы доказали утверждение теоремы для длины отдела, равной n. Рассмотрим отдел длины $n+$ $+1\,|a_0, a_n|$, в котором пролегает отрезок композиционного ряда $a_0<\ldots<a_n$. Пусть в $[a_0, a_n]$ есть цепь большей длины:

$$a_0=b_0<\ldots<b_{n+1}=a_n.$$

Рассмотрим цепь $a_1\leqslant a_1\vee b_1\leqslant\ldots\leqslant a_1\vee b_{n+1}=a_n$, она принадлежит отделу $|a_1, a_n|$, длина которого равна n. Следовательно, по индуктивному предположению, для некоторого номера i имеем $a_1\vee b_{i-1}=a_1\vee b_i$. Будем считать, что i — наименьший из таких номеров. Если $i=1$, то есть $a_1=a_1\vee b_1$, то $a_0<b_1\leqslant a_1$, откуда $a_1=b_1$, в силу простоты $[a_0, a_1]$. Но тогда $|a_1, a_n|$ содержит цепь $a_1=b_1<\ldots<b_{n+1}=a_n$ длины $n+1$, что противоречит предположению индукции.

Пусть $i>1$. Если $a_1\Delta b_{i-1}=a_1\Delta b_1$, то появляется пятиэлементная немодулярная подрешетка $\{a_0<b_{1-1}<b_1<a_1\vee b_{i-1}$, $a_0<a_1<a\vee b_{i-1}\}$. Следовательно интервал $[a_0, a_1]$ должен быть не прост по лемме — противоречие с композиционностью

ряда. Таким образом, $a_1 \wedge b_{i-1} \neq a_1 \wedge b_i$. В этом случае остается лишь одна возможность (так как $a_1 \wedge b_{i-1}$ и $a_1 \wedge b_i$ принадлежат простому интервалу $[a_0, a_1]$): $a_1 \wedge b_{i-1} = a_0$ и $a_1 \wedge b_1 = a_1$. Отсюда $a_1 < b_i$, следовательно, $b_i = a_1 \vee b_{i-1} = a_1 \vee b_i$. Поскольку $a_1 \vee b_0, \ldots, a_1 \vee b_{i-1}$ различны, то возникает цепь $a_1 < a_1 \dot{\vee} b_1 < < \ldots < a_i \dot{\vee} b_{1-1} = b_1 < b_{i+1} < \ldots < b_{n+1} = a_n$, состоящая из $n+1$ элементов и принадлежащая отделу $|a_1, a_n|$ длины n. Это противоречие с предположением индукции и доказывает теорему.

Следствие. 1) В решетке с дополнениями, имеющей композиционный ряд, все композиционные ряды имеют одинаковую длину и вообще не может быть цепей с большей, чем у композиционных рядов, длиной.

2) 0-модулярная решетка с дополнениями, обладающая композиционным рядом, модулярна.

Доказательство. Первый пункт сразу следует из статьи Варле и Грийе [4], которые доказали, что в 0-модулярной решетке из дополнительности следует слабая дополнительность.

2) Мак-Лафлин [3] доказал, что атомная решетка с дополнениями модулярна, если она не содержит пятиэлементной немодулярной подрешетки, наибольший и наименьший элементы которой совпадают с 1 и 0 всей решетки.

Ясно, что 0-модулярная решетка с дополнениями, обладающая композиционным рядом, атомна (из первого пункта этого следствия).

Отсюда и из условия Мак-Лафлина следует ее модулярность.

Предложение 5. Если в 0-модулярной решетке

$$a = p_1 \vee \ldots \vee p_n,$$

где $p_1, \ldots, p_n$ — атомы, то решетка $[0, a]$ обладает композиционным рядом.

Этот результат ввиду предложения 3 тривиально доказывается индукцией по $m (a = p_1 \dot{\vee} \ldots \dot{\vee} p_m)$.

Ненулевой элемент $a \in L$ называется неразложимым, если он не может быть представлен в форме $a = a_1 \dot{\vee} a_2$, где a_1, $a_2 \neq 0$.

