М. М. ВАЙНБЕРГ

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1956

11-5-4

Вайнберг Мордухай Моисеевич.

Вариационные методы исследования нелинейных операторов.

Редактор *Э. П. Тихонова*.

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*. Корректор *А. С. Каган*

Сдано в набор 3/X 1956 г. Подписано к печати 3/XII 1956 г. Бумага 84×108/32.
Физ. печ. л. 10,75. Условн. печ. л. 17,63. Уч.-издат. л. 18,34. Тираж 4000 экз.
Т 10084 Цена 10 р. 65 к. Заказ № 1477.

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности. 4-я тип. им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вариационные методы исследования нелинейных операторов и нелинейных операторных уравнений были развиты за последние 25 лет.

Исследования в этой области, в которых принимал участие и автор настоящей книги, изложены в виде кратких заметок и научных статей, опубликованных как у нас, так и за рубежом.

Это обстоятельство побудило автора дать в настоящей книге систематическое изложение вариационных методов и тех вопросов дифференциального и интегрального исчисления в линейных пространствах, которые нужны для изложения вариационных методов исследования нелинейных уравнений и нелинейных операторов.

Отметим, что вариационные методы исследования линейных уравнений здесь не рассматриваются. Эти вопросы, развитые в работах С. Л. Соболева [65], С. Г. Михлина [52], К. Фридрихса [70] и других авторов, изложены в двух известных монографиях С. Г. Михлина [52, а, г].

У читателя предполагается знакомство с основными понятиями функционального анализа в объеме первых пяти глав книги Л. А. Люстерника и В. И. Соболева [47].

Некоторые главы и параграфы снабжены кратким введением.

18 июня 1955 г. Москва *Вайнберг М. М.*

ВВЕДЕНИЕ

Пусть H — вещественное гильбертово пространство и $f(x)$ — вещественный функционал, заданный в H и имеющий в каждой точке дифференциал Фреше или дифференциал Гато. Давно было замечено, что точки, в которых функционал $f(x)$ имеет относительный максимум или минимум, являются критическими точками этого функционала, т. е. точками, в которых дифференциал функционала равен нулю. Если исключить из рассмотрения случай линейных и квадратичных функционалов, то уравнение, которое получается, если приравнять нулю дифференциал функционала, является нелинейным.

Затем сравнительно недавно, в тридцатых годах нашего столетия, были опубликованы работы Лихтенштейна, Гаммерштейна, Голомба и Л. А. Люстерника, в которых вопрос о существовании решений нелинейных уравнений был связан с вопросом о существовании критических точек функционалов, заданных в гильбертовом пространстве. Эти работы и послужили началом развития вариационных методов исследования нелинейных уравнений и нелинейных операторов.

Вариационные методы доказательства существования решений нелинейных уравнений в том виде, в каком они известны сейчас, заключаются в том, что по операторам, входящим в рассматриваемое уравнение, строятся функционалы такие, чтобы критические или условно критические точки этих функционалов служили решениями рассматриваемого уравнения или прообразами этих решений. При этом важную роль играют потенциальные операторы.

Пусть E — линейное нормированное пространство и E^* — пространство, сопряженное к E.

Оператор $\mathbf{F}(x)$, действующий из E в E^*, называется градиентом функционала $f(x)$, заданного в E, если

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = (\mathbf{F}(x),\ h),$$

где h — произвольный вектор из E и $(\mathbf{F}(x), h)$ — линейный функционал от h. Оператор $\mathbf{F}(x)$, являющийся градиентом функционала $f(x)$, называется потенциальным, а $f(x)$ называется потенциалом оператора $\mathbf{F}(x)$.

Первая задача, которая возникает в связи с применением вариационных методов исследования нелинейных уравнений, заключается в отыскании необходимых и достаточных условий потенциальности операторов. Эта задача получила полное решение; были найдены необходимые и достаточные условия потенциальности операторов, которые напоминают известные условия потенциальности векторного поля в конечномерных пространствах.

Если нелинейное уравнение $\mathbf{\Phi}(x) = 0$ или $\mathbf{\Phi}(x, \lambda) = 0$ таково, что $\mathbf{\Phi}$ — потенциальный оператор, то решениями этого уравнения служат критические точки потенциала оператора $\mathbf{\Phi}$. В том случае, когда $\mathbf{\Phi}$ не является потенциальным оператором, возникает задача о замене уравнения $\mathbf{\Phi} = 0$ эквивалентным уравнением $\mathbf{\Psi} = 0$, где $\mathbf{\Psi}$ — потенциальный оператор.

Данная задача получила положительное решение в некоторых пространствах (в вещественном гильбертовом пространстве и в пространствах L^p, где $p > 2$) для операторов вида: $\mathbf{\Phi}(x, \lambda) = \mathbf{AF}(x) - \lambda x$, где $\mathbf{A}$ — линейный оператор, удовлетворяющий некоторым условиям, $\mathbf{F}$ — потенциальный оператор и λ — вещественный параметр.

Если рассматриваемое нелинейное уравнение (или эквивалентное ему уравнение) таково, что входящие в него операторы являются потенциальными, то для доказательства существования решений такого уравнения и исследования этих решений строятся функционалы — потенциалы этих операторов, для которых устанавливается существование критических точек и проводится исследование критических точек. Таким образом, вариационные методы исследования нелинейных уравнений тесно связаны с изучением экстремальных и критических точек функционалов.

Так как ограниченные множества бесконечномерных пространств не являются компактными, то при доказательстве существования экстремальных и критических точек функционалов, заданных в таких пространствах, возникают существенные трудности. Эти трудности приводили к тому, что на функционалы и их градиенты приходилось налагать различные ограничения. В связи с этим, естественно, возник вопрос о зависимости или независимости этих ограничений. Этот вопрос привел к постановке задачи об отыскании необходимых и достаточных условий различных видов непрерывности потенциальных операторов.

Наконец, изучение вариационным методом нелинейных интегральных уравнений в пространстве функций, суммируемых с некоторой степенью, привело к рассмотрению специальных операторов и функционалов и к постановке для них вполне определенных задач.

Перечисленные и другие задачи, которые тесно связаны с вариационным методом исследования нелинейных операторов и уравнений, определили план данной книги.

В первой главе (§§ 1—4) изложены нужные для дальнейшего некоторые вопросы общего анализа в линейных пространствах. В § 1 рассмотрены различные виды непрерывности операторов и функционалов. Вводятся, в частности, понятия непрерывности, равномерной непрерывности, полной непрерывности, усиленной непрерывности, компактности и полной компактности операторов и устанавливаются некоторые связи между ними.

В § 2 вводится понятие интеграла Стилтьеса от одной абстрактной функции по другой абстрактной функции и изучаются свойства таких интегралов. Далее вводятся понятия кривой и криволинейного интеграла в общих линейных пространствах. Основным предложением § 2 является теорема о том, что криволинейный интеграл в односвязной области не зависит от пути интегрирования, если он равен нулю по любому треугольнику, выпуклая оболочка которого лежит в этой односвязной области.

В § 3 дается систематическое изложение понятий дифференциала и производной оператора. Выясняются условия линейности дифференциала Гато и связь между дифференциалами по Гато и по Фреше.

В § 4 устанавливаются необходимые и достаточные условия различных видов непрерывности производной от оператора и выясняется связь между некоторыми свойствами операторов и их производных. Полученные в этом параграфе предложения представляют интерес как при изучении критических точек функционалов, так и при изучении точек ветвления решений нелинейных уравнений, Глава II (§§ 5—7) посвящена основному для всего последующего понятию потенциального оператора. В § 5 устанавливается, что если оператор $\mathbf{F}(x)$, действующий из E в E^*, имеет линейный дифференциал Гато $\mathbf{DF}(x, h)$ и непрерывную по x билинейную форму $(\mathbf{DF}(x, h_1), h_2)$, то для его потенциальности необходимо и достаточно, чтобы для произвольных $h_1, h_2 \in E$ выполнялось условие: $(\mathbf{DF}(x, h_1), h_2) = (\mathbf{DF}(x, h_2), h_1)$. При этом потенциал $\mathbf{F}(x)$ находится по формуле

$$f(x) = f_0 + \int_0^1 (\mathbf{F}(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0)\, dt, \ f_0 = \mathrm{const}. \quad (0.1)$$

Исследуется потенциальность и произведения операторов.

В § 6 доказывается теорема М. К. Гавурина о необходимом и достаточном условии независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Из этой теоремы вытекает следующий простой критерий потенциальности операторов, в котором отсутствует требование дифференцируемости этих операторов. Непрерывный оператор из E в E^* потенциален тогда и только тогда, когда криволинейный интеграл $\int (\mathbf{F}(x), dx)$ не зависит от пути интегрирования. При выполнении последнего условия потенциал оператора $\mathbf{F}(x)$ также находится по формуле (0.1).

Первая теорема § 7, в которой устанавливается необходимое и достаточное условие усиленной непрерывности операторов, заданных в регулярных пространствах со счетным биортогональным базисом, носит общий характер. Для приложений полезны другие теоремы этого параграфа — теорема Э. С. Цитланадзе о компактности потенциальных операторов и теоремы, в которых устанавливаются различные необходимые и достаточные условия компактности и усиленной непрерывности потенциальных операторов.

Главы III, IV и V являются центральными. В § 8 устанавливаются различные условия слабой непрерывности и полунепрерывности функционалов. В § 9 устанавливаются достаточные условия экстремума функционалов, которые затем применяются в § 10 к изучению уравнений вида $x = \mathbf{BF}(x)$, где $\mathbf{F}$ — потенциальный, а $\mathbf{B}$ — линейный самосопряженный оператор в вещественном гильбертовом пространстве. Следует отметить, что слабая полунепрерывность используется по существу, так как при изучении операторных уравнений (в § 10 и в других параграфах) приходится рассматривать функционалы, у которых некоторые слагаемые являются не слабо непрерывными, а слабо полунепрерывными.

В четвертой главе (§§ 11—14) излагается теория условного экстремума функционалов в гильбертовом пространстве и устанавливаются различные предложения об условно критических точках.

В § 11 вводится понятие гиперболоида в гильбертовом пространстве и устанавливаются некоторые предложения о гиперболоидах. В § 12 формулируется теорема Л. А. Люстерника об условном экстремуме функционалов и приводится простое доказательство этой теоремы для случаев сферы и гиперболоида.

В § 13 доказывается ряд теорем об условном экстремуме и условно критических точках относительно сферы и гиперболоидов. В § 14 методом Л. А. Люстерника исследуются условно критические точки четных функционалов.

Результаты четвертой главы применяются в пятой главе к задаче о собственных числах нелинейных операторов вида **AF**, где **F** — сильно потенциальный и **A** — самосопряженный оператор в вещественном гильбертовом пространстве.

В § 15 исследуются собственные векторы оператора **AF**, когда **A** — положительный оператор, а в § 16 исследуется тот же вопрос, когда **A** — индефинитный оператор.

В § 17 изучается задача о точках ветвления нелинейных операторов. Доказывается, что из теоремы Гильдебрандта и Грэйвса вытекает, что точками бифуркации вполне непрерывного оператора, имеющего вблизи нуля непрерывную производную Фреше, могут быть лишь собственные числа его производной Фреше в нуле. Затем устанавливаются некоторые достаточные условия существования точек бифуркации как у потенциальных операторов, так и у операторов вида **AF**, где **F** — потенциальный и **A** — самосопряженный оператор в вещественном гильбертовом пространстве. В конце § 17 формулируется теорема М. А. Красносельского о том, что при некоторых условиях все собственные числа производной Фреше в нуле от потенциального оператора **F** являются точками бифуркации этого оператора **F**.

Главы VI и VII посвящены изучению интегральных операторов и нелинейных интегральных уравнений.

А. Гаммерштейн [14] первый построил общую теорию нелинейных интегральных уравнений и установил теоремы существования и единственности решения уравнения

$$u(x)=\int_B K(x, y) g(u(y), y) dy. \tag{0.2}$$

А. Гаммерштейн исследовал уравнение (0.2) в предположении, что вещественная функция вещественных аргументов $g(u, x)$ непрерывна по совокупности аргументов и что самосопряженный в L^2 линейный интегральный оператор

$$\mathbf{A}(u)=\int_B K(x, y) u(y) dy \tag{0.3}$$

является положительным и действует вполне непрерывно из пространства L^2 в пространство C. Эти ограничения на оператор $\mathbf{A}$ были существенно использованы при доказательстве различных теорем. В случае ограниченности симметричного ядра $K(x, y)$ Гаммерштейн установил критерий возможного роста функции $g(u, x)$ при $u\to\infty$. В случае неограниченных ядер требовалось, чтобы $|g(u, x)|\leqslant a+b|u|$, где a и b — постоянные. В. В. Немыцкий [57, а, г] и М.Голомб [20] отказались от требования самосопряженности и положительности оператора $\mathbf{A}$, а также ослабили предположения Гаммерштейна в других направлениях. Ими были также рассмотрены системы вида

$$u_i(x)=\int_B K_i(x, y) g_i(u_1(y), \ldots, u_n(y), y) dy, \quad i=1, 2, \ldots, n. \tag{0.4}$$

М. Голомб сохранил и использовал при доказательстве требование Гаммерштейна о том, чтобы $\mathbf{A}$ был вполне непрерывным оператором из L^2 в C. В работах В. В. Немыцкого впервые был рассмотрен и тот случай, когда оператор $\mathbf{A}$ действует вполне непрерывно из пространства L^p $(p>1)$ в другое такое пространство.

В связи с работами В. В. Немыцкого возник вопрос об условиях полной непрерывности оператора Гаммерштейна

$$\Gamma(u)=\int_B K(x, y) g(u(y), y) dy \tag{0.5}$$

и, в частности, о возможном росте функции $g(u, x)$ при $u \to \infty$, когда область изменения (значений) оператора $\mathbf{A}$ не принадлежит пространству C. Этот вопрос привел к изучению различных свойств оператора

$$\mathbf{h}(u) = g(u(x), x),$$

который мы называем оператором Немыцкого, так как в работе В. В. Немыцкого [57, а] были установлены предложения, которые позволили исследовать этот оператор. Среди свойств оператора $\mathbf{h}$ особое значение имеет свойство непрерывности, так как из непрерывности оператора $\mathbf{h}$ и полной непрерывности оператора $\mathbf{A}$ следует полная непрерывность оператора Гаммерштейна $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{Ah}$.

После работ Каратеодори [31] об измеримости функций от функций было ясно, что оператор $\mathbf{h}$ нужно исследовать в предположении, что функция $g(u, x)$ непрерывна по $u \in (-\infty, +\infty)$ почти при каждом $x \in B$ и измерима по x при фиксированных u, так как, в случае разрывности по u, функция $g(u(x), x)$ могла оказаться неизмеримой для некоторых измеримых функций $u(x)$.

Изучение оператора $\mathbf{h}$ привело к следующему простому и окончательному ответу о его непрерывности в пространствах L^p (теорема 19.1): *для того чтобы оператор Немыцкого*

$$\mathbf{h}(u) = g(u(x), x)$$

был непрерывным оператором из класса L^p в класс L^{p_1} $(p > 0,\ p_1 > 0)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$|g(u, x)| \leqslant a(x) + b|u|^r,$$

где $a(x) \in L^{p_1}$, $b > 0$, $r = p/p_1$. Доказательство данной теоремы представляет основное содержание § 19. Предварительно в § 18 устанавливаются различные предложения об измеримости и непрерывности некоторых функций, которые изучены для исследования оператора $\mathbf{h}$. В § 20 устанавливаются различные предложения о дифференцируемости операторов Немыцкого и Гаммерштейна, которые затем используются при доказательстве существования точек бифуркации операторов Гаммерштейна.

В § 21 устанавливается потенциальность двух операторов — оператора Немыцкого в пространстве вектор-функций и оператора Ляпунова—Лихтенштейна в пространстве L^2, а затем находятся потенциалы этих операторов.

Так как нелинейный оператор Гаммерштейна не является потенциальным, то при изучении вариационным методом уравнений (0.2), (0.4) (или операторов Гаммерштейна (0.5) и аналогичных операторов в пространстве вектор-функций) их приходится заменять эквивалентными уравнениями с потенциальными операторами (эквивалентными операторами). В связи с этим возникает вопрос о свойствах положительного корня квадратного из оператора **A**, определенного равенством (0.3), если **A** — положительный оператор, или главного корня квадратного из **A**, если **A** — индефинитный оператор. В связи с этим в § 22 проведено исследование свойств интегральных квадратичных форм, из которого вытекает следующий результат, установленный в § 23: *если положительный* (*или квазиположительный*) *оператор* **A** *действует вполне непрерывно из пространства* L^q *в пространство* L^p ($p \geqslant 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$), *то определенный в* L^2 *положительный* (*или главный*) *корень квадратный из оператора* **A** *действует вполне непрерывно из пространства* L^q *в* L^2 *и из* L^2 *в* L^p.

Аналогичный результат устанавливается и в пространстве вектор-функций.

В последней, VII главе (§§ 24—27) устанавливаются теоремы существования решений нелинейных интегральных уравнