Р. Уокер

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
А. И. УЗКОВА

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва — 1952

ALGEBRAIC CURVES

by

R. J. WALKER

PRINCETON, NEW JERSEY

1950

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Книга Уокера является введением в алгебраическую геометрию в той ее части, которая связана с кривыми линиями. Две первые главы содержат все сведения из алгебры и проективной геометрии, необходимые для дальнейшего чтения книги, и делают ее доступной студенту второго курса университета. В третьей главе рассматриваются вопросы, связанные с особыми точками и точками пересечения алгебраических кривых. В последнем параграфе этой главы доказывается, что любая алгебраическая кривая квадратическими преобразованиями может быть обращена в кривую, имеющую лишь кратные точки с различными касательными. Четвертая глава посвящена степенным рядам и их приложениям. Здесь полностью решается вопрос об определении кратности точки пересечения алгебраических кривых, доказывается в полном объеме теорема Безу об общем числе точек пересечения двух кривых. Заканчивается эта глава теоремой Нётера о кривой, проходящей через все точки пересечения двух данных кривых. Пятая глава содержит изложение вопросов, связанных с рациональными и бирациональными преобразованиями. В этой же главе рассматриваются пространственные кривые, определяемые первоначально как образы плоских кривых при бирациональных преобразованиях. Заключительная глава вводит читателя в круг идей, связанных с бирациональными инвариантами кривой.

Как правило, автор лишь постепенно подводит читателя к более абстрактным понятиям. Он начинает с самых простых представлений об излагаемом предмете, постепенно знакомя читателя с возникающими при его изучении трудностями и делая, таким образом, естественным введение в дальнейшем аппарата, необходимого для преодоления этих трудностей. Так, при подсчете числа точек пересечения двух кривых сначала считаются лишь геометрически различные точки (гл. III), для их числа доказы-

вается ослабленная теорема Безу в виде неравенства, и лишь затем, когда читатель сам начинает испытывать неудовлетворенность от неумения считать каждую точку с необходимой кратностью, вводится аппарат (гл. IV), позволяющий легко дать надлежащее определение кратности точки пересечения, а также связать «кратную» точку кривой с несколькими «ветвями», имеющими центры в этой точке.

Автор разбирает большое количество конкретных примеров и, кроме того, приводит много задач для самостоятельных упражнений. Эти задачи не трудны, но требуют от читателя полного понимания изложенного в тексте материала, причем их решение должно привести к надежному овладению сообщенными методами. Некоторые параграфы сопровождаются, помимо вычислительных задач, еще несколькими теоремами, которые предлагается доказать читателю с помощью приемов, применявшихся автором.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Эта книга написана в качестве первоначального введения в алгебраическую геометрию. Материал и метод изложения выбраны в соответствии со следующими требованиями: 1) возможная элементарность изложения, 2) введение в изложение некоторых современных алгебраических методов подхода к проблемам алгебраической геометрии и раскрытие связей этих методов с более старыми аналитическими и геометрическими методами, 3) демонстрация применения общих методов к частным геометрическим вопросам. Эти требования привели к выбору материала, концентрирующегося вокруг бирациональных преобразований и линейных рядов на алгебраических кривых.

Опыт преподавания показал необходимость предварительного изложения некоторых сведений из алгебры и проективной геометрии. Это сделано в первых двух главах. Включение указанного материала делает изложение почти полностью независимым от других источников.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ниже указаны страницы, где дается определение символов (или впервые появляется соответствующий символ). Отрицание соотношения записывается косой чертой, проведенной через выражающий это соотношение символ.

Нумерация теорем и формул — последовательная по каждому параграфу. Ссылка «теорема 3.5» означает: теорема 5, § 3 той же главы, в которой ссылка помещена. Если теорема содержится в другой главе, указывается и глава. Например, «теорема IV—3.5» означает: теорема 5, § 3, гл. IV.

Глава I

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АЛГЕБРЫ

Как видно из самого названия, алгебраическая геометрия всегда связана с существенным использованием алгебры. С течением времени алгебраический аппарат занимает в ней все более и более важное место, и к настоящему времени значительная часть алгебраической геометрии стала, по существу, главой алгебры.

Поэтому безнадежно заниматься систематическим изучением этого предмета без надлежащей алгебраической подготовки. Материал этой главы подобран именно с целью обеспечения такой подготовки. Мы не пытаемся здесь изложить полностью какую-либо алгебраическую теорию и даем лишь те сведения, которые будут необходимы в дальнейшем.

Более полное изложение рассматриваемых в этой главе вопросов можно найти, например, в книге ван-дер-Вардена «Современная алгебра», т. 1 и 2, ГТТИ, 1947 г.

§ 1. СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1.1. Множества. Во всех математических рассуждениях мы интересуемся свойствами определенных классов объектов. Так, в элементарной алгебре мы имеем дело, главным образом, с действительными числами, в планиметрии — с точками плоскости. Говоря о каком-либо классе объектов, мы называем его *множеством*, а сами объекты — *элементами* этого множества. Если S — некоторое множество, а a — объект, то знак $a \in S$ выражает, что a есть элемент S. Знак $a \notin S$ выражает, что a не является элементом S.

Множество S называется *подмножеством* множества S', если каждый элемент из S является также элементом S'. В этом случае пишут $S \subset S'$ или $S' \supset S$. Например, если S_1 есть множество действительных чисел, S_2 — множество всех целых чисел, а S_3 — множество, состоящее из одного числа 3, то мы имеем $S_1 \supset S_2 \supset S_3$.

В силу нашего определения, каждое множество является подмножеством самого себя. Необходимым и достаточным условием того, что два множества совпадают, т. е. состоят из одних и тех же элементов, является то, что каждое из рассматриваемых множеств

является подмножеством другого. Если мы хотим подчеркнуть, что S есть подмножество S', но не совпадает с S', то мы говорим, что S — *собственное* подмножество S'.

Своеобразным множеством является *пустое* множество, вообще не содержащее элементов. Это множество, очевидно, будет подмножеством любого множества. Использование понятия пустого множества удобно во многих рассуждениях.

1.2. Однозначные отображения. Под *однозначным отображением* (или *преобразованием*) множества S в множество S' понимают любой закон, который каждому элементу a из S ставит в соответствие определенный элемент a' из S'. Элемент a', соответствующий a, называется *образом* a при рассматриваемом отображении. Отображение S в S' называется *взаимно однозначным соответствием*, если каждый элемент a' из S' соответствует точно одному элементу a из S. В таком случае определено также обратное отображение множества S' в S.

Привычные примеры отображений можно заимствовать из аналитической геометрии. Пусть S есть множество всевозможных пар (a, b) действительных чисел, а S' — множество точек эвклидовой плоскости. Тогда декартовы и полярные координатные системы определяют отображения множества S в S'. Отображение, определяемое любой декартовой координатной системой, является взаимно однозначным. Отображение же, определяемое полярной координатной системой, взаимно однозначным не будет. Отображения, связанные с проективными системами координат, будут рассмотрены в гл. II.

В каждом из различных типов множеств, которые встретятся нам в дальнейшем, будут определены некоторые соотношения между элементами или подмножествами. Отображение будет называться *гомоморфным* (или *гомоморфизмом*) по отношению к данной системе соотношений, если оно сохраняет эти соотношения, т. е. если образы любых элементов удовлетворяют тем же соотношениям, что и сами элементы. Взаимно однозначное соответствие, гомоморфное в обоих направлениях, называется *изоморфизмом*. Если множества S и S' имеют общее подмножество S_0 и если при некотором гомоморфизме S в S' каждый элемент из S_0 соответствует самому себе, то гомоморфизм называется гомоморфизмом *над* S_0. Например, если S есть множество комплексных чисел, S_1 — множество всех действительных чисел, то отображение, переводящее каждое число $a+bi$ в a, является гомоморфизмом S в S_1 над S_1, сохраняющим аддитивные соотношения между элементами.

Если два множества изоморфны по отношению к некоторым соотношениям, то, поскольку рассматриваются только эти соотношения, бесполезно делать различие между этими множествами, и

мы будем часто рассматривать изоморфные множества просто как совпадающие.

1.3. Классы эквивалентности. Когда мы говорим, что два элемента a и b некоторого множества S равны, $a=b$, это означает, что буквы a и b представляют один и тот же элемент из S. Соотношение равенства между элементами множества (точнее, между знаками, изображающими элементы) обладает следующими свойствами:

1. Рефлексивность: $a=a$.
2. Симметрия: из $a=b$ следует $b=a$.
3. Транзитивность: из $a=b$ и $b=c$ следует $a=c$.

Часто рассматриваются и другие соотношения, обладающие теми же свойствами. Такие соотношения обычно называются *соотношениями эквивалентности*. В качестве примера можно взять множество S положительных целых чисел и назвать два элемента из S эквивалентными, если их разность является четным числом. В таком случае свойства 1, 2 и 3 легко устанавливаются проверкой.

Пусть $\sim$ означает некоторое соотношение эквивалентности между элементами множества S. Для любого элемента $a \in S$ обозначим через S_a множество элементов из S, эквивалентных элементу a. В силу свойства 1, будет $a \in S_a$. Заметим теперь, что для любых элементов a и b будет либо $S_a = S_b$, либо множества S_a и S_b не имеют общих элементов. Действительно, если S_a и S_b содержат один и тот же элемент c, то $c \sim a$ и $c \sim b$, откуда следует, что $a \sim b$. Если теперь $d \in S_a$, то $d \sim a$, откуда следует, что $d \sim b$, а значит $d \in S_b$. Поэтому $S_a \subset S_b$. Но так как тем же путем получается, что $S_b \subset S_a$, то будет $S_a = S_b$. Поэтому множество S оказывается разбитым на непересекающиеся подмножества S_a. Эти подмножества называются *классами эквивалентности*.

Равенство $S_a = S_b$ имеет место тогда и только тогда, когда $a \sim b$. Действительно, если $a \sim b$, то $a \in S_b$, а так как $a \in S_a$, то мы должны иметь $S_a = S_b$. Наоборот, если $S_a = S_b$, то $a \in S_b$, а поэтому $a \sim b$. Таким образом, соотношение эквивалентности между элементами S может быть заменено соотношением равенства между некоторыми подмножествами множества S. Этот прием очень полезен, так как он освобождает нас от необходимости вводить различные обозначения для различных соотношений эквивалентности, которые мы встретим ниже.

§ 2. ОБЛАСТИ ЦЕЛОСТНОСТИ И ПОЛЯ

2.1. Алгебраические системы. Объектами, интересующими нас в элементарной алгебре, являются, главным образом, действительные числа. Замечательно, однако, что при этом мы не

обращаем внимания на *природу* этих объектов, а занимаемся только их *свойствами*, т. е. способами, которыми эти объекты могут комбинироваться, и соотношениями, которые при этом получаются. Алгебраическая система общего типа представляет собою некоторое множество S, для которого указаны правила или *аксиомы*, определяющие соотношения между элементами S. Следующая система аксиом определяет важный тип алгебраических систем, называемых *полями*.

A_1. Каждой упорядоченной паре a, b элементов S поставлен в соответствие определенный элемент из S, называемый *суммой* a и b и обозначаемый $a+b$.

A_2. $a+b=b+a$.

A_3. $(a+b)+c=a+(b+c)$.

A_4. Существует такой элемент $0 \in S$, что $a+0=0+a=a$ для любого $a \in S$. Элемент 0 называется *нулем*.

A_5. Для любого элемента a из S существует такой элемент $-a$, что $a+(-a)=-a+a=0$. Элемент $-a$ называется *противоположным* элементом для a.

A_6. Каждой упорядоченной паре a, b элементов S соответствует определенный элемент из S, называемый произведением a и b и обозначаемый через ab или $a \cdot b$.

A_7. $ab=ba$.

A_8. $(ab)c=a(bc)$.

A_9. Существует элемент $u \in S$, $u \neq 0$, такой, что $au=ua=a$ для любого $a \in S$. Элемент u называется *единицей*.

A_{10}. Для каждого элемента $a \neq 0$ из S существует такой элемент a^{-1}, что $aa^{-1}=a^{-1}a=u$. Элемент a^{-1} называется *обратным* для a.

A_{11}. $a(b+c)=ab+ac$; $(b+c)a=ba+ca$.

A_{12}. Если $ab=0$ и $a \neq 0$, то $b=0$.

Так как множество действительных чисел удовлетворяет всем этим условиям, то это множество является полем. Множество комплексных чисел и множество рациональных чисел также являются полями. Множество целых чисел не будет полем, так как аксиома A_{10} не выполнена. Остальные аксиомы в случае множества целых чисел выполнены.

Множество, для которого выполнены аксиомы $A_1, \ldots, A_9, A_{11}, A_{12}$, называется *областью целостности*.

Если ослабить условия еще более, оставив лишь условия $A_1, \ldots, A_6, A_8, A_{11}$, то придем к понятию *кольца*. Кольцо называется *коммутативным*, если выполнена также аксиома A_7.

Множество, удовлетворяющее условиям A_1, A_3, A_4, A_5, называется *группой*.

Примеры. 1. Пусть множество S состоит из двух элементов 0 и u со следующими правилами сложения и умножения:

$$0+0=u+u=0, \qquad 0+u=u+0=u,$$
$$00=0u=u0=0, \qquad uu=u.$$

Множество S есть поле.

2. Если в том же множестве S определить:

$$0+0=u+u=0, \qquad 0+u=u+0=u,$$
$$00=0u=u0=uu=0,$$

то S будет коммутативным кольцом, но не полем и не областью целостности.

3. Совокупность квадратных матриц заданного порядка при обычных правилах сложения и умножения является некоммутативным кольцом.

4. Множество непрерывных функций, определенных на интервале $-\infty < x < +\infty$, является коммутативным кольцом. Будет ли это кольцо областью целостности?

2.2. Области целостности. Наибольший интерес для алгебраической геометрии представляют поля и области целостности. Следующие свойства области целостности D вытекают непосредственно из аксиом (их доказательства мы опускаем).

D_1. Элементы 0 и u являются единственными. Для каждого $a \in D$ элементы $-a$ и a^{-1} однозначно определены.

D_2. Для любого конечного множества $a_1, \ldots, a_n$ элементов D однозначно определена сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ (или $\sum\limits_{i} a_i$, $\sum a_i$, если нет опасности смешения). Она не зависит от порядка последовательного образования попарных сумм. Произведение $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ также однозначно определено.

D_3. Если $a_1 = \ldots = a_n = a$, то пишут $\sum a_i = na = an$. В таком случае $n(ma) = (nm)a$, $(na)(mb) = (nm)ab$, $n(a+b) = na + nb$, $(n+m)a = na + ma$. Каждое из этих соотношений остается справедливым, если заменить n и m, соответственно, на nu и mu. Поэтому, если в качестве множителя появляется положительное целое число n, оно может быть отождествлено с элементом nu из D. В частности, мы будем писать 1 вместо u. Этот же прием может быть применен к отрицательным целым числам с помощью соотношения $(-n)a = n(-a)$.

D_4. Если $a_1 = \ldots = a_n = a$, то произведение $\prod a_i$ обозначается через a^n. При этом имеют место обычные правила действий со степенями.

D_5. $(\sum a_i)(\sum b_j) \ldots (\sum l_k) = \sum a_i b_j \ldots l_k$, где последнее суммирование распространяется на все произведения указанного

вида. В частности, имеет место «формула бинома»

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i,$$

где

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}, \quad 0! = 1, \; n! = 1 \cdot 2 \ldots n.$$

D_6. Вместо $a+(-b)$ обычно пишут $a-b$. В таком случае $a(-b) = -(ab)$, $(-a)(-b) = ab$, $a(b-c) = ab - ac$ и т. д.

D_7. $a0 = 0a = 0$ при любом a. Это является причиной исключения нуля в формулировке аксиомы A_{10}.

D_8. Если $ab = ac$ и $a \neq 0$, то $b = c$.

D_9. Если $a = bc$, то говорят, что a делится на b. При этом пишут $c = a/b$. Если $b \neq 0$ и c существует, то элемент c однозначно определен.

D_{10}. Если для некоторого элемента $a \neq 0$ из D найдется такое положительное целое число n, что $na = 0$, то $nb = 0$ при любом $b \in D$. Наименьшее число такого рода называется *характеристикой* области целостности D. Если таких целых чисел не существует, то говорят, что D имеет характеристику нуль.

2.3. Поля. Поля обладают всеми свойствами, указанными выше. Кроме того, они имеют еще следующие свойства:

F_1. Если $b \neq 0$, то a/b существует и равно ab^{-1}. Имеют место обычные свойства частных.

F_2. Если принять, по определению, $a^{-n} = (a^{-1})^n$, то обычные правила действий будут верны для степеней с любыми целыми показателями.

F_3. Если поле имеет характеристику 0, то $nu \neq 0$ при $n \neq 0$. Поэтому мы можем определить частное a/n равенством $a/n = a/nu$.

2.4. Гомоморфизмы областей целостности. Отображение области целостности D в область целостности D' будет называться гомоморфным, если оно сохраняет сложение и умножение. Другими словами, если a' и b' — образы элементов a и b, то образами $a+b$ и ab должны быть элементы $a'+b'$ и $a'b'$. Отсюда следует, что образами $a-b$, a/b, na будут $a'-b'$, a'/b', na'. Для того чтобы показать, например, что $a-b$ отображается на $a'-b'$, положим $c = a-b$. Тогда $a = b+c$, и поэтому должно быть $a' = b'+c'$, т. е. $c' = a'-b'$.

2.5. Упражнения. 1. Характеристика любой области целостности является либо нулем, либо простым числом.

2. а) Каждое поле характеристики нуль содержит подполе, изоморфное полю рациональных чисел.

б) Каждое поле характеристики 2 содержит подполе, изоморфное полю примера 1 из п. 2.1.

3. Пусть S — кольцо целых чисел и S' — поле примера 1 из п. 2.1. Определим отображение S в S' условиями

$$a \to 0, \quad \text{если } a \text{ четное.}$$

$$a \to u, \quad \text{если } a \text{ нечетное.}$$

Показать, что это отображение есть гомоморфизм.

4. Пусть K — поле, а S — множество всевозможных упорядоченных систем $(a_1, \ldots, a_n)$, состоящих из n элементов поля K. Определим в S сложение и умножение правилами

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$

$$(a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n) = (c_1, \ldots, c_n),$$

где $c_i = \sum_{j,k} \gamma_{ijk} a_j b_k$, а γ_{ijk} — определенные элементы из K. В таком случае S называется гиперкомплексной системой, или *алгеброй* над K. Показать, что для любой алгебры выполнены аксиомы $A_1, \ldots, A_6$, A_{11}. Алгебра будет коммутативной (т. е. будет удовлетворять условию A_7), если выполнены равенства $\gamma_{ijk} = \gamma_{ikj}$. Она будет ассоциативной (удовлетворять условию A_8), если всегда

$$\sum_s \gamma_{ijs}\gamma_{skl} = \sum_s \gamma_{isl}\gamma_{sjk}.$$

5. Показать, что поле комплексных чисел является алгеброй ранга $2\,(n=2)$ над полем действительных чисел, и определить в этом случае значения «структурных констант» γ.

6. Если $S \to S'$ — гомоморфное отображение поля S в кольцо S', то либо все элементы S отображаются в нуль кольца S', либо это отображение будет изоморфизмом S и некоторого подмножества S'_0 кольца S'.

7. Показать, что аксиома A_{12} следует из $A_1, \ldots, A_{11}$.

8. Показать, что система аксиом A_1, A_3, A_4, A_5 эквивалентна следующей:

A'_1. То же, что и A_1.

A'_3. То же, что и A_3.

A'_4. Существует хотя бы один такой элемент 0 из S, что $a + 0 = a$ для любого $a \in S$.

A'_5. Для каждого элемента a из S найдется хотя бы один элемент $-a$, такой, что $a + (-a) = 0$. (Прежде всего показать, что $-(-a) = a$.)

§ 3. ПОЛЯ ЧАСТНЫХ

Один из способов определения поля действительных чисел заключается в его построении из множества целых чисел путем ряда последовательных расширений. Одно из этих расширений состоит в переходе от целых чисел к рациональным, связанным с рассмотрением каждого рационального числа, как упорядоченной пары целых чисел. Этот же прием может быть применен для расширения любой области целостности до поля.

Теорема 3.1. *Для каждой области целостности D существует единственное поле K* [1]*, называемое полем частных D, такое, что*

1. $K \supset D$.

2. *Каждый элемент поля K является частным двух элементов из D.*

Доказательство. Поле K будет построено с помощью приема, описанного в п. 1.3. Пусть S есть множество всех пар (a, b) элементов D, в которых $b \neq 0$. Мы будем писать $(a, b) \sim (c, d)$ тогда и только тогда, когда существуют неравные нулю элементы ρ, σ из D, удовлетворяющие равенствам $\rho a = \sigma c$, $\rho b = \sigma d$. Очевидно, что определенное таким образом соотношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что оно является соотношением эквивалентности. Обозначим через $S(a, b)$ класс эквивалентности, содержащий пару (a, b), и определим сложение и умножение этих классов формулами

$$S(a, b) + S(c, d) = S(ad + bc, bd),$$
$$S(a, b) \cdot S(c, d) = S(ac, bd).$$

Покажем, что множество K всех таких классов является полем нужного типа.

Прежде всего, сумма и произведение двух элементов из K однозначно определены. В самом деле, если

$$S(a_1, b_1) = S(a_2, b_2), \quad S(c_1, d_1) = S(c_2, d_2),$$

то мы будем иметь

$$\rho_1 a_1 = \rho_2 a_2, \qquad \rho_1 b_1 = \rho_2 b_2,$$
$$\sigma_1 c_1 = \sigma_2 c_2, \qquad \sigma_1 d_1 = \sigma_2 d_2.$$

Отсюда следует, что

$$\rho_1\sigma_1 (a_1 d_1 + b_1 c_1) = \rho_2\sigma_2 (a_2 d_2 + b_2 c_2),$$
$$\rho_1\sigma_1 a_1 c_1 = \rho_2\sigma_2 a_2 c_2,$$
$$\rho_1\sigma_1 b_1 d_1 = \rho_2\sigma_2 b_2 d_2,$$

[1] В соответствии с соглашением, упомянутым в п. 1.2, это означает, что любые два таких поля изоморфны.

и поэтому

$$S(a_1, b_1) + S(c_1, d_1) = S(a_2, b_2) + S(c_2, d_2),$$
$$S(a_1, b_1) \cdot S(c_1, d_1) = S(a_2, b_2) \cdot S(c_2, d_2).$$

Теперь аксиомы определения поля проверяются непосредственно; в частности, мы находим, что классы $S(0, b)$ и $S(a, a)$ являются нулем и единицей, а классы $S(-a, b)$ и $S(b, a)$ — противоположным и обратным элементами для $S(a, b)$. Наконец, отображение $a \to S(a, 1)$ является изоморфизмом D и некоторого подмножества из K, так что можно отождествить $S(a, 1)$ с элементом a и рассматривать D как подмножество K. При этом будет $S(a, b) = a/b$, так что условие 2 также выполнено. Единственность K является непосредственным следствием условий 1 и 2. Действительно, если L — поле, удовлетворяющее условиям 1 и 2, то его элементы являются частными элементов D. Легко проверить, что отображение $a/b \to S(a, b)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами L и элементами K, причем это соответствие будет изоморфизмом.

Эта теорема часто позволяет упростить решение задачи, так как оперировать с элементами поля проще, чем с элементами произвольной области целостности. Пример этого можно найти в § 6.

§ 4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

4.1. Линейная зависимость. Так как в полях выполнимы операции сложения, вычитания, умножения и деления с их обычными свойствами, то любая алгебраическая теория, связанная только с этими операциями, применима к произвольному полю. В частности, это относится к вопросам линейной зависимости. Ввиду того, что обычные доказательства переносятся на случай любого поля[1]), мы приведем здесь лишь сводку определений и основных результатов.

Упорядоченные системы[2])

$$(a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m,$$

элементов поля K называются *линейно зависимыми* (или просто *зависимыми*), если существуют элементы b_α из K, не все равные нулю, удовлетворяющие условиям

$$\sum_\alpha b_\alpha a_i^\alpha = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

---

[1]) См., например, Курош А. Г., Курс высшей алгебры, ГТТИ, 1949 г. (*Прим. перев.*)

[2]) В этом разделе значки сверху означают индексы, а не степени.

Система $(a_1, \ldots, a_n)$ называется *зависимой* от систем $(a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha)$ (или *комбинацией* этих систем), если существуют такие $b_\alpha \in K$, что

$$a_i = \sum_\alpha b_\alpha a_i^\alpha.$$

Основной теоремой о линейной зависимости является

Теорема 4.1. *Системы*

$$(a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha), \qquad \alpha = 1, \ldots, m,$$

являются зависимыми тогда и только тогда, когда матрица $\| a_i^\alpha \|$ *имеет ранг, меньший чем* m.

Из этого результата получается

Теорема 4.2. 1) *При* $m > n$ *указанные выше системы всегда зависимы.*

2) *Если заданы независимые системы* $(a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha)$, $\alpha = 1, \ldots, m$, $m \leqslant n$, *то найдется* $n - m$ *таких систем* $(a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha)$, $\alpha = m+1, \ldots, n$, *что все системы* $(a_1^\alpha, \ldots, a_n^\alpha)$ *будут независимыми.*

4.2. Линейные уравнения. С линейной зависимостью тесно связана теория решения систем линейных уравнений. Нам будут нужны следующие свойства решений таких уравнений:

Теорема 4.3. *Пусть ранг матрицы* $\| a_\alpha^i \|$ *равен* r. *Тогда система однородных уравнений*

$$\sum_{i=1}^n a_\alpha^i x_i = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{4.1}$$

имеет $n - r$ *линейно независимых решений*

$$x_i = \zeta_i^\beta, \quad \beta = 1, \ldots, n - r.$$

Все остальные решения системы (4.1) *являются линейными комбинациями этих решений.*

Теорема 4.4. *Если определитель* $|a_i^j| = a \neq 0$, *то система*

$$\sum_{j=1}^n a_i^j x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

имеет единственное решение.

Это решение дается формулами

$$x_j = \sum_i A_j^i b_i,$$

где A_j^i есть алгебраическое дополнение элемента a_i^j в определителе $|a_i^j|$, деленное на сам определитель.

§ 5. МНОГОЧЛЕНЫ

5.1. Кольцо многочленов. В элементарной алгебре выражения вида x^2-2x-3 мы воспринимаем как «функции», а символ x — как «переменную», могущую принимать некоторые числовые значения. Однако формальные процессы сложения, умножения и дифференцирования таких многочленов производятся вне какой-либо связи с этим функциональным пониманием. Поэтому алгебраическую теорию многочленов можно развивать на чисто формальной основе. Именно это мы и сделаем теперь.

Пусть D — произвольная область целостности. Элементы D мы будем называть *постоянными* или *константами*. Для каждого упорядоченного конечного множества $a_0, a_1, \ldots, a_n$ констант мы образуем выражение $a_0x^0+a_1x^1+\ldots+a_nx^n$. Такие выражения мы будем называть *многочленами от x над D*. Символ x называется *неизвестным* или *переменным*. Он вводится лишь для упрощения вычислений и не должен пониматься как элемент из D. Множество всех многочленов от x над D обозначается через $D[x]$.

Два многочлена $a_0x^0+\ldots+a_nx^n$, $b_0x^0+\ldots+b_mx^m$, $m\geqslant n$, будут считаться равными, если $a_i=b_i$ при $i=0,\ldots,n$, $b_i=0$ при $i=n+1,\ldots,m$. При записи многочленов часто бывает удобно опускать члены с нулевыми коэффициентами a_i и писать x^i вместо $1x^i$. Многочлен, в котором все $a_i=0$, мы будем обозначать как $0x^0$. Для краткости мы будем обозначать многочлены одной буквой, а если требуется указать также и неизвестное, будем пользоваться функциональным обозначением $f(x)$.

Сложение и умножение многочленов определяется правилами:

$$(a_0x^0+\ldots+a_nx^n)+(b_0x^0+\ldots+b_nx^n)=$$
$$=(a_0+b_0)x^0+\ldots+(a_n+b_n)x^n$$

(число членов в обоих слагаемых можно считать одинаковым, так как можно вводить члены с нулевыми коэффициентами)

$$(a_0x_0+\ldots+a_nx^n)\cdot(b_0x^0+\ldots+b_mx^m)=$$
$$=a_0b_0x^0+(a_0b_1+a_1b_0)x^1+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\ldots+a_nb_mx^{m+n}.$$

При этих определениях легко показать, что $D[x]$ есть область целостности, а многочлены $0x^0$ и $1x^0$ — ее нуль и единица. Кроме того, можно считать, что $D[x]\supset D$, так как множество многочленов вида ax^0 образует область целостности, изоморфную D. Если писать x вместо x^1, то x становится элементом $D[x]$, так что многочлены оказывается возможным рассматривать как обычные, а не просто формальные, алгебраические выражения, содержащие x.

Подобным же образом элементы кольца $D[x,y]=D[x][y]$ можно рассматривать как образованные из двух элементов x

и y с помощью умножений и сложений. С этой точки зрения кольцо $D[x, y]$ будет тем же самым, что и $D[y, x]$.

Кольцо многочленов $D[x_1, \ldots, x_r]$ от r неизвестных $x_1, \ldots, x_r$ определяется индуктивно

$$D[x_1, \ldots, x_r] = D[x_1, \ldots, x_{r-1}][x_r].$$

Это кольцо однозначно определено, независимо от порядка x_i. Большинство свойств кольца $D[x_1, \ldots, x_r]$ при $r > 1$ можно получить индукцией, рассматривая его как $D'[x_r]$, где $D' = D[x_1, \ldots, x_{r-1}]$.

Поле частных $D[x_1, \ldots, x_r]$ обозначается через $D(x_1, \ldots, x_r)$ и называется полем *рациональных функций* от $x_1, \ldots, x_r$ над D.

5.2. Алгоритм деления. Многочлен $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, в котором $a_n \neq 0$, называется многочленом степени n. Нулевому многочлену вообще не приписывается никакой степени. Степень многочлена f обозначается знаком $\deg f$.

Очевидно, что

$$\deg(f_1 + f_2) \leqslant \max(\deg f_1, \deg f_2),$$
$$\deg(f_1 f_2) = \deg f_1 + \deg f_2.$$

Многие свойства многочленов основаны на том факте, что любой процесс, уменьшающий степень многочлена, может быть повторен лишь конечное число раз. Следующая теорема устанавливает существование одного из процессов такого рода, называемого алгоритмом деления:

Теорема 5.1. *Если f и g — многочлены, $g \neq 0$, то существует отличная от нуля константа a и два многочлена q и r, удовлетворяющие условиям:*

1. *r либо равен нулю, либо $\deg r < \deg g$.*
2. *$af = qg + r$.*

Доказательство. Если $\deg f < \deg g$, или $f = 0$, то полагаем $a = 1$, $q = 0$, $r = f$. Если g является константой, полагаем $a = g$, $q = f$, $r = 0$. Поэтому далее можно считать, что $\deg g > 0$ и, применяя индукцию, предположить теорему верной, если многочлен f заменен многочленом низшей степени или нулем. Пусть

$$f = a_0 + \ldots + a_n x^n, \quad g = b_0 + \ldots + b_m x^m,$$

где $n \geqslant m$, $a_n b_m \neq 0$. В таком случае либо

$$b_m f - a_n x^{n-m} g = 0,$$

либо

$$\deg(b_m f - a_n x^{n-m} g) < \deg f.$$

Таким образом, мы будем иметь

$$a'(b_m f - a_n x^{n-m} g) = q' g + r,$$

где $r=0$ или $\deg r<\deg g$. Поэтому

$$a' b_m f=(a' a_n x^{n-m}+q') g+r,$$

что и доказывает теорему.

Имея в виду указанный процесс, говорят, что многочлен af при делении на g дает *частное* q и *остаток* r. Внеся в доказательство теоремы 5.1 небольшие изменения, мы покажем, что если элемент b_m имеет обратный, то можно взять $a=1$. В частности, это всегда можно сделать, если D является полем.

5.3. Упражнение. 1. Доказать существование в кольце целых чисел алгоритма деления в следующей форме:

Если f и g — целые числа, $g\neq 0$, то существуют целые числа q и r, удовлетворяющие условиям:

1. $r=0$ или $|r|<|g|$.
2. $f=qg+r$.

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

6.1. Разложение на множители в областях целостности. Одна из важнейших частей теории колец связана с возможностью разложения элементов кольца на множители, т. е. выражения элемента в виде произведения двух или более элементов. В этом разделе мы докажем известные свойства разложений многочленов на множители.

Прежде всего дадим несколько определений. Пусть D — заданная область целостности. Пусть $a, b\in D$. Мы будем говорить, что a есть *делитель* (или *множитель*) b или что b *делится на* a, если существует $c\in D$, для которого справедливо равенство $b=ac$. Делимость b на a будем записывать знаком $a\mid b$. Непосредственно видно, что

1) Из $a\mid b$, $b\mid c$ следует, что $a\mid c$.

2) Из $a\mid b$, $a\mid c$ следует $a\mid(\alpha b+\beta c)$ при любых $\alpha, \beta\in D$.

3) $a\mid 0$ при любом a.

4) Если $b=ac$, $b\neq 0$ то элемент c однозначно определен элементами a и b.

Элемент e из D, имеющий в D обратный, называется *делителем единицы*. Элементы вида ae, где e — делитель единицы, называются *ассоциированными* с a.

5) Делители единицы из D образуют коммутативную группу относительно умножения.

6) Каждый элемент D делится на ассоциированные с ним, а также на делители единицы.

Элемент называется *неприводимым*, если он делится *только* на ассоциированные с ним и на делители единицы.

Важнейшие в приложениях кольца таковы, что в них имеет место известная однозначность разложения на множители. Мы охарактеризуем ее следующим образом: будем говорить, что в области целостности D имеет место *однозначность разложения на множители*, если:

А. Для каждого элемента $a \neq 0$ из D найдется конечное множество неприводимых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_r$, произведение которых равно a.

Б. Если $a_1 a_2 \ldots a_r = b_1 b_2 \ldots b_s$, где a_i и b_i — неприводимые элементы, не являющиеся делителями единицы, то $r = s$ и множители могут быть перенумерованы так, что каждый a_i ассоциирован с b_i.

Условие А означает, что каждый элемент допускает разложение на неприводимые множители, а Б гласит, что такое разложение однозначно с точностью до ассоциированности множителей.

Наиболее известным примером области целостности с однозначным разложением на множители является кольцо целых чисел. Следующий пример показывает, что существуют области целостности без такой однозначности разложения. Пусть D состоит из комплексных чисел вида $a + b\sqrt{-3}$, где a и b — целые. Тогда

$$2 \cdot 2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3}).$$

Легко показать, что элемент 2 является неприводимым. А так как в нашем кольце делителями единицы являются только $+1$ и -1, то условие Б не имеет места. В упражнении 7, ниже, дан пример области целостности, в которой не выполнено условие А.

6.2. Однозначность разложения многочленов на множители. Свойство колец с однозначностью разложения, с которым мы будем, главным образом, иметь дело в дальнейшем, содержится в следующей теореме:

Теорема 6.1. *Если однозначность разложения на множители имеет место в области целостности D, то она имеет место и в $D[x]$.*

Отсюда с помощью индукции получается

Теорема 6.2. *Если однозначность разложения имеет место в D, то она имеет место и в $D[x_1, \ldots, x_r]$.*

Доказательство теоремы 6.1, ввиду его относительной сложности, будет разбито на ряд отдельных теорем. Всюду в дальнейшей части этого раздела будет предполагаться, что в D имеет место однозначность разложения на множители.

Теорема 6.3. *Если константа a является делителем многочлена f, то a есть делитель каждого из коэффициентов f.*

Доказательство. Если $f = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$ и $a \mid f$, то найдется такой многочлен $g = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$, что $ag = f$. Но отсюда следует, что $ac_i = b_i$, $i = 0, \ldots, n$, так что a есть делитель каждого из b_i.

Теорема 6.4. *Если a, b, c — константы, из которых a неприводима, и $a \mid bc$, то либо $a \mid b$, либо $a \mid c$.*

Доказательство. Если $a \mid bc$, то найдется константа d, для которой $ad = bc$. Разлагая b, c, d на их неприводимые множители, будем иметь

$$ad_1 \ldots d_r = b_1 \ldots b_s c_1 \ldots c_t.$$

Отсюда следует, что множитель a либо является делителем единицы, либо ассоциирован с одним из b_i или c_i. Во всех этих случаях либо $a \mid b$, либо $a \mid c$.

Теорема 6.5. *Если a — неприводимая константа и $a \mid fg$, где $f, g \in D[x]$, то либо $a \mid f$, либо $a \mid g$.*

Доказательство. Пусть

$$f = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n, \quad g = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m$$

и пусть $a \nmid f$, $a \nmid g$ (знак $a \nmid f$ выражает, что a не является делителем f). Тогда найдется по меньшей мере один b_i, для которого $a \nmid b_i$; пусть p — наименьшее значение i, при котором это имеет место (при $i < p$ будет $a \mid b_i$). Подобным же образом пусть $a \nmid c_q$, но $a \mid c_i$ при $i < q$. Коэффициент при x^{p+q} в произведении fg есть

$$b_0 c_{p+q} + b_1 c_{p+q-1} + \ldots + b_p c_q + \ldots + b_{p+q} c_0,$$

где $b_i = c_j = 0$, если $i > n$, $j > m$. Ввиду выбора p и q и в силу теоремы 6.4, произведение $b_p c_q$ не делится на a, а остальные члены написанной суммы делятся на a. Поэтому вся сумма не делится на a, и, следовательно, по теореме 6.3, $a \nmid fg$.

Теорема 6.6. *Пусть K — поле частных D. Если многочлен f неприводим в $D[x]$, то он неприводим и в $K[x]$.*

Доказательство. Пусть f приводим в $K[x]$, так что $f = g'h'$, $g', h' \in K[x]$, причем ни g', ни h' не принадлежат K. Выразим коэффициенты g' в виде частных элементов из D и обозначим через a некоторое общее кратное знаменателей. Тогда $ag' = g_1 \in D[x]$. Подобным же образом $bh' = h_1 \in D[x]$. Поэтому $abf = g_1 h_1$. Если теперь e — один из неприводимых множителей ab, то $e \mid g_1 h_1$ и, следовательно, по теореме 6.5, будет либо $e \mid g_1$, либо $e \mid h_1$. Таким образом, множитель e можно исключить. Повторяя этот процесс, мы в конце концов получим $f = gh$, где $g, h \in D[x]$, причем g и h не будут константами.

Теорема 6.6 сводит нашу задачу, по существу, к доказательству того, что в $K[x]$ имеет место однозначность разложения. Чтобы доказать это, нужен следующий важный результат:

Теорема 6.7. *Если $f, g \in K[x]$, то существует такой многочлен $h \in K[x]$, что*

1) $h \mid f$, $h \mid g$.

2) *Если $k \mid f$, $k \mid g$, то $k \mid h$.*

3) *Существуют многочлены $A, B \in K[x]$, удовлетворяющие условию $h = Af + Bg$.*

Доказательство. Последовательным применением алгоритма деления (теорема 5.1) получаем

$$\begin{aligned} f &= q_1 g + r_1, \\ g &= q_2 r_1 + r_2, \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3, \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $\deg g > \deg r_1 > \deg r_2 > \ldots$. Так как степень многочлена является неотрицательным целым числом, она не может бесконечно убывать. Поэтому для некоторого p мы будем иметь $r_{p+1} = 0$. Тогда последовательность равенств (6.1) заканчивается так:

$$\begin{aligned} r_{p-2} &= q_p r_{p-1} + r_p, \\ r_{p-1} &= q_{p+1} r_p. \end{aligned}$$

Докажем, что многочлен $h = r_p$ имеет требуемые свойства.

1) Из $r_{p-1} = q_{p+1} h$ следует $h \mid r_{p-1}$. Затем из $r_{p-2} = q_p r_{p-1} + r_p$ вытекает $h \mid r_{p-2}$. Продолжая тем же путем, получаем, что $h \mid g$, $h \mid f$.

2) Пусть $k \mid f$, $k \mid g$. Тогда из $r_1 = f - q_1 g$ следует, что $k \mid r_1$. Далее из $r_2 = g - q_2 r_1$ следует, что $k \mid r_2$. Продолжая эти рассуждения, получим, наконец, $k \mid h$.

3) Начав с предпоследнего равенства и последовательно использовав предыдущие, будем иметь

$$\begin{aligned} h &= r_{p-2} - q_p r_{p-1} = \\ &= r_{p-2} - q_p (r_{p-3} - q_{p-1} r_{p-2}) = \\ &= -q_p r_{p-3} + (1 + q_p q_{p-1}) r_{p-2} = \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= Af + Bg. \end{aligned}$$

Элемент h, удовлетворяющий условиям 1 и 2, называется *общим наибольшим делителем* многочленов f и g. Из условий 1 и 2 следует, что h однозначно определен с точностью до ассоциированности. Последовательное применение алгоритма деления, использованное в доказательстве теоремы 6.7. известно под названием алгоритма Эвклида.

Теорема 6.8. *Если многочлены f, g, $h \in K[x]$, причем f неприводим и $f \mid gh$, то либо $f \mid g$, либо $f \mid h$.*

Доказательство. Предположим, что $f \mid gh$, но $f \nmid g$. Тогда f и g не имеют общих делителей, кроме элементов поля K. В силу теоремы 6.7 найдутся многочлены A, $B \in K[x]$, удовлетворяющие условию $1 = Af + Bg$. Тогда $h = Afh + Bgh$. Но $f \mid gh$, следовательно, $f \mid Afh + Bgh$, т. е. $f \mid h$.

Теорема 6.9. *Если многочлены f, g, $h \in D[x]$, причем f неприводим и $f \mid gh$, то либо $f \mid g$, либо $f \mid h$.*

Доказательство. Случай $f \in D$ охватывается теоремой 6.5, так что можно предполагать, что f не является константой. В силу теоремы 6.6, f неприводим в $K[x]$, следовательно, по теореме 6.8, либо $f \mid g$, либо $f \mid h$ в $K[x]$. Предположим, что $h = fk$, $k \in K[x]$. Как видно из доказательства теоремы 6.6, найдется константа $a \in D$, для которой $ak \in D[x]$. Тогда $ah = afk$. Пусть e — один из неприводимых множителей a, так что $a = ea_1$. Согласно теореме 6.5, должно быть $e \mid ak$, так как f неприводим и не является константой. Отсюда следует, что $a_1k \in D[x]$, и поэтому $a_1h = a_1fk$. Рассматривая теперь a_1 таким же образом, как только что рассматривали a, мы можем продолжить исключение неприводимых множителей. В конце концов будем иметь $h = fk$, где $k \in D[x]$. Это и доказывает теорему.

Доказательство теоремы 6.1. Пусть $f \in D[x]$. Если f приводим, мы будем иметь $f = f_1' f_2'$, где f_1', $f_2' \in D[x]$ и ни один из этих многочленов не является делителем единицы. Если один из f_1', f_2' приводим, можно представить его произведением множителей, не являющихся делителями единицы. Это разложение можно продолжить и дальше. При каждом шаге мы либо понижаем степень одного из множителей, либо выделяем множитель старшего коэффициента. Так как ни одно из этих действий не может совершаться бесконечно, условие А будет выполнено. Предположим теперь, что $f = f_1 \ldots f_r = g_1 \ldots g_s$, где каждый из множителей f_i, g_i неприводим. Тогда $g_1 \mid f_1 \ldots f_r$, и, следовательно, в силу очевидного обобщения теоремы 6.9, $g_1 \mid f_i$ при некотором i. Можно считать, что $i = 1$. Ввиду неприводимости g_1 и f_1, они должны быть ассоциированными, так что будет иметь место равенство $ef_2 \ldots f_r = g_2 \ldots g_s$, где e — делитель единицы. Продолжая это рассуждение, мы увидим, что каждый из g_i ассоциирован с соответствующим f_i, так что условие Б также удовлетворено.

6.3. Упражнения. 1. Применяя алгоритм деления, указанный в упражнении 1 § 5.3, доказать существование общего наибольшего делителя двух целых чисел.

2. Доказать, что однозначность разложения на множители имеет место в кольце целых чисел.

3. Для любого конечного множества $f_1, \ldots, f_n$ элементов $K[x]$ доказать существование общего наибольшего делителя h,

определяемого условиями:

1) $h \mid f_i$, $i=1, \ldots, n$.

2) Если $k \mid f_i$, $i=1, \ldots, n$, то $k \mid h$.

Доказать также, что

3) Существуют $g_i \in K[x]$, $i=1, \ldots, n$, удовлетворяющие условию $\sum g_i f_i = h$.

(Применить индукцию по n).

4. Доказать, что для любого конечного множества $f_1, \ldots, f_n$ элементов области целостности D с однозначным разложением на множители найдется такое конечное множество попарно не ассоциированных неприводимых элементов $a_1, a_2, \ldots$ из D, что будут иметь место равенства $f_i = e_i \prod_j a_j^{\alpha_{ij}}$, в которых α_{ij} — неотрицательные целые числа, а e_i — делители единицы. Если $\beta_j = \min(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots)$, то элемент $\prod_j a_j^{\beta_j}$ является общим наибольшим делителем f_i.

5. Для любого конечного множества элементов $f_1, \ldots, f_n$ области целостности D с однозначным разложением на множители найдется элемент m из D, единственный с точностью до ассоциированности, удовлетворяющий условиям:

1) $f_i \mid m$ при всех i.

2) Если $f_i \mid n$ при всех i, то $m \mid n$.

3) Если $\alpha_j = \max(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots)$ в обозначениях упражнения 4, то $m = e \prod_j a_j^{\alpha_j}$, где e — делитель единицы.

Элемент m, удовлетворяющий условиям 1 и 2, называется *общим наименьшим кратным* элементов f_i.

6. Если h и m суть, соответственно, общий наибольший делитель и общее наименьшее кратное двух элементов f и g области целостности с однозначным разложением на множители, то $hm = efg$, где e — делитель единицы.

7. Пусть D состоит из всех выражений вида

$$a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i x^{m_i/2^n}$$

где $a_0, \ldots, a_k$ — целые числа, $k, m_1, \ldots, m_k$ — положительные целые числа и n — неотрицательное целое число.

Доказать, что:

1) При очевидных формальных определениях сложения и умножения элементов D, D будет областью целостности.

2) Делителями единицы будут только ± 1.

3) Любой элемент D, для которого $a_0=0$, приводим.

4) x не может быть представлен произведением конечного числа неприводимых множителей.

§ 7. ПОДСТАНОВКА

7.1. Подстановка в многочлен. Всем знакома операция подстановки в многочлен некоторой константы вместо неизвестного. Если

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n\in D[x],$$

то мы определяем значение $f(a)$ как сумму $a_0+a_1a+\ldots+a_na^n$ при любом $a\in D$. $f(a)$ называется *значением* $f(x)$ *при* $x=a$. Из правил сложения и умножения многочленов следует, что если $f(x)+g(x)=h(x)$ и $f(x)\cdot g(x)=k(x)$, то $f(a)+g(a)=h(a)$ и $f(a)\cdot g(a)=k(a)$. Таким образом, соответствие между $f(x)$ и $f(a)$ определяет гомоморфное отображение кольца $D[x]$ в область целостности D (и *над* D). Эта же операция, очевидно, может быть обобщена на случай многочленов от любого числа неизвестных.

Если $f(x)$ есть элемент поля $K(x)$, то можно записать $f(x)=g(x)/h(x)$, где относительно многочленов $g(x)$ и $h(x)$ можно предполагать, что они не имеют общих делителей (кроме делителей единицы). В таком случае значения $g(a)$ и $h(a)$ определены при любом $a\in K$, и мы можем определить значение $f(a)$ равенством $f(a)=g(a)/h(a)$, если $h(a)\neq 0$. В случае, когда $h(a)=0$, значение $f(a)$ не определено. Это обстоятельство делает подстановку в рациональные функции несколько более затруднительной, чем в случае многочленов, так как необходимо все время иметь в виду указанный исключительный случай. Подчеркнем, что из равенства $f(a)=0$ следует, что $g(a)=0$.

Иногда полезно несколько обобщить операцию подстановки. Пусть D'—область целостности, содержащая D. Тогда $D'[x]\supset D[x]$, и при $f(x)\in D[x]$ мы будем иметь $f(x)\in D'[x]$. Поэтому мы можем подставлять в $f(x)$ вместо x любой элемент α из D', причем значение $f(\alpha)$ будет также принадлежать D'. Например, если взять $D'=D[x]$ и выбрать $g(x)\in D'$, то будет определено выражение $f(g(x))$, представляющее собой элемент D'.

7.2. Корни многочленов; теорема об остатке. Константа a называется *корнем многочлена* $f(x)$, если $f(a)=0$. Этот факт выражают также, говоря, что a есть *корень уравнения* $f(x)=0$. Обратим внимание на то, что это «уравнение» не означает равенства обеих его частей, так как $f(x)$ совсем не обязан быть нулевым элементом кольца $D[x]$. На языке элементарной алгебры это — «условное равенство», в то время как здесь мы употребляем знак равенства только в случае «тождеств». Хотя мы и могли бы

обойти эту двусмысленность в употреблении знака равенства, применяя выражение «корень многочлена» вместо «корень уравнения», все же лучше следовать обычной терминологии, особенно когда мы будем говорить об «уравнении алгебраической кривой».

Основные свойства корней многочленов следуют из известной теоремы об остатке:

Теорема 7.1. *Остаток при делении многочлена $f(x)$ на двучлен $(x-a)$ равен $f(a)$.*

Доказательство. Пусть $f(x)=(x-a)\,q(x)+r$, где r либо нуль, либо имеет степень, меньшую, чем $\deg(x-a)=1$. Поэтому r необходимо является константой. Подставляя теперь вместо x значение a, получим $r=f(a)$.

Из теоремы об остатке обычным образом получаются:

Теорема 7.2. *a есть корень многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $(x-a)$ является делителем $f(x)$.*

Теорема 7.3. *Многочлен степени n может иметь не больше n корней.*

При изучении алгебраических кривых полезно следующее обобщение теоремы 7.3 на случай многочленов от нескольких неизвестных:

Теорема 7.4. *Если $f(x_1, \ldots, x_r)\in D[x_1, \ldots, x_r]$ и $f(a_1, \ldots, a_r)=0$ при произвольном выборе $a_1, \ldots, a_r$ из некоторого бесконечного подмножества области целостности D, то $f(x_1, \ldots, x_r)=0$.*

Доказательство. Из теоремы 7.3 следует частный случай этой теоремы при $r=1$. Поэтому можно применить индукцию. Предположим, что теорема верна для многочленов от $r-1$ неизвестных. Пусть

$$f(x_1, \ldots, x_r)=f_0+f_1x_r+\ldots+f_nx_r^n, \quad n\geqslant 0,$$

где $f_i\in D[x_1, \ldots, x_{r-1}]$. Если $f\neq 0$, то можно считать $f_n\neq 0$. Тогда, по предположению, $f_n(a_1, \ldots, a_{r-1})\neq 0$ при некотором выборе $a_1, \ldots, a_{r-1}$ из указанного бесконечного подмножества. Отсюда следует, что может существовать не более n различных a_r, при которых $f(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r)=0$, вопреки условию. Следовательно, $f(x_1, \ldots, x_r)=0$.

7.3. Алгебраически замкнутые области целостности. Теоремы § 7.2 показывают, что никакое уравнение не может иметь «слишком много» корней. С другой стороны, очевидно, что в некоторых областях целостности существуют уравнения, вообще не имеющие корней. Например, такими уравнениями будут $2x-1=0$ в кольце целых чисел и $x^2+1=0$ — в поле действительных чисел. Важный класс образуют такие области целостности, в которых каждый многочлен имеет хотя бы один корень. Такие области целостности называются *алгебраически замкнутыми*. Точнее говоря, область целостности D называется алгебраически замкнутой, если для

любого $f(x) \subset D[x]$, не являющегося константой, найдется такой $a \in D$, для которого $f(a) = 0$. Алгебраически замкнутая область целостности необходимо будет полем, так как уравнение $ax - 1 = 0$ имеет в ней корень при любом $a \neq 0$.

Так называемая «основная теорема алгебры» показывает, что поле комплексных чисел алгебраически замкнуто. Это свойство вместе с тем обстоятельством, что поле комплексных чисел имеет характеристику 0, обусловливает большинство алгебраических свойств поля комплексных чисел. В частности, мы увидим, что любым полем, имеющим указанные два свойства, можно пользоваться вместо поля комплексных чисел на протяжении большей части теории алгебраических кривых.

Из теоремы 7.2 обычным образом получается

Теорема 7.5. *Если D алгебраически замкнута и если многочлен $f \in D[x]$ имеет степень n, то существует однозначно определенная система констант $a_1, \ldots, a_n$, при которой*

$$f(x) = a(x - a_1) \ldots (x - a_n), \quad a \in D$$

(a_i не обязательно различны).

7.4. Упражнения. 1. Область целостности с конечным числом элементов не может быть алгебраически замкнутой.

2. Показать, что определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2, & \ldots, & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2, & \ldots, & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2, & \ldots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

делится на $x_i - x_j$, $i \neq j$ и поэтому равен $\prod\limits_{i>j}(x_i - x_j)$.

3. Доказать следующее обобщение теоремы 7.4: Пусть $f(x_1, \ldots, x_r)$ многочлен над D, имеющий степень, не превышающую n_i по каждому x_i. Пусть, кроме того, заданы следующие подмножества D: S — любое подмножество D, содержащее больше чем n_1 элементов; для любого $a_1 \subset S$ задано множество S_{a_1} из D, содержащее более n_2 элементов; для каждого $a_2 \in S_{a_1}$ задано множество $S_{a_1 a_2}$, содержащее более n_3 элементов, и т. д. Если $f(a_1, \ldots, a_r) = 0$ при любых $a_1 \in S$, $a_2 \in S_{a_1}$, $a_3 \in S_{a_1 a_2}$ и т. д., то $f(x_1, \ldots, x_r) = 0$.

§ 8. ПРОИЗВОДНЫЕ

8.1. Производная от многочлена. Производная от многочлена, рассматриваемого как функция, определяется с помощью перехода к пределу. Однако полученная при этом формула вообще не

содержит явного указания на такой процесс. Мы покажем сейчас, что и чисто формальное применение упомянутой формулы дает многие из свойств производных.

Определим производную по x от любого элемента

$$f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

из $D[x]$ посредством формулы

$$f' = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

Частную производную от $f(x_1, \ldots, x_r)$ по неизвестному x_i можно определить, рассматривая $f(x_1, \ldots, x_r)$ как многочлен над $D[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_r]$. Нам будут нужны следующие свойства производных:

1) $(f+g)' = f' + g'$.

2) если a — константа, то $a' = 0$ и $(af)' = af'$.

3) $(fg)' = f'g + fg'$; $(f^n)' = nf^{n-1} f'$.

4) $f(g_1(x), \ldots, g_r(x))' = \sum_i f_i(g_1(x), \ldots, g_r(x))\, g_i'(x)$,

где $f_i(x_1, \ldots, x_r)$ — производная f по x_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Свойства 1 и 2 непосредственно следуют из определения. Первая часть свойства 3 легко проверяется. Вторая часть свойства 3 получается многократным применением первой части этого свойства. Свойство 4 может быть доказано прежде всего в случае, когда f состоит из одного члена (с использованием свойства 3), а затем — в общем случае (с помощью свойств 1 и 2).

В случае многочленов над областью целостности характеристики $p \neq 0$ производные обладают некоторыми нежелательными свойствами. Это связано с тем, что в таком случае любой многочлен вида $a_0 + a_1 x^p + a_2 x^{2p} + \ldots$ имеет производную, равную нулю. Поэтому в остальной части этого параграфа мы будем считать, что D имеет характеристику нуль. Предположим также, что в D имеет место однозначность разложения на множители.

Производные находят себе наиболее важное применение при исследовании кратных множителей многочленов. Основной теоремой в этом направлении является следующая:

Теорема 8.1. *Если g неприводим и не является константой, то $g^2 \mid f$ в том и только в том случае, если $g \mid f$ и $g \mid f'$.*

Доказательство. Если $g \mid f$, то $f = gh$, и, следовательно, $f' = gh' + g'h$. Если $g \mid f'$, то $g \mid g'h$. Но так как $\deg g' < \deg g$, то $g \nmid g'$. Поэтому $g \mid h$, $g^2 \mid f$, так как f неприводим. Обратно, если $f = g^2 k$, то $f' = 2gg'k + g^2 k'$. Отсюда следует, что $g \mid f$ и $g \mid f'$.

Важным частным случаем доказанной теоремы является

Теорема 8.2. *$(x-a)^2 \mid f$ тогда и только тогда, когда $f(a) = f'(a) = 0$* (получается из 8.1 с помощью 7.2).

8.2. Формула Тэйлора. n-я производная от $f(x)$ определяется индуктивно равенствами $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$, $f^{(0)}=f$. Таким же образом могут быть определены частные производные высшего порядка от $f(x_1, \ldots, x_r)$. Частная производная от $f(x_1, \ldots, x_r)$ по x_i будет обозначаться через $\partial f/\partial x_i$, f_{x_i} или через f_i, причем эти обозначения очевидным образом распространяются на производные высших порядков. Легко проверяется соотношение $f_{ij}=f_{ji}$, из которого следует независимость производных любого порядка от последовательности дифференцирований.

Докажем теперь формулу Тэйлора:

Теорема 8.3. *Для любого многочлена $f(x)$ степени n и для любой константы a имеет место равенство*

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n.$$

Доказательство. Пусть

$$f(x+a)=a_0+a_1x+\ldots+a_rx^n. \tag{8.1}$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x, получаем, в силу свойства 4,

$$f'(x+a)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1},$$
$$f''(x+a)=2a_2+2.\,3.\,a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x+a)=n!a_n.$$

Полагая теперь $x=0$ в каждом из написанных равенств, имеем

$$a_0=f(a),\quad a_1=f'(a),\ \ldots,\ a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a).$$

Подставляя эти выражения в (8.1) и заменяя x на $x-a$, получаем требуемый результат.

Эта теорема легко распространяется на многочлены от нескольких неизвестных:

Теорема 8.4. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_r)\in D[x_1, \ldots, x_r]$, $a_1, \ldots, a_r\in D$. Если через $f_{ij}\ldots$ обозначить результат подстановки $a_1, \ldots, a_r$ вместо $x_1, \ldots, x_r$ в частную производную f по $x_i, x_j, \ldots$, то*

$$f(x_1, \ldots, x_r)=f(a_1, \ldots, a_r)+\sum_i f_i(x_i-a_i)+$$
$$+\frac{1}{2!}\sum_{i,j} f_{ij}(x_i-a_i)(x_j-a_j)+\ldots$$

Доказательство. Пользуясь предыдущей теоремой, разложим $F(t)=f(a_1+(x-a_1)t, \ldots, a_r+(x-a_r)t)$ по степеням t. Применив свойство 4, получим

$$F(t)=f(a_1, \ldots, a_r)+\sum_i f_i(x_i-a_i)t+$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{i,j} f_{ij}(x_i-a_i)(x_j-a_j)t^2+\ldots$$

Если положить $t=1$, то получится нужный результат.

8.3. Упражнения. 1. Обобщим определение производных на случай рациональных функций. Свойства 1—4 будут иметь место в том и только в том случае, если положить $(f/g)'=(f'g-g'f)/g^2$.

2. Обобщить теоремы 8.1 и 8.2 на случай n-x степеней, вместо указанных там квадратов.

3. Обобщить теорему 8.2 на случай области целостности любой характеристики.

§ 9. ИСКЛЮЧЕНИЕ

9.1. Результант двух многочленов. Задачей теории исключения является указание условий, которым должны удовлетворять коэффициенты системы многочленов для того, чтобы эти многочлены имели общий множитель, не являющийся делителем единицы. Эта общая задача очень сложна, и мы будем рассматривать лишь случай двух многочленов [1]). В таком случае один из возможных ответов на постоянный вопрос дается теоремой 6.7, так как мы, очевидно, имеем:

Теорема 9.1. *Если K — поле и $f, g \in K[x]$, то f и g имеют непостоянный общий множитель в том и только в том случае, если многочлен h, указанный в теореме 6.7, не будет константой.*

Из теоремы 6.6 следует, что рассмотрение многочленов над полем не будет здесь являться ограничением общности.

Теорема 9.1 позволяет в любом заданном случае сказать, имеют ли два многочлена общий множитель. Она также позволяет найти этот множитель, если он существует. Однако ее отрицательная сторона заключается в необходимости утомительных вычислений. Чтобы избежать их, мы приведем другой метод.

Пусть

$$f=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n, \qquad a^n\neq 0,$$

$$g=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m, \qquad b_m\neq 0,$$

---

[1]) См. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. 2, гл. 11, 1947.

причем коэффициенты этих многочленов принадлежат области целостности с однозначным разложением на множители. Будем предполагать, что в нашем распоряжении имеется способ разложения констант на множители, так что можно установить, имеют ли f и g своим общим множителем константу. Поэтому можно считать, что $n, m \geqslant 1$.

Теорема 9.2. *f и g имеют непостоянный общий множитель тогда и только тогда, когда существуют ненулевые многочлены φ и ψ степеней, соответственно, меньших n и m, для которых $\psi f = \varphi g$.*

Доказательство. Если f и g имеют непостоянный общий множитель h, то $f = h\varphi$, $g = h\psi$, и, следовательно, $\psi f = \varphi g$. Обратно, пусть $\psi f = \varphi g$. Разложим g на неприводимые множители. Непостоянные множители g или ассоциированные с ними многочлены должны встречаться среди множителей ψf Но они не могут все быть среди множителей ψ, так как $\deg \psi < \deg g$. Следовательно, хотя бы один из них будет среди множителей f, так что f и g имеют общий множитель, отличный от константы.

Теорема 9.3. *f и g имеют непостоянный общий множитель тогда и только тогда, когда*

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \ldots a_n & & \\ & a_0 \ldots a_{n-1} & a_n & \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & & a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & a_n \\ b_0 & b_1 \ldots b_{m-1} & b_m & \\ & b_0 \ldots b_m & & \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ & & b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & b_m \end{vmatrix} = 0,$$

где в определителе берется m строк из «a» и n строк из «b». Незанятые места заполняются нулями.

Доказательство. Мы докажем, что обращение этого определителя в нуль необходимо и достаточно для существования многочленов φ и ψ, указанных в теореме 9.2. Предположим, что f и g имеют непостоянный общий множитель. Тогда существуют многочлены φ и ψ, для которых $\psi f = \varphi g$. Пусть

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_n x^{n-1},$$

$$\psi = \beta_1 + \beta_2 x + \ldots + \beta_m x^{m-1},$$

где хотя бы один $\alpha_i \neq 0$ и хотя бы один $\beta_i \neq 0$. Из условия

$\psi f = \varphi g$ следует, что

$$\begin{aligned} a_0\beta_1 &= b_0\alpha_1, \\ a_1\beta_1 + a_0\beta_2 &= b_1\alpha_1 + b_0\alpha_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_n\beta_m &= b_m\alpha_n. \end{aligned}$$

Будем считать эти равенства однородными уравнениями с $m+n$ неизвестными $\beta_1, \dots, \alpha_n$. Мы знаем, что они имеют ненулевое решение. Поэтому определитель из коэффициентов должен быть равен нулю, т. е. $R=0$. Обратно, если $R=0$, то эти уравнения имеют ненулевое решение (теорема 4.3) в поле частных D. Умножив на общий знаменатель всех α_i, β_i, получим решение в самом D, причем хотя бы один из α_i, β_i отличен от нуля. Если, например, один из α_i не равен нулю, то $\varphi \neq 0$, а так как мы имеем $\psi f = \varphi g$, то должно быть также $\psi \neq 0$.

Выражение R называется *результантом* многочленов f и g. Результант многочлена и его производной называется *дискриминантом* многочлена. Из теоремы 8.1 получается

Теорема 9.4. *Многочлен над областью целостности характеристики нуль тогда и только тогда имеет непостоянный кратный множитель, когда его дискриминант равен нулю.*

Важным следствием теоремы 9.3 является

Теорема 9.5 *Пусть $D' \supset D$ и $f, g \in D[x]$. Если f и g имеют общий множитель в $D'[x]$, не принадлежащий D', то они имеют также общий множитель в $D[x]$, не принадлежащий D.*

Доказательство. Рассмотрим f и g как элементы $D'[x]$. Тогда R, рассматриваемый как элемент D', должен обращаться в нуль. Но в таком случае R как элемент D также должен обращаться в нуль. Следовательно, f и g имеют общий множитель в $D[x]$, отличный от константы.

Следующая теорема устанавливает важное выражение для результанта:

Теорема 9.6. *Существуют многочлены A и B степеней, не превышающих, соответственно, $m-1$ и $n-1$, такие, что $R = Af + Bg$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \\ xf &= a_0x + \dots + a_{n-1}x^n + a_nx^{n+1}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x^{m-1}f &= a_0x^{m-1} + \dots\dots + a_nx^{m+n-1}, \\ g &= b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m, \\ xg &= b_0x + \dots + b_{m-1}x^m + b_mx^{m+1}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x^{n-1}g &= b_0x^{n-1} + \dots\dots + b_mx^{m+n-1}. \end{aligned}$$

Пусть $A_1, \ldots, A_{m+n}$ — алгебраические дополнения элементов первого столбца результанта R. Умножим обе части i-го из написанных уравнений на A_i и сложим соответствующие члены при $i=1, \ldots, m+n$. Мы получим

$$(A_1+A_2x+\ldots+A_mx^{m-1})f+(A_{m+1}+A_{m+2}x+\ldots+A_{m+n}x^{n-1})\,g=R,$$

что и доказывает теорему.

9.2. Применение к многочленам от нескольких неизвестных. Если многочлены $f, g \in D[x_1, \ldots, x_r]$, то мы можем рассматривать их как многочлены от x_r над $D[x_1, \ldots, x_{r-1}]$:

$$f(x_1, \ldots, x_r)=a_0+a_1x_r+\ldots+a_nx_r^n,$$

$$g(x_1, \ldots, x_r)=b_0+b_1x_r+\ldots+b_mx_r^m,$$

где $a_i, b_i \in D[x_1, \ldots, x_{r-1}]$. Если $a_nb_m \neq 0$ и $n, m>0$, то результант f и g относительно x_r будет многочленом $R(x_1, \ldots, x_{r-1})$. Он обращается в нуль тогда и только тогда, когда f и g имеют общий множитель, содержащий x_r.

Пусть теперь $\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1} \in D$. Рассмотрим $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1})$. Из определения R мы видим, что $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1})$ есть результант многочленов $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, x_r)$ и $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, x_r)$, если только $a_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1})\,b_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \neq 0$. Легко усмотреть также, что если $a_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1})=b_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)=0$, то $R(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)=0$ даже в том случае, когда $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}x_r)$ и $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, x_r)$ не имеют общих множителей. В дальнейшем мы часто будем иметь случай использовать эти свойства результанта.

Позже нам понадобится такое следствие из теорем 7.4 и 9.6:

Теорема 9.7. *Пусть область целостности D алгебраически замкнута, $f, g \in D[x_1, \ldots, x_r]$, причем многочлен f неприводим. Если из равенства $f(a_1, \ldots, a_r)=0$ всегда следует $g(a_1, \ldots, a_r)=0$,* то $f \mid g$.

Доказательство. Пусть сначала $f \in D$. Если $f \neq 0$, то утверждение следует просто из того, что D — поле. Если $f=0$, то, по условию, будет $g(a)=0$ при любом выборе $a_1, \ldots, a_r$, следовательно, в силу теоремы 7.4, $g=0$ и $f \mid g$. Таким образом, можно предполагать, что

$$f=b_0+b_1x_r+\ldots+b_nx_r^n, \quad b_i \in D[x_1, \ldots, x_{r-1}], \quad b_n \neq 0, \quad n>0.$$

Если при этом $g=0$, то $f \mid g$ и нечего доказывать. Пусть поэтому $g \neq 0$. Предположим, что $g \in D[x_1, \ldots, x_{r-1}]$. Тогда, по теореме 7.4, существуют такие $a_1, \ldots, a_{r-1}$, что $g(a_1, \ldots, a_{r-1})\ b_n(a_1, \ldots, a_{r-1}) \neq 0$. Так как область D алгебраически замкнута, уравнение $f(a_1, \ldots, a_{r-1}, x_r)=0$ имеет корень a_r. Но в таком случае существование системы значений

$a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r$ противоречит нашему предположению, так что не может быть $g \in D[x_1, \ldots, x_{r-1}]$. Ввиду сказанного, мы можем образовать результант $R(x_1, \ldots, x_{r-1})$ для многочленов f и g относительно x_r. В силу теоремы 9.6, $R = Af + Bg$, где $A, B \in D[x_1, \ldots, x_{r-1}]$. Но из этого соотношения следует, что равенство $f(a) = 0$ влечет за собой равенство $R(a) = 0$. Но так как $R \in D[x_1, \ldots, x_{r-1}]$, то должно быть $R = 0$ (см. рассуждение выше). Отсюда следует, что f и g имеют общий множитель и, следовательно, $f \mid g$, так как многочлен f неприводим.

9.3. Упражнения. 1. Показать, что дискриминанты многочленов $ax^2 + bx + c$ и $x^3 + px + q$ равны соответственно $-a(b^2 - 4ac)$ и $4p^3 + 27q^2$.

2. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_{n-1} & a_n \\ -\lambda & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots -\lambda & 1 \end{vmatrix} = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n.$$

3. Доказать, что многочлен с действительными коэффициентами, имеющий комплексный корень, имеет также сопряженный комплексный корень (применить теорему 9.5, беря в качестве D и D' поля действительных и комплексных чисел).

§ 10. ОДНОРОДНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

10.1. Основные свойства. *Степенью* отдельного *члена* многочлена называется сумма показателей степеней, с которыми содержатся в этом члене переменные. *Степенью многочлена* называется наибольшая степень его членов. Многочлен называется *однородным*, если все его члены имеют одну и ту же степень. В дальнейшем для обозначения однородных многочленов мы будем применять заглавные буквы. Если это нужно и удобно, то индекс снизу будет указывать степень многочлена.

В качестве определения однородных многочленов часто берется следующее их свойство:

Теорема. 10.1. *Многочлен $f(x_1, \ldots, x_r) \neq 0$ степени n является однородным в том и только в том случае, если в $D[x_1, \ldots, x_r, t]$ имеет место соотношение*

$$f(tx_1, \ldots, tx_r) = t^n f(x_1, \ldots, x_r). \tag{10.1}$$

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна. Для доказательства достаточности положим

$$f = F_{n_1} + F_{n_2} + \ldots + F_{n_k}, \quad n_1 < n_2 < \ldots < n_k,$$

где многочлен F_{n_i} однороден и имеет степень n_i ($F_{n_i} \neq 0$). В таком случае равенство (10.1) обращается в такое

$$t^{n_1}F_{n_1} + t^{n_2}F_{n_2} + \ldots + t^{n_k}F_{n_k} = t^n F_{n_1} + \ldots + t^n F_{n_k}.$$

Отсюда следует, что должно быть $t^{n_i} = t^n$ при всех i, т. е. что $k = 1$ и $n_1 = n$.

Следующая теорема называется теоремой Эйлера:

Теорема 10.2. *Если многочлен $F(x_1, \ldots, x_r)$ однороден и имеет степень n, то*

$$\sum x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = nF.$$

Доказательство. Подставив tx_i вместо x_i в F, мы получим

$$F(tx_1, \ldots, tx_r) = t^n F(x_1, \ldots, x_r).$$

Дифференцируя это равенство по t, находим

$$\sum x_i \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 = nt^{n-1}F(x_1, \ldots, x_r),$$

где $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0$ — результат подстановки $tx_1, \ldots, tx_r$ вместо $x_1, \ldots, x_r$ в $\frac{\partial F}{\partial x_i}$. Положив теперь $t = 1$, получим требуемое.

Подобным же образом получается более общий результат:

Теорема 10.3. *Если многочлен $F(x_1, \ldots, x_r)$ однороден и имеет степень n, то*

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_s} x_{i_1} \ldots x_{i_s} \frac{\partial^s F}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}} = n(n-1)\ldots(n-s+1)F.$$

10.2. Разложение на множители. Однородные многочлены от $r+1$ неизвестных ведут себя во многих отношениях подобно неоднородным многочленам от r неизвестных. Эта особенность однородных многочленов будет нам очень нужна в дальнейшем.

Пусть $F_n \in D[x_0, \ldots, x_r]$. Выделим одно из неизвестных, например x_0. Если $x_0 \nmid F_n$, то многочлен $f(x_1, \ldots, x_r) = F_n(1, x_1, \ldots, x_r)$, вообще говоря, неоднородный, будет также иметь степень n. Многочлены f и F_n будут называться *соответствующими*. Если дан любой многочлен $f(x_1, \ldots, x_r)$ степени n, мы можем получить соответствующий ему однородный, вставляя надлежащую степень x_0 в каждый член f, степень которого ниже n.