Аналогично теореме 14[1, стр. 108] доказывается

Предложение 6. Если 0-модулярная решетка L со слабыми дополнениями обладает композиционным рядом, то всякий ненулевой элемент $a \in L$ представляется в форме $a = a_1 \dot{\vee} \dot{\vee} \ldots \dot{\vee} a_m$, где a_i — неразложимые элементы.

Теорема 5. В 0-модулярной решетке L, обладающей композиционным рядом, эквивалентны следующие свойства:

(1) L — решетка с дополнениями;

(2) L — решетка со слабыми дополнениями;

(3) каждый элемент из L представляется как прямая сумма атомов;

(4) 1 представляется как сумма атомов.

Доказательство. То, что из (1)→(2) доказано Варле и Грийе [4], импликация (2)→(3) следует из таких соображений. Пусть L — со слабыми дополнениями, a-неразложимый элемент. Возьмем в композиционном ряду интервала $[0, a]$ элемент b, непосредственно предшествующий a. В силу того, что L — со слабыми дополнениями и $[b, a]$ — прост, найдется такой элемент $c \in L$, что $a = b + c$, откуда $a = c$ и, следовательно, $b = a \wedge b = c \wedge b = 0$. Таким образом, элемент a оказывается атомом и свойство (3) вытекает из предложения 6. Импликация (3)→(4) очевидна. Пусть, наконец $1 = p_1 \vee ... \vee p_n$, где p_i атомы, и $a \in L$. Тогда $1 = a \nabla p_1 \nabla ... \vee p_n$ и, в силу предложения 4, $1 = a_1 \dot{\vee} (p_1 \dot{\vee} ... \dot{\vee} p_m)$, что и доказывает справедливость свойства (1).

Таким образом и 0-модулярная решетка со слабыми дополнениями, обладающая композиционным рядом, является модулярной.

Направленным множеством называется частично упорядоченное множество D, в котором для любых $d_1, d_2 \in D$ найдется элемент $d \in D$ такой, что $d \geqslant d_1, d_2$.

Полная решетка L называется непрерывной, если $a \wedge \wedge \sup D = \sup(a \wedge D)$ для любого $a \in L$ и любого направленного множества $D \subset L$.

Теорема 6. Если 0-модулярная решетка непрерывна и ее единица равна точной верхней грани множества всех атомов, то она атомна и обладает дополнениями, а следовательно, модулярна.

Доказательство аналогично доказательству пункта б) теоремы 20 [1, стр. 116].

Результат этой теоремы можно переформулировать и по-другому: геометрическая 0-модулярная решетка — модулярна.

В. Н. Салий и Н. П. Козырь [2] доказали, что решетка L тогда и только тогда изоморфна решетке всех подалгебр идемпотентной алгебры, когда L является геометрической решеткой. Это позволяет заметить, что в решетках подалгебр идемпотентной алгебры модулярность и 0-модулярность эквивалентны, и, следовательно, для идемпотентных полугрупп модулярность эквивалентна булевости.

Легко видеть, что решетка подалгебр некоторой идемпотентной алгебры является решеткой со слабыми дополнениями. В самом деле, если некоторая подалгебра A включается в некоторую подалгебру B, то всегда найдется подалгебра C такая, что $BC\cap\varnothing$, а $A\cap C=\varnothing$. За C можно взять подалгебру, состоящую из любого элемента B, не принадлежащего A.

Таким образом, оказывается, что для 0-модулярных решеток со слабыми дополнениями обладание композиционным рядом не является необходимым условием модулярности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М., 1970.

2. Салий В. Н., Козырь Н. П. Геометрические решетки и идемпотентные алгебры. — В сб.: Упорядоченные множества и решетки, вып. 2. Изд-во Сарат. ун-та, 1974, 91—99.

3. McLaughlin J. E. Atomic lattices with unique comparable complements. — «Proc. Amer. Math. Soc.», 1956, 7, 864—866.

4. Grillet P. A., Varlet J. C. Complementedness conditions in lattices. — «Bull. Soc. roy. sci. Liege.», 1967, 36, N 11—12, 628—642.

М. ШТЕРН

О КОНЕЧНО-МОДУЛЯРНЫХ АС-РЕШЕТКАХ n-ной СТУПЕНИ

Для идеала S решетки с 0 следующие импликации верны: S стандартный идеал $\to$ S проективный идеал $\to$ S p-идеал.

Возникает вопрос о том, при каких условиях и обратные импликации истинны. Работы [1] и [3] посвящены этой проблеме.

В работах [10] и [11] мы специально занимаемся вопросом, при каких условиях идеал $F(L)$ конечных элементов AC-решетки L будет стандартным идеалом и когда для $F(L)$ верны и обратные к вышеупомянутым импликациям. Кажется, что этот вопрос важен в связи с уяснением структуры некоторых AC-решеток (см. например, [9]).

В случае сильно планарных AC-решеток мы в [10] дали необходимые и достаточные условия для того, чтобы $F(L)$ был стандартным идеалом. В [12] мы применили эти результаты к атомистическим решеткам Вилкокса. В случае матроидных решеток мы дали ответ на то, когда некоторые обобщения идеала $F(L)$ являются стандартными (см. [13]).

М. Ф. Яновиц в письме ко мне ставил следующий вопрос: можно ли обобщить результаты [10] и на геометрии n-ой ступени, которые Р. Вилле определил в [14]?

В предлагаемой заметке даем положительный ответ на этот вопрос. По аналогии с определением Р. Вилле назовем здесь изучаемые решетки конечно-модулярными AC-решетками n-ой ступени (они являются естественным обобщением сильно планарных AC-решеток).

В следующем параграфе приведем самые главные использованные нами понятия, определения и теоремы. После этого даем необходимые и достаточные условия для того, чтобы идеал $F(L)$ конечных элементов AC-решетки являлся стандартным и проективным. В конце покажем, что для конечно-модулярной AC-решетки n-ой ступени $F(L)$ будет стандартным идеалом тогда и только тогда, когда $F(L)$ — проективный идеал. В ходе текста сформулируем два открытых вопроса.

Предварительные сведения

Элемент a решетки L называется верхним соседом элемента $b\in L$, и мы пишем $b\prec a$, если $b<a$ и из $b\leqslant x\leqslant a$ следует или $x=b$ или $x=a$. Если $0\prec p$ в решетке с 0, то p называется атомом. Решетка с 0 атомистическая, если каждый элемент, отличный от нуля, является объединением атомов. AC-решетка — это атомистическая решетка, в которой истинна следующая импликация: если p атом и $a\wedge p=0$, то $a\prec a\vee p$. Относительно теории AC-решеток мы ссылаемся на [6].

Пара (a, b) элементов решетки L называется модулярной, если

$$c\leqslant b\longrightarrow(c\vee a)\wedge b=c\vee(a\wedge b),$$

в этом случае пишем $(a, b)M$. Элемент $a\in L$ называется модулярным, если $(x, a)M$ для всех $x\in L$.

Элемент a решетки с 0 назовем конечным, если $a=0$ или если a является объединением конечного числа атомов. Решетка L с 0 называется конечно-модулярной, если каждый конечный элемент решетки L является и модулярным элементом.

Теорема 1 ([6, теорема 9.5, стр. 42]). AC-решетка конечно-модулярна тогда и только тогда, если из $z\prec z\vee y$ следует $z\vee y\prec y$.

Через $F(L)$ обозначаем множество всех конечных элементов AC-решетки L. $F(L)$ всегда является идеалом (см. [6, Лемма 8.8, стр. 37]). Согласно [6, Определение 8.5, стр. 36], каждому $a \in F(L)$, можно поставить в соответствие однозначно определенное неотрицательное целое число $h(a)$ (высота элемента a).

Следующее определение обобщает понятие конечно-модулярной решетки.

Определение 2. AC-решетка L называется конечно-модулярной n-ой ступени, если существует целое число ($n=0$, 1, 2, ...) такое, что для каждого элемента $a \in L$ с $h(a)=n$ главный дуальный идеал $[a)$ является конечно-модулярной AC-решеткой.

Сразу же видно, что конечно-модулярные AC-решетки 0-ой ступени совпадают с конечно-модулярными AC-решетками.

Данное определение имеет свои корни в геометрии. Так, например, проективные геометрии суть (конечно) модулярные AC-решетки (0-ой ступени); сильно планарные геометрии (см. [7] и [5]) — конечно-модулярные AC-решетки 1-ой ступени (сюда надо относить и аффинные геометрии). Геометрии Мебиуса (см. [2]) — конечно-модулярные AC-решетки 2-ой ступени. Введенные Р. Вилле [14] геометрии n-ой ступени суть примеры конечно-модулярных AC-решеток n-ой ступени.

В решетке L с 0 определим перспективность следующим образом: элементы a, $b \in L$ называются перспективными (в знаках $a \sim b$), если существует $x \in L$ такой, что $a \vee x = b \vee x$ и $a \wedge x = b \wedge x = 0$ (см. [6, Определение 6.1, стр. 26]).

В дальнейшем нам понадобится и

Определение 3. Пусть L есть AC-решетка и y, $z \in L$. Если $y \wedge z \in F(L)$ и $z \lessdot z \vee y$, то пишем $y <\!/_{F(L)}\, z$. Если $y \wedge z = 0$ и $z \lessdot z \vee y$, то пишем $y <\!|\, z$.

Об отношении $<\!|$, являющемся обобщением понятия параллельности в аффинных геометриях, см. [6, Определение 17.1, стр. 72]. Очевидно, что отношение $<\!/_{F(L)}$ обобщает $<\!|$.

Согласно [1] назовем идеал S решетки L стандартным, если $I \wedge (S \vee K) = (I \wedge S) \vee (I \wedge K)$ для произвольных идеалов I, K решетки L.

Идеал S решетки L называется проективным (см. [3]), если из $a \in S$, $b \in L$, $a \vee x \geqslant b \vee x$ и $a \wedge x \geqslant b \wedge x$ (где $x \in L$) следует $b \in S$.

Идеал S решетки L с 0 называется p-идеалом, если S замкнут относительно перспективности.

F(L) как проективный идеал

Для идеала $F(L)$ произвольной AC-решетки рассматриваем пять условий:

(I) $F(L)$ стандартный идеал;

(II) $F(L)$ проективный идеал;

(III) $F(L)$ p-идеал;

(IV) $y < |_{F(L)} z \to y \in F(L)$;

(V) $y < | z \to y \in F(L)$.

Для этих условий истинны следующие импликации:

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{I}) & & \\ \downarrow & & \\ (\mathrm{II}) & \to & (\mathrm{IV}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{III}) & \to & (\mathrm{V}) \end{array}$$

Истинность импликаций (I)⟶(II)⟶(III) известна для произвольных идеалов решетки с 0. В [10] мы доказали (I)⟶(II)⟶(III)⟶(V)⟶(I) для сильно планарных AC-решеток и в [11] доказали то же самое и для AC-решеток с начальными дополнениями. Здесь, в теореме [5], докажем (II)⟶(IV) для произвольной AC-решетки. В теореме 6 докажем (I)⟶(II)⟶(IV)⟶(I) для конечно-модулярных AC-решеток n-ой ступени (это и есть искомое обобщение вышеупомянутого результата из [10]). Истинность импликации (IV)→(V) сразу же видна из определения 3.

Э. Т. Шмидт [8] дал пример проективного идеала, вообще не являющегося ядром гомоморфизма, а поэтому не являющегося стандартным идеалом. М. Ф. Яновиц показал, что p-идеал в общем случае не является проективным. Однако в этих двух примерах речь идет не об AC-решетках. До сих пор не смогли дать соответствующие примеры для идеала $F(L)$ в AC-решетке.

Проблема. Дать пример AC-решетки, в которой $F(L)$ — проективный идеал, но не стандартный идеал, и пример AC-решетки, в которой $F(L)$ является p-идеалом, но не проективным идеалом.

М. Ф. Яновиц, далее, сообщил мне пример AC-решетки, в которой для $F(L)$ из (V) не следует (III).

Проблема. Дать пример AC-решетки, в которой (V) истинно, но (IV) ложно, и пример AC-решетки, в которой (IV) истинно, но $F(L)$ не является проективным идеалом.

Нам понадобится следующая

Теорема 4 (см. [10]). Пусть L есть AC-решетка. Тогда следующие два условия эквивалентны:

(a) $F(L)$ стандартный идеал;

($б$) если $[a, a\vee b]$ и $[a\wedge b, b]$ — транспонированные интервалы в L и интервал $[a, a\vee b]$ имеет конечную длину, то и $[a\wedge b, b]$ имеет конечную длину.

Теперь дадим характеризацию $F(L)$ как проективного идеала.

Теорема 5. Пусть L есть AC-решетка. Тогда следующие три условия эквивалентны:

(a) $F(L)$ — прективный идеал (условие (II));

($б$) для $a, b, x\in L$ истинна импликация: если $a\in F(L)$, $a\wedge x=b\wedge x$ и $a\vee x=b\vee x$, то $b\in F(L)$;

($в$) если $y, z\in L$ и $y<|_{F(L)}z$, то $y\in F(L)$ (условие (IV)).

Доказательство. (a)$\to$($б$) следует из определения проективного идеала.

($б$)$\to$($в$). Пусть имеем $y<|_{F(L)}z$ для $y, z\in L$. Согласно [6, Лемма 8.18, стр. 39], интервал $[z\wedge y, z\vee y]$ тоже является AC-решеткой и поэтому существует $a\succ z\wedge y$ такое, что $z\wedge a=z\wedge y$ и $z\vee a=z\vee y$. Из-за $z\wedge y\in F(L)$ имеем $a\in F(L)$, и следовательно, $y\in F(L)$, в силу ($б$).

($в$)$\to$(a). Положим, что $F(L)$ не является проективным идеалом. Тогда существуют элементы $a, b, x\in L$ такие, что $a\in F(L)$, $a\vee x\geqslant b\vee x$, $a\wedge x\geqslant b\wedge x$, но $b\notin F(L)$. Так как $x\leqslant x\vee b\leqslant x\vee a$ и $[x, x\vee a]$ имеет конечную длину, то $[x, x\vee b]$ также имеет конечную длину. Это значит, что существует конечное число элементов $c_0, c_1, \ldots, c_k$ со свойством $c_0=x\prec c_1\prec\ldots\prec c_k=b\vee x$.

Тогда существует наибольший индекс i, $0\leqslant i\leqslant k$, для которого $b\wedge c_i\in F(L)$, но $b\wedge c_{i+1}\notin F(L)$. $b\wedge c_{i+1}\nleqslant c_i$, так как в противном случае $b\wedge c_{i+1}\leqslant b\wedge c_i\in F(L)$, что противоречит нашему предположению об индексе i. Отсюда следует

(1) $c_i\prec c_{i+1}=c_i\vee(b\wedge c_{i+1})$.

Кроме этого, имеем

(2) $(b\wedge c_{i+1})\wedge c_i=b\wedge(c_{i+1}\wedge c_i)=b\wedge c_i\in F(L)$.

(1) и (2) вместе означают, что $b\wedge c_{i+1} < |_{F(L)} c_i$, где $b\wedge \wedge c_{i+1} \notin F(L)$. Этим теорема доказана.

Конечно-модулярные AC-решетки n-ой ступени

Теорема 6. Пусть L конечно-модулярная AC-решетка n-ой ступени. Тогда следующие три условия эквивалентны:

(a) $F(L)$ стандартный идеал (условие (I));

($б$) $F(L)$ проективный идеал (условие (II));

($в$) $y < |_{F(L)} z \rightarrow y \in F(L)$ (условие (V)).

Доказательство. (a)$\rightarrow$($б$). Как уже заметили, эта импликация истинна для произвольных идеалов.

($б$)$\rightarrow$($в$). Это следует из теоремы 5.

($б$)$\rightarrow$(a). Положим, что $F(L)$ проективный идеал, и покажем, что $F(L)$ тоже стандартный идеал. Ввиду теоремы 4, достаточно показать следующую импликацию: если интервал $[a, a\vee b]$ имеет конечную длину, то и транспонированный к нему интервал $[a\wedge b, b]$ имеет конечную длину.

Положим, что $[a, a\vee b]$ имеет конечную длину. Тогда существует конечная цепь $a = d_0 \prec d_1 \prec \ldots \prec d_t = a\vee b$.

Относительно высоты $h(a\wedge b)$ элемента $a\wedge b$ различаются два случая.

Если $h(a\wedge b) \geqslant n$ (где n — ступень AC-решетки, о чем идет речь), то существует $e \in L$ со свойством $e \leqslant a\wedge b$, $h(e) = n$ и главный дуальный идеал $[e)$ является конечно-модулярной AC-решеткой (см. определение [2]).

Тогда $a\wedge b, a, b, a\vee b \in [e)$ и $[a\wedge b, b]$ имеет конечную длину, так как, ввиду теоремы 1, либо $b\wedge d_i \prec b\wedge a_{i+1}$, либо $b\wedge d_i = b\wedge d_{i+1}$, $0 \leqslant i \leqslant t$.

Если $h(a\wedge b) < n$, то существует наибольший индекс j, $0 \leqslant j \leqslant t$, со свойством $h(b\wedge d_j) \leqslant n$, но $h(b\wedge d_{j+1}) > n$.

Из-за $b\wedge d_j < b\wedge d_{j+1}$ мы можем найти элемент $f \in L$ с $h(f) = n$ и $b\wedge d_j \leqslant f < b\wedge d_{j+1}$, так как L AC-решетка. Здесь $[f)$ опять конечно-модулярная AC-решетка (см. определение 2), и ввиду теоремы 5 следует, что интервал

$$[b\wedge d_{j+1}, b] \tag{3}$$

имеет конечную длину, потому что $b\wedge d_{j+1}, b, d_{j+1}, b\vee d_{j+1} \in [f)$. Так как $b\wedge d_j \in F(L)$, интервал

$$[0, b\wedge d_j] \tag{4}$$

тоже имеет конечную длину. Наконец, истинны отношения

$$(b\wedge d_{j+1})\wedge d_j = b\wedge d_j \in F(L) \quad \text{и} \quad d_j \prec d_{j+1} = d_j \vee (b\wedge d_{j+1});$$

следовательно, имеем $b \wedge d_{j+1} < |_{F(L)} d$ (см. определение 3). Из этого получаем $b \wedge d_{j+1} \in F(L)$, на основе теоремы 5, так как $F(L)$ является проективным идеалом. Поэтому интервал

$$(5) \qquad [b \wedge d_j, b \wedge d_{j+1}]$$

также имеет конечную длину. Из того, что интервалы (3), (4) и (5) имеют конечную длину, следует конечная длина интервала $[a \wedge b, b]$, чем теорема доказана.

Следствие 7 ([10, теорема 7]). Пусть L — сильно планарная AC-решетка (то есть конечно-модулярная, AC-решетка 1-ой ступени). Тогда следующие три условия эквивалентны;

(*а*) $F(L)$ — стандартный идеал (условие (I));

(*б*) $F(L)$ — p-идеал (условие (III));

(*в*) $y < |z \rightarrow y \in F(L)$ условие (V)).

Доказательство. Легко видеть, что (*а*)→(*б*)→(*в*).

(*в*)→(*а*). Положим, что (*в*) истинна. Рассмотрим $y, z \in L$ с $y < |_{F(L)} z$, то есть $z \prec z \vee y$ и $y \wedge z \in F(L)$ (см. определение 3). Если $y \wedge z = 0$, то и $y < |z$ истинно, и из (*в*) получаем $y \in F(L)$. Если $y \wedge z > 0$, то $y \wedge z \prec y$, в силу теоремы 1. Из этого следует, что $y \in F(L)$, так как $y \wedge z \in F(L)$. Поэтому условие (*в*) теоремы 6 выполиено, и по условию (*а*) теоремы 6 следует, что $F(L)$ — стандартный идеал.

Следствие 8 [4, теорема 4.6]). Пусть L — конечно-модулярная AC-решетка. Тогда $F(L)$ — стандартный идеал.

Доказательство. Положим, что $y < |z$ в L. Из теоремы следует, что $y \wedge z = 0 \prec y$, т. е. $y \in F(L)$. В силу следствия 7 получаем, что $F(L)$ — стандартный идеал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gratzer G., Schmidt E. T. Standard ideals in lattices. — «Acta Math. Acad. Sci. Hung.», 1961, 12, 17—86.

2. Hoffman A. J. On the foundations of inversion geometry. — «Trans. Amer. Math. Soc.», 1951, 71, 218—242.

3. Janowitz M. F. A characterization of standard ideals. — «Acta Math. Acad. Sci. Hung.», 1965, 16, 289—301.

4. Janowitz M. F. On the modular relation in atomistic lattices. — «Fund. Math.», 1969/70, 66, 337—346.

5. Jonsson B. Lattice-theoretical approach to projective and affine geometry. — «Studies in logic». Amsterdam, 1959, pp. 188—203.

6. Maeda F., Maeda S. Theory of Symmetric Lattices. Berlin-Heidelberg — New York, 1970.

7. Sasaki U. Lattice theoretic characterization of geometries satisfying «Axiome der Verknupfung». — «J. Sci. Hiroshima», 1952/53, 417—423.

8. Schmidt E. T. Remark on a paper of M. F. Janowitz. — «Acta Math. Acad. Sci. Hung.», 1965, 16, 432—436.

9. Stern M. A non-modular affine matroid lattice satisfying Euclids strong parallel aziom is simple. — «Publ. Math. Debrecen», 1975, 22, 43—46.

10. Stern. M. Strongly planar AC-lattices in which the ideal the finite elements is standard. — «Acta Sci. Math. Acad. Hung».

11. Stern M. On AC-lattices in which the ideal of the finite elements is standard. — «Beitrage zur Algebra und Geometrie», 1976, 5.

12 Stern M. Atomistic Wilcox lattices in which the ideal of the finite elements is standard. — «Beitrage zur Algebra und Geometrie».

13. Stern M. Eine Charakterisierung gewisser Standardideale in Matroidverbanden. — «Publ. Math. Debrecen».

14. Wille R. Verbandstheoretische Charakterisierung n-stufiger Geometrien. — «Arch. Math.», 1967, 18, 465—468.

СОДЕРЖАНИЕ

УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И РЕШЕТКИ

Межвузовский научный сборник

ВЫПУСК 5

Редактор Л. И. Носова
Технический редактор Л. В. Агальцова
Корректор Л. Е. Лещинская

НГ10604. Сдано в набор 16/III-1977 г. Подписано к печати 11.XII-1978 г. Формат $60\times84^1/_{16}$. Бум. тип. № 3. Усл. печ. л. 6,97(7,5+1 вкл.). Уч.-изд. л. 7,1. Тираж 400. Заказ 4237. Цена 1 руб.

Издательство Саратовского университета,
Университетская, 42
Типография издательства «Коммунист»,
Волжская, 28

УДК 519.4

Глобальные операции в квазиупорядоченных множествах. Аммосова Н. В.
Упорядоченные множества и решетки, вып. 5. Изд-во Сарат. ун-та, 1978, с. 3—7.

Квазиупорядоченное множество, любое непустое подмножество которого имеет по крайней мере одну точную верхнюю грань и по крайней мере одну точную нижнюю грань, называется полной псевдорешеткой. Полные псевдорешетки рассматриваются как глобальные унарные оперативы.

УДК 519.4

***RL*-решетки соответствий групп.** Бредихин Д. А.
Упорядоченные множества и решетки, вып. 5. Изд-во Сарат. ун-та, 1978, с. 7—11.

Рассматривается решетка соответствий группы вместе с добавочными унарными операциями взятия тождественного бинарного отношения на первой или второй проекции данного соответствия. Доказывается, что группы с изоморфными RL — решетками соответствий одновременно разрешимы или нет.

УДК 519.4

Структура конгруэнций унарной алгебры. Егорова Д. П.
Упорядоченные множества и решетки, вып. 5. Изд-во Сарат. ун-та, 1978, с. 11—44.

Полное описание алгебр с одной унарной операцией, решетка конгруэнций которых является цепью, дистрибутивна или модулярна.

УДК 519.4

О решетках квазимногообразий. Игошин В. И.
Упорядоченные множества и решетки, вып. 5. Изд-во Сарат. ун-та, 1978, с. 44—55.

Все решетки квазимногообразий полудистрибутивны. Квазимногообразие полудистрибутивных решеток не характеризуемо и не определяется своими конечными элементами. Описана решетка всех подмногообразий многообразия, порожденного пятиэлементной немодулярной решеткой и всеми решетками высоты два.

УДК 519.4

Обобщенные модули над инверсными полукольцами. Коваленко Б. Б.

Упорядоченные множества и решетки, вып. 5. Изд-во Сарат, ун-та, 1978, с. 55—62.

Вводится понятие радикала инверсного полукольца, описывается ряд его свойств. Фактор коммутативного инверсного полукольца по его радикалу полупрост. Изучаются абстрактно-алгебраические свойства обобщенных модулей.

УДК 519.4

Генераторы и когенераторы в категориях внутренние нормальных векторных решеток. Колдунов А. В.

Упорядоченные множества и решетки, вып. 5. Изд-во Сарат. ун-та, 1978, с. 62—67.

В двух категориях векторных решеток описывается строение генераторов и в связи с этим исследуются проективные и инъективные объекты.

УДК 519.4

Необходимые условия изометрической вложимости конечномерной модулярной структуры в модулярную структуру с дополнениями. Куринной Г. Ч.

Упорядоченные множества и решетки, вып. 5. Изд-во Сарат. ун-та, 1978, с. 67—76.

Найдены необходимые условия, указанные в заглавии. Для планарных и дистрибутивных решеток они оказываются и достаточными.

УДК 519.4

О вложениях дистрибутивных структур в булевы алгебры. Пашенков В. В.

Упорядоченные множества и решетки, вып. 5. Изд-во Сарат. ун-та, 1978, с. 76—82.

Доказано, что наименьшая булева алгебра, содержащая в качестве подрешетки данную дистрибутивную решетку, сохраняет все дистрибутивные точные верхние и нижние грани, существующие в этой решетке.

УДК 519.4

Универсальные полигоны над дистрибутивными структурами. Раднев П.

Упорядоченные множества и решетки, вып. 5. Изд-во Сарат. ун-та, 1978, с. 82—90.

Предлагается конструкция полигона над данной дистрибутивной решеткой, в естественном смысле свободно порождаемого данным упорядоченным множеством. Выясняется, когда этот полигон является проективным.

УДК 519.4

Игры с упорядоченными исходами и монокомпактно порожденные решетки. Р о з е н В. В.

Упорядоченные множества и решетки, вып. 5. Изд-во Сарат. ун-та, 1978, с. 90—97.

Показано, что каждая монокомпактно порожденная решетка ассоциирована с некоторым отношением квазипорядка. Теоретико-решеточные результаты применяются к играм, исходы которых упорядочены.

УДК 519.4

0-модулярные решетки. С а в е л ь з о н О. И.

Упорядоченные множества и решетки, вып. 5. Изд-во Сарат. ун-та, 1978, с. 97—107.

Показано, что требование модулярности во многих известных теоремах (теорема Куроша-Орэ, например) является лишь традиционным и что на самом деле, в этих предложениях используется лишь 0-модулярность.

УДК 519.4

О конечно-модулярных *AC*-**решетках** *n*-**ой ступени.** Ш т е р н М.

Упорядоченные множества и решетки, вып. 5. Изд-во Сарат. ун-та, 1978, с. 107.

Выясняется, при каких условиях идеал конечных элементов является стандартным идеалом.

θ	$\tilde{\theta}$ \ θ'	1
1	2	$\exists x \in C_0, y \in C_1, x(\tilde{\theta} \vee \theta')y$ $x \not\equiv y(\theta \vee \theta')$
1	3	$\exists x \in C_0, y \in C_2, x(\tilde{\theta} \vee \theta')y$ $x \not\equiv y(\theta \vee \theta')$
1	4	$\exists x \in C_0, y \in C_2, x(\tilde{\theta} \vee \theta')y$ $x \not\equiv y(\theta \vee \theta')$
1	5	$\exists x \in C_1, y \in C_2, x(\tilde{\theta} \vee \theta')y$ $x \not\equiv y(\theta \vee \theta')$
2	4	$\exists x \in C_0, y \in C_2, x(\tilde{\theta} \vee \theta')y$ $x \not\equiv y(\theta \vee \theta')$
3	4	$\exists x \in C_0, y \in C_1, x(\tilde{\theta} \vee \theta')y$ $x \not\equiv y(\theta \vee \theta')$
5	4	$\exists x \in C_0, y \in C_1, x(\tilde{\theta} \vee \theta)y$ $x \not\equiv y(\theta \vee \theta')$