Теорема 10.4 *Если многочлены F_n и f соответствуют друг другу, то каждый делитель F_n соответствует некоторому делителю f, и наоборот.*

Эта теорема непосредственно вытекает из следующей теоремы:

Теорема 10.5. *Любой делитель однородного многочлена однороден.*

Доказательство. Пусть $F=fg$, причем f не однороден. Тогда можно записать

$$f=F_i+F_{i+1}+\ldots+F_{i+j},$$

где $F_i\neq 0$, $F_{i+j}\neq 0$ и $j>0$. Подобным же образом

$$g=G_k+G_{k+1}+\ldots+G_{k+l},$$

где $G_k\neq 0$, $G_{k+l}\neq 0$ и $l\geqslant 0$. Но в таком случае

$$F=fg=F_iG_k+(F_{i+1}G+F_iG_{k+1})+\ldots+F_{i+j}G_{k+l},$$

причем $F_iG_k\neq 0$, $F_{i+j}G_{k+l}\neq 0$ и

$$\deg F_iG_k=i+k<i+j+k+l=\deg F_{i+j}G_{k+l}.$$

Таким образом, F не будет однородным, вопреки предположению.

Следствием теоремы 10.5 является

Теорема 10.6. *Однородный многочлен неприводим тогда и только тогда, когда неприводим соответствующий ему неоднородный.*

Теореме 9.3 соответствует в случае однородных многочленов такая

Теорема 10.7. *Однородные многочлены*

$$F=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}x_1+\ldots+a_nx_1^n,$$
$$G=b_0x_0^m+b_1x_0^{m-1}x_1+\ldots+b_mx_1^m$$

имеют отличный от константы общий множитель тогда и только тогда, когда равен нулю их результант R.

Доказательство. Если $a_m=b_m=0$, то $R=0$, причем многочлены имеют общий множитель x_0. В случае $a_nb_m\neq 0$ мы можем рассмотреть соответствующие неоднородные многочлены и непосредственно применить теоремы 9.3 и 10.4. Если $a_n=0$, $b_m\neq 0$, мы положим $F=x_0^rF^*$, где $x_0\nmid F^*$, и применим теоремы 9.3 и 10.4 к многочленам, соответствующим F^* и G. Из выражения результанта в виде определителя легко следует, что результант F^* и G отличается от результанта F и G лишь множителем $\pm b_m^r$. Поэтому требуемый результат получается так же, как и в предыдущем случае. Подобным же образом можно рассуждать и тогда, когда $a_n\neq 0$, $b_m=0$.

Теорема 10.7 в некоторых отношениях более удовлетворительна, чем теорема 9.3, так как в однородном случае не нужно налагать каких-либо ограничений на коэффициенты многочленов. Это обстоятельство имеет место и в общей теории исключения[1]).

---

[1]) См. ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. 2, § 80, 1947.

Теореме 7.5. соответствует

Теорема 10.8. *Если область целостности D алгебраически замкнута и $F_n \in D[x_0, x_1]$, то существует система n пар констант a_i, b_i, для которой имеет место равенство*

$$F_n(x_0, x_1) = a \prod (a_i x_1 - b_i x_0), \quad a \neq 0, \quad a \in D.$$

Эта система однозначно определена с точностью до ненулевых множителей, общих в каждой паре.

Доказательство. Положим $F_n = x_0^r F_{n-r}$, $0 \leqslant r \leqslant n$, где x_0 уже не является делителем F_{n-r}. Тогда многочлен $F_{n-r}(1, x_1)$ имеет степень $n-r$ относительно x_1 и, по теореме 7.5,

$$F_{n-r}(1, x_1) = a \prod_{j=1}^{n-r} (x_1 - b_j).$$

Поэтому

$$F_{n-r}(x_0, x_1) = a \prod (x_1 - b_j x_0).$$

Отсюда требуемое разложение F_n получается непосредственно. Однозначная определенность системы пар следует из однозначности разложения на множители в $D[x_0, x_1]$.

Отношение $a : b$, в котором a и b не равны одновременно нулю, часто удобно называть *корнем* однородного уравнения $F_n(x_0, x_1) = 0$, если $F_n(a, b) = 0$. Отношение $\rho a : \rho b$ при любой ненулевой константе ρ считается тем же самым, что и $a : b$. В таком случае теорема 10.8 может быть сформулирована так: однородное уравнение степени n имеет однозначно определенную систему n корней.

10.3. Результанты. Нам будет впоследствии нужна следующая

Теорема 10.9. *Пусть*

$$F_n = A_n + A_{n-1} x_r + \ldots + A_0 x_r^n,$$
$$G_m = B_m + B_{m-1} x_r + \ldots + B_0 x_r^m,$$

где A_i, B_i—однородные многочлены степени i относительно $x_1, \ldots, x_{r-1}$ и $A_0 B_0 \neq 0$. Тогда результант $R(x_1, \ldots, x_{r-1})$ многочленов F и G относительно x_r либо равен нулю, либо является однородным многочленом степени mn от $x_1, \ldots, x_{r-1}$.

Доказательство.

$$R(tx_1, \ldots, tx_{r-1}) = \begin{vmatrix} t^n A_n & t^{n-1} A_{n-1} & \ldots & A_0 & & \\ & t^n A_n & \ldots & tA_1 & A_0 & \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & t^n A_n & \ldots\ldots & A_0 \\ t^m B_m & t^{m-1} B_{m-1} & \ldots & tB_1 & B_0 & \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & t^m B_m & \ldots\ldots & B_0 \end{vmatrix}.$$

Умножим каждую i-ю строку из A на t^{m-i+1}, а j-ю строку из B—на t^{n-j+1}. Получим

$$t^p R(tx_1, \ldots, tx_{r-1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} t^{n+m}A_n & t^{n+m-1}A_{n-1} & \ldots & t^m A_0 & & \\ & t^{n+m-1}A_n & \ldots & t^m A_1 & t^{m-1}A_0 & \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & t^{n+1}A_n & \ldots & \ldots & tA_0 \\ t^{n+m}B_m & t^{n+m-1}B_{m-1} & \ldots & t^{n+1}B_1 & t^n B_0 & \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & t^{m+1}R_m & \ldots & \ldots & tB_0 \end{vmatrix} =$$

$$= t^q R(x_1, \ldots, x_{r-1}),$$

где $p = m(m+1)/2 + n(n+1)/2$ и $q = (m+n)(m+n+1)/2$. Поэтому будет выполняться равенство

$$R(tx_1, \ldots, tx_{r-1}) = t^{mn} R(x_1, \ldots, x_{r-1}).$$

Требуемый результат вытекает отсюда в силу теоремы 10.1.

Из этой теоремы следует

Теорема 10.10. *Пусть $R(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m)$—результант многочленов*

$$\prod_{i=1}^{n} (x - y_i), \quad \prod_{j=1}^{m} (x - z_j)$$

относительно x. Тогда

$$R = a \prod_{i,j} (y_i - z_j), \quad a \neq 0, \ a \in D.$$

Доказательство. Если в данных многочленах вместо y_1 подставить z_1, то эти многочлены будут иметь общий множитель. Поэтому R должен при такой подстановке обращаться в нуль. Следовательно, $(y_1 - z_1)$ есть множитель R. Подобным же образом и $(y_i - z_j)$ будут множителями R при всех i и j, так что $\prod_{i,j} (y_i - z_j) \mid R$. Но так как многочлены $\prod (x - y_i)$ и $\prod (x - z_j)$ однородны и имеют соответственно степени n и m, то R—однородный многочлен степени mn. Многочлен $\prod_{i,j} (y_i - z_j)$ также однороден и имеет степень mn. Поэтому он может отличаться от R только постоянным множителем. Этот множитель отличен от нуля, так как R, очевидно, не равен тождественно нулю.

Глава II

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Геометрия имеет дело со свойствами *пространств*. Задачей этой главы является ознакомление с основными свойствами пространств тех типов, с которыми нам придется встречаться в дальнейшем. Как и в предыдущей главе, мы не будем пытаться дать полное изложение предмета и рассмотрим только вопросы, имеющие отношение к дальнейшему.

§ 1. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1.1. Проективные системы координат. Термин «пространство» имеет в математике множество смысловых оттенков. Мы не будем давать здесь его общего определения. Тот частный тип пространств, которым мы будем заниматься, известен под именем *проективных пространств*. Из различных способов определения этих пространств мы изберем здесь способ, наиболее прямо ведущий к обнаружению свойств, важных для алгебраической геометрии. Он основан на использовании координатных систем.

Каждое проективное пространство связано с некоторым множеством S, элементы которого называются *точками*, и некоторым полем K, называемым *основным полем*. Элементы поля называются *константами* или *числами*. *n-мерной проективной координатной системой* в множестве S над полем K называется соответствие между точками S и упорядоченными системами из $n+1$ чисел $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, удовлетворяющее условиям:

А. Каждая точка соответствует по меньшей мере одной системе $(a_0, \ldots, a_n)$, в которой не все $a_i = 0$.

Б. Каждая система $(a_0, \ldots, a_n)$, в которой не все $a_i = 0$, соответствует одной и только одной точке.

В. Системы $(a_0, \ldots, a_n)$ и $(b_0, \ldots, b_n)$ соответствуют одной точке тогда и только тогда, когда существует число $\rho \neq 0$, удовлетворяющее соотношениям $a_i = \rho b_i$, $i = 0, \ldots, n$.

Числа $a_0, \ldots, a_n$ любой из числовых систем, связанных с некоторой точкой A, называются *координатами* этой точки в заданной координатной системе. Для краткости вместо $(a_0, \ldots, a_n)$ мы будем писать (a_i) или даже просто (a). По той же причине

мы будем говорить «точка (a)» вместо—«точка, координаты которой суть $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$».

Чтобы показать общность такого определения, приведем несколько примеров проективных координатных систем. В некоторых из этих примеров в качестве элементов множества берутся точки эвклидовой плоскости. При рассмотрении таких точек удобно применять обычные декартовы координаты. Для отличия их от проективных координат мы будем заключать декартовы координаты в квадратные скобки.

Примеры. 1. S состоит из точек эвклидовой окружности $x^2+y^2-y=0$. В качестве проективных координат любой точки P окружности, отличной от точки $A=[0, 1]$, возьмем пары чисел $(\rho, \rho x)$, где x—абцисса точки пересечения прямой AP с осью x, а ρ—произвольное действительное число, отличное от нуля. Проективными координатами точки A будем считать $(0, \rho)$, где $\rho \neq 0$. Легко проверить, что этим действительно задана одномерная проективная координатная система в множестве S над полем R действительных чисел.

2. Пусть S состоит из всех точек $[x, y]$ эвклидовой плоскости, а также из некоторых «идеальных точек». Эти идеальные точки соответствуют направлениям в плоскости и могут быть определены как классы эквивалентности в множестве прямых, если в качестве отношения эквивалентности взять параллельность. С точкой $[x, y]$ мы связываем проективные координаты $(\rho, \rho x, \rho y)$, где ρ—отличное от нуля действительное число. Идеальной точке, определяемой системой параллельных прямых $ax+by+k=0$, мы ставим в соответствие проективные координаты $(0, b-a)$.

В этом случае мы получаем двумерную проективную координатную систему над полем R действительных чисел.

3. Пусть S состоит из всех прямых, проходящих через фиксированную точку эвклидова трехмерного пространства. В качестве проективных координат любой из этих линий возьмем ее направляющие коэффициенты, т. е. любые три числа, пропорциональные направляющим косинусам. Этим также определена двумерная проективная координатная система над полем R.

4. Пусть S состоит, во-первых, из внутренних точек круга $x^2+y^2=1$ и, во вторых, из пар $[x, y]$, $[-x, -y]$ диаметрально противоположных точек его окружности. Если $[x, y]$—одна из внутренних точек или одна из точек рассматриваемой пары, то проективные координаты точки или пары мы определим тремя числами $(\rho x, \rho y, \rho(1-x^2-y^2))$, где $\rho \neq 0$. Условие А, очевидно, выполнено. Проверку условий Б и В мы оставляем читателю.

5. В каждом из приведенных выше примеров поле K было полем действительных чисел. В качестве примера, связанного с другим основным полем, возьмем такой: пусть K—поле из двух элементов, определенное в примере 1, I—2.1, а S—любое мно-

жество, содержащее семь элементов. Тогда любое взаимно однозначное соответствие между элементами S и системами $(0, 0, u)$, $(0, u, 0)$, $(u, 0, 0)$, $(0, u, u)$, $(u, 0, u)$, $(u, u, 0)$ (u, u, u) будет двумерной координатной системой в множестве S над полем K.

6. Проективная координатная система размерности 0 может быть построена только в том случае, если множество S состоит из единственной точки. Действительно, если (a) и (b)—любые координаты, мы будем иметь $a = \rho b$, $\rho = ab^{-1}$ (ведь ни a, ни b не могут быть равны нулю!).

Приведенные выше примеры 2, 3 и 4 могут быть легко обобщены для получения координатных систем с числом измерений, большим двух.

1.2. Эквивалентность координатных систем. Проективное пространство связывается не с одной координатной системой, а с целым классом координатных систем. Чтобы дать определение проективного пространства, мы должны сначала рассмотреть одно отношение эквивалентности между координатными системами.

Из заданной n-мерной координатной системы можно получить некоторые другие системы следующим путем. Пусть[1]) a^i_j, $i, j = 0, 1, \ldots, n$—числа, подчиненные лишь тому условию, что определитель $a = |a^i_j| \neq 0$. Тогда по заданной координатной системе $\mathfrak{S}$ можно определить другую координатную систему $\mathfrak{S}'$, связывая с каждой точкой X координаты (y) посредством формул

$$y_j = \sum_i a^i_j x_i, \tag{1.1}$$

где (x_i)—координаты точки X в системе $\mathfrak{S}$. Из свойств линейных уравнений (теорема I—4.4) непосредственно следует, что при этом будут удовлетворены условия А, Б и В.

Покажем теперь, что определенное так отношение между системами $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ является отношением эквивалентности. Прежде всего, полагая a^i_j равными 1, если $i = j$, и равными 0, если $i \neq j$, мы видим, что это отношение рефлексивно. Далее, согласно теореме I—4.4, существует преобразование, обратное преобразованию (1.1)

$$x_i = \sum_j A^j_i y_j. \tag{1.2}$$

Здесь $|A^j_i| = a^{-1} \neq 0$, и поэтому формулы (1.2) выражают симметрию нашего отношения. Наконец, если система $\mathfrak{S}''$ определяется

[1]) На протяжении этой главы значки сверху—индексы, а не степени.

по системе $\mathfrak{S}'$ формулами

$$z_k = \sum_j b_k^j y_j, \quad |b_k^j| = b \neq 0,$$

то

$$z_k = \sum_i c_k^i x_i,$$

где

$$c_k^i = \sum_j b_k^j a_j^i.$$

Здесь также $|c_k^i| = ba \neq 0$, т. е. рассматриваемое отношение транзитивно.

Определим теперь *n-мерное проективное пространство* над полем K, как множество S вместе с совокупностью всех эквивалентных друг с другом проективных координатных систем над полем K в этом множестве. Такое пространство будет обозначаться S_n или SK_n, если мы хотим подчеркнуть роль основного поля K. Под координатной системой в пространстве S_n мы всегда будем понимать одну из класса эквивалентных систем координат, связанного с S_n.

Смысл этого определения можно сделать более ясным, сравнив наш случай со случаем эвклидовой плоскости E. С E также связаны некоторые координатные системы — декартовы. Имеются и некоторые уравнения преобразования — уравнения параллельных переносов и вращений, которые связывают декартовы координатные системы друг с другом. При рассмотрении геометрических задач координатные системы используются только в качестве инструмента и могут выбираться наиболее удобными применительно к каждой задаче.

Однако координатные системы играют и другую, более важную роль. Если пространство *определено* с помощью координатных систем, то многие свойства геометрических фигур в таком пространстве также определяются, прямо или косвенно, через координаты. Мы будем говорить, что алгебраическое условие, связывающее координаты точек пространства, определяет *геометрическое свойство* этих точек, если выполнение этого условия в одной из координатных систем влечет за собой его выполнение во всех эквивалентных координатных системах.

Рассмотрим опять эвклидову плоскость. Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — координаты точек, то условие $x_2 - x_1 = 5$ не определяет геометрического свойства точек, поскольку оно, очевидно, не будет выполняться одновременно во всех прямоугольных координатных системах. Наоборот, соотношение $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 25$, если оно верно в одной из таких систем, будет верно также

в любой другой и поэтому определяет геометрическое свойство двух точек — то, что они отстоят друг от друга на пять единиц.

Те свойства фигур в пространстве, которые могут быть определены независимо от координатной системы, например общность точек двух фигур, мы будем рассматривать как геометрические свойства. *Геометрия* того или иного пространства имеет своим предметом изучение связи между геометрическими свойствами фигур в этом пространстве[1]).

Так как в дальнейшем нас интересует *геометрия* пространства S_n, существенно обратить внимание на то, какие из последующих определений инвариантны относительно преобразований координатной системы. В некоторых случаях мы будем указывать на это явно, но часто доказательство того, что введенное понятие имеет геометрический смысл, будем оставлять читателю.

В качестве примера геометрического свойства в проективных пространствах рассмотрим двойное отношение четырех точек в S_1. Двойное отношение определяется выражением

$$r = \frac{(x_0^1 x_1^3 - x_0^3 x_1^1)(x_0^2 x_1^4 - x_0^4 x_1^2)}{(x_0^1 x_1^4 - x_0^4 x_1^1)(x_0^2 x_1^3 - x_0^3 x_1^2)},$$

где (x_0^i, x_1^i), $i = 1, 2, 3, 4$ — координаты четырех данных точек в какой-либо координатной системе. Независимость r от координатной системы мы можем доказать, подставив вместо x_j^i их выражения через y_j^i, получаемые из (1.2), и проверив, что получаемое при этом выражение приводится к первоначальной форме, в которой вместо координат x_j^i стоят соответствующие y_j^i.

1.3. Примеры проективных пространств. Так как класс эквивалентности определяется любым из его представителей, для построения проективного пространства на данном множестве точек необходимо указать лишь одну проективную координатную систему в этом множестве. Поэтому каждый из примеров п. 1.1 определяет проективное пространство. Пространство примера 3 является обычной проективной плоскостью (мы будем применять термины «прямая» и «плоскость» в случаях пространств одного и двух измерений). Пример 4 показывает способ представить себе проективную плоскость как ограниченное подмножество в эвклидовой плоскости. Пример 6 обнаруживает, что пространство S_0 состоит из единственной точки.

---

[1]) Это определение геометрии не совпадает с определением, данным Ф. Клейном в его Эрлангенской программе. [См., например, Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, ГТТИ, 1949. (*Прим. перев.*)] Однако в случае проективной, эвклидовой и аффинной геометрий оба определения равносильны. Принятое здесь определение в нашем изложении более естественно.

Следует отметить, что одно и то же множество может послужить основой для нескольких проективных пространств. Так, если в примере 4 мы заменим выражение $1-x^2-y^2$, например, на $\sqrt{1-x^2-y^2}$, мы получим пространство S_2, отличное от первоначального, так как соотношение между координатными системами в этих случаях не может быть выражено формулами (1.1). Можно привести более сложные примеры, показывающие, что одно и то же множество может быть основой проективных пространств различного числа измерений.

1.4. Упражнения. 1. Если K — конечное поле, состоящее из q элементов, то SK_n содержит $1+q+\ldots+q^n$ точек.

2. Показать, что в случае поля K из двух элементов любое множество S из трех точек служит основой единственного SK_1. Будет ли это верным в случае семи точек некоторого SK_2?

3. Будем записывать двойное отношение четырех точек P_1, P_2 и P_3, P_4 (в указанном порядке) знаком (P_1P_2, P_3P_4). Тогда:

1) $(P_1P_2, P_3P_4)=(P_2P_1, P_4P_3)=(P_3P_4, P_1P_2)=(P_4P_3, P_2P_1)=r$.

2) $(P_1P_2, P_4P_3)=1/r$,
$(P_1P_3, P_2P_4)=1-r$,
$(P_1P_3, P_4P_2)=1/(1-r)$,
$(P_1P_4, P_2P_3)=(r-1)/r$,
$(P_1P_4, P_3P_2)=r/(r-1)$.

3) Для четырех точек можно образовать менее шести различных двойных отношений только в следующих случаях:

а) Случай гармонических точек, когда $r=-1$, $1/2$, 2.

б) Случай эквигармонических точек, когда r имеет два значения, равные корням уравнения $x^2-x+1=0$.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА

2.1. Линейная зависимость точек. Так как в заданной координатной системе точки пространства S_n представляются системами $n+1$ чисел, к точкам можно применить понятие линейной зависимости. Первое, что следует при этом отметить, это — независимость результатов от выбранной координатной системы. Действительно, предположим, что точки P^α, $\alpha=1, \ldots, m$, будут зависимыми, если рассматривать их координаты (x_i^α) в определенной координатной системе, т. е. что существуют числа c_α, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие равенствам

$$\sum_\alpha c_\alpha x_i^\alpha=0, \quad i=0, \ldots, n.$$

Если мы перейдем к другой координатной системе по формулам (1.1), то будем иметь

$$\sum_{\alpha} c_\alpha y_j^\alpha = \sum_{\alpha, i} c_\alpha a_j^i x_i^\alpha = \sum_i a_j^i \Big(\sum_\alpha c^\alpha x_i^\alpha \Big) = 0,$$

т. е. точки P^α оказываются зависимыми и при рассмотрении их координат (y_j^α). Ввиду симметрии соотношения между рассматриваемыми координатными системами, линейная зависимость в одной системе эквивалентна линейной зависимости в другой. Поэтому о линейной зависимости точек можно говорить безотносительно к координатной системе, и линейная зависимость точек оказывается их геометрическим свойством.

2.2. Репер. Линейная зависимость позволяет дать интересную и полезную интерпретацию координатных систем. Рассмотрим системы чисел $(a_0^i, \ldots, a_n^i)$ в равенствах (1.1) как координаты некоторых точек P^i в системе $\mathfrak{S}'$. В таком случае формулы (1.1) выражают зависимость точки X от точек $P^0, P^1, \ldots, P^n$, причем координаты (x) точки X в системе $\mathfrak{S}$ являются не чем иным, как коэффициентами этой зависимости. Сами по себе точки $P^0, P^1, \ldots, P^n$ линейно независимы, так как $|a_j^i| \neq 0$. Их координаты в системе $\mathfrak{S}$ будут $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $(0, 0, 0, \ldots, 1)$.

Наоборот, если $(a_0^i, \ldots, a_n^i)$ — координаты $(n+1)$ независимых точек P^i в системе $\mathfrak{S}'$, то каждая точка X зависит от этих точек, причем коэффициенты линейной зависимости будут координатами X в некоторой координатной системе $\mathfrak{S}$.

Следует заметить, что система $\mathfrak{S}$ определяется не самими точками P^i, а значениями координат этих точек. Эта неопределенность в определении системы $\mathfrak{S}$ обычно устраняется следующим путем: пусть P^* — точка, линейно независимая от любых n точек $P^0, P^1, \ldots, P^n$. Тогда, если $(b_0, \ldots, b_n)$ — координаты P^* в системе $\mathfrak{S}$, мы должны иметь $b_i \neq 0$, $i = 0, \ldots, n$. Переход от одних значений координат точек P^i в системе $\mathfrak{S}'$ к другим, например от (a_j^i) к $(\rho_i a_j^i)$, приводит к умножению b_i на $1/\rho_i$. Поэтому существует единственный способ выбора ρ_i, т. е. единственный способ выбора значений координат P^i в системе $\mathfrak{S}'$, при котором P^* имеет в качестве своих координат в системе $\mathfrak{S}$ числа $(1, 1, \ldots, 1)$. Резюмируем этот вывод в виде

Теоремы 2.1. *Если заданы $n+2$ точки P^i, P^* пространства S_n, каждые $n+1$ из которых независимы, то существует единственная координатная система $\mathfrak{S}$, в которой координатами этих точек будут*: $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $(0, 0, 0, \ldots, 1)$, $(1, 1, \ldots, 1)$.

Упорядоченная система $n+2$ точек P^i, P^* называется *репером* определенной указанным образом координатной системы $\mathfrak{S}$. Обычно выбор точки (1, 1, ..., 1) («единичной точки») бывает не очень важен. Наоборот, целесообразный выбор «вершин» (1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1) часто бывает очень полезен.

2.3. Линейные подпространства. Изучение геометрии пространства состоит, главным образом, в обнаружении свойств некоторых из его подмножеств. В случае проективных пространств простейшие из таких подмножеств соответствуют прямым на плоскости или прямым и плоскостям в трехмерном пространстве. Мы определим их с помощью линейной зависимости.

Рассмотрим подмножество S' точек пространства S_n, линейно зависимых от $r+1$ независимых точек P^α, $\alpha=0, \ldots, r$, того же пространства. Построим в S' проективную координатную систему. Так как точки P^α независимы, то, по теореме I — 4.2, 2, существуют $n-r$ таких точек $P^{r+1}, \ldots, P^n$, что все точки $P^0, \ldots, P^n$ линейно независимы. Возьмем эти точки в качестве вершин репера некоторой координатной системы в пространстве S_n. В таком случае очевидно, что точка $X=(x_0, \ldots, x_n)$ пространства S_n лежит в S' тогда и только тогда, когда $x_{r+1}=\ldots=x_n=0$. Если поставить в соответствие точке X из S' систему чисел $(x_0, \ldots, x_r)$, это соответствие будет r-мерной координатной системой в S' над полем K и определит r-мерное проективное пространство S_r, точками которого будут точки S'. Определенное таким образом пространство S_r мы будем называть *линейным подпространством* (или просто *подпространством*) пространства S_n.

Теорема 2.2. *Система из $r+1$ независимых точек пространства S_n лежит в одном и только в одном подпространстве размерности r.*

Доказательство. По определению, $r+1$ независимые точки P^α из S_n лежат по меньшей мере в одном r-мерном подпространстве S_r. Пусть S'_r — любое r-мерное подпространство S_n, содержащее точки P^α. Заметим прежде всего, что S_r и S'_r состоят из одних и тех же точек. Действительно, так как точки P^α лежат в S'_r, каждая их линейная комбинация также должна лежать в S'_r, откуда следует, что $S_r \subset S'_r$. Обратно, каждая точка S'_r будет линейной комбинацией $r+1$ независимых точек P^α, так что $S'_r \subset S_r$. Пусть теперь X — точка подпространств S_r и S'_r, имеющая в этих подпространствах координаты $(x_0, \ldots, x_r)$ и $(y_0, \ldots, y_r)$. По определению линейного подпространства, в S_n существуют две координатные системы, в которых точка X имеет своими координатами соответственно $(x_0, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$ и $(y_0, \ldots, y_r, 0, \ldots, 0)$. Эти системы связаны уравнениями (1.1). Применяя эти уравнения к точкам подпространств S_r и S'_r, для

которых $x_{r+1} = \ldots = x_n = y_{r+1} = \ldots = y_n = 0$, получим

$$y_\beta = \sum_{\alpha=0}^{r} a_\beta^\alpha x_\alpha, \quad \beta = 0, \ldots, r.$$

Определитель $|a_\beta^\alpha|$ не может быть равен нулю, так как, если бы это имело место, независимые точки P^α оказались бы линейно зависимыми в координатах (y). Это показывает, что координатные системы в S_r и S_r' эквивалентны, так что рассматриваемые пространства совпадают.

Для значений $r=1$ и $r=2$ эта теорема является проективным аналогом известных предложений эвклидовой геометрии, гласящих, что прямая определяется двумя ее точками, а плоскость — тремя неколлинеарными (т. е. линейно независимыми) точками.

Теорема 2.3. *Если S_r — подпространство пространства S_n, то для любой координатной системы $\mathfrak{S}$ в подпространстве S_r найдется такая координатная система $\mathfrak{S}'$ в S_n, что координатами произвольной точки из S_r в системе $\mathfrak{S}'$ будут координаты той же точки в системе $\mathfrak{S}$, сопровождаемые $n-r$ нулями.*

Доказательство. Пусть $P^0, \ldots, P^r, P^*$ — репер системы $\mathfrak{S}$. Выберем в качестве вершин репера системы $\mathfrak{S}'$ точки $P^0, \ldots, P^r, P^{r+1}, \ldots, P^n$, указанные в определении подпространства. Тогда каждая точка из S_r имеет своими координатами в системе $\mathfrak{S}'$ числа $(x_0, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$. В частности, координаты точки P^* будут $(\rho_0, \ldots, \rho_r, 0, \ldots, 0)$. Надлежащим выбором «единичной точки» для системы $\mathfrak{S}'$ можно добиться, чтобы было $\rho_i = 1$, $i = 0, \ldots, r$. Тогда координатная система $\mathfrak{S}_0$ в множестве S_r, которая получится, если взять в качестве координат каждой точки из S_r ее первые $r+1$ координат в системе $\mathfrak{S}$, будет иметь тот же репер, что и система $\mathfrak{S}$. Поэтому системы $\mathfrak{S}_0$ и $\mathfrak{S}$ совпадают.

Теорема 2.3 оказывается полезной при исследовании дальнейших свойств подпространств. Одним из непосредственных ее следствий является

Теорема 2.4. *Точки подпространства S_r пространства S_n линейно зависимы в подпространстве тогда и только тогда, когда они линейно зависимы во всем пространстве.*

Такое свойство подпространств очень удобно, так как благодаря ему при рассмотрении линейной зависимости точек можно в большинстве случаев не учитывать, в каком из подпространств лежат эти точки.

2.4. Размерность. Так как n-мерное пространство S_n не может содержать более $n+1$ линейно независимых точек, оно не может содержать также подпространств с размерностью, большей n. S_n содержит единственное подпространство размерности n — само

S_n. Подпространства S_n размерности $n-1$ называются *гиперплоскостями* в S_n. Таким образом, гиперплоскости в S_1 будут точками, в S_2 — прямыми, в S_3 — плоскостями.

Целесообразно рассматривать пустое множество как линейное подпространство размерности -1. Это условие согласуется с теоремой 2.2 и полезно с точки зрения избежания необходимости рассмотрения отдельных частных случаев в некоторых из дальнейших теорем (в частности, в теореме 2.8).

2.5. Соотношения между подпространствами. Рассмотрим теперь соотношения между подпространствами данного пространства S_n.

Теорема 2.5. 1) *Если S_s — подпространство S_r, а S_r — подпространство S_n, то S_s — подпространство S_n.*

2) *Если S_s и S_r — подпространства S_n и если все точки S_s лежат в S_r, то S_s — подпространство S_r.*

Доказательство. 1) Непосредственно получается двукратным применением теоремы 2.3.

2) Двукратным применением теоремы I — 4.2 (2) получаем такие независимые точки $P^0, \ldots, P^n$ из S_n, что $P^0, \ldots, P^s$ лежат в S_s, а $P^0, \ldots, P^r$ — в S_r. Беря эти точки в качестве вершин реперов в указанных трех пространствах, мы видим, как и в доказательстве теоремы 2.3, что при надлежащем выборе единичных точек в S_r и в S_s, координаты любой точки S_r (или S_s) в пространстве S_n будут ее координатами в S_r (или в S_s), сопровождаемыми $n-r$ (или $n-s$) нулями. Рассматривая теперь соотношение между координатами в S_r и в S_s, видим, что S_s — подпространство S_r.

Теорема 2.6. *Если некоторое подпространство пространства S_n содержит $r+1$ независимых точек из подпространства S_r, то оно содержит все точки S_r.*

Доказательство мы оставляем читателю.

Теорема 2.7. *Для любого подмножества S из S_n существует единственное подпространство S_r наименьшей размерности, содержащее S.*

Доказательство. Пусть $r+1$ есть наибольшее число независимых точек из S, а $P^0, \ldots, P^r$ — одна из систем таких точек. Обозначим через S_r подпространство, определяемое точками $P^0, \ldots, P^r$ (здесь $r=-1$, если множество S пусто). Тогда каждая точка из S будет линейно зависимой от точек $P^0, \ldots, P^r$ и поэтому множество S будет лежать в S_r. Так как точки $P^0, \ldots, P^r$ независимы, они не могут лежать в подпространстве меньшей размерности, чем r. Если теперь S'_r — любое подпространство размерности r, содержащее S, то оно должно содержать также S_r, ибо оно содержит $r+1$ независимых точек последнего. Следовательно, S'_r совпадает с S_r.

S_r называется *линейной оболочкой* (или просто *оболочкой*) множества S.

Теорема 2.8. *Если подпространства S_s и S_t имеют линейную оболочку S_r, то общие точки подпространств S_s и S_t заполняют подпространство S_{s+t-r}.*

Доказательство. Пусть максимальное число линейно независимых общих точек S_s и S_t будет $q+1$ ($q=-1$, если S_s и S_t вообще не имеют общих точек), а $P^0, \ldots, P^q$ — одна из систем таких точек. В силу теорем 2.5 и 2.6, подпространство S_q, определяемое этими точками, будет подпространством как S_s, так и S_t. Более того, это подпространство содержит все общие точки S_s и S_t, так как в противном случае система линейно независимых общих точек $P^0, \ldots, P^q$ могла бы быть расширена. Таким образом, множество общих точек S_s и S_t образует некоторое S_q; остается лишь доказать, что $q=s+t-r$.

Пусть $Q^{q+1}, \ldots, Q^s$ и $R^{q+1}, \ldots, R^t$ — такие точки соответственно из S_s и S_t, что системы точек $P^0, \ldots, P^q, Q^{q+1}, \ldots, Q^s$ и $P^0, \ldots, P^q, R^{q+1}, \ldots, R^t$ линейно независимы. Тогда система всех точек P, Q и R также линейно независима. Если это не так, то должна существовать некоторая линейная комбинация точек R, выражаемая линейной комбинацией точек P и Q. Эта комбинация должна быть точкой S_q, так как R — точки из S_t, а P и Q — точки из S_s. Поэтому такая комбинация должна выражаться также только через P. Но это противоречит предположению, что P и R линейно независимы. Подпространство, определяемое точками P, Q, R, будет иметь размерность $s+t-q$ и будет являться линейной оболочкой S_r пространств S_s и S_t, т. е. $r=s+t-q$, или $q=s+t-r$.

Подпространство S_q, общее для S_s и S_t, называется *пересечением* этих подпространств, а линейная оболочка S_s и S_t называется также их *объединением*. Теорему 2.8 можно сформулировать в следующем симметричном виде: сумма размерностей двух подпространств равна сумме размерностей их пересечения и объединения.

Одним из важных следствий теоремы 2.8 является то, что любые подпространства S_r и S_s пространства S_n имеют общее подпространство размерности, не меньшей, чем $r+s-n$. Отсюда следуют известные свойства пересечений прямых на плоскости и плоскостей и прямых в трехмерном пространстве.

Доказательство следующей теоремы, которая понадобится в дальнейшем, мы оставляем читателю:

Теорема 2.9. *Пусть S_r и S_s — подпространства S_n, $P^0, \ldots, P^r$ и $Q^0, \ldots, Q^s$ — линейно независимые системы точек соответственно из S_r и из S_s. Тогда точки $P^0, \ldots, P^r$, $Q^0, \ldots, Q^s$ линейно независимы в том и только в том случае, если подпространства S_r и S_s не имеют общих точек.*

2.6. Упражнения. 1. Если гиперплоскость из S_n не содержит некоторого подпространства S_r, то она пересекает S_r по подпространству S_{r-1}.

2. Пересечение r гиперплоскостей из S_n является пространством размерности $\geqslant n-r$.

3. Для любых координатных систем пространства S_n и подпространства S_r соотношения между координатами произвольной точки из S_r в этом подпространстве и ее координатами во всем пространстве имеют вид

$$y_\alpha = \sum_{i=0}^{n} a_\alpha^i x_i, \quad \alpha = 0, \ldots, r,$$

где матрица $\| a_\alpha^i \|$ имеет ранг $r+1$.

4. Точки пространства S_1 из примера 1, п. 1.1, являются также точками пространства S_2 примера 2. Будет ли S_1 подпространством S_2?

5. Если K — конечное поле, содержащее q элементов, то число различных подпространств S_r размерности r в пространстве SK_n равно

$$\frac{(q^{n+1}-1)(q^n-1)\ldots(q^{n-r+1}-1)}{(q^{r+1}-1)(q^r-1)\ldots(q-1)}.$$

§ 3. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

3.1. Координаты гиперплоскостей. Одна из наиболее интересных сторон проективной геометрии на плоскости состоит в теории двойственности, которая показывает, что точки и прямые могут быть заменяемы друг другом во всех предложениях этой геометрии. Мы в состоянии показать теперь, что подобного рода двойственность имеется также и в любом пространстве S_n. Первое, что мы сделаем, — это установим некоторую координатную систему для гиперплоскостей из S_n.

Рассмотрим некоторую определенную координатную систему в S_n. Пусть π — гиперплоскость, определяемая системой независимых точек $P^\alpha = (a_i^\alpha)$, $\alpha = 0, \ldots, n-1$. В таком случае система уравнений $\sum_i u^i a_i^\alpha = 0$ имеет ненулевое решение (b^i), единственное с точностью до ненулевого множителя (теоремы I—4.1 и I—4.3). Так как каждая точка из π линейно зависит от точек P^α, то линейная форма $\sum_i b^i x_i$ будет обращаться в нуль для любой точки (x) из π. И наоборот, если задана любая система $n+1$ чисел b^i, не равных одновременно нулю, то уравнение $\sum b^i x_i = 0$ имеет n независимых решений (a_i^α), $\alpha = 0, \ldots, n-1$ и его остальные решения являются линейными комбинациями

этих. Отсюда следует, что ненулевые решения уравнения $\sum b^i x_i = 0$ в точности соответствуют точкам некоторой гиперплоскости. Уравнение $\sum b^i x_i = 0$ называется *уравнением этой гиперплоскости*, а коэффициенты b^i — ее *координатами*. Из определения координат гиперплоскости непосредственно следует, что эти координаты удовлетворяют условиям А и Б, налагаемым на проективные координаты. Условие В также выполнено: если $\sum b^i x_i = 0$ и $\sum c^i x_i = 0$ — уравнения одной и той же гиперплоскости, то эти уравнения должны иметь n общих линейно независимых решений. Но это возможно лишь в том случае, когда ранг матрицы коэффициентов b^i и c^i равен 1, т. е. когда $b^i = \rho c^i$ при некотором $\rho \neq 0$.

Множество гиперплоскостей пространства S_n, вместе с классом координатных систем в этом множестве, эквивалентных только что определенной, оказывается, таким образом, n-мерным проективным пространством над полем K. Это пространство мы будем обозначать через S_n^*.

Построение пространства S_n^* было выполнено с помощью некоторой заданной координатной системы в S_n. Покажем, что мы всегда получим это же пространство, независимо от того, из какой координатной системы в пространстве S_n мы будем исходить. Пусть некоторая другая координатная система в S_n определена соотношениями (1.1) и пусть уравнения одной и той же гиперплоскости в этих системах будут $\sum b^i x_i = 0$ и $\sum c^i y_i = 0$. Точка (y) лежит на π тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i,j} b^i A_i^j y_j = 0$. Другими словами, уравнение гиперплоскости π в системе (y) должно иметь вид $\sum\limits_j \left(\sum\limits_i b^i A_i^j\right) y_j = 0$. Отсюда следует, что найдется такое число $\rho \neq 0$, что

$$c^j = \sum_i \rho A_i^j b^i.$$

При этом $|\rho A_i^j| = \rho^{n+1} a^{-1} \neq 0$. Полученные равенства показывают, что координатные системы для гиперплоскостей, определенные с помощью координатных систем (x) и (y) пространства S_n, эквивалентны между собой. Поэтому они определяют один и тот же класс эквивалентных систем, а следовательно, одно и то же пространство S_n^*.

3.2. Дуальные пространства. Пространство S_n^* называется *дуальным* для S_n. Обычно слово «дуальный» применяется в математике в смысле, симметричном относительно тех объектов, к которым оно относится. Поэтому можно было бы ожидать, что дуальным для S_n^* является S_n. Однако это, строго говоря, не так, ибо элементами дуального пространства для S_n^* будут гиперпло-

скости в S_n^*, т. е. множества гиперплоскостей в S_n. Чтобы подчеркнуть взаимность соотношения между S_n и S_n^*, мы будем представлять себе элементы S_n^* не как подмножества из S_n, а как индивидуальные объекты. В связи с этим мы будем говорить об *инцидентности* точки и гиперплоскости, вместо того, чтобы сказать, что точка *лежит* в гиперплоскости. Из определения пространства S_n^* видно, что каждой координатной системе в S_n соответствует определенная координатная система в S_n^*. Эти системы таковы, что точка $P=(a_i)$ и гиперплоскость $\pi=(b^i)$ инцидентны тогда и только тогда, когда $\sum a_i b^i=0$. Координатные системы, связанные таким образом, мы будем называть *соответствующими*. Нетрудно видеть, что каждая координатная система в S_n^* имеет соответствующую систему в S_n. Действительно, пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}^*$ — какие-либо соответствующие координатные системы в пространствах S_n и S_n^*, а $\mathfrak{S}_1^*$ — любая система в S_n^*. Координаты (ξ^i) и (η^i) произвольной точки в системах $\mathfrak{S}^*$ и $\mathfrak{S}_1^*$ связаны соотношениями

$$\eta^j=\sum_i a_i^j \xi^i, \qquad j=0, \ldots, n.$$

Если теперь определить систему $\mathfrak{S}_1$ в пространстве S_n формулами

$$y_j=\sum_i A_j^i x_i,$$

в которых x_i — координаты точки в системе $\mathfrak{S}$, то система $\mathfrak{S}_1$ будет соответствующей для $\mathfrak{S}_1^*$.

Если выражать отношение между пространствами S_n и S_n^* при помощи понятий инцидентности и соответствующих координатных систем, то это отношение становится вполне симметричным.

3.3. Дуальные подпространства. Из предыдущих рассмотрений следует, что гиперплоскости пространства S_n, являющиеся точками одной гиперплоскости $\sum a_i\xi^i=0$ пространства S_n^*, имеют единственную общую точку, координатами которой в системе, соответствующей (ξ^i), будут (a_i). Это обстоятельство является частным случаем следующей теоремы:

Теорема 3.1. *Гиперплоскости пространства S_n, содержащие заданное подпространство S_r, образуют подпространство S_{n-r-1}^* пространства S_n^*.*

Доказательство. Будем применять соответствующие координатные системы в пространствах S_n и S_n^*. Пусть подпространство S_r определяется системой независимых точек (a^α), $\alpha=0, \ldots, r$. Гиперплоскость (ξ) содержит все точки (a^α) тогда и только тогда, когда

$$\sum_i a_i^\alpha \xi^i=0. \tag{3.1}$$

Так как точки (a^α) линейно независимы, эти уравнения имеют $n-r$ независимых решений (ξ_β), $\beta=0, \ldots, n-r-1$. Поэтому решения системы (3.1) будут давать именно те плоскости, которые линейно зависят от (ξ_β), т. е. они образуют некоторое S^*_{n-r-1}.

Подпространство S^*_{n-r-1} называется *дуальным* для S_r. Следует четко различать термины «*дуальное пространство для* S_r» и «*дуальное подпространство для* S_r» (рассматриваемого как подпространство в пространстве S_n). Дуальное пространство является проективным пространством размерности r и состоит из гиперплоскостей в S_r, дуальное же подпространство имеет размерность $n-r-1$ и состоит из всех гиперплоскостей пространства S_n, содержащих S_r. Хотя это применение сходных по звучанию терминов несколько неудачно, оно редко приводит к недоразумениям. Отметим, в частности, что дуальным *подпространством* для S_n (рассматриваемого как подпространство самого S_n) является пустое множество S^*_{-1}.

Следующая теорема является просто двойственной теореме 2.1. Однако она достаточно важна, чтобы быть явно сформулированной:

Теорема 3.2. *Если задана система из $n+2$ гиперплоскостей в S_n, каждые $n+1$ из которых линейно независимы, то существует единственная координатная система в S_n, в которой уравнения этих гиперплоскостей будут иметь вид*

$$x_0=0,\ x_1=0,\ \ldots,\ x_n=0,\quad x_0+x_1+\ \ldots\ +x_n=0$$

(в указанном порядке).

Очевидно, что вершины репера такой системы будут лежать в точках пересечения каждых n из плоскостей $x_i=0$. Сами эти плоскости будут «гранями» репера и будут линейными оболочками для вершин, взятых по n.

3.4. Упражнения. 1. Если заданы произвольные координатные системы в S_n и в S^*_n, то существует такая система констант α^i_j с определителем $|\alpha^i_j|$, отличным от нуля, что точка (a_i) и гиперплоскость (b^j) будут инцидентными тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i,j} \alpha^i_j a_i b^j=0$.

2. Дуальными подпространствами для пересечения и объединения двух подпространств из S_n будут, соответственно, объединение и пересечение в S^*_n подпространств, дуальных для данных.

3. Подпространства S_{r+1} из S_n, содержащие фиксированное S_r, могут рассматриваться как точки в S_{n-r-1} (ср. с примером 3, п. 1.1).

§ 4. АФФИННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

4.1. Аффинные координаты. При рассмотрении некоторых задач алгебраической геометрии представляет определенное неудобство то обстоятельство, что соответствие между точками и

системами значений проективных координат не является взаимно однозначным. Поэтому мы определим другой тип координатных систем, в которых будет иметь место взаимная однозначность указанного соответствия.

Пусть $a_0, \ldots, a_n$ — координаты точки P в некоторой проективной координатной системе $\mathfrak{S}$ пространства S_n. Если $a_0 \neq 0$, то n чисел $a_1/a_0, \ldots, a_n/a_0$ называются координатами точки P в аффинной координатной системе, соответствующей системе $\mathfrak{S}$. Непосредственно получаются следующие свойства аффинной координатной системы:

А. Точка P имеет определенные координаты в заданной аффинной системе тогда и только тогда, когда она не лежит на гиперплоскости π, имеющей в соответствующей проективной системе координат уравнение $x_0 = 0$.

Эта гиперплоскость по очевидным соображениям называется *бесконечно удаленной* гиперплоскостью рассматриваемой аффинной системы. Вершина репера $(1, 0, \ldots, 0)$, не лежащая на бесконечно удаленной гиперплоскости, называется *началом* аффинной системы. Прямые, соединяющие начало с остальными вершинами репера, называются *координатными осями*.

Б. Аффинная координатная система определяет взаимно однозначное соответствие между точками множества $S_n - \pi$ (т. е. точками S_n, не лежащими на π) и всеми упорядоченными системами из n чисел.

Преобразование проективных координат (1.1), при котором уравнение $x_0 = 0$ переходит в уравнение $y_0 = 0$, может быть записано в виде

$$y_0 = x_0,$$

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i x_i + b_j x_0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Отсюда следует:

В. Если две аффинные координатные системы имеют общую бесконечно удаленную гиперплоскость, то координаты в этих системах связаны равенствами

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i x_i + b_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $|a_j^i| \neq 0$.

Наоборот, любая система уравнений такого рода определяет переход от одной аффинной координатной системы к другой. Аффинные системы координат, связанные указанным образом, называются эквивалентными.

Множество точек $S_n - \pi$ вместе с заданным классом эквивалентных аффинных координатных систем образует n-мерное аффинное пространство A_n над полем K.

4.2. Соотношение между аффинным и проективным пространствами. Мы определили аффинное пространство A_n как подмножество S_n. Причина такого подхода заключается в том, что мы будем интересоваться прежде всего проективными пространствами, а аффинные пространства будем использовать лишь как вспомогательное понятие. Очевидно, однако, что пространство A_n можно было бы определить тем же способом, что и пространство S_n, используя условия А, Б, В для определения надлежащих координатных систем и их преобразований. Исторически аффинные пространства, являющиеся, по существу, эвклидовыми пространствами с исключенными понятиями расстояния и угла, были известны задолго до проективных пространств. Сами проективные пространства были первоначально определены посредством дополнения аффинных пространств «несобственными» или бесконечно удаленными точками.

4.3. Подпространства аффинного пространства. По самому своему определению, пространство A_n лежит в определенном S_n. Однако каждое S_n содержит много различных пространств A_n, так как любая гиперплоскость из S_n, очевидно, может быть взята в качестве бесконечно удаленной гиперплоскости некоторого A_n. Мы увидим позже, что именно эта свобода выбора позволяет с большим удобством использовать аффинные координаты.

Пусть A_n — аффинное пространство в некотором S_n, π — его бесконечно удаленная гиперплоскость. Если S_r — линейное подпространство S_n, не лежащее в π, то пересечение S_r с π будет S_{r-1}, т. е. некоторой гиперплоскостью π' в S_r. Поэтому точками S_r, лежащими в A_n, будут все точки из $S_r - \pi'$, причем это множество естественным образом можно рассматривать как определенное аффинное пространство A_r. A_r будет называться линейным подпространством A_n. Свойства объединений и пересечений линейных подпространств в A_n не столь просты, как соответствующие свойства в S_n. Это обусловлено существованием параллельных подпространств, т. е. таких, которые при рассмотрении их в S_n оказываются пересекающимися на бесконечно удаленной гиперплоскости. Именно желание избавиться от исключительных свойств параллельных подпространств привело к введению понятия проективного пространства.

Подпространства пространства A_n могут быть определены также с помощью понятия линейной зависимости. Однако сами по себе аффинные координаты не приспособлены для такой цели,

и мы будем иметь мало случаев пользоваться ими в этой связи. Следует лишь заметить, что гиперплоскости в пространстве A_n определяются линейными уравнениями, но их уравнения не будут обязательно однородными. Это непосредственно следует из соотношения между проективными и аффинными координатами.

В пространстве A_n отсутствует двойственность. Например, две точки из A_n всегда определяют инцидентную с ними прямую, а две гиперплоскости могут быть параллельными и поэтому не быть инцидентными с каким-либо подпространством A_{n-2}.

4.4. Прямые в аффинном пространстве. Из вопросов, связанных с линейной зависимостью точек в аффинных координатах, мы рассмотрим только зависимость между точками одной и той же прямой. Если (a) и (b) — проективные координаты двух точек, то любая точка (x) соединяющей их прямой L (т. е. линейной оболочки этих точек) определяется равенствами

$$x_i = sa_i + tb_i, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{4.1}$$

в которых (s, t) могут рассматриваться как проективные координаты на L. Прежде всего мы введем аффинные координаты на L и напишем

$$x_i = a_i + ub_i, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{4.2}$$

где u — аффинная координата. Точка (b) оказывается при этом бесконечно удаленной и не может быть получена из формул (4.2). Во многих случаях удобно ввести фиктивное значение u, обозначаемое знаком ∞. Тогда точка (b) получится из формул (4.2) при $u = \infty$. Запись $u = \infty$ в действительности означает, что мы возвратились к уравнениям (4.1) и положили $s = 0$, $t \neq 0$.

Если мы введем аффинные координаты в S_n, то формулы (4.2) обратятся в такие:

$$x_i = (a_i + ub_i)/(a_0 + ub_0), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Наконец, если (b) будет точкой бесконечно удаленной гиперплоскости в S_n, а (a) не лежит на этой гиперплоскости, то будет $b_0 = 0$, $a_0 \neq 0$ и уравнения (4.3) можно записать в виде

$$x_i = a_i + ub_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Уравнения (4.4) называются *параметрическими* уравнениями прямой.

4.5. Упражнения. 1. Если $(a_i^0), \ldots, (a_i^r)$ — линейно независимые точки некоторого подпространства A_r из A_n, то все точки A_r могут быть получены из уравнений

$$x_i = \left(1 - \sum_\alpha t_\alpha\right) a_i^0 + \sum_\alpha t_\alpha a_i^\alpha, \quad i = 1, \ldots, n,$$

при конечных значениях t_α. Соответствие между точками подпространства A_r и системами чисел $(t_1, \ldots, t_r)$ является координатной системой в A_r, причем любая координатная система в A_r может быть получена этим путем.

2. Два подпространства A_r и A_s $(s \leqslant r)$ некоторого пространства A_n называются параллельными, если бесконечно удаленная гиперплоскость S_{s-1} подпространства A_s содержится в бесконечно удаленной гиперплоскости S_{r-1} подпространства A_r. Доказать, что

1) При фиксированном r параллелизм подпространств A_r пространства A_n является соотношением эквивалентности.

2) Если в A_n задано некоторое A_r и точка P вне A_r, то существует одно и только одно A'_r, параллельное A_r и содержащее точку P.

3) При $s < r$ подпространство A_s параллельно A_r тогда и только тогда, когда A_s параллельно некоторому A'_s, содержащемуся в A_r.

§ 5. ПРОЕКЦИИ

5.1. Проектирование точек из подпространства. Простейшим видом проектирования, от которого проективная геометрия получила свое название, является следующий: пусть π — гиперплоскость в S_n, а P — некоторая точка S_n, не лежащая в π. Тогда при любом выборе точки A, отличной от P, прямая AP пересекает π в единственной точке A'. A' называется *проекцией* точки A на гиперплоскость π из точки P. Если S — любое множество точек, не содержащее P, проекцией его на гиперплоскость π из точки P называется множество проекций всех точек множества S.

Это построение может быть легко обобщено. Пусть S_r, $0 \leqslant r \leqslant n-1$ и S_{n-r-1} — два подпространства S_n, не имеющие общих точек (ниже будет доказано, что такие пары подпространств существуют при любом r). При любом выборе точки A, не лежащей в S_{n-r-1}, линейная оболочка A и S_{n-r-1} является некоторым подпространством S_{n-r}, пересекающимся с S_r по подпространству S_s. При этом подпространства S_s и S_{n-r-1} имеют подпространство S_n своей линейной оболочкой и не пересекаются между собой, ибо в противном случае подпространства S_r и S_{n-r-1} также пересекались бы. Отсюда вытекает, что $s=0$, и, следовательно, S_s есть некоторая точка A' подпространства S_r. Мы можем называть A' проекцией точки A на подпространство S_r из S_{n-r-1}. Подпространство S_{n-r-1} называется *центром* проектирования. Как и в предыдущем абзаце, можно определить проекцию любого множества, не пересекающегося с центром проектирования.

Чтобы выяснить соотношения между координатами точек A и A', выберем сначала специальную координатную систему в S_n.

Пусть $P^0, \ldots, P^r$ и $P^{r+1}, \ldots, P^n$ — линейно независимые точки соответственно из S_r и S_{n-r-1}. Тогда, по теореме 2.9, система всех точек $P^0, \ldots, P^n$ будет линейно независимой [и обратно, если эта система линейно независима, то линейные оболочки систем $P^0, \ldots, P^r$ и $P^{r+1}, \ldots, P^n$ не пересекаются; этим, в частности, доказано существование пар непересекающихся подпространств S_r и S_{n-r-1} при любом r (от 0 до $n-1$)]. Если взять P^a в качестве вершин репера некоторой координатной системы в S_n, то соотношение между координатами A и A' будет очень простым. Подпространство S_r определяется уравнениями $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$, а S_{n-r-1} — уравнениями $x_0 = \ldots = x_r = 0$. Если A имеет координаты (a_i), то любая точка линейной оболочки A и S_{n-r-1} имеет координаты $(\lambda a_i + \mu b_i)$, где (b_i) — некоторая точка S_{n-r-1}. Так как точка A' принадлежит указанной оболочке, ее координаты должны иметь такой вид. Но так как A' является также точкой S_r, последние $n-r$ из ее координат должны быть нулями. Поэтому ее первыми координатами будут

$$\lambda a_0 + \mu b_0, \ \ldots, \ \lambda a_r + \mu b_r.$$

Учтя теперь, что (b_i) есть точка S_{n-r-1}, для которой должно быть $b_0 = \ldots = b_r = 0$, мы получим, что точка A' имеет координаты $(a_0, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)$. Другими словами, переход от координат точки A к координатам точки A' состоит просто в замене последних $n-r$ координат нулями.

5.2. Упражнения. 1. Пусть в S_n и в S_r заданы произвольные координатные системы. Если (y) — координаты в пространстве S_r проекции точки (x), то

$$y_\alpha = \sum_{i=0}^{n} a_\alpha^i x_i, \quad \alpha = 0, \ \ldots, \ r,$$

где матрица $\| a_\alpha^i \|$ имеет ранг $r+1$ (ср. с примером 3, п. 2.6).

2. Проектирование на S_r из центра S_{n-r-1} равносильно последовательному проектированию из $n-r$ независимых точек подпространства S_{n-r-1} на $n-r$ надлежащим образом подобранных гиперплоскостей, содержащих S_r.

3. Пусть S_r, S'_r, S_{n-r-1} — такие подпространства S_n, что S_{n-r-1} не пересекает ни S_r, ни S'_r. Тогда соответствие $P \longleftrightarrow P'$ между точками подпространств S_r и S'_r, определяемое проектированием из центра S_{n-r-1}, будет взаимно однозначным и обладает следующими свойствами:

1) Точки $P^1, \ldots, P^k$ независимы тогда и только тогда, когда независимы точки $P^{1'}, \ldots, P^{k'}$.

2) Проекцией любого подпространства S_s из S_r является подпространство S'_s из S'_r и наоборот.

3) В S_r и S'_r существуют такие координаты системы, в которых соответствующие точки имеют одинаковые координаты.

Определенное таким образом соответствие между точками подпространств S_r и S'_r называется *перспективным* соответствием с центром S_{n-r-1}.

4. Взаимно однозначное соответствие, определяемое последовательностью перспективных соответствий, обладает свойствами 1, 2, 3, указанными в упражнении 3. Обратно, любое взаимно однозначное соответствие между точками двух подпространств S_r и S'_r из S_n, имеющее эти свойства, может быть получено с помощью последовательности перспективных соответствий. Такое соответствие называется проективным соответствием.

§ 6. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

6.1. Коллинеации. Уравнения (1.1) были введены для определения перехода от одной координатной системы к другой. Мы рассматривали (x) и (y) как координаты одной и той же точки в различных координатных системах. Но можно получить и другое истолкование этих уравнений, рассматривая (x) и (y) как координаты различных точек в одной и той же координатной системе. Тогда уравнения (1.1) дают нам способ, при помощи которого каждой точке (x) можно поставить в соответствие однозначно определенную точку (y), могущую совпадать или не совпадать с (x).

Таким образом, уравнения (1.1) определяют однозначное отображение множества точек S_n в себя. Ввиду существования обратного преобразования (1.2), указанное отображение будет взаимно однозначным.

Такое отображение проективного пространства в себя называется *коллинеацией*. Удобно записывать коллинеацию (1.1) одной буквой, например T, и обозначать образ (y) точки (x) посредством $T(x)$.

Так как преобразование координат и коллинеация являются просто различными истолкованиями одних и тех же алгебраических соотношений, каждое свойство одного из этих понятий может быть истолковано как свойство другого. Например, из теоремы (2.1) мы получаем

Теорему 6.1. *Точки (x^a) линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы их образы $T(x^a)$.*

В качестве непосредственного следствия мы будем иметь

Теорему 6.2. *Коллинеация переводит линейное подпространство в подпространство той же размерности.*

6.2. Упражнения. 1. Определим произведение двух коллинеаций

$$T_1: \ y_j = \sum_i a_j^i x_i$$

и

$$T_2: \ y_j = \sum_i b_j^i x_i$$

формулами

$$T_2 T_1: \ y_j = \sum c_j^i x_i,$$

в которых

$$c_j^i = \sum_k b_j^k a_k^i.$$

Доказать, что коллинеации в S_n образуют группу (см. I—2.1) по отношению к определенной таким образом операции умножения.

2. Любые $n+2$ точки из S_n, каждые $n+1$ из которых линейно независимы, могут быть преобразованы некоторой однозначно определенной коллинеацией в произвольно заданные другие точки с тем же свойством (ср. с теоремой 2.1).

3. Коллинеация (1.1) в пространстве S_n индуцирует коллинеацию

$$v^j = \sum_i A_i^j u^i$$

в дуальном пространстве S_n^*.

4. Преобразование T называется инволюцией, если $TT(x) = (x)$ для всех точек (x), но $T(x) \neq (x)$ хотя бы для одной точки. Показать, что коллинеация в S_1 является инволюцией тогда и только тогда, когда $a_0^0 + a_1^1 = 0$.

Глава III

ПЛОСКИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

В этой главе мы изучим некоторые из наиболее простых свойств алгебраических кривых на плоскости. При этом мы будем иметь дело с точками фиксированного пространства SK_2, где K — любое алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Многие из наших рассуждений остаются применимыми в случае основного поля более общего типа, но рассмотрение такого рода обобщений мы будем оставлять читателю.

Дополнительный материал, связанный с содержанием этой главы, можно найти в следующих книгах:

Б. Л. ван-дер-Варден, Введение в алгебраическую геометрию (B. L. van-der-Waerden, Einführung in die Algebraische Geometrie, Berlin, Springer, 1939).

Дж. Л. Кулидж, Плоские алгебраические кривые (J. L. Coolidge, Algebraic Plane Curves, Oxford, 1931)[1]).

§ 1. ПЛОСКИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

1.1. Приводимые и неприводимые кривые. Будем рассматривать определенную проективную систему координат в S_2. Пусть $F(x) = F(x_0, x_1, x_2)$ — неприводимый однородный многочлен степени n от неизвестных x_0, x_1, x_2 с коэффициентами из K. Если некоторая совокупность (a) значений координат точки P удовлетворяет уравнению $F(x) = 0$, то все другие значения координат этой точки также удовлетворяют тому же уравнению, так как $F(\rho a_0, \rho a_1, \rho a_2) = \rho^n F(a_0, a_1, a_2)$. Совокупность всех точек P с указанным свойством называется *неприводимой алгебраической кривой* степени n. Уравнение $F(x) = 0$ называется уравнением этой кривой в заданной координатной системе. Если мы перейдем к новой координатной системе по формулам (1.1) гл. II и обозначим через $G(y)$ многочлен, получаемый из $F(x)$ подстановкой в него вместо x_i выражений $\sum_j A_i^j y_j$, то координаты

---

[1]) Вопросы, связанные с построением действительной алгебраической кривой вблизи особой точки, разбираются в книге: Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. ГТТИ, 1947, т. 1, гл. 7. (*Прим. перев.*)

некоторой точки в системе (y) будут удовлетворять уравнению $G(y)=0$ в том и только в том случае, если координаты той же точки в системе (x) удовлетворяют уравнению $F(x)=0$. Следовательно, $G(y)=0$ будет уравнением той же кривой в новых координатах. Так как переход от F к G обратим, приводимость G влекла бы за собой приводимость F. Поэтому многочлен G неприводим. Понятие неприводимой алгебраической кривой является геометрическим понятием, ибо его определение не зависит от использованной координатной системы.

Из теоремы I—9.7 следует, что уравнение неприводимой алгебраической кривой однозначно определено с точностью до постоянного множителя: если уравнения $F(x)=0$ и $G(x)=0$ определяют одну и ту же неприводимую алгебраическую кривую, то $F(x)$ и $G(x)$ должны делиться друг на друга, так как они неприводимы и каждое из равенств $F(a)=0$ и $G(a)=0$ влечет за собой другое. Так как уравнения $F(x)=0$ и $\rho F(x)=0$ определяют, очевидно, одно и то же множество точек, мы будем считать их одним и тем же уравнением.

Указанное свойство неприводимой кривой связано с алгебраической замкнутостью поля K. Это видно из следующего примера. Пусть K — поле действительных чисел (оно не будет алгебраически замкнутым). Тогда многочлены $F=x_0^2+x_1^2+x_2^2$ и $G=x_0^4+x_1^4+x_2^4$ неприводимы и обращаются в нуль на одном и том же (пустом) множестве точек. Однако отличие F от G не сводится к постоянному множителю.

Любой однородный многочлен $F(x)$ степени n допускает разложение $F=F_1F_2\ldots, F_r$ на неприводимые однородные множители. Такое разложение однозначно с точностью до постоянных множителей. Система неприводимых кривых $C_1, \ldots, C_r$, уравнениями которых будут $F_1(x)=0, \ldots, F_r(x)=0$, называется *алгебраической кривой* C, определяемой уравнением $F(x)=0$. Неприводимые кривые $C_1, \ldots, C_r$ называются *компонентами* кривой C. Следует отметить, что эти компоненты не обязательно различны. Например, кривая, определяемая уравнением $x_0^3x_1^2=0$, имеет пять компонент. Неприводимая кривая, встречающаяся среди компонент кривой C более одного раза, называется *кратной* компонентной кривой C. Кривые с кратными компонентами имеют много неприятных свойств и часто исключаются из рассмотрения. Если рассматривать кривые просто как множества точек пространства S_2, то такое исключение несущественно.

Неприводимая кривая может рассматриваться как кривая, имеющая одну-единственную компоненту. Кривая, имеющая две или более компонент, называется приводимой. Как легко видеть, понятия приводимости компоненты и кратной компоненты не зависят от той координатной системы, в которой они определены.

Для краткости мы будем употреблять выражения «кривая $F(x)=0$» или просто «кривая F» вместо того, чтобы говорить «кривая, уравнение которой есть $F(x)=0$».

1.2. Кривые в аффинной плоскости. Пусть $F(x)=0$ — некоторая кривая C, не имеющая своей компонентой прямую $x_0=0$. Тогда многочлен $F(x)$ не делится на x_0, и поэтому существует *соответствующий* неоднородный многочлен $F(1, x, y)$ той же степени, что и $F(x)$. Мы будем писать обычно $f(x, y)$ вместо $F(1, x, y)$. Уравнение $f(x, y)=0$ будет называться уравнением кривой C в соответствующей аффинной координатной системе. Если (a, b) — аффинные координаты некоторой точки кривой C, то $f(a, b)=0$, и обратно, если $f(a, b)=0$, то (a, b) будут аффинными координатами некоторой точки кривой C. Таким образом, решениями уравнения $f(x, y)=0$ будут являться те точки кривой C, которые не лежат на бесконечно удаленной прямой.

Применение аффинного уравнения кривой позволяет пользоваться преимуществами аффинных координатных систем, упомянутыми в § II—4. Бо́льшая часть нашего исследования будет проводиться в выбранных надлежащим образом аффинных координатах. Однако не следует забывать, что аффинное представление кривой неполно, так как при этом исключаются бесконечно удаленные точки. Переход к аффинным координатам представляет собой просто инструмент для изучения свойств кривой на проективной плоскости.

В дальнейшем будет очень полезна свобода выбора бесконечно удаленной прямой аффинной плоскости. Здесь мы отметим только, что любая кривая допускает аффинное представление. В самом деле, так как поле K — бесконечно, то в S_2 содержится бесконечное множество прямых. Поэтому в S_2 всегда найдется прямая, не являющаяся компонентой заданной кривой C и могущая поэтому быть взятой в качестве бесконечно удаленной прямой нужной аффинной координатной системы.

1.3. Упражнения. 1. Если это возможно, найти уравнения кривой

$$x_0^2x_2 - x_0x_1^2 + x_0x_2^2 - 2x_0x_1x_2 - x_1^2x_2 - 2x_1x_2^2 = 0$$

в каждой из следующих координатных систем:

1) В системе с репером $(1, 1, -1)$, $(1, 0, -2)$, $(1, 0, 0,)$, $(0, 1, 0)$.

2) В аффинной системе, имеющей прямую $x_0+x_2=0$ в качестве бесконечно удаленной прямой.

3) В аффинной системе, осями которой будут прямые $x_0+x_2=0$ и $x_1+x_2=0$, бесконечно удаленной прямой — прямая $x_2=0$ и единичной точкой — точка $(0, 0, 1)$.

Найти компоненты этой кривой.

2. *Гиперповерхностью* в S_r, $r \geqslant 1$, называется множество точек, удовлетворяющих уравнению $F(x_0, \ldots, x_r) = 0$, где F — однородный многочлен степени $n \geqslant 1$. Обобщить определения и результаты § 1 на гиперповерхности.

§ 2. ОСОБЫЕ ТОЧКИ

2.1. Пересечение кривой и прямой. Пусть C — алгебраическая кривая, имеющая уравнение $F(x) = 0$, где $F(x)$ — однородный многочлен степени n. Точка (x) лежит на прямой L, соединяющей различные точки (a) и (b) тогда и только тогда, когда $x_i = a_i s + b_i t$ при некоторых s и t. Значения s и t, дающие точки, лежащие также на кривой C, будут решениями уравнения $F(as + bt) = 0$. При этом возможны два случая:

1) Выражение $F(as + bt)$ равно нулю тождественно относительно s и t. Тогда все точки прямой L будут точками кривой C. Если координатную систему выбрать так, что L будет прямой $x_0 = 0$, то будет $F(0, c_1, c_2) = 0$ при всех c_1, c_2 из K, а поэтому (теорема I—7.4) будет $F(0, x_1, x_2) = 0$. Таким образом, в этом случае многочлен F делится на x_0, и, следовательно, прямая L будет компонентой кривой C.

2) Если $F(as + bt)$ не является нулем тождественно по s и t, он будет однородным многочленом степени n от этих неизвестных. В силу теоремы I—10.8, уравнение $F(as + bt) = 0$ удовлетворяется точно n значениями отношения $s : t$, если считать корни этого уравнения в соответствии с их кратностью. Каждое значение отношения $s : t$ определяет точку, общую для L и C. Точку, соответствующую r-кратному корню уравнения $F(as + bt) = 0$, удобно считать также r-кратной точкой пересечения L и C.

Эти результаты можно сформулировать в виде

Теорема 2.1. *Если уравнение кривой C имеет степень n, то любая прямая либо является компонентой C, либо имеет с C ровно n общих точек* (с учетом кратностей).

Отсюда видно, что степень уравнения кривой имеет простой геометрический смысл. Она называется также *порядком* кривой. Для кривых, не имеющих кратных компонент, можно доказать следующую более сильную теорему:

Теорема 2.2. *Если кривая C порядка n не имеет кратных компонент, то через любую точку P, не лежащую на C, можно провести прямые, пересекающие C в n различных точках.*

Доказательство. Выберем координатную систему так, чтобы было $P = (0, 0, 1)$. Пусть $f(x, y)$ — уравнение кривой C в соответствующей аффинной координатной системе. Параметрические уравнения прямых L_α, проходящих через точку P, будут иметь вид

$$x = \alpha, \quad y = t, \quad \alpha \in K.$$

Все точки прямой L_α, кроме P, соответствуют конечным значениям t. Так как мы интересуемся лишь точками пересечения прямой L_α с кривой C и так как точка P не лежит на C, ее исключение для нас несущественно. Точки пересечения L_α и C определяются корнями уравнения $f(\alpha, t)=0$. Это уравнение будет иметь степень n относительно t, ибо точка (0, 0, 1) не лежит на кривой. Предположим, что уравнение $f(\alpha, t)=0$ относительно t при всех значениях α имеет кратный корень, и обозначим через $R(x)$ дискриминант многочлена $f(x, y)$ относительно y. Так как $R(\alpha)$ будет дискриминантом $f(\alpha, t)$ относительно t (см. I—9.2), при нашем предположении должно быть $R(\alpha)=0$ для всех α из K. Отсюда следует, что $R(x)=0$ (теорема I—7.3), и, следовательно, многочлен $f(x, y)$ имеет кратный множитель (теорема I—9.4), а кривая C—кратную компоненту.

В силу сказанного, порядок кривой, не имеющей кратных компонент, может быть определен как наибольшее число точек пересечения этой кривой с прямой линией. Такое определение вполне геометрично.

Кривая первого порядка, очевидно, является прямой линией, и обратно, каждая прямая—линией первого порядка. Кривые второго и третьего порядка иногда называются, соответственно, квадратичными и кубичными.

2.2. Кратные точки. Рассмотрим теперь более внимательно пересечение кривой C и прямой L в том случае, когда L проходит через заданную точку P кривой C. С этой целью выберем аффинную систему координат, в которой точка P имеет координаты (a, b). Пусть $f(x, y)=0$ уравнение кривой C в этой системе. Параметрические уравнения L могут быть записаны в виде

$$x=a+\lambda t, \quad y=b+\mu t. \tag{2.1}$$

Прямая L определяется отношением $\lambda:\mu$. Точки пересечения L и C соответствуют корням уравнения $f(a+\lambda t, b+\mu t)=0$. Разлагая левую часть этого уравнения по степеням t и учитывая, что $f(a, b)=0$, получаем

$$(f_x\lambda+f_y\mu)\,t+\frac{1}{2!}(f_{xx}\lambda^2+2f_{xy}\lambda\mu+f_{yy}\mu^2)\,t^2+\ldots=0,$$

где f_x, f_y, ... — значения производных от f в точке P.

Случай 1. Предположим, что f_x и f_y не равны одновременно нулю. Тогда почти каждая прямая, проходящая через P, имеет с кривой C однократное пересечение в точке P. Единственным исключением будет прямая, соответствующая значению отношения $\lambda:\mu$, для которого $f_x\lambda+f_y\mu=0$. Эта прямая называется *касательной* к кривой C в точке P.

Случай 2. $f_x = f_y = 0$, но не все f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} равны нулю. Тогда каждая прямая, проходящая через P, имеет в этой точке по меньшей мере двукратное пересечение с кривой C. Только одна или две прямые, соответствующие решениям уравнения

$$f_{xx}\lambda^2 + 2f_{xy}\lambda\mu + f_{yy}\mu^2 = 0, \tag{2.2}$$

имеют более чем двукратное пересечение с кривой C в точке P. Эти прямые называются *касательными* к C в точке P. В случае, когда уравнение (2.2) имеет двукратный корень, мы будем говорить, что кривая C имеет в точке P две совпадающие касательные.

Случай r. Предположим теперь, что все производные многочлена f до $(r-1)$-го порядка включительно обращаются в точке P в нуль и что хотя бы одна производная r-го порядка отлична от нуля в этой точке. Тогда каждая прямая, проходящая через P, имеет с кривой C по меньшей мере r-кратное пересечение в точке P. При этом точно r прямых (если их надлежащим образом считать) имеют более чем r-кратное пересечение с кривой C. Исключительные прямые, *касательные* к кривой C в точке P, соответствуют решениям уравнения

$$f_{x^r}\lambda^r + \binom{r}{1} f_{x^{r-1}y}\lambda^{r-1}\mu + \ldots + \binom{r}{r} f_{y^r}\mu^r = 0$$

и должны при подсчете их числа браться такое же число раз, какова кратность соответствующего корня. В этом случае точка P называется r-кратной точкой кривой C (или точкой *кратности* r). Так как многочлен $f(x, y)$ не равен тождественно нулю, некоторые из его производных порядка $\leqslant n$ должны быть отличными от нуля в точке P. Поэтому *случай* r всегда будет иметь место при некотором r, $1 \leqslant r \leqslant n$.

Иногда бывает удобно говорить о точках, не лежащих на C, как о точках кратности 0 (на этой кривой).

Точка кривой C, имеющая кратность 1, называется *простой* или *обыкновенной* точкой этой кривой. Точки кратности 2 называются также двойными. Это название обобщается также на точки более высокой кратности. Точка кратности r называется *обыкновенной r-кратной точкой*, если в ней существуют r различных касательных.

Точки кратности 2 и более называются также *особыми* точками. Очевидно, что необходимое и достаточное условие того, что точка (a, b) является особой точкой кривой C, дается равенствами $f(a, b) = f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Мы увидим далее, что особые точки играют весьма важную роль в теории алгебраических кривых. Кривая называется *неособенной*, если она вообще не имеет особых точек.

При изучении особых точек весьма полезно следующее предложение:

Теорема 2.3. *Если многочлен $f(x, y)$ не содержит членов степени $< r$ и содержит хотя бы один член степени r, то начало координат является r-кратной точкой кривой $f=0$. Уравнение, получаемое приравниванием нулю суммы членов степени r, определяет кривую, компонентами которой являются все касательные к кривой f в начале координат.*

Доказательство очевидно.

Критерии для нахождения особых точек кривой в проективных координатах могут быть выражены в более удобной форме.

Теорема 2.4. *Точка P тогда и только тогда является r-кратной точкой кривой $F(x)=0$, когда в этой точке все производные от F порядка $r-1$ обращаются в нуль, но существует производная порядка r, отличная от нуля.*

Доказательство. Можно предполагать, что точка P не лежит на прямой $x_0=0$, так как этого всегда можно достигнуть изменением нумерации координат. Если $x_0 \mid F$ — то кривая F не имеет уравнения в аффинных координатах. Однако уравнение $f(x, y)=F(1, x, y)=0$ будет аффинным уравнением кривой, отличающейся от F только отсутствием компоненты $x_0=0$. Так как эта компонента, очевидно, не влияет на кратность точки P, можно считать $F(1, x, y)=0$ аффинным уравнением кривой F. Равенство $f(a, b)=0$ равносильно равенству $F(1, a, b)=0$. Кроме того,

$$f_x(x, y)=F_{x_1}(1, x, y), \quad f_y(x, y)=F_{x_2}(1, x, y).$$

Поэтому равенства

$$f_x(a, b)=f_y(a, b)=0$$

равносильны таким

$$F_{x_1}(1, a, b)=F_{x_2}(1, a, b)=0.$$

Но

$$x_0F_{x_0}+x_1F_{x_1}+x_2F_{x_2}=nF,$$

и поэтому равенства

$$F(1, a, b)=F_{x_1}(1, a, b)=F_{x_2}(1, a, b)=0$$

будут иметь место в том и только в том случае, если

$$F_{x_0}(1, a, b)=F_{x_1}(1, a, b)=F_{x_2}(1, a, b)=0.$$

Продолжая этот процесс, мы найдем, что для выполнения равенств

$$f(a, b)=f_x(a, b)=f_y(a, b)=f_{x^2}(a, b)=\ldots=f_{y^r}(a, b)=0$$

необходимы и достаточны равенства

$$F_{x_0^r}(1, a, b) = F_{x_0^{r-1}x_1}(1, a, b) = \ldots = F_{x_2^r}(1, a, b) = 0.$$

Отсюда наша теорема следует непосредственно.

В качестве следствия доказанной теоремы получаем такое предложение: точка (a) кривой $F(x)=0$ будет особой тогда и только тогда, когда $F_0(a)=F_1(a)=F_2(a)=0$ (мы будем и дальше применять обозначения F_i, F_{ij} и т. д. для частных производных $\partial F/\partial x_i$, $\partial^2 F/\partial x_i \partial x_j$ и т. д.).

Для простых точек кривой справедлива следующая теорема:

Теорема 2.5. *Если (a) — простая точка кривой $F(x)=0$, то уравнение касательной к F в точке (a) имеет вид*

$$\sum F_i(a) \cdot x_i = 0.$$

Доказательство мы оставляем читателю, как и доказательство следующего обобщения теоремы 2.2, которое понадобится впоследствии:

Теорема 2.6. *Если C — кривая порядка n, не имеющая кратных компонент, то через любую ее точку P кратности r можно провести прямые, пересекающие кривую C в $n-r$ различных точках, отличных от P.*

Точно так же мы оставляем читателю доказательство того, что различные понятия, определенные в этом разделе (кратность пересечения кривой с прямой линией, кратность точки, касательная, кратность касательной), не зависят от координатной системы и поэтому являются геометрическими понятиями.

2.3. Замечания о чертежах. В этом месте удобно сделать несколько замечаний о чертежах, иллюстрирующих геометрические предложения. В любой области геометрии чертеж является лишь средством показа некоторых геометрических соотношений. Его значение тем больше, чем больше таких соотношений он охватывает. Все или почти все чертежи выполняются на плоской поверхности, наиболее хорошо иллюстрирующей свойства аффинной плоскости AR_2, где R — поле действительных чисел.

При изучении алгебраических кривых мы будем рассматривать главным образом пространство SK_2, где K — алгебраически замкнутое поле. То обстоятельство, что это проективная, а не аффинная плоскость, не очень сильно снижает иллюстративную ценность чертежей. Основная неприятность заключается в том, что поле R не является алгебраически замкнутым. Многие из наших наиболее важных результатов опираются на алгебраическую замкнутость K, так что чертеж будет мало помогать при уяснении этих результатов. Однако если иметь в виду это обстоятельство, то надлежащий чертеж часто может оказать существенную помощь в сложных случаях.

Если $f(x, y)$ — многочлен над полем R, уравнение $f(x, y) = 0$ может рассматриваться как уравнение некоторой кривой C_1 в AR_2, а также как уравнение кривой C_2 в AK_2, где K — поле комплексных чисел. Так как $R \subset K$, то будет также $AR_2 \subset AK_2$, и поэтому точки кривой C_1 будут также точками кривой C_2. Обычно говорят, что C_1 состоит из «действительных» точек кривой C_2. На чертежах изображаются кривые C_1, и мы пытаемся по этим изображениям получить представление о некоторых свойствах кривых C_2.

2.4. Примеры особых точек. Приведем теперь несколько простых примеров особых точек. Эти особенности будут располагаться в начале координат, так что можно применять теорему 2.3.

Пример 1. $x^3 - x^2 + y^2 = 0$ (рис. 1). Здесь начало координат является обыкновенной двойной точкой с различными касательными $x + y = 0$ и $x - y = 0$. Обыкновенные двойные точки называются также точками *самопересечения*.

Пример 2. $x^3 + x^2 + y^2 = 0$ (рис. 2). Здесь начало координат также является точкой самопересечения с касательными $x + iy = 0$ и $x - iy = 0$. Различие между кривыми, изображенными на рис. 1 и рис. 2, обусловлено тем обстоятельством, что действительные части кривых различны. На рис. 2 начало координат представляет собой «изолированную» точку действительной кривой.

Пример 3. $x^3 - y^2 = 0$ (рис. 3). Здесь начало — также двойная точка, но не обыкновенная. Этот тип особенности называется *острием* (или точкой заострения). Дальнейшие подробности об остриях нам еще встретятся.

Пример 4. $2x^4 - 3x^2y + y^2 - 2y^3 + y^4 = 0$ (рис. 4) — еще один тип двойной точки — точка *самокасания*.

Пример 5. $x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$ (рис. 5) — *«когтеобразное» острие*.

Особые точки кратности, большей, чем 2, могут быть весьма сложными. Рассмотрим лишь три простейших примера:

Пример 6. $(x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3 = 0$ (рис. 6) — начало координат — обыкновенная тройная точка.

Пример 7. $(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$ (рис. 7) — начало — точка кратности 4 с попарно совпадающими касательными.

Пример 8. $y^6 - x^3y^2 - x^5 = 0$ (рис. 8) — в начале имеется одна касательная кратности 3 и две простые касательные. Обращает на себя внимание то обстоятельство, что действительная кривая — совершенно гладкая в этой особой точке.

2.5. Упражнения. 1. Исследовать особенности кривой

$$x^2y^5 - x^5y^2 - 2xy^5z + x^5z^2 + y^5z^2 - x^3yz^3 + 2\alpha x^2y^2z^3 - xy^3z^3 = 0,$$

$\alpha \in K$, в точках (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) (буквы z, x, y взяты вместо x_0, x_1, x_2).

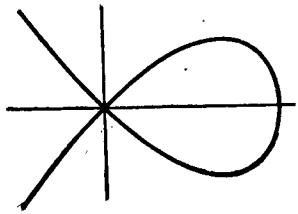

Рис. 1.

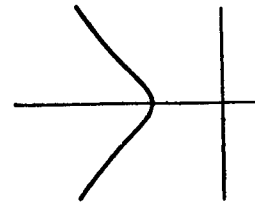

Рис. 2.

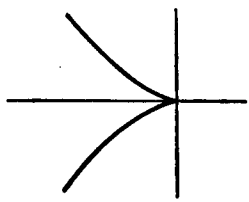

Рис. 3.

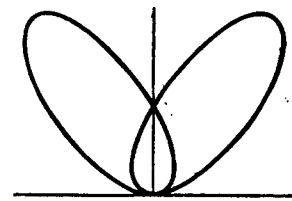

Рис. 4.

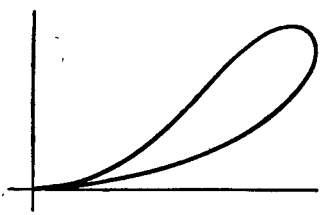

Рис. 5.

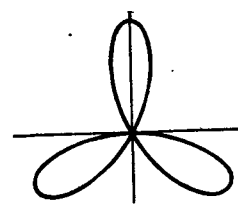

Рис. 6.

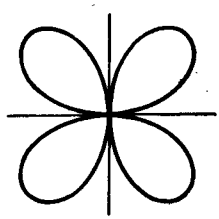

Рис. 7.

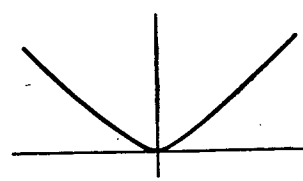

Рис. 8.

Замечание. Во всех числовых задачах в качестве основного поля берется поле комплексных чисел.

2. Найти особые точки следующих кривых:

1) $xz^2 - y^3 + xy^2 = 0$,

2) $(x+y+z)^3 - 27xyz = 0$,

3) $x^2y^2 + 36\ xz^3 + 24yz^3 + 108z^4 = 0$.

3. При каких значениях k кривая

$$x^3 + y^3 + z^3 + k(x+y+z)^3 = 0$$

имеет не менее одной особой точки? Определить положение особых точек в этих случаях.

4. Доказать, что кривая

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 + x^2y + y^2z + z^2x + kxyz = 0$$

является неособенной, если k отлично от значений 2, 3 или 6.

5. Пусть кривая C имеет компоненты C_1, C_2, ... (не обязательно различные). Доказать, что если точка P является r_i-кратной точкой каждой из кривых C_i, то она будет, как точка кривой C, иметь кратность $r = r_1 + r_2 + \ldots$ В частности, каждая точка s-кратной компоненты кривой C будет, по меньшей мере, s-кратной точкой этой кривой.

6. Доказать, что уравнение кривой без кратных компонент однозначно определено множеством точек этой кривой.

7. Доказать, что если K — поле комплексных чисел и P — простая точка кривой F, то приведенное выше определение касательной согласуется с классическим определением (т. е. что касательная в точке P является предельным положением секущей PQ, если точка Q приближается к P вдоль кривой F).

8. Доказать, что существуют неособенные кривые любого заданного порядка n.

9. Дать определение кратности точки гиперповерхности, рассмотрев пересечение гиперповерхности с прямыми. Обобщить теоремы 2.1 (с надлежащими изменениями), 2.2, 2.4 и 2.6 на случай гиперповерхностей.

10. Гиперповерхность F называется конусом с вершиной в точке V, если F содержит все прямые, соединяющие V с любой точкой поверхности F. Обобщить на случай гиперповерхностей теорему 2.3, заменив фразу «компонентами которой являются...» такой: «есть конус, состоящий из всех прямых, касательных к F в начале координат».

11. Доказать, что если точка (a) — простая точка гиперповерхности F, то конус касательных к F в точке (a) будет гиперплоскостью $\sum F_i(a)x_i = 0$.

§ 3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВЫХ

3.1. Теорема Безу. Большая часть теории алгебраических кривых опирается на изучение их пересечений, в котором основную роль играет одна теорема Безу. Эта теорема появляется в различных формах во всех частях алгебраической геометрии, а не только в теории кривых. Мы докажем сейчас теорему Безу в ослабленной форме:

Теорема 3.1. *Если две кривые порядков m и n имеют более mn общих точек, то они имеют общую компоненту.*

Доказательство. Пусть F и G — кривые порядков m и n, имеющие более mn общих точек. Выберем $mn+1$ любых из этих точек и соединим их попарно прямыми. Так как таких прямых конечное число, найдется точка P, не лежащая ни на этих прямых, ни на данных кривых F или G. Выберем координатную систему так, чтобы было $P=(0, 0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} F(x) &= A_0x_2^m + A_1x_2^{m-1} + \ldots + A_m, \\ G(x) &= B_0x_2^n + B_1x_2^{n-1} + \ldots + B_n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где A_0, B_0 — отличные от нуля константы, а A_i, B_i, $i>0$, — однородные многочлены степени i относительно x_0, x_1. В силу теоремы I — 10.9, результант R многочленов F и G относительно x_2 является либо нулем, либо однородным многочленом степени mn от неизвестных x_0, x_1. При этом $R(c_0, c_1)=0$ тогда и только тогда, когда существует такое значение c_2, что $F(c)=G(c)=0$, т. е. когда c_0, c_1 будут первыми двумя координатами некоторой точки пересечения кривых F и G. Но все $mn+1$ выбранные точки пересечения дают различные значения отношения $c_0:c_1$, так как ни одна из пар выбранных точек не лежит на одной прямой с точкой $P=(0, 0, 1)$. Поэтому $R(x_0, x_1)$ должен быть равен нулю, так что F и G имеют общий множитель, а кривые — общую компоненту.

В п. 2.1 мы определили кратность точки пересечения кривой с прямой линией таким образом, чтобы общее число точек пересечения данной кривой и прямой, подсчитанных с учетом их кратностей, было в точности равно порядку кривой. По способу, при помощи которого мы использовали в приведенном выше доказательстве степень результанта, нетрудно заключить, каким образом следует определить кратность точки пересечения двух кривых для того, чтобы общее число точек пересечения (с учетом их кратностей) было бы в точности равно mn: нужно лишь определить кратность точки пересечения, как кратность соответствующего решения уравнения $R(x_0, x_1)=0$. Однако такой подход обладает двумя недостатками. Прежде всего, трудно доказать, что определенная таким образом кратность независима от координатной системы, использованной в этом определении.

Кроме того, сложность выражения результанта делает затруднительным какое-либо суждение о его корнях. Поэтому мы не воспользуемся указанным приемом и отложим обсуждение вопроса о кратности пересечения до тех пор, пока будет развит более подходящий для этого аппарат. Следующий результат все же полезен.

Теорема 3.2. *Пусть $F(x)$ и $G(x)$ имеют вид* (3.1), *причем точка $P=(a_0, a_1, a_2)$ является r-кратной точкой кривой F и s-кратной точкой кривой G. Если результант $R(x_0, x_1)$ многочленов F и G относительно x_2 не обращается в нуль, то отношение $a_0:a_1$ является его корнем кратности, не меньшей, чем rs.*

Доказательство. Так как точка (0, 0, 1) не лежит на кривых F и G, то по меньшей мере одно из чисел a_0, a_1 будет отлично от нуля. Пусть $a_0 \neq 0$. Произведем преобразование координат

$$x_0' = x_0/a_0, \quad x_1' = x_1 - a_1x_0/a_0, \quad x_2' = x_2.$$

Точка P будет иметь после этого координаты $(1, 0, a_2)$. Результант левых частей преобразованных уравнений $R(a_0x_0', x_1' + a_1x_0')$ будет иметь отношение $1:0$ своим корнем той же кратности, какую имело отношение $a_0:a_1$ для $R(x_0, x_1)$. Поэтому можно, не ограничивая общности, предполагать, что с самого начала $a_0=1$, $a_1=0$. Покажем теперь, что можно также считать, что $a_2=0$. Действительно, рассмотрим результант многочленов $F(x_0, x_1, x_2+\lambda x_0)$ и $G(x_0, x_1, x_2+\lambda x_0)$ относительно x_2. Этот результант является многочленом $R(x_0, x_1, \lambda)=c_0+c_1\lambda+\ldots$ $\ldots+c_N\lambda^N$, $N \geqslant 0$, в котором $c_i \in K[x_0, x_1]$. Так как $c_0=R(x_0, x_1, 0)$ есть результант F и G, то $c_0 \neq 0$. Предположим, что $N>0$, $C_N \neq 0$. Тогда найдутся такие константы α_0, α_1, что $c_0(\alpha_0, \alpha_1)\, c_N(\alpha_0, \alpha_1) \neq 0$. Так как поле K алгебраически замкнуто, найдется такая константа λ_0, для которой $R(\alpha_0, \alpha_1, \lambda_0)=0$, и поэтому многочлены $G(\alpha_0, \alpha_1, x_2+\lambda_0\alpha_0)$ и $F(\alpha_0, \alpha_1, x_2+\lambda_0\alpha_0)$ будут иметь общий корень α_2. Но в таком случае многочлены $F(\alpha_0, \alpha_1, x_2)$ и $G(\alpha_0, \alpha_1, x_2)$ имели бы общий корень $\alpha_2+\lambda_0\alpha_0$, что невозможно, ввиду условия $R(\alpha_0, \alpha_1, 0) \neq 0$. Отсюда следует, что $R(x_0, x_1, \lambda)$ не содержит λ и, следовательно, результант рассматриваемых многочленов не изменится при преобразовании координат по формулам $x_0'=x_0$, $x_1'=x_1$, $x_2'=x_2-a_2x_0$, при котором координаты точки P обращаются в (1, 0, 0).

Перейдем теперь к аффинным координатам. Так как начало координат является r-кратной точкой f и s-кратной точкой g, многочлены f и g могут быть записаны в виде

$$f = f_0x^r + f_1x^{r-1}y + \ldots + f_ry^r + f_{r+1}y^{r+1} + \ldots,$$

$$g = g_0x^s + g_1x^{s-1}y + \ldots + g_sy^s + g_{s+1}y^{s+1} + \ldots,$$

где f_i, g_i — многочлены от x. Поэтому

$$R(x)=\begin{vmatrix} f_0x^r & f_1x^{r-1} & \dots & f_r & f_{r+1} & \dots & f_m & & \\ & f_0x^r & \dots & f_{r-1}x & f_r & \dots & f_{m-1} & f_m & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & f_0x^r & \dots\dots & f_m \\ g_0x^s & g_1x^{s-1} & \dots & g_s & g_{s+1} & \dots & & g_{n-1} & g_n \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & g_0x^s & \dots & \dots & \dots & \dots & g_n \end{vmatrix}$$

Если теперь первую, вторую и т. д. (до s-й) строки умножить, соответственно, на x^s, x^{s-1}, ..., x, а строки, содержащие g, умножить, соответственно, на x^r, x^{r-1}, ..., x, то из i-го столбца, можно будет вынести множитель $x^{r+s+1-i}$. Отсюда следует, что $R(x)$ делится на степень x с показателем

$$\sum_{i=1}^{r+s} i-\sum_{i=1}^{r} i-\sum_{i=1}^{s} i=\frac{(r+s)(r+s+1)}{2}-\frac{r(r+1)}{2}-\frac{s(s+1)}{2}=rs.$$

Важным применением теоремы 3.2 является

Теорема 3.3. *Если две кривые порядков m и n не имеют общих компонент и если их точки пересечения P_i имеют, как точки данных кривых, соответственно, кратности r_i и s_i, то $\sum r_is_i \leqslant mn$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.1, выберем такие координаты, чтобы уравнения кривых имели вид (3.1) и чтобы ни одна пара точек пересечения не лежала на прямых вида $a_1x_0-a_0x_1=0$. Тогда каждой точке пересечения (a_0, a_1, a_2), имеющей на наших кривых кратности r_i и s_i, соответствует корень $a_0:a_1$ результанта $R(x_0, x_1)$, имеющий кратность, не меньшую, чем r_is_i. Так как при сделанном выборе координатной системы различные точки пересечения соответствуют различным значениям отношения $a_0:a_1$, то корни результанта $R(x_0, x_1)$, соответствующие различным точкам пересечения, будут различными. Поэтому результант имеет не менее $\sum r_is_i$ корней (с учетом кратностей), а значит $\sum r_is_i \leqslant mn$.

Теорема 3.3 полезна при доказательстве приводимости кривых, обладающих особенностями некоторых типов. Например, кривая третьего порядка с двумя двойными точками должна иметь компонентой прямую, соединяющую эти точки; в противном случае ее точки пересечения с этой прямой не удовлетворяли бы только что доказанному неравенству. Таким же рассуждением легко показать, что неприводимая кривая порядка n, обладающая точкой кратности $n-1$, не может иметь других

особенностей. Прежде чем рассматривать более общие вопросы такого рода, нам нужно изучить некоторые другие свойства кривых.

3.2. Нахождение точек пересечения. Метод доказательства теоремы 3.1 подсказывает также способ нахождения точек пересечения. Для этого следует выбрать координаты так, чтобы уравнения кривых приобрели вид (3.1), вычислить результант относительно x_2, определить отношения $x_0 : x_1$, при которых результант обращается в нуль, и для каждого из этих отношений найти общие корни многочленов (3.1).

Первый шаг описанного процесса часто нежелателен, если в заданной системе координат кривые имеют простые уравнения или пересекаются в удобных точках (например, в вершинах репера). Преобразование координат, как правило, уничтожает обе упомянутые особенности. К счастью, выполнение такого преобразования не является необходимым, так как непосредственное выполнение второго и третьего шага описанного процесса, как легко видеть, дает все точки пересечения, отличные от точки (0, 0, 1). Эта последняя точка может быть рассмотрена отдельно.

3.3. Упражнения. Найти точки пересечения следующих пар кривых:

а) $x(y^2 - xz)^2 - y^5 = 0,$

$y^4 + y^3 z - x^2 z^2 = 0.$

б) $x^3 - y^3 - 2xyz = 0,$

$2x^3 - 4x^2 y - 3xy^2 - y^3 - 2x^2 z = 0.$

в) $x^4 + y^4 - y^2 z^2 = 0,$

$x^4 + y^4 - 2y^3 z - 2x^2 yz - xy^2 z + y^2 z^2 = 0.$

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ КРИВЫХ

4.1. Линейные системы. Любая кривая порядка n имеет уравнение вида $\sum a_{ijk} x_0^i x_1^j x_2^k = 0$, где суммирование распространяется на неотрицательные значения i, j, k, для которых $i + j + k = n$. Такая кривая однозначно определяется коэффициентами ее уравнения и, наоборот, однозначно определяет эти коэффициенты с точностью до общего множителя. Поэтому коэффициенты a_{ijk} можно рассматривать как проективные координаты кривой, а множество кривых — как множесто точек некоторого пространства S_N. Число измерений N будет при этом на единицу меньше числа членов суммы. Как легко вычислить, $N = n(n+3)/2$.

Преобразование координат (II—1.1) в пространстве S_2 переводит $\sum a_{ijk}x_0^i x_1^j x_2^k$ в

$$\sum a_{ijk}\left(\sum A_0^\alpha y_\alpha\right)^i\left(\sum A_1^\beta y_\beta\right)^j\left(\sum A_2^\gamma y_\gamma\right)^k = \sum b_{pqr}y_0^p y_1^q y_2^r.$$

При этом

$$b_{pqr} = \sum_{ijk} M_{pqr}^{ijk} a_{ijk},$$

где коэффициенты M являются многочленами от A_i^α. Эти формулы определяют в пространстве S_N преобразование координат того же типа, что и II—1.1. Определитель преобразования отличен от нуля, так как переход от x к y обратим, и потому коэффициенты a_{ijk} должны выражаться через b_{pqr}. Отсюда следует, что координатные системы в пространстве S_N, определяемые двумя различными координатными системами пространства S_2, будут эквивалентными, так что пространство S_N действительно однозначно определено.

Кривые, являющиеся точками некоторого подпространства S_R из S_N, образуют *линейную систему* кривых размерности R. Такая система определяется заданием $R+1$ независимых кривых, ей принадлежащих. Уравнение любой кривой из системы может быть записано в виде $\sum_0^R \lambda_i F_i(x)$, где F_i — линейно независимые однородные многочлены степени n. В силу двойственности, подпространство S_R может быть определено с помощью $N-R$ линейно независимых гиперплоскостей, содержащих S_R. Соответственно этому линейную систему кривых можно задать таким же образом. Линейные уравнения гиперплоскостей в S_N в таком случае называются *линейными связями* для кривых порядка n. Кривая «удовлетворяет» такой связи, если она является точкой соответствующей гиперплоскости. Ввиду того что N гиперплоскостей всегда имеют по меньшей мере одну общую точку, всегда можно указать кривую, удовлетворяющую N линейным связям. Общее: в любой R-мерной линейной системе можно указать кривую, удовлетворяющую R линейным связям. Это же тем более возможно, если связей будет меньше R. Конечно, найденная при этих условиях кривая может оказаться приводимой или имеющей кратные компоненты.

Наиболее важный тип линейных связей возникает из требования, чтобы кривая имела точку кратности r $(r \geqslant 1)$ в заданной точке плоскости. Необходимым и достаточным условием этого является обращение в нуль в этой точке всех производных $(r-1)$-го порядка от соответствующего многочлена. Всего таких производных

имеется $r(r+1)/2$, причем значения производных в заданной точке являются линейными однородными многочленами от a_{ijk}. Поэтому указанное требование налагает на кривую $r(r+1)/2$ линейных связей. Точка, являющаяся точкой кратности $\geqslant r$ для всех кривых линейной системы, называется *базисной точкой* кратности r для этой системы.

4.2. Базисные точки. Каждая простая базисная точка ($r=1$) налагает одну линейную связь на кривые порядка n. Поэтому можно было бы ожидать, что линейная система всех кривых порядка n с заданными k базисными точками будет иметь размерность $N-k$. Однако это не всегда так. Рассмотрим, например, систему линий второго порядка ($n=2$, $N=5$) с четырьмя простыми базисными точками. Если три из этих точек лежат на одной прямой L, то все кривые системы должны иметь эту прямую в качестве компоненты (в силу теоремы 3.3). Поэтому если четвертая из заданных точек также лежит на прямой L, то она не налагает на кривые ни одной дополнительной связи. Линейная система в таком случае будет иметь размерность 2 и будет состоять из всех приводимых линий второго порядка, имеющих прямую L своей компонентой (в качестве второй компоненты может быть любая прямая).

Линии третьего порядка позволяют построить пример, в котором не все кривые оказываются приводимыми. Всегда можно указать две линии третьего порядка C_1, C_2, имеющие девять различных точек пересечения (например, если каждая из кривых состоит из трех прямых линий). В таком случае одномерная линейная система $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ имеет по меньшей мере девять базисных точек, хотя $N-9=0$.

Эти примеры иллюстрируют общее положение: если k базисных точек лежат на одной или нескольких кривых достаточно низкого порядка, они не могут налагать независимых линейных связей на кривые данного порядка n. Аналогичное положение будет справедливо также для базисных точек высшей кратности. Можно показать, однако, что задание положений и кратностей базисных точек определяет независимые связи для кривых достаточно высокого порядка. Мы не будем пользоваться этим обстоятельством и отошлем читателя, интересующегося доказательством указанного предложения, к книге Севери и Леффлер, Лекции по алгебраической геометрии (Severi—Löffler, Vorlesungen über Algebraische Geometrie, Teubner, Berlin, 1921).

Линейные системы размерностей 1, 2 и 3 называются, соответственно, *пучками*, *связками* и *сетями*. Пучок обладает тем свойством, что его кривые проходят через все точки пересечения двух любых независимых кривых пучка. Приведем одно из применений этого свойства.

Теорема 4.1. *Если две кривые порядка n пересекаются в n^2 точках, причем mn из этих точек лежат на неприводимой кривой порядка m, то остальные точки лежат на кривой порядка $n-m$.*

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — две кривые порядка n, пересекающиеся в n^2 точках, и G — неприводимая кривая порядка m, содержащая mn из этих точек пересечения. В пучке $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ можно найти кривую, проходящую через любую заданную точку. Выберем эту точку на кривой G. Тогда кривые $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ и G имеют не менее $mn+1$ общих точек и, следовательно, имеют общую компоненту. Общей компонентой должна быть G, так как она неприводима. Так как кривая $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 = GH$ проходит через n^2 точек, то кривая H должна проходить через $m(n-m)$ точек, не лежащих на кривой G.

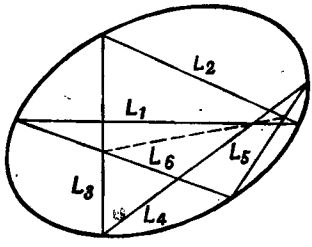

Рис. 9.

Важным частным случаем этой теоремы является

Теорема 4.2. (теорема Паскаля). *Пары противоположных сторон шестиугольника, вписанного в неприводимую кривую второго порядка, пересекаются в точках одной прямой.*

Доказательство. Пусть $L_1, \ldots, L_6$ — последовательные стороны шестиугольника (рис. 9). Тогда две кривые третьего порядка $L_1L_3L_5$ и $L_2L_4L_6$ пересекаются в шести вершинах шестиугольника и в трех точках пересечения пар противоположных сторон. Требуемый результат следует непосредственно из теоремы 4.1.

4.3. Верхние границы для кратностей. Из теоремы 3.3 можно получить некоторые сведения о влиянии особенностей на строение кривой. Рассмотрим, например, кривую третьего порядка с двумя двойными точками. Применяя теорему 3.3 к точкам пересечения этой кривой с прямой, соединяющей две указанные точки, получим, что наша кривая должна содержать эту прямую в качестве компоненты. Менее очевидный пример дается кривыми четвертого порядка с четырьмя двойными точками: всегда можно указать линию второго порядка, проходящую через эти четыре точки и произвольную пятую точку данной кривой. Но тогда, по теореме 3.3, рассматриваемая кривая должна иметь общую компоненту с кривой второго порядка и, следовательно, будет приводимой.

Эти примеры показывают, что имеется некоторая верхняя граница для числа особых точек данной неприводимой кривой. Такая граница указывается следующими теоремами:

Теорема 4.3. *Если кривая порядка n, не имеющая кратных компонент, содержит точки P_i кратностей r_i то*

$$n(n-1) \geqslant \sum r_i(r_i-1). \tag{4.1}$$

Доказательство. Выберем координатную систему так, чтобы ни одна из вершин репера не лежала на данной кривой $F=0$. Тогда частная производная F_0 не равна тождественно нулю. Кроме того, многочлен F не содержит множителей, в которых отсутствует x_0. Ввиду того, что F не имеет кратных компонент, F_0 не может иметь общих множителей с F. Заметим теперь, что кривая $F_0(x)=0$ имеет каждую из точек P_i точкой кратности r_i-1, так как все производные порядка r_i-2 от F_0, являющиеся производными порядка r_i-1 от F, обращаются в точке P_i в нуль. Нужное неравенство получается при применении теоремы 3.3 к точкам пересечения P_i кривых $F=0$ и $F_0=0$.

Если кривая F распадается на n различных прямых, проходящих через общую точку, то эта точка будет иметь кратность n и в соотношении (4.1) будет стоять знак равенства. Поэтому неравенство (4.1) в общем случае не может быть улучшено.

Однако для неприводимых кривых имеет место

Теорема 4.4. *Если неприводимая кривая C порядка n содержит точки P_i кратностей r_i, то*

$$(n-1)(n-2) \geqslant \sum r_i(r_i-1) \tag{4.2}$$

Доказательство. Так как кривая C не имеет кратных компонент, то, по предыдущей теореме, будем иметь

$$\frac{\sum r_i(r_i-1)}{2} \leqslant \frac{n(n-1)}{2} \leqslant \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Отсюда следует, что существует кривая C' порядка $n-1$, содержащая точки P_i в качестве (r_i-1)-кратных точек и проходящая через

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} - \frac{\sum r_i(r_i-1)}{2}$$

простых точек кривой C. Кривые C и C' не могут иметь общих компонент, так как C неприводима, а C' имеет меньший порядок, чем C. Поэтому, в силу теоремы 3.3, будем иметь

$$n(n-1) \geqslant \sum r_i(r_i-1) + \frac{(n-1)(n+2)}{2} - \frac{\sum r_i(r_i-1)}{2},$$

что и дает соотношение (4.2).

Неравенство (4.2) также не может быть улучшено, так как равенство обеих частей достигается для кривой $x^n+y^{n-1}=0$, имеющей точку кратности $n-1$ в начале координат.

4.4. Упражнения. 1. Доказать, что линейная система кривых порядка 2, имеющая 4 базисных точки, будет пучком, если базисные точки не лежат на одной прямой. (Если бы эта система имела размерность >1, то в ней можно было бы найти кривую, проходящую через две произвольные точки. Доказать, что это невозможно.)

2. Доказать, что при данных значениях n и k, где $0 \leqslant k \leqslant N+1$, существует k таких точек, что линейная система кривых порядка n с этими базисными точками имеет размерность, точно равную $N-k$. (Применить индукцию по k.)

3. Если кривая порядка n имеет k различных компонент и содержит точки P_i в качестве r_i-кратных точек, то

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+k-1 \geqslant \frac{\sum r_i(r_i-1)}{2}.$$

(Применить индукцию по k.)

4. Построить связку кривых четвертого порядка, имеющую 13 простых базисных точек. (Сначала построить сеть с 12 базисными точками.)

5. Гиперповерхности порядка n в пространстве S_r образуют проективное пространство размерности $N=\binom{r+n}{r}-1$.

§ 5. РАЦИОНАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

5.1. Достаточные условия рациональности. В элементарной аналитической геометрии часто задают кривые, выражая координаты их точек как функции некоторого параметра. Мы уже применяли этот прием в случае прямой линии [уравнения (2.1) и являются параметрическими уравнениями прямой]. Рассмотрим теперь более общий случай, когда координаты оказываются рациональными функциями параметра. Позже мы увидим, что такое выражение может быть получено только для кривых частного типа, называемых *рациональными* кривыми.

Мы будем называть неприводимую кривую $f(x, y)=0$ рациональной, если существуют такие две рациональные функции $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda) \in K(\lambda)$, что:

1) Для почти всех значений[1] $\lambda_0 \in K$ точка $(\varphi(\lambda_0), \psi(\lambda_0))$ является точкой кривой f.

2) Для почти каждой точки (x_0, y_0) кривой f существует единственное значение $\lambda_0 \in K$, удовлетворяющее условиям $x_0=\varphi(\lambda_0)$, $y_0=\psi(\lambda_0)$.

---

[1]) Термин «почти все» означает: все, кроме конечного числа. Слово «почти» будет иметь аналогичный смысл и в других сочетаниях. (*Прим. перев.*)

В условиях сформулированного определения невозможно избежать конечного числа исключений. Последние возникают из двух источников. Одним из них является то обстоятельство, что рациональная функция определена не для всех значений переменной. Другим источником исключений являются особые точки кривой f. Рассмотрим в качестве примера кривую примера 8, п. 2.4. Если мы положим

$$\varphi(\lambda)=\frac{(\lambda^2+1)}{\lambda^6}, \qquad \psi(\lambda)=\frac{(\lambda^2+1)}{\lambda^5},$$

то, как легко проверить, условия 1 и 2 выполняются. Исключительным значением λ_0 в условии 1 будет $\lambda_0=0$; исключительной точкой в условии 2 будет особая точка (0, 0), соответствующая значениям $\lambda=\pm i$.

Докажем здесь лишь одну теорему о рациональных кривых.

Теорема 5.1. *Если неприводимая кривая порядка n, для которой точки P_i являются точками кратности r_i, удовлетворяет условию*

$$(n-1)(n-2)=\sum r_i(r_i-1),$$

то она рациональна.

Доказательство. Рассмотрим линейную систему S_R кривых порядка $n-1$, имеющую точки P_i своими (r_i-1)-кратными базисными точками и, кроме того, имеющую еще $2n-3$ простых базисных точек на кривой f. Размерность R этой системы удовлетворяет неравенству

$$R\geqslant\frac{(n-1)(n+2)}{2}-\frac{\sum r_i(r_i-1)}{2}-(2n-3)=1.$$

Предположим, что $R>1$. Тогда в системе S_R найдется кривая g, проходящая через две точки кривой f, не принадлежащие к числу базисных точек системы. Применяя теорему 3.3 к точкам пересечения кривых f и g, найдем, что эти кривые должны иметь общую компоненту, так как

$$\sum r_i(r_i-1)+(2n-3)+2>n(n-1).$$

Но это невозможно, ввиду неприводимости кривой f и того, что порядок кривой g ниже, чем порядок кривой f. Следовательно, $R=1$ и кривые системы S_R, за единственным исключением, могут быть выражены уравнением $g_1+\lambda g_2=0$.

Выберем аффинную систему координат так, чтобы было

$$f=ay^n+\ldots, \qquad a\neq 0,$$
$$g_1=by^{n-1}+\ldots, \qquad b\neq 0,$$
$$g_2=cy^{n-1}+\ldots, \qquad c\neq 0,$$

и чтобы кривые f и g_1 не имели пересечений в бесконечности. Обозначим через $R(x, \lambda)$ результант многочленов f и $g_1+\lambda g_2$ относительно y. Тогда будем иметь

$$R(x, \lambda)=b_0(\lambda)+b_1(\lambda)x+\ldots+b_N(\lambda)x^N,$$

где $N=n(n-1)$. $R(x, 0)$ есть результант f и g_1. Он имеет степень $n(n-1)$ относительно x. Следовательно, $b_N(0)\neq 0$, и равенство $b_N(\lambda_0)=0$ может иметь место лишь при конечном числе значений λ_0. Исключим эти значения во всем дальнейшем рассмотрении. В таком случае кривые f и $g_1+\lambda g_2$ не будут иметь пересечений в бесконечности. Так как точка $P_i=(a_i, b_i)$ является r_i-кратной точкой кривой f, то уравнение $R(x, \lambda_0)=0$ будет иметь a_i своим корнем, кратность которого $\geqslant r_i(r_i-1)$ (по теореме 3.2). Кроме того, для каждой из выбранных $2n-3$ простых точек (c_j, d_j) кривой f числа c_j будут корнями того же уравнения. Но равенство

$$\sum r_i(r_i-1)+2n-3=n(n-1)-1$$

показывает, что мы учли все корни этого уравнения, кроме одного. Оставшийся неучтенным корень будет

$$\varphi(\lambda_0)=-\frac{b_{N-1}(\lambda_0)}{b_N(\lambda_0)}-\sum r_i(r_i-1)a_i-\sum c_j.$$

Указанным образом определена некоторая рациональная функция $\varphi(\lambda)$. Поступая таким же образом с результантом многочленов f и $g_1+\lambda g_2$ относительно x, получим другую рациональную функцию $\psi(\lambda)$. Покажем, что эти рациональные функции удовлетворяют условиям, содержащимся в определении рациональной кривой.

1) По самому определению $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$, для каждого из неисключенных значений λ точка $(\varphi(\lambda_0), \psi(\lambda_0))$ будет точкой кривой f.

2) Если (x_0, y_0) — точка кривой f, не лежащая на g_2, то существует единственное значение λ_0, при котором кривая $g_1+\lambda g_2$ проходит через точку (x_0, y_0): $\lambda_0=-g_1(x_0, y_0)/g_2(x_0, y_0)$. Следовательно, уравнение $R(x, \lambda_0)$ имеет x_0 своим корнем, а значит $x_0=\varphi(\lambda_0)$. Подобным же образом, $y_0=\psi(\lambda_0)$. Этим доказательство теоремы закончено, так как существует лишь конечное число точек кривой f, лежащих на g_2.

Следующий пример показывает, что существуют рациональные кривые, для которых $\sum r_i(r_i-1)<(n-1)(n-2)$. Кривая четвертого порядка $(x^2-y)^2-y^3=0$ имеет единственную особую точку кратности 2 в начале координат. Эта кривая рациональна, так как функции

$$\varphi(\lambda)=\frac{\lambda^2-1}{\lambda^3} \quad \text{и} \quad \psi(\lambda)=\frac{(\lambda^2-1)^2}{\lambda^4}$$

удовлетворяют условиям 1 и 2 $\left(\text{последнее — вследствие того, что } \lambda = \frac{\psi - \varphi^2}{\varphi\psi}\right)$.

Полное исследование рациональных кривых будет проведено в гл. 6.

5.2. Упражнения. 1. Показать, что если точка (a, b) есть $(n-1)$-кратная точка кривой f, то в приведенном выше доказательстве кривые $g_1 + \lambda g_2$ могут быть заменены прямыми

$$(y-b) - \lambda(x-a) = 0.$$

2. Провести доказательство теоремы 5.1 при $n > 2$, применяя кривые порядка $n-2$, которые в каждой из точек P_i имеют $(r_i - 1)$-кратную точку и проходят через $n-3$ простых точек кривой f.

3. Доказать, что определение рациональной кривой в проективных координатах может быть сформулировано так: кривая F будет рациональной, если существуют однородные многочлены $G_i(\lambda, \mu)$ одной и той же степени, удовлетворяющие условиям:

1) Для почти всех значений отношения $\lambda_0 : \mu_0$ точка $(G_i(\lambda_0, \mu_0))$ лежит на кривой F.

2) Почти каждой точке (a) кривой F соответствует единственное значение отношения $\lambda_0 : \mu_0$, при котором $\rho a_i = G_i(\lambda_0, \mu_0)$, $\rho \neq 0$.

4. Доказать, что кривая без кратных компонент, для которой удовлетворены условия 1 и 2, будет неприводимой, а значит и рациональной.

§ 6. КРИВЫЕ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

6.1. Кривые второго порядка. В качестве иллюстрации применим некоторые из полученных результатов к простейшим кривым. Рассмотрим кривые *порядка, меньшего четырех*. С этой точки зрения кривые первого порядка, т. е. прямые линии, не имеют интересных свойств. Начнем с кривых второго порядка.

Для кривой второго порядка мы имеем $(n-1)(n-2) = 0$. Отсюда следует, что каждая неприводимая кривая C второго порядка является неособенной и рациональной. Если $g_1 + \lambda g_2$ — пучок прямых с базисной точкой на кривой C, то координаты второй точки пересечения прямой пучка с кривой C будут рациональными функциями λ, дающими рациональную параметризацию рассматриваемой кривой. Если в качестве вершин репера выбрать две произвольные точки кривой C и точку пересечения касательных к кривой C в этих точках, то уравнение рассматриваемой кривой примет вид $x_0^2 - ax_1x_2 = 0$, причем коэффициент a может быть сделан равным единице, если выбрать единичную точку репера также на кривой.

Приводимая кривая второго порядка, очевидно, является либо парой прямых, либо одной прямой, считаемой дважды. Следующая теорема часто полезна для определения того, является ли данная кривая второго порядка приводимой, или нет:

Теорема 6.1. *Кривая второго порядка*

$$F = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = 0,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, *приводима тогда и только тогда, когда определитель* $|a_{ij}| = 0$.

Доказательство. В силу сделанного выше замечания, кривая F приводима тогда и только тогда, когда она имеет особую точку. Это будет иметь место в том и только в том случае, если уравнения $F_i = 0$, $i = 0, 1, 2$ имеют ненулевое решение. Но $F_i = 2\sum_j a_{ij}x_j$, т. е. указанные уравнения линейны и однородны. Они имеют ненулевое решение тогда и только тогда, когда $|a_{ij}| = 0$.

6.2. Кривые третьего порядка. Перейдем теперь к более интересному случаю кривых третьего порядка. Следующая теорема устанавливает любопытное свойство кривых третьего порядка, которое будет обобщено позже (теорема IV — 7.3):

Теорема 6.2. *Если две кривые третьего порядка пересекаются точно в девяти точках, то любая такая кривая, проходящая через восемь из этих точек, проходит и через девятую.*

Доказательство. Пусть F_1 и F_2 — две кривые третьего порядка, пересекающие друг друга в различных точках $P_1, \ldots, P_9$, и пусть F — кривая третьего порядка, проходящая через точки $P_1, \ldots, P_8$. Если многочлен F линейно зависит от F_1 и F_2, то при некоторых λ и μ будет выполняться равенство $\lambda F_1 + \mu F_2 = F$. В таком случае кривая F проходит через точку P_9, так как через нее проходят F_1 и F_2. Если F_1, F_2 и F линейно независимы, то λ, μ, ν могут быть выбраны так, чтобы кривая $\lambda F_1 + \mu F_2 + \nu F$ проходила через любые две заданные точки. Покажем, что это приводит к противоречию.

1) Никакие четыре из девяти точек P_i не могут лежать на одной прямой, так как эта прямая была бы общей компонентой F_1 и F_2. По аналогичной причине никакие семь из точек P_i не могут лежать на кривой второго порядка. Предположим теперь, что точки P_1, P_2, P_3 лежат на прямой L. Тогда пять точек $P_4, \ldots, P_8$ расположены на однозначно определенной кривой Q второго порядка. Действительно, если две различные кривые второго порядка имеют пять общих точек, то они имеют общую компоненту. Другие их компоненты могут иметь лишь одну точку пересечения, не лежащую на общей прямой. Отсюда следует,

что остальные четыре точки лежат на прямой, а это невозможно. Пусть теперь A — точка прямой L, отличная от P_1, P_2, P_3, и B — точка, не лежащая ни на L, ни на Q (рис. 10). Если λ, μ, ν выбраны так, что кривая $\lambda F_1 + \mu F_2 + \nu F$, всегда проходящая через $P_1, \ldots, P_8$, проходит также через A и B, то эта кривая должна иметь прямую L своей компонентой. Другой компонентой должна быть кривая Q. Но это невозможно, так как L и Q не содержат точки B.

2) Предположим теперь, что точки $P_1, \ldots, P_6$ лежат на кривой второго порядка Q. Тогда P_7, P_8 лежат на некоторой прямой L. Беря в качестве точки A любую из других точек кривой Q, а в качестве B — точку, не лежащую ни на Q, ни на L, приходим к противоречию тем же путем, что и выше.

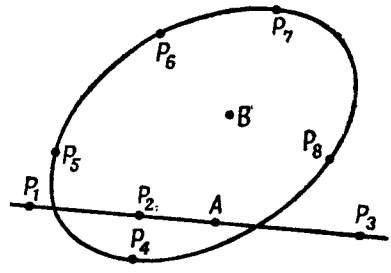

Рис. 10.

3) Если никакие три из точек $P_1, \ldots, P_8$ не лежат на прямой и никакие шесть — на кривой второго порядка, то возьмем в качестве L прямую P_1P_2, а в качестве Q кривую второго порядка, проходящую через точки $P_3, \ldots, P_7$. Беря точки A и B на прямой L и поступая как в случае 1, снова приходим к противоречию, так как точка P_8 не лежит ни на Q, ни на L. Этим исчерпаны все возможности и теорема доказана.

Одно из следствий доказанной теоремы заключается в возможности снять требование неприводимости в теореме 4.1 в случае, когда $n = 3$, $m = 2$. Действительно, если кривая второго порядка содержит шесть из девяти точек пересечения двух кривых третьего порядка, то кривая третьего порядка, состоящая из указанной кривой второго порядка и прямой, соединяющей две из остальных трех точек, будет содержать и третью из оставшихся точек. Теперь доказательство теоремы 4.2 может быть без изменения проведено и в случае приводимой кривой второго порядка. Получается теорема Паппа.

6.3. Точки перегиба. *Точкой перегиба* кривой F называется такая неособая точка этой кривой, в которой касательная имеет с кривой не менее чем трехкратное пересечение. Любая точка прямолинейной компоненты кривой F будет точкой перегиба в смысле этого определения. Этот неинтересный случай мы не будем рассматривать, ограничиваясь рассмотрением кривых, не имеющих прямолинейных компонент.

Простейшими кривыми, могущими иметь точки перегиба, будут кривые третьего порядка.

Теорема 6.3. *Точками перегиба кривой F являются все неособые точки пересечения кривой F с кривой*

$$H(x) = |F_{ij}(x)| = 0.$$

Кривая $H(x) = 0$ называется *кривой Гессе* для F, а выражение $H(x)$ — *гессианом* F.

Доказательство. Пусть (a) — простая точка кривой F, а (b) — любая другая точка. Тогда

$$F(as+bt) = F(a)s^n + \sum F_i(a)\, b_i s^{n-1} t + \frac{1}{2}\sum F_{ij}(a)\, b_i b_j s^{n-2} t^2 + \ldots$$

Обозначим через L прямую $\sum F_i(a)\, x_i = 0$, а через Q кривую второго порядка $\sum F_{ij}(a)\, x_i x_j = 0$. В силу сказанного в п. 2.1, точка (a) будет точкой перегиба кривой F в том и только в том случае, если прямая L является компонентой Q, т. е. если из равенства $\sum F_i(a)\, b_i = 0$ следует равенство $\sum F_{ij}(a)\, b_i b_j = 0$. Следовательно, если (a) — точка перегиба, то Q приводима и $H(a) = 0$ (теорема 6.1). Наоборот, если $H(a) = 0$, то кривая Q приводима. Тогда кривая Q обязательно содержит точку (a), ибо, в силу теоремы Эйлера (теорема I — 10.3), $\sum F_{ij}(a)\, a_i a_j = n(n-1)F(a) = 0$. Кроме того, L будет касательной к Q, так как уравнение касательной к Q в точке (a)

$$\sum F_{ij}(a)\, a_i x_j = 0$$

может быть (снова в силу теоремы Эйлера) переписано так:

$$(n-1)\sum F_j(a)\, x_j = 0.$$

Отсюда следует, что в случае приводимости кривой Q прямая L будет ее компонентой, а потому точка (a) — точкой перегиба кривой F.

Если кривая F имеет порядок $n \geqslant 3$, то кривая H имеет порядок $3(n-2) > 0$ и, следовательно, пересекает F хотя бы в одной точке. Отсюда вытекает

Теорема 6.4. *Каждая неособая кривая порядка $\geqslant 3$ имеет хотя бы одну точку перегиба.*

Легко видеть, что неособая кривая второго порядка вообще не имеет точек перегиба.

6.4. Точки перегиба и нормальная форма кривой третьего порядка. Возвращаясь к кривым третьего порядка, докажем прежде всего

Теорему 6.5. *Уравнение любой неособой кривой C третьего порядка надлежащим выбором координатной системы может*

быть приведено к виду

$$y^2 = g(x), \tag{6.1}$$

где $g(x)$ — многочлен третьей степени с различными корнями.

Доказательство. В силу теоремы 6.4, кривая C имеет хотя бы одну точку перегиба. Выберем систему координат так, чтобы точкой перегиба была точка (0, 0, 1), а уравнение касательной в этой точке имело вид $x_0 = 0$. В таком случае уравнение кривой C в аффинной системе будет

$$x^3 + \varphi(x, y) = 0, \tag{6.2}$$

где многочлен φ имеет степень 2. Он должен содержать член ay^2, $a \neq 0$, так как в противном случае точка (0, 0, 1) была бы особой. Разрешив уравнение (6.2) относительно y, получим

$$y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{g(x)}, \tag{6.3}$$

где $g(x)$ — многочлен третьей степени от x. После этого преобразованием $\bar{y} = y - \alpha x - \beta$, $\bar{x} = x$ уравнение (6.3) приводится к виду (6.1). Если бы при этом многочлен $g(x)$ имел кратный корень r, то дальнейшим преобразованием $\bar{\bar{x}} = \bar{x} - r$, $\bar{\bar{y}} = \bar{y}$ уравнение приводилось бы к виду

$$\bar{\bar{y}}^2 = \bar{\bar{x}}^2 (\gamma \bar{\bar{x}} - \delta)$$

и кривая имела бы в начале координат особую точку.

Мы можем доказать теперь одно из наиболее интересных свойств кривых третьего порядка:

Теорема 6.6. *Неособая кривая третьего порядка имеет девять точек перегиба. Любая прямая, соединяющая две из этих точек, обязательно проходит через третью из них.*

Доказательство. Надлежаще подобранным преобразованием $x' = \alpha x + \beta$, $y' = y$ уравнение (6.1) можно привести к такому:

$$f = y^2 - x^3 - ax^2 - bx = 0,$$

где $b(a^2 - 4b) \neq 0$, так как многочлен $x^3 + ax^2 + bx$ имеет различные корни. Непосредственным вычислением получим гессиан кривой

$$h = (y^2 + bx)(3x + a) - (ax + b)^2.$$

Исключив y из f и h, получим

$$k(x) = 3x^4 + 4ax^3 + 6bx^2 - b^2 = 0.$$

Это уравнение имеет четыре различных корня, так как

$$k' = 12(x^3 + ax^2 + bx)$$

и результант k и k' равен

$$b^4 (a^2 - 4b)^2 \neq 0.$$

Для каждого из указанных корней найдутся два различных значения y, так как ни одно из полученных значений x не удовлетворяет уравнению $x^3+ax^2+bx=0$. Так как мы имели с самого начала одну точку перегиба в бесконечности, то всего получается девять точек перегиба. Второе утверждение теоремы теперь получается непосредственно, ибо из любых двух таких точек одна может быть принята за $(0, 0, 1)$, другая — за $(1, a, b)$. Но в таком случае точка $(1, a, -b)$ также является точкой перегиба и эти точки лежат на одной прямой.

Конфигурация, образованная девятью точками перегиба кривой третьего порядка, была предметом многих исследований. Некоторые из ее свойств указаны в приведенных ниже упражнениях. По поводу других свойств отсылаем интересующегося читателя к «Энциклопедии математических наук» (Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften), т. III, 2.1, стр. 475—479.

6.5. Упражнения. 1. Пусть три кривых второго порядка Q_1, Q_2, Q_3 имеют четыре общие точки $P_1, \ldots, P_4$, не лежащие на одной прямой, а прямые L_1, L_2, L_3 проходят через пятую точку P_5. Если каждая из прямых L_i пересекает соответствующую кривую Q_i в различных точках A_i и B_i, ни одна из которых не совпадает с P_j, то существует единственная кривая третьего порядка, проходящая через 11 точек $P_1, \ldots, P_5, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$.

2. Показать на примере, что кривые четвертого порядка, проходящие через 13 точек, не обязаны иметь еще одну точку, общую им всем. (Воспользоваться упражнением 4 п. 4.4.)

3. Неприводимая кривая третьего порядка, имеющая обыкновенную особую точку, имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой. Ее уравнение может быть приведено к виду $y^2=x^2(x+1)$.

4. Неприводимая кривая третьего порядка, имеющая особую точку с совпадающими касательными, имеет одну точку перегиба. Ее уравнение можно привести к виду $y^2=x^3$.

5. Точки перегиба неособой кривой третьего порядка образуют систему из девяти точек, обладающую тем свойством, что прямая, соединяющая две из этих точек, обязательно проходит еще через одну точку (теорема 6.6). Показать, что надлежащим выбором координат можно добиться того, чтобы точки любой такой системы имели координаты

$$\begin{array}{lll} (0,\ 1,\ -1) & (-1,\ 0,\ 1) & (1,\ -1,\ 0) \\ (0,\ 1,\ \alpha) & (\alpha,\ 0,\ 1) & (1,\ \alpha,\ 0) \\ (0,\ 1,\ \beta) & (\beta,\ 0,\ 1) & (1,\ \beta,\ 0) \end{array}$$

где α и β — корни уравнения $x^2-x+1=0$.

6. Любая кривая третьего порядка, проходящая через точки, о которых шла речь в упражнении 5, определяется уравнением

$$x^3+y^3+z^3+3mxyz=0.$$

Эта кривая имеет особую точку только тогда, когда m принимает одно из значений ∞, -1, α, β и когда кривая распадается на три прямых. Если кривая неприводима, то она имеет упомянутые девять точек своими точками перегиба.

7. Если F — неособая кривая третьего порядка и H — ее кривая Гессе, то каждая кривая третьего порядка вида $aF+bH$, кроме четырех исключительных, является также неособой и имеющей те же точки перегиба, что и F.

8. Неособая кривая третьего порядка преобразуется в себя группой, состоящей из 18 коллинеаций.

9. Гиперповерхность второго порядка Q в пространстве S_r имеет уравнение вида $\sum a_{ij}x_ix_j=0$, где $a_{ij}=a_{ji}$. Она имеет особые точки в том и только в том случае, если $|a_{ij}|=0$. Если особая точка существует, то гиперповерхность является конусом с вершиной в этой особой точке. Общее: если матрица $\|a_{ij}\|$ имеет ранг s, то особые точки гиперповерхности Q образуют некоторое подпространство S_{r-s}, каждая точка которого может быть принята за вершину конуса. Если $s=2$, то Q состоит из двух гиперплоскостей. Если $s=1$, то Q будет двукратной плоскостью.

§ 7. АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ

7.1. Необходимость анализа особенностей. Рассматривая кратные точки, мы обращали внимание лишь на их кратность. Следующий пример показывает необходимость более подробного изучения таких точек. Кривая

$$x^4+x^2y^2-y^2-2a^2x^2+a^4=0$$

неприводима при любом значении a и при $a\neq 0$ имеет обыкновенные особые точки в $(\pm a, 0)$ и в бесконечно удаленной точке оси y. Поэтому наша кривая при $a\neq 0$ является рациональной (теорема 5.1). Действительно, можно взять

$$\varphi(\lambda)=\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}, \qquad \psi(\lambda)=\frac{(1-a^2)(\lambda^4-1)-2\lambda^2(1+a^2)}{2\lambda(\lambda^2+1)}. \tag{7.1}$$

При $a=0$ кривая имеет только две двойных точки: в начале координат и в бесконечности. Но первая из этих точек не будет обыкновенной. Очевидно, что и в этом случае кривая будет рациональной, так как рациональная параметризация получается, если в формулах (7.1) положить $a=0$. Это подсказывает возможность рассмотрения особой точки в начале, как двух «совпадающих» или «бесконечно близких» особых точек, так, чтобы

теорема 5.1 и в этом случае оказалась применимой в некотором расширенном смысле. Один из общих способов определения «бесконечно близких» особенностей состоит в применении квадратичных преобразований.

7.2. Квадратичные преобразования. Рассмотрим две проективные плоскости S_2 и S_2' и соответствие между их точками, определяемое формулами

$$y_i = x_j x_k, \tag{7.2}$$

где $i, j, k = 0, 1, 2$, причем все числа i, j, k различны, (x_0, x_1, x_2) и (y_0, y_1, y_2) — координаты некоторых точек (x) и (y) в выбранных координатных системах. Соответствие, определяемое формулами (7.2), будем называть *квадратичным преобразованием* плоскости S_2 в S_2' и будем обозначать его через T. При этом образ (y) точки (x) можно обозначить через $T(x)$. Преобразование T имеет следующие свойства:

1) Каждая точка плоскости S_2, за исключением точек $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$, преобразуется в определенную точку плоскости S_2'. Три исключительные точки называются *фундаментальными точками* преобразования T. Их образы формулами (7.2) не определены.

2) Все точки прямой $x_i = 0$, кроме фундаментальных, отображаются в точку $y_i = 1$, $y_j = 0$, $y_k = 0$. Три прямые $x_i = 0$ называются *иррегулярными прямыми* преобразования.

Обозначим через T' преобразование

$$x_i = y_j y_k$$

плоскости S_2' в S_2. Оно, очевидно, также обладает свойствами, подобными свойствам 1 и 2. Кроме того, мы имеем:

3) Если (x) — точка, не лежащая на иррегулярных прямых преобразования T, то точка $(y) = T(x)$ не лежит на иррегулярных прямых преобразования T', причем $T'(y) = (x)$.

Так как аналогичное свойство имеет место также для T', мы видим, что T и T' определяют взаимно однозначное соответствие между точками плоскостей S_2 и S_2', не лежащими на иррегулярных прямых. Преобразования T и T' являются взаимно обратными.

7.3. Преобразование кривой. Если

$$F(x_0, x_1, x_2) = F(x_i) = 0$$

— кривая на плоскости S_2, то образы ее точек при преобразовании T будут удовлетворять уравнению

$$G(y_i) = F(y_j y_k) = F(y_1 y_2,\ y_0 y_2,\ y_0 y_1) = 0.$$

Кривую G мы будем называть *алгебраическим образом* кривой F. Чтобы увидеть точный геометрический смысл отношения между F и G, нужно рассмотреть, что получается, если кривая F содержит фундаментальные точки преобразования T. Рассмотрим сначала простейший случай, когда F будет прямой линией $L = \sum a_i x_i = 0$.

Случай 1. Все коэффициенты $a_i \neq 0$. В таком случае ни одна из точек прямой не будет фундаментальной точкой, так что каждая точка L имеет однозначно определенный образ. Образы всех точек L лежат на кривой второго порядка $C = \sum a_i y_j y_k = 0$, содержащей фундаментальные точки преобразования T', но не имеющей других точек пересечения с иррегулярными прямыми этого преобразования.

Легко видеть, что в рассматриваемом случае соответствие между точками линий L и C будет взаимно однозначным. Фундаментальные точки на кривой C будут образами точек пересечения прямой L с иррегулярными прямыми преобразования T. Взаимная однозначность соответствия между остальными точками гарантируется свойством 3.

Случай 2. Прямая $L = x_1 + \lambda x_2 = 0$ проходит через одну из фундаментальных точек. Ее алгебраический образ $y_2 y_0 + \lambda y_0 y_1 = 0$ является приводимой кривой второго порядка, состоящей из прямой $L' = y_2 + \lambda y_1 = 0$ и иррегулярной прямой $y_0 = 0$. Как и в случае 1, можно показать, что соответствие между точками L и L' будет взаимно однозначным, так что естественно рассматривать именно прямую L' как действительный геометрический образ прямой L. Вторая компонента $y_0 = 0$ должна рассматриваться при этом как «излишняя», обусловленная лишь множителем y_0, появляющимся при алгебраических преобразованиях.

Случай 3. Если $L = x_0 = 0$ — одна из иррегулярных прямых, то ее алгебраическим образом будет пара иррегулярных прямых преобразования T'. Но для каждой точки прямой L, имеющей определенный образ, этим образом будет точка $(1, 0, 0)$, так что в качестве геометрического образа L естественно рассматривать единственную точку. Такое нарушение взаимной однозначности соответствия всегда нежелательно, и мы будем избегать его, ограничиваясь рассмотрением только таких кривых, которые не содержат в качестве компонент иррегулярных прямых.

Рассмотрев приведенные выше частные случаи, мы приходим к такому определению: пусть кривая $F(x) = 0$ не содержит иррегулярные прямые своими компонентами и пусть

$$G(y) = F(y_1 y_2,\ y_2 y_0,\ y_0 y_1) = 0$$

— алгебраический образ F. Если $G(y) = \pi(y) F'(y)$, где $\pi(y)$ — произведение степеней y_i, а многочлен F' не делится ни на

один из y_i, то кривую F' мы будем называть *образом кривой* F при преобразовании T. В таком случае имеет место следующая

Теорема 7.1. *Если F' — образ кривой F при преобразовании T, то F есть образ кривой F' при преобразовании T'. Взаимная однозначность соответствия между точками кривых F и F' при преобразованиях T и T' может нарушаться лишь для конечного числа точек. Образами компонент каждой из кривых F и F' будут компоненты другой кривой, причем соответствие между компонентами взаимно однозначно.*

Доказательство. Имеем

$$F(y_1y_2,\ y_2y_0,\ y_0y_1) = \pi_1(y)\,F'(y_0,\ y_1,\ y_2). \tag{7.3}$$

Подобным же образом

$$F'(x_1x_2,\ x_2x_0,\ x_0x_1) = \pi_2(x)\,F''(x_0,\ x_1,\ x_2), \tag{7.4}$$

где F'' — образ F' при преобразовании T'. Заменив в (7.3) y_i на x_jx_k, получим

$$F(x_0^2x_1x_2,\ x_0x_1^2x_2,\ x_0x_1x_2^2) = \pi_3(x)\,F'(x_1x_2,\ x_2x_0,\ x_0x_1) = \\ = \pi_4(x)\,F''(x_0,\ x_1,\ x_2),$$

где все π будут произведениями степеней переменных. Ввиду однородности многочлена F должно быть

$$F(x_0^2x_1x_2,\ x_0x_1^2x_2,\ x_0x_1x_2^2) = (x_0x_1x_2)^n\,F(x_0,\ x_1,\ x_2)$$

и, следовательно, должно иметь место равенство $F'' = F$, так как ни F'', ни F не делятся ни на одну из переменных x_i. Этим доказано первое утверждение. Взаимная однозначность соответствия между точками следует из свойства 3 квадратичного преобразования, ибо кривые F и F' имеют только конечное число точек пересечения с иррегулярными прямыми. Взаимная однозначность соответствия между множителями F и F' непосредственно вытекает из соотношений (7.3) и (7.4).

7.4. Преобразование особой точки. Как уже отмечалось в п. 7.1, предметом нашего изучения будет влияние квадратичного преобразования на особые точки кривой. Прежде чем рассматривать общий случай, обратимся снова к приведенным выше примерам (случай 2). В определенном там соответствии между точками прямых L и L' фундаментальная точка $P = (1,\ 0,\ 0)$ на прямой L соответствует точке $(0,\ 1,\ -\lambda)$, в которой прямая L' пересекает иррегулярную прямую $y_0 = 0$. Придавая λ различные значения, мы можем сделать точку P соответствующей различным точкам прямой $y_0 = 0$. Следовательно, точки иррегулярной прямой $y_0 = 0$, в некотором смысле, однозначно соответствуют *направлениям* в фундаментальной точке $(1,\ 0,\ 0)$. Мы увидим сейчас, что подобное соответствие можно установить в случае любой

кривой. При этом точки пересечения кривой F' с иррегулярными прямыми будут соответствовать касательным к кривой F в надлежащей фундаментальной точке.

Теорема 7.2. *Пусть F — кривая порядка n, имеющая в фундаментальных точках $x_j = x_k = 0$ (i, j, k различны) r_i-кратные точки. Если ни одна из касательных к F в этих точках не является иррегулярной прямой, то*

1) *Алгебраический образ G кривой F имеет прямую $y_i = 0$ своей r_i-кратной компонентой, так что кривая F' имеет порядок $2n - \sum r_i$.*

2) *Существует взаимно однозначное и сохраняющее кратности соответствие между касательными к кривой F в точке $x_j = x_k = 0$ и точками пересечения кривой F' с прямой $y_i = 0$, отличными от фундаментальных точек.*

3) *Точка $y_j = y_k = 0$ является $(n - r_j - r_k)$-кратной точкой кривой F'. Касательные к F' в этой точке не совпадают с иррегулярными прямыми и находятся во взаимно однозначном соответствии с не фундаментальными точками пересечения кривой F и прямой $x_i = 0$.*

Доказательство. Сосредоточим внимание на фундаментальной точке (1, 0, 0). Многочлен F должен иметь вид

$$F(x) = x_0^{n-r_0} A_{r_0}(x_1, x_2) + x_0^{n-r_0-1} A_{r_0+1}(x_1, x_2) + \ldots + A_n(x_1, x_2),$$

где каждый из A_p — однородный многочлен степени p и $A_{r_0} A_n \neq 0$. Следовательно,

$$G = F(y_j y_k) = y_1^{n-r_0} y_2^{n-r_0} A_{r_0}(y_2 y_0, y_0 y_1) + \ldots + A_n(y_2 y_0, y_0 y_1) =$$
$$= y_1^{n-r_0} y_2^{n-r_0} y_0^{r_0} A_{r_0}(y_2, y_1) + \ldots + y_0^n A_n(y_2, y_1).$$

Отсюда видно, что $y_0^{r_0}$ есть наивысшая степень y_0, на которую делится G. Так как подобное рассуждение применимо также к y_1 и y_2, то утверждение 1 доказано. Для доказательства утверждения 2 достаточно просто заметить, что касательные к кривой F в точке (1, 0, 0) будут компонентами кривой $A_{r_0}(x_1, x_2) = 0$, а точки пересечения F' с прямой $y_0 = 0$ определяются корнями уравнения

$$y_1^{n-r_0-r_1} y_2^{n-r_0-r_2} A_{r_0}(y_2, y_1) = 0.$$

Отсюда с очевидностью следует требуемое соответствие. Для доказательства 3 напишем

$$F' = y_1^{n-r_0-r_1} y_2^{n-r_0-r_2} A_{r_0}(y_2, y_1) + \ldots + y_0^{n-r_0} y_1^{-r_1} y_2^{-r_2} A_n(y_2, y_1).$$

Кратность точки (1, 0, 0) кривой F' будет, очевидно, степенью многочлена

$$B(y_1, y_2) = y_1^{-r_1} y_2^{-r_2} A_n(y_2, y_1)$$

и поэтому равна $n-r_1-r_2$. Кроме того, касательными к F' в этой точке будут компоненты кривой $B(y_1, y_2)=0$. Если бы одна из них была иррегулярной прямой, например $y_1=0$, то многочлен $A_n(y_2, y_1)$ делился бы на y_1^r при $r>r_1$. Но в этом случае кривая F имела бы r-кратное пересечение с прямой $x_0=0$ в точке (0, 1, 0). Так как это означало бы, что прямая $x_0=0$ является касательной к кривой F в точке (0, 1, 0), то наше предположение невозможно. Последняя часть утверждения 3 получается применением утверждения 2 к преобразованию T'.

Поучительно проверить доказанную теорему, применив ее последовательно к преобразованиям T и T'. Преобразование T обращает числа n, r_0, r_1, r_2, соответственно, в

$$n'=2n-r_0-r_1-r_2, \qquad r_1'=n-r_2-r_0,$$
$$r_0'=n-r_1-r_2, \qquad r_2'=n-r_0-r_1.$$

T' переводит n', r_0', r_1', r_2' в числа n'', r_0'', r_1'', r_2'', определяемые подобными же формулами. Прямой подстановкой можно убедиться, что $n''=n$, $r_0''=r_0$, $r_1''=r_1$, $r_2''=r_2$, как и должно быть.

Так как преобразование T переводит действительные точки в действительные, теорему (7.2) можно иллюстрировать чертежом. На рис. 11 изображена кривая, полученная из кривой

$$x_1(x_1^4+x_2^4-2x_0x_1x_2^2)=0$$

преобразованием координат, а также преобразованная кривая F'. В новой координатной системе имеем

$$n=5, \ r_0=4, \ r_1=0, \ r_2=1.$$

Следовательно,

$$n'=10-4-0-1=5, \qquad r_1'=5-1-4=0,$$
$$r_0'=5-0-1=4, \qquad r_2'=5-4-0=1.$$

Четыре касательные к кривой F в точке (1, 0, 0) попарно совпадают, а поэтому кривая F' имеет две двукратные точки пересечения с прямой $y_0=0$. Четырем простым точкам пересечения F с прямой $x_0=0$ соответствуют четыре простые касательные к кривой F' в точке (1, 0, 0).

Теорему 7.2 можно без большого труда обобщить, исключив из ее формулировки условие о касательных в фундаментальных точках. Это обобщение не будет применяться в дальнейшем, так что его точную формулировку и доказательство мы оставим читателю.

Наше исследование поведения особых точек при квадратичном преобразовании завершает следующая теорема:

Теорема 7.3. *r-кратная точка кривой F, не лежащая на иррегулярной прямой, преобразуется в r-кратную точку*

кривой F'. Касательные в этих точках соответствуют друг другу с сохранением кратности.

Доказательство. Можно предполагать, что данная r-кратная точка $P=(1, 1, 1)$ является единичной точкой, так что ее

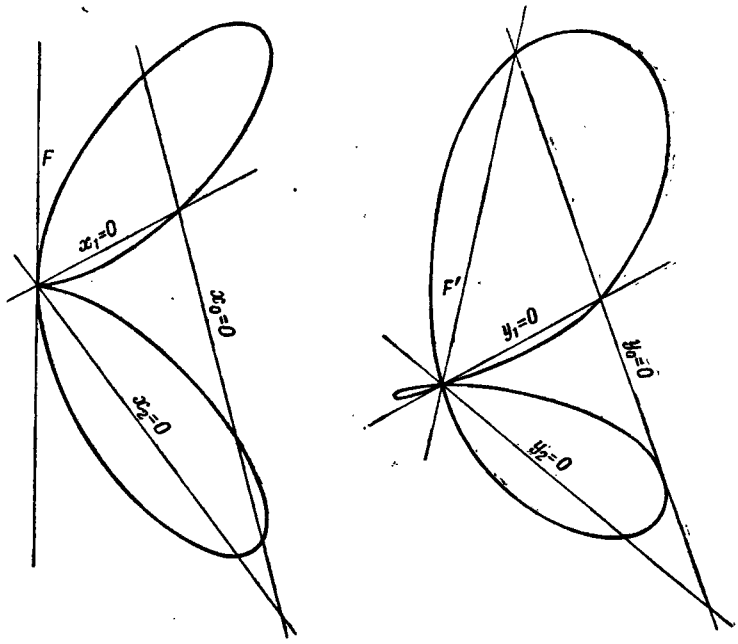

Рис. 11.

образ P' имеет те же самые координаты. Действительно, если $P=(a_0, a_1, a_2)$ и если ввести новые координаты

$$x'_i=a_i^{-1}x_i, \qquad y'_i=a_iy_i,$$

то уравнения квадратичного преобразования будут иметь тот же вид $y'_i=x'_jx'_k$, а в новых координатах $P=(1, 1, 1)$. Ввиду того, что кривые G и F' отличаются лишь компонентами, не содержащими точки P', достаточно доказать это утверждение для кривой G, вместо F'. Пусть равенства

$$z_0=x_0, \quad z_1=x_1-x_0, \quad z_2=x_2-x_0$$

определяют преобразование координат в плоскости S_2. Тогда точка P имеет z-координаты $(1, 0, 0)$, и поэтому

$$F(x)=F_1(z)=z_0^{n-r}A_r(z_1, z_2)+\ldots+A_n(z_1, z_2)=$$
$$=x_0^{n-r}A_r(x_1-x_0, x_2-x_0)+\ldots+A_n(x_1-x_0, x_2-x_0).$$

Следовательно,

$$G(y) = y_1^{n-r} y_2^{n-r} A_r(y_2y_0 - y_1y_2,\ y_0y_1 - y_1y_2) + \ldots + \\ + A_n(y_2y_0 - y_1y_2,\ y_0y_1 - y_1y_2).$$

Выполним в плоскости S_2' аналогичное преобразование координат

$$w_0 = y_0, \quad w_1 = y_0 - y_1, \quad w_2 = y_0 - y_2,$$

обращающее координаты точки P' в (1, 0, 0). Тогда

$$G(y) = G_1(w) = \\ = (w_0 - w_1)^{n-r}(w_0 - w_2)^{n-r} A_r(w_0w_1 - w_1w_2,\ w_0w_2 - w_1w_2) + \\ + (w_0 - w_1)^{n-r-1}(w_0 - w_2)^{n-r-1} A_{r+1}(w_0w_1 - w_1w_2,\ w_0w_2 - w_1w_2) + \\ + \ldots + A_n(w_0w_1 - w_1w_2,\ w_0w_2 - w_1w_2) = \\ = w_0^{2n-r} A_r(w_1, w_2) + (\ldots) + w_0^{2n-r-1} A_{r+1}(w_1, w_2) + (\ldots) + \\ + \ldots + w_0^n A_n(w_1, w_2) + (\ldots),$$

где $(\ldots)$ означает члены, содержащие низшие степени w_0, чем предшествующий член. Наивысшая степень w_0 содержится в первом члене, и поэтому многочлен $A_r(w_1, w_2)$ определяет касательные в точке P'. Но это и доказывает теорему, так как касательные к кривой F в точке P определяются многочленом $A_r(z_1, z_2)$.

7.5. Редукция особенностей. Мы в состоянии теперь доказать следующую основную теорему:

Теорема 7.4. *Любую неприводимую кривую последовательными квадратичными преобразованиями можно обратить в неприводимую кривую, имеющую лишь обыкновенные особенности.*

Доказательство. Назовем индексом кривой F число $\sum(r_i - 1)$, где r_i — кратности всех особых точек F, кроме обыкновенных. Так как теорема очевидна для кривых индекса нуль, то можно применить индукцию. Предположим, что данная кривая имеет индекс I и что теорема верна для кривых индекса $< I$. Достаточно доказать лишь, что наша кривая может быть преобразована в кривую индекса $< I$.

Пусть P — одна из не обыкновенных r-кратных точек F. Тогда существует координатная система, в которой:

1) Точка P имеет координаты (1, 0, 0).

2) Каждая из прямых $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ пересекает F в $n - r$ различных точках, отличных от P (теорема 2.6).

3) Прямая $x_0 = 0$ пересекает кривую x_1x_2F в $n + 2$ различных точках (теорема 2.2).

В таком случае кривая F удовлетворяет условиям применимости теоремы 7.2. При этом $r_0 = r$, $r_1 = r_2 = 0$. Преобразование T превращает F в неприводимую кривую F', обладающую следующими свойствами:

4) F' имеет порядок $2n-r$ [теорема 7.2, 1].

5) Любая особая точка F, отличная от P, преобразуется в точку той же кратности; обыкновенная особенность преобразуется в обыкновенную (теорема 7.3).

6) Кривая F' имеет три новых обыкновенных особенности: одну порядка n и две порядка $n-r$ [теорема 7.2, 3].

7) Точке P соответствуют некоторые точки P'_α, $\alpha=1, \ldots, k$, кривой F', лежащие на иррегулярной прямой $y_0=0$ [теорема 7.2, 2].

Особые точки кривой F', указанные в условиях 5 и 6, не вызывают изменения индекса кривой. Если обозначить через r'_α кратность точки P'_α, то индекс кривой F' будет меньше индекса кривой F на число

$$h \geqslant (r-1) - \sum_{\alpha=1}^{k} (r'_\alpha - 1).$$

Но из теоремы 7.2, 2 видно, что $\sum r'_\alpha \leqslant r$, так как сумма кратностей точек пересечения P'_α кривой F' и прямой $y_0=0$ должна быть $\geqslant \sum r'_\alpha$ и должна быть равна кратности точки P кривой F. Следовательно,

$$h \geqslant (r-1) - (\sum r'_\alpha - k) \geqslant (r-1) - (r-k) = k-1 \geqslant 0.$$

Отсюда видно, что $h=0$ тогда и только тогда, когда $k=1$ и $r'_1=r$. Если в действительности имеет место неравенство, то кривая F' имеет индекс $< I$ и теорема доказана. Если имеет место равенство, то кривую F' можно подвергнуть квадратичному преобразованию с фундаментальной точкой в одной из точек P' и продолжать этот процесс до тех пор, пока произойдет понижение индекса. Чтобы показать, что действительно должно произойти понижение индекса, рассмотрим кривую F_{p+1}, полученную из F последовательными $(p+1)$ квадратичными преобразованиями, для каждого из которых было $h=0$. Кривая F_{p+1} имеет порядок $n_{p+1} = 2n_p - r$, имеет по две особых точки каждой из кратностей $n-r$, n_1-r, $\ldots$, n_0-r и по одной особой точке кратностей n, n_1, $\ldots$, n_p. В силу теоремы 4.4, целое число

$$M_{p+1} = (n_{p+1}-1)(n_{p+1}-2) - 2\sum_{i=0}^{p} (n_i - r)(n_i - r - 1) - \\ - \sum_{i=0}^{p} n_i (n_i - 1),$$

где $n_0=n$, должно быть неотрицательным. Но мы находим непосредственным вычислением, что

$$M_{p+1} - M_p = r(r-1) \leqslant -2,$$

так как $r \geqslant 2$. Поэтому число p не может быть произвольно велико. Этим доказательство закончено.

Доказанная теорема не только интересна сама по себе, но и очень важна при изучении некоторых свойств кривых, в частности, свойств, связанных с теорией линейных рядов (гл. VI). Сейчас мы укажем лишь одно ее применение к изучению рациональных кривых. Легко видеть, что кривая, получаемая квадратичным преобразованием рациональной кривой, снова рациональна. Поэтому достаточное условие, указанное в теореме 5.1, может быть применено к упрощенной кривой, полученной на основании теоремы 7.4. В п. VI—5.3 доказано, что в этом случае условие теоремы 5.1 также необходимо. Тем самым получена полная характеристика рациональных кривых.

Теорему 7.4 можно обобщить на любые кривые, не обладающие кратными компонентами. Доказательство полностью сохраняется, если использовать неравенство, установленное в упражнении 3 п. 4.4 и заменить M_p на M_p+k-1.

7.6. Идеальные точки. Квадратичные преобразования позволяют дать интересное и полезное описание сложных особых точек. Пусть P есть r-кратная точка кривой F без кратных компонент. Если точка P взята за фундаментальную точку преобразования, примененного в теореме 7.2, то после преобразования она заменяется точками $P'_1, \ldots, P'_k$ преобразованной кривой, имеющими кратности $r'_1, \ldots, r'_k$. *Будем выражать это иначе, говоря, что кривая F содержит идеальные точки $P_1, \ldots, P_k$ кратностей $r'_1, \ldots, r'_k$ в окрестности первого порядка точки P.* Нужно, конечно, понимать, что эти «соседние точки» вовсе не являются точками в обычном смысле слова: они являются лишь средством словесного описания некоторых свойств кривой F. Так, утверждение, что кривая F на рис. 11 имеет одну двойную и одну простую идеальные точки в окрестности первого порядка точки $x_1=x_2=0$, означает, что кривая F' имеет одну двойную и одну простую точку пересечения с прямой $y_0=0$ (кроме фундаментальных точек).

Такой способ выражения оказывается полезным, так как идеальные точки обладают многими свойствами, подобными свойствам обычных точек. Будем называть точки P'_α образами точек P_α. Тогда каждая точка кривой F' будет образом одной или большего числа точек кривой F. Кроме того, каждая точка кривой F, кроме точки P, отображается на вполне определенную точку кривой F'. Сама точка P просто исчезает при отображении. Ввиду того, что положение точек P'_α при фиксированном преобразовании T зависит от направления касательных к кривой F в точке P, мы будем говорить, что «положение» идеальных точек P_α определяется этими касательными. Поэтому о двух кривых F_1 и F_2 мы будем говорить, что они имеют общую точку

в окрестности первого порядка точки P, если они пересекаются в P и имеют общую касательную в этой точке. Другими словами, это означает, что образы F_1' и F_2' кривых F_1 и F_2 при одном и том же преобразовании T имеют общую точку P_α'.

Эта терминология может быть легко обобщена. Если F' имеет точку кратности r_β в окрестности первого порядка точки P_α', мы будем говорить, что эта точка является образом r_β-кратной идеальной точки P_β кривой F, лежащей в окрестности второго порядка точки P. Таким образом, можно определить точки окрестностей любого наперед заданного порядка.

Примеры. 1. Если P — простая точка кривой F, то она может иметь только одну соответствующую ей точку P' кривой F'. Таким образом, простая точка P имеет только одну идеальную точку в своей окрестности первого порядка. Эта точка также простая. Отсюда непосредственно следует, что то же самое имеет место для окрестностей любого порядка. Таким образом, анализ особой точки можно прекратить, как только в результате квадратичных преобразований мы получим простую точку.

2. Если P — обыкновенная r-кратная точка, то она заменяется на кривой F' простыми точками $P_1', \ldots, P_r'$. Таким образом, в окрестности первого порядка точки P лежит r простых идеальных точек.

3. В п. 7.1 мы видели, что кривая $x^4+x^2y^2-y^2=0$ имеет в начале координат двойную точку P, не являющуюся обыкновенной и ведущую себя как пара обыкновенных двойных точек. Чтобы применить квадратичное преобразование к точке P, нужно сначала изменить координатную систему так, чтобы оси не были касательными к кривой в точке P. Удобным преобразованием координат будет замена y на $y-x$. Введя проективные координаты, будем иметь

$$F=x_1^4+x_1^2(x_2-x_1)^2-(x_2-x_1)^2x_0^2.$$

Поэтому

$$F'=y_2^2y_0^2+y_0^2(y_1-y_2)^2-(y_1-y_2)^2y_1^2.$$

Точке P соответствует на этой кривой точка $P'=(0, 1, 1)$. Заменив теперь y_2 на $y_2'+y_1$, получим уравнение кривой F'

$$(y_1+y_2')^2y_0^2+y_0^2y_2'^2-y_1^2y_2'^2=0,$$

причем точка P' будет иметь координаты $(0, 1, 0)$. Кривая имеет обыкновенную двойную точку в P'. Поэтому особенность кривой F состоит из одной двойной точки в окрестности первого порядка точки P и двух простых точек в ее окрестности второго порядка. Такого рода особенность называется точкой самокасания (см. п. 2.4, пример 4).

4. Пусть P — начало координат на кривой $y^2+x^3=0$ (см. п. 2.4, пример 3). Как и выше, заменим это уравнение таким

$$F=x_1^3+(x_2-x_1)^2x_0$$

и найдем, что

$$F'=y_2^2y_0+(y_1-y_2)^2y_1$$

или

$$(y_2'+y_1)^2y_0+y_2'^2y_1=0.$$

Здесь точке P соответствует точка $P'=(0, 1, 0)$, которая будет простой точкой кривой F'. Отсюда следует, что острие представляет собою двойную точку кривой с одной простой идеальной точкой в окрестности первого порядка.

Непосредственным следствием теоремы 7.4 является то обстоятельство, что *в окрестностях всех порядков любой точки неприводимой кривой может содержаться лишь конечное число особых точек*. Таким образом, анализ особенности, связанный с понятием окрестностей различных порядков, является конечным процессом и приводит к полной классификации особых точек. Такая классификация допускает, однако, возражение, которое внимательный читатель, может быть, уже заметил. При редукции особенностей каждый шаг допускает широкий произвол в выборе координатной системы, а следовательно, и преобразования T. Мы не привели доказательства того, что окончательный результат анализа особенности не зависит от указанного произвола. Это доказательство существует, но оно чересчур длинно и сложно. Кроме того, оно содержит идеи, которых мы не касались. Читателя, который им интересуется, мы отошлем к книге ван-дер-Вардена, Введение в алгебраическую геометрию (van der Waerden, Einführung in die Algebraische Geometrie, Springer, Berlin, 1939), гл. IX. В дальнейшем мы не будем пользоваться упомянутой инвариантностью.

7.7. Пересечение в идеальных точках. Даже не предполагая независимости анализа особенностей от системы координат, мы можем доказать два интересных свойства особых точек кривой. Дадим прежде всего небольшое обобщение способа определения идеальных особенностей некоторой кривой F. В силу теоремы 7.4, существует такая конечная последовательность квадратичных преобразований $T_1, T_2, \ldots, T_k$, что если обозначить через F_{p+1} образ кривой F_p при преобразовании T_p (начиная с $F_1=F$), преобразование T_p будет удовлетворять условиям 1,2, 3 теоремы 7.4 (относительно кривой F_p). При этом кривая F_{k+1} имеет только обыкновенные особенности (а следовательно, уже не имеет идеальных особых точек в их окрестности, см. выше,

пример 2). Каждое из преобразований T_p в действительности влияет только на одну особую точку соответствующей кривой. Любая другая особая точка P кривой F_p преобразуется в особую точку P' той же кратности на кривой F_{p+1}. Условимся говорить, что T_p преобразует точки окрестности r-го порядка точки P в точки той же кратности в окрестности r-го порядка точки P'. Это условие согласуется с теоремой 7.3. Идеальные особенности кривой F мы будем определять описанным выше образом с помощью последовательности преобразований $T_1, T_2, \ldots, T_k$.

При таком способе определения идеальных особенностей имеется произвол не только в выборе иррегулярных прямых отдельных преобразований T_p, но также и в выборе последовательности, в которой особые точки выбираются в качестве фундаментальных точек. Мы не будем даже делать попытки доказать инвариантность такого определения и будем рассматривать идеальные особенности, как определенные заданной последовательностью преобразований.

Тем же путем можно определить идеальные точки, общие двум кривым. Если кривые F и G не имеют общих или кратных компонент, то найдется последовательность квадратичных преобразований, устраняющая все не обыкновенные, особые точки кривой FG. Эта последовательность преобразований не только дает редукцию особенностей кривых F и G отдельно, а одновременно превращает кривые F и G в кривые F' и G', не имеющие общих касательных в точках пересечения и поэтому не имеющие общих идеальных точек (идеальные точки кривых F и G определяются очевидным образом относительно заданной последовательности преобразований).

Докажем теперь обобщение теоремы 4.4:

Теорема 7.5. *Пусть $r_1, r_2, \ldots$ — кратности всех особых точек* (включая идеальные) *неприводимой кривой F порядка n. Тогда*

$$(n-1)(n-2) \geqslant \sum r_i (r_i - 1).$$

Доказательство. Пусть идеальные точки F определены с помощью последовательности преобразований $T_1, \ldots, T_k$. Рассмотрим влияние преобразования T_1 на число

$$N = (n-1)(n-2) - \sum r_i (r_i - 1).$$

Пусть фундаментальная точка P преобразования T_1 имеет на кривой F кратность r_1. Тогда кривая F_2 имеет порядок $2n - r_1$ и имеет особые точки кратностей $r_2, r_3, \ldots$, являющиеся образами всех нефундаментальных точек и идеальных точек окрестности точки P. Кроме того, F_2 имеет три обыкновенные особые точки кратностей n, $n - r_1$, $n - r_1$. Особенность порядка r_1

кривой F полностью исчезает. Поэтому число N для кривой F_2 обращается в

$$N_2=(2n-r_1-1)(2n-r_1-2)-$$
$$-\left[\sum r_i(r_i-1)-r_1(r_1-1)\right]-n(n-1)-2(n-r_1)(n-r_1-1),$$

которое равно N. Подобным же образом мы получим $N_{k+1}=$ $=N_k=\ldots=N_2=N$. Но кривая F_{k+1} не имеет идеальных особенностей и поэтому, в силу теоремы 4.4, будет $N_{k+1}\geqslant 0$. Отсюда следует, что и $N\geqslant 0$, т. е. теорема доказана.

В действительности мы доказали более сильную теорему, чем утверждается в ее формулировке: мы доказали, что неотрицательное число N, связанное с кривой F и с последовательностью преобразований $T_1, \ldots, T_k$, остается неизменным, когда эти преобразования одно за другим применяются к кривой F. Далее будет видно, что число N инвариантно по отношению к более общему типу преобразований и является наиболее важным инвариантом неприводимой кривой.

Можно дать аналогичное обобщение теоремы 3.3.

Теорема 7.6. *Пусть F и G — две кривые порядков m и n, не имеющие ни общих, ни кратных компонент. Если кривые F и G имеют кратности r_i и s_i в их общих точках (включая идеальные), то $mn\geqslant\sum r_i s_i$.*

Доказательство. Поступаем так же, как в доказательстве теоремы 7.5. Положим

$$N=mn-\sum r_i s_i.$$

Тогда

$$N_2=(2m-r_1)(2n-s_1)-\left[\sum r_i s_i-r_1 s_1\right]-$$
$$-mn-2(m-r_1)(n-s_1)=N.$$

Отсюда, как и раньше, следует, что $N_{k+1}=N$. Но, в силу теоремы 3.3, $N_{k+1}\geqslant 0$, а потому и $N\geqslant 0$.

Здесь опять доказано больше, чем утверждается в формулировке. Рассмотрев более подробно результант $R(x)$ в теореме 3.2, можно показать, что если кривые F и G не имеют общих касательных в некоторой точке их пересечения, то соответствующий этой точке корень результанта будет иметь кратность, в точности равную rs. Однако более простое доказательство этого факта будет дано ниже (теорема IV — 5.10). Применяя полученный результат к кривым F_{k+1} и G_{k+1}, мы найдем, что $N_{k+1}=0$. Отсюда следует, что $N=0$, а потому сумма $\sum r_i s_i$ в точности равна mn.

7.8. Упражнения 1. При преобразовании координат уравнения (7.2) квадратичного преобразования переходят в

$$y_i = G_i(x), \quad i = 0, 1, 2,$$

где многочлены $G_i(x)$ определяют линейно независимые кривые второго порядка, имеющие 3 точки, общие им всем и не лежащие на одной прямой. Обратно, если G_0, G_1, G_2 — три такие кривые второго порядка, то преобразование $y_i = G_i(x)$ надлежащим выбором координат приводится к виду (7.2).

2. Если $r_1, r_2, \ldots$ — кратности особых точек неприводимой кривой порядка n, включая идеальные, и если $(n-1)(n-2) = \sum r_i(r_i - 1)$, то кривая рациональна.

3. «Когтеобразное острие» (п. 2.4, пример 5) представляет собою двойную точку с одной двойной точкой в окрестности первого порядка и одной простой точкой в окрестности второго порядка.

4. Исследовать особые точки кривых:

$$\text{а)}\ x_0(x_1^2 - x_0x_2)^2 - x_1^5 = 0, \qquad \text{б)}\ x_1^4 + x_1^3x_2 - x_0^2x_2^2 = 0.$$

5. Проверить, что для кривых упражнения 4 будет справедливо равенство $\sum r_i s_i = mn$.

Глава IV

ФОРМАЛЬНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Пусть K — поле действительных или комплексных чисел и пусть кривая $f(x, y)=0$ имеет в (x_0, y_0) обыкновенную точку. Тогда по крайней мере одна из производных $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ отлична от нуля. Можно считать для определенности, что $f_y(x_0, y_0) \neq 0$. Из теоремы о неявных функциях следует, что существует функция $y(x)$, аналитическая в некоторой окрестности значения x_0 и удовлетворяющая условиям:

1) $y(x_0)=y_0$.

2) $f(x, y(x))=0$.

3) Для любой точки (x, y) кривой f, лежащей в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), будет выполняться равенство $y=y(x)$.

Функция $y(x)$ может быть выражена степенным рядом, расположенным по степеням разности $x-x_0$ и сходящимся в некоторой окрестности значения x_0.

Если K — поле комплексных чисел и (x_0, y_0) — произвольная точка кривой f, обыкновенная или особая, то можно показать, что существует конечное число пар функций $x(t)$, $y(t)$, аналитических в некоторой окрестности значения $t=0$ и таких, что

1) $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$.

2) $f(x(t), y(t))=0$.

3) Для любой точки (x, y) кривой f, отличной от (x_0, y_0) и лежащей в некоторой окрестности (x_0, y_0), найдется только одна пара функций $x(t)$, $y(t)$ и единственное значение t, удовлетворяющие равенствам $x=x(t)$, $y=y(t)$ [1]).

Такого рода параметризация некоторого куска кривой в окрестности выбранной точки очень удобна при исследовании структуры особых точек кривой, а также пересечений кривых в их особых точках. В настоящей главе мы применяем для той же цели формальные степенные ряды, чтобы получить возможно далеко идущее обобщение аналитической теории на случай произвольного основного поля.

---

[1]) Это можно легко получить из результатов, приводимых в книге: А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, ГТТИ, 1950, гл. 8, § 6. (*Прим. перев.*)

§ 1. ФОРМАЛЬНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1. 1. Кольцо и поле формальных степенных рядов. В § 1—5 мы определили многочлен над областью целостности D, как формальную конечную сумму $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, где коэффициенты a_i принадлежат D, а x — неизвестное. Если мы будем рассматривать бесконечные суммы того же вида $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$, мы получим множество объектов, называемых *формальными степенными рядами* над D. Эти ряды можно складывать и перемножать точно так же, как многочлены. Совокупность формальных степенных рядов будет областью целостности $D[x]'$. $D[x]'\supset D[x]$, так как каждый степенной ряд, в котором лишь конечное число коэффициентов отлично от нуля, можно рассматривать как многочлен. Для рядов будут применяться те же обозначения, что и для многочленов.

Теорема 1.1. *Ряд $a_0+a_1x+\ldots$ будет делителем единицы в $D[x]'$ тогда и только тогда, когда a_0 является делителем единицы в D.*

Доказательство. Если a_0 есть делитель единицы, то мы определим последовательность $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ формулами

$$\begin{aligned}
&a_0b_0=1,\\
&a_0b_1+a_1b_0=0,\\
&a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0=0.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Тогда

$$(a_0+a_1x+\ldots)(b_0+b_1x+\ldots)=1. \tag{1.1}$$

Обратно, если имеет место соотношение (1.1), то $a_0b_0=1$ и a_0 является делителем единицы в D.

Теорема 1.2. *Если K — поле, то каждый элемент поля частных $K(x)'$ кольца $K[x]'$ может быть записан в виде* $\frac{a_0+a_1x+\ldots}{x^h}$, где $h\geqslant 0$.

Доказательство. Пусть

$$f=\frac{b_0+b_1x+\ldots}{c_0+c_1x+\ldots}\in K(x)'$$

и пусть h — наименьшее целое число, для которого $c_h\neq 0$. Ввиду того, что K — поле, c_h будет делителем единицы и поэтому ряд $c_h+c_{h+1}x+\ldots$ имеет обратный ему $d_0+d_1x+\ldots$. Но в таком случае справедливо равенство

$$f=\frac{(b_0+b_1x+\ldots)(d_0+d_1x+\ldots)}{x^h(c_h+c_{h+1}x+\ldots)(d_0+d_1x+\ldots)}=\frac{a_0+a_1x+\ldots}{x^h}.$$

Удобно записывать элемент f в виде

$$f = x^{-h}(a_0 + a_1 x + \ldots) = a_0 x^{-h} + a_1 x^{-h+1} + \ldots$$

При этом $K(x)'$ оказывается состоящим из формальных степенных рядов с конечным числом членов, содержащих отрицательные степени неизвестного. Эти ряды можно складывать и перемножать по тем же правилам, что и элементы $K[x]'$. Каждый отличный от нуля элемент $K(x)'$ может быть однозначно записан в виде

$$f = x^{-h}(a_0 + a_1 x + \ldots),$$

где k — целое число и $a_0 \neq 0$. Число k называется *порядком ряда* f и будет обозначаться через $O(f)$. Непосредственно видно, что

1) $O(fg) = O(f) + O(g)$.

2) $O(f \pm g) \geqslant \min[O(f), O(g)]$. Если $O(f) \neq O(g)$, то в этом соотношении имеет место равенство.

Удобно считать, что $O(0) = \infty$, где символ ∞ обладает следующими свойствами: $\infty > n$, $n + \infty = \infty + n = \infty$ для любого целого числа n. В таком случае свойства 1 и 2 будут иметь место для всех без исключения элементов f и g из $K(x)'$.

1.2. Подстановка в степенных рядах. В приложениях к алгебраической геометрии нет необходимости рассматривать степенные ряды над произвольной областью целостности. Поэтому, начиная с этого места, мы будем считать, что в качестве «констант» берутся элементы поля K. Многие из приводимых ниже теорем будут справедливы и в случае более общей области целостности, но такие обобщения мы будем оставлять читателю.

Теория многочленов концентрируется, главным образом, вокруг разложения на множители. Можно было бы ожидать, что это будет и в случае степенных рядов. Однако разложение на множители в кольце $K[x]'$ оказывается значительно более простым, чем в $K[x]$, так как из теоремы 1.1 непосредственно следует, что каждый отличный от нуля элемент $K[x]'$ ассоциирован с некоторой степенью x и поэтому делимость $f \mid g$ будет иметь место тогда и только тогда, когда $O(f) \leqslant O(g)$.

Подстановка в степенной ряд вместо неизвестного некоторой константы обычно не имеет смысла. Однако, если этот ряд имеет только конечное число отличных от нуля коэффициентов и является, по существу, элементом кольца $K[x]$, такая подстановка возможна. Точно так же, если $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$, то мы можем определить $f(0)$ равенством $f(0) = a_0$. В других случаях трудно указать удовлетворительное определение $f(a)$, если в самом поле K не введено некоторое понятие непрерывности, позволяющее определить сходимость рядов.

Можно, однако, определить подстановку в степенной ряд вместо неизвестного x другого степенного ряда. Мы увидим, что такая подстановка имеет важные приложения. Для систематического описания процесса подстановки мы используем понятие *сравнения*. Два элемента f и g из $K[x]'$ называются сравнимыми по модулю x^m, если разность $f-g$ делится на x^m. Сравнимость f и g по модулю x^m записывается так: $f \equiv g \pmod{x^m}$. Другим выражением того же самого является условие $O(f-g) \geqslant m$ или требование, чтобы первые m коэффициентов рядов f и g были соответственно равны. Основные свойства сравнений устанавливаются следующей

Теоремой 1.3. 1) *Сравнимость по модулю x^m является соотношением эквивалентности.*

2) *Если*

$$f_1 \equiv f_2, \quad g_1 \equiv g_2 \pmod{x^m},$$

то

$$f_1 \pm g_1 \equiv f_2 \pm g_2, \quad f_1 g_1 \equiv f_2 g_2 \pmod{x^m}.$$

3) *Если $f \equiv g \pmod{x^m}$ при сколь угодно большом m, то $f=g$.*

4) *Если f_1 и f_2 — многочлены и если $O(g_1)$, $O(g_2) > 0$, а $g_1 \equiv g_2$, $f_1 \equiv f_2 \pmod{x^m}$, то $f_1(g_1) \equiv f_2(g_2) \pmod{x^m}$.*

5) *Если $f_1, f_2, \ldots$ — такие элементы кольца $K[x]'$, что*

$$f_{m+1} \equiv f_m \pmod{x^m}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

то существует единственный элемент $f \in K[x]'$, удовлетворяющий условиям

$$f_m \equiv f \pmod{x^m}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Утверждения 1, 2 и 3 непосредственно следуют из последнего замечания предыдущего абзаца. Для доказательства утверждения 4 запишем $f_1 = f_2 + x^m f_3$, где f_3 — многочлен. Воспользовавшись дважды свойством 2, получим

$$f_1(g_1) \equiv f_1(g_2) \equiv f_2(g_2) + g_2^m f_3(g_2) \pmod{x^m}.$$

Это сразу приводит к искомому результату, так как

$$O(g_2^m f_3(g_2)) = mO(g_2) + O(f_3(g_2)) \geqslant m.$$

Чтобы доказать утверждение 5, заметим, что мы должны иметь

$$\begin{aligned}
f_1 &= a_{10} + a_{11} x + a_{12} x^2 + \ldots, \\
f_2 &= a_{10} + a_{21} x + a_{22} x^2 + \ldots, \\
f_3 &= a_{10} + a_{21} x + a_{32} x^2 \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_m &= a_{10} + a_{21} x + \ldots + a_{m-1,\, m-2}\, x^{m-2} + a_{m,\, m-1}\, x^{m-1} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Следовательно, если положить

$$f = a_{10} + a_{21}x + \ldots + a_{m,\,m-1}x^{m-1} + \ldots,$$

то $f_m \equiv f \pmod{x^m}$ при всех m. Если g — другой элемент из $K[x]'$, удовлетворяющий условиям $f_m \equiv g \pmod{x^m}$ при всех m, то, в силу утверждения 1, $f \equiv g \pmod{x^m}$ при всех m, а потому, в силу утверждения 3, $f = g$. Таким образом, ряд f — единственный.

Пусть $f, g \in K[x]'$ и $O(g) > 0$. Обозначим через f_m и g_m многочлены, удовлетворяющие условиям

$$f_m \equiv f, \quad g_m \equiv g \pmod{x^m}$$

(в качестве f_m и g_m могут быть взяты суммы первых m членов рядов f и g). Тогда

$$f_{m+1} \equiv f_m, \quad g_{m+1} \equiv g_m \pmod{x^m}$$

и, в силу теоремы 1.3, 2,

$$f_{m+1}(g_{m+1}) \equiv f_m(g_m) \pmod{x^m}.$$

Отсюда следует, что существует единственный элемент $h \in K[x]'$, для которого

$$f_m(g_m) \equiv h \pmod{x^m}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Если бы мы исходили из других последовательностей многочленов f'_m и g'_m, мы имели бы

$$f'_m(g'_m) \equiv f_m(g_m) \pmod{x^m}$$

и поэтому пришли бы к тому же самому h. Условимся писать, что $h = f(g)$.

Ряд h легко вычисляется формальной подстановкой, сопровождаемой группировкой членов с одинаковыми степенями x. Так, если

$$f = a_0 + a_1x + \ldots,$$
$$g = b_1x + b_2x^2 + \ldots,$$

то

$$f(g) = a_0 + a_1g + a_2g^2 + a_3g^3 + \ldots =$$
$$= a_0 + a_1b_1x + (a_1b_2 + a_2b_1^2)x^2 + (a_1b_3 + 2a_2b_1b_3 + a_3b_1^3)x^3 + \ldots$$

Важные свойства подстановки устанавливаются следующей

Теоремой 1.4. 1) *Соответствие $f \to f(g)$ при фиксированном g является гомоморфизмом кольца $K[x]'$ в себя.*

2) *Если $fg \neq 0$, то $O(f(g)) = O(f)\,O(g)$.*

3) *Если $O(g) > 0$, $O(h) > 0$, то результат подстановки h в $f(g)$ совпадает с результатом подстановки $g(h)$ в f.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 являются непосредственными следствиями определения $f(g)$. Чтобы доказать утвержде-

ние 3, обозначим $k=f(g)$, $l=g(h)$. Кроме того, пусть многочлены f_m, g_m, h_m сравнимы с соответствующими степенными рядами по модулю x^m. Положим $k_m=f_m(g_m)$, $l_m=g_m(h_m)$.

Тогда

$$k_m(h_m)=f_m(l_m).$$

Но

$$k_m\equiv k,\quad h_m\equiv h,\quad f_m\equiv f,\quad l_m\equiv l\pmod{x^m},$$

и поэтому

$$k_m(h_m)\equiv k(h),\quad f_m(l_m)\equiv f(l)\pmod{x^m}.$$

Отсюда следует

$$k(h)\equiv f(l)\pmod{x^m}.$$

Так как это сравнение имеет место при любом m, должно быть $k(h)=f(l)$, что и доказывает утверждение 3.

Особенно интересный случай подстановки $f(g)$ будет при $O(g)=1$. В этом случае имеют место следующие свойства:

Теорема 1.5. *Если $O(g)=1$ и $f'=f(g)$, то*

1) $O(f')=O(f)$.

2) *Существует такой степенной ряд g', что $O(g')=1$ и $f=f'(g')$ при любом $f\in K[x]'$.*

Доказательство. Утверждение 1 является частным случаем теоремы 1.4, 2. Для доказательства утверждения 2 положим $g=b_1x+b_2x^2+\ldots$, $b_1\neq 0$ и $g'=c_1x+c_2x^2+\ldots$. В таком случае

$$\begin{aligned}g(g')&=b_1g'+b_2g'^2+\ldots=\\&=b_1c_1x+(b_1c_2+b_2c_1^2)x^2+(b_1c_3+2b_2c_1c_2+\ldots+b_3c_1^3)x^3+\\&\quad+\ldots+(b_1c_n+P_n(b_2,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_{n-1}))x^n+\ldots,\end{aligned}$$

где P_n — многочлен от указанных аргументов. Если мы определим c_1 из условия $b_1c_1=1$, а остальные c_n при $n>0$ — рекуррентной формулой

$$c_n=-b_1^{-1}P_n(b_2,\ldots,b_n,c_1,\ldots,c_{n-1}),$$

то получим $g(g')=x$. Теперь утверждение 3 непосредственно следует из теоремы 1.4, 3.

Выводы теоремы 1.5 можно формулировать еще так: гомоморфизм $f\to f(g)$ является изоморфизмом кольца $K[x]'$ *с самим собой* над полем K (т. е. *автоморфизмом* $K[x]'$ над K), сохраняющим порядок элементов. Мы оставляем читателю доказательство обратной теоремы о том, что каждый сохраняющий порядок элементов автоморфизм кольца $K[x]$ над K имеет вид $f\to f(g)$. Эта обратная теорема не будет нужна нам в дальнейшем.

1.3. Производные. Как и в случае многочлена, производную f' степенного ряда $f=\sum a_n x^n \in K[x]'$ мы определим формулой $f'=\sum n a_n x^{n-1}$.

Чтобы показать сохранение свойств производных и в случае степенных рядов, заметим прежде всего, что из сравнения $f_1 \equiv f_2 \pmod{x^m}$ следует $f_1' \equiv f_2' \pmod{x^{m-1}}$. Рассмотрим, например, производную произведения fg. Пусть f_m, g_m — такие многочлены, что

$$f \equiv f_m, \quad g \equiv g_m \pmod{x^m}, \quad m=1, 2, \ldots$$

Тогда

$$fg \equiv f_m g_m \pmod{x^m}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}(fg)' &\equiv (f_m g_m)' \pmod{x^{m-1}}\\ &= f_m g_m' + f_m' g_m\\ &\equiv fg' + f'g \pmod{x^{m-1}}.\end{aligned}$$

Так как написанные сравнения имеют место при любом m, должно иметь место равенство

$$(fg)' = fg' + f'g.$$

Другие формальные свойства производных (см. § I—8) могут быть получены подобным же образом.

1.4. Упражнения. 1. Пусть $f \in D[x]'$. Определим $|f|$ формулой $|f| = 2^{-\nu}$, где $\nu = O(f)$. Тогда

1) $|fg| = |f|\,|g|$.

2) $|f \pm g| \leqslant \max[|f|, |g|]$.

3) $|f| = 0$ в том и только в том случае, если $f=0$.

2. Применяя приведенное выше определение абсолютной величины и используя обычные определения анализа, доказать следующее:

1) Последовательность степенных рядов f_n имеет предел f тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}(f_{n+1}-f_n)=0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f_i$ существует тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$.

3) $a_0 + a_1 x + \ldots = \lim\limits_{n\to\infty}(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)$, так что множество $D[x]$ всюду плотно в $D[x]'$.

3. Если $f_n(x)$ — последовательность многочленов, сходящаяся (при приведенном выше определении абсолютной величины) к $f(x)$ и если $|g(x)| < 1$, то последовательность $f_n(g)$ сходится к $f(g)$.

4. Производная $f'(x)$ ряда $f(x)$ может быть определена формулой

$$\lim_{h(x)\to 0} \frac{f(x+h(x))-f(x)}{h(x)}.$$

§ 2. ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

2.1. Параметризации кривой. В дальнейшем мы будем пользоваться степенными рядами от вспомогательного неизвестного t. Удобно обозначать элементы поля $K(t)'$ буквами с черточками наверху ($\bar{a}$, $\bar{x}$ и т. д.). При этом мы условимся, что каждая буква с черточкой обозначает элемент из $K(t)'$, но некоторые элементы из $K(t)'$, например t, не обязательно будут обозначаться буквами с черточками наверху. Буквы с черточками наверху будут применяться также для обозначения определяемых ниже элементов полей, родственных полю $K(t)'$.

Пусть $F(x)=0$ — уравнение алгебраической кривой C в проективной плоскости над алгебраически замкнутым полем K характеристики нуль. Мы будем говорить, что элементы $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ поля $K(t')$ являются координатами некоторой *параметризации* кривой C, если

1) $F(\bar{x})=0$.

2) Не существует элемента $\bar{e}\neq 0$, для которого $\bar{e}\bar{x}_i\in K$, $i=0, 1, 2$.

Если $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ — координаты параметризации кривой C, то $(\bar{e}\bar{x}_0, \bar{e}\bar{x}_1, \bar{e}\bar{x}_2)$, где $e\neq 0$, также будут координатами некоторой параметризации C. Как и в случае точек (II — 1.1), мы будем рассматривать эти тройки как координаты одной и той же параметризации кривой.

При переходе к новой координатной системе координаты параметризации будут подвергаться тому же преобразованию, что и координаты точек. При таком условии выполнение соотношений 1 и 2, определяющих координаты параметризации, в одной из координатных систем влечет за собою их выполнение во всех координатных системах. Говоря о параметризациях, мы условимся применять те же сокращенные выражения, что и в случае точек. Так, выражение «параметризация $(\bar{x})$» будет применяться вместо «параметризация, координатами которой являются $(\bar{x})$» и т. п.

Параметризации можно рассматривать, в некотором смысле, как точки кривой. Для этого нужно только рассматривать уравнение $F(x)=0$ как уравнение кривой C' в проективной плоскости над основным полем $K(t)'$. В таком случае точками кривой C' будут все точки кривой C, а также все параметризации последней.

Пусть (x) — произвольная параметризация кривой C и пусть $h = -\min O(\bar{x}_i)$. Тогда, если положить $\bar{y}_i = t^h \bar{x}_i$, то элементы $\bar{y}_i$ будут определять ту же самую параметризацию. При этом $\bar{y}_i \in K[t]'$ и хотя бы одно из значений $O(\bar{y}_i)$ равно нулю. Отсюда следует, что хотя бы одно из значений $\bar{y}_i(0) = a_i \neq 0$. Точка (a) называется в таком случае *центром* параметризации. Очевидно, что при преобразовании координат координаты центра ведут себя подобно координатам точки. Отсюда следует, что параметризация имеет однозначно определенный центр.

Если $\bar{x}_0 \neq 0$, то можно положить $\bar{x} = \bar{x}_1/\bar{x}_0$, $\bar{y} = \bar{x}_2/\bar{x}_0$. Пару $(\bar{x}, \bar{y})$ можно рассматривать как аффинные координаты нашей параметризации в соответствующей координатной системе. Обратно, если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ удовлетворяют условиям:

1) $f(\bar{x}, \bar{y}) = F(1, \bar{x}, \bar{y}) = 0$,

2) $\bar{x}$ и $\bar{y}$ не являются одновременно элементами поля K,

то $(1, \bar{x}, \bar{y})$ будут проективными координатами некоторой параметризации кривой C. Таким образом, связь между двумя типами координат параметризаций оказывается точно такой же, как и для точек.

Если $(\bar{x})$, $x_i \in K[t']$ — некоторая параметризация и если $O(\bar{t}) > 0$, $\bar{t} \neq 0$, то $(\bar{y})$, в которой $\bar{y}_i = \bar{x}_i(\bar{t})$, также будет параметризацией с тем же центром. В случае, если $O(\bar{t}) = 1$, мы будем называть такие две параметризации *эквивалентными*. В силу теорем 1.4 и 1.5, такая эквивалентность будет рефлексивной, симметричной и транзитивной, так что каждая параметризация определяет некоторый класс эквивалентности.

В случае, когда $\bar{x}_i \in K(t^r)'$ при некотором $r > 1$, мы можем упростить степенные ряды, заменяя t^r новой неизвестной t'. В этом случае параметризация $(\bar{x})$ (а также любая эквивалентная ей) называется *приводимой*. Мы будем заниматься, главным образом, неприводимыми параметризациями, в связи с чем необходим критерий, позволяющий устанавливать, является ли данная параметризация приводимой. Такой критерий указывает следующая

Теорема 2.1. *Параметризация*

$$\bar{x} = t^n, \quad \bar{y} = a_1 t^{n_1} + a_2 t^{n_2} + \ldots,$$

в которой

$$0 < n, \quad 0 < n_1 < n_2 < \ldots, \quad a_i \neq 0$$

приводима тогда и только тогда, когда числа n, n_1, n_2, ... имеют общий делитель, больший единицы.

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Чтобы доказать необходимость, предположим, что существует такой $\bar{t}$, что $O(\bar{t})=1$, $\bar{x}(\bar{t})$, $\bar{y}(\bar{t})\in K[t^r]'$, $r>1$. Докажем прежде всего, что $\bar{t}/t\in K[t^r]'$. Если бы это не было так, элемент $\bar{t}$ имел бы вид

$$\bar{t}=t(b_0+b_1t^r+\ldots+b_ht^{rh}+ct^s+\ldots),$$

где $b_0c\neq 0$ и $r\nmid s$. В таком случае

$$\bar{x}(\bar{t})=t^n[(b_0+\ldots+b_ht^{rh})+ct^s+\ldots]^n=$$
$$=t^n(b_0+\ldots+b_ht^{rh})^n+nct^{n+s}(b_0+\ldots+b_ht^{rh})^{n-1}+\ldots$$

Так как ряд $\bar{x}(\bar{t})$ начинается членом $b_0^nt^n$ и так как, по предположению, $\bar{x}[\bar{t}]\in K(t^r)'$, должно быть $r|n$. Отсюда следует, что

$$\bar{x}(\bar{t})-t^n(b_0+\ldots+b_ht^{rh})^n=nct^{n+s}b_0^{n-1}+\ldots$$

есть элемент $K[t^r]'$. Но это невозможно, так как $r\nmid n+s$. Из доказанного следует, что $\bar{t}=t\bar{z}$, где $\bar{z}\in K[t^r]'$.

Предположим теперь, что хотя бы одно из чисел n_1, n_2, ... не делится на r. Пусть n_{h+1} — первое такое число. Тогда

$$\bar{y}(\bar{t})-(a_1t^{n_1}\bar{z}^{n_1}+\ldots+a_ht^{n_h}\bar{z}^{n_h})=$$
$$=a_{h+1}t^{n_{h+1}}(b_0+b_1t^r+\ldots)^{n_{h+1}}+\ldots=$$
$$=a_{h+1}b_0^{n_{h+1}}t^{n_{h+1}}+\ldots$$

Левая часть этого равенства является элементом кольца $K[t^r]'$, а правая — нет. Полученное противоречие означает, что r должно быть делителем всех n_i. Теорема доказана.

Теорема 2.1 имеет довольно широкое применение благодаря следующей

Теореме 2.2. *Любая параметризация в надлежащим образом выбранной координатной системе эквивалентна некоторой параметризации вида*

$$\bar{x}=t^n,\quad \bar{y}=a_1t^{n_1}+a_2t^{n_2}+\ldots,$$
$$0<n,\quad 0<n_1<n_2<\ldots$$

Доказательство. Возьмем центр заданной параметризации в качестве начала аффинной координатной системы. В таком случае параметризация обращается в

$$\bar{x}_1=t^n(b_0+b_1t+\ldots),\quad n>0,$$
$$\bar{y}_1=t^{n_1}(c_0+c_1t+\ldots),\quad n_1>0.$$

При этом хотя бы один из коэффициентов b_0, c_0 отличен от нуля. Можно предполагать, что $b_0 \neq 0$ (в противном случае можно переименовать оси). Положим

$$\bar{t} = d_1 t + d_2 t^2 + \ldots, \quad d_1 \neq 0$$

и

$$\bar{x} = \bar{x}_1(\bar{t}), \quad \bar{y} = \bar{y}_1(\bar{t}).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\bar{x} &= t^n (d_1 + d_2 t + \ldots)^n [b_0 + b_1 (d_1 t + \ldots) + \ldots] = \\ &= t^n [d_1^n b_0 + (n d_1^{n-1} d_2 b_0 + d_1^{n+1} b_1) t + \ldots + \\ &\qquad + (n d_1^{n-1} d_i b_0 + P_i (b_1, \ldots, b_i, d_1, \ldots, d_{i-1}) t^i + \ldots],\end{aligned}$$

где P_i — многочлен от указанных аргументов. Определяя последовательно d_1, d_2, ... формулами

$$\begin{aligned}&d_1^n = b_0^{-1};\\ &d_2 = -(n d_1^{n-1} b_0)^{-1} d_1^{n+1} b_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &d_i = -(n d_1^{n-1} b_0)^{-1} P_i, \quad i = 3, 4, \ldots,\end{aligned}$$

получим $\bar{x} = t^n$. Параметризация $(\bar{x}, \bar{y})$ будет требуемой.

2.2. Ветви кривой. Класс эквивалентных неприводимых параметризаций кривой C называется *ветвью* этой кривой. Общий центр всех параметризаций класса есть *центр ветви*.

Оправдание такого определения можно усмотреть в замечаниях начала этой главы. Рассмотрим лишь случай, когда K есть поле комплексных чисел. Разложения функций $x(t)$ и $y(t)$ в степенные ряды дают пару формальных степенных рядов, являющихся координатами некоторой параметризации с центром (x_0, y_0). Функции $x(t)$ и $y(t)$ не определены единственным образом, но можно доказать, что для любой другой пары функций $(x_1(t), y_1(t))$, дающей то же множество точек, что и пара $(x(t), y(t))$ при изменении t в некоторой окрестности нуля, найдется функция $z(t)$, аналитическая вблизи нуля и такая, что

$$z(0) = 0, \quad z'(0) \neq 0, \quad x_1(t) = x(z(t)), \quad y_1(t) = y(z(t)).$$

Но это означает, что параметризации $(x(t), y(t))$ и $(x_1(t), y_1(t))$ эквивалентны. Требование, чтобы любая точка, достаточно близкая к (x_0, y_0), получалась лишь при единственном значении t, означает неприводимость любой такой параметризации. Таким образом, понятие ветви кривой является алгебраическим анало-

гом *аналитической ветви* кривой над полем комплексных чисел, определяемой как множество точек $(x(t), y(t))$, получаемых при изменении t внутри достаточно малой окрестности нуля, в которой функции $x(t)$, $y(t)$ аналитичны.

Возвращаясь к чисто алгебраическому случаю, легко видеть, что центр любой ветви кривой C является точкой этой кривой. Действительно, если $(\bar{x})$ — параметризация рассматриваемой ветви, для которой $\bar{x}_i = a_i + b_i t + \ldots$ и не все $a_i = 0$, то $F(\bar{x}) = 0$, и поэтому $F(\bar{x}) \equiv 0 \pmod{t}$. Но $\bar{x}_i \equiv a_i \pmod{t}$, а потому $F(a) \equiv 0 \pmod{t}$, откуда, очевидно, следует, что $F(a) = 0$. Очень важным для теории алгебраических кривых является обращение этого свойства. Оно устанавливается следующей

Теоремой 2.3. *Каждая точка кривой C является центром хотя бы одной ветви этой кривой.*

Доказательство этой теоремы очень длинно и будет разбито на несколько этапов.

§ 3. ДРОБНО-СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

3.1. Поле $K(x)^*$ дробно-степенных рядов. Мы докажем теорему 2.3, установив существование параметризации вида $(t^n, \bar{y}(t))$. При этом в процессе рассуждений будет полезным небольшое обобщение понятия степенного ряда. Возьмем вместо неизвестного t символ $x^{1/n}$, установив между различными такими символами при $n = 1, 2, \ldots$ определяющие соотношения

$$x^{1/1} = x, \quad (x^{1/rn})^r = x^{1/n}, \quad x^{m/n} = (x^{1/n})^m.$$

Отсюда следует, что

$$x^{rm/rn} = x^{m/n}.$$

Параметризация указанного выше вида может быть теперь записана как $(x, \bar{y})$, где $\bar{y}$ — некоторый элемент из $K(x^{1/n})'$, удовлетворяющий соотношению $f(x, \bar{y}) = 0$.

Из соотношения $(x^{1/rn})^r = x^{1/n}$ следует, что $K(x^{1/n})' \subset K(x^{1/rn})'$. Рассмотрим объединение всех полей $K(x^{1/n})'$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е. совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы некоторым из этих полей. Обозначим эту совокупность через $K(x)^*$. Если $\bar{y}$ и $\bar{z}$ — два элемента из $K(x)^*$, то при некоторых m и n будет $\bar{y} \in K(x^{1/m})'$, $\bar{z} \in K(x^{1/n})'$. Тогда $\bar{y}, \bar{z} \in K(x^{1/mn})'$, и поэтому элементы $\bar{y} \pm \bar{z}$, $\bar{y}\bar{z}$, $\bar{y}\bar{z}^{-1}$ (если $\bar{z} \neq 0$) также принадлежат $K(x^{1/mn})'$, а следовательно, и $K(x)^*$. Отсюда следует, что $K(x)^*$ есть поле.

Если

$$\bar{a}(x) = a_1 x^{m_1/n_1} + a_2 x^{m_2/n_2} + \ldots \in K(x)^*,$$

где

$$a_i \neq 0, \quad m_1/n_1 < m_2/n_2 < \ldots,$$

то мы определим порядок $O(\overline{a})$ элемента $\overline{a}(x)$, как дробь m_1/n_1. Совокупность элементов из $K(x)^*$, имеющих неотрицательный порядок, будет некоторым подкольцом $K[x]^*$ поля $K(x)^*$. Если $\overline{a}(x) \in K[x]^*$, то коэффициент при x^0 в выражении $\overline{a}(x)$ будет обозначаться через $\overline{a}(0)$. Очевидно, что $\overline{a}(0) \neq 0$ в том и только в том случае, когда $O(\overline{a}(x)) = 0$.

3.2. Алгебраическая замкнутость $K(x)^*$. Основная теорема о параметризациях алгебраических кривых может быть сформулирована так:

Теорема 3.1. *Поле $K(x)^*$ алгебраически замкнуто.*

Доказательство. Мы хотим показать, что если $f(x, y)$ — элемент кольца $K(x)^*[y]$, не принадлежащий $K(x)^*$, то найдется такой $\overline{y} \in K(x)^*$, что $f(x, \overline{y}) = 0$. Чтобы сделать понятной конструкцию такого элемента $\overline{y}$, рассмотрим сначала необходимые условия, которым должен удовлетворять корень $\overline{y}$ уравнения $f(x, y) = 0$.

Пусть $f(x, \overline{y}) = 0$, где $\overline{y} \in K(x)^*$ и

$$f(x, y) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 y + \ldots + \overline{a}_n y^n. \tag{3.1}$$

Здесь $\overline{a}_i \in K(x)^*$, $\overline{a}_n \neq 0$, $n > 0$. Если $O(\overline{a}_i) = \alpha_i < \infty$, то мы положим $\overline{a}_i = a_i x^{\alpha_i} + \ldots$. Элемент $\overline{y}$ может быть нулем, если $\overline{a}_0 = 0$. Ограничимся рассмотрением случая $\overline{y} \neq 0$. Элемент $\overline{y}$, отличный от нуля, можно записать в виде

$$\overline{y} = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_1 + \gamma_2} + c_3 x^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} + \ldots, \tag{3.2}$$

где $c_i \neq 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$, ... Коэффициентов c_i может быть конечное или бесконечное множество. Запишем это выражение короче, $\overline{y} = x^\gamma (c + \overline{y}_1)$, где положено $\gamma = \gamma_1$, $c = c_1$, $\overline{y}_1 = c_2 x^{\gamma_2} + \ldots$ Тогда

$$f(x, \overline{y}) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1 x^\gamma (c + \overline{y}_1) + \ldots + \overline{a}_n x^{n\gamma} (c + \overline{y}_1)^n =$$
$$= \overline{a}_0 + c\overline{a}_1 x^\gamma + \ldots + c^n \overline{a}_n x^{n\gamma} + g(x, \overline{y}_1),$$

где g содержит все члены, заключающие $\overline{y}_1$. Ввиду того что $O(\overline{y}_1) = \gamma_2 > 0$, каждый член, включенный в g, имеет порядок, больший порядка одного из $c^i \overline{a}_i x^{i\gamma}$. Так как для выполнения равенства $f(x, \overline{y}) = 0$ необходимо, чтобы члены низшего порядка взаимно уничтожались, должны удовлетворяться следующие условия:

1) Хотя бы два из выражений $c^i \bar{a}_i x^{i\gamma}$ имеют один и тот же порядок, не превышающий порядка любого другого из этих выражений. Другими словами, найдутся по меньшей мере два такие значения j, k, что

$$O(c^j \bar{a}_j x^{j\gamma}) = O(c^k \bar{a}_k x^{k\gamma}) \leqslant O(c^i \bar{a}_i x^{i\gamma}), \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

или

$$\alpha_j + j\gamma = \alpha_k + k\gamma \leqslant \alpha_i + i\gamma, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

2) Коэффициенты членов наименьшего порядка должны уничтожиться, т. е.

$$\sum a_h c^h = 0, \tag{3.4}$$

где суммирование распространяется на все значения h, при которых $\alpha_h + h\gamma = \alpha_j + j\gamma$.

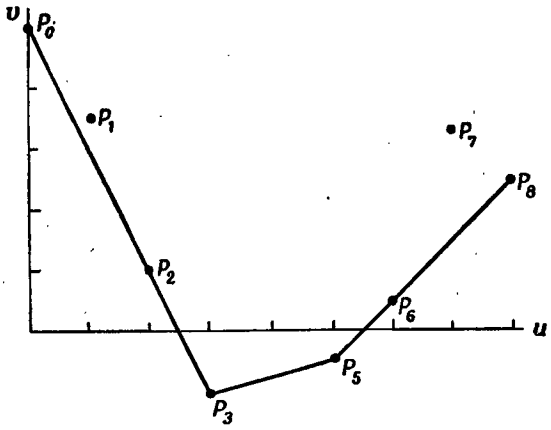

Рис. 12.

Для определения возможных значений γ, удовлетворяющих условиям (3.3), можно воспользоваться так называемым многоугольником Ньютона. В некоторой декартовой координатной системе нанесем точки P_i с координатами $u = i$, $v = \alpha_i$. (Если $\alpha_i = \infty$, то точка P_i пропускается.) В таком случае условие (3.3) означает, что найдется такое число β, что все точки P_i лежат на прямой L, $v + \gamma u = \beta$ или выше нее, причем хотя бы две из P_i лежат на L. Таким образом, если мы соединим P_0 с P_n выпуклой ломаной линией с вершинами в некоторых из точек P_i и такой, что ни одна из точек P_i не лежит ниже нее, то звенья этой ломаной будут давать все возможные положения прямой L.

На рис. 12 показан многоугольник Ньютона для уравнения, в котором $n = 8$, $\alpha_0 = 5$, $\alpha_1 = 7/2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = \infty$,

$\alpha_5 = -{}^1/_2$, $\alpha_6 = {}^1/_2$, $\alpha_7 = {}^{10}/_3$, $\alpha_8 = {}^5/_2$. (Если $\bar{a}_0 = \ldots = \bar{a}_{e-1} = 0$, $\bar{a}_e \neq 0$, так что многочлен f имеет нулевые корни, то мы можем начать многоугольник от точки P_l вместо P_0.) Возможные значения γ определяются наклонами звеньев многоугольника Ньютона. При заданном значении γ, а следовательно — при заданной прямой L, значения c должны удовлетворять условию (3.4), где точки P_h берутся на L.

Этим установлены необходимые условия, которым должны удовлетворять γ_1 и c_1 в выражении (3.2). Чтобы установить аналогичные условия для γ_2 и c_2, положим

$$f_1(x, y_1) = x^{-\beta} f(x, x^{\gamma_1}(c_1 + y_1))$$

и рассмотрим корень $\bar{y}_1$ многочлена $f_1(x, y_1)$. (Множитель $x^{-\beta}$ в определении f_1 может быть отброшен, но он упрощает некоторые из дальнейших рассмотрений.) При этом можно воспользоваться теми же соображениями. Нужно только учитывать, что должно быть $\gamma_2 > 0$, и потому следует рассматривать лишь те звенья многоугольника, которые имеют отрицательный наклон. Процесс может быть продолжен неограниченно и дает необходимые условия для всех γ_i и c_i.

Теперь мы сможем доказать теорему 3.1, показав, что тот же процесс может быть проведен для любого многочлена вида (3.1) с целью построения одного из корней уравнения $f(x, y) = 0$. Нужно доказать три положения: 1) что на каждой стадии процесса уравнение (3.4) имеет ненулевое решение (если корень еще не получен); 2) что, начиная со второго этапа, многоугольник Ньютона имеет хотя бы одну сторону с отрицательным наклоном и 3) что, начиная с некоторого этапа, все γ_i имеют один и тот же знаменатель.

Первое из этих положений следует из алгебраической замкнутости поля K, так как уравнение $\sum a_h c^h = 0$, содержащее хотя бы два члена, обязательно имеет хотя бы один отличный от нуля корень. Для доказательства остальных положений нужно более основательно изучить многоугольник Ньютона.

Заметим прежде всего, что найдется такое значение m, что все $\bar{a}_i \in K(x^{1/m})'$. (Ведь каждый a_i является элементом некоторого $K(x^{1/m_i})'$, $i = 0, \ldots, n$.) Поэтому $\alpha_i = m_i/m$, $i = 0, \ldots, n$, m_i — целые. Если P_j и P_k будут левой и правой вершинами звена L $(v + \gamma_1 u = \beta_1)$ многоугольника Ньютона, то

$$\alpha_j + j\gamma_1 = \alpha_k + k\gamma_1$$

или

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_j - \alpha_k}{k - j} = \frac{m_j - m_k}{m(k - j)} = \frac{p}{mq},$$

где $q > 0$, q и p — целые числа, не имеющие общих множителей. Если точка P_h также лежит на L, то будет

$$\frac{p}{mq} = \gamma_1 = \frac{\alpha_j - \alpha_h}{h - j} = \frac{m_j - m_h}{m(h-j)}.$$

Следовательно,

$$q(m_j - m_h) = p(h - j).$$

Но так как p и q взаимно просты, то q должен быть делителем $h - j$. Таким образом, для каждой точки P_h на прямой L будет $h = j + sq$, где s — неотрицательное целое число. Поэтому уравнение (3.4) будет иметь вид

$$c^j \varphi(c^q) = 0,$$

где $\varphi(z)$ — многочлен степени $k - j/q$, для которого $\varphi(0) \neq 0$. Если значение $c_1 \neq 0$ является r-кратным корнем многочлена $\varphi(z^q)$, $r \geqslant 1$, то будет

$$\varphi(z^q) = (z - c_1)^r \psi(z), \qquad \psi(c_1) \neq 0.$$

В таком случае

$$\begin{aligned} f_1(x, y_1) &= x^{-\beta_1} f(x, x^{\gamma_1}(c_1 + y_1)) = \\ &= x^{-\beta_1}[\bar{a}_0 + \bar{a}_1 x^{\gamma_1}(c_1 + y_1) + \ldots + \bar{a}_n x^{n\gamma_1}(c_1 + y_1)^n] = \\ &= x^{-\beta_1} \sum \bar{a}_h x^{h\gamma_1}(c_1 + y_1)^h + x^{-\beta_1} \sum a_l x^{l\gamma_1}(c_1 + y_1)^l, \end{aligned}$$

где h пробегает те из значений i, для которых точки P_i лежат на прямой L, а l пробегает остальные значения i. Так как $\bar{a}_h = a_h x^{\alpha_h} + \ldots$, то

$$\begin{aligned} f_1(x, y_1) &= x^{-\beta_1} \sum a_h x^{\alpha_h + h\gamma_1}(c_1 + y_1)^h + \\ &+ x^{-\beta_1}\left[\sum (\bar{a}_h - a_h x^{\alpha_h}) x^{h\gamma_1}(c_1 + y_1)^h + \sum \bar{a}_l x^{l\gamma_1}(c_1 + y_1)^l\right]. \end{aligned}$$

В силу соотношений $\alpha_h + h\gamma_1 = \beta_1$, первая сумма приводится к

$$x^{\beta_1}(c_1 + y_1)^j \varphi((c_1 + y_1)^q) = x^{\beta_1} y_1^r (c_1 + y_1)^j \psi(c_1 + y_1),$$

но, в силу неравенств $O(\bar{a}_h - a_h x^{\alpha_h}) > \alpha_h$, $O(\bar{a}_l x^{l\alpha_1}) > \beta_1$, мы получаем

$$f_1(x, y_1) = b_1 y_1^r + b_2 y_1^{r+1} + \ldots + g(x, y_1),$$

где $b_1 = c_1^j \psi(c_1) \neq 0$ и каждая степень y_1 в $g(x, y_1)$ имеет коэффициент положительного порядка. Поэтому если мы запишем

$$f(x, y_1) = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 y_1 + \ldots + \bar{b}_n y_1^n,$$

то

$$\begin{aligned} &O(\bar{b}_i) \geqslant 0, && i = 0, \ldots, n, \\ &O(\bar{b}_i) > 0, && i = 0, \ldots, r-1, \\ &O(\bar{b}_r) = 0. \end{aligned}$$

Выполняя следующий шаг, в котором $y_1 = x^{\gamma_2}(c_2 + y_2)$, нужно учитывать лишь положительные значения γ_2. Их можно получить, рассматривая часть P_0P_r многоугольника Ньютона для $f_1(x, y_1)$ (рис. 13). Выбор хотя бы одного значения γ_2 возможен всегда, кроме случая, в котором $\bar{b}_0 = , \ldots , = \bar{b}_{r-1} = 0$. В этом исключительном случае имеется корень $\bar{y}_1 = 0$ и потому можно взять $y = c_1x^{\gamma_1}$. В остальных случаях процесс можно продолжить.

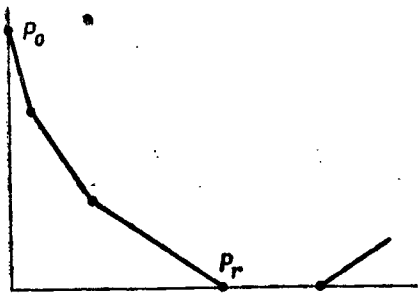

Рис. 13.

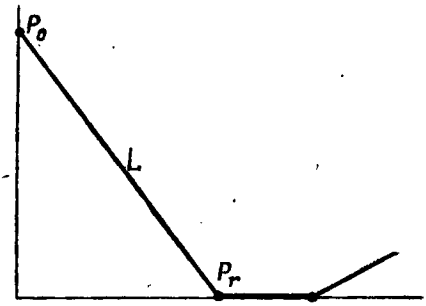

Рис. 14.

Осталось лишь показать, что последовательные значения γ имеют ограниченные знаменатели, т. е. что, начиная с некоторого шага, все значения q равны единице. Ввиду того что r самое большее равен $k - j$, т. е. длине горизонтальной проекции выбранного звена многоугольника Ньютона, и ввиду того что звено, выбираемое на следующем этапе процесса, должно иметь длину, не превосходящую r, число r не может расти от шага к шагу. Поэтому после конечного числа шагов для r устанавливается постоянное значение r_0. В таком случае многоугольник Ньютона принимает вид, изображенный на рис. 14. При этом

$$\varphi(z^q) = d(z - c)^{r_0} = dz^{r_0} - \ldots \mp r_0 dc^{r_0 - 1} z \pm dc^{r_0}.$$

Но так как поле K имеет характеристику нуль и так как каждое из значений r_0, d, c отлично от нуля, то

$$r_0 dc^{r_0 - 1} \neq 0,$$

и поэтому $q = 1$. Этим доказательство закончено.

3.3. Замечания и примеры. Приведенное доказательство теоремы 3.1 не является самым коротким из возможных (см., например, уже цитированную книгу ван-дер-Вардена, Введение в алгебраическую геометрию, теорема 14), но оно дает наиболее удобный способ построения корней заданного уравнения.

Если K — поле комплексных чисел и если степенные ряды $\bar{a}_i$ сходятся в некоторой области $|x| < \varepsilon$, то можно показать, что

каждый корень $\bar{y}$ уравнения $f(x, y)=0$ будет рядом, также сходящимся в некоторой области. В этом случае можно получить чрезвычайно короткое доказательство теоремы 3.1, если использовать аналитическое продолжение[1]. Но такое доказательство также нельзя приспособить для действительного вычисления степенных рядов.

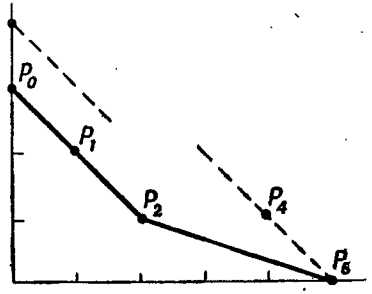

Рис. 15.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$f(x, y)=(-x^3+x^4)-$$
$$-2x^2y-xy^2+2xy^4+y^5=0.$$

Многоугольник Ньютона (рис. 15) состоит из двух отрезков. Для отрезка P_0P_2 мы имеем

$$p=1, \quad q=1, \quad \gamma_1=1, \quad \beta_1=3.$$

Уравнение (3.4) обращается в $-1-2c-c^2=0$, так что $\varphi(c)=-(1+c)^2$. Следовательно, $c_1=-1$. Поэтому

$$f_1(x, y_1)=x^{-3}f(x, x(-1+y_1))=$$
$$=(x+x^2)-3x^2y_1+(-1+2x^2)y_1^2+2x^2y_1^3-3x^2y_1^4+x^2y_1^5.$$

Замечание. Подстановка в $f(x, y)$ выражения $x(-1+y_1)$ вместо y может быть упрощена следующим образом. На диаграмме Ньютона отметим точки, соответствующие всем членам $f(x, y)$, и проведем через них прямые (пунктир на рис. 15), параллельные P_0P_2. Если объединить члены $f(x, y)$ в группы по линиям, содержащим соответствующие этим членам точки, то алгебраические выкладки станут несколько проще. В нашем примере мы имеем

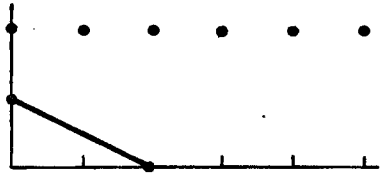
Рис. 16.

$$f(x, y)=(-x^3-2x^2y-xy^2)+x^4+(2xy^4+y^5)=$$
$$=x(x+y)^2+x^4+y^4(2x+y).$$

Ввиду того что $x+x(-1+y_1)=xy_1$, будет

$$x^3f_1(x, y_1)=-x^3y_1^2+x^4+x^4(-1+y_1)^4(x+xy_1).$$

Многоугольник Ньютона для f_1 показан на рис. 16. Он состоит лишь из одного отрезка, для которого $p=1$, $q=2$, $\gamma_2={}^1/_2$,

[1] См., например, А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, ГТТИ, 1950, гл. 8. (*Прим. перев.*)

$\beta_2 = 1$, $\varphi(c^2) = 1 - c^2$, и поэтому $c_2 = \pm 1$. Возьмем $c_2 = 1$. Тогда

$$f_2(x, y_2) = x^{-1} f_1(x, x^{1/2}(1 + y_2)) =$$
$$= (x - 3x^{3/2} + \ldots) + (-2 - 3x^{3/2} + \ldots) y_2 +$$
$$+ (-1 + 2x^3 + \ldots) y_2^2 + \ldots$$

Теперь $r = r_0 = 1$ и, следовательно, мы можем быть уверены, что $\bar{y}_2$ будет рядом по степеням $x^{1/2}$. Поэтому можно не пользоваться методом многоугольника Ньютона, а подставить в $f_2(x, y_2)$ вместо y_2 ряд

$$c_3 x^{1/2} + c_4 x + c_5 x^{3/2} + \ldots$$

и определить коэффициенты c так, чтобы было $f_2(x, \bar{y}_2) = 0$. Мы получим

$$f_2(x, c_3 x^{1/2} + c_4 x + \ldots) =$$
$$= (x - 3x^{3/2} + \ldots) + (-2 - 3x^{3/2} + \ldots)(c_3 x^{1/2} + c_4 x + \ldots) +$$
$$+ (-1 + 2x^2 + \ldots)(c_3 x^{1/2} + c_4 x + \ldots)^2 + \ldots =$$
$$= -2c_3 x^{1/2} + (-2c_4 + 1 - c_3^2) x + (-2c_5 - 3 - 2c_3 c_4) x^{3/2} + \ldots$$

Отсюда следует, что

$$c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{2}, \quad c_5 = -\frac{3}{2}, \ldots$$

и, таким образом, одним из корней уравнения $f(x, y) = 0$ будет

$$x[-1 + x^{1/2}(1 + {}^1/_2 x - {}^3/_2 x^{3/2} + \ldots)] =$$
$$= -x + x^{3/2} + {}^1/_2 x^{5/2} - {}^3/_2 x^3 + \ldots$$

Подобным же образом, выбирая $c_2 = -1$, получим корень

$$-x - x^{3/2} - \frac{1}{2} x^{5/2} + \frac{3}{2} x^3 + \ldots$$

Рассмотрим теперь отрезок P_2P_5 на рис. 15. Здесь будет $p = 1$, $q = 3$, $\gamma_1 = {}^1/_3$, $\beta_1 = {}^5/_3$. Уравнение (3.4) принимает вид $-c^2 + c^5 = 0$ и поэтому $\varphi(c^3) = -1 + c^3$. Отсюда следует, что c может иметь одно из значений $1, \omega, \omega^2$, где ω — корень уравнения $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Беря, например, $c_1 = \omega$, получим

$$f_1(x, y_1) = x^{-5/3} f(x, x^{1/3}(\omega + y_1)) =$$
$$= (-x^{4/3} + x^{7/3}) + (3\omega + 6x^{2/3}) y_1 + (9 + 12\omega^2 x^{2/3}) y_1^2 +$$
$$+ (10\omega^2 + 8\omega x^{2/3}) y_1^3 + (5\omega + 2x^{2/3}) y_1^4 + y_1^5.$$

Здесь мы вновь встречаемся со случаем, когда $r = 1$ и поэтому y может быть выражен рядом по степеням $x^{1/3}$, коэффициенты которого можно определить подстановкой.

Приведенный пример показывает, что вычисление корня упрощается, как только r принимает постоянное значение r_0. Если $r_0 = 1$, то легко обнаружить, достигнуто ли это состояние. В слу-

чае же, когда $r_0 > 1$, мы не имеем способа определить, будет ли уменьшаться в дальнейшем значение r. Однако *случай* $r_0 > 1$ *может иметь место только тогда, когда многочлен* $f(x, y)$ *имеет кратный корень*. Для доказательства этого положим $f(x, \bar{y}) = 0$, где

$$\bar{y} = c_1 x^{\gamma_1} + c_2 x^{\gamma_1 + \gamma_2} + \ldots, \qquad \gamma_i = p_i/m.$$

Значения β даются формулой $\beta_i = v + u\gamma_i$, в которой (u, v) — любая точка на прямой L. Так как точка $(r_0, 0)$ лежит на L, мы имеем $\beta_i = r_0\gamma_i = r_0 p_i/m$. Положив $t = x^{1/m}$, получим

$$f(t^m, t^{p_1}(c_1 + y_1)) = t^{r_0 p_1} f_1(t^m, y_1),$$
$$f_1(t^m, t^{p_2}(c_2 + y_2)) = t^{r_0 p_2} f_2(t^m, y_2) \text{ и т. д.}$$

Следовательно,

$$f(t^m, c_1 t^{p_1} + c_2 t^{p_1+p_2} + \ldots + t^{p_1 + \cdots + p_s} y_s) = \\ = t^{r_0(p_1 + \cdots + p_s)} f_s(t^m, y_s).$$

Дифференцируя это равенство относительно y_s, получаем

$$f'(t^m, c_1 t^{p_1} + \ldots + t^{p_1 + \cdots + p_s} y_s) = t^{(r_0 - 1)(p_1 + \cdots + p_s)} f'_s(t^m, y_s),$$

где $f'(x, y)$ — производная от $f(x, y)$ по y. Ввиду того что $p_i \geqslant 1$, будем иметь

$$f(t^m, c_1 t^{p_1} + \ldots + t^{p_1 + \cdots + p_s} y_s) \equiv 0 \pmod{t^s}$$

и, если $r_0 > 1$, также

$$f'(t^m, c_1 t^{p_1} + \ldots + t^{p_1 + \cdots + p_s} y_s) \equiv 0 \pmod{t^s}.$$

Пусть теперь $D(x)$ — дискриминант многочлена $f(x, y)$ относительно y. Тогда, по теореме I — 9.6,

$$D(x) = A(x, y) f(x, y) + B(x, y) f'(x, y).$$

Замена x на t^m и y на

$$c_1 t^{p_1} + \ldots + t^{p_1 + \cdots + p_s} y_s$$

дает, в силу предыдущих замечаний,

$$D(t^m) \equiv 0 \pmod{t^s}.$$

Но так как это верно для любого s, должно быть $D(t^m) = 0$, т. е. $D(x) = 0$ и $f(x, y)$ должен иметь кратный корень.

Кратные корни могут быть обнаружены по обращению в нуль дискриминанта и вычислены, если они имеются, с помощью общего наибольшего делителя f и f'. Поэтому при вычислении корней всегда можно обойти случай $r_0 > 1$.

3.4. Уточнения основной теоремы. Следующие четыре теоремы являются простыми уточнениями теоремы 3.1. Во всех теоремах положено

$$f(x, y) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 y + \ldots + \bar{a}_n y^n, \quad \bar{a}_i \in K(x)^*, \quad \bar{a}_n \neq 0.$$

Теорема 3.2. *Существует однозначно определенная система элементов* $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ *из* $K(x)^*$ *для которой*

$$f(x, y) = \bar{a}_n \Pi (y - \bar{y}_j).$$

Это — теорема I — 7.5, в которой $D = K(x)^*$.

Теорема 3.3. *Если* $O(\bar{a}_n) \leqslant O(\bar{a}_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, *то элементы* $\bar{y}_i$, *указанные в теореме* 3.2, *будут элементами* $K[x]^*$.

Теорема 3.4. *Если* $O(\bar{a}_n) = 0$, $O(\bar{a}_0) > 0$, $O(\bar{a}_i) \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, *то хотя бы для одного* $\bar{y}_j$ *будет* $O(\bar{y}_j) > 0$.

Теорема 3.5. *Если многочлен* $f(x, y) \in K[x, y]$ *не имеет множителей, свободных от* y, *то он имеет кратные множители в* $K[x, y]$ *тогда и только тогда, когда уравнение* $f(x, y) = 0$ *имеет кратный корень в* $K(x)^*$.

Это следует из теоремы I — 9.5.

3.5. Упражнения. 1. Найти по четыре первых неисчезающих члена каждого из корней следующих уравнений:

а) $x^4 - x^3 y + 3x^2 y^3 - 3xy^5 + y^7 = 0,$

б) $2x^5 - x^3 y + 2x^2 y^2 - xy^3 + 2y^5 = 0,$

в) $(x^2 + 4x^3 + 6x^4) - 4x^4 y + (-2x - 4x^2 - 2x^3) y^2 + y^4 = 0.$

2. Если в теореме 3.4 число k будет последним, для которого $O(\bar{a}_k) = 0$, то ровно k из корней $\bar{y}_j$ имеют положительный порядок.

§ 4. ВЕТВИ КРИВОЙ

4.1. Ветвь с заданным центром. Связь между корнями уравнения $f(x, y) = 0$ и ветвями кривой f определяется следующей теоремой:

Теорема 4.1. *Если* $f(x, y) \in K[x, y]$, *то каждому корню* $\bar{y} \in K(x)^*$ *уравнения* $f(x, y) = 0$, *для которого* $O(\bar{y}) > 0$, *соответствует однозначно определенная ветвь кривой* $f(x, y) = 0$ *с центром в начале координат. Обратно, каждой ветви* $(\bar{x}, \bar{y})$ *кривой* f *с центром в начале соответствует* $O(\bar{x})$ *корней уравнения* $f(x, y) = 0$, *каждый из которых имеет положительный порядок.*

Доказательство. Пусть $f(x, \bar{y}) = 0$, $O(\bar{y}) > 0$. Пусть n — наименьшее целое число, для которого $y \in K(x^{1/n})^*$. Тогда, пола-

гая $x^{1/n}=t$, мы получим параметризацию $(t^n, \bar{y})$ кривой f с центром в начале. Эта параметризация, в силу теоремы 2.1, неприводима. Наоборот, если $(\bar{x}, \bar{y})$ — неприводимая параметризация f, для которой $O(\bar{x})=n>0$; $O(\bar{y})>0$, то, по теореме 2.2, существует эквивалентная параметризация вида

$$(t^n, a_1t^{n_1}+a_2t^{n_2}+\ldots), \qquad a_i\neq 0. \tag{4.1}$$

Другая такая параметризация может отличаться от написанной только появлением εt вместо t, где $\varepsilon^n=1$. Таких значений ε существует n. Нам нужно показать только, что все они дают различные корни уравнения $f(x, y)=0$. Значениями y, соответствующими ε_1 и ε_2, будут

$$a_1\varepsilon_1^{n_1}t^{n_1}+a_2\varepsilon_1^{n_2}t^{n_2}+\ldots$$

и

$$a_1\varepsilon_2^{n_1}t^{n_1}+a_2\varepsilon_2^{n_2}t^{n_2}+\ldots$$

Предположим, что они совпадают, т. е. что

$$a_i\varepsilon_1^{n_i}=a_i\varepsilon_2^{n_i}, \qquad i=1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

Так как числа n, n_1, ... не имеют общих им всем множителей, больших единицы (по теореме 2.1), то можно найти такие целые числа α, α_1, ..., α_m, что

$$\alpha_1n_1+\alpha_2n_2+\ldots+\alpha_mn_m+\alpha n=1$$

(I—6.3, упражнение 1). Записывая 4.2 в виде

$$\varepsilon_1^{n_i}=\varepsilon_2^{n_i}, \qquad i=1, 2, \ldots, m,$$

и учитывая соотношения

$$\varepsilon_1^n=\varepsilon_2^n=1,$$

получим с помощью возведения в степени и перемножения, что

$$\varepsilon_1^{\alpha_1n_1+\ldots+\alpha_mn_m+\alpha n}=\varepsilon_2^{\alpha_1n_1+\ldots+\alpha_mn_m+\alpha n},$$

т. е. что $\varepsilon_1=\varepsilon_2$. Следовательно, существует n различных параметризаций, подобных (4.1), каждая из которых определяет некоторый корень

$$a_1x^{n_1/n}+a_2x^{n_2/n}+\ldots$$

уравнения

$$f(x, y)=0.$$

Теперь мы в состоянии доказать теорему 2.3. Пусть P — любая точка кривой C. Можно предполагать, что система коор-

динат выбрана таким образом, что точка P лежит в начале и что кривая не проходит через бесконечно удаленную точку оси y. В таком случае

$$f(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + \ldots + y^n, \quad a_0(0) = 0.$$

В силу теоремы 3.4, существует корень $\bar{y}$ уравнения $f(x, y) = 0$, имеющий положительный порядок. В силу теоремы 4.1 этот корень определяет ветвь кривой с центром в точке P.

Обратно, каждая ветвь кривой f с центром в P определяет по меньшей мере один корень уравнения $f(x, y) = 0$. Следовательно, таких ветвей будет самое большее n.

4.2. Случай кратных компонент. Для дальнейшего изложения удобно установить следующее соглашение о ветвях кривой с кратными компонентами. Мы уже видели (теорема 3.5), что если C — такая кривая, то ее уравнение $f(x, y) = 0$ имеет кратный корень $\bar{y}$, и обратно. Соответствие между ветвями кривой и корнями уравнения, описанное в теореме 4.1, мы обобщим теперь в том смысле, что каждой ветви, соответствующей кратному корню, будем приписывать кратность, равную кратности этого корня. Таким образом, каждая ветвь r-кратной компоненты кривой C будет считаться r ветвями кривой C.

4.3. Упражнения. Для каждой из кривых упражнения 1 п. 3.5 определить число ветвей с центром в начале и написать параметризации этих ветвей.

§ 5. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВЫХ

5.1. Порядок многочлена на ветви. С помощью понятия ветви кривой и ее параметризаций можно дать такое определение кратности точки пересечения двух кривых, что общее число точек пересечения двух любых кривых порядков m и n будет точно равно mn. Это определение представляет собой обобщение соответствующего определения кратности пересечения кривой с прямой линией (см. III — 2.1). Уравнения III — 3.1 можно рассматривать как параметризацию прямой L с центром в (a, b), а кратность пересечения L с C оказывается просто числом $O(f(a + \lambda t, b + \mu t))$. Прежде чем переходить к более общему случаю, сделаем несколько предварительных замечаний.

Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ — ветвь P рассматриваемой кривой с конечным центром, а $g(x, y)$ — произвольный многочлен. Порядком многочлена $g(x, y)$ на ветви P мы будем называть порядок степенного ряда $g(\bar{x}, \bar{y})$. Из теоремы 1.5, 1 следует, что порядок $g(\bar{x}, \bar{y})$ зависит только от ветви P, а не от выбора параметризации.

Порядок многочлена g на ветви P будем обозначать через $O_P(g)$. Очевидно, что

$$O_P(gh) = O_P(g) + O_P(h),$$
$$O_P(g \pm h) \geqslant \min[O_P(g),\ O_P(h)].$$

Если мы произведем преобразование координат и сделаем соответствующее преобразование многочлена g, то порядок g на P не изменится. Это означает, что в действительности порядок g на ветви P указывает на некоторое соотношение не только между многочленом g и параметризацией, но и между *ветвью* P и *кривой* $g=0$. Таким образом, любое понятие, определенное с помощью многочлена на ветви, является геометрическим понятием, не зависящим от координатной системы.

Подобным же образом, если $(\bar{x})$ — параметризация ветви P в проективных координатах, для которой все $O(\bar{x}_i) \geqslant 0$ и хотя бы одно из значений $O(\bar{x}_i) = 0$, и если $G(x)$ — любой однородный многочлен от x_0, x_1, x_2, то мы можем определить порядок $O_P(G)$ многочлена G, как порядок ряда $G(\bar{x})$. Порядок $O_P(G)$ также не зависит от параметризации. Более того, если P имеет конечный центр в аффинной плоскости и если g — неоднородный многочлен, соответствующий G, то $O_P(g) = O_P(G)$.

5.2. Пересечение кривых. Теорема Безу. Определение кратности точки пересечения двух кривых основывается на следующей теореме:

Теорема 5.1. *Если $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$ — кривые, имеющие общую точку p*[1]*, то сумма порядков многочлена f на ветвях кривой g с центрами в p равна сумме порядков многочлена g на ветвях кривой f с тем же центром.*

Доказательство. Выберем оси координат так, чтобы точка p лежала в начале и чтобы бесконечно удаленная точка оси y не лежала ни на одной из кривых f и g. В таком случае коэффициенты старших степеней y в f и g могут быть сделаны равными единице и, на основании теоремы 3.2, мы имеем

$$f(x, y) = \prod_1^m (y - \bar{y}_i), \quad g(x, y) = \prod_1^n (y - \bar{z}_j),$$

где $\bar{y}_i$, $\bar{z}_j \in K[x^{1/m}]'$ при некотором m. Пусть корень $\bar{y}_i$ соответствует ветви $P = (t^r, \sum b_i t^i)$ с центром в начале. Тогда

$$g\left(t^r, \sum b_i t^i\right) = at^N + \ldots, \qquad a \neq 0, \tag{5.1}$$

[1]) Начиная с этого места точки будут иногда обозначаться малыми буквами, соответствующими заглавным буквам, обозначающим ветви. (*Прим. перев.*)

где $O_P(g)=N$. Если $O_P(g)=\infty$, то ряд $at^N+\ldots$ обращается в 0. Ветвь P имеет эквивалентную параметризацию $(t^r, \sum b_i\varepsilon_\lambda^i t^i)$, в которой ε_λ — любой корень r-й степени из единицы. Каждая такая параметризация порождает свой корень $\overline{y}_\lambda$ многочлена $f(x, y)$. Из (5.1) мы получаем

$$g(x, \overline{y}_1)=ax^{N/r}+\ldots$$

и подобным же образом

$$g(x, \overline{y}_\lambda)=a\varepsilon_\lambda^N x^{N/r}+\ldots.$$

Следовательно,

$$\prod_1^r g(x, \overline{y}_\lambda)=bx^N+\ldots, \qquad b\neq 0.$$

Применяя те же самые рассуждения к каждой ветви кривой f с центром в начале, находим, что

$$O\Big(\prod_\alpha g(x, \overline{y}_\alpha)\Big)=\sum O_P(g),$$

где произведение распространено на все значения α, для которых корни $\overline{y}_\alpha$ уравнения $f(x, y)=0$ имеют положительный порядок (теорема 4.1), а сумма — на все ветви кривой $f=0$ с центром в начале.

Пусть теперь $\overline{z}_\beta$ — корни уравнения $g(x, z)=0$, имеющие положительный порядок, а $\overline{z}_{\beta'}$ — корни порядка нуль. Тогда

$$\prod_\alpha g(x, \overline{y}_\alpha)=\prod_{\alpha,\beta}(\overline{y}_\alpha-\overline{z}_\beta)\prod_{\alpha,\beta'}(\overline{y}_\alpha-\overline{z}_{\beta'})=\prod_{\alpha,\beta}(\overline{y}_\alpha-\overline{z}_\beta)h(x),$$

где $O(h)=0$. Отсюда следует, что

$$\sum O_P(g)=O\Big(\prod_{\alpha,\beta}(\overline{y}_\alpha-\overline{z}_\beta)\Big)=O\Big(\prod_{\beta,\alpha}(\overline{z}_\beta-\overline{y}_\alpha)\Big)=\sum O_Q(f),$$

где последняя сумма распространена на все ветви Q кривой g, имеющие центр в начале. Последнее равенство получается, если переменить ролями f и g в предыдущих рассуждениях. Этим доказательство теоремы закончено.

Назовем число $\sum O_P(g)=\sum O_Q(f)$ *кратностью пересечения* кривых f и g в точке p. Как уже отмечалось, такое определение дает одно и то же число во всех координатных системах. Обратим внимание на то, что кратность пересечения может быть и бесконечной.

Следующее вспомогательное предложение связывает кратность пересечения с результантом:

Теорема 5.2. *Пусть кривые $f(x, y)=0$ и $g(x, y)=0$ не имеют точек пересечения на оси y, кроме, быть может, пересечения в начале. Если $R(x)$ — результант f и g относительно y, то уравнение $R(x)=0$ имеет нуль своим корнем кратности, равной кратности пересечения кривых $f=0$ и $g=0$ в начале координат.*

Доказательство. Положим

$$f=\prod_{\alpha}(y-\bar{y}_{\alpha})\prod_{\alpha'}(y-\bar{y}_{\alpha'}),$$

$$g=\prod_{\beta}(y-\bar{z}_{\beta})\prod_{\beta'}(y-\bar{z}_{\beta'}),$$

где

$$O(\bar{y}_{\alpha})>0,\ O(\bar{z}_{\beta})>0,\ O(\bar{y}_{\alpha'})=O(\bar{z}_{\beta'})=0.$$

В силу теоремы I — 10.10, имеем

$$R(x)=\prod_{\alpha,\beta}(\bar{y}_{\alpha}-\bar{z}_{\beta})\prod_{\alpha',\beta}(\bar{y}_{\alpha'}-\bar{z}_{\beta})\prod_{\alpha,\beta'}(\bar{y}_{\alpha}-\bar{z}_{\beta'})\prod_{\alpha',\beta'}(\bar{y}_{\alpha'}-\bar{z}_{\beta'}).$$

Очевидно, что

$$O\Big(\prod_{\alpha',\beta}(\bar{y}_{\alpha'}-\bar{z}_{\beta})\Big)=O\Big(\prod_{\alpha,\beta'}(\bar{y}_{\alpha}-z_{\beta'})\Big)=0.$$

Кроме того,

$$O\Big(\prod_{\alpha',\beta'}(\bar{y}_{\alpha'}-\bar{z}_{\beta'})\Big)=0,$$

так как если $O(\bar{y}_{\alpha'}-\bar{z}_{\beta'})>0$ при некоторых α', β', то ряды $\bar{y}_{\alpha'}$ и $\bar{z}_{\beta'}$ должны начинаться с одной и той же константы a. Соответствующие ветви имели бы тогда один и тот же центр $(0, a)$ на оси y, вопреки предположению, что кривые f и g не имеют точек пересечения на оси y, кроме начала. Отсюда следует, что

$$O(R(x))=O\Big(\prod_{\alpha,\beta}(\bar{y}_{\alpha}-\bar{z}_{\beta})\Big)=\text{кратности пересечения в начале}$$

координат, и теорема доказана.

Предлагаем читателю в качестве задачи произвести в предыдущем доказательстве необходимые изменения, чтобы получить

Теорему 5.3. *Если бесконечно удаленная точка оси y не лежит ни на одной из кривых f, g, то кратность любого корня a уравнения $R(x)=0$ равна сумме кратностей пересечений кривых $f=0$ и $g=0$ на прямой $x=a$.*

Теперь мы в состоянии доказать теорему Безу для плоских кривых в усиленной форме:

Теорема 5.4. *Две плоские кривые порядков m и n, не имеющие общих компонент, имеют точно mn точек пересечения* (с учетом кратностей).

Доказательство. Мы уже знаем (теорема III — 3.1), что такие кривые имеют самое большее mn различных точек пересечения. Выберем проективные координаты так, чтобы ни одна из них не лежала на прямой $x_0=0$ и чтобы точка $(0, 0, 1)$ не лежала ни на одной из кривых. Тогда уравнения кривых будут иметь вид

$$F=a_0x_2^m+a_1x_2^{m-1}+\ldots+a_m=0,$$

$$G=b_0x_2^n+b_1x_2^{n-1}+\ldots+b_n=0,$$

где a_i, b_i — однородные многочлены степени i от x_0, x_1. Так как многочлены F и G не имеют общих делителей, их результант $R(x_0, x_1)$ относительно x_2 не равен нулю и поэтому будет однородным многочленом степени mn (теорема I — 10.9). Если бы было $R(0, 1)=0$, то нашлось бы такое значение a, что точка $(0, 1, a)$ была бы общей точкой кривых F и G. Но это исключено выбором прямой $x_0=0$. Таким образом, $R(0, 1)\neq 0$, и поэтому многочлен $R(1, x)$ также должен иметь степень mn. Перейдя к аффинным координатам и применив теорему 5.3, получим требуемый результат.

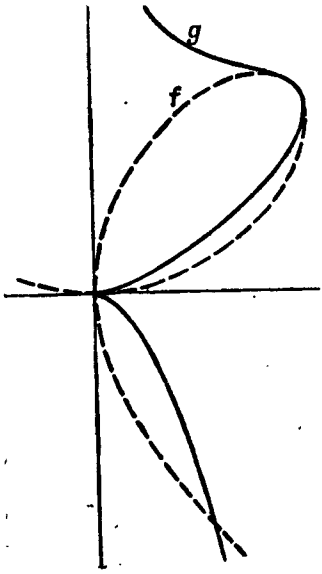

Рис. 17.

Пример. Пусть

$$f=x^3+y^3-2xy,$$
$$g=2x^3-4x^2y+3xy^2+y^3-2y^2.$$

Результант относительно y будет

$$R(x)=x^5(x-1)^3(7x-4),$$

и мы находим, что точками пересечения являются $(0, 0)$, $(1, 1)$ и $(^4/_7, -^8/_7)$ (рис. 17). Рассмотрим сначала пересечение в точке $(0, 0)$. Кривая g имеет только одну ветвь с этим центром, именно $P=(t^2, t^3+\ldots)$. Поэтому

$$f(t^2, t^3+\ldots)=-2t^5+\ldots,$$

и, следовательно, $O_P(f)=5$. С другой стороны, кривая f имеет две ветви с центром в $(0, 0)$, а именно

$$P_1=\left(t, \frac{1}{2}t^2+\ldots\right) \text{ и } P_2=\left(\frac{1}{2}t^2+\ldots, t\right).$$

Имеем

$$g\left(t, \frac{1}{2}t^2+\ldots\right)=2t^3+\ldots$$

$$g\left(\frac{1}{2}t^2+\ldots, t\right)=2t^2+\ldots$$

и поэтому $O_P(f)=O_{P_1}(g)+O_{P_2}(g)$. В точке $(1,1)$ обе кривые f и g имеют по одной ветви, причем порядок каждого многочлена на ветви другой кривой равен 3. Подобным же образом находим, что оба порядка, соответствующие точке $(^4/_7, -^8/_7)$, равны 1.

Следующие две теоремы являются полезными следствиями теоремы Безу:

Теорема 5.5. *Если $F(x)$ и $G(x)$ имеют степени m и n, то сумма порядков многочлена G на всех ветвях кривой F равна mn.*

Теорема 5.6. *Если $G(x)$ имеет бесконечный порядок на некоторой ветви кривой $F(x)=0$, то $F(x)$ и $G(x)$ имеют нетривиальный общий делитель.*

5.3. Касательная, порядок и класс ветви кривой. Мы закончим исследование пересечений кривых, установив связь введенных понятий с понятиями, рассмотренными в § III—2. Прежде всего докажем следующее вспомогательное предложение:

Теорема 5.7. *Если P — ветвь с центром p, то среди всех прямых $L=0$, проходящих через p, существует единственная прямая L_0, для которой $O_P(L_0)>\min O_P(L)$.*

Доказательство. Пусть

$$\bar{x}=\sum a_i t^i, \quad \bar{y}=\sum b_i t^i$$

— параметризация ветви P. Так как прямая L проходит через точку p, будем иметь $L=a(x-a_0)+b(y-b_0)$ и $L(\bar{x}, \bar{y})=\sum_1^\infty (aa_i+bb_i)t^i$. Если теперь r — наименьшее положительное число, для которого хотя бы один из коэффициентов a_r, b_r отличен от нуля, то $O_P(L)$ будет равно r в том и только в том случае, если $aa_r+bb_r\neq 0$. С другой стороны, если $aa_r+bb_r=0$, то $O_P(L)>r$. Таким образом, условие $aa_r+bb_r=0$ определяет единственную прямую L_0, для которой рассматриваемый порядок будет больше его минимального значения.

Положительное число $r=\min O_P(L)$, где L — любая прямая, проходящая через центр ветви P, называется *порядком* ветви. Ветвь называется линейной, если она имеет порядок, равный единице. Единственная прямая L_0, для которой $O_P(L_0)>r$, назы-

вается *касательной к ветви* P. Положительное число $s = O_P(L_0) - r$ называется *классом ветви* P. Класс может быть бесконечным, но это будет только в том случае, когда P является ветвью прямой линии.

Пример. Ветвь $(t^2, t^3 + \ldots)$ имеет порядок 2 и класс 1. Эти значения являются характерными для простого острия (см. пример 3, III—2.4 и пример 4, III—7.6). Когтеобразное острие $(t^2, t^4 + t^5 + \ldots)$ примера 5, III—2.4 имеет порядок 2 и класс 2.

Соответствие между введенными здесь понятиями и понятиями, введенными в § III—2, определяется следующей

Теоремой 5.8. 1). *Если p есть r-кратная точка кривой F, то сумма порядков ветвей F, имеющих p своим центром, равна r.*

2) *Точка кривой F будет простой тогда и только тогда, когда она является центром единственной ветви F, притом — линейной.*

3) *Касательные к кривой F в точке p являются касательными к ветвям F, имеющим точку p своим центром и обратно.*

Доказательство. 1) Прямая, не являющаяся касательной ни к одной ветви кривой F с центром в p, будет иметь с F $\sum r_i$-кратное пересечение в точке p, где r_i — порядки ветвей F с центром p. Но все прямые, проходящие через r-кратную точку F, кроме конечного числа, имеют с F r-кратное пересечение в точке p. Следовательно, $\sum r_i = r$.

2) Следует непосредственно из утверждения 1.

3) Прямая будет касательной к F в точке p тогда и только тогда, когда она имеет с F более чем r-кратное пересечение в этой точке. С другой стороны, прямая будет касательной к одной из ветвей кривой F с центром в p тогда и только тогда, когда она имеет с F более чем $\sum r_i$-кратное пересечение. Но так как $\sum r_i = r$, оба эти условия выполняются всегда одновременно.

Полезным применением этих результатов является

Теорема 5.9. *Если P — ветвь порядка r и если кривая G имеет s-кратную точку в центре p ветви P, то $O_P(G) \geqslant rs$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда касательная к ветви P не будет касательной к кривой G в точке p.*

Доказательство. Выберем аффинные координаты с началом в точке p так, чтобы ось y не была ни касательной к ветви P, ни касательной к кривой G в точке p. В таком случае ветвь P и ветви Q_α кривой G с центрами в точке p будут иметь параметризации вида

$$P: \ \bar{x} = t^r, \quad \bar{y} = at^r + \ldots,$$

$$Q_\alpha: \ \bar{x}_\alpha = t^{r_\alpha}, \quad \bar{y}_\alpha = a_\alpha t^{r_\alpha} + \ldots,$$

где $\sum r_\alpha = s$. Соответствующие дробно-степенные ряды будут

$$P: \quad \overline{y}_\lambda = ax + \ldots, \ \lambda = 1, \ \ldots, \ r,$$

$$Q_\alpha: \quad \overline{z}_{\alpha\mu} = a_\alpha x + \ldots, \ \mu = 1, \ \ldots, \ r_\alpha.$$

Отсюда, как и в доказательстве теоремы 5.2, получается

$$\prod_\lambda g(x, \overline{y}_\lambda) = \prod_{\lambda, \alpha, \mu} (\overline{y}_\lambda - \overline{z}_{\alpha\mu})(b + \ldots) =$$

$$= \prod_{\lambda, \alpha, \mu} ((a - a_\alpha) x + \ldots) \cdot (b + \ldots) =$$

$$= \Big(\prod_\alpha (a - a_\alpha)^{rr_\alpha} x^{rs} + \ldots \Big) (b + \ldots),$$

где $b \neq 0$. Из этого видно, что $O_P(G) \geqslant rs$ и что равенство будет иметь место тогда и только тогда, когда коэффициент a отличен от всех a_α, т. е. тогда и только тогда, когда касательная к P не будет касательной к G в точке p.

Одно из следствий этой теоремы уже упоминалось выше (III — 7.7).

Теорема 5.10. *Если p является r-кратной точкой кривой F и s-кратной точкой кривой G, то кривые F и G имеют в точке p не менее чем rs-кратное пересечение. Пересечение будет точно rs-кратным в том и только в том случае, если ни одна из касательных к F в точке p не будет касательной к G в той же точке.*

Нам понадобится в дальнейшем еще такое следствие из теоремы 5.9:

Теорема 5.11. *Если p — обыкновенная r-кратная точка кривой F, являющаяся центром ветвей $P_1, \ldots, P_r$, и если при любом i будет $O_{P_i}(G) \geqslant s \leqslant r$, то точка p является не менее чем s-кратной точкой кривой G.*

Доказательство. Если кратность точки p кривой G равна $s' < s$, то, по теореме 5.9, касательная к ветви P_i должна быть касательной к кривой G в точке p. Но так как p есть обыкновенная r-кратная точка кривой F, то число различных таких касательных будет r. Это приводит к противоречию, так как кривая G может иметь в точке p самое большее $s' < s \leqslant r$ различных касательных. Тем самым теорема доказана.

5.4. Упражнения. 1. Для каждой из следующих пар кривых определить кратности всех точек пересечения, применяя для проверки теорему Безу (часто выгодно применить теорему 5.10):

а) $(x^2 - y)^2 - x^5 = 0,$

$$x^4 + x^3 y - y^2 = 0$$

(ср. с упражнением 4, III—7.8);

б) $y^4 - y^2 + x^4 = 0,$

$$y^4 - 2y^3 + (1-x)y^2 - 2x^2y + x^4 = 0.$$

2. Кратность пересечения двух ветвей $(a+t^r,\ b+a_1t+a_2t^2+\ldots)$ и $(a+t^s,\ b+b_1t+b_2t^2+\ldots)$ с общим центром, по определению, равна порядку произведения $\prod\limits_{\alpha,\beta} (\bar{y}_\alpha - \bar{z}_\beta)$, где

$$\bar{y}_\alpha = \sum a_i \varepsilon_\alpha^i x^{i/r}, \qquad \varepsilon_\alpha^r = 1, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, r,$$
$$\bar{z}_\beta = \sum b_i \eta_\beta^i x^{i/s}, \qquad \eta_\beta^s = 1, \quad \beta = 1, 2, \ldots, s.$$

Если две ветви имеют различные центры, то кратность их пересечения считается равной нулю. Доказать следующие утверждения:

1) Кратность пересечения двух ветвей с общим центром, имеющих порядки r и s, будет $\geqslant rs$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда ветви имеют различные касательные.

2) Порядок многочлена G на ветви P равен суммарной кратности пересечения ветви P со всеми ветвями кривой G.

3) Кратность пересечения кривых F и G в точке p равна сумме кратностей попарных пересечений ветвей кривой F с ветвями кривой G, имеющими центр в p.

4) Если кривые порядков m и n не имеют общих компонент, то сумма кратностей попарных пересечений их ветвей равна mn.

3. Доказать, что точка самокасания (пример 4, III—2.4) является центром двух линейных ветвей с двукратным пересечением.

4. Проверить утверждение 3 упражнения 2 для кривых упражнения 1.

5. Доказать, что две различные неприводимые кривые не могут иметь общих ветвей.

§ 6. ФОРМУЛЫ ПЛЮККЕРА

6.1. Класс кривой. Пусть $F(x) = 0$ — кривая порядка n в проективной плоскости, не имеющая кратных компонент, и пусть q — точка, не лежащая на этой кривой. Предположим, что точка q лежит на m прямых, касательных к F и таких, что каждая из них касается F в единственной простой точке, не являющейся точкой перегиба. В таком случае число m называется *классом* кривой F.

Для оправдания этого определения необходимо показать, что для любой кривой F существуют точки, подобные точке q, и что две такие точки дают одно и то же значение m. Хотя это и

может быть сделано без больших затруднений, еще проще и более поучительно так изменить определение, чтобы освободиться от ограничений, налагаемых на касательные, введя понятие кратности касательной.

Пусть точка q с координатами (q_0, q_1, q_2) лежит на касательной к кривой F с точкой касания в неособой точке p. Необходимым и достаточным условием для этого будет равенство $\sum q_i F_i(p) = 0$, где $F_i(x) = \partial F/\partial x_i$ (теорема III—2.5). Другой формулировкой того же самого является условие, что $\sum q_i F_i(x)$ имеет положительный порядок на ветви кривой F с центром в p. Это обстоятельство приводит к мысли исследовать порядок выражения $\sum q_i F_i$ на любой ветви P кривой F.

Покажем прежде всего, что $O_P(\sum q_i F_i)$ не зависит от выбора координатной системы. Пусть $P = (\bar{x})$. Если произвести преобразование координат по формулам II—(1.1), то точка (q) будет иметь новые координаты (r), а ветвь P (точнее — ее параметризация) — новые координаты $(\bar{y})$, причем

$$q_i = \sum_j A_i^j r_j, \qquad \bar{x}_i = \sum_j A_i^j \bar{y}_j.$$

Многочлен $F(x)$ обратится при этом в $G(y) = F\left(\sum_j A_i^j y_j\right)$.

Отсюда

$$G_j(y) = \sum_i \left[F_i\left(\sum_j A_i^j y_j\right)_{\overline{\partial y_j}} \sum_j A_i^j y_j\right] = \sum_i F_i\left(\sum_j A_i^j y_j\right) A_i^j,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} O_P\left(\sum_j r_j G_j\right) &= O\left(\sum_j r_j G_j(\bar{y})\right) = \\ &= O\left(\sum_j r_j \sum_i F_i\left(\sum_j A_i^j \bar{y}_j\right) A_i^j\right) = \\ &= O\left(\sum_i \left(\sum_j A_i^j r_j\right) F_i\left(\sum_j A_i^j \bar{y}_j\right)\right) = \\ &= O\left(\sum_i q_i F_i(\bar{x})\right) = \\ &= O_P\left(\sum_i q_i F_i\right). \end{aligned}$$

Пусть теперь P — произвольная ветвь кривой F с центром p. По теореме 2.2 можно выбрать координаты и параметризацию

так, чтобы было

$$\bar{x}_0 = 1, \quad \bar{x}_1 = t^r, \quad \bar{x}_2 = t^{r+s} + \ldots, \tag{6.1}$$

где r, $s \geqslant 1$, если только P не будет ветвью прямолинейной компоненты F. Мы освободимся от этого исключения, введя требование, что F вообще не имеет прямолинейных компонент. Здесь r и s соответственно порядок и класс ветви P, прямая $x_2 = 0$ — касательная к P. В силу теоремы Эйлера (I — 10.2) будет

$$\sum \bar{x}_i F_i(\bar{x}) = nF(\bar{x}) = 0.$$

Дифференцируя соотношение $F(\bar{x}) = 0$, получаем

$$\sum \bar{x}_i' F_i(\bar{x}) = 0.$$

Подставив в эти два равенства значения $\bar{x}_i$ и $\bar{x}_i'$ из (6.1), будем иметь

$$F_0(\bar{x}) = F_2(\bar{x})\,[(s/r)\,t^{s+r} + \ldots],$$
$$F_1(\bar{x}) = F_2(\bar{x})\,[-(1 + s/r)\,t^s + \ldots].$$

Обозначим теперь $O(F_2(\bar{x}))$ через $\delta(P)$. Тогда

$$O_P(\sum q_i F_i) = \delta(P) + \varepsilon(P),$$

где

$\varepsilon(P) = 0$, если q не лежит на касательной к P,

$\varepsilon(P) = s$, если q лежит на касательной к P, но не совпадает с p.

$\varepsilon(P) = s + r$, если q совпадает с p.

Назовем $\varepsilon(P)$ *числом касательных* или *кратностью касательной* из точки q к ветви P. Общим числом m касательных из точки q к кривой F будем называть сумму $\sum\limits_P \varepsilon(P)$, распространенную на все ветви кривой F.

Легко усмотреть, что

$$\sum_P O_P(q_i F_i) = n(n-1).$$

Поэтому будем иметь

$$\sum_P \delta(P) + \sum_P \varepsilon(P) = n(n-1)$$

или

$$m = n(n-1) - \sum_P \delta(P). \tag{6.2}$$

Число $\delta(P)$, которое определено с помощью координатной системы, в действительности не зависит от ее выбора. В самом деле, это же число можно определить как минимальное значение $O_P(\sum q_i F_i)$ при произвольном выборе точки q. Но мы уже доказали, что выражение $O_P(\sum q_i F_i)$ вообще не зависит от координатной системы и обращается в выражение $\delta(P)$, если взяты координаты, в которых имеют место формулы (6.1). Отсюда следует, что $\sum\limits_P \delta(P)$ зависит только от кривой F, а не от точки q. Поэтому равенство (6.2) означает, что общее число касательных из точки q к кривой F, считаемых с надлежащими кратностями, не зависит от положения точки q. Кроме того, если выполнены указанные в начале этого пункта условия, то каждая касательная будет иметь кратность 1. Следовательно, m есть класс кривой F.

6.2. Точки перегиба. В п. III—6.3 было показано, что точки перегиба кривой F являются ее неособыми точками пересечения с кривой

$$H(x) = |F_{ij}| = \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_j} \right| = 0.$$

Пусть P — ветвь кривой F с центром в простой точке. В таком случае в параметризации (6.1) будет $r = 1$. Перейдем к аффинным координатам, в которых параметризация (6.1) обращается в параметризацию

$$\bar{x} = t, \quad \bar{y} = t^{s+1} + \ldots \tag{6.3}$$

с центром в начале. При этом $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ и хотя бы одно из значений $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ отлично от нуля. Легко показать, что при этих условиях многочлен $f(x, y)$ должен иметь вид

$$f(x, y) = y - x^{s+1} + g(x, y), \tag{6.4}$$

где $g(x, y)$ не содержит членов вида ay.

По теореме Эйлера

$$x_0 F_{0i} = (n-1) F_i - x_1 F_{1i} - x_2 F_{2i},$$
$$x_0 F_0 = nF - x_1 F_1 - x_2 F_2.$$

Подстановка этих значений приводит выражение H к виду

$$H(x) = \begin{vmatrix} \frac{n}{n-1} F & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \cdot \frac{(n-1)^2}{x_0^2}.$$

Следовательно, в аффинных координатах, с точностью до постоянного множителя, будет

$$h(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{n}{n-1} f & f_x & f_y \\ f_x & f_{xx} & f_{xy} \\ f_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}.$$

Используя выражение (6.4) для f и подставляя (6.3), получаем

$$h(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{vmatrix} 0 & -(s+1)t^s + \bar{g}_x & 1 + \bar{g}_y \\ -(s+1)t^s + \bar{g}_x & -s(s+1)t^{s-1} + \bar{g}_{xx} & \bar{g}_{xy} \\ 1 + \bar{g}_y & \bar{g}_{yx} & \bar{g}_{yy} \end{vmatrix},$$

где буквы с черточками наверху означают результаты подстановки $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в соответствующие многочлены.

Из (6.4) мы имеем $t^{s+1} + \ldots - t^{s+1} + g(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, так что $O(g(\bar{x}, \bar{y})) \geqslant s+2$. Двукратное дифференцирование относительно t дает

$$O[\bar{g}_x + \bar{g}_y((s+1)t^s + \ldots)] \geqslant s+1,$$

$$O[\bar{g}_{xx} + 2\bar{g}_{xy}((s+1)t^s + \ldots) + g_{yy}((s+1)t^s + \ldots) + \\ + \bar{g}_y(s(s+1)t^{s-1} + \ldots)] \geqslant s.$$

Из условия относительно g следует, что $O(\bar{g}_y) \geqslant 1$. Поэтому приведенные выше соотношения дают $O(\bar{g}_x) \geqslant s+1$, $O(\bar{g}_{xx}) \geqslant s$. Отсюда следует, что выражение $h(\bar{x}, \bar{y}) = s(s+1)t^{s-1} + \ldots$ имеет порядок $s-1$.

Одним из следствий полученного результата является то, что любая общая компонента кривых f и h будет прямой линией. Действительно, если P — неособая ветвь такой компоненты, то $O_P(h) = \infty$. Но $O_P(h) = s-1$, и поэтому $s = \infty$. Другими словами, в этом случае P есть ветвь прямой линии. Но так как в п. 6.1 мы условились рассматривать кривые без прямолинейных компонент, то в нашем случае кривые f и h вообще не будут иметь общих компонент.

Ветвь P будет иметь центр в точке перегиба тогда и только тогда, когда $s \geqslant 2$, т. е. тогда и только тогда, когда $O_P(h) > 0$. Таким образом, мы получили второе доказательство теоремы III — 6.3. Однако мы можем сделать больше. Назовем число $s-1$ *кратностью перегиба* на ветви P. Если мы обозначим через i общее число перегибов, считаемых в соответствии с их

кратностями, то в силу того, что многочлен H имеет степень $3(n-2)$, будем иметь

$$i = 3n(n-2) - \sum_{\alpha} O_{P_\alpha}(H), \tag{6.5}$$

где P_α — ветви кривой F, имеющие центры в особых точках.

6.3. Формулы Плюккера. Равенства (6.2) и (6.5) являются обобщенными первыми двумя формулами Плюккера. Другие две формулы будут получены после введения понятия дуальной кривой и рассматриваются в § V—8. Обычный вид формул Плюккера относится к кривым, не имеющим других особенностей, кроме простых самопересечений и точек заострения. Простая точка самопересечения является центром двух ветвей кривой F, каждая из которых имеет порядок 1 и класс 1, причем эти ветви имеют различные касательные. Острие является центром единственной ветви порядка 2 и класса 1. Для получения формул Плюккера нужно просто вычислить значения $\delta(P)$ и $O_P(H)$ в этих двух случаях. (Очевидно, что $\delta(P)=0$, если точка p простая.)

1) Пусть P — ветвь с центром в обыкновенной двойной точке. Выбирая надлежащую координатную систему, мы будем иметь параметризацию

$$\bar{x} = t, \quad \bar{y} = t^2 + \ldots$$

При этом $f = xy + g$, где каждый член g будет степени, не меньшей трех. Прямым вычислением находим, что

$$\delta(P) = 1, \quad O_P(h) = 3.$$

2) Подобным же образом для острия будет

$$\bar{x} = t^2, \quad \bar{y} = t^3 + \ldots,$$
$$f = y^2 - x^3 + yg + k,$$

где g — одвородный многочлен степени 2 и каждый член k имеет степень, не меньшую четырех. Тогда

$$\delta(P) = 3, \quad O_P(h) = 8.$$

Обозначив число двойных точек через δ, и число острий через $\varkappa$, получим

$$\begin{aligned} m &= n(n-1) - 2\delta - 3\varkappa, \\ i &= 3n(n-2) - 6\delta - 8\varkappa. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Это и есть формула Плюккера.

Подобные же выражения могут быть получены при рассмотрении особенностей более общего вида.

6.4. Упражнения. 1. Неприводимая кривая третьего порядка не может иметь других особенностей, кроме обыкновенной двойной точки или острия. Ее точки перегиба имеют кратность 1. Поэтому существует ровно три типа неприводимых кривых третьего порядка, для которых соответственно $m=6$, 4, 3 и $i=9$, 3, 1.

2. Существует десять типов неприводимых кривых четвертого порядка, не имеющих других особенностей, кроме обыкновенных двойных точек и острий. Вычислить класс и число точек перегиба кривых каждого из этих типов.

3. Шесть точек касания касательных к неособой кривой третьего порядка, проведенных из внешней точки, лежат на кривой второго порядка.

4. Если центр линейной ветви класса s считать точкой перегиба кратности $s-1$ (на этой ветви), то формулы Плюккера будут иметь место и в случае наличия двойных точек, являющихся центрами двух любых линейных ветвей с различными касательными.

5. При определении кратности точки перегиба, приведенном выше, формулы Плюккера можно применять и для кривых, имеющих острия и точки любой кратности с различными касательными, если только каждую такую точку кратности r считать за $r(r-1)/2$ двойных точек.

§ 7. ТЕОРЕМА НЁТЕРА

7.1. Теорема Нётера. Очень полезная теорема относительно пересечений кривых была доказана М. Нётером. Эта теорема гласит, что если три кривые F, G и H удовлетворяют некоторым условиям в точках их пересечения, то найдутся такие однородные многочлены A и B, что $H=AG+BF$. Теорема допускает различные формулировки, в зависимости от ограничений, налагаемых на особые точки кривых F и G. Мы докажем эту теорему в форме, наиболее удобной для наших дальнейших целей.

Докажем прежде всего такое вспомогательное предложение:

Теорема 7.1. *Пусть F не имеет множителей, содержащих только x_0 и x_1, и пусть $R(x_0, x_1)=UG+VF$ — результант F и G относительно x_2. Если существует такой однородный многочлен Q, что многочлен $T=UH-QF$ делится на R, то H может быть выражен в виде $AG+BF$.*

Доказательство. Пусть $T=AR$. Имеем

$$RH=UHG+VHF=QGF+TG+VHF=ARG+(QG+VH)F.$$

Отсюда следует, что $R\,|\,(QG+VH)F$. Но так как F не имеет множителей, содержащих только x_0 и x_1, должно быть $QG+VH=BR$. В таком случае $H=AG+BF$.

Теперь мы в состоянии доказать теорему Нётера в следующей форме:

Теорема 7.2. *Пусть G и F не имеют общих множителей и пусть каждая ветвь P_i кривой F, в которой $O_{P_i}(G) > 0$, имеет своим центром обыкновенную r_i-кратную точку кривой F. Если для каждой из этих точек выполнено условие*

$$O_{P_i}(H) \geqslant O_{P_i}(G) + r_i - 1,$$

то $H = AG + BF$.

Доказательство. Так как условия и утверждения теоремы не зависят от системы координат, эту систему можно выбрать произвольно. Поэтому точку (0, 0, 1) можно считать не лежащей на кривой F, а также на прямых, принадлежащих следующим конечным множествам: 1) множеству прямых, попарно соединяющих точки пересечения кривых F и G; 2) множеству касательных к кривой F в точках ее пересечения с кривой G; 3) множеству касательных к F, проведенных *из* этих точек пересечения; 4) множеству прямых, соединяющих точки пересечения F и G с кратными точками кривой F. Ввиду того что при наших предположениях коэффициентом старшей степени x_2 в многочлене F будет константа, многочлен UH можно поделить на F с остатком и получить соотношение $UH = QF + T$, где степень T относительно x_2 не больше $n-1$ (n есть степень F).

Пусть (a) — r-кратная точка кривой F, являющаяся центром ветвей $P_1, \ldots, P_r$, и пусть

$$O_{P_i}(G) = \sigma_i > 0, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Положим $\sigma = \sum \sigma_i$. Так как, в силу условия 1, никакая другая точка пересечения F и G не лежит на прямой $L = a_1x_0 - a_0x_1$, то R будет делиться точно на степень L^σ. Если мы сможем показать, что T также делится на L^σ, то теорема будет доказана, ибо те же рассуждения применимы к любому множителю R. Предположим поэтому, что $T = L^\rho T_1$, где $\rho < \sigma$ и $L \nmid T_1$. Из равенства $T = UH - QF$ имеем

$$O_{P_i}(T) = O_{P_i}(U) + O_{P_i}(H) \geqslant O_{P_i}(U) + O_{P_i}(G) + r_i - 1,$$

а из $R = UG + VF$ следует, что

$$O_{P_i}(U) + O_{P_i}(G) = O_{P_i}(R) = \sigma,$$

так как $O_{P_i}(L) = 1$ в силу условия 2. Следовательно,

$$O_{P_i}(T_1) = O_{P_i}(T) - \rho = \sigma - \rho + r - 1 \geqslant r.$$

Из теоремы 5.11 следует теперь, что (a) есть, по меньшей мере, r-кратная точка кривой T_1, а поэтому уравнение $T_1(a_0, a_1, x_2) = 0$ имеет значение $x_2 = a_2$ своим корнем, кратность которого не меньше r.

Пусть (a_0, a_1, b_j) — другая точка пересечения L с F. В силу условий 2, 3 и 4, таких точек пересечения будет $n-r$ и каждая из них будет центром ветви P_j кривой F. Все эти ветви имеют порядок 1. Ввиду сказанного, будет

$$O_{P_j}(L)=1, \quad O_{P_j}(G)=0, \quad O_{P_j}(R)=\sigma$$

и, как и выше,

$$O_{P_j}(U)=O_{P_j}(R)=\sigma,$$

$$O_{P_j}(T_1)=O_{P_j}(T)-\rho=\sigma+O_{P_j}(H)-\rho\geqslant 1.$$

Поэтому кривая $T_1=0$ должна проходить через все указанные точки, т. е. уравнение $T_1(a_0, a_1, x_2)=0$ имеет корни $b_1, \ldots, b_{n-r}$. Вместе с r-кратным корнем a_2 это дает n корней уравнения $T_1(a_0, a_1, x_2)=0$. Но так как степень этого уравнения не превышает $n-1$, оно должно быть тождеством. Отсюда следует, что L есть делитель T_1, вопреки предположению. Тем самым теорема доказана.

Из рассмотрения степеней многочленов, участвовавших в предыдущих рассуждениях, мы усматриваем, что

$$\deg A=\deg H-\deg G,$$

$$\deg B=\deg H-\deg F.$$

Кроме того,

$$O_{P_i}(A)+O_{P_i}(G)=O_{P_i}(H)\geqslant O_{P_i}(G)+r_i-1,$$

так что

$$O_{P_i}(A)\geqslant r_i-1.$$

Из теоремы 5.11 следует, что кривая A имеет в центре ветви P_i точку, кратность которой не меньше r_i-1.

7.2. Приложения. Одним из простых и интересных применений теоремы Нётера является следующее обобщение теоремы III — 6.2:

Теорема 7.3. *Если девять точек пересечения кривых третьего порядка F и G являются простыми точками F, то каждая кривая третьего порядка, проходящая через 8 из этих точек, проходит и через девятую.*

Это утверждение нужно толковать так: пусть P_i — ветви кривой F, для которых $O_{P_i}(G)=n_i>0$. Тогда если H — любая кривая третьего порядка, о которой известно, что $O_{P_i}(H)\geqslant n_i$, для каждой из P_i, кроме одной, например P_1, для которой $O_{P_1}(H)\geqslant n_1-1$, то будет $O_{P_i}(H)\geqslant n_1$.

Доказательство. Пусть L — прямая, проходящая через центр ветви P_1 и пересекающая F в двух других различных точках a и b, не лежащих на G. Тогда $O_{P_i}(LH)\geqslant n_i$ при лю-

бом i, и поэтому теорема 7.2 может быть применена к кривым F, G и LH. Она дает

$$LH = AG + BF.$$

Здесь оба многочлена L и F обращаются в нуль в точках a и b, а так как при этом G не обращается в нуль, то A должен также обращаться в нуль в этих точках. В силу того, что многочлен A линеен, он отличается от L только постоянным множителем. Следовательно,

$$LH = cLG + BF,$$

и поэтому $L \mid BF$. Но так как $L \nmid F$, мы должны иметь $B = dL$ и получаем, таким образом,

$$H = cG + dF,$$

откуда требуемое следует непосредственно.

Если выбрать G специальным образом, то можно получить несколько интересных следствий.

Теорема 7.4. *Если прямая пересекает кривую третьего порядка F в трех различных точках p_i, то касательные, проведенные к кривой F в точках p_i, пересекают F в трех других точках, лежащих на одной прямой.*

Доказательство. Возьмем в качестве F данную кривую, в качестве G — произведение трех касательных, а в качестве H — квадрат первоначальной кривой, умноженный на прямую, соединяющую две из упомянутых точек пересечения данной кривой с касательными. Тогда $H = AG + BF$ и требуемое следует непосредственно.

Прямая, соединяющая упомянутые точки пересечения касательных, называется *сателлитом* данной прямой.

В случае, если прямая теоремы 7.4 проходит через две точки перегиба, будем иметь

Теорему 7.5. *Прямая, соединяющая две точки перегиба кривой третьего порядка, проходит через третью точку перегиба.*

Теорема 7.6. *Если кривая второго порядка касается кривой третьего порядка F в трех различных точках p_i, то касательные к F, проведенные в точках p_i, пересекают F в трех других точках, лежащих на одной прямой.*

Применением теоремы Нётера легко доказывается следующее обобщение теоремы III — 4.1:

Теорема 7.7. *Если mn точек пересечения кривых G_m и F_n являются простыми точками кривой F и если кривая G_r, $r < m$, пересекает F в rn из этих точек, то существует кривая G_{m-r}, пересекающая F в остальных $(m-r)n$ точках.*

Доказательство. Так как все точки пересечения являются простыми точками F, теорема 7.2 может быть применена

к кривым F, G_r и G_m. Она дает

$$G_m = A_{m-r} G_r + BF.$$

Отсюда непосредственно следует, что кривая $G_{m-r} = A_{m-r} = 0$ имеет нужное свойство.

Теоремы 7.4, 7.5 и 7.6, как и их различные обобщения, непосредственно следуют из этой теоремы.

Ни одно из приведенных следствий теоремы 7.2 не использует всех ее возможностей, так как во всех приведенных случаях обходятся особенности кривой F. Действительное значение теоремы 7.2 заключается в ее применениях к теории линейных рядов (гл. VI).

7.3. Упражнения. 1. Обобщить теорему 7.4 на любые прямые.

2. Если кривая второго порядка касается кривой третьего порядка в трех различных точках, то прямые, попарно соединяющие эти точки касания, пересекают кривую в трех других точках, лежащих на одной прямой.

3. Пусть даны две неособые точки неприводимой кривой третьего порядка. Указать, как построить кривую второго порядка, касающуюся кривой третьего порядка в этих точках и еще в одной точке.

4. Неособая точка кривой третьего порядка, не являющаяся точкой перегиба, называется *шестеричной* точкой, если некоторая кривая второго порядка может иметь с данной кривой шестикратное пересечение в этой точке. Доказать, что шестеричные точки являются точками касания касательных, проведенных к кривой третьего порядка из ее точек перегиба. Таких точек будет 27, 3 или 0, смотря по тому, будет ли кривая третьего порядка неособенной, иметь точку самопересечения или острие.

5. Касательные к кривой третьего порядка в шести ее точках пересечения с кривой второго порядка пересекают кривую третьего порядка в шести других точках, снова лежащих на некоторой кривой второго порядка. Обобщить.

6. Прямая, пересекающая кривую третьего порядка и класса m в трех различных точках, ни одна из которых не будет точкой перегиба, является сателлитом $(m-2)^2$ различных прямых. Если $m=6$, то 16 полученных прямых проходят по четыре через 12 точек, из которых на каждой прямой лежат по три точки. (См. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 108, 1891 г., где подробно рассматривается эта конфигурация.) Исследовать конфигурацию, получаемую в случае, если данная прямая будет касательной к кривой третьего порядка.

Относительно других применений теорем 7.3 и 7.7 см. книгу Хилтона, Плоские алгебраические кривые, гл. 12 (Hilton H., Plane algebraic curves, Oxford, 1920).

Глава V

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРИВЫХ

Понятие преобразования играет важную роль во всех областях геометрии. В этой главе мы рассмотрим в порядке возрастающей общности три типа преобразований: бирациональные, рациональные и алгебраические. Применение преобразований позволяет так обобщить определение алгебраической кривой, чтобы включить в рассмотрение геометрические места в пространствах большей размерности, чем плоскость.

Прежде чем переходить к изучению преобразований, оказывается полезным ознакомиться с некоторыми дальнейшими свойствами колец и полей.

§ 1. ИДЕАЛЫ

1.1. Идеалы в кольце. В любом коммутативном кольце R важную роль играют некоторые его подкольца. Подкольцо I кольца R называется *идеалом* в R, если для любого элемента $a \in I$ и любого элемента $b \in R$ произведение $ab \in I$.

Следующие примеры иллюстрируют это определение:

1. R — кольцо целых чисел; I — множество четных чисел.
2. $R = D[x, y]$; I — множество всех таких $f(x, y) \in R$, что $f(0,0) = 0$.
3. $R = D[x]'$; I — множество всех таких $f(x) \in R$, что $0(f) \geqslant m$.
4. R — любая область целостности; I — множество всех элементов из R, кратных фиксированному элементу a.
5. R — любое коммутативное кольцо; I состоит из единственного элемента — нулевого элемента кольца R.
6. R — любое коммутативное кольцо; $I = R$.

В случае примера 4 идеал называется главным идеалом; говорят, что он порождается элементом a. Пример 2 показывает, что не все идеалы являются главными.

Важная роль идеалов в значительной мере обусловлена следующим их свойством:

Теорема 1.1. *Если I — идеал коммутативного кольца R, то соотношение $a \sim b$, определяемое условием $b - a \in I$, является соотношением эквивалентности, сохраняющимся при сложении и умножении.*

Доказательство. Действительно, если $a - b \in I$, то будет также $b - a = -(a - b) \in I$; если, кроме того, $b - c \in I$, то $a - c =$

$=(a-b)+(b-c)\in I$. Другими словами, соотношение $\sim$ есть соотношение эквивалентности. Пусть теперь $a_1\sim a_2$, $b_1\sim b_2$. Тогда

$$(a_1\pm b_1)-(a_2\pm b_2)=(a_1-a_2)\pm(b_1-b_2)\in I,$$

и поэтому $a_1\pm b_1\sim a_2\pm b_2$. Кроме того,

$$a_1b_1-a_2b_2=a_1(b_1-b_2)-b_2(a_1-a_2)\in I,$$

так как $b_1-b_2\in I$ и $a_1-a_2\in I$. Следовательно, $a_1b_1\sim a_2b_2$.

Обозначим через I_a класс эквивалентности, содержащий элемент a. Определим сумму и произведение двух таких классов условиями

$$I_a+I_b=I_{a+b},\quad I_aI_b=I_{ab}.$$

Так как эквивалентность сохраняется при сложении и умножении, то сумма и произведение классов однозначно определены. Легко проверить, что совокупность всех классов образует коммутативное кольцо с классом $I_0=I$ в качестве нулевого элемента. Это кольцо называется *кольцом вычетов* (или *фактор-кольцом*) кольца R по идеалу I и обозначается через R/I.

Пример. Пусть R есть совокупность всех целых чисел и I — главный идеал, порождаемый числом m. В таком случае вместо обозначения $a\sim b$ можно применять обычное обозначение теории чисел $a\equiv b \pmod m$. Мы видим, таким образом, что свойства вычетов по модулю m являются свойствами кольца R/I.

Связь между кольцами R и R/I выражается

Теоремой 1.2. *Соответствие между a и I_a является гомоморфным отображением кольца R в кольцо R/I, где I состоит из всех элементов R, переводящихся в нуль при этом отображении. Обратно, если задано гомоморфное отображение кольца R в некоторое кольцо R', при котором каждый элемент из R' является образом некоторого элемента из R, то совокупность элементов, отображающихся в нуль, является идеалом I кольца R и кольцо R/I изоморфно R'.*

Доказательство. Первая часть теоремы непосредственно следует из определения кольца R/I. Предположим теперь, что отображение $a\to a'$ есть гомоморфизм R в некоторое кольцо R'. Пусть I — множество элементов, отображающихся в нуль. Как видно непосредственно, из соотношений $a\to 0'$, $b\to 0'$ следует, что $a\pm b\to 0'$. Поэтому множество I замкнуто относительно сложения и вычитания. Если c — любой элемент R, то мы будем иметь $ac\to 0'c'=0'$. Поэтому I есть идеал.

Если I_a и I_b — два элемента кольца R/I, то равенство $I_a=I_b$ будет иметь место тогда и только тогда, когда $a-b\in I$. В свою очередь, последнее справедливо в том и только в том случае,

если $a' = b'$. Поэтому между элементами кольца R/I и элементами R' существует взаимно однозначное соответствие. Но так как равенства $I_a + I_b = I_{a+b}$ и $I_a I_b = I_{ab}$ имеют место одновременно с равенствами $a' + b' = (a+b)'$, $a'b' = (ab)'$, то это соответствие будет сохранять сложение и умножение, т. е. является изоморфизмом.

1.2. Упражнения. 1. Если R — коммутативное кольцо с единицей, то любое множество элементов $a_1, a_2, \ldots$ из R (конечное или бесконечное) определяет идеал, состоящий из всех конечных сумм $\sum b_i a_i$, в которых $b_i \in R$.

2. Каждый идеал в кольце целых чисел является главным.

3. Если R — кольцо целых чисел, I — главный идеал, порождаемый простым числом p, то R/I является полем характеристики p, состоящим из p элементов.

4. а) В поле существуют лишь два идеала: само поле и нулевой идеал, состоящий лишь из нуля.

б) Гомоморфизм поля K в некоторое кольцо R либо отображает все элементы K в нуль, либо является изоморфизмом между K и некоторым подмножеством из R.

5. Если R — коммутативное кольцо с единицей, то кольцо R/I будет областью целостности тогда и только тогда, когда идеал I обладает следующим свойством: если $a, b \in R$, $a \notin I$ и $ab \in I$, то $b \in I$. В этом случае идеал I называется *простым*.

§ 2. РАСШИРЕНИЯ ПОЛЕЙ

2.1. Трансцендентные расширения. Мы займемся здесь процессом расширения поля K, т. е. переходом от поля K к некоторому полю $\sum \supset K$. Мы уже встречались с таким процессом при построении полей $K(x)$, $K(x)'$, $K(x)^*$.

Пусть $\sum$ — поле, содержащее K, и пусть $\theta_1, \ldots, \theta_r$ — элементы из $\sum$. Тогда существует наименьшее подполе $\sum$, содержащее K и все элементы $\theta_1, \ldots, \theta_r$. Мы будем обозначать его через $K(\theta_1, \ldots, \theta_r)$. Очевидно, что все элементы из $K(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ могут быть выражены в виде $g(\theta_1, \ldots, \theta_r)/h(\theta_1, \ldots, \theta_r)$, где g и h — многочлены над K и где $h(\theta_1, \ldots, \theta_r) \neq 0$. Действительно, все такие элементы образуют поле, которое содержится в любом поле, содержащем K и все элементы $\theta_1, \ldots, \theta_r$. Мы будем говорить, что поле $K(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ получено *присоединением* к полю K элементов $\theta_1, \ldots, \theta_r$. Элементы $\theta_1, \ldots, \theta_r$ называются *образующими* поля $K(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ над K. Любое поле, содержащее K в качестве подполя, называется *расширением* поля K.

Удобно обозначить через $K[\theta_1, \ldots, \theta_r]$ множество всех элементов из $K(\theta_1, \ldots, \theta_r)$, имеющих вид $f(\theta_1, \ldots, \theta_r)$, где

$f(x_1, \ldots, x_r) \in K[x_1, \ldots, x_r]$. Поле $K(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ является, очевидно, полем частных кольца $K[\theta_1, \ldots, \theta_r]$.

Если $r=1$, то расширение $\sum = K(\theta_1)$ называется *простым*. Простые расширения разделяются на два класса. Если элемент θ удовлетворяет уравнению вида $f(\theta)=0$, где $f \neq 0$, $f(x) \in K[x]$, то элемент θ называется *алгебраическим* над K и расширение $K(\theta)$ называется *алгебраическим расширением*. Если θ не удовлетворяет никакому уравнению такого рода, то расширение называется *трансцендентным*.

Следующая теорема дает полное описание простых трансцендентных расширений:

Теорема 2.1 *Если элемент θ трансцендентен над K, то поле $K(\theta)$ изоморфно полю $K(x)$ рациональных функций одной неизвестной x.*

Доказательство. Мы видели, что любой элемент $K(\theta)$ можно выразить в виде $g(\theta)/h(\theta)$, где $g, h \in K[x]$. Если два таких выражения были бы равны между собой, например $g_1(\theta)/h_1(\theta) = g_2/(\theta)h_2(\theta)$, то мы имели бы $g_1(\theta)h_2(\theta) - g_2(\theta)h_1(\theta) = 0$. Так как элемент θ трансцендентен, то отсюда следует $g_1(x)h_2(x) - g_2(x)h_1(x) = 0$, т. е. $g_1(x)/h_1(x) = g_2(x)/h_1(x)$. Обратно, равенство $g_1(x)/h_1(x) = g_2(x)/h_2(x)$, очевидно, влечет за собой равенство $g_1(\theta)/h_1(\theta) = g_2(\theta)/h_2(\theta)$. Отсюда следует, что соответствие между $g(\theta)/h(\theta)$ и $g(x)/h(x)$ будет взаимно однозначным, и так как оно сохраняется при сложении и умножении, то это соответствие будет изоморфизмом.

Полученный результат может быть легко обобщен на непростые расширения. Мы будем называть элементы $\theta_1, \ldots, \theta_r$ *алгебраически независимыми над K*, если они не удовлетворяют никакому уравнению вида $f(\theta_1, \ldots, \theta_r) = 0$, где f—многочлен над K, $f \neq 0$. В таком случае имеет место

Теорема 2.2. *Если элементы $\theta_1, \ldots, \theta_r$ алгебраически независимы над K, то поле $K(\theta_1, \ldots, \theta_r)$ изоморфно полю $K(x_1, \ldots, x_r)$ рациональных функций от неизвестных $x_1, \ldots, x_r$.*

Доказательство то же самое, что и для теоремы 2.1.

2.2. Простые алгебраические расширения. Рассмотрение алгебраических расширений несколько сложнее. Докажем прежде всего

Теорему 2.3. *Если элемент θ алгебраичен над K, то существует неприводимый многочлен $f(x) \in K[x]$, единственный с точностью до постоянного множителя и такой, что для любого многочлена $k(x) \in K[x]$ равенство $k(\theta) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) \mid k(x)$.*

Доказательство. Так как элемент θ—алгебраический, то существует такой многочлен $g(x) \neq 0$, что $g(\theta) = 0$. Пусть $g(x) = g_1(x) \ldots g_r(x)$—разложение $g(x)$ на неприводимые мно-

жители. Тогда $g_1(\theta) \ldots g_r(\theta)=0$, и поэтому хотя бы один из множителей $g_i(\theta)$ равен нулю. Обозначим один из таких $g_i(x)$ через $f(x)$. Если $f(x) \mid k(x)$, то, очевидно, $k(\theta)=0$, так как $f(\theta)=0$. С другой стороны, если $f(x) \nmid k(x)$, то $f(x)$ и $k(x)$ взаимно просты, ввиду неприводимости $f(x)$. Поэтому, в силу теоремы I—6.7, найдутся такие многочлены $a(x)$, $b(x)$, что $af+bk=1$. Отсюда следует $a(\theta) f(\theta)+b(\theta) k(\theta)=1$, а так как $f(\theta)=0$, то $k(\theta) \neq 0$. Наконец, если $f_1(x)$— другой неприводимый многочлен, обладающий тем свойством, что равенство $k(\theta)=0$, имеет место тогда и только тогда, когда $f_1 \mid k$, то должно быть $f \mid f_1$ и $f_1 \mid f$. Следовательно, $f_1=af$, где $a \in K$.

Чтобы доказать об алгебраических расширениях теорему, аналогичную теореме 2.1, мы должны сначала показать способ построения алгебраических расширений. Этот способ дается следующей

Теоремой 2.4. *Если I—главный идеал в $K[x]$, порождаемый неприводимым многочленом $f(x)$, то фактор-кольцо $K[x]/I$ является полем $K(\xi)$, где $f(\xi)=0$.*

Доказательство. Для доказательства того, что кольцо $\Lambda=K[x]/I$ есть поле, нужно лишь показать, что для любых I_a, $I_b \in \Lambda$, $I_a \neq I$ найдется элемент $I_g \in \Lambda$, удовлетворяющий равенству $I_a I_g=I_b$. Действительно, в таком случае выбор $I_b=I_a$ доказывает существование единичного элемента, а выбор единичного элемента в качестве I_b—существование обратного. Условие $I_a I_g=I_b$ для элементов кольца $K[x]$ означает, что существует такой $c \in K[x]$, что $ag=b+cf$. Но $f \nmid a$, так как $I_a \neq I$. Поэтому, в силу неприводимости многочлена f, существуют такие d, $e \in K[x]$, что $da+ef=1$ (теорема I—6.7). Беря $g=bd$, $c=-be$, мы получим требуемое соотношение. Пусть теперь $\xi=I_x$. Так как каждый элемент кольца $K[x]$ является многочленом от x, то вследствие гомоморфизма $K[x]$ и Λ каждый элемент из Λ является многочленом от ξ, т. е. $\Lambda=K[\xi]$ [1]). Поэтому также $\Lambda=K(\xi)$, ибо Λ—поле. Наконец, многочлен $f(x)$ отображается при указанном гомоморфизме в нуль, так что $f(\xi)=0$.

Этим мы доказали существование алгебраического расширения, соответствующего заданному неприводимому многочлену $f(x)$. Следующая теорема показывает, что такое расширение единственно.

Теорема 2.5. *Если элемент θ удовлетворяет неприводимому уравнению $f(\theta)=0$ над K, то поле $K(\theta)$ изоморфно полю $K(\xi)$, определенному в теореме 2.4.*

---

[1]) Такая запись оправдывается тем обстоятельством, что различные элементы $a \in K$ переходят в различные элементы $I_a \in \Lambda$. Совокупность таких I_a является подполем $K_1 \subset \Lambda$, изоморфным полю K. Автор молчаливо отождествляет каждый из I_a с соответствующим элементом a и подполе K_1—с полем K. (*Прим. перев.*)

Доказательство. Отображение $K[x]$ в $K[\theta]$, определяемое условием $g(x) \to g(\theta)$, будет гомоморфизмом. В силу теоремы 2.3, $g(x) \to 0$ тогда и только тогда, когда $f \mid g$. Следовательно, идеал I, состоящий из элементов, отображающихся в нуль, будет главным идеалом, порождаемым многочленом $f(x)$. В таком случае, по теореме 1.2, поле $K(\xi) = K[x]/I$ изоморфно кольцу $K[\theta]$. Следовательно, $K[\theta]$ является полем, содержащим K и θ и содержащимся в $K(\theta)$. Поэтому $K[\theta] = K(\theta)$, и теорема доказана.

Побочным результатом приведенного выше доказательства является

Теорема 2.6. *Если многочлен $f(x)$ имеет степень r, то каждый элемент из $K(\theta)$ может быть выражен мночленом от θ, имеющим степень $\leqslant r-1$.*

Доказательство. То, что каждый элемент φ из $K(\theta)$ выражается некоторым многочленом $g(\theta)$, следует из приведенного выше замечания, что $K(\theta) = K[\theta]$. Если $g(x)$ имеет степень, бо́льшую или равную r, то, деля его на $f(x)$, получим

$$g(x) = q(x) f(x) + h(x),$$

где $h = 0$ или $\deg h < r$. Очевидно, что $\varphi = g(\theta) = h(\theta)$, а это и требовалось доказать.

Число r называется *степенью* расширения. Следующая теорема показывает, что эта степень зависит только от двух рассматриваемых полей, а не от выбора элемента θ, дающего нужное расширение.

Теорема 2.7. *Если элемент θ удовлетворяет неприводимому над полем K уравнению степени r, то каждый элемент φ из $K(\theta)$ удовлетворяет уравнению с коэффициентами из K, степень которого не больше r. Если $K(\varphi) = K(\theta)$, то это уравнение будет неприводимым и будет иметь степень r.*

Доказательство. Так как $1, \varphi, \ldots, \varphi^r$—элементы $K(\theta)$, то, по теореме 2.6, имеем

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
\varphi &= b_0^{(1)} + b_1^{(1)}\theta + \ldots + b_{r-1}^{(1)}\theta^{r-1}, \\
\varphi^2 &= b_0^{(2)} + b_1^{(2)}\theta + \ldots + b_{r-1}^{(2)}\theta^{r-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi^r &= b_0^{(r)} + b_1^{(r)}\theta + \ldots + b_{r-1}^{(r)}\theta^{r-1}.
\end{aligned} \qquad b_i^{(k)} \in K.$$

Так как элементы $1, \varphi, \ldots, \varphi^r$ в числе $r+1$ выражаются линейными комбинациями элементов $1, \theta, \ldots, \theta^{r-1}$ с коэффициентами из K, то они линейно зависимы над K, т. е. существуют коэффициенты $c_0, \ldots, c_r \in K$, не все равные нулю, для которых $c_0 + c_1\varphi + \ldots + c_r\varphi^r = 0$. Если $K(\varphi) = K(\theta)$ и если φ удовлетворяет неприводимому уравнению степени s, то, в силу сказанного,

должно быть $s \leqslant r$. Подобным же образом, $r \leqslant s$ и, следовательно, $r = s$.

Метод доказательства этой теоремы с очевидностью показывает, что степень $K(\theta)$ над K может быть определена как наибольшее число элементов из поля $K(\theta)$, линейно независимых над K.

2.3. Алгебраические расширения. Теоремы п. 2.2 описывают строение простого алгебраического расширения. Мы хотим рассмотреть сейчас расширения более общего типа. Расширение $\sum$ поля K называется алгебраическим, если каждый элемент из $\sum$ алгебраичен над K. Докажем прежде всего

Теорему 2.8. *Результат конечного числа последовательных простых алгебраических расширений является алгебраическим расширением.*

Доказательство. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_m$—такие элементы, что θ_1 алгебраичен над K, а каждый θ_i алгебраичен над полем $K(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})$. Мы должны показать, что каждый элемент поля $\sum = K(\theta_1, \ldots, \theta_m)$ алгебраичен над K. Пусть r_i—степень расширения, полученного присоединением θ_i к полю $K(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})$. Тогда любой элемент поля $\sum$ выражается линейной комбинацией элементов $1, \theta_m, \ldots, \theta_m^{r_m-1}$ с коэффициентами из $K(\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$. Каждый из этих коэффициентов выражается линейной комбинацией элементов $1, \theta_{m-1}, \ldots, \theta_{m-1}^{r_{m-1}-1}$ с коэффициентами из $K(\theta_1, \ldots, \theta_{m-2})$. Продолжая этот процесс, увидим, что каждый элемент поля $\sum$ выражается линейной комбинацией элементов вида $\theta_1^{p_1}\theta_2^{p_2}\ldots\theta_m^{p_m}$, $0 \leqslant p_i \leqslant r_i - 1$ (их будет всего $R = r_1 r_2 \ldots r_m$) с коэффициентами из K. Отсюда следует, что при любом $\varphi \in \sum$ элементы $1, \varphi, \ldots, \varphi^R$ (их число равно $R+1$) линейно зависимы над K и поэтому φ будет алгебраичен над K.

Теорема 2.9. *Если каждый из элементов $\theta_1, \ldots, \theta_m$ алгебраичен над полем K характеристики нуль и если S—любое бесконечное подмножество K, то существуют такие элементы $a_i \in S$, что $K(\theta_1, \ldots, \theta_m) = K(\varphi)$, где положено $\varphi = \sum a_i \theta_i$.*

Доказательство. Пусть $L = K(x_1, \ldots, x_m)$—поле рациональных функций от неизвестных $x_1, \ldots, x_m$. Тогда поле $L(\theta_1, \ldots, \theta_m)$[1]) будет алгебраическим расширением L. Пусть $y = \sum x_i\theta_i$. Можно считать, что $y \neq 0$, ибо случай $\theta_1 = \ldots = \theta_m = 0$ тривиален. Так как элемент $y \in L(\theta_1, \ldots, \theta_m)$, то y будет алгебраичен над L (по теореме 2.8) и поэтому найдется такой многочлен

$$f(x, z) = b_0(x) + b_1(x)z + \ldots + b_n(x)z^n,$$

[1]) Такая запись будет оправдана, если поля $K(x_1, \ldots, x_m)$ и $K(\theta_1, \ldots, \theta_m)$ являются подполями одного и того же поля. В качестве последнего можно взять, например, $K(\theta_1, \ldots, \theta_m)(x_1, \ldots, x_m)$, т. е. поле рациональных функций от $x_1, \ldots, x_m$ над $K(\theta_1, \ldots, \theta_m)$. (*Прим. перев.*)

неприводимый над L, для которого $f(x, y)=0$. Здесь $b_i(x)$ являются элементами L, которые можно даже считать принадлежащими $K[x_1, \ldots, x_m]$ (так как их всегда можно умножить на общий знаменатель). В таком случае элемент $f(x_1, \ldots, x_m, x_1\theta_1+\ldots+x_m\theta_m)=0$, как элемент кольца $K(\theta_1, \ldots, \theta_m)[x_1, \ldots, x_m]$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{z=y}+\theta_i\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z=y}=0, \quad i=1, 2, \ldots, m, \tag{2.1}$$

где $y=x_1\theta_1+\ldots+x_m\theta_m$ подставлен вместо z в выражения $\partial f/\partial x_i$ и $\partial f/\partial z$. Если бы элемент $(\partial f/\partial z)_{z=y}$ был нулем, то $f(x, z)$ и $\partial f/\partial z$ имели бы общий делитель $z-y$ в кольце $K(\theta_1, \ldots, \theta_m)[x_1, \ldots, x_m, z]$, следовательно, по теореме I—9.5, и общий делитель в кольце $K[x_1, \ldots, x_m, z]$. Это противоречит предположению о неприводимости многочлена f над полем L. Поэтому $(\partial f/\partial z)_{z=y}\neq 0$. В таком случае, в силу теоремы I—6.3, найдутся такие константы $a_i\in S$, что $\partial f/\partial z\neq 0$ при $x_i=a_i$, $z=\varphi=a_1\theta_1+\ldots+a_m\theta_m$. Из (2.1) мы получаем, что

$$\theta_i=-\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{x_i=a_i,\ z=\varphi},$$

т. е. что все θ_i выражаются рациональными функциями от φ над K. Отсюда следует, что $\theta_i\in K(\varphi)$, а потому $K(\theta_1, \ldots, \theta_m)\subseteq K(\varphi)$. Но, очевидно, $K(\varphi)\subset K(\theta_1, \ldots, \theta_m)$. Поэтому $K(\theta_1, \ldots, \theta_m)=K(\varphi)$, что и требовалось.

2.4. Упражнения. 1. Любое поле, получаемое из поля K характеристики нуль конечным числом последовательных простых расширений, изоморфно простому алгебраическому расширению поля рациональных функций $K(x_1, \ldots, x_r)$ над K.

2. Если L — любое расширение поля K, то наибольшее число элементов L, алгебраически независимых над K, называется *размерностью* расширения. Оно обозначается через $\dim_K L$. Доказать, что если поле L получается из K и поле M получается из L конечным числом простых расширений, то $\dim_K M=\dim_K L+\dim_L M$.

§ 3. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА КРИВОЙ

3.1. Поле рациональных функций на кривой. С неприводимой алгебраической кривой $f(x, y)=0$ связывается важное образование, известное под названием *поля рациональных функций на кривой*. Это поле, которое мы будем обозначать через $\sum$, определяется как расширение $K(\xi, \eta)$, где ξ — трансцендентен над K, а η алгебраичен над $K(\xi)$ и удовлетворяет неприводимому уравнению $f(\xi, \eta)=0$. Эта конструкция оказывается невоз-

можной, если $f(x, y)$ является многочленом от одного x. Но тогда должно быть $f(x) = ax + b$. Этот тривиальный случай мы исключим из рассмотрения.

Такое определение поля $\sum$, хотя оно удобно при формулировках и оперировании с ним, несколько неудовлетворительно в том отношении, что переменные x и y входят в определение несимметричным образом. Оставим читателю доказательство следующего утверждения: $\sum$ есть поле частных области целостности $K[x, y]/I$, где I — главный идеал, порождаемый многочленом $f(x, y)$.

Так как $\sum = K(\xi, \eta)$, то каждый элемент из $\sum$ можно выразить в виде рациональной функции от ξ и η, т. е. в виде $g(\xi, \eta)/h(\xi, \eta)$, где $g(x, y)$, $h(x, y) \in K[x, y]$ и $h(\xi, \eta) \neq 0$. Конечно, такое выражение элемента из $\sum$ не будет однозначным.

Легко видеть, на каком основании поле $\sum$ называют полем рациональных функций на кривой f. Если $g_1(x, y)/h_1(x, y)$ и $g_2(x, y)/h_2(x, y)$ — рациональные функции над K, а (a, b) — любая точка кривой f, в которой значения написанных рациональных функций определены, то эти значения обязательно будут равными, если $g_1(\xi, \eta)/h_1(\xi, \eta) = g_2(\xi, \eta)/h_2(\xi, \eta)$. Обратно, если последнее равенство не имеет места, то $f(x, y) \mid g_1(x, y) h_2(x, y) - g_2(x, y) h_1(x, y)$ и поэтому на кривой f найдутся точки, в которых две данные рациональные функции принимают различные значения. Другими словами, рациональные функции ведут себя подобно элементам поля $\sum$, если рассматривать лишь значения этих функций в точках кривой f.

Для краткости мы будем называть $\sum$ «полем кривой f» или просто «полем f». Элементы $\sum$ будут, как правило, обозначаться малыми греческими буквами.

По определению поля $\sum$, оно содержит хотя бы один элемент, алгебраически независимый (т. е. трансцендентный) над полем K. Следующая теорема ограничивает число таких элементов:

Теорема 3.1. *Любые два элемента из $\sum$ алгебраически зависимы над K.*

Доказательство. Так как поле $\sum$ алгебраично над $K(\xi)$, любой элемент φ из $\sum$ удовлетворяет некоторому уравнению

$$g(\xi, \varphi) = a_0 + \ldots + a_r\varphi^r = 0, \quad a_i \in K(\xi).$$

Умножая его левую часть, если это нужно, на общий знаменатель коэффициентов a_i и деля на их общий делитель, можно добиться, чтобы все a_i были элементами $K[\xi]$ и чтобы они не имели общих множителей, т. е. чтобы многочлен $g(\xi, z) \in K[\xi, z]$ не имел множителей, содержащих лишь ξ. Подобным же образом, для любого другого элемента ψ из $\sum$ будет

$$h(\xi, \psi) = 0,$$

где многочлен $h(\xi, w)$ удовлетворяет тем же условиям. В таком случае многочлены $g(x, z)$ и $h(x, w)$ не могут иметь нетривиальный общий делитель, и поэтому их результант $R(z, w)$ будет отличен от нуля. Однако $g(x, \varphi)$ и $h(x, \psi)$ имеют общий делитель $x-\xi$, и поэтому должно быть $R(\varphi, \psi)=0$, а это и требовалось доказать.

Следующая теорема является уточнением теоремы 3.1 и дает внутреннюю характеристику поля $\sum$.

Теорема 3.2. *Расширение $\sum$ алгебраически замкнутого поля K характеристики нуль является полем рациональных функций на некоторой кривой f в том и только в том случае, если*

1) *$\sum$ содержит элемент, алгебраически независимый над K, но не содержит ни одной пары таких элементов.*

2) *$\sum$ имеет конечное число образующих над K.*

Доказательство. Необходимость условий 1 и 2 следует из определения поля рациональных функций на кривой и теоремы 3.1. Предположим теперь, что $\sum$ — поле, обладающее свойствами 1 и 2. В силу условия 1, $\sum$ содержит элемент ξ, трансцендентный над K. Если $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — некоторая система образующих $\sum$ над K, то, в силу условия 1, каждый из θ_i является алгебраическим над $K(\xi)$ и поэтому, по теореме 2.9, существует такой элемент η из $\sum$, алгебраический над $K(\xi)$, что $\sum = K(\xi, \eta)$. Если $f(\xi, \eta)=0$ — неприводимое уравнение, которому удовлетворяет η, то $\sum$ есть поле кривой $f(x, y)=0$.

Мы будем называть поля, удовлетворяющие условиям 1 и 2, *допустимыми* полями.

3.2. Инвариантность поля. Если мы переходим от аффинных координат к проективным по формулам $x=x_1/x_0$, $y=x_2/x_0$, то удобно произвести соответствующую замену в выражениях элементов поля $\sum$. Мы заменим ξ и η на ξ_1/ξ_0 и ξ_2/ξ_0. Тогда элементы $\sum$ можно будет представить рациональными функциями от ξ_0, ξ_1, ξ_2, у каждой из которых числитель и знаменатель являются однородными многочленами одной и той же степени. Следует помнить, что при этом сами ξ_0, ξ_1, ξ_2 не являются элементами $\sum$, но отношения ξ_i/ξ_k принадлежат $\sum$.

Если при преобразовании координат переменные x, y заменяются на

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2, \end{aligned} \qquad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, \tag{3.1}$$

то ξ', η', выражаемые через ξ, η соответствующими формулами, будут элементами поля $\sum$. Наоборот, если $\sum'$ есть поле $K(\xi', \eta')$, определяемое новым уравнением $f'(x', y')=0$ той же кривой, то ξ, η, полученные из упомянутых формул, будут элементами поля

$\sum'$. Следовательно, $\sum = \sum'$. Так как преобразование проективных координат может быть рассмотрено таким же образом, мы видим, что *поле* $\sum$ *однозначно определено заданной кривой* f.

3.3. Порядок рациональной функции на ветви. Пусть $\bar{x}, \bar{y}$ — параметризация ветви P кривой f. Мы предположили, что f не является многочленом вида $ax+b$. Поэтому ряд $\bar{x}$ должен быть трансцендентным над K, следовательно, поле $K(\bar{x})$ изоморфно $K(x)$ (в силу теоремы 2.1). Отсюда вытекает, что многочлен $f(\bar{x}, y)$, рассматриваемый как многочлен над полем $K(\bar{x})$, будет неприводимым. Но так как $f(\bar{x}, \bar{y})=0$, отсюда следует, по теореме 2.5, что поле $K(\bar{x}, \bar{y})$ изоморфно полю $\sum$. При этом изоморфизме элементам $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответствуют элементы ξ и η.

Ввиду того что каждый элемент $\bar{g}$ из $K(\bar{x}, \bar{y})$ является степенным рядом и имеет определенный порядок, можно отнести этот порядок соответствующему элементу φ из $\sum$ и называть его порядком рациональной функции φ на ветви P. Порядок $O_P(\varphi)$ элемента φ на ветви P имеет те же свойства, что и $O(\bar{g})$. Именно:

$$O_P(\varphi\psi) = O_P(\varphi) + O_P(\psi),$$
$$O_P(\varphi+\psi) \geqq \min[O_P(\varphi), O_P(\psi)],$$
$$O_P(\varphi) = 0, \text{ если } \varphi \in K \text{ и } \varphi \neq 0,$$
$$O_P(\varphi) = \infty \text{ тогда и только тогда, когда } \varphi = 0.$$

Очевидно, что $O_P(\varphi)$ не зависит от выбора параметризации ветви P, так как от этого выбора не зависит $O(\bar{g})$. Из доказанного в п. 3.2 следует, что $O_P(\varphi)$ не зависит также от системы координат. Действительно, если $\varphi = \varphi(\xi, \eta)$, $\varphi(x, y) \in K(x, y)$, то $O_P(\varphi) = O(\varphi(\bar{x}, \bar{y}))$. Если мы перейдем к новой системе координат по формулам (3.1), то получим $\varphi = \varphi'(\xi', \eta')$, где $\varphi'(a_1x+b_1y+c_1, a_2x+b_2y+c_2) = \varphi(x, y)$. А так как новые координаты $(\bar{x}', \bar{y}')$ ветви P получаются из старых по тем же формулам (3.1), то, очевидно, что $\varphi'(\bar{x}', \bar{y}') = \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ и поэтому порядок $O_P(\varphi) = O(\varphi'(\bar{x}', \bar{y}')$ остается тем же самым.

Таким образом, с каждой ветвью P кривой f связана некоторая функция $O_P(\varphi)$, аргумент которой может пробегать поле $\sum$, а значения — целые числа и ∞. Ниже (§ 10) мы увидим, что ветвь P вполне определяется этой функцией.

Если $(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2)$ — проективные координаты параметризации ветви P и если $\varphi = G(\xi)/H(\xi)$, то мы, очевидно, имеем $O_P(\varphi) = O_P(G) - O_P(H)$, где $O_P(G)$ и $O_P(H)$ определяются, как указано в п. IV — 5.1. Так как G и H — многочлены одной и той же

степени, то применение теоремы IV—5.5 дает следующий важный результат:

Теорема 3.3. *Для любого отличного от нуля элемента поля $\sum$ сумма его порядков на всех ветвях кривой f равна нулю.*

3.4. Упражнения. 1. Является ли отображение $g(x, y) \to g(\xi, \eta)$ гомоморфизмом кольца $K[x, y]$ в $K[\xi, \eta]$? Является ли оно гомоморфизмом $K[x, y]$ в $\sum$? Является ли оно гомоморфизмом $K(x, y)$ в $\sum$?

2. Свяжем с каждой неприводимой гиперповерхностью $f(x_1, \ldots, x_r) = 0$ поле $\sum$, являющееся полем частных области целостности $K[x_1, \ldots, x_r]/I$, где I — главный идеал, порождаемый многочленом f. Для того чтобы расширение $\sum$ поля K было полем некоторой гиперповерхности, необходимо и достаточно, чтобы оно имело размерность $r-1$ над K и имело конечное число образующих (см. п. 2.4, упражнение 2).

§ 4. БИРАЦИОНАЛЬНОЕ СООТВЕТСТВИЕ

4.1. Бирациональное соответствие между кривыми. Элементы ξ, η составляют систему образующих поля $\sum$ кривой f над K. Однако могут существовать и другие системы образующих. Допустим, что мы имеем также $\sum = K(\xi', \eta')$. Тогда, по теореме 3.1 будет иметь место некоторое соотношение $f'(\xi', \eta') = 0$, в котором $f'(x', y') \in K[x', y']$, и можно предполагать, что многочлен f' неприводим. Ввиду того что хотя бы один из элементов ξ', η' трасцендентен над K (ведь в противном случае было бы $K(\xi', \eta') = K \neq \sum$), отсюда видно, что поле $\sum$ является также полем кривой $f' = 0$. Описанная связь между кривыми f и f' называется *бирациональным соответствием*. О кривых f и f' говорят, что они *бирационально эквивалентны*.

Так как $\xi', \eta' \in K(\xi, \eta)$, мы имеем

$$\xi' = \varphi(\xi, \eta), \quad \eta' = \psi(\xi, \eta),$$

где $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in K(x, y)$. Рассмотрим преобразование, определяемое формулами

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y). \tag{4.1}$$

Пусть $(\bar{x}, \bar{y})$ — некоторая параметризация ветви P кривой f. Тогда ее образ $(\bar{x}', \bar{y}')$, определяемый формулами (4.1), будет параметризацией некоторой ветви P' кривой f'. Действительно, из соотношений $0 = f'(\xi', \eta') = f'(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta))$ и изоморфизма полей $K(\xi, \eta)$ и $K(\bar{x}, \bar{y})$ следует равенство $f'(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Но так как один из элементов $\xi', \eta' \notin K$, то один из рядов $\bar{x}', \bar{y}'$ также не будет содержаться в K.

Подобным же образом получается обратное преобразование

$$x=\varphi'(x', y'), \quad y=\psi'(x', y'),$$

в котором

$$\xi=\varphi'(\xi', \eta'), \quad \eta=\psi'(\xi', \eta').$$

Оно обращает ветвь P' обратно в P. Следовательно, бирациональное соответствие между двумя кривыми индуцирует взаимно однозначное соответствие между их ветвями.

Если ветвь P имеет конечный центр (a, b) и если определены значения $a'=\varphi(a, b)$, $b'=\psi(a,b)$, то $(a'b')$ является центром ветви P', и наоборот. Отсюда следует, что бирациональное соответствие между кривыми индуцирует также взаимно однозначное соответствие между точками кривых, не принадлежащими некоторому конечному множеству.

Следует обратить внимание на то, что преобразование (4.1) может быть записано во многих различных формах, так как один и тот же элемент ξ' из поля $\sum$ может быть различными способами выражен рациональными функциями от ξ и η. Но в силу изоморфизма полей $K(\xi, \eta)$ и $K(\bar{x}, \bar{y})$, образ $(\bar{x}', \bar{y}')$ любой ветви $(\bar{x}, \bar{y})$ зависит только от элементов ξ' и η', а не от выбора рациональных функций φ и ψ.

В проективных координатах преобразованию (4.1) можно придать более удобную форму. Мы имеем прежде всего

$$\frac{x_1'}{x_0'}=\frac{G_1(x)}{G_0(x)}, \quad \frac{x_2'}{x_0'}=\frac{G_2(x)}{G_0(x)},$$

так как две дроби всегда можно привести к общему знаменателю. Здесь $G_i(x)$ — однородные многочлены от x_0, x_1, x_2, имеющие одну и ту же степень. Теперь эти равенства можно переписать в виде

$$x_i'=G_i(x), \quad i=0, 1, 2. \tag{4.2}$$

Пример. Пусть

$$f(x, y)=y^2-x^3-x^2,$$

$$\varphi(x, y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad \psi(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

В таком случае имеем

$$\eta^2-\xi^3-\xi^2=0,$$

$$\xi'=\frac{\xi^2}{\xi^2+\eta^2}=\frac{\xi^2}{2\xi^2+\xi^3}=\frac{1}{2+\xi},$$

$$\eta'=\frac{\xi\eta}{\xi^2+\eta^2}=\frac{\eta}{\xi}\,\frac{1}{2+\xi}.$$

Следовательно,

$$\xi=\frac{1-2\xi'}{\xi'}, \quad \eta=\frac{\eta'}{\xi'}\,\frac{1-2\xi'}{\xi'},$$

так что

$$K(\xi', \eta') \supset K(\xi, \eta) = \sum.$$

Таким образом, формулы

$$x' = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad y' = \frac{xy}{x^2+y^2},$$

$$x = \frac{1-2x'}{x'}, \quad y = \frac{y'(1-2x')}{x'^2}$$

определяют бирациональное соответствие между кривой f и некоторой кривой f', уравнение которой нетрудно получить. Мы имеем

$$0 = f(\xi, \eta) = f\left(\frac{1-2\xi'}{\xi'}, \frac{\eta'(1-2\xi')}{\xi'^2}\right) =$$

$$= \frac{1-2\xi'^2}{\xi'^4}(\xi'^2+\eta'^2-\xi').$$

Следовательно, $\xi'^2+\eta'^2-\xi'=0$, и поэтому уравнение f' будет $x'^2+y'^2-x'=0$. На рис. 18 дана геометрическая интерпретация указанного соответствия. Можно легко установить поведение

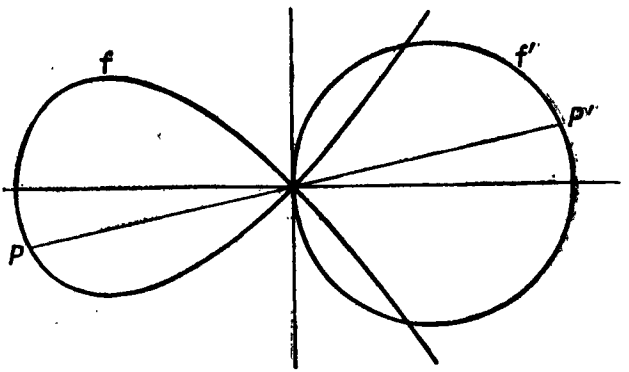

Рис. 18.

ветвей и точек кривой при таком преобразовании. При этом обнаружится, что две ветви исходной кривой, имеющие центр в начале координат, переходят в ветви с различными центрами.

4.2. Квадратичное преобразование как бирациональное соответствие. Важный тип бирациональных преобразований связан с квадратичным преобразованием (III — 7). Это преобразование определяется в аффинных координатах формулами

$$x' = 1/x, \quad y' = 1/y. \tag{4.3}$$

Если ни один из элементов ξ и η не равен нулю, то элементы $\xi' = 1/\xi$ и $\eta' = 1/\eta$, очевидно, составляют систему образующих поля $K(\xi, \eta)$. Следовательно, квадратичное преобразование (4.3) индуцирует бирациональное преобразование любой неприводимой кривой, не совпадающей с иррегулярной прямой преобразования. Сразу видно, что данное в п. III — 7.3 определение образа кривой согласуется с приведенным выше.

Мы можем теперь сформулировать существенную часть теоремы III — 7.4 так: *любая неприводимая кривая бирационально эквивалентна кривой, имеющей лишь обыкновенные кратные точки.* Этот факт будет широко использоваться в следующей главе.

4.3. Упражнение. Обобщить понятие бирационального преобразования на случай гиперповерхностей.

§ 5. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ

5.1. Определение пространственной кривой. Бирациональные соответствия дают возможность легко обобщить понятие неприводимой алгебраической кривой. При рассмотрении систем образующих поля $\sum$ нет оснований ограничиваться только системами, состоящими лишь из двух элементов. Пусть $\sum = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где

$$\xi_i = \varphi_i(\xi, \eta), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и

$$\xi = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \eta = \psi(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Здесь $\varphi_i(x, y) \in K(x, y)$, $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) \in K(x_1, \ldots, x_n)$, $\psi(x) \in K(x_1, \ldots, x_n)$. В таком случае, как и в п. 4.1, каждой параметризации $(\bar{x}, \bar{y})$ ветви P соответствует система степенных рядов $(\bar{x}_1 \ldots, \bar{x}_n)$, в которой не все элементы будут константами. Мы будем рассматривать элементы системы $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ как аффинные координаты некоторой *параметризации неприводимой алгебраической* кривой C в пространстве S_n, а множество эквивалентных параметризаций — как *ветвь P кривой C*. Соответствующими проективными координатами ветви P будут $(\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n)$, где $\bar{y}_i/\bar{y}_0 = \bar{x}_i$. Как и в п. IV — 2.1, можно выбрать элементы y_i так, чтобы было $\min O(\bar{y}_i) = 0$. В таком случае $(\bar{y}_i(0))$ будет точкой пространства S_n. Эта точка будет называться *центром ветви P*. Точки пространства S_n, являющиеся центрами ветвей кривой C, будут называться *точками этой кривой*. Сама кривая будет рассматриваться *как множество принадлежащих ей точек*. Термин «пространственная кривая» обычно применяют к кривой C,

если хотят подчеркнуть, что она не является обязательно плоской кривой.

Введенная терминология будет оправдана в том случае, если множество ветвей однозначно определено множеством точек кривой C. Это будет доказано ниже (§ 9), когда будет установлено большее число свойств кривой C, чем мы знаем сейчас. Здесь же мы можем рассматривать кривую C скорее как *множество ветвей*, а не как множество точек. Мы вполне можем продвигаться дальше, долго не упоминая вообще о точках кривой C, хотя это и не совсем удовлетворительно с геометрической точки зрения.

Ясно, что все, сказанное в §§ 3 и 4 о плоских кривых, может быть, с надлежащими изменениями, распространено на пространственные кривые. В частности, мы можем рассматривать бирациональные соответствия между двумя кривыми, имеющими одно и тоже поле. Они определяются уравнениями вида

$$\xi'_j = \varphi_j(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad j = 1, \ldots, m,$$

а в проективных координатах — уравнениями

$$\xi'_j = G_j(\xi_0, \ldots, \xi_n), \quad j = 0, \ldots, m.$$

Каждое допустимое поле $\sum$ определяет целый класс бирационально эквивалентных кривых. Каждой системе образующих поля $\sum$ над K соответствует одна из этих кривых, и обратно, каждой кривой соответствует хотя бы одна система образующих поля $\sum$.

5.2. Ветви пространственной кривой. Ветви пространственной кривой определены, как образы ветвей некоторой плоской кривой. Часто полезно иметь характеристику этих ветвей, в которой не упоминается никакая другая кривая, кроме самой кривой C. Одна из таких характеристик дается

Теоремой 5.1. *Система степенных рядов $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ является параметризацией ветви кривой C тогда и только тогда, когда существует изоморфизм между полем $\sum$ и полем $K(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, при котором каждому ξ_i соответствует $\bar{x}_i$.*

Доказательство. Если $(\bar{x})$ — параметризация кривой C, то она является образом некоторой параметризации $(\bar{x}, \bar{y})$ плоской кривой f. В таком случае изоморфизм между $K(\bar{x}_1 \ldots, \bar{x}_n)$ и $\sum$ следует из изоморфизма между $\sum$ и $K(\bar{x}, \bar{y})$. Обратно, предположим, что мы имеем изоморфизм между $\sum$ и $K(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, при котором элементы ξ_i и $\bar{x}_i$ соответствуют друг другу. Мы имеем

$$\xi = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \eta = \psi(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

и можем определить $\bar{x}$ и $\bar{y}$ формулами

$$\bar{x} = \varphi(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n), \quad \bar{y} = \psi(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n).$$

Сразу видно, что $(\bar{x}, \bar{y})$ есть параметризация некоторой кривой f, образом которой будет C. Таким образом, $(\bar{x})$ есть параметризация C.

5.3. Геометрия пространственных кривых. Теорема Безу. Распространим теперь на пространственные кривые некоторые менее очевидные определения, относящиеся к плоским кривым, и изучим связанные с ними свойства.

Пусть C — кривая в S_r и пусть

$$\bar{x}_i = a_i + a_{i1}t + \ldots, \quad i = 0, \ldots, r,$$

— параметризация ее ветви P, для которой не все $a_i = 0$. Если $G(x)$ — любой однородный многочлен от x_i, то под его *порядком* на ветви P мы понимаем порядок элемента $G(\bar{x})$ из $K[t]'$ (см. п. IV—5.1).

Очевидно, что $O_P(G) \neq 0$ тогда и только тогда, когда многочлен $G(x)$ обращается в нуль в центре (a) ветви P.

Пусть $\pi(x) = \sum b_i x_i = 0$ — гиперплоскость в пространстве S_r. Тогда неравенство $O_P(\pi) > 0$ будет иметь место в том и только в том случае, если π содержит точку (a). Если это имеет место, то

$$\pi(\bar{x}) = \sum b_i a_{i1} t + \sum b_i a_{i2} t^2 + \ldots$$

и $O_P(\pi)$ равен наименьшему значению s, для которого $\sum b_i a_{is} \neq 0$. Предположим теперь, что при $j < p$ справедливы равенства $a_{ij} = k_j a_i$ и что такие соотношения уже не имеют места при $j = p$. Тогда из равенства $\sum b_i a_i = 0$ следует, что $\sum b_i a_{ij} = 0$ при $j < p$ и что это уже неверно при $j = p$. Другими словами, это означает, что каждая гиперплоскость, проходящая через точку (a), имеет порядок $\geqslant p$ и что хотя бы одна из них имеет порядок, в точности равный p. Мы будем говорить в таком случае, что p есть *порядок ветви* P (ср. с теоремой IV—5.7).

Для того чтобы было $O_P(\pi) > p$, гиперплоскость π должна удовлетворять двум независимым условиям:

$$\sum b_i a_i = 0, \quad \sum b_i a_{ip} = 0.$$

Но все гиперплоскости, удовлетворяющие этим уравнениям, имеют общую прямую, определяемую параметрическими уравнениями

$$x_i = a_i + \lambda a_{ip}.$$

Эта прямая называется *касательной прямой* к ветви P кривой C.

В качестве следующего шага описанного процесса можно было бы рассмотреть гиперплоскости, проходящие через касательную прямую, и выбрать те из них, для которых порядок превышает возможное минимальное значение. Эти гиперплоскости должны удовлетворять еще одному условию и поэтому должны иметь общую плоскость, называемую *соприкасающейся плоскостью* ветви P кривой C. Последовательно можно определять соприкасающиеся подпространства высших размерностей до тех пор, пока не получится пространство, содержащее всю кривую.

Следующая теорема является пространственным эквивалентом теоремы Безу:

Теорема 5.2. *Если гиперплоскость π не содержит кривой C, то сумма порядков π на ветвях C равна одному и тому же числу n, не зависящему от выбора π. Если G — однородный многочлен степени m, имеющий конечный порядок на всех ветвях кривой C, то сумма порядков G на ветвях C равна mn.*

Доказательство. Пусть $F(y_0, y_1, y_2)=0$ — плоская кривая, бирационально эквивалентная кривой C, и пусть

$$x_i = H_i(y), \quad i=0, \ldots, r$$

— соответствующее бирациональное преобразование.

Каждой ветви $P=(\bar{x})$ кривой C, для которой не все $\bar{x}_i(0)=0$, соответствует ветвь $Q=(\bar{y})$ кривой F, для которой $t^q\bar{x}_i = H_i(\bar{y})$. Если мы определим многочлен $G_1(\bar{y})$ равенством $G_1(\bar{y}) = G(H_i(\bar{y}))$, то $G_1(\bar{y}) = t^{qm}G(\bar{x})$, а потому $O_Q(G_1) \geqslant O_P(G)$. По теореме Безу для плоских кривых, из соотношения $\sum\limits_Q O_Q(G_1)=\infty$ вытекает, что $F \mid G_1$, т. е. $O_Q(G_1)=\infty$ для каждой ветви Q. Отсюда следует, что $O_P(G)=\infty$ для любой ветви P. Если это не имеет места, то сумма $\sum\limits_Q O_Q(G_1)$ должна быть конечной, следовательно, конечной будет и $\sum\limits_P O_P(G)$. Если G' — любой другой однородный многочлен степени m, имеющий конечный порядок хотя бы на одной ветви кривой C, то $G(\xi)/G'(\xi) \in \sum$ и, в силу теоремы 3.3, будет иметь место равенство $\sum\limits_P O_P(G/G')=0$, т. е. $\sum\limits_P O_P(G) = \sum\limits_P O_P(G')$. Беря $m=1$, получим первую часть теоремы. Вторая часть получается, если положить $G=\pi^m$.

Число n, указанным образом связанное с кривой C, называется *ее порядком*. Если кривая C — плоская, то это определение согласуется с данным раньше.

В соответствии с теоремой IV — 5.8, назовем точку пространственной кривой *особой точкой*, если она является центром

ветви, имеющей порядок, больший единицы, или если она служит центром нескольких ветвей. Кривая называется *неособой*, если она не имеет особых точек.

Более подробное рассмотрение пространственных кривых и их особенностей мы оставляем до следующей главы.

5.4. Упражнения. 1. Система образующих x, x^2, x^3 допустимого поля $\sum = K(x)$ определяет кривую C в S_3. Доказать, что

1) Кривая C неособая.

2) Она имеет порядок 3.

3) Касательная прямая C в точке (a, a^2, a^3) определяется параметрическими уравнениями:

$$x_1 = a + t,$$
$$x_2 = a^2 + 2at,$$
$$x_3 = a^3 + 3a^2t.$$

4) Соприкасающаяся плоскость к C в точке (a, a^2, a^3) имеет уравнение

$$a^3 - 3a^2x_1 + 3ax_2 - x_3 = 0.$$

2. Если C — кривая в S_n, определяемая системой образующих $\xi_1, \ldots, \xi_n$ поля Σ и если $r+1$ — максимальное число линейно независимых над K элементов в системе $\xi_1, \ldots, \xi_n$, то линейная оболочка множества точек кривой C будет подпространством S_r размерности r.

3. Размерность линейной оболочки любой кривой порядка r в пространстве S_n не превышает r.

§ 6. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

6.1. Рациональные преобразования кривой. Пусть C — кривая в пространстве S_n, определяемая системой образующих $\xi_1, \ldots, \xi_n$ поля Σ, и пусть

$$\eta_j = \varphi_j(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \varphi_j(\xi), \quad j = 1, \ldots, m,$$

— любые элементы из Σ. В таком случае поле $K(\eta_1, \ldots, \eta_m) = \Sigma'$ является подполем Σ. Возможны два случая:

1) $\Sigma' = K$. В этом случае все $\varphi_j(\xi) \in K$, и поэтому можно считать, что $\varphi_j(x) = a_j \in K$.

2) Поле Σ' трансцендентно над K. В этом случае Σ' является допустимым полем, и его система образующих $\eta_1, \ldots, \eta_m$ определяет некоторую кривую C' в пространстве S_m.

Мы будем говорить, что уравнения

$$y_j = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{6.1}$$

определяют *рациональное преобразование* кривой C в точку (a) (в случае 1) или в кривую C' (в случае 2). Впрочем, мы будем интересоваться, главным образом, вторым случаем.

Как и в случае бирациональных преобразований, в проективных координатах можно записать уравнения (6.1) в виде

$$y_j = G_j(x_0, \ldots, x_n), \quad j = 0, \ldots, m,$$

где G_i — однородные многочлены одной и той же степени. И наоборот, каждая такая система уравнений, в которой хотя бы один из G_i имеет конечный порядок хотя бы на одной ветви кривой C, определяет рациональное преобразование этой кривой. В самом деле, если, например, G_0 имеет конечный порядок на ветви $(\bar{x})$, то $G_i(\bar{x})/G_0(\bar{x}) \in K(\bar{x}_1/\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_n/\bar{x}_0)$ и поэтому

$$\varphi_i = G_i(\xi)/G_0(\xi) \in K(\xi_1/\xi_0, \ldots, \xi_n/\xi_0) = \Sigma.$$

6.2. Рациональное преобразование ветви. Рассмотрим теперь соответствие между ветвями кривой C и ветвями ее рационального образа C' (мы будем считать, конечно, что C' не является точкой). В одном направлении это соответствие легко устанавливается

Теоремой 6.1. *Уравнения* (6.1) *преобразуют каждую ветвь кривой C в некоторую ветвь кривой C'.*

Доказательство. Пусть $(\bar{x})$ — ветвь C и пусть

$$\bar{y}_j = \varphi_j(\bar{x}), \quad j = 1, \ldots, m.$$

В силу изоморфизма полей $K(\xi)$ и $K(\bar{x})$, при котором элементам ξ_i соответствуют элементы $\bar{x}_i$, поля $K(\eta)$ и $K(\bar{y})$ будут также изоморфны, причем элементы η_j и $\bar{y}_j$ будут соответствовать друг другу. Следовательно, по теореме 5.1, $(\bar{y}_j)$ есть параметризация кривой C'. Очевидно, что эквивалентные параметризации $(\bar{x})$ дают эквивалентные параметризации $(\bar{y})$. Параметризация $(\bar{y})$ может быть приводимой, но и в этом случае она однозначно определяет некоторую ветвь кривой C', называемую *образом* ветви P.

Установить соответствие в другом направлении не так легко. Прежде чем пытаться это сделать, нужно подробнее рассмотреть соотношение между полями Σ и Σ'. Мы знаем, конечно, что $\Sigma \supset \Sigma'$. Кроме того, из равенства $\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ вытекает, что $\Sigma = \Sigma'(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Заметим теперь, что поле Σ' содержит элемент, трансцендентный над K, а Σ не содержит ни одной пары элементов, алгебраически независимых над K. Поэтому каждый элемент поля Σ алгебраичен над Σ', и, следовательно, по теореме 2.9, Σ является простым алгебраическим расширением поля Σ'. Пусть ν — степень этого расширения. Тогда справедлива

Теорема 6.2. *Любая ветвь кривой C' есть образ некоторого числа μ ветвей кривой C, причем $1 \leqslant \mu \leqslant \nu$; существует лишь конечное число ветвей кривой C', для которых $\mu < \nu$.*

Доказательство. Пусть $(\bar{y})$ — ветвь C'. В таком случае мы имеем изоморфизм между Σ' и $K(\bar{y})$. Попытаемся продолжить этот изоморфизм на поле Σ. Так как Σ есть простое алгебраическое расширение Σ' степени ν, то $\Sigma = \Sigma'(\zeta)$, где $a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_\nu\zeta^\nu = 0$, $a_i \in \Sigma'$, $a_\nu \neq 0$. Выражая коэффициенты a_i рациональными функциями от $\eta_1, \ldots, \eta_m$ с коэффициентами из K, освобождаясь от знаменателей и от общих множителей в числителях, можно добиться, что все $a_i = a_i(\eta)$, где $a_i(y) \in K[y_1, \ldots, y_m]$ и многочлены $a_i(y)$ не имеют общих им всем множителей. В таком случае будет $g(\eta, \zeta) = 0$, причем

$$g(y, z) = a_0(y) + a_1(y)z + \ldots + a_\nu(y)z^\nu$$

является неприводимым элементом кольца $K[y_1, \ldots, y_m, z]$. Ввиду того что $a_\nu(\eta) \neq 0$, будет также $a_\nu(\bar{y}) \neq 0$. Отсюда следует, что уравнение

$$g(\bar{y}, z) = 0 \tag{6.2}$$

имеет корень $\bar{z}$ в некотором поле $K(s)'$, где $s = t^{1/N}$ (N — целое число) (теорема IV — 3.1). Заменим теперь в каждом из y_j параметр t на s^N. Это не повлияет на изоморфизм между Σ' и $K(\bar{y})$. В силу неприводимости многочлена $g(\eta, z)$ многочлен $g(\bar{y}, z)$ будет также неприводим над $K(\bar{y})$, и поэтому поле $\Sigma = \Sigma'(\zeta)$ изоморфно полю $K(\bar{y}, \bar{z})$. При этом изоморфизме каждому ξ_i будет соответствовать некоторый элемент $\bar{x}_i$. Система $(\bar{x})$ будет параметризацией кривой C, а $(\bar{y})$ — ее образом. Этим показано, что $\mu \geqslant 1$.

Чтобы установить неравенство $\mu \leqslant \nu$, заметим просто, что каждой системе $(\bar{x})$, имеющей своим образом систему $(\bar{y})$, будет соответствовать некоторый корень уравнения (6.2): это будет элемент z, соответствующий ζ при изоморфизме полей Σ и $K(\bar{x})$. Ввиду того что элементы системы $(\bar{x})$, в свою очередь, выражаются рациональными функциями от $(\bar{y})$ и $\bar{z}$, различным системам $(\bar{x})$ должны соответствовать различные значения $\bar{z}$. Требуемое неравенство следует теперь из того, что уравнение (6.2) имеет не больше ν различных корней.

Пусть $D(y)$ — дискриминант многочлена $g(y, z)$ относительно z. В силу неприводимости многочлена $g(\eta, z)$ будет $D(\eta) \neq 0$, и поэтому $D(\eta)$ будет иметь порядок нуль на всех ветвях кривой C', кроме конечного числа их (теорема 3.3). Пусть $(\bar{y})$ — ветвь кривой C', на которой $D(\eta)$ имеет порядок нуль. Ветвь $(\bar{y})$ имеет

конечный центр (b) и $D(b) \neq 0$. В таком случае уравнение $g(b, z) = 0$ имеет ν различных корней $b^{(1)}, \ldots, b^{(\nu)}$, и поэтому, в силу теоремы IV—3.2, уравнение $G(\bar{y}, z) = 0$ имеет корни $\bar{z}^{\alpha} = b^{(\alpha)} + \ldots \in K[t]'$, $\alpha = 1, \ldots, \nu$. Так как все $b^{(\alpha)}$ различны, то никакие две из параметризаций $\bar{z}^{(\alpha)}$ не эквивалентны. Следовательно, определяемые ими ветви $(\bar{x}^{(\alpha)})$ кривой C будут различны (как замечено выше, $\bar{z}^{(\alpha)}$ рационально выражаются через $\bar{x}_i^{(\alpha)}$). Этим доказательство закончено.

Важным следствием теоремы 6.2 является

Теорема 6.3. *Если C' — образ кривой C при рациональном преобразовании и если существует бесконечное множество ветвей кривой C', каждая из которых есть образ единственной ветви кривой C, то преобразование, переводящее C в C', будет бирациональным.*

Доказательство. В силу теоремы 6.2, условия этой теоремы влекут за собой равенство $\nu = 1$. Отсюда следует, что $\Sigma' = \Sigma$, а это и нужно.

6.3. Пример. Рассмотрим преобразование кривой $f = x^2 + x^3 - y^2 = 0$, определяемое уравнениями

$$x' = x, \quad y' = x.$$

Геометрически оно означает проектирование кривой f на прямую $y = x$ из бесконечно удаленной точки оси y (рис. 19). Очевидно, что $f' = x' - y'$ и $\Sigma' = K(\xi)$. В качестве элемента ζ можно взять η. В таком случае $g(\xi', \eta', \zeta) = \xi'^2 + \xi'^3 - \zeta^2$, и поэтому $\nu = 2$, $\xi = \xi'$,

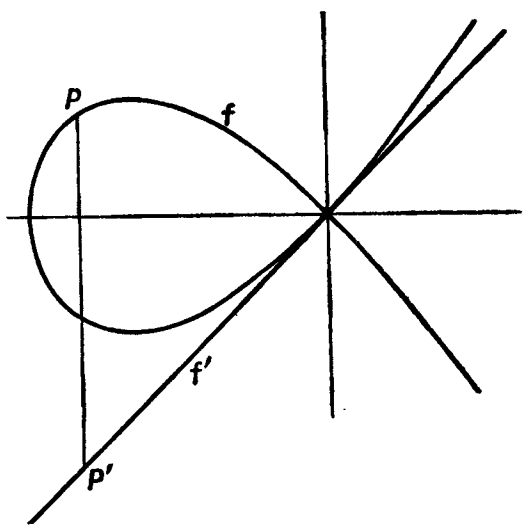

Рис. 19.

$\eta = \zeta$. Любая ветвь P' прямой f' имеет параметризацию вида $(a+t,\ a+t)$. Следовательно, $\bar{z}$ должен быть корнем уравнения

$$(a+t)^2 + (a+t)^3 - \bar{z}^2 = 0,$$

которое можно записать так:

$$\bar{z}^2 = (a^2 + a^3) + (2a + 3a^2)\,t + (1 + 3a)\,t^2 + t^3.$$

Возможны три случая:

1) Если $a \neq 0,\ -1$, то

$$\bar{z} = \pm\sqrt{(a^2+a^3) + (2a+3a^2)\,t + (1+3a)\,t^2 + t^3} =$$
$$= \pm a\sqrt{1+a}\sqrt{1 + \frac{2+3a}{a+a^2}t + \frac{1+3a}{a^2+a^3}t^2 + \frac{1}{a^2+a^3}t^3} =$$
$$= \pm a\sqrt{1+a}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{2+3a}{a+a^2}t + \frac{1}{8}\frac{4a+3a^2}{(a+a^2)^2}t^2 + \ldots\right].$$

Ветвями кривой f, обращающимися при преобразовании в P', будут поэтому ветви

$$\bar{x} = a + t, \quad \bar{y} = \pm a\sqrt{1+a}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{2+3a}{a+a^2}t + \ldots\right].$$

Рассматривая преобразование центров этих ветвей, мы видим, что точки $(a,\ \pm a\sqrt{1+a})$ обращаются в точку $(a,\ a)$.

2) Если $a = -1$, то

$$\bar{z}^2 = t - 2t^2 + t^3 = t\,(1-t)^2.$$

Положив $s = t^{1/2}$, получим

$$\bar{z} = \pm s\,(1 - s^2).$$

Отсюда следует, что параметризации

$$\bar{x} = -1 + s^2, \quad \bar{y} = \pm s\,(1 - s^2)$$

определяют ветви кривой f, переводимые в P'. Но эти параметризации, очевидно, эквивалентны, следовательно, существует лишь одна такая ветвь.

3) Если $a = 0$, то

$$\bar{z}^2 = t^2 + t^3.$$

Следовательно,

$$\bar{z} = \pm t\sqrt{1+t} = \pm t\left[1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \ldots\right].$$

В этом случае две параметризации

$$\bar{x} = t, \quad \bar{y} = \pm t\left[1 + \frac{1}{2}t + \ldots\right]$$

не будут эквивалентными, и поэтому в ветвь P' обращаются две различные ветви кривой f. Эти две ветви имеют один и тот же центр, так что центр ветви P' является образом лишь одной точки кривой f.

4) Прямая f' имеет бесконечно удаленную точку, проективные координаты которой есть (0, 1, 1). Параметризацией ветви P' с этим центром будет $(1/t,\ 1/t)$. В таком случае

$$\bar{z}^2 = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^3} = \frac{1}{t^3}(1+t).$$

Положив снова $t = s^2$, получим

$$\bar{z} = \pm s^{-3}\left[1 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{8}s^4 + \ldots\right]$$

и

$$\bar{x} = s^{-2}, \quad \bar{y} = \pm s^{-3}\left[1 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{8}s^4 + \ldots\right].$$

В этом случае мы снова имеем единственную ветвь, преобразуемую в P'.

В рассмотренном примере дискриминантом многочлена g будет многочлен $x'^2 + x'^3$. Пункт 1 исчерпывает все возможности, рассмотренные в доказательстве теоремы 6.2. Но из рассмотрений пункта 3 видно, что иногда и в случае положительного порядка дискриминанта ветвь P' может быть образом ν различных ветвей кривой C.

6.4. Проектирование как рациональное преобразование. Важный тип рациональных преобразований возникает при проектировании. Пусть точка $(x_0, \ldots, x_n)$ пространства S_n проектируется из центра S_{n-m-1} в точку $(y_0, \ldots, y_m)$ некоторого S_m. В выбранных надлежащим образом координатах это соответствие между точками имеет вид (см. II—5)

$$y_j = x_j, \quad j = 0, \ldots, m. \tag{6.3}$$

Пусть теперь C — кривая в S_n и Σ — поле этой кривой. Мы не можем предполагать, что $\Sigma = K(\xi_1/\xi_0, \ldots, \xi_n/\xi_0)$, так как координатная система заранее зафиксирована. Однако при некотором p будет $\Sigma = K(\xi_0/\xi_p, \ldots, \xi_n/\xi_p)$. Рассмотрим отдельно различные случаи:

1) Если $\xi_j/\xi_p = 0$ при $j = 0, \ldots, m$, то для любой параметризации $(x_0, \ldots, x_n)$ кривой C мы имеем $x_j = 0$. Но уравнения $x_j = 0$ являются определяющими уравнениями подпространства S_{n-m-1}. Следовательно, кривая C может рассматриваться как лежащая в этом подпространстве, и поэтому ее проекция из центра S_{n-m-1} в подпространство S_m не определена.

2) Если не все указанные отношения ξ_j/ξ_p равны нулю, например $\xi_q/\xi_p \neq 0$, то число p можно заменить на q или, что то же самое, можно предполагать, что $0 \leqslant p \leqslant m$. Если при этом окажется, что отношения $\xi_j/\xi_p = b_j \in K$ при $j = 0, \ldots, m$, то кривую C можно рассматривать как лежащую в подпространстве, являющемся линейной оболочкой подпространства S_{n-m-1} и точки (b) подпространства S_m. В этом случае рациональное преобразование (6.3) обращает кривую C в точку (b).

3) Если выполнено первое из предположений предыдущего пункта, но не все отношения ξ_j/ξ_p являются элементами поля K, то поле $K(\xi_0/\xi_p, \ldots, \xi_m/\xi_p)$ есть поле некоторой кривой C' в подпространстве S_m. Эта кривая C' и будет образом C при рациональном преобразовании (6.3).

Связь между рациональным преобразованием и проекциями точек кривой C описывается следующей теоремой:

Теорема 6.4. *В случае 3, указанном выше, каждая точка кривой C' является либо проекцией точки кривой C, не лежащей в подпространстве S_{n-m-1}, либо точкой пересечения подпространства S_m с некоторым подпространством S_{n-m}, соприкасающимся с ветвью кривой C, которая имеет центр в подпространстве S_{n-m-1}.*

Доказательство. Каждая точка кривой C является центром некоторой ветви этой кривой, а каждая ветвь C', по теореме 6.2, будет образом некоторой ветви кривой C. Следовательно, мы должны рассмотреть лишь центры образов ветвей кривой C. Если центр ветви P кривой C не лежит в S_{n-m-1}, то, очевидно, центром образа ветви P будет проекция центра P. Остается лишь рассмотреть случай, когда ветвь $P = (\bar{x})$ кривой C имеет центр в S_{n-m-1}. Пусть $(\bar{y})$ есть образ ветви P. Тогда

$$\bar{y}_j = t^{-q}\bar{x}_j = b_j + \ldots, \quad j = 0, \ldots, m,$$

где уже не все $b_j \neq 0$. Пусть S_{r-1} — соприкасающееся подпространство ветви P, содержащееся в S_{n-m-1} и имеющее при этом высшую размерность. В таком случае соприкасающееся подпространство S_r уже не содержится в S_{n-m-1}. Из теоремы II—2.8 следует, что линейная оболочка S_r и S_{n-m-1} будет подпространством S_{n-m}. Нам нужно доказать, что это подпространство пересекает S_m в точке (b). Чтобы это сделать, достаточно показать, что любая гиперплоскость π пространства S_n, содержащая как S_r, так и S_{n-m-1}, обязательно содержит точку (b). Если гиперплоскость $\pi \supset S_{n-m-1}$, то должно быть $\pi = \sum_{j=0}^{m} c_j x_j$ и $O_P(\pi) \geqslant q$. При этом существуют гиперплоскости π, для которых $O_P(\pi) = q$. А так как подпространство S_r определяется как пересечение

гиперплоскостей, имеющих на ветви P порядок, не меньший некоторого числа n_r, и так как $S_r \not\subset S_{n-m-1}$, то должно быть $n_r > q$. Следовательно, для того чтобы гиперплоскость $\Sigma c_j x_j = 0$ содержала S_r, необходимо должно быть $\Sigma c_j b_j = 0$, т. е. она должна содержать точку (b).

Наиболее важен частный случай этой теоремы при $m = n - 1$. В этом случае точки кривой C' являются либо проекциями точек кривой C, либо точками пересечения гиперплоскости, на которую производится проектирование, с касательными прямыми к кривой C.

Одно из полезных применений проектирования указывается в следующей

Теореме 6.5. *Любая пространственная кривая может быть бирационально спроектирована на плоскую кривую.*

Доказательство. Пусть кривая C определяется образующими $\xi_1, \ldots, \xi_n$ поля Σ. По крайней мере один из элементов ξ_i трансцендентен над K. Можно считать, что таким будет ξ_1. Тогда элементы $\xi_2, \ldots, \xi_n$ алгебраичны над полем $K(\xi_1)$. По теореме 2.9, существуют такие константы a_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, что $\Sigma = K(\xi_1, \ldots, \xi_n) = K(\xi_1, \xi_2')$, где $\xi_2' = \Sigma a_i \xi_i$. Произведем в S_n преобразование координат

$$x_1' = x_1,$$
$$x_2' = a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n,$$
$$x_k' = x_{j_k}, \quad k = 3, \ldots, n,$$

где $j_2, \ldots, j_n$ выбираются из чисел $2, \ldots, n$ так, что исключенным оказывается число i, для которого $a_i \neq 0$. Такой выбор делает определитель преобразования отличным от нуля. В новых координатах мы имеем

$$\Sigma = K(\xi_1', \ldots, \xi_n') = K(\xi_1', \xi_2').$$

Следовательно, проектирование, определяемое формулами

$$x = x_1', \quad y = x_2',$$

бирационально преобразует C в плоскую кривую.

Важным следствием этой теоремы является

Теорема 6.6. *Пространственная кривая имеет лишь конечное множество особых точек.*

Доказательство. Пусть F — бирациональная проекция пространственной кривой C. По теореме 6.4 каждая точка кривой F будет проекцией точки кривой C за исключением центров ветвей F, соответствующих ветвям C, центры которых лежат в центре проектирования S_{n-3}. Так как кривая C не лежит полностью в S_{n-3}, то точек второго типа будет лишь конечное число и их можно не учитывать. Но если точка A кривой C про-

ектируется в точку A' кривой F, то каждая ветвь кривой C с центром в A проектируется в ветвь кривой F с центром в A'. Кроме того, очевидно, что ветвь порядка r проектируется в ветвь порядка $\geqslant r$. Отсюда следует, что каждая особая точка кривой C, не лежащая в S_{n-3}, проектируется в особую точку кривой F. Так как число особых точек кривой F конечно, то конечным же будет и число особых точек C.

Другим достаточно очевидным следствием теоремы 6.6 является то, что кривая не может заполнять всего пространства S_n при $n > 1$.

6.5. Алгебраические преобразования кривых. Теорема 6.2 может быть применена для определения преобразований кривых, более общих, чем рациональные. Рассмотрим два рациональных преобразования кривой C, обращающих ее в кривые C' и C''. В таком случае каждой ветви P' кривой C' соответствуют различные ветви $P_1, \ldots, P_\mu$ кривой C, а им соответствуют ветви $P''_1, \ldots, P''_\mu$ кривой C'', уже не обязательно различные. Преобразование, устанавливающее соответствие между P' и каждой из P''_α, будет называться *алгебраическим преобразованием*. Мы не будем предпринимать общего исследования таких преобразований, а докажем о них лишь одну теорему.

Рациональные преобразования являются, очевидно, частным типом алгебраических преобразований. Рациональное преобразование однозначно: каждая ветвь имеет при таком преобразовании единственный образ. Следующая теорема устанавливает, что имеет место и обратное.

Теорема 6.7. *Алгебраическое преобразование, однозначное на бесконечном множестве ветвей, будет рациональным.*

Доказательство. Пусть преобразования $C \to C'$ и $C \to C''$ определяются формулами

$$\xi'_j = \varphi'_j(\xi), \quad \xi''_k = \varphi''_k(\xi)$$

и пусть $\Sigma = \Sigma'(\zeta)$, где, как и раньше,

$$g(\xi', \zeta) = a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_\nu\zeta^\nu = 0.$$

Имеем

$$\xi_i = \varphi_i(\xi', \zeta).$$

Следовательно,

$$\xi''_k = \varphi''_k(\varphi(\xi', \zeta)) = b_{k0} + b_{k1}\zeta + \ldots + b_{k,\nu-1}\zeta^{\nu-1},$$

где $b_{ki} \in \Sigma'$. Пусть теперь $(\bar{x}')$ — ветвь P' кривой C' с центром (b'). Существует лишь конечное число ветвей кривой C', для которых уравнение $g(b', z) = 0$ имеет кратные корни или $b_{ki}(\bar{x}')$ будет отрицательного порядка. Если P' не является одной из

этих ветвей, то уравнение $g(\bar{x}', z)=0$ будет иметь корни $\bar{z}_\alpha = c_\alpha + \ldots$, где все c_α различны.

Тогда ветви

$$\bar{x}''_{k\alpha} = b_{k0}(\bar{x}') + b_{k1}(\bar{x}')\bar{z}_\alpha + \ldots + b_{k,\nu-1}(\bar{x}')\bar{z}_\alpha^{\nu-1}$$

будут ветвями P''_α кривой C'', которые являются образами ветви P'. Эти ветви имеют конечные центры (b''_α). В силу нашего предположения, существует бесконечное множество ветвей P', для каждой из которых существует лишь одна ветвь P'', следовательно, бесконечное подмножество этого множества будет удовлетворять наложенным выше условиям. Отсюда вытекает, что для бесконечного множества точек (b') кривой C' мы будем иметь

$$0 = -b''_k + b_{k0}(b') + b_{k1}(b')c_\alpha + \ldots + b_{k,\nu-1}(b')c_\alpha^{\nu-1}$$

для ν различных c_α. Рассматривая эти равенства как однородные уравнения с ν неизвестными $-b''_k + b_{k0}(b')$, $b_{k1}(b')$, $\ldots$, $b_{k,\nu-1}(b')$, мы видим, что их единственным решением будет нулевое решение, так как определитель этой системы есть определитель Вандермонда (см. I—7.4, упражнение 2):

$$|1, c_\alpha, \ldots, c_\alpha^{\nu-1}| = \prod_{\alpha<\beta}(c_\beta - c_\alpha) \neq 0.$$

Следовательно, для бесконечного множества точек кривой C' должно быть $b_{ki}(b')=0$, $i=1, \ldots, \nu-1$, т. е. элементы $b_{ki}(\xi')$ должны иметь порядок, больший нуля, на бесконечном множестве ветвей кривой C'. Поэтому будет $b_{ki}(\xi')=0$, следовательно,

$$\xi''_k = b_{k0}(\xi'),$$

и преобразование кривой C' в C'' оказывается рациональным.

Эта теорема часто употребляется для доказательства рациональности некоторых преобразований. Мы воспользуемся ею в связи с теоремой VI—8.4.

6.6. Упражнения. 1. Исследовать действие рационального преобразования

$$x' = 1, \quad y' = y/x$$

на кривую $x^2 - x^3 - y^2 = 0$. Сделать то же самое для кривой $x^2 - x^4 - y^2 = 0$.

2. Пусть C' — образ кривой C при преобразовании (6.1) и пусть $P^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, \ldots, \mu$, — ветви кривой C, преобразующиеся в ветвь P' кривой C'. Если $(\bar{x}^{(\alpha)})$ — параметризация ветви $P^{(\alpha)}$, то положим $\bar{y}_j^{(\alpha)} = \varphi_j(\bar{x}^{(\alpha)})$. Так как параметризация $(\bar{y}^{(\alpha)})$ может оказаться

приводимой, допустим, что при некотором выборе параметра t будет $\overline{y}_j^{(\alpha)} \in K(t^{n_\alpha})$, где n_α имеет наибольшее возможное значение. Доказать, что $\sum_1^\mu n_\alpha = \nu$.

Числа n_α можно рассматривать как кратности прообразов $P^{(\alpha)}$ ветви P'. Таким образом получается обобщение теоремы 6.2: любая ветвь кривой C' есть образ точно ν ветвей кривой C, считаемых с учетом их кратностей.

§ 7. РАЦИОНАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

7.1. Образ рациональной кривой при рациональном преобразовании. Мы видели, что в случае, если $\sum' \supset \sum$, любая кривая с полем $\sum'$ может быть рационально преобразована в любую кривую с полем $\sum$. Заметим теперь, что поле $K(\lambda)$, где элемент λ трансцендентен над K, изоморфно подполю любого допустимого поля. Поэтому кривые, имеющие такое поле, являются рациональными образами любой кривой. Кривая, полем которой является $K(\lambda)$, называется *рациональной кривой*. Так как полем прямой линии $y=0$ будет поле $K(\lambda)$, то *кривая является рациональной тогда и только тогда, когда она бирационально эквивалентна прямой.*

Важное свойство рациональных кривых устанавливается в следующей теореме:

Теорема 7.1. *Образ рациональной кривой при рациональном преобразовании есть также рациональная кривая.*

Это непосредственно следует из

Теоремы 7.2. *Если элемент λ трансцендентен над K и если $K \subset \sum \subset K(\lambda)$, $\sum \neq K$, то найдется элемент $\mu \in \sum$, трансцендентный над K и такой, что $\Sigma = K(\mu)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi = g(\lambda)/h(\lambda)$ — элемент поля $\sum$, не являющийся константой. Тогда $g(\lambda) - \varphi h(\lambda) = 0$, т. е. λ есть корень уравнения $g(x) - \varphi h(x) = 0$ с коэффициентами из $\sum$ и поэтому будет алгебраичен над $\sum$. Пусть

$$f(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r, \quad a_i \in \sum, \quad a_r \neq 0,$$

неприводимый многочлен над $\sum$, для которого $f(\lambda) = 0$. Так как $a_i \in K(\lambda)$, то они будут рациональными функциями λ. Пусть $h(\lambda)$ — общее наименьшее кратное их знаменателей и $k(\lambda)$ — общий наибольший делитель числителей. Тогда, полагая

$$b_i = a_i h/k \in K[\lambda]$$

и

$$f_1(\lambda, x) := b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r,$$

получим многочлен от λ и x, не имеющий делителей, содержащих только λ. По меньшей мере одно из отношений b_i/b_r, например

b_s/b_r, не лежит в K. Положим для краткости $p(\lambda)=b_s$, $q(\lambda)=b_r$, $\mu=b_s/b_r=a_s/a_r\in\sum$. Тогда $p(x)-\mu q(x)\in\sum[x]$, и, в силу равенства $p(\lambda)-\mu q(\lambda)=0$ и теоремы 2.3, мы будем иметь

$$p(x)-\mu q(x)=g(x)f(x),\quad g(x)\in\sum[x].$$

Это равенство приводится к

$$q(\lambda)p(x)-p(\lambda)q(x)=g_1(\lambda,x)f_1(\lambda,x),$$

где

$$g_1(\lambda,x)=g(x)q(\lambda)k(\lambda)/h(\lambda)\in K(\lambda)[x].$$

Но так как f_1 не может делиться на многочлен от λ, то должно быть $g_1\in K[\lambda,x]$. Степени $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ относительно λ не могут превышать степени многочлена f_1 относительно λ. Поэтому многочлен g_1 не может содержать λ. Но если бы многочлен $q(\lambda)p(x)-p(\lambda)q(x)$ имел делитель, содержащий лишь x, он, в силу симметрии, имел бы также делитель, содержащий лишь λ. Следовательно, g_1 есть константа, и поэтому степени каждого из многочленов p и q не превышают r, т. е. степени многочлена f относительно x. Таким образом, $p(x)-\mu q(x)=0$ есть уравнение степени r над полем $K(\mu)$, которому удовлетворяет λ. Поле $K(\mu)\in\sum$. Если бы было $K(\mu)\neq\Sigma$, то было бы возможно найти такой элемент $\psi\in\sum$, что $\psi\notin K(\mu)$. В силу включения $\psi\in K(\lambda)$ и того, что λ имеет над полем $K(\mu)$ степень, не превышающую r, мы имели бы

$$\psi=c_0+c_1\lambda+\ldots+c_{r-1}\lambda^{r-1},\quad c_i\in K(\mu).$$

Но это означало бы, что λ имеет над полем $\sum$ степень, меньшую r, вопреки определению r. Следовательно, $K(\mu)=\sum$.

7.2. Теорема Люрота. Покажем теперь, что приведенное выше определение рациональной кривой согласуется с определением, данным в связи с теоремой III—5.1. Предположим, что кривая $f(x,y)=0$ рациональна в только что упомянутом смысле, т. е. что существуют рациональные функции $\varphi,\psi\in K(\lambda)$, удовлетворяющие условиям:

1) Для почти всех значений $\lambda_0\in K$, будет $f(\varphi(\lambda_0),\psi(\lambda_0))=0$.

2) Для почти каждой пары (x_0,y_0), удовлетворяющей уравнению $f(x,y)=0$, найдется точно одно значение λ_0, при котором $x_0=\varphi(\lambda_0)$, $y_0=\psi(\lambda_0)$.

Из условия 2 следует, что φ и ψ не являются обе константами и поэтому можно предполагать, что φ трансцендентна над K. Из условия 1 следует, что $f(\varphi,\psi)=0$ и поэтому поле $K(\varphi,\psi)$ будет изоморфно полю $K(\xi,\eta)$ таким образом, что элементы φ и ψ будут соответствовать ξ и η. Но так как $K(\varphi,\psi)\subset K(\lambda)$, то поле $\sum$ будет изоморфно некоторому подполю поля $K(\lambda)$.

В силу теоремы 7.2, найдется такое $\mu \in K(\lambda)$, что поле $\sum$ будет изоморфно полю $K(\mu)$, т. е. кривая f оказывается рациональной в смысле последнего определения.

Обратно, если $K(\lambda)$ есть поле кривой f, то f бирационально эквивалентна прямой $y'=0$ плоскости $x'y'$. Если

$$x=\varphi(x'),\ y=\psi(x')$$

— соответствующие уравнения преобразования, то справедливость условий 1 и 2 вытекает из существования взаимно однозначного соответствия между почти всеми точками кривой f и прямой $y'=0$.

Отметим, что условие 2 мы использовали только для того, чтобы утверждать, что φ и ψ не являются обе константами. Поэтому полученные результаты можно объединить в виде следующей теоремы Люрота:

Теорема 7.3. *Если кривая $f(x, y)=0$ удовлетворяет условию 1, в котором рациональные функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ не являются обе константами, то существуют рациональные функции $\varphi_1(\mu)$ $\psi_1(\mu)$, удовлетворяющие обоим условиям 1 и 2, и потому кривая f — рациональная.*

Все три теоремы 7.1, 7.2 и 7.3 эквивалентны, и каждую из них часто называют теоремой Люрота.

7.3. Упражнения. Кривая C в пространстве S_r рациональна в том и только в том случае, если существуют однородные многочлены $G_i(s, t)$, $i=0, \ldots, r$ одинаковых степеней, удовлетворяющие условиям:

1) $(G(s_0, t_0))$ есть точка кривой C для почти всех значений отношения $s_0:t_0$.

2) Для почти каждой точки (a_i) кривой C найдется единственное значение отношения $s_0:t_0$, при котором $\rho a_i=G_i(s_0, t_0)$, $\rho \neq 0$.

2. Если C — рациональная кривая в пространстве S_r и если $G_i(s, t)$ — многочлены, связанные с этой кривой условиями упражнения 1, то выражения $\bar{x}_i=G_i(s_0, t_0+t)$ при любом значении отношения $s_0:t_0$ дают параметризацию ветви кривой C. Наоборот, для любой ветви P кривой C найдется такое значение отношения $s_0:t_0$, при котором формулы $\bar{x}_i=G_i(s_0, t_0+t)$ дают параметризацию этой ветви.

3. Если многочлены упражнения 1 имеют степень n, то кривая C имеет порядок n.

4. Кривая C порядка n, для которой S_n будет линейной оболочкой, является рациональной. (Рассмотреть пересечение C с пучком гиперплоскостей, содержащих $n-1$ точку кривой C.) Такая кривая называется рациональной нормальной кривой.

5. При надлежащем выборе системы координат рациональная нормальная кривая определяется многочленами $G_i=s^it^{n-i}$.

6. Рациональная нормальная кривая является неособенной.

§ 8. ДУАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

8.1. Дуальная кривая для плоской кривой. Пусть C — неприводимая плоская кривая и $\sum$ — ее поле. Мы видели, что каждой ветви кривой C соответствует точка — центр ветви, — координаты которой в заданной проективной координатной системе удовлетворяют неприводимому уравнению $F(x_0, x_1, x_2)=0$. Мы убедились также, что каждая точка, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, является центром по меньшей мере одной ветви кривой C и что поле $\sum$ определяется уравнением $F(x_0, x_1, x_2)=0$. Однако каждой ветви кривой C соответствует также прямая — касательная к этой ветви. Мы покажем, что если сама кривая C не является прямой, то существует такое однородное уравнение $G(u_0, u_1, u_2)=0$, которому удовлетворяют координаты касательных ко всем ветвям кривой C в данной проективной координатной системе (для прямых линий). Мы покажем также, что каждая прямая, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, будет касательной по меньшей мере к одной ветви кривой C и что уравнение $G(u_0, u_1, u_2)=0$ определяет то же самое поле $\sum$, что и кривая C.

Обозначим через $F_i(x)$ производные $F(x)$ относительно x_i, $i=0, 1, 2$. Уравнения

$$u_i=F_i(x)$$

определяют рациональное преобразование кривой C. Если отношения $F_1(\xi)/F_0(\xi)$ и $F_2(\xi)/F_0(\xi)$ не будут оба константами, то образом кривой F будет кривая. Указанный исключительный случай может иметь место только тогда, когда при некоторых $a, b \in K$ оба многочлена $F_1(x)-aF_0(x)$ и $F_2(x)-bF_0(x)$ делятся на $F(x)$. Это может произойти лишь в том случае, если оба они равны нулю, так как их степени меньше степени F. В таком случае, по теореме Эйлера,

$$nF=x_0F_0+x_1F_1+x_2F_2=(x_0+ax_1+bx_2)F_0.$$

В силу неприводимости F, из этих соотношений следует, что $F_0 \in K$ и $n=1$, вопреки предположению о том, что F не является прямой. Следовательно, при наших предположениях образом кривой F будет неприводимая кривая $G(u)=0$.

Пусть $(\bar{x})$ — любая параметризация ветви кривой F. Как в теореме IV — 6.1, мы получаем

$$\sum \bar{x}_i F_i(\bar{x})=0, \quad \sum \bar{x}_i F_i(\bar{x})=0.$$

Но образом $(\bar{u})$ ветви $(\bar{x})$ будет

$$\bar{u}_i=F_i(\bar{x}),$$

и поэтому написанные выше соотношения обращаются в такие:

$$\sum \bar{x}_i' \bar{u}_i = 0, \tag{8.1}$$

$$\sum \bar{x}_i \bar{u}_i = 0. \tag{8.2}$$

Дифференцируя (8.2) и вычитая из результата (8.1), получаем

$$\sum \bar{x}_i \bar{u}_i' = 0.$$

Рассмотрим теперь преобразование кривой G, определяемое формулами

$$y_i = G_i(u).$$

Точно так же, как и выше, мы видим, что это преобразование переводит кривую G в некоторую кривую $H(y) = 0$, а параметризацию $(\bar{u})$ — в параметризацию $(\bar{y})$, где

$$\sum \bar{y}_i \bar{u}_i = 0, \quad \sum \bar{y}_i \bar{u}_i' = 0.$$

Отсюда следует, что $\bar{x}_i$ и $\bar{y}_i$ являются решениями уравнений

$$\sum z_i \bar{u}_i = 0, \quad \sum z_i \bar{u}_i' = 0$$

и поэтому будут пропорциональны, если только $\bar{u}_i'$ не будут пропорциональными $\bar{u}_i$. То, что последняя возможность исключена, доказывается ниже соотношением (8.3). Отсюда следует, что $(\bar{x})$ и $(\bar{y})$ являются одной и той же параметризацией, а потому кривые F и H тождественны. Это указывает не только на бирациональную эквивалентность кривых F и G, но также и на то, что связь между ними вполне симметрична.

Чтобы исследовать преобразование более внимательно, положим, что

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= a_0, \\ \bar{x}_1 &= a_1 + t^r, \\ \bar{x}_2 &= a_2 + at^r + bt^{r+s} + \ldots, \quad a_0 b \neq 0 \end{aligned}$$

есть параметризация ветви P кривой F, имеющей порядок r и класс s. Касательной к P будет прямая

$$(a_1 a - a_2) x_0 - a_0 a_1 x_1 + a_0 x_2 = 0.$$

Разрешая (8.1) и (8.2), мы находим, что

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= (a_1 a - a_2) + \left(1 + \frac{s}{r}\right) a_1 b t^s + \ldots, \\ \bar{u}_1 &= -a_0 a - a_0 \left(1 + \frac{s}{r}\right) b t^s + \ldots, \\ \bar{u}_2 &= a_0. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Следовательно:

1) Координатами центра образа P' ветви P являются координаты касательной к ветви P.

2) Порядок P' равен классу P.

В силу симметричной роли кривых F и G, мы получаем также:

3) Координаты центра P являются координатами касательной к P'.

4) Класс P' равен порядку P.

Кривые F и G называются *дуальными* друг другу. Если мы, как это обычно принято, будем рассматривать проективные пространства с координатами (x) и (u) как дуальные (II — 3.2) пространства с соответствующими координатными системами, то кривая G будет геометрическим местом касательных к кривой F, а F — геометрическим местом точек касания для G.

8.2. Формулы Плюккера. Обращаясь к определению класса кривой, данному в п. IV — 6.1, мы непосредственно видим, что класс неприводимой кривой равен порядку ее дуальной.

Применяя две уже известные формулы Плюккера (IV — 5.2) к дуальной кривой, получим остальные две формулы. Мы будем считать, что дуальная кривая G не имеет других особенностей, кроме простых самопересечений и острий. Напомним, что острие есть центр единственной ветви порядка 2 и класса 1. Поэтому острию кривой G соответствует касательная к единственной ветви кривой F, имеющей порядок 1 и класс 2, т. е. простая точка перегиба. Подобным же образом, простому самопересечению на дуальной кривой соответствует на кривой F касательная, касающаяся двух ветвей с различными центрами, имеющих порядок 1 и класс 1. Такие прямые называются *двойными касательными*. Число их обозначается через τ. В таком случае мы имеем

$$n = m(m-1) - 2\tau - 3i,$$

$$\varkappa = 3m(m-2) - 6\tau - 8i.$$

Это и есть остальные две формулы Плюккера. Все четыре формулы не являются независимыми, так как из любых трех следует четвертая. Однако можно привести примеры, показывающие, что любые три из этих формул независимы.

Целые числа n, m, δ, τ, $\varkappa$, i, связанные с любой алгебраической кривой, называются ее плюккеровыми характеристиками. Они были предметом большого числа исследований, но, тем не менее, несколько связанных с ними проблем остались до сих пор нерешенными. Наиболее интересной среди них является, вероятно, указание критерия, позволяющего судить о том, будут ли заданные шесть чисел плюккеровыми характеристиками непри-

водимой кривой. Необходимым условием этого, конечно, будет то, что эти числа удовлетворяют формулам Плюккера и неравенству

$$(n-1)\ (n-2)/2-\delta-\varkappa \geqslant 0,$$

получаемому из теоремы III—4.3. Известно, что этого условия недостаточно (например, не существует неприводимой кривой, для которой $n=m=7$, $\varkappa=i=11$, $\delta=\tau=1$), но вопрос о том, какие дополнительные условия были бы достаточными, остается открытым. По вопросам, связанным с упомянутыми здесь, мы отошлем читателя к уже цитированной книге Кулиджа «Плоские алгебраические кривые», книга 1, гл. VII, теорема 2.

8.3. Упражнения. 1. Выразить τ через $\varkappa$, δ, n. Вычислить τ для десяти типов неприводимых кривых четвертого порядка (см. п. IV—6.4, упражнение 2).

2. Показать, что

$$(n-1)\ (n-2)/2-\delta-\varkappa=(m-1)\ (m-2)/2-\tau-i.$$

3. Показать, что

$$i-\varkappa=3(m-n),$$

$$2(\tau-\delta)=(m-n)(m+n-9).$$

Исходя из этого результата, доказать теорему:

Если две из плюккеровых характеристик равны своим дуальным, то это же имеет место и для третьей характеристики, если только сумма порядка и класса кривой не равна 9 (таких случаев будет 4).

§ 9. ИДЕАЛ КРИВОЙ

9.1. Идеал пространственной кривой. Свойства точек кривой C в пространстве S_n лучше всего исследовать с помощью некоторого идеала I кольца $K[x]=K[x_1, \ldots, x_n]$. Элементами I являются те и только те многочлены $f(x)=f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых $f(\xi)=0$. То, что эти многочлены действительно образуют идеал, непосредственно очевидно.

Важнейшее свойство идеала I дается

Теоремой 9.1. *$K[x]/I$ есть область целостности, полем частных которой будет поле $\sum$.*

Доказательство. Отображение кольца $K[x]$ в $K[\xi]$, определяемое условиями $\varphi(x) \longrightarrow \varphi(\xi)$, есть гомоморфизм. При этом элементы $K[x]$, отображаемые в нуль, образуют идеал I. Отсюда, по теореме 1.2, следует, что кольцо $K[x]/I$ изоморфно $K[\xi]$. Но так как поле $\sum=K(\xi)$ есть поле частных кольца $K[\xi]$, то это и требовалось доказать.

Из доказанного следует, что идеал I однозначно определяет кривую C, так как он определяет поле $\sum$ кривой C и его

систему образующих $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Связь между идеалом I и точками кривой C выражена в двух следующих теоремах:

Теорема 9.2. *$f(x) \in I$ тогда и только тогда, когда $f(a) = 0$ для любой конечной точки (a) кривой C.*

Доказательство. Для любой параметризации $(\bar{x})$ любой из ветвей кривой C существует изоморфизм между полями $K(\xi)$ и $K(\bar{x})$. Поэтому из соотношения $f(\xi) = 0$, равносильного условию $f \in I$, следует, что $f(\bar{x}) = 0$. Рассматривая лишь параметризации с конечными центрами, мы будем иметь $f(\bar{x}(0)) = 0$. Отсюда следует, что $f(a) = 0$ для любой точки (a) кривой C, так как каждая такая точка является центром одной из рассмотренных параметризаций. Наоборот, если $f(a) = 0$ для любой конечной точки (a) на кривой C, то $f(\xi)$ будет иметь положительный порядок на бесконечном множестве ветвей кривой C. Отсюда следует, что $f(\xi) = 0$, поэтому $f \in I$.

Теорема 9.3. *Если $f(a) = 0$ для любого $f \in I$, то (a) есть точка кривой C.*

Доказательство. Предположим, что найдется точка (a), не лежащая на кривой C, для которой $f(a) = 0$ при любом $f \in I$. Покажем, что путем последовательных проектирований можно свести рассмотрение этой ситуации к рассмотрению аналогичной ситуации в S_2. Пусть сначала $n \geqslant 3$. Прежде всего спроектируем кривую C из точки (a) на некоторое подпространство S'_{n-1}. В силу теоремы 6.4 проекцией кривой C будет некоторая кривая C_0. Так как $n-1 > 1$, то C_0 не может заполнять всего S'_{n-1}. Пусть O — точка из S'_{n-1}, не лежащая на C_0. Спроектируем кривую C из точки O на некоторое другое подпространство S_{n-1}. Пусть при этом C' — проекция C и (a') — проекция точки (a). В силу теоремы 6.4 C' будет кривой, не содержащей точки (a'), так как прямая $O(a)$ не проходит через точки кривой C. Для того чтобы убедиться в том, что точка (a') имеет свойства, соответствующие предположенным свойствам точки (a), допустим, что O имеет проективные координаты $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. При этом уравнения, определяющие проектирование, имеют вид

$$y_j = x_j, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Если $f(y)$ — многочлен, для которого $f(\eta) = 0$, то $f(x)$ будет многочленом от неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, не содержащим x_n и таким, что $f(\xi) = 0$. Другими словами, $f(x) \in I$. Отсюда следует, что $f(a) = 0$. Но так как $a'_j = a_j$ и так как a_n не содержится в выражении $f(a)$, мы будем иметь $f(a') = 0$. Таким образом, отношение точки (a') и кривой C' в пространстве S_{n-1} будет таким же, каким оно было для точки (a) и кривой C в S_n. Описанный процесс можно продолжить до тех пор, пока мы не придем

к случаю пространства S_2. В этом случае кривая имеет уравнение $f(x_1, x_2)=0$. Многочлен $f \in I$, следовательно, должно быть $f(a)=0$. Поэтому точка (a) должна лежать на кривой. Полученное противоречие доказывает теорему.

Из доказанных теорем и результатов, полученных раньше, мы видим, что кривая однозначно определяется любым из следующих объектов, которые мы с ней связали:

1) Множеством ее ветвей.
2) Множеством ее точек.
3) Системой образующих ее поля.
4) Ее идеалом I.

Первые два условия могут быть ослаблены и заменены такими:

1′) Любой из ее ветвей.
2′) Любым бесконечным множеством ее точек.

Достаточность условия 1′ для однозначного задания кривой следует из 3 и теоремы 5.1. Это же для условия 2′ следует из 4 и теоремы 5.2.

9.2. Определение кривой с помощью ее идеала. Мы определили идеал I, считая заданной кривую C. Эта связь между C и I может быть обращена, так что сама кривая C окажется определенной посредством некоторого идеала I кольца $K[x_1, \ldots, x_n]$. Однако не каждый идеал I этого кольца может служить для определения кривой. Для этого он должен удовлетворять некоторым условиям, формулировка которых требует введения понятия размерности идеала I кольца $K[x_1, \ldots, x_n]$. Будем говорить, что I имеет *размерность* r, если существуют такие элементы $f_1, \ldots, f_r$ из $K[x_1, \ldots, x_n]$, для которых при любом ненулевом многочлене $g(z_1, \ldots, z_r)$ над K будет $g(f_1, \ldots, f_r) \notin I$, и если нельзя найти $r+1$ элементов f, удовлетворяющих этому условию. Напомним также об определении простого идеала (см. п. 1.2, упражнение 5).

Теорема 9.4. *Идеал I кольца $K[x_1, \ldots, x_n]$ тогда и только тогда является идеалом некоторой неприводимой алгебраической кривой в S_n, когда он прост и имеет размерность* 1.

Доказательство. Докажем прежде всего необходимость этих условий. Простота идеала I следует из теоремы 9.1. Из нее видно также, что $\sum$ является полем частных кольца $K[x_1, \ldots, x_n]/I$. Отсюда следует, что при $f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ и $g(z_1, \ldots, z_r) \in K[z_1, \ldots, z_r]$ включение $g(f_\alpha(x)) \in I$ будет иметь место тогда и только тогда, когда $g(f_\alpha(\xi)) = 0$. Теперь одномерность идеала I непосредственно следует из теоремы 3.2,1. Обратно, если идеал I прост, то кольцо вычетов $K[x_1, \ldots, x_n]/I = D$ есть область целостности и имеет некоторое поле частных $\sum$. Поле $\sum$ имеет

систему образующих $\xi_1, \ldots, \xi_n$, являющихся образами $x_1, \ldots, x_n$ при гомоморфизме $K[x_1, \ldots, x_n] \to D$. Обращая приведенные выше рассуждения, мы видим, что одномерность идеала I влечет за собой условие 1 теоремы 3.2. Следовательно, поле $\sum$ будет допустимым и порождаемым образующими ξ_i. Очевидно, что I есть идеал кривой, связанной с таким заданием поля $\sum$.

9.3. Упражнения. Если I есть идеал размерности r в кольце $K[x_1, \ldots, x_n]$, то говорят, что точки (a) из S_n, для которых $f(a)=0$ при любом $f \in I$, образуют *r-мерное многообразие* V в пространстве S_n. Если идеал I прост, то многообразие V называется *неприводимым*. Поле частных кольца $K[x_1, \ldots, x_n]/I$ называется *полем многообразия* V. Два неприводимых многообразия называются бирационально эквивалентными, если их поля изоморфны.

1. Доказать, что любое неприводимое r-мерное многообразие бирационально эквивалентно гиперповерхности в пространстве S_{r+1}.

2. Определить рациональное преобразование неприводимого r-мерного многообразия V. Показать, что оно индуцирует отображение множества точек, однозначное всюду, кроме, может быть, точек некоторого $(n-1)$-мерного подмногообразия V. Показать также, что образы точек V лежат на неприводимом многообразии размерности $\leqslant r$.

§ 10. НОРМИРОВАНИЯ

Из замечаний к теореме 5.1 видно, что множество ветвей всех кривых, имеющих данное поле $\sum$, может быть разбито на классы так, что каждый класс содержит только одну ветвь каждой такой кривой и все ветви, принадлежащие одному классу, будут бирациональными образами любой из них. Больше того, если φ — любой элемент из $\sum$, а P и Q — ветви, принадлежащие к одному классу, то $O_P(\varphi) = O_Q(\varphi)$. Другими словами, каждому классу ветвей соответствует некоторая функция $V(\varphi)$, аргумент которой может пробегать элементы $\sum$, а значения заполняют множество I, состоящее из всех целых чисел и ∞. Эта функция удовлетворяет следующим условиям:

1) $V(\varphi\psi) = V(\varphi) + V(\psi)$.

2) $V(\varphi \pm \psi) \geqslant \min[V(\varphi), V(\psi)]$.

3) $V(\varphi) = 0$, если $\varphi \in K$, $\varphi \neq 0$.

4) $V(\varphi) = \infty$ в том и только в том случае, если $\varphi = 0$.

Такая функция называется *нормой* поля $\sum$ над K[1]).

[1]) Более точно, это—дискретная норма ранга один.

Мы покажем теперь, что и обратно, каждая норма поля $\sum$ над K, кроме одной исключительной, получается из определенного класса бирационально эквивалентных ветвей кривых, связанных с полем $\sum$. Исключение составляет тривиальная норма, которая принимает на всех элементах поля $\sum$ (кроме нулевого элемента) значение нуль. Этот случай мы исключим из дальнейшего рассмотрения.

Пусть $V(\varphi)$ — любая нетривиальная норма поля $\sum$ над K. Докажем прежде всего два вспомогательных предложения:

Теорема 10.1. *Если $V(\varphi) \geqslant 0$, то найдется единственный элемент $a \in K$, для которого $V(\varphi - a) > 0$.*

Доказательство. Если $\varphi \in K$, то возьмем $a = \varphi$. Предположим теперь, что $\varphi \notin K$. Пусть ξ — ненулевой элемент из $\sum$, для которого $V(\xi) \neq 0$. В таком случае либо $V(\xi) > 0$, либо $V(\xi^{-1}) > 0$. Можно считать, что $V(\xi) \geqslant 0$. Элементы φ и ξ будут удовлетворять некоторому уравнению, левая часть которого будет многочленом

$$a_0(\varphi) + a_1(\varphi)\xi + \ldots + a_n(\varphi)\xi^n = 0,$$

причем $a_0(\varphi) \neq 0$, $a_n(\varphi) \neq 0$, $n > 0$. Следовательно,

$$V(a_0(\varphi)) = V(a_1(\varphi)\xi + \ldots + a_n(\varphi)\xi^n) \geqslant$$
$$\geqslant \min[V(a_1) + V(\xi), \ldots, V(a_n) + nV(\xi)].$$

Так как каждый из a_i есть многочлен от φ и $V(\varphi) \geqslant 0$, то отсюда, с помощью повторного применения свойств 1 и 2, можно получить, что $V(a_i(\varphi)) \geqslant 0$. Из условия $V(\xi) > 0$ следует теперь, что $V(a_0(\varphi)) > 0$. Но поле K алгебраически замкнуто, и поэтому

$$a_0(\varphi) = b_0(\varphi - b_1)\ldots(\varphi - b_r), \quad b_i \in K, \ b_0 \neq 0.$$

Следовательно,

$$V(b_0) + V(\varphi - b_1) + \ldots + V(\varphi - b_r) > 0.$$

Так как $V(b_0) = 0$, то отсюда вытекает, что хотя бы одно из значений $V(\varphi - b_i)$ больше нуля, как и требовалось. Единственность такого значения получается сразу: если $V(\varphi - a) > 0$, $V(\varphi - b) > 0$, то

$$V(b - a) = V[(\varphi - a) - (\varphi - b)] > 0$$

и поэтому $b = a$.

Теорема 10.2. *Если r есть наименьшее положительное значение, принимаемое нормой на элементах поля $\sum$, то значение нормы любого элемента из $\sum$ кратно r.*

Доказательство. Пусть $V(\xi) = r$ и $V(\varphi) = s$. Деля s на r, мы получим $s = rq + t$, где число q — целое, а t — целое неотрицательное и меньшее, чем r. В таком случае $V(\varphi\xi^{-q}) = t$, и, в силу нашего предположения относительно r, должно быть $t = 0$. Следовательно, s кратно r, как и требовалось.

Если $V(\varphi)$ — норма, наименьшее положительное значение r которой отлично от единицы, то $V(\varphi)/r$ будет нормой с наименьшим положительным значением, равным единице. Ввиду того, что такие две нормы имеют, по существу, одинаковые свойства, можно ограничиться рассмотрением только норм последнего типа, которые мы будем называть *неприводимыми*.

Теперь мы в состоянии доказать основную теорему:

Теорема 10.3. *Если $V(\varphi)$ — неприводимая норма поля $\sum$ над K, то найдется единственная с точностью до бирационального преобразования ветвь P кривой, связанной с полем $\sum$, для которой $V(\varphi)=V_P(\varphi)$.*

Доказательство. Пусть ξ — элемент поля $\sum$, имеющий норму 1. Тогда $\xi \notin K$, и поэтому ξ трансцендентен над K. Отсюда следует, что найдется такой элемент $\eta \in \sum$, что $\sum = K(\xi, \eta)$. Ввиду того, что в таком случае также $K(\xi, \eta^{-1}) = \sum$ и $V(\eta^{-1}) = -V(\eta)$, всегда можно считать, что $V(\eta) \geqslant 0$. В силу теоремы 10.1, найдется элемент $a_0 \in K$, для которого $V(\eta - a_0) > 0$. В таком случае будет также $V((\eta - a_0)/\xi) \geqslant 0$, и поэтому найдется $a_1 \in K$, для которого

$$V\left(\frac{\eta - a_0}{\xi} - a_1\right) = V\left(\frac{\eta - a_0 - a_1\xi}{\xi}\right) > 0.$$

Продолжив это построение, получим такую последовательность констант $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, что при обозначении

$$\eta_n = a_0 + a_1\xi + \ldots + a_n\xi^n$$

будет

$$V\left(\frac{\eta - \eta_n}{\xi^n}\right) > 0$$

или

$$V(\eta - \eta_n) > n.$$

Пусть теперь $g(\xi, \eta) \in K[\xi, \eta]$ и пусть сначала $g(\xi, \eta) \neq 0$. Тогда $V(g(\xi, \eta)) = N < \infty$. В силу теоремы I — 7.2, имеем

$$g(\xi, \eta) - g(\xi, \eta_n) = (\eta - \eta_n)\, h(\xi, \eta_n),$$

и поэтому $V(g(\xi, \eta) - g(\xi, \eta_n)) > N$ при любом $n > N$. Отсюда следует, что при всех таких значениях n будет

$$V(g(\xi, \eta_n)) = V(g(\xi, \eta))\ ^{1)}.$$

---

[1]) Из условия 2 определения нормы следует, что при $V(\varphi) \neq V(\psi)$ будет $V(\varphi \pm \psi) = \min[V(\varphi), V(\psi)]$. Действительно, если бы было $V(\varphi) < V(\psi)$ и $V(\varphi \pm \psi) > V(\varphi)$, то условие 2 привело бы к противоречию $V(\varphi) = V((\varphi \pm \psi) \mp \psi) \geqslant \min[V(\varphi \pm \psi), V(\psi)] > V(\varphi)$. В рассматриваемом здесь случае $V(g(\xi, \eta) - g(\xi, \eta_n)) > N$, а $V(g(\xi, \eta)) = N$. Поэтому должно быть $V(g(\xi, \eta)) = V(g(\xi, \eta_n))$. (*Прим. перев.*)

Но $g(\xi, \eta_n)$ есть многочлен от ξ, и значение $V(g(\xi, \eta_n))$ в точности равно наибольшей степени ξ, которая может быть выделена из него как множитель[1]). В случае, когда $g(\xi, \eta) = 0$, такое же рассуждение показывает, что при $n > N$ многочлен $g(\xi, \eta_n)$ делится на ξ^N.

Рассмотрим теперь параметризацию $(t, \bar{y})$, где положено

$$\bar{y} = a_0 + a_1 t + \ldots$$

Обозначим

$$\bar{y}_n = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n.$$

Тогда из теоремы IV—1.3, 2 следует, что для любого многочлена $g(x, y)$ будет

$$O(g(t, \bar{y})) = \max O(g(t, \bar{y}_n))$$

или

$$O(g(t, \bar{y})) = \infty,$$

смотря по тому, будут ли значения $O(g(t, \bar{y}_n))$ ограниченны, или неограниченно возрастают вместе с n. Сравнивая это с положением, установленным в предыдущем абзаце, мы видим, что

$$O(g(t, \bar{y})) = V(g(\xi, \eta)).$$

Очевидно, что такое же соотношение имеет место для всех элементов поля частных $\sum$ кольца $K[\xi, \eta]$. Если $f(x, y) = 0$ — неприводимое уравнение, которому удовлетворяют ξ и η, то

$$O(f(t, \bar{y})) = V(f(\xi, \eta)) = V(0) = \infty$$

и поэтому $f(t, \bar{y}) = 0$. Отсюда следует, что $t, \bar{y}$ есть параметризация некоторой ветви P кривой f.

Остается лишь показать, что ветвь P однозначно определена. Пусть Q — ветвь кривой f, для которой $O_Q(\varphi) = O_P(\varphi)$ при любом $\varphi \in \sum$. Тогда из соотношений $O_Q(\xi) = 1$ и $O_Q(\eta) \geqslant 0$ следует, что ветвь Q имеет некоторую параметризацию вида $(t, \bar{z})$. Поступив так же, как при построении $\bar{y}$, и использовав то обстоятельство, что константы, определяемые каждым шагом этого процесса, определяются однозначно, мы увидим, что должно быть $\bar{y} = \bar{z}$. Следовательно, $Q = P$ и теорема доказана.

---

[1]) Это следует из примечания на предыдущей странице. (*Прим. перев.*)

Глава VI

ЛИНЕЙНЫЕ РЯДЫ

Среди наиболее интересных свойств неприводимых кривых встречаются такие, которые остаются неизменными при любом бирациональном преобразовании кривой. Центральную роль при изучении таких свойств играет теория так называемых «линейных рядов», состоящих из систем ветвей кривой. Настоящая глава посвящена изучению и некоторым применениям линейных рядов.

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ РЯДЫ

1.1. Введение. Пусть F — неприводимая плоская кривая порядка m. Мы видели, что любая кривая G порядка m', не содержащая F, пересекает кривую F в mm' точках, если считать точки пересечения с надлежащей кратностью. Зададим себе следующий вопрос: «На кривой F задано mm' точек. Существует ли кривая G, пересекающая F в этих и только в этих точках?» Если $m=1$ или $m=2$, то совершенно очевиден положительный ответ на этот вопрос. Однако при больших значениях m ответ зависит (по крайней мере, при некоторых значениях m') от расположения точек. Так, при $m=3$ и $m'=1$ ответ будет положительным лишь в случае, когда точки коллинеарны; в противном случае он будет отрицательным. При бо́льших значениях m' ответ вообще не очевиден.

Обобщением указанного вопроса является такой: «Задано некоторое число $k \leqslant mm'$ точек кривой F. Сколько линейно независимых кривых порядка m' могут пересекать F в этих точках и в $mm'-k$ произвольных других?» О «линейно независимых» кривых мы говорим по той причине, что любая линейная комбинация кривых, проходящих через данные точки, также будет проходить через эти точки. Таким образом, мы приходим к рассмотрению пересечений кривой F с линейными системами кривых.

1.2. Циклы и ряды. Для удобства рассмотрения пересечений кривой F с другими кривыми введем понятие *цикла* на кри-

вой F[1]). Циклом называется формальная сумма вида $n_1P_1+\ldots$ $\ldots+n_kP_k$ или $\sum n_iP_i$, где P_i — ветви кривой F и n_i — неотрицательные целые числа. Часто бывает удобно обозначать цикл знаком $\sum n_PP$, где суммирование распространено на все ветви кривой F, но $n_P\neq 0$ только для конечного числа этих ветвей. При таком обозначении два цикла $\sum n_PP$ и $\sum m_PP$ считаются равными в том и только в том случае, если $n_P=m_P$ при всех P. Сумму и разность циклов определяют, как обычно, формулами $\sum n_PP+\sum m_PP=\sum(n_P+m_P)P$ и $\sum n_PP-\sum m_PP=\sum(n_P-m_P)P$, причем последнее определение применяется лишь в случае, когда $n_P\geqslant m_P$ при всех P. Если все $n_P=0$, то цикл $\sum n_PP$ имеет обычные свойства нулевого элемента и будет обозначаться просто 0. Для любого цикла $\sum n_PP$ определено неотрицательное целое число $n=\sum n_P$, называемое *порядком* этого цикла.

Если $A=\sum n_PP$ и $B=\sum m_PP$ — два цикла и если $n_P\geqslant m_P$ при всех P, то мы будем говорить, что цикл A *содержит* цикл B. Другим способом выражения этого же соотношения является утверждение, что $A-B$ есть цикл.

Если $G=0$ — любая кривая, не содержащая кривую F своей компонентой, то мы будем говорить, что кривая G (или многочлен G) *пересекает* кривую F по циклу $\sum n_PP$, где $n_P=O_P(G)$. Цикл $\sum n_PP$ называется *пересечением* F и G.

Одним из непосредственных следствий этого определения является то, что кривая порядка m' пересекает кривую F по циклу порядка mm'. Также непосредственно очевидно, что цикл, по которому кривая GH пересекает кривую F, равен сумме циклов, по которым пересекают F кривые G и H.

Если G пересекает кривую F по циклу B, содержащему цикл A, то будем говорить, что кривая G (или многочлен G) *высекает* цикл A. Другими словами, кривая G высекает цикл $\sum n_PP$, если $O_P(G)\geqslant n_P$ при всех P.

Пусть

$$\sum_0^r \lambda_iG_i=0 \tag{1.1}$$

— некоторая линейная система кривых порядка m'. Для краткости мы будем обозначать $\sum\lambda_iG_i$ через G_λ. Будем рассматривать только те значения λ_i, при которых кривая G_λ не содержит F своей компонентой, и обозначим через A_λ цикл, по которому G_λ пересекает F. Множество циклов A_λ называется *линейным рядом*

---

[1]) Термин «*цикл*» введен А. Вейлем в книге «Основы алгебраической геометрии» (Foundations of algebraic Geometry, *Amer. Math. Soc. Coll.*, 1946). Классическим термином для выражения этого понятия был термин «*группа точек*». В так называемой «арифметической» теории алгебраических функций аналогичное понятие называется «*дивизором*».

на кривой F. Мы будем говорить, что система (1.1) *пересекает* F по этому линейному ряду.

Примеры. 1. Пусть F — неприводимая кривая второго порядка, а система G_λ состоит из всех прямых, проходящих через точку p, не лежащую на F. Если прямая G_λ не касается кривой F, то она пересекает F в двух точках, являющихся центрами ветвей P_λ и Q_λ. В этом случае будет $A_\lambda = P_\lambda + Q_\lambda$. Две касательные, проведенные из точки p к кривой F, имеют порядок 2 на соответствующих ветвях P и Q кривой F. Таким образом, в нашем примере линейный ряд состоит из всех циклов вида $P_\lambda + Q_\lambda$ и из циклов $2P$ и $2Q$.

2. Если в приведенном примере точка p будет лежать на данной кривой, то прямая G_λ будет пересекать F по циклу $P_0 + P_\lambda$, где P_0 — ветвь кривой F с центром в p. В частности, если G_λ касается F в точке p, то будет $P_\lambda = P_0$. Таким образом, в этом случае линейный ряд состоит из циклов вида $P_0 + Q$, где Q — произвольная ветвь кривой F. P_0 называется *неподвижной ветвью* (а точка p — *неподвижной точкой*) ряда.

Возможное присутствие неподвижных ветвей или, в более общем случае, неподвижных циклов позволяет обобщить определение линейного ряда. Пусть, как и выше, каждая кривая G_γ пересекает F по циклу A_λ и пусть A_λ может быть записан в виде $B_\lambda + C$, где цикл C не зависит от λ. В таком случае множество циклов B_λ также называется линейным рядом. О ряде B_λ мы будем говорить, что он *высекается* системой кривых G_λ. Это определение будет включать в себя первоначальное, если мы допустим, что цикл C может быть равным нулю. В случае приведенного выше примера 2 мы можем сказать, что пучок прямых G_λ высекает ряд, циклами которого являются отдельные ветви Q кривой F.

Следует отметить, что не обязательно брать цикл C таким, чтобы он содержал *все* неподвижные ветви циклов A_λ. Поэтому ряд, состоящий из B_λ, может также иметь некоторые неподвижные ветви. В большинстве случаев, однако, оказывается наиболее целесообразным выбирать в качестве цикла C наибольший возможный, чтобы исключить из циклов A_λ неподвижные ветви.

3. Неприводимая кривая $F = x^3 + y^3 - 2xy = 0$ имеет двойную точку в начале координат. Касательные в этой точке совпадают с координатными осями. Кривая

$$\lambda_0 (y - y^2) + \lambda_1 (x^2 - y^2) + \lambda_2 (xy - y^2) = 0$$

пересекает F по циклу $A_\lambda = 2P_1 + P_2 + P_3 + P_\lambda + Q_\lambda$, где P_1 и P_2 — ветви с центром в начале, а P_3 — ветвь с центром (1,1) (рис. 20). В этом случае в качестве цикла C можно взять $2P_1 + P_2 + P_3$ или любой цикл, содержащийся в нем.

Если $A_\lambda = B_\lambda + C$, то порядок B_λ равен разности порядков A_λ и C. Но цикл A_λ, являющийся циклом пересечения кривых порядков m и m', имеет порядок mm', независимый от λ. Отсюда следует, что и порядок B_λ также не зависит от λ. Таким образом,

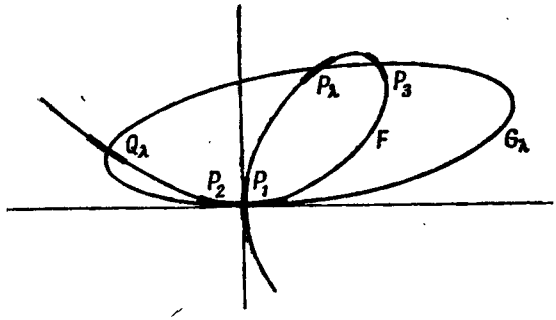

Рис. 20.

можно говорить о порядке линейного ряда, понимая под этим порядок любого входящего в этот ряд цикла.

1.3. Размерность ряда. Рассмотрим ряд, по которому кривые второго порядка $G_\lambda = \lambda_0 x^2 + \lambda_1 xy + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 x + \lambda_4 y + \lambda_5 = 0$ пересекают прямую $y = 0$. Ситуация в этом случае отличается от положения в приведенных выше примерах в двух отношениях. Во-первых, G_λ содержит y множителем, если $\lambda_0 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0$. Поэтому при образовании линейного ряда мы должны исключить из рассмотрения соответствующие G_λ. Во-вторых, можно заметить, что различные G_λ могут пересекать прямую по одному и тому же циклу. В самом деле, очевидно, что цикл A_λ не зависит от λ_1, λ_2 и λ_4. Отсюда следует, что если мы заменим рассматриваемую систему кривых системой

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2 = 0,$$

то получим тот же самый линейный ряд. Однако при этом исчезнут отмеченные выше невыгодные особенности. Покажем, что такая замена может быть произведена во всех случаях.

Рассмотрим систему кривых (1.1). Как показано в п. III—4.1, можно считать, что r есть размерность этой системы, так что многочлены G_i линейно независимы. В таком случае имеем следующую теорему:

Теорема 1.1. *Если $q+1$ линейно независимых кривых системы* (1.1) $(0 \leqslant q \leqslant r)$ *пересекают F по одному и тому же циклу A, то q линейно независимых кривых системы содержат кривую F своей компонентой и обратно.*

Доказательство. Пусть $s=r-q$. Можно считать, что $q+1$ линейно независимыми кривыми системы (1.1), пересекающими кривую F по циклу A, являются кривые $G_s, G_{s+1}, \ldots, G_r$. Рассмотрим кривые $\alpha G_s+\beta G_{s+k}$, $k=1, \ldots, q$. Если P — ветвь F, не входящая в A, то можно подобрать значения α_k и β_k так, чтобы многочлен $\alpha_k G_s+\beta_k G_{s+k}$ имел положительный порядок ν на ветви P. В таком случае сумма порядков многочлена $\alpha_k G_s+\beta_k G_{s+k}$ на всех ветвях кривой F будет равна (порядку $A)+\nu=mm'+\nu>mm'$, и поэтому кривая $\alpha_k G_s+\beta_k G_{s+k}$ имеет F своей компонентой. Так как при этом было $\beta_k\neq 0$, $k=1, \ldots, q$, то полученные кривые будут независимыми. Обратно, если q независимых кривых системы (1.1), например $G_1, \ldots, G_q$, имеют кривую F своей компонентой и если кривая G_λ пересекает кривую F по циклу A_λ, то $q+1$ независимых кривых G_λ, $G_\lambda+G_1, \ldots, G_\lambda+G_q$ пересекают F по тому же циклу A_λ. Этим заканчивается доказательство теоремы.

Важным следствием этой теоремы является

Теорема 1.2. *Любой линейный ряд может быть высечен системой вида* (1.1), *в которой не имеется кривых, содержащих F своей компонентой. В этом случае каждая кривая системы высекает цикл, причем каждый цикл высекается единственной кривой системы.*

Доказательство. Пусть система $\sum\limits_0^{r'}\lambda_i G_i$ высекает ряд B_λ. Пусть q — максимальное число независимых кривых системы, имеющий кривую F своей компонентой, и пусть $G_{r+1}, \ldots, G_{r'}$, $r=r'-q$, — одна из систем таких кривых. В таком случае система $\sum\limits_0^{r}\lambda_i G_i$ также высекает ряд B_λ и удовлетворяет поставленным условиям.

Если система (1.1) обладает свойством, указанным в теореме 1.2, то число r, являющееся размерностью системы кривых, называется также *размерностью линейного ряда*. Линейный ряд порядка n и размерности r обозначается g_n^r.

1.4. Упражнения. 1. Кривая $F=x^4+y^4-4xy^2=0$ имеет следующие ветви с центром в начале координат:

$$P_1=(t^2,\ 2t-t^5/16-5t^9/1024+\ldots),$$
$$P_2=(t^2,\ t^3/2+t^7/64+7t^9/4096+\ldots).$$

Показать, что система

$$\lambda_0 x^2+\lambda_1 xy+\lambda_2(y^2-4x)=0$$

высекает на ней линейный ряд g_3^2 без неподвижных точек. Найти условия для λ, при которых цикл B_λ содержит ветвь P_1,

и интерпретировать эти условия геометрически. Сделать то же самое для ветви P_2. Обратить внимание на то, что если B_λ содержит P_2, то он непременно содержит $2P_2$.

2. Найти порядок и размерность линейного ряда без неподвижных точек, высекаемого на кривой $y-x^2=0$ системой $\lambda_0x^3+\lambda_1y^3+\lambda_2xy=0$.

3. Пусть a, p, q — три коллинеарные точки на неприводимой кривой F третьего порядка. Пусть b, c, d, e — такие точки кривой F, что p, q, b, c, d, e оказываются лежащими на кривой второго порядка. Показать, что пучок прямых, проходящих через a, высекает на кривой F тот же линейный ряд q_2' без неподвижных точек, что и пучок линий второго порядка, проходящих через точки b, c, d, e.

§ 2. ПОЛНЫЕ РЯДЫ

2.1. Виртуальные циклы. В приведенном определении размерности линейного ряда мы использовали размерность системы кривых, высекающей этот ряд. Однако один и тот же ряд может высекаться различными системами кривых (см. выше, упражнение 3). Это поднимает вопрос о том, будет ли размерность линейного ряда определена однозначно. Для ответа на этот вопрос, а также по другим причинам, оказывается удобным рассмотреть циклы, высекаемые не многочленами, а рациональными функциями.

Прежде всего обобщим определение цикла, допустив для коэффициентов n_P отдельных ветвей также и отрицательные целые значения. В таком случае очевидно, что совокупность циклов образует коммутативную группу относительно сложения. Циклы того типа, который мы рассматривали выше (т. е. без отрицательных коэффициентов), называются *эффективными* циклами. Циклы же с одним или несколькими отрицательными коэффициентами называются *виртуальными*.

Если φ — любой ненулевой элемент поля $\sum$, то мы, как и раньше, определяем цикл, по которому рациональная функция φ пересекает кривую F, как сумму $\sum n_PP$, в которой $n_P=O_P(\varphi)$. В таком случае новая формулировка теоремы V — 3.3 будет гласить, что любой ненулевой элемент поля $\sum$ пересекает кривую F по циклу порядка нуль. Полезно следующее вспомогательное предложение:

Теорема 2.1. *Элементами поля $\sum$, пересекающими F по нулевому циклу, будут константы и только они.*

Доказательство. Выражение «φ пересекает F по циклу O» означает, что $O_P(\varphi)=0$ для любой ветви P. Пусть P_0 — любая ветвь кривой F и $a\neq 0$ — постоянный член в разложении φ, соответствующем ветви P. В таком случае будет $O_{P_0}(\varphi-a)>0$,

в то время как для любой другой ветви P будет $O_P(\varphi - a) \geqslant 0$. Отсюда следует, что $\sum_P O_P(\varphi - a) > 0$ и поэтому $\varphi - a = 0$ (теорема V — 3.3), т. е. $\varphi = a$.

Одним из следствий доказанного является

Теорема 2.2. *Если φ и ψ пересекают F по одному и тому же циклу, то $\varphi = a\psi$, где $a \in K$.*

2.2. Эффективные и виртуальные ряды. Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — элементы поля $\sum$, линейно независимые над K. В таком случае $\sum \lambda_i \varphi_i \neq 0$ для любой системы констант λ_i, в которой не все λ_i равны нулю. Поэтому $\sum \lambda_i \varphi_i$ будет пересекать F по некоторому циклу A_λ. Как и раньше, положим $A_\lambda = B_\lambda + C$, где C может быть любым циклом. Множество циклов B_λ будет называться линейным рядом размерности r. Ряд B_λ будет называться *эффективным*, если все входящие в него циклы будут эффективными. В противном случае ряд называется *виртуальным*. Прежде всего мы должны оправдать такое расширение термина «линейный ряд», показав, что определенные раньше линейные ряды являются эффективными линейными рядами в смысле нового определения и имеют в обоих определениях одну и ту же размерность. Пусть $G_\lambda = \sum_0^r \lambda_i G_i$ пересекает F по циклу A_λ и пусть g_n^r состоит из циклов B_λ, где $A_\lambda = B_\lambda + C$. Положим $\varphi_i = G_i(\xi) / G_0(\xi)$. Тогда $\sum \lambda_i \varphi_i$ пересекает F по циклу $A_\lambda - A_0$, где A_0 — цикл, по которому G_0 пересекает кривую F. Поэтому $\sum \lambda_i \varphi_i$ будет пересекать F по циклу $B_\lambda + C'$, где $C' = C - A_0$. Обратно, пусть $\sum \lambda_i \varphi_i$ пересекает F по циклу $B_\lambda + C$, где цикл B_λ эффективен при любых λ. В таком случае все φ_i могут быть выражены в виде $G_i(\xi) / G_0(\xi)$, где все G_i — однородные многочлены одной и той же степени. Можно считать при этом, что порядок каждого из многочленов на всех ветвях, входящих в выражение цикла C, настолько высок, что будет эффективным цикл $C + A$, где A — пересечение F и G_0. В таком случае $\sum \lambda_i G_i$ пересекает F по циклу $B_\lambda + (C + A)$. После этого остается доказать лишь совпадение определений размерности, т. е. показать, что линейная комбинация элементов φ_i равна нулю тогда и только тогда, когда соответствующая линейная комбинация G_i делится на F. Но это непосредственно следует из определения поля $\sum$ (см. V — 3.1).

То, что размерность линейного ряда зависит лишь от множества циклов, образующих этот ряд, вытекает из следующей

Теоремы 2.3. *Если системы $\sum_0^r \lambda_i \varphi_i$ и $\sum_0^s \mu_j \psi_j$ пересекают кривую F соответственно по циклам $B_\lambda + C_1$ и $B_\mu + C_2$ и если множество циклов B_λ совпадает с множеством циклов B_μ,* то $r = s$.

Доказательство. Пусть φ — функция первого семейства, пересекающая F по циклу $B+C_1$, и ψ — функция второго семейства, пересекающая F по циклу $B+C_2$. Обозначим $\psi'_j=\psi_j\varphi/\psi$. Тогда $\sum_0^s \mu_j\psi'_j$ будет пересекать F по циклам $B_\mu+C_1$. При любом значении j функция ψ'_j пересекает F по циклу, совпадающему с циклом, по которому пересекает F некоторая функция φ'_j из семейства $\sum\lambda_i\varphi_i$. Поэтому, в силу теоремы 2.2, будет $\psi'_j=a_j\varphi'_j$. Это означает, что ψ'_j линейно выражаются через φ_i. Но так как ψ'_j линейно независимы лишь одновременно с ψ_j, то $s\leqslant r$. Подобным же образом получается, что $r\leqslant s$, следовательно, $s=r$.

Метод доказательства последней теоремы позволяет ближе всмотреться в строение линейного ряда. Каждому циклу ряда соответствует некоторая система значений λ и некоторая система значений μ. В силу теоремы 2.2, обе эти системы значений однозначно определены. Если $\psi'_j=\sum_i a_i^j\varphi_i$, то значения λ и μ, соответствующие одному и тому же циклу ряда, будут связаны формулами $\rho\lambda_i=\sum_j a_i^j\mu_j$, $\rho\neq 0$, в которых, ввиду обратимости этой связи, должно быть $|a_i^j|\neq 0$. Другими словами, коэффициенты линейной комбинации функций, высекающей линейный ряд, ведут себя как проективные координаты в некотором пространстве S_r, точками которого являются циклы ряда. Конечно, при рассмотрении эффективных циклов рациональные функции могут быть заменены многочленами.

2.3. Полные ряды. Так как каждый линейный ряд размерности r можно считать проективным пространством S_r, то можно рассматривать различные подпространства этого S_r. Они будут также линейными рядами. Однако более интересна обратная постановка вопроса: «Можно ли построить пространство S_s, содержащее S_r в качестве собственного подпространства $(s>r)$?» Другим вопросом, тесно связанным с предыдущим, является такой: «При каких условиях два цикла могут рассматриваться как точки одного и того же S_r?» Ответ на первый вопрос будет дан позже. Второй же вопрос может быть легко решен сейчас.

Теорема 2.4. *Два цикла B_1 и B_2 могут быть элементами одного и того же линейного ряда тогда и только тогда, когда найдется элемент $\varphi\in\sum$, пересекающий F по циклу B_1-B_2.*

Доказательство. Пусть φ пересекает F по циклу B_1-B_2. Обозначим через $B_\lambda+C$ цикл пересечения рациональной функции $\lambda_0\varphi+\lambda_1 1$ с кривой F. При этом положим $C=-B_2$. Тогда при $\lambda_0=1$, $\lambda_1=0$ будет $B_\lambda=B_1$, а при $\lambda_0=0$, $\lambda_1=1$ будет $B_\lambda=B_2$. Таким образом, B_1 и B_2 оказываются элементами одного и того же

линейного ряда. Обратно, если $\sum \lambda_i \varphi_i$ пересекает F по циклу $B_\lambda + C$ и если B_1, B_2 встречаются среди B_λ, то можно считать, что φ_0 пересекает F по циклу $B_1 + C$, а φ_1 — по циклу $B_2 + C$. В таком случае функция $\varphi = \varphi_0 / \varphi_1$ будет пересекать F по циклу $B_1 - B_2$.

Эта теорема имеет несколько интересных следствий. Мы будем говорить, что циклы B_1 и B_2 *эквивалентны* и записывать это знаком $B_1 \equiv B_2$, если эти циклы являются элементами одного и того же линейного ряда. Так как любая ненулевая константа пересекает F по циклу $0 = B - B$, то $B \equiv B$. Если некоторая φ пересекает F по циклу $B_1 - B_2$, то φ^{-1} будет пересекать F по циклу $B_2 - B_1$. Поэтому из соотношения $B_1 \equiv B_2$ следует, что $B_2 \equiv B_1$. Наконец, если φ пересекает F по циклу $B_1 - B_2$, а ψ — по циклу $B_2 - B_3$, то функция $\varphi\psi$ будет пересекать F по циклу $B_1 - B_3$. Другими словами, из соотношений $B_1 \equiv B_2$ и $B_2 \equiv B_3$ следует, что $B_1 \equiv B_3$. Следовательно, введенное понятие эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому множество циклов кривой распадается на классы эквивалентности.

Если φ_1 пересекает F по циклу $A_1 - B_1$, а φ_2 — по циклу $A_2 - B_2$, то функция $\varphi_1\varphi_2$ пересекает F по циклу $(A_1 + A_2) - (B_1 + B_2)$. Следовательно, соотношения $A_1 \equiv B_1$ и $A_2 \equiv B_2$ влекут за собой соотношение $A_1 + A_2 \equiv B_1 + B_2$. Если мы обозначим класс эквивалентности, содержащий некоторый цикл A, через $\{A\}$, то из сказанного следует, что класс $\{A + B\}$ однозначно определен классами $\{A\}$ и $\{B\}$. Если мы определим сумму классов формулой $\{A\} + \{B\} = \{A + B\}$, то совокупность классов будет образовывать коммутативную группу относительно сложения. Эта группа является фактор-группой группы циклов по подгруппе $\{0\}$, состоящей из пересечений F с рациональными функциями.

Циклы, принадлежащие к одному классу эквивалентности, имеют один и тот же порядок, и поэтому мы можем говорить о *порядке класса*. Все циклы линейного ряда всегда принадлежат к одному и тому же классу. Наоборот, если $B_0, \ldots, B_r$ — эквивалентные циклы, то можно указать функции φ_i, пересекающие F по циклам $B_i - B_0$, $i = 0, \ldots, r$. Тогда система $\sum \lambda_i \varphi_i$ пересекает F по циклам $B_\lambda - B_0$ и B_i оказываются элементами одного линейного ряда, образованного всеми B_λ. Ввиду того, что существуют множества линейно независимых элементов поля $\sum$, содержащие произвольно большое число элементов (можно взять, например, $1, \xi, \xi^2 \ldots, \xi^r$ при любом r), мы видим, что класс эквивалентности может содержать линейные ряды произвольно высокой размерности. Однако если мы ограничимся эффективными рядами, то положение меняется. Это вытекает из следующей

Теоремы 2.5. *Если линейный ряд g_n^r эффективен, то $r \leqslant n$.*

Доказательство. Пусть ряд g_n^r высекается системой $G_\lambda = \sum_0^r \lambda_i G_i$. Предположим, что $r > n$. Если P — ветвь кривой F, на которой не все G_i имеют положительные порядки, то совокупность G_λ, имеющих положительный порядок на P, образует линейную систему размерности $r-1$. Эта система высекает на F линейный ряд g_n^{r-1}, имеющий P неподвижной ветвью. Исключая эту неподвижную ветвь, приходим к линейному ряду g_{n-1}^{r-1}. Продолжая таким же образом, мы получим в конце концов линейный ряд $g_0^{r'}$, где $r' = r - n > 0$. Но это невозможно, так как единственным эффективным циклом порядка 0 является нулевой цикл, а проективное пространство может содержать единственный элемент лишь в случае размерности нуль. Следовательно, $r \leqslant n$.

Теорема 2.6. *Совокупность эффективных циклов, принадлежащих одному классу эквивалентности, образует линейный ряд.*

Доказательство. Пусть $B_0, \ldots, B_r$ — эффективные циклы класса $\{A\}$. Обозначим через φ_i функции, пересекающие F по циклам $B_i - B_0$. Если $B_0 = \sum n_P P$, то эффективность циклов B_i равносильна условию $O_P(\varphi_i) \geqslant -n_P$. Но если это условие удовлетворяется каждой из функций φ_i, то оно удовлетворяется любой их линейной комбинацией. Следовательно, циклы B_λ, определяемые из условия, что $\sum \lambda_i \varphi_i$ пересекает F по циклу $B_\lambda - B_0$, образуют эффективный ряд. Выберем теперь в классе $\{A\}$ любое конечное множество эффективных циклов и образуем линейный ряд с помощью описанного приема. Этот ряд будет иметь некоторую размерность r (если в $\{A\}$ вообще не содержится эффективных циклов, то мы последуем обычному соглашению и положим $r = -1$). Можно считать, что наш ряд является совокупностью циклов B_λ, определяемых из условия, что $\sum \lambda_i \varphi_i$ пересекает F по циклу $B_\lambda - B_0$, и что φ_i линейно независимы над K. Если множество B_λ содержит все эффективные циклы класса $\{A\}$, то теорема доказана. Если это не так и B_{r+1} — цикл из $\{A\}$, не принадлежащий множеству B_λ, то обозначим через φ_{r+1} функцию, пересекающую F по циклу $B_{r+1} - B_0$. Функция φ_{r+1} не может быть линейно зависимой от $\varphi_0, \ldots, \varphi_r$, и поэтому система $\varphi_0, \ldots, \varphi_r, \varphi_{r+1}$ будет высекать линейный ряд размерности $r+1$. В силу теоремы 2.5, такой процесс нельзя продолжить неограниченно. Тем самым теорема доказана.

Таким образом, с каждым классом эквивалентных циклов связывается однозначно определенный максимальный эффективный линейный ряд (может быть, пустой). Такой ряд называется *полным* рядом. Так как каждый цикл A принадлежит определенному классу, то он однозначно определяет соответствующий пол-

ный ряд, обозначаемый через $|A|$. Если цикл A эффективен, то он является элементом ряда $|A|$.

Из соотношения $A \equiv B$ следует, что $|A| = |B|$. Наоборот, из равенства $|A| = |B|$ не всегда следует, что $A \equiv B$. Если C — один из циклов ряда $|A|$, то он будет принадлежать также $|B|$, следовательно, будет $A \equiv C$, $B \equiv C$ и поэтому $A \equiv B$. Но если $|A|$ и $|B|$ оказываются пустыми, то такого элемента C не существует и мы ничего не можем утверждать. Например, если P — ветвь кривой F, то $|-P| = |-2P| =$ пустому множеству, но $-P \not\equiv -2P$, так как эти циклы имеют различные порядки.

При изучении линейных рядов особенно важны полные ряды. В остальной части этой главы мы будем иметь дело почти исключительно с такими рядами. Некоторые их свойства, непосредственно вытекающие из определения, указаны в следующей

Теореме 2.7. 1) *Каждый эффективный линейный ряд g_n^r содержится в единственном полном ряде g_n^R. При этом $R \geqslant r$. Если эти ряды рассматривать как проективные пространства, то g_n^r есть подпространство g_n^R.*

2) *Если два эффективных ряда содержат общий цикл, то они содержатся в одном и том же полном ряде.*

3) *Если $|A|$ и $|B|$ — любые непустые полные ряды, то полный ряд $|A+B|$ однозначно определен рядами $|A|$ и $|B|$. Он содержит все попарные суммы циклов из $|A|$ с циклами из $|B|$.*

Следующее свойство полных рядов довольно важно и заслуживает специального упоминания.

Теорема 2.8. *Пусть g_n^r — произвольный эффективный ряд и A — любой эффективный цикл. Если g есть множество всех таких эффективных циклов B, для которых сумма $A+B$ является циклом ряда g_n^r, то g есть линейный ряд. Если ряд g_n^r — полный, то ряд g — также полный.*

Доказательство. Пусть кривые G_λ пересекают F по циклам $B'_\lambda + C$, где B'_λ — циклы ряда g_n^r. Тогда G_μ, пересекающие F по циклам вида $B_\mu + A + C$, очевидно, образуют линейную систему, и поэтому множество циклов B_μ будет некоторым линейным рядом g'. Очевидно, что $g' \subset g$. С другой стороны, если B — любой элемент множества g, то найдется некоторый G_λ, пересекающий F по циклу $B + A + C$ и поэтому этот G_λ оказывается одним из упомянутых G_μ, а цикл B — элементом g'. Следовательно, $g = g'$. Наконец, если ряд g не будет полным, то найдется такой цикл B_1, что $B_1 \equiv B \in g$, но $B_1 \notin g$. Отсюда следует, что $B'_1 = B_1 + A \equiv B + A \in g_n^r$, но $B'_1 \notin g_n^r$ и, следовательно, ряд g_n^r не является полным.

Ряд g обозначается $g_n^r - A$ и называется *вычетом* ряда g_n^r относительно цикла A. Если ни один из циклов ряда g_n^r не содер-

жит A, то этот вычет будет пустым. Если $g_n^r = |D|$ и $A \equiv A'$, то $g_n^r - A = g_n^r - A' = |D - A|$. Следовательно, можно говорить о вычете $|D|$ относительно *ряда* $|A|$.

2.4. Упражнения. 1. Пусть системы $\sum_0^r \lambda_i G_i$ и $\sum_0^s \mu_j H_j$ высекают соответственно ряды g_n^r и g_n^s, имеющие общий цикл A, который можно предполагать соответствующим значениям $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$, $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = \ldots = \mu_s = 0$. В таком случае система $\nu_0 G_0 H_0 + \sum_1^r \nu_i G_i H_0 + \sum_1^s \nu_{r+j} G_0 H_j$ высекает ряд g_n^q, содержащий ряды g_n^r и g_n^s.

2. Проверить выводы упражнения 1 действительным вычислением рядов порядка 2, высекаемых системами

$$\lambda_0 (xy - y) + \lambda_1 (x^2 + y^2 - 2x) = 0$$

и

$$\mu_0 (x + 1) + \mu_1 y = 0$$

на кривой $2y^2 - x^3 - x^2 = 0$.

3. а) Некоторый линейный ряд высекается на неприводимой кривой третьего порядка, имеющей одну двойную точку, с помощью системы кривых второго порядка, проходящих через три простые точки данной кривой. Каковы размерность и порядок ряда? Является ли этот ряд полным?

б) Каким образом на кривой четвертого порядка с тройной точкой можно высечь ряд g_4^4?

4. Показать, что доказательство теоремы III — 5.1 зависит, по существу, от построения ряда g_1^1 на кривой. Доказать, что любая кривая, содержащая некоторый ряд g_1^1, рациональна. Доказать то же самое для g_n^n.

§ 3. ИНВАРИАНТНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО РЯДА

В проводившихся выше рассуждениях основная кривая F вообще не играла существенной роли. Циклы были определены с помощью понятия порядка рациональной функции на ветви, а это понятие больше связано со свойствами поля $\sum$, чем со свойствами кривой F. Остальные понятия — линейный ряд, эффективный ряд, порядок, размерность, эквивалентность и полный ряд — были определены непосредственно в связи с полем $\sum$. Отсюда следует, что каждый цикл или ряд на кривой F имеет точный аналог на любом бирациональном образе F. Из этих замечаний вытекают три важных следствия:

Во-первых, линейные ряды можно рассматривать на пространственных кривых с таким же успехом, как и на плоских. Это относительно простое обобщение, разумеется, можно было ввести в самом начале нашего рассмотрения. Рассуждения п. 2.2 можно видоизменить так, чтобы получить доказательство возможности высечения любого эффективного ряда g_n^r на кривой C в пространстве S_k с помощью системы однородных многочленов $\sum_0^r \lambda_i G_i(x_0, \ldots, x_k)$, ни один из которых не обращается в нуль во всех точках кривой C.

Во-вторых, каждый связанный с кривой F объект, определенный лишь с помощью линейных рядов на этой кривой, остается тем же самым для любой кривой, бирационально эквивалентной F. Обнаружение и изучение таких бирациональных инвариантов является наиболее важным применением линейных рядов.

Наконец, при изучении этих бирациональных инвариантов несущественно, какая из класса бирационально эквивалентных кривых используется. Поэтому естественно, что мы будем делать выбор так, чтобы иметь дело с наиболее простым из возможных типов кривых. Такой свободой выбора мы воспользуемся в нашем дальнейшем исследовании.

§ 4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЛИНЕЙНЫМИ РЯДАМИ

4.1. Соответствие между преобразованиями и линейными рядами. Существует простая связь между рациональными преобразованиями кривой и линейными рядами на этой кривой. Мы приступим сейчас к установлению этой связи и используем ее, чтобы осветить по-новому оба указанных понятия.

Пусть C — неприводимая кривая в S_m и $\sum$ — ее поле рациональных функций. Пусть система $G_\lambda = \sum_0^R \lambda_j G_j(x)$ пересекает кривую C по циклам $A_\lambda + B$, где множество всех A_λ образует эффективный ряд g_n, не имеющий неподвижных точек. Свяжем с рядом g_n рациональное преобразование

$$y_j = G_j(x). \tag{4.1}$$

Докажем прежде всего, что *образ C' кривой C будет кривой тогда и только тогда, когда $n > 0$.*

Условием того, что C' есть кривая (см. V — 6.1), является непостоянство хотя бы одного из элементов $G_i(\xi)/G_j(\xi)$ поля $\sum$. Предположим, что $G_1(\xi)/G_0(\xi) \notin K$ и что $G_0(x)$ и $G_1(x)$ пересекают C соответственно по циклам $A_0 + B$ и $A_1 + B$. В таком случае $G_1(\xi)/G_0(\xi)$ пересекает C по циклу $A_1 - A_0 \neq 0$, откуда

следует, что A_0 и A_1 не являются оба нулями. Так как единственным эффективным циклом порядка нуль является нулевой цикл, мы должны иметь $n > 0$. Обратно, если $n > 0$, то найдутся два многочлена системы $\sum \lambda_j G_j$, например G_0 и G_1, пересекающие C по различным циклам. В таком случае $G_1(\xi)/G_0(\xi)$ пересекает C по циклу, отличному от нулевого, и поэтому не является элементом K. Отсюда следует, что C' есть кривая.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь случая, когда $n > 0$.

Пусть упомянутый выше ряд g_n имеет размерность r. Комбинируя результаты пп. 1.3 и 2.2, мы видим, что образующие элементы G_j системы G_λ могут быть выбраны таким образом, чтобы элементы $\varphi_0, \ldots, \varphi_r$, $\varphi_j = G_j(\xi)/G_0(\xi)$ были линейно независимыми над K и чтобы $\varphi_{r+1} = \ldots = \varphi_R = 0$. Отсюда следует, что последние координаты каждой точки кривой G' и каждой параметризации любой ее ветви равны нулю. Поэтому кривую G' можно рассматривать как лежащую в пространстве S_r, определяемом условиями $y_{r+1} = \ldots = y_R = 0$. Это позволяет ограничиваться рассмотрением случая, когда $R = r$.

Кривая C' определена не непосредственно рядом g_n^r, а многочленами C_λ, высекающими этот ряд. Покажем теперь, что при использовании другой системы многочленов, высекающей ряд g_n^r, получается та же кривая. Пусть многочлены $H_\mu = \sum_0^r \mu_i H_i$ пересекают C по циклам $A_\mu + B'$, где A_μ пробегает циклы ряда g_n^r. Полагая $\psi_j = H_j(\xi)/H_0(\xi)$, мы будем иметь, как и в п. 2.2, что $\psi_j = \sum_k a_j^k \theta \varphi_k$, где $|a_j^k| \neq 0$ и $\theta \in \sum$. Надлежащим выбором образующих многочленов системы G_λ (это соответствует преобразованию координат в S_r) можно добиться, чтобы эти уравнения имели вид $\psi_j = \theta\varphi_j$. Но так как $\psi_0 = \varphi_0 = 1$, то уравнения в действительности приводятся к виду $\psi_j = \varphi_j$. Требуемый вывод следует отсюда непосредственно.

Если мы будем исходить из произвольного рационального преобразования (4.1) кривой C, то многочлены системы $\sum \lambda_j G_j$ будут пересекать C по циклам вида $A_\lambda + B$, где A_λ образуют эффективный ряд g_n^r, не имеющий неподвижных точек. Две системы многочленов, определяющие одно и то же рациональное преобразование кривой C, будут давать одно и то же множество определенных выше рациональных функций φ_j. Функции же φ_j однозначно определяют линейный ряд. Действительно, если бы пересечение φ_λ с кривой C можно было записать в виде $B_\lambda - B_0$, то мы имели бы $A_\lambda - A_0 = B_\lambda - B_0$ или $A_\lambda + B_0 = B_\lambda + A_0$. Но так как, в силу нашего предположения, не существует ветвей, общих

всем циклам A_λ или всем циклам B_λ, то отсюда следуют равенства $A_0 = B_0$, $A_\lambda = B_\lambda$.

Полученные выводы объединяются в виде

Теоремы 4.1. *Между рациональными преобразованиями, обращающими данную кривую C снова в кривую, и эффективными рядами положительного порядка на кривой C, не имеющими неподвижных ветвей, существует взаимно однозначное соответствие.*

4.2. Строение линейных рядов. Наши познания о свойствах рациональных преобразований можно применить теперь для того, чтобы получить некоторые сведения о строении линейных рядов. Рассмотрим прежде всего случай, когда преобразование (4.1) будет бирациональным.

Если $B = \sum n_P P$, то $\min O_P(G_j) = n_P$. Следовательно, при любой параметризации $(\bar{x})$ ветви P, образом P будет $P' = (\bar{y})$, где $\bar{y}_j = t^{-n_P} G_j(\bar{x})$. В таком случае очевидно, что линейный многочлен $y_\lambda = \sum \lambda_j y_j$ пересекает кривую C' по циклу, совпадающему с образом цикла A_λ на кривой C. Другими словами, образы циклов линейного ряда g_n^r кривой C образуют на кривой C' линейный ряд, высекаемый гиперплоскостями пространства S_r. Так как рассматриваемый ряд имеет порядок n, то отсюда следует, что порядок кривой C' также равен n.

Пусть теперь преобразование (4.1) будет произвольным рациональным преобразованием кривой C в кривую C'. Как и раньше, положим $B = \sum n_P P$ и обозначим через $(\bar{x})$ параметризацию ветви P. Если $P' = (\bar{y})$ есть образ P, то найдется такое целое число $r_P \geqslant 1$, что

$$\bar{y}_j(t^{r_P}) = G_j(\bar{x})\, t^{-n_P}.$$

Далее:

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \Big[\sum_P O_P(G_\lambda) P\Big] - B = \\ &= \sum_P O_P(G_\lambda(\bar{x})\, t^{-n_P}) P = \\ &= \sum_P r_P O_{P'}(\bar{y}_\lambda) P = \\ &= \sum_{P'} \Big[\sum_\alpha r_{P_\alpha} O_{P'}(y_\lambda) P_\alpha\Big], \end{aligned}$$

где P_α — ветви кривой C, которые преобразуются в ветвь P' кривой C'. Обозначим через $A_{P'}$ цикл $\sum r_{P_\alpha} P_\alpha$. Тогда будем иметь

$$A_\lambda = \sum_{P'} O_{P'}(y_\lambda) A_{P'}.$$

Таким образом, каждый цикл ряда g_n^r может быть выражен суммой циклов $A_{P'}$. Согласно теореме V — 6.2, почти все циклы $A_{P'}$ имеют один и тот же порядок ν. Следовательно, почти все циклы $\sum O_{P'}(y_\lambda)P'$ имеют порядок n/ν. Но так как эти циклы представляют собой циклы пересечений кривой C' гиперплоскостями $y_\lambda = 0$, то мы видим, что кривая C' имеет порядок $n' = n/\nu$.

Множество циклов $A_{P'}$ называется *инволюцией* порядка ν и обозначается через γ_ν. О ряде g_n^r мы будем говорить, что он *составлен* из γ_ν. Каждая кривая несет на себе некоторую инволюцию γ_1, именно — совокупность всех ее ветвей. Каждый ряд составлен из этой γ_1. Ряд, составленный из некоторой инволюции γ_ν при $\nu > 1$, называется *составным*. Если такое представление ряда невозможно, то он называется *простым*. В этих терминах мы можем полностью сформулировать полученные результаты так:

Теорема 4.2. *Рациональное преобразование T тогда и только тогда будет бирациональным, когда связанный с ним линейный ряд g будет простым. Если g имеет порядок n и составлен из инволюции максимального порядка $\nu \geqslant 1$, то образ кривой C при преобразовании T, соответствующем ряду g, будет иметь порядок n/ν.*

Примеры. 1. Ряд g_n^1, не имеющий неподвижных ветвей, является инволюцией γ_n. Действительно, ряд g_n^1 на кривой C определяет рациональное преобразование C в прямую L, причем каждый цикл ряда g_n^1 состоит из тех ветвей кривой C, которые преобразуются в одну ветвь L. Следовательно, любой ряд g_n^1, для которого $n > 1$, будет составным и составлен из самого себя. Такой ряд часто называют *рациональной инволюцией*.

2. Пусть многочлены $\lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1$ пересекают кривую C по циклам $A_\lambda + B$, где A_λ образуют ряд g_n^1 без неподвижных ветвей. В таком случае многочлены $\lambda_0 G_0^r + \lambda_1 G_0^{r-1} G_1 + \ldots + \lambda_r G_1^r$ пересекают C по циклам $A'_\lambda + rB$ и циклы A'_λ образуют ряд g_{nr}^r без неподвижных ветвей, составленный из инволюции g_n^1.

3. Система

$$G_\lambda = \lambda_0 x_0 (x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1 x_1 (x_2^2 + x_0^2) + \lambda_2 x_2 (x_0^2 + x_1^2) = 0$$

высекает на неособенной кривой третьего порядка C (см. III — 2.5, упражнение 4)

$$x_0 (x_1^2 + x_2^2) + x_1 (x_2^2 + x_0^2) + x_2 (x_0^2 + x_1^2) - 2x_0 x_1 x_2 = 0$$

ряд g_6^2 без неподвижных ветвей. Так как кривая C и каждая из кривых G_λ инвариантны относительно квадратичного преобразования

$$x'_0 = x_1 x_2, \quad x'_1 = x_2 x_0, \quad x'_2 = x_0 x_1,$$

то ряд g_6^2 составлен из инволюции γ_2, элементами которой являются пары ветвей с центрами в точках (x_0, x_1, x_2) и (x_1x_2, x_2x_0, x_0x_1) кривой C. Отсюда следует, что образ C при преобразовании

$$y_0 = x_0(x_1^2 + x_2^2), \quad y_1 = x_1(x_0^2 + x_2^2), \quad y_2 = x_2(x_0^2 + x_1^2)$$

является кривой C' третьего порядка. Ввиду того, что кривая C не меняется при перестановке x_j и что такая перестановка вызывает лишь соответствующую перестановку y_j, кривая C' должна также оставаться неизменной при любой перестановке y_j. Отсюда следует, что C' имеет один из следующих видов:

$$C_1': \quad x_0x_1^2 + x_1x_2^2 + x_2x_0^2 - x_0x_2^2 - x_1x_0^2 - x_2x_1^2 = 0,$$

$$C_2': \quad k(x_0x_1^2 + x_0x_2^2 + x_1x_0^2 + x_1x_2^2 + x_2x_0^2 + x_2x_1^2) + \\ + kx_0x_1x_2 + l(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3) = 0.$$

Точка $(1, 1, i)$ кривой C переходит в точку $(0, 0, 1)$ кривой C'. Следовательно, если $C' = C_2'$, то должно быть $l = 0$. Ветвь

$$(1, t, -t(1 + 4t + 16t^2 + 84t^3 + \ldots))$$

кривой C преобразуется в ветвь

$$(2t + 8t^2 + 48t^3 + \ldots, \quad 1 + t^2 + 8t^3 + \ldots, \quad -1 - 4t - 17t^2 - 88t^3 + \ldots)$$

кривой C'. Этим исключается предположение, что $C' = C_1'$, и доказывается равенство $C' = C_2'$, в котором должно быть $k = 4h$. Можно показать, что кривая C' — неособенная (см. III—2.5, упражнение 4). Ниже будет показано (п. 5.3), что неособенная плоская кривая третьего порядка не будет рациональной. Из приводимого ниже упражнения 3 следует поэтому, что инволюция γ_ν также не является рациональной.

4.3. Нормальные кривые. Несколько интересных результатов получается при применении теоремы 4.2 к рациональным преобразованиям, порождаемым проектированием. Пусть кривая C порядка n в пространстве S_R проектируется в кривую C' подпространства S_r из центра S_s. Здесь $r + s = R - 1$ (см. II—5.1). Пусть гиперплоскости пространства S_R, проходящие через S_s, высекают на C ряд $g_{n'}^{r'}$, $1 \leqslant r' \leqslant r$, $1 \leqslant n' \leqslant n$ без неподвижных ветвей. Тогда C' будет образом C при преобразовании, определяемом рядом $g_{n'}^{r'}$. Применяя теорему 4.2, мы видим, что порядок C' равен n'/ν, где ν — порядок инволюции, из которой составлен ряд $g_{n'}^{r'}$.

Непосредственным следствием этого результата является

Теорема 4.3. *Порядок кривой не понижается при проектировании в том и только в том случае, если проектирование будет*

бирациональным преобразованием и если центр проектирования не пересекает данной кривой.

Доказательство. n'/ν будет равно n в том и только в том случае, если $\nu=1$ и $n'=n$, а эти условия эквивалентны условиям теоремы.

Кривая, имеющая линейную оболочку размерности r, называется *нормальной*, если она не является проекцией кривой того же порядка, имеющей линейную оболочку более высокой размерности.

Теорема 4.4. *Кривая C в пространстве S_R является нормальной тогда и только тогда, когда гиперплоскости из S_R высекают на ней полный ряд.*

Доказательство. Пусть S_r, $r \leqslant R$, есть линейная оболочка кривой C. Тогда гиперплоскости из S_r высекают на C тот же ряд g_n^r, что и гиперплоскости из S_R. Здесь n — порядок кривой. Поэтому мы можем исключить из рассмотрения S_R и рассматривать кривую C, как лежащую в S_r.

Пусть C есть проекция некоторой кривой C' порядка n, имеющей линейную оболочку $S_{r'}$, $r' > r$. Можно считать, что уравнениями проектирования будут

$$x_j = x'_j, \qquad j=0, \ldots, r.$$

Гиперплоскости $\sum_0^{r'} \lambda_i x'_i = 0$ пространства $S_{r'}$ высекают на C' ряд $g_n'^{r'}$, содержащий в себе ряд $g_n'^r$, высекаемый гиперплоскостями вида $\sum_0^r \lambda_i x'_i = 0$. В силу теоремы 4.3, проекция будет бирациональным преобразованием, а так как на кривой C гиперплоскости $\sum_0^r \lambda_i x_i = 0$ высекают ряд g_n^r, то этот ряд будет образом ряда $g_n'^r$. Ряд $g_n'^{r'}$ переходит в некоторый $g_n^{r'}$, содержащий g_n^r. Следовательно, ряд g_n^r не будет полным.

Обратно, если g_n^r не является полным, то найдется содержащий его ряд $g_n^{r'}$, $r' > r$. Если $g_n^{r'}$ высекается на кривой C системой $\sum_0^{r'} \lambda_i G_i(x)$, то можно предполагать, что многочлены G выбраны так, что система $\sum_0^r \lambda_i G_i(x)$ высекает циклы ряда g_n^r, т. е. те же самые циклы, что и система $\sum_0^r \lambda_i x_i$. Отсюда следует, что $o_i(\xi)/G_0(\xi) = \xi_i/\xi_0$, $0 \leqslant i \leqslant r$. Бирациональное преобразование T, определяемое формулами $x'_i = G_i(x)$, допускает в таком случае

обращение $x_j = x'_j$, являющееся проектированием из $S_{r'}$ в подпространство S_r. Если C' есть образ C при преобразовании T, то C будет являться проекцией C'. А так как C и C' имеют один и тот же порядок, то теорема доказана.

В качестве следствия из этой теоремы мы имеем

Теорему 4.5. *Простой ряд без неподвижных ветвей будет полным тогда и только тогда, когда соответствующая ему преобразованная кривая является нормальной.*

4.4. Полная редукция особенностей. В V—5.3 мы определили особую точку кривой как точку, являющуюся либо центром нескольких ветвей кривой, либо центром одной ветви порядка, большего единицы. Полезно истолковать особые точки с помощью свойств линейных рядов. Пусть g_n^r — простой ряд без неподвижных ветвей на кривой C и пусть C' — соответствующий бирациональный образ C. В таком случае ряду g_n^r будет соответствовать на C' ряд $g_n'^r$, высекаемый гиперплоскостями пространства S_r, содержащего C'. Для любой ветви P' кривой C' ряд $g_n'^r - P'$ будет, очевидно, некоторым $g_n'^{r'}$, высекаемым на C' гиперплоскостями, проходящими через центр p' ветви P'. Очевидно, что точка p' будет особой *тогда и только тогда, когда ряд* $g_n'^r - P'$ *имеет неподвижные ветви.* Ввиду того, что свойства линейных рядов сохраняются при бирациональных преобразованиях, мы можем утверждать, что *образ кривой C, соответствующий ряду g_n^r, будет неособенной кривой тогда и только тогда, когда ряд $g_n^r - P$ не имеет неподвижных ветвей при любом выборе P.* Такой ряд g_n^r иногда называют *вполне простым.* Очевидно, что вполне простой ряд будет простым.

Применяя этот признак, можно доказать следующую важную теорему:

Теорема 4.6. *Каждая неприводимая кривая имеет неособенный бирациональный образ.*

Доказательство. Наша задача состоит в доказательстве существования вполне простого ряда g_n^r. Можно предполагать, что кривая, с которой мы имеем дело, является плоской кривой F, так как любая кривая бирационально эквивалентна некоторой плоской. Пусть m — порядок F. Рассмотрим ряд $g_{n_0}^{r_0}$, высекаемый на кривой F системой всех кривых порядка $m-1$. Так как при этом, очевидно, отсутствуют неподвижные ветви и ни одна из кривых системы не содержит F, мы имеем

$$r_0 = (m-1)(m+2)/2, \quad n_0 = m(m-1).$$

Если ряд $g_{n_0}^{r_0}$ вполне прост, то теорема доказана. Если нет, то найдется такая ветвь P, что ряд $g_{n_0}^{r_0} - P$ будет иметь неподвиж-

ные ветви. Освобождаясь от них, мы получим некоторый ряд $g_{n_1}^{r_1}$, для которого

$$r_1 = r_0 - 1, \quad n_1 \leqslant n_0 - 2.$$

Этот процесс можно продолжить. Если уже построенный ряд $g_{n_i}^{r_i}$ не будет вполне простым, то можно построить $g_{n_{i+1}}^{r_{i+1}}$, для которого

$$r_{i+1} = r_i - 1, \; n_{i+1} \leqslant n_i - 2.$$

Отсюда следует, что для каждого такого i мы имеем

$$r_i = r_0 - i, \quad n_i \leqslant n_0 - 2i.$$

Но, в силу теоремы 2.5, $r_i \leqslant n_i$. Следовательно,

$$r_0 - i \leqslant n_0 - 2i$$

или

$$(m-1)(m+2)/2 \leqslant m(m-1) - i.$$

Это приводится к

$$i \leqslant (m-1)(m-2)/2.$$

Отсюда следует, что для некоторого $j \leqslant (m-1)(m-2)/2 + 1$ ряд $g_{n_j}^{r_j}$ должен быть вполне простым. Для такого j мы имеем

$$r_j = r_0 - j \geqslant (m-1)(m+2)/2 - (m-1)(m-2)/2 - 1 = 2m - 3.$$

Исключив тривиальный случай $m = 1$, мы будем иметь $r_j \geqslant 1$ и поэтому также $n_j \geqslant 1$. Образ кривой F, соответствующий ряду $g_{n_j}^{r_j}$, будет кривой без особенностей.

4.5. Упражнения. 1. Если n просто и $r > 1$, то ряд g_n^r без неподвижных ветвей будет простым.

2. Каждый ряд g_n^r, составленный из инволюции g_ν^1, будет частью некоторого g_n^R, построенного по способу, указанному в примере 2 п. 4.2.

3. Если ряд g_n^r составлен из g_ν^1, то образ кривой C, соответствующий этому g_n^r, будет рациональной кривой.

4. Ниже будет показано, что каждый ряд g_2^1 на неособенной кривой третьего порядка высекается пучком прямых. Применить это свойство для прямого доказательства того, что инволюция примера 3 из п. 4.2 не будет рациональной.

5. Если ряд g_n^r не имеет неподвижных ветвей, но ряды $g_n^r - P$ имеют неподвижные ветви для бесконечного множества различных ветвей P, то ряд g_n^r — составной.

6. Любая плоская кривая является проекцией неособенной пространственной кривой.

7. Доказать, что каждый цикл инволюции γ_ν имеет порядок ν.

§ 5. КАНОНИЧЕСКИЙ РЯД

5.1. Якобиевы циклы и дифференциалы. Пусть g_n^1, $n > 0$, — эффективный ряд без неподвижных ветвей. Из теоремы V — 6.2 и рассуждений п. 4.2 следует, что существует лишь конечное число циклов инволюции g_n^1, состоящих менее чем из n различных ветвей. Пусть ветвь P входит в один из циклов ряда g_n^1 с коэффициентом m_P (m_P однозначно определен, так как каждая ветвь входит в единственный цикл ряда g_n^1). В таком случае цикл $\sum_P (m_P - 1) P$ называется *якобиевым циклом* J ряда g_n^1.

Чтобы исследовать структуру цикла J, допустим, что ряд g_n^1 высекается на кривой C системой $\lambda_0 G_0 + \lambda_1 G_1$. Введем обозначение $\theta = -G_1(\xi)/G_0(\xi) \in \sum$. Тогда циклами ряда g_n^1 будут циклы A_λ и A_∞, где A_∞ — цикл, высекаемый на C многочленом G_0, а A_λ определяется из условия, что $A_\lambda - A_\infty$ есть пересечение функции $\theta - \lambda$, $\lambda \in K$, с кривой C.

Для любой ветви P число m_P есть коэффициент при P в цикле A_{λ_P} ряда g_n^1, содержащем P. Рассматривая сначала случай $\lambda_P \neq \infty$, имеем $O_P(\theta - \lambda_P) = m_P > 0$. Если $(\overline{x})$ — параметризация ветви P, то $\theta(\overline{x}) = \lambda_P + at^{m_P} + \ldots$, $a \neq 0$. Дифференцируя относительно t, получаем $\theta(\overline{x})' = am_P t^{m_P - 1} + \ldots$ и поэтому

$$O(\theta(\overline{x})') = m_P - 1. \tag{5.1}$$

Другими словами, ветвь P входит в J с коэффициентом $O(\theta(\overline{x})')$. С другой стороны, если $\lambda_P = \infty$, то

$$O_P(\theta) = -m_P, \quad \theta(\overline{x}) = at^{-m_P} + \ldots, \quad a \neq 0,$$

и

$$O(\theta(\overline{x})') = -m_P - 1 = (m_P - 1) - 2m_P. \tag{5.2}$$

Таким образом, мы видим, что цикл J внутренним образом связан с порядками выражения $\theta(\overline{x})'$ на различных ветвях $(\overline{x})$. Для обозначения этой связи удобно ввести новый символ $d\theta$, называемый *дифференциалом* θ. При этом под $d\theta(\overline{x})$ мы будем понимать $\theta(\overline{x})'$, а под $O_P(d\theta)$ — порядок $O(d\theta(\overline{x}))$ для некоторой параметризации $(\overline{x})$ ветви P. Нетрудно видеть, что $O_P(d\theta)$ зависит только от P, а не от ее выбранной параметризации.

Теперь мы можем объединить уравнения (5.1) и (5.2) в такие

$$O_P(d\theta) = \begin{cases} m_P - 1, & \text{если } P \notin A_\infty, \\ m_P - 1 - 2m_P, & \text{если } P \in A_\infty. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_P O_P(d\theta) P = \sum_P (m_P - 1) P - 2A_\infty = J - 2A_\infty. \tag{5.3}$$

Дальнейшее исследование цикла J требует рассмотрения цикла $\sum_P O_P(d\theta)P$, который мы будем называть *пересечением дифференциала* $d\theta$ с кривой C. Пусть φ — любой непостоянный элемент из $\sum$. Тогда, по теореме V — 3.1, найдется такой неприводимый многочлен $g(x, y)$, что $g(\varphi, \theta) = 0$. Следовательно, для любой ветви $(\overline{x})$ кривой C будет $g(\varphi(\overline{x}), \theta(\overline{x})) = 0$. Дифференцируя это соотношение, получаем

$$g_x(\varphi(\overline{x}), \theta(\overline{x}))\varphi(\overline{x})' + g_y(\varphi(\overline{x}), \theta(\overline{x}))\theta(\overline{x})' = 0$$

или

$$\frac{\theta(\overline{x})'}{\varphi(\overline{x})'} = \frac{d\theta(\overline{x})}{d\varphi(\overline{x})} = -\frac{g_x(\varphi(\overline{x}), \theta(\overline{x}))}{g_y(\varphi(\overline{x}), \theta(\overline{x}))} = \psi(\overline{x}),$$

где $\psi = -g_x(\varphi, \theta)/g_y(\varphi, \theta) \in \sum$; вследствие этого естественно положить, по определению, что $\frac{d\theta}{d\varphi} = \psi$.

Из теоремы 2.4 следует теперь, что пересечения дифференциалов $d\theta$ и $d\varphi$ с кривой C являются эквивалентными циклами и поэтому существует однозначно определенный полный ряд, содержащий все эффективные циклы такого рода. Этот ряд называется *каноническим рядом* кривой C и обычно обозначается через K. Так как спутать этот ряд с основным полем K очень трудно, мы также сохраним это обозначение канонического ряда.

Если кривая C бирационально преобразуется в кривую C', то канонический ряд на C будет переходить в канонический ряд на C', так как каждый из этих рядов может быть высечен дифференциалами элементов поля $\sum$. Отсюда следует, что порядок и размерность K являются бирациональными инвариантами кривой C. Мы увидим ниже (п. 6.4), что порядок K равен удвоенной размерности, так что в действительности мы получаем только один числовой инвариант, а не два, как это можно было бы ожидать.

5.2. Порядок канонического ряда. Порядок ряда K можно вычислить, если использовать удобно выбранный простой бирациональный образ кривой C. Мы видели в п. V — 4.2, что каждая неприводимая кривая бирационально эквивалентна плоской кривой с обыкновенными особенностями. Рассмотрим такую кривую f и выберем координаты так, чтобы точка (0, 0, 1) не лежала ни на f, ни на касательных к f в особых точках. Пусть g_n^1 — ряд, высекаемый системой прямых $x - \lambda = 0$. Тогда J содержит лишь ветви, касательные к которым параллельны оси y. В центрах этих ветвей мы имеем $f_y = 0$. Исследуем поэтому пересечение f_y с кривой f.

1) Рассмотрим сначала особую точку кривой f. Можно считать, что она имеет координаты (0, 0). Если кратность этой точки равна $r \geqslant 2$, то можно написать $f = F(x, y) + g(x, y)$, где $F(x, y)$ состоит из членов степени r. Так как все особые точки кривой f являются обыкновенными, то все множители многочлена $F(x, y)$ различны. Кроме того, в силу сделанного выбора координатной системы, $F(x, y)$ будет содержать член ay^r, где $a \neq 0$. Отсюда следует, что кривая $f_y = F_y + g_y = 0$ имеет в точке (0, 0) $r-1$-кратную точку, в которой касательные отличны от касательных к кривой f. Из теоремы IV — 5.10 следует, что f_y имеет в точке (0, 0) $r(r-1)$-кратное пересечение с кривой f.

2) Если f_y пересекает f по ветви P с неособенным центром, то в этой точке $f_x \neq 0$ и поэтому ветвь P имеет параметризацию

$$\overline{y} = a + t, \quad \overline{x} = b + ct^r + \ldots, \quad c \neq 0.$$

Дифференцируя уравнение $f(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ по t, получаем

$$f_x(\overline{x}, \overline{y})(crt^{r-1} + \ldots) + f_y(\overline{x}, \overline{y}) = 0.$$

Отсюда следует, что f_y имеет на P порядок $r-1$. Но P входит в цикл ряда g_n^1, высекаемый прямой $x - b = 0$ с коэффициентом r, и, следовательно, в J — с коэффициентом $r-1$. Ввиду того, что ни одна из прямых $x - \lambda = 0$ не является касательной к f ни в одной из особых точек, будем иметь $J = \sum (r-1) P$, где суммирование распространено на все неособые точки пересечения f_y с f.

Так как общее число точек пересечения f_y и f равно $n(n-1)$, мы видим отсюда, что порядок цикла J равен

$$n(n-1) - \sum r_i(r_i - 1),$$

где суммирование распространено на все особые точки, а r_i — кратности этих особых точек.

Из соотношения $K = |J - 2A|$ мы видим, что порядок K есть

$$n(n-1) - \sum r_i(r_i - 1) - 2n = n(n-3) - \sum r_i(r_i - 1). \quad (5.4)$$

При рассмотрении особых точек мы встретились с неотрицательным целым числом (теорема III — 7.5)

$$p = (n-1)(n-2)/2 - \sum r_i(r_i - 1)/2. \quad (5.5)$$

Сравнивая (5.4) и (5.5), видим, что порядок K равен $2p - 2$.

Следующая теорема резюмирует наши результаты о якобиевых циклах:

Теорема 5.1. *Если J — якобиев цикл эффективного ряда g_n^1 без неподвижных ветвей, C — данная кривая и A — любой цикл ряда g_n^1, то цикл $J - 2A$ является пересечением C с некоторым дифференциалом. Этот цикл, с точностью до эквивалентности,*

не зависит от выбранного для его определения ряда g_n^1. Если C есть плоская кривая с обыкновенными особенностями порядков $r_1, r_2, \ldots$, то порядок цикла $J-2A$ равен $2p-2$, где

$$p=(n-1)(n-2)/2-\sum r_i(r_i-1)/2.$$

5.3. Род кривой. Если канонический ряд кривой C пуст, то род p кривой C, по определению, считается равным нулю. Если ряд K не пуст, то род p на единицу превышает половину порядка канонического ряда. Для плоской кривой с обыкновенными особенностями род выражается формулой (5.5).

Как упоминалось выше, род является бирациональным инвариантом, т. е. две бирационально эквивалентные кривые имеют один и тот же род. Другими словами, это означает, что кривые, для которых значения рода различны, не могут быть бирационально эквивалентными. Подобное утверждение мы встретили здесь впервые. Если ограничиться лишь предшествовавшими результатами, то могло бы оказаться, что все неприводимые кривые бирационально эквивалентны. Наоборот, сейчас мы можем легко убедиться, что существует бесконечное множество бирационально неэквивалентных кривых. В частности, две неособые плоские кривые различных порядков несомненно неэквивалентны, если исключить случай, когда одна из этих кривых — прямая, а другая — кривая второго порядка.

Позднее мы увидим (п. 7.3), что даже в случае, если две кривые имеют один и тот же род, они не обязательно должны быть бирационально эквивалентными.

5.4. Упражнения. 1. Пусть C — неприводимая плоская кривая порядка n, класса m и рода p и пусть $\gamma(P)$ означает порядок ветви P кривой C. Тогда

$$m=2p-2+2n+\sum_P(\gamma(P)-1).$$

Для кривой, имеющей лишь двойные точки и острия, это соотношение приводится к обычной формуле Плюккера (IV — 6.2).

2. Кривая будет рациональной в том и только в том случае, если ее род равен нулю.

3. Показать, что якобиевы циклы всех рядов g_n^1, содержащихся в некотором g_n^r, эквивалентны. Они определяют полный ряд, называемый *якобиевым рядом данного ряда* g_n^r.

§ 6. РАЗМЕРНОСТЬ ПОЛНОГО РЯДА

6.1. Сопровождающие кривые. Для более полного исследования линейных рядов, в частности, для определения размерности канонического ряда, мы применим теорему Нётера.

Приведенное выше доказательство этой теоремы (теорема IV—7.2) таково, что его можно использовать лишь в том случае, если кривая F не имеет других особенностей, кроме обыкновенных кратных точек. Но так как каждая неприводимая кривая бирационально эквивалентна плоской кривой такого типа, то свойства линейных рядов, доказанные для таких кривых, будут иметь место для всех кривых.

Предположим, что F — неприводимая плоская кривая, имеющая лишь обыкновенные особенности. Пусть для любой ветви P_i кривой F число r_i означает кратность центра ветви P_i, рассматриваемого как точка кривой F. Обозначим через D цикл $\sum(r_i-1)P_i$. Любой многочлен G, высекающий цикл D, будем называть *сопровождающим многочленом* для F, а кривую $G=0$ — *сопровождающей кривой* для F. При применении этой терминологии целесообразно рассматривать уравнение $G=0$ как уравнение некоторой кривой даже в том случае, когда G будет отличной от нуля константой. Из теоремы IV—5.11 следует, что многочлен G будет сопровождающим для F тогда и только тогда, когда он в каждой r_i-кратной точке кривой F имеет кратность, не меньшую r_i-1. Сопровождающие многочлены F мы будем обозначать прописными греческими буквами.

Основное применение теоремы Нётера к изучению линейных рядов связано со следующей теоремой, называемой теоремой о вычете:

Теорема 6.1. *Если*

$$\Phi_m \text{ пересекает } F \text{ по циклу } A+B+D,$$
$$\Psi_m \text{ пересекает } F \text{ по циклу } A'+B+D,$$
$$\Theta_l \text{ пересекает } F \text{ по циклу } A+B'+D,$$

то найдется Ξ_l, *пересекающий* F *по циклу* $A'+B'+D$ (здесь индексы означают степени многочленов).

Доказательство. Применяя теорему IV—7.2, находим, что

$$\Theta_l\Psi_m = M\Phi_m + NF.$$

Здесь многочлен M должен иметь степень l. Но так как $\Theta\Psi$ пересекает F по циклу $A+B+A'+B'+2D$, то по этому же циклу должен пересекать F многочлен $M\Phi$, следовательно, M пересекает F по циклу $A'+B'+D$. Отсюда вытекает, что M есть требуемый сопровождающий многочлен Ξ_l.

Приводимое ниже следствие теоремы 6.1 часто называется также теоремой о вычете:

Теорема 6.2. *Если циклы A и A' эквивалентны и если существует сопровождающий многочлен, пересекающий F по циклу*

$A+B+D$, то существует сопровождающий многочлен той же степени, пересекающий F по циклу $A'+B+D$.

Доказательство. Пусть Φ_l пересекает F по циклу $A+B+D$ и пусть θ — рациональная функция, пересекающая F по циклу $A'-A$. Мы можем записать $\theta=\Psi'_m/\Psi_m$, где Ψ_m и Ψ'_m — сопровождающие многочлены, пересекающие F соответственно по циклам $A+B'+D$ и $A'+B'+D$. Применив теорему 6.1, получим требуемый результат.

В качестве непосредственного следствия получаем следующую важную теорему:

Теорема 6.3. *Если A — любой эффективный цикл и если некоторый сопровождающий многочлен степени l пересекает кривую F по циклу $A+B+D$, то полный ряд $|A|$ есть вычет ряда, высекаемого на F всеми кривыми степени l, относительно цикла $B+D$.*

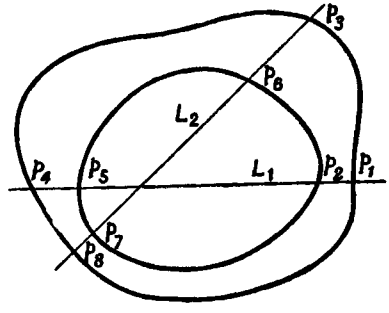

Рис. 21.

Эта теорема дает специфический способ высечения полных рядов. Следующие примеры показывают, как это делается.

Примеры 1. Пусть F — неособая кривая четвертого порядка (рис. 21). Тогда $D=0$ и каждый многочлен будет сопровождающим. Пусть $A=P_1+P_2+P_3$, где три ветви P_1, P_2, P_3 имеют неколлинеарные центры p_1, p_2, p_3. Пусть, далее, прямая $L_1=p_1p_2$ пересекает F еще в двух точках p_4, p_5, а прямая L_2, проходящая через p_3, пересекает F еще в точках p_6, p_7, p_8 (для простоты мы будем предполагать, что эти восемь точек различны). В таком случае L_1L_2 будет сопровождающей кривой, пересекающей F по циклу $A+B$, где $B=\sum_4^8 P_i$. Следовательно, $|A|$ есть вычет ряда g_8^5, высекаемого на F всеми кривыми второго порядка, относительно цикла B. Но так как никакие четыре из точек $p_4, \ldots, p_8$ не коллинеарны, то существует лишь одна кривая второго порядка, содержащая эти точки. Поэтому $|A|$ является рядом g_3^0.

Однако в случае, если центры ветвей цикла A коллинеарны, например $A=P_1+P_2+P_4$, то сопровождающий многочлен L_1 пересекает F по циклу $A+B$, где $B=P_5$. Тогда $|A|$ есть вычет ряда g_4^1, высекаемого всеми прямыми, проходящими через p_5, относительно цикла P_5. В этом случае $|A|$ является рядом g_3^1.

2. Пусть F — кривая четвертого порядка с двойной точкой p (рис. 22). Если P и Q — ветви с центром p, то $D=P+Q$. Как и в примере 1, положим, что прямая $L_1=p_1p_2$ пересекает F в точках p_3 и p_4. Предполагая, что L_1 не проходит через p, мы должны для получения сопровождающего многочлена взять $L_2=p_3p$. Прямая L_2 имеет еще одну точку пересечения p_6 с кривой F. В таком случае L_1L_2 пересекает F по циклу $A+B+D$, где $B=P_4+P_5+P_6$. $|A|$ есть вычет ряда, высекаемого всеми линиями второго порядка, относительно цикла $B+D$. Отсюда следует, что $|A|$ есть g_3^1.

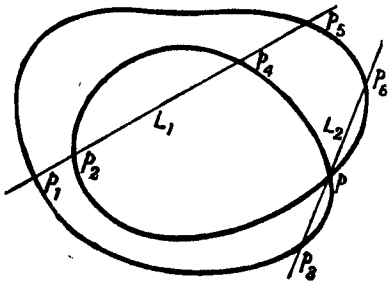

Рис. 22.

В этом случае не произойдет изменения размерности ряда, если центры трех рассматриваемых ветвей будут коллинеарными.

3. Пусть F — кривая четвертого порядка с одной тройной точкой p, являющейся центром ветвей P, Q, P. В таком случае $D=2P+2Q+2R$, так что сопровождающая кривая должна иметь в p точку, кратность которой не ниже 2. Если, как и раньше, $A=P_1+P_2+P_3$, то можно положить $L_1=p_1p$, $L_2=p_2p$ и взять в качестве L_3 любую прямую, проходящую через p_3. Тогда $L_1L_2L_3$ будет сопровождающей кривой, пересекающей F по циклу $A+B+D$, где $B=P_4+P_5+P_6$ состоит из остальных пересечений прямой L_3 с кривой F. Поэтому ряд $|A|$ будет высекаться кривыми третьего порядка, имеющими в p двойную точку и проходящими через точки p_4, p_5, p_6. Этот способ не особенно хорош для высечения ряда $|A|$, так как трудно сказать что-либо существенное об остальных точках пересечения (кроме p_4, p_5, p_6). Но можно упростить положение, выбрав прямую L_3 проходящей также через точку p. В таком случае $B=P+Q+R$. Тогда кривые третьего порядка должны иметь в p тройную точку и поэтому должны состоять из трех прямых линий, проходящих через эту точку. Поэтому мы видим, что ряд $|A|$ состоит из всех эффективных циклов третьего порядка на кривой F.

Мы оставляем читателю исследование полных рядов порядков 2 и 3 на кривых четвертого порядка с двумя или тремя двойными точками.

6.2. Нижняя граница для размерности. Предыдущие примеры показывают, что, повидимому, увеличение порядка цикла D вызывает увеличение размерности полных рядов заданного порядка. Сейчас мы установим точную связь между этими число-

выми характеристиками. Обозначим порядок цикла D через 2δ, так что $\delta = \sum r_i(r_i - 1)/2$. Род кривой определяется в таком случае равенством $p = (m-1)(m-2)/2 - \delta$, где m — порядок F.

Теорема 6.4. *Если ряд g_n^r является полным, то $r \geqslant n - p$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала вычет ряда, высекаемого на кривой F всеми сопровождающими кривыми порядка $l \geqslant m$, относительно цикла D. Размерность этой системы кривых будет

$$R \geqslant l(l+3)/2 - \delta.$$

Следовательно, по теореме 1.1, будет $r = R - q$, где q есть число линейно независимых многочленов Φ_l, содержащих F своим множителем. Но, многочлен $H_{l-m}F$ будет сопровождающим при любом H, и поэтому q будет числом линейно независимых многочленов степени $l-m$. Иначе говоря, $q = (l-m+1)(l-m+2)/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} r &\geqslant l(l+3)/2 - \delta - (l-m+1)(l-m+2)/2 = \\ &= lm - \delta - (m-1)(m-2)/2 = \\ &= lm - \delta - p - \delta = n - p, \end{aligned}$$

ибо $n = lm - 2\delta$. Но любой ряд $g_{n'}^{r'}$ будет вычетом g_n^r относительно некоторого цикла B. Если порядок B равен k, то мы имеем

$$n' = n - k, \qquad r' \geqslant r - k.$$

Отсюда следует, что $r' \geqslant n' - p$. Теорема доказана.

6.3. Размерность канонического ряда. Следующая теорема показывает, что сопровождающие кривые порядка $m-3$ (если они вообще существуют) представляют особый интерес.

Теорема 6.5. *Если $p \geqslant 1$, то вычет относительно цикла D ряда, высекаемого всеми сопровождающими кривыми порядка $m-3$, есть канонический ряд.*

Доказательство. Размерность системы всех Φ_{m-3} (см. III — 4.1) будет не меньше, чем

$$(m-3)m/2 - \sum (r_i - 1) r_i/2 = p - 1.$$

Следовательно, хотя бы один сопровождающий многочлен такого рода существует. Пусть некоторый Φ_{m-3} пересекает F по циклу $Q + D$ и пусть прямая L пересекает F по циклу A. Тогда $L^2\Phi_{m-3}$ есть сопровождающий многочлен порядка $m-1$, пересекающий F по циклу $Q + D + 2A$. Обращаясь к положению, рассмотренному в п. 5.2, найдем, что f'_y есть сопровождающий многочлен порядка $m-1$ (для F), пересекающий F по циклу $J + D$. Отсюда следует, что $J + D \equiv Q + D + 2A$ и поэтому

$$|Q| = |J - 2A| = K.$$

То обстоятельство, что многочлены Φ_{m-3} высекают полный ряд K, следует из теоремы 6.3.

В качестве следствия получаем:

Теорема 6.6. *Размерность канонического ряда* $\geqslant p-1$.

Исключительный случай $p=0$ в теореме 6.5 может быть устранен надлежащим ее истолкованием. Если $p=0$, то канонический ряд пуст, так как дифференциалы поля высекают лишь виртуальные циклы порядка -2. Кроме того, в этом случае нет ни одного многочлена Φ_{m-3}, так как порядок

$$2\delta=(m-1)(m-2)=m^2-3m+2$$

цикла D превосходит число точек пересечения кривой F с кривой порядка $m-3$, равное $m(m-3)$. Поэтому теорему 6.5 можно считать справедливой всегда, если учитывать, что в случае $p=0$ как ряд K, так и множество возможных Φ_{m-3} пусты. Очевидно, что теорема 6.6 в случае $p=0$ также верна.

Легко видеть, что канонический ряд может быть определен, как вычет ряда, высекаемого сопровождающими кривыми порядка $m-3$, относительно цикла D. Основываясь на этом определении и пользуясь теоремами, которые доказываются ниже, можно доказать бирациональную инвариантность этого ряда, а следовательно, и связанного с ним рода кривой. Такое изложение будет независимым от содержания § 5.

6.4. Специальные циклы. Число i независимых циклов ряда K, содержащих данный эффективный цикл A, называется *индексом специальности* (или, короче, *индексом*) цикла A. Говоря иными словами, $i-1$ есть размерность ряда $K-A$. Цикл называется *специальным*, если индекс специальности больше нуля. Если $A\equiv A'$, то $K-A\equiv K-A'$ и поэтому индекс A' равен индексу A. Следовательно, можно говорить об *индексе линейного ряда*, понимая под этим индекс любого цикла, входящего в этот ряд. В частности, индекс самого ряда K будет равен единице.

Удобно называть все сопровождающие кривые порядка $m-3$ *специальными сопровождающими кривыми*. Каждый специальный ряд может быть высечен специальными сопровождающими кривыми.

Основное свойство индекса выражено в следующей теореме, называемой теоремой редукции:

Теорема 6.7. *Для любого эффективного цикла A и любой ветви P имеет место хотя бы одно из равенств:*

$$\textit{размерность } |A+P| = \textit{размерности } |A|,$$
$$\textit{индекс } |A+P| = \textit{индексу } |A|.$$

Доказательство. Применяя, если это нужно, к кривой F квадратичное преобразование, можно добиться, чтобы центр ветви

P стал неособой точкой F. Предположим, что индекс ряда $|A+P|$ не равен индексу $|A|$. Тогда найдется специальный сопровождающий многочлен Φ, пересекающий кривую F по циклу $A+B+D$, где $P \notin B$. Пусть L — прямая, пересекающая F по циклу $P+C$, где C — сумма $m-1$ ветвей с различными центрами (теорема III — 2.6). Тогда многочлен $L\Phi$ будет сопровождающим многочленом степени $m-2$, пересекающим F по циклу $A+B+D+C+P$, и поэтому $|A+P|$ будет вычетом ряда, высекаемого всеми сопровождающими многочленами степени $m-2$, относительно цикла $B+C+D$. Но цикл C состоит из $m-1$ коллинеарных ветвей, и поэтому многочлен Φ_{m-2}, высекающий цикл C, должен содержать L множителем. Отсюда следует, что кривая Φ_{m-2} проходит через центр ветви P, т. е. ветвь P является общей ветвью всех циклов ряда $|A+P|$. Поэтому ряд $|A|=|A+P|-P$ имеет ту же размерность, что и ряд $|A+P|$.

6.5. Теорема Римана — Роха. Мы подготовили теперь все, что необходимо для доказательства центральной теоремы, относящейся к линейным рядам. Сформулируем ее в виде двух отдельных частей.

Теорема 6.8. (Теорема Римана). *Если полный ряд g_n^r неспециален, то $r=n-p$.*

Доказательство. Предположим, что $r>n-p$. Применим индукцию по r. Если $r=0$, то, по нашему предположению, должно быть $n \leqslant p-1$. Ввиду того, что размерность $K \geqslant p-1 \geqslant n$, в K найдется цикл, содержащий цикл из g_n^r, и поэтому ряд g_n^r будет специальным. Предположим теперь, что теорема верна для всех рядов размерности $<r$. Пусть P — ветвь кривой F, не являющаяся неподвижной ветвью ряда g_n^r. Тогда ряд $g_n^r-P=|A|$ будет некоторым g_{n-1}^{r-1}. Так как, по предположению, $r>n-p$, мы будем иметь также $r-1>n-1-p$, следовательно, по предположению индукции, ряд $|A|$ будет специальным. Но так как размерность ряда $|A+P|$ равна r, а размерность $|A|$ равна $r-1$, то из теоремы 6.7 следует, что индекс $|A+P|$ равен индексу $|A|$ и поэтому >0, т. е. ряд $g_n^r=|A+P|$ является специальным.

Скомбинировав эту теорему с теоремой 6.4, получим другое возможное определение рода кривой. Действительно, полный ряд g_n^r, для которого $n>2p-2$, будет неспециальным, и поэтому $r=n-p$ или $p=n-r$. Но так как для любого полного ряда g_n^r, по теореме 6.4, будет $p \geqslant n-r$, то род p может быть определен как наименьшее значение разности $n-r$ для всех полных рядов g_n^r.

Теорема 6.9. (Теорема Римана — Роха.) *Если i есть индекс полного ряда g_n^r, то $r=n-p+i$.*

Доказательство. Теорема 6.8 является частным случаем этой теоремы при $i=0$. Применим индукцию, предполагая, что теорема верна для рядов $g_{n'}^{r'}$ индекса $i-1$. Пусть A — один из циклов ряда g_n^r и P — ветвь, не являющаяся неподвижной ветвью ряда $K-A$. Тогда индекс ряда $|A+P|$ равен $i-1$ и, по теореме 6.7, ряд $|A+P|$ является некоторым g_{n+1}^r. Следовательно, $r=n+1-p+i-1=n-p+i$.

Приводимые ниже следствия теоремы 6.9 показывают ее важность.

Теорема 6.10. *K является единственным рядом на кривой F, имеющим размерность $p-1$ и порядок $2p-2$.*

Доказательство. Мы видели, что порядок K есть $2p-2$, а его индекс равен единице. Следовательно, размерность $K=2p-2-p+1=p-1$. Для любого ряда g_{2p-2}^{p-1}, полного или нет, имеем $p-1\leqslant 2p-2-p+i$, так что $i\geqslant 1$ и поэтому ряд будет специальным. Поэтому этот ряд, имеющий тот же порядок, что и K, должен содержаться в K. Но так как он имеет ту же размерность, что и ряд K, должно быть $g_{2p-2}^{p-1}=K$.

Ввиду того, что род p является бирациональным инвариантом, отсюда, независимо от результатов § 5, следует бирациональная инвариантность канонического ряда K.

Теорема 6.11. *Если ряд $|A|=g_n^r$ специален, то условие, что цикл из K содержит A, равносильно $n-r$ независимым линейным условиям, налагаемым на циклы из K.*

Доказательство. Так как в K содержится p независимых циклов и i из них содержат A, то число независимых условий, налагаемых указанным требованием, будет $p-i=n-r$.

Следующая теорема является, в известном смысле, обращением теоремы редукции:

Теорема 6.12. *Для любого эффективного цикла A и любой ветви P имеет место не более чем одно из равенств:*

$$\textit{размерность } |A+P| = \textit{размерности } |A|,$$
$$\textit{индекс } |A+P| = \textit{индексу } |A|.$$

Доказательство. Пусть $|A|$ — некоторый ряд g_n^r индекса i и $|A+P|$ — ряд $g_{n+1}^{r'}$ индекса i'. Тогда

$$r=n-p+i, \quad r'=n+1-p+i'.$$

Эти равенства не могут иметь место одновременно, если $r=r'$ и $i=i'$.

Теорема 6.13. (Теорема взаимности Брилля и Нётера.) *Если ряды g_n^r и $g_{n'}^{r'}$ являются вычетами канонического ряда друг относительно друга* (т. е. если $|g_n^r+g_{n'}^{r'}|=K$), то $n-2r=n'-2r'$.

Доказательство. Имеем $i=r'+1$, $i'=r+1$. Следовательно, $r=n-p+i=n-p+r'+1$ и подобным же образом $r'=n'-p+r+1$. Требуемый результат получается вычитанием второго из этих равенств из первого.

Теорема 6.14. (Теорема Клиффорда.) *Для специального ряда g_n^r всегда $n \geqslant 2r$.*

Доказательство. Можно предполагать, что ряд g_n^r — полный, ибо любой ряд содержится в некотором полном. Пусть $g_n^r=|A|$ и $|A+B|=K$. Обозначим через i и i' индексы $|A|$ и $|B|$. Так как i независимых циклов ряда K содержат цикл A, но только один из них содержит цикл $A+B$, то цикл B должен налагать на содержащие его циклы из K $i-1$ независимых линейных условий. Иначе говоря, $p-i' \geqslant i-1$. Подставляя в это неравенство значения $i=r-n+p$ и $i'=r+1$, получим требуемый результат.

Теорема 6.15. *Канонический ряд не имеет неподвижных ветвей.*

Доказательство. Предположим, что P — неподвижная ветвь K и $A+P$ — цикл из K. Тогда $|A|=g_{2p-3}^{p-1}$, вопреки теореме 6.14.

6.6. Упражнения. 1. Для нормальной кривой порядка n в пространстве размерности r род p равен $n-r$.

2. Условия, налагаемые на кривые порядка $\geqslant m-3$ требованием, чтобы они были сопровождающими кривыми для кривой порядка m, являются независимыми.

§ 7. КЛАССИФИКАЦИЯ КРИВЫХ

7.1. Составной канонический ряд. Обратимся теперь к изучению кривых с бирациональной точки зрения. Мы расклассифицируем кривые по свойствам их канонического ряда, найдем нормальные формы и рассмотрим некоторые свойства кривых каждого класса.

Полезно следующее вспомогательное предложение:

Теорема 7.1. *Если на кривой существует ряд g_2^1, то каждый специальный ряд без неподвижных ветвей составлен из этого g_2^1. Обратно, если ряд K составной, то на кривой существует ряд g_2^1.*

Доказательство. Нужно лишь рассмотреть случай, когда $p>2$. При этом ряд g_2^1 является полным и специальным, следовательно, его циклы налагают на специальные сопровождающие кривые, их содержащие точно $2-1=1$ условие (теорема 6.11). Другими словами, каждый специальный цикл, содержащий ветвь P, будет необходимо содержать некоторую другую

ветвь P', для которой $P+P' \in g_2^1$. Этим доказана первая часть теоремы. Наоборот, если ряд K — составной, то каждый специальный цикл, содержащий P, должен содержать некоторую другую ветвь P', но это означает, что цикл $P+P'$ накладывает лишь одно условие на содержащие его сопровождающие кривые, т. е. что, как и выше, $|P+P'|$ есть некоторый ряд g_2^1.

7.2. Классификация. Рассмотрим сначала случай $p=0$. В этом случае ряд K пуст и поэтому каждый цикл будет неспециальным. Следовательно, для любого полного ряда будет $r=n$. Обратно, если на кривой существует ряд g_n^n при некотором $n>0$, то индекс этого ряда равен p. Но для рядов положительного порядка это возможно лишь в случае $p=0$.

В силу теоремы III — 3.2 (или упражнения 4 п. 2.4), каждая кривая рода нуль рациональна. Обратно, любая рациональная кривая бирационально эквивалентна прямой и поэтому имеет род нуль. Таким образом, оказываются эквивалентными следующие три свойства: рациональность, равенство рода нулю и существование ряда g_n^n при $n>0$.

Пусть теперь $p=1$. В таком случае K будет рядом g_0^0, так что каждый цикл положительного порядка не будет специальным. Такие кривые называются *эллиптическими*[1]). Их наиболее важное свойство дает

Теорема 7.2. *Эллиптическая кривая C несет на себе бесконечное множество неэквивалентных рядов g_2^1. Эти ряды могут быть приведены во взаимно однозначное соответствие с ветвями кривой C.*

Доказательство. Пусть P — фиксированная ветвь кривой C. Если Q — любая ветвь C, то ряд $|P+Q|$ будет некоторым g_2^1. Если $Q \neq Q'$, то $|P+Q| \neq |P+Q'|$, ибо эквивалентность $Q \equiv Q'$ влекла бы за собой существование g_1^1, а это невозможно. Так как любой ряд g_2^1, должен включать в себя цикл, содержащий P, то множество рядов g_2^1, получаемых при всевозможном выборе Q, будет исчерпывающим. Этим теорема доказана.

Кривые, для которых $p>1$, подразделяются на два типа. Те из них, которые имеют составной канонический ряд, называются *гиперэллиптическими*. Из теоремы 7.1 мы видим, что каждая гиперэллиптическая кривая содержит однозначно определенный ряд g_2^1, из которого составлен канонический ряд кривой. Негиперэллиптическая кривая не несет на себе ни одного g_2^1.

---

[1]) Неудачный термин, так как эллипс не является эллиптической кривой. Эллиптические кривые получили свое название из-за их связи с эллиптическими функциями.

7.3. Канонические формы. Мы уже неоднократно пользовались тем обстоятельством, что каждая неприводимая кривая бирационально эквивалентна некоторой кривой специального типа, например, плоской кривой с обыкновенными особенностями. Следующая теорема дает более точные сведения этого рода.

Теорема 7.3. 1) Кривая рода нуль бирационально эквивалентна прямой.

2) Эллиптическая кривая бирационально эквивалентна плоской кривой третьего порядка без особенностей.

3) Гиперэллиптическая кривая рода p бирационально эквивалентна кривой порядка $p+2$, имеющей единственную особую точку кратности p.

4) Негиперэллиптическая кривая рода $p>2$ бирационально эквивалентна нормальной неособенной кривой порядка $2p-2$ в пространстве S_{p-1}, определенной однозначно с точностью до проективных преобразований.

Доказательство. Утверждение 1 уже было доказано.

2) Полный ряд g_3 на эллиптической кривой имеет размерность 2 и является простым, так как его порядок прост. Соответствующее этому ряду рациональное преобразование является поэтому бирациональным и обращает кривую в плоскую кривую третьего порядка. Но плоская кривая третьего порядка и рода 1 необходимо является неособенной.

3) Пусть A — цикл порядка $p+2$, никакие две ветви которого не образуют цикла ряда g_2^1. Тогда цикл A неспециален и поэтому $|A|=g_{p+2}^2$. Предположим, что этот g_{p+2}^2 составной. Тогда, если P — одна из ветвей цикла A, ряд $|A-P|$ будет иметь неподвижный цикл положительного порядка Q. Отсюда следует, что ряд $|A-P-Q|$ будет некоторым g_k^1, где $k\leqslant p$. Такой g_k^1 необходимо специален, а значит, в силу теоремы 7.1, цикл $A-P-Q$, а вместе с ним и A, должен содержать некоторый цикл ряда g_2^1. Это противоречит предположению. Следовательно, ряд g_{p+2}^2 прост. Таким же образом можно доказать, что g_{p+2}^2 не имеет неподвижных ветвей. Отсюда следует, что соответствующее этому ряду бирациональное преобразование переводит нашу кривую в плоскую кривую F порядка $p+2$. Эта кривая необходимо имеет особенности, так как при $p\geqslant 2$ будет $p<(p+1)p/2$. Рассмотрим ряд g_{p+2-r}^1, высекаемый на этой кривой прямыми, проходящими через ее точку a кратности $r>1$. Полученный ряд будет полным, так как он является вычетом ряда g_{p+2}^2 относительно цикла $\sum n_\alpha P_\alpha$, где P_α — ветви порядков n_α с центром в точке a. Кроме того, ряд g_{p+2-r}^1 будет специальным и не содержащим неподвижных ветвей, а значит составленным из g_2^1. Поэтому индекс g_{p+2-r}^1 будет равен $p-(p+2-r)/2$

(каждый цикл ряда g_2^1 налагает одно условие на содержащие его циклы из K, и эти условия будут независимыми для любой системы, содержащей не более p циклов из g_2^1). Отсюда следует, что $1=p+2-r-p+p-(p+2-r)/2$, т. е. что $r=p$. Наконец, $p=(p+1)p/2-p(p-1)/2$, и поэтому не может быть особенностей ни в окрестности точки a (теорема III — 7.5), ни отличных от a.

4) Так как ряд $K=g_{2p-2}^{p-1}$ — полный и простой и поэтому не содержит неподвижных ветвей, то он определяет бирациональное преобразование данной кривой в нормальную кривую C порядка $2p-2$ в пространстве S_{p-1}. Чтобы доказать отсутствие у кривой C особых точек, нужно лишь доказать, что ряд $|K-P|$ не имеет неподвижных ветвей при любом выборе P. Если бы ряд $|K-P|$ имел неподвижную ветвь Q, то рассуждения, примененные в доказательстве теоремы 7.1, показали бы, что $|P+Q|=g_2^1$, следовательно, кривая была бы гиперэллиптической. Так как ряд K является единственным рядом g_{2p-2}^{p-1}, то кривая C однозначно определена с точностью до проективных преобразований. Кривая C называется *канонической* кривой.

Следующая теорема дополняет части 3 и 4 предыдущей теоремы.

Теорема 7.4. *Существуют как гиперэллиптические, так и негиперэллиптические кривые любого рода $p\geqslant 3$. Существуют кривые рода 2, необходимо являющиеся гиперэллиптическими.*

Доказательство. Для случая гиперэллиптических кривых нужно лишь доказать существование плоских кривых порядка $p+2$, имеющих одну обыкновенную p-кратную особую точку. Такой кривой будет кривая $f(x)y^2+g(x)=0$, где f и g — многочлены соответственно степеней p и $p+2$, такие, что все корни произведения fg различны. В случае негиперэллиптических кривых мы рассмотрим две возможности. Если p — нечетное, $p=2k+1\geqslant 3$, то кривая $fy^3-g=0$, где многочлены f и g имеют степени k и $k+3$, а произведение fg не имеет кратных корней, будет обладать единственной k-кратной точкой (a) и ее род будет равен p. (Если $k=1$, то кривая будет неособенной кривой четвертого порядка.) Специальными сопровождающими кривыми этой кривой будут кривые порядка k, имеющие $(k-1)$-кратную точку в точке a. Среди таких кривых содержатся кривые, распадающиеся на $k-1$ прямых, проходящих через a, и еще одну прямую. Описанную составную кривую, очевидно, можно выбрать так, чтобы она проходила через данную точку p и не проходила через другую точку p'. Отсюда следует, что ряд K не будет составным. Если p — четно, $p=2k$, то кривая $fy^3-g=0$ порядка $k+3$, для которой g имеет двукратный корень, а остальные корни произведения fg различны, будет

иметь одну k-кратную точку и одну двойную точку. Поэтому ее род будет равен p. Предыдущие рассуждения могут быть применены снова и показывают, что кривая не будет гиперэллиптической.

7.4. Упражнения. 1. Если две неособенные кривые четвертого порядка бирационально эквивалентны, то они и проективно эквивалентны.

2. Кривая, несущая на себе полный ряд g_n^{n-1}, $n \geqslant 3$, является эллиптической.

3. Каждый ряд g_2^1 на эллиптической кривой третьего порядка высекается пучком прямых с центром на кривой.

4. Если в теореме Клиффорда имеет место равенство, то либо ряд g_n^r является каноническим, либо кривая — гиперэллиптической.

5. Каждый цикл специального ряда g_n^r на канонической кривой лежит на некотором S_{n-r-1}.

6. Гиперэллиптическая кривая рода p бирационально эквивалентна кривой $y^2 = h(x)$, где $h(x)$ — многочлен степени $2p+2$ с различными корнями.

§ 8. ПОЛЮСЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В построениях § 2 показана тесная взаимосвязь между линейными рядами и рациональными функциями. Действительно, свойства линейных рядов могут быть определены и непосредственно доказаны как свойства рациональных функций. И наоборот, теоремы относительно линейных рядов можно истолковать так, что они дадут нам сведения о рациональных функциях. Мы рассмотрим одну особенно важную теорему, которую легко доказать этим путем.

Если φ — рациональная функция, пересекающая кривую по циклу $A - B$, где A и B — эффективные циклы, не содержащие общих ветвей, то цикл A называется *системой нулей* функции φ, а B — *системой* ее *полюсов*. Сосредоточим наше внимание на системе полюсов.

Очевидно, что каждая рациональная функция, кроме нуля, имеет некоторую систему полюсов. Однако не каждый цикл может быть системой полюсов рациональной функции. Следующая теорема дает нам относящиеся сюда сведения.

Теорема 8.1. *Эффективный цикл A является системой полюсов некоторой рациональной функции в том и только в том случае, когда ряд $|A|$ не имеет неподвижных ветвей.*

Доказательство. Если A есть система полюсов рациональной функции φ, то φ пересекает кривую по циклу $B - A$, где цикл B — система нулей функции φ — является эффективным

и не имеет общих ветвей с A. Ввиду того, что $B \equiv A$, ряд $|A|$ будет содержать как A, так и B. Отсюда видно, что он не имеет неподвижных ветвей. Обратно, пусть ряд $|A|$ не имеет неподвижных ветвей. Покажем, что в таком случае существует цикл B, эквивалентный A и не имеющий с A общих ветвей. Пусть $A = \sum n_\alpha P_\alpha$. По предположению, в $|A|$ найдется цикл A_α, не содержащий P_α. Если кривые G_α высекают циклы A_α, то кривая $G' = \sum \lambda_\alpha G_\alpha$ будет высекать цикл B, содержащий один из P_α, лишь в том случае, если коэффициенты удовлетворяют определенному линейному соотношению. Выбрав λ так, чтобы ни одно из этих соотношений не было выполнено, получим цикл B с требуемыми свойствами. Теперь можно обратить рассуждения первой части доказательства.

В качестве следствия имеем

Теорему 8.2. *Класс рациональных кривых исчерпывает все кривые, на которых каждый эффективный цикл есть система полюсов рациональной функции. В частности, только в случае рациональных кривых единственная ветвь может быть системой полюсов.*

Следующая теорема представляет собой приложение теорем 6.12 и 8.1.

Теорема 8.3. *Пусть $A_N = P_1 + \ldots + P_N$ — неспециальный цикл, в котором ветви P_i не обязательно различны. Обозначим $A_0 = 0$, $A_n = P_1 + \ldots + P_n$. В таком случае существует $k \geqslant p$ значений n, при которых A_n не будет системой полюсов рациональной функции. Циклы P_i можно перенумеровать так, что будет $k = p$.*

Доказательство. Пусть i_n есть индекс ряда $|A_n|$. Тогда $i_0 = p$, $i_N = 0$. В силу теорем 6.7 и 6.12, мы будем иметь

$$i_n = i_{n-1}, \text{ если размерность } |A_{n-1}| < \text{размерности } |A_n|,$$
$$i_n = i_{n-1} - 1, \text{ если размерность } |A_{n-1}| = \text{размерности } |A_n|.$$

Следовательно, существует точно p значений n, при которых размерность $|A_{n-1}|$ равна размерности $|A_n|$, т. е. при которых ветвь P_n будет неподвижной ветвью ряда $|A_n|$. Из теоремы 8.1 следует поэтому, что $k \geqslant p$. Для доказательства второй части теоремы мы просто перенумеруем P_i следующим образом: пусть n_1 — наибольшее значение n, при котором ряд $|A_n|$ имеет неподвижные ветви. Изменим нумерацию ветвей, входящих в A_{n_1} так, чтобы ветвь P_{n_1} была неподвижной. Применяя новую нумерацию, возьмем наибольшее значение n_2 числа n, меньшее n_1 и такое, что ряд $|A_{n_2}|$ имеет неподвижную ветвь. Изменим нумерацию так, чтобы этой неподвижной ветвью была P_{n_2}. Продолжая этот процесс, мы в конце концов получаем расположение ветвей P, обладающее тем свойством, что если ряд $|A_n|$ имеет неподвижную ветвь, то таковой является P_n.

Из рассуждений, приведенных выше, следует теперь, что $k=p$. Следующий частный случай теоремы 8.3 известен под именем теоремы Вейерштрасса о пробелах.

Теорема 8.4. *Для любой заданной ветви P существует точно p значений n, при которых цикл nP не будет системой полюсов рациональной функции. Все эти значения $\leqslant 2p-2$.*

§ 9. ГЕОМЕТРИЯ НА НЕОСОБЕННОЙ КРИВОЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

9.1. Сложение точек на кривой третьего порядка. Пусть $F=$ неособенная плоская кривая третьего порядка. F имеет класс 6, род 1 и имеет девять точек перегиба. Каноническим рядом K будет ряд g_0^0, а каждый полный ряд будет рядом вида g_n^{n-1}. В частности, существует некоторый ряд g_2^1 и не существует рядов g_1^1. Ввиду того, что каждая точка кривой является центром точно одной ветви, слова «точка» и «ветвь» можно употреблять более или менее равноправным образом.

Для того, чтобы упростить наше рассмотрение, определим операцию сложения, выполняемую над точками кривой F. Пусть O—точка перегиба кривой F. Если A и B—точки F, то прямая AB (касательная к F в точке A, если будет $B=A$) пересекает кривую F еще в одной точке C_1. Пусть прямая C_1O пересекает F еще в третьей точке C. Положим, по определению, что $A+B=C$. Определение сложения упростится, если его выразить с помощью эквивалентности циклов. Имеем $A+B+C_1\equiv\equiv C+O+C_1$. Следовательно, $C\equiv A+B-O$. Эта эквивалентность определяет точку C однозначно, так как если бы было $C'\equiv A+\\+B-O$, то было бы $C'\equiv C$, т. е. $C'=C$, так как в противном случае кривая содержала бы ряд g_1^1.

Теорема 9.1. *Точки кривой F образуют коммутативную группу относительно сложения. Нулевым элементом этой группы является точка O.*

Доказательство. Из определения вытекает непосредственно равносильность равенств $A+B=C$ и $B+A=C$. Для доказательства ассоциативного закона положим $A+B=X$, $X+C=Z$, $B+C=Y$, $A+Y=Z'$. Эти равенства эквивалентны соотношениям

$$X\equiv A+B-O,\quad Z\equiv X+C-O\equiv A+B+C-2O,$$
$$Y\equiv B+C-O,\quad Z'\equiv A+Y-O\equiv A+B+C-2O.$$

Следовательно, $Z\equiv Z'$, а поэтому, как и выше, будет $Z=Z'$. Другими словами, $(A+B)+C$—та же самая точка, что и $A+(B+C)$. Если $A+O=B$, то $B\equiv A+O-O$ и поэтому $B=A$, т. е. O является нулевым элементом. Наконец, если A' есть третья точка пересечения прямой AO с кривой F, то можно

непосредственно проверить, что $A+A'=O$, т. е. A' будет противоположным элементом для A. Мы будем писать, как обычно, $A'=-A$.

Суммы любого числа элементов также однозначно определены. При этом равенство $C=A_1+A_2+\ldots+A_n$ равносильно соотношению $A_1+A_2+\ldots+A_n\equiv C+(n-1)O$.

Теорема 9.2. *Цикл $A_1+\ldots+A_{3n}$ будет пересечением кривой F с кривой порядка n тогда и только тогда, когда сумма $A_1+\ldots+A_{3n}=O$.*

Доказательство. Сумма $A_1+\ldots+A_{3n}$ равна O тогда и только тогда, когда $A_1+\ldots+A_{3n}\equiv 3nO$. Но $3nO$ есть пересечение F с кривой порядка n (нужно взять n-ю степень касательной в точке O). Ввиду того, что система всех кривых порядка n пересекает F по полному ряду, требуемое заключение следует отсюда непосредственно.

9.2. Касательные. Так как кривая F имеет класс 6 и так как касательная к F в точке O должна считаться за три касательных, то должны существовать еще три касательные, проходящие через точку O. Эти касательные, очевидно, различны и поэтому касаются F в трех различных точках O_1, O_2, O_3. Из теоремы 9.2 следует, что $2O_i=O$ или $O_i=-O_i$. Точки O_i и O исчерпывают все точки, обладающие этим свойством. Но точка $O'=O_1+O_2$ также имеет указанное свойство. Поэтому должно быть $O_1+O_2=O_3$, так как $O_1+O_2\neq O$. Иначе говоря, $O_1+O_2+O_3=O$. Таким образом, три точки O_1, O_2 и O_3 коллинеарны.

Если A—любая точка кривой F, то через нее проходят четыре различные касательные к F, отличные от касательной в самой точке A. (Если A есть точка перегиба, то касательная в A должна считаться также одной из указанных четырех касательных.) Пусть точками касания этих касательных будут точки A_0, A_1, A_2, A_3, Тогда $2A_1=-A$, причем точки A_i исчерпывают все точки, обладающие этим свойством. Однако точки A_0+O_i, $i=1, 2, 3$, также имеют это свойство. Поэтому при надлежащей нумерации точек должно быть $A_i=A_0+O_i$, $i=1, 2, 3$. В таком случае

$$A_0+A_1+A_2+A_3=4A_0+O_1+O_2+O_3=-2A$$

или

$$A_0+A_1+A_2+A_3-2A=0.$$

Следовательно, мы получаем следующую

Теорему 9.3. *Точки касания четырех касательных к кривой F, проведенных из точки A этой кривой, лежат на кривой второго порядка, касающейся F в точке A* (рис. 23).

Другие свойства точек A_i непосредственно вытекают из их связи с точками O_i. Мы имеем, например,

Теорему 9.4. *Прямые A_iA_j и A_kA_l, где все числа i, j, k, l различны, пересекаются на кривой F.*

Доказательство.

$$A_0+A_1=2A_0+O_1,\quad A_2+A_3=2A_0+O_2+O_3=2A_0+O_1.$$

Следовательно, прямые A_0A_1 и A_2A_3 пересекаются в точке $-(2A_0+O_1)=A+O_1$ (рис. 23). Подобным же образом прямые A_0A_i и A_jA_k пересекаются в точке $A+O_i$.

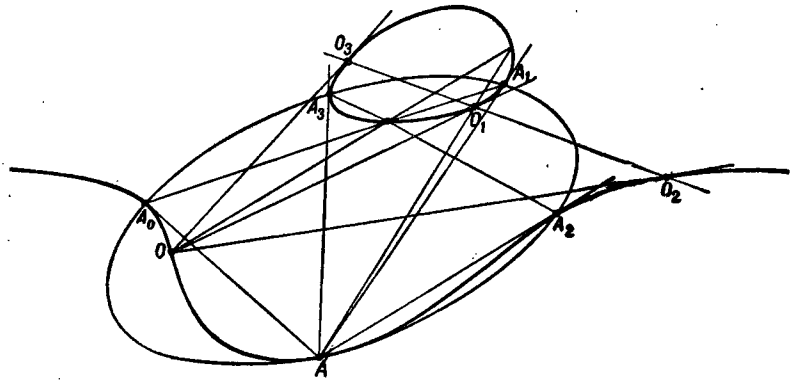

Рис. 23.

Точки перегиба кривой F являются решениями уравнения $3X=O$. Если A и B—решения этого уравнения, то $-(A+B)$ также будет его решением. Отсюда мы снова получаем известную теорему о том, что прямая, соединяющая две точки перегиба, проходит также через третью такую точку. Пусть U—решение этого уравнения, отличное от O, а V—решение, отличное от O, U и $-U$. Тогда все девять решений даются таблицей

$$\begin{matrix} O, & U, & -U, \\ V, & V+U, & V-U, \\ -V, & -V+U, & -V-U. \end{matrix}$$

Шестеричные точки кривой F являются центрами ветвей, в которых неособенная кривая второго порядка может иметь с F шестикратное пересечение. Поэтому они будут решениями уравнения $6Y=0$. Но если X удовлетворяет уравнению $3X=O$, то точка Y, определяемая равенством $2Y=-X$, будет решением уравнения $6Y=O$. Отсюда следует, что *шестеричные точки являются точками касания касательных, проведенных из точек перегиба кривой F. Поэтому таких точек будет* 27.

9.3. Двойное отношение. Система четырех касательных, проведенных из одной точки кривой F, имеет важное свойство, могущее служить характеристическим для F. Для обнаружения этого свойства рассмотрим сначала пучки прямых с центрами в двух точках A и B кривой F (рис. 24). Пусть C—одна из четырех точек, определяемых уравнением $2C=A+B$, и пусть для любой точки A_i соответствующая ей точка B_i определяется

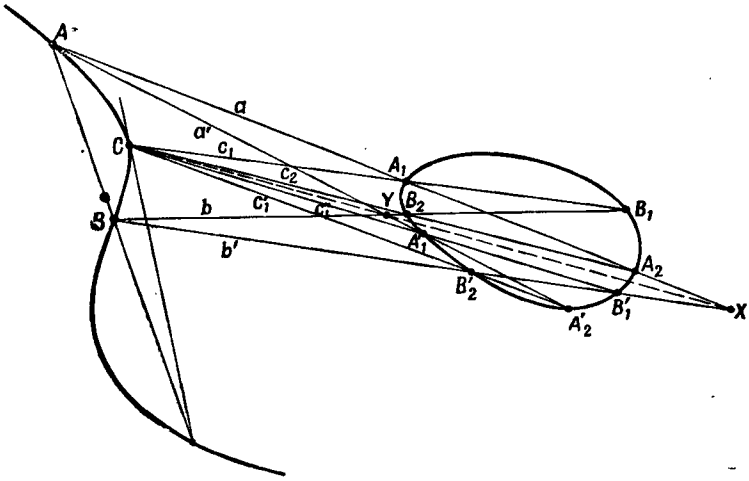

Рис. 24.

равенством $B_i=-A_i-C$. Тогда, если прямая a, проходящая через A, пересекает F по циклу A_1+A_2, то мы будем иметь $A_1+A_2+A=O$. В таком случае

$$\begin{aligned} B_1+B_2+B &= -A_1-C-A_2-C+B= \\ &= -A_1-A_2+B-A-B= \\ &= -A_1-A_2-A=O. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что цикл B_1+B_2 лежит на прямой b, проходящей через B. Иными словами, мы получили взаимно однозначное соответствие между прямыми, проходящими через точку A, и прямыми, проходящими через B. Ввиду того, что равенства $A_1=A_2$ и $B_1=B_2$, очевидно, равносильны, касательной в точке A будет соответствовать касательная в B. Покажем, что найденное взаимно однозначное соответствие будет проективным. Пусть соответствующие прямые a' и b', проходящие через A и B, пересекают кривую F соответственно по циклам $A+A_1'+A_2'$ и $B+B_1'+B_2$. Обозначим прямые CA_1B_1, CA_2B_2, $CA_1'B_1'$, $CA_2'B_2'$ через c_1, c_2, c_1', c_2'. Тогда линии $abc_1'c_2'$ и $a'b'c_1c_2$ будут линиями четвертого

порядка, пересекающими F по одному и тому же циклу. Отсюда, в силу теоремы 1.1, следует, что найдется линейная комбинация этих линий четвертого порядка, содержащая кривую F своей компонентой. Но так как каждая из этих кривых четвертого порядка имеет точку C двойной точкой и содержит точки X и X' пересечения пар прямых a, b' и a', b, то и линейная комбинация должна также обладать этими свойствами. Это означает, что точки X, X' и C лежат на одной прямой и поэтому пучки прямых с центрами A и B проективны. При этом точка C является центром гомологии.

Отсюда вытекает следующий важный результат:

Теорема 9.5. *Четыре касательных, проведенных к неособенной кривой третьего порядка из любой точки этой кривой, имеют двойное отношение* (точнее, систему шести двойных отношений), *независимое от выбора точки.*

Таким образом, это двойное отношение связано с самой кривой. Его значение указывается следующей теоремой.

Теорема 9.6. (Теорема Сальмона.) *Две неособенных кривых третьего порядка имеют одно и то же двойное отношение в том и только в том случае, если они бирационально эквивалентны.*

Доказательство. Чтобы усмотреть бирациональную инвариантность указанного двойного отношения, рассмотрим ряд g_2^1 высекаемых пучком прямых, проходящих через точку A данной кривой третьего порядка. Между прямыми пучка и циклами ряда g_2^1 существует проективное соответствие, причем касательным, проведенным из A, соответствуют двойные точки ряда g_2^1, т. е. циклы вида $2P$. Отсюда следует, что указанное двойное отношение для данной кривой является двойным отношением четырех двойных точек любого ряда g_2^1, а потому будет бирациональным инвариантом. Чтобы доказать достаточность этого условия для бирациональной эквивалентности кривых, используем тот факт, что любая неособенная кривая третьего порядка при надлежащем выборе координат приводится к виду $y^2 = f(x)$ (теорема III—6.1). В этом случае бесконечно удаленная точка оси y есть точка перегиба и четыре касательных, проведенных из этой точки, являются бесконечно удаленной прямой и прямыми $x = a_i$, где a_1, a_2, a_3—корни уравнения $f(x) = 0$. Отсюда следует, что двойное отношение для данной кривой третьего порядка равно двойному отношению точек $(\infty, a_1; a_2, a_3)$. Но если для кривой $y^2 = g(x)$, которой соответствуют корни b_1, b_2, b_3 многочлена $g(x)$, двойное отношение имеет то же значение, то точки ∞, b_1, b_2, b_3 могут быть переведены в точки ∞, a_1, a_2, a_3 проективным преобразованием. При этом уравнения кривых совпадают, т. е. первоначальные кривые оказываются проективно, а следовательно, и бирационально эквивалентными.

Ввиду того, что каждая эллиптическая кривая бирационально эквивалентна некоторой плоской кривой третьего порядка, двойное отношение оказывается определенным также для любой эллиптической кривой и может служить средством разделения таких кривых на классы бирационально эквивалентных кривых.

9.4. Преобразования в себя. С любой точкой A нашей кривой F можно связать преобразование T_A, переводящее любую точку P в точку $A+P$. Это преобразование будет рациональным, так как алгебраическим средством перехода от P к $A+P$ является определение третьего корня кубичного уравнения, два из корней которого известны, а это рациональная операция. Ввиду того, что обратное преобразование T_{-A} также рационально, преобразования вида T_A будут бирациональными преобразованиями кривой F в себя. Совокупность таких преобразований, очевидно, образует коммутативную группу, ибо

$$T_A T_B = T_{A+B} = T_B T_A, \quad (T_A T_B) T_C = T_{A+B+C} = T_A (T_B T_C),$$
$$T_O T_A = T_A, \quad T_A T_{-A} = T_O.$$

Подобным же образом можно убедиться, что преобразование S_A, переводящее каждую точку P в точку $A-P$, также будет бирациональным. Такие преобразования не образуют группы. Однако совокупность этих преобразований вместе с преобразованиями T_A будет группой, ибо имеют место соотношения

$$S_A S_B = T_{A-B}, \quad S_A T_B = S_{A-B}, \quad T_A S_B = S_{A+B},$$

позволяющие легко проверить групповые свойства. Эта группа не будет коммутативной, так как $S_A T_B \neq T_B S_A$, если только B не совпадает с O или O_i.

Преобразования S_A допускают весьма простое геометрическое истолкование. Действительно, если положить $P' = A - P$, то будет $P' + P - A = O$, а поэтому $P' + P$ будет циклом ряда g_2^1, высекаемого прямыми, проходящими через точку $-A$. Преобразование S_A состоит в простой перестановке точек каждого цикла ряда g_2^1.

Покажем теперь, что для любых неособенных кривых третьего порядка, не принадлежащих двум исключительным классам бирационально эквивалентных кривых, все бирациональные преобразования в себя исчерпываются преобразованиями T_A и S_A. Докажем прежде всего подобную теорему для рациональных кривых.

Теорема 9.7. *Любое бирациональное преобразование рациональной кривой в себя определяется дробно линейным преобразованием образующего элемента поля* $\sum$.

Доказательство. Если $\sum = K(\lambda)$, то любое рациональное преобразование ставит в соответствие элементу λ некоторый

элемент $\mu = \varphi(\lambda)$ поля $\sum$. Если преобразование является бирациональным, то должно быть также $\lambda = \psi(\mu)$. Пусть

$$\varphi(\lambda) = \frac{a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_r\lambda^r}{b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_r\lambda^r}$$

—выражение $\varphi(\lambda)$, соответствующее наименьшему возможному значению r. Тогда уравнение

$$(a_0 - b_0\mu) + (a_1 - b_1\mu)\lambda + \ldots + (a_r - b_r\mu)\lambda^r = 0$$

неприводимо и поэтому λ имеет степень r над полем $K(\mu)$. Но $\lambda \in K(\mu)$, следовательно, $r = 1$. Этим теорема доказана.

Частным случаем доказанной теоремы является теорема о том, что каждое бирациональное преобразование прямой в себя будет проективным преобразованием.

Вернемся теперь к нашей кривой F третьего порядка. Пусть T — любое бирациональное преобразование F в себя. Рассмотрим сначала случай, когда T оставляет неподвижной точку O. Пусть ряд g_2^1 высекается прямыми, проходящими через точку O. Тогда O будет двойной точкой этого ряда. Но преобразование T, будучи бирациональным, должно переводить g_2^1 в некоторый $g_2'^1$. Поэтому двойная точка O должна перейти в двойную точку ряда $g_2'^1$. Двойные точки различных рядов g_2^1 должны быть различными, так как они являются точками касания касательных, проведенных из различных точек кривой F. Отсюда следует, что $g_2'^1 = g_2^1$, т. е. что T переводит циклы ряда g_2^1 в циклы того же ряда.

Пусть теперь L — прямая, не проходящая через O, и λ — координата точки P_λ этой прямой. Прямая $P_\lambda O$ высекает цикл C ряда g_2^1. Образ цикла C при преобразовании T будет циклом C' того же ряда g_2^1, причем C' будет лежать на прямой, проходящей через O и пересекающей L в некоторой точке P_μ. Тем самым определено некоторое однозначное преобразование $\lambda \to \mu$ на прямой L. Это преобразование будет алгебраическим (см. V—6.4), так как переход от точек цикла C к P_λ будет рациональным преобразованием T', а переход от точек C к P_μ будет рациональным преобразованием $T'T$. Отсюда, в силу теоремы V—6.5, следует, что преобразование $\lambda \to \mu$ рационально. Но так как наши рассуждения применимы и к обратному преобразованию, то преобразование $\lambda \to \mu$ будет бирациональным, следовательно, в силу теоремы 9.7, проективным. Это проективное преобразование π имеет неподвижную точку Q, являющуюся образом O при преобразовании T'. Точки Q_1, Q_2, Q_3, служащие образами остальных двойных точек O_1, O_2, O_3 ряда g_2^1 при преобразовании T', должны при преобразовании π меняться местами друг с другом. Но если преобразование π переводит Q_i в $Q_{i'}$, то двойные отношения $(Q, Q_1; Q_2, Q_3)$ и $(Q, Q_{1'}; Q_{2'}, Q_{3'})$ должны быть равны друг другу. Поэтому возможны следующие случаи:

1) Шесть двойных отношений, которые можно образовать для указанных четырех точек, будут различными. Тогда равенство $(Q, Q_1; Q_2, Q_3) = (Q, Q_{1'}; Q_{2'}, Q_{3'})$ влечет за собой равенства $Q_i = Q_{i'}$, и поэтому преобразование π должно быть тождественным. Отсюда следует, что преобразование T переводит каждый цикл ряда g_2^1 в себя. Тогда для любого из этих циклов преобразование T может либо менять местами две точки цикла, либо оставляет их обе неподвижными. Если для одного из таких циклов (конечно, не содержащего двойной точки) преобразование T будет оставлять обе точки неподвижными, то такие неподвижные точки будут определять другой ряд g'^1_2 с теми же свойствами, что и g_2^1. Но это, очевидно, возможно лишь в случае, когда каждая точка кривой F остается неподвижной при преобразовании T, т. е. когда T является тождественным преобразованием T_O. Отсюда следует, что если $T \neq T_O$, то оно должно менять местами точки каждого цикла ряда g_2^1. В этом случае будет $T = S_O$.

2) Существуют только три различных двойных отношения, равные -1, 2 и $^1/_2$. В таком случае кривая третьего порядка называется *гармонической*. Тогда $(Q, Q_1; Q_2, Q_3) = (Q, Q_1; Q_3, Q_2)$, причем в этом равенстве указана единственная возможная перестановка точек Q_i. Следующий пример показывает, что такого рода преобразование может существовать: возьмем кривую $y^2 = x(x^2 - 1)$, а в качестве точки O выберем бесконечно удаленную точку оси y. Тогда преобразование $x' = -x$, $y' = iy$, в котором i удовлетворяет соотношению $i^2 + 1 = 0$, будет требуемым. Назовем преобразование рассматриваемого типа преобразованием U. Непосредственно видно, что $U^2 = S_O$. Но если T — любое преобразование, переставляющее точки Q_2 и Q_3, то преобразование UT будет оставлять их неподвижными. Поэтому UT равно либо T_O, либо S_O. Это означает, что T либо равно $S_O U$, либо U.

3) Существуют лишь два различных значения двойного отношения $-\omega$, $-\omega^2$, где ω удовлетворяет уравнению $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. В таком случае кривая называется *эквигармонической*. Точки Q_1, Q_2, Q_3 можно переставлять циклически. Беря уравнение кривой в виде $y^2 = x^3 - 1$, находим преобразование V, определяемое равенствами $x' = \omega x$, $y' = y$. Оно дает циклическую перестановку точек Q_1, Q_2, Q_3 и удовлетворяет соотношениям $V^3 = T_O$ и $S_O V = V S_O$. Рассуждая так же, как в случае 2, мы видим, что любое преобразование T, дающее циклическую перестановку точек Q, должно иметь один из следующих видов: V, V^2, $S_O V$, $S_O V^2$.

Пусть теперь T — совершенно произвольное бирациональное преобразование кривой F в себя. Пусть T переводит точку O в A. Тогда преобразование $S_A T$ имеет O своей неподвижной точкой, т. е. является одним из преобразований, найденных

выше. Это позволяет сформулировать полученные результаты в виде

Теоремы 9.8. 1) *В случае, если эллиптическая кривая не является ни гармонической, ни эквигармонической, ее бирациональные преобразования в себя образуют группу G с элементами S_A и T_A.*

2) *Бирациональные преобразования гармонической эллиптической кривой в себя имеют вид T или TU, где T — элемент из G, а $U^2 = S_O$.*

3) *Бирациональные преобразования эквигармонической эллиптической кривой в себя имеют вид T, TV, TV^2, где T — элемент G, а $V^3 = T_O$.*

Дальнейшее изучение преобразований в случаях (2) и (3), в частности, выяснение геометрических свойств преобразований, мы оставляем читателю.

9.5. Упражнения. 1. Трижды касательной кривой второго порядка к кривой F называется кривая второго порядка, высекающая на F цикл вида $2A+2B+2C$. Показать, что любые две точки кривой F могут быть точками касания такой кривой второго порядка, и найти способ построения четырех возможных положений третьей точки касания.

2. Для любой точки A кривой F существуют девять положений точки B, при которых существует кривая второго порядка, высекающая на F цикл вида $3A+3B$.

3. Обобщить возможно шире результаты, полученные в упражнениях 1 и 2.

4. Преобразование $P \to 2P$ является рациональным преобразованием F в себя. Соответствующий ряд g_{12}^2 составлен из некоторой иррациональной инволюции γ_4. Ряд g_{12}^2 может быть высечен системой кривых четвертого порядка.

5. Ряд g_2^1 на гиперэллиптической кривой рода p имеет $2p+2$ двойных точки. Две такие кривые бирационально эквивалентны тогда и только тогда, когда системы двойных точек их рядов g_2^1 проективно эквивалентны.

6. В случае 2 теоремы 9.8 имеем

$$US_A = S_{UA}U, \quad UT_A = T_{UA}U,$$
$$(S_A U)^4 = (T_A U)^4 = T_O.$$

В случае 3 будет

$$VS_A = S_{VA}V, \quad VT_A = T_{VA}V,$$
$$(S_A V)^6 = (S_A V^2)^6 = (T_A V)^3 = (T_A V^2)^3 = T_O.$$

7. Каждое из преобразований $S_A U$ и $T_A U$ имеет две неподвижные точки. Преобразования $S_A V$ и $S_A V^2$ имеют по одной неподвижной точке, а $T_A V$ и $T_A V^2$ — по три.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава II
ПРОЕКТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Глава III
ПЛОСКИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Глава IV

ФОРМАЛЬНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Глава V

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КРИВЫХ

Глава VI
ЛИНЕЙНЫЕ РЯДЫ

Редактор *Н. Б. ЕГОРОВА*

Переплет художника *Н. П. Пешкова*

Технический редактор *В. И. Шаповалов*

Сдано в производство 23/IV 1952 г. Подписано к печати 13/VI 1952 г. А 04650. Бумага 60×92¹/₁₆ =7,4 бум. л., 14,8 печ. л. Уч.-издат. л. 14,8. Изд. № 1/1630. Цена 11 р. 85 к. (по прейскуранту 1952 г.). Зак. 262

16-я типография Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Москва, Трехпрудный пер., 9.

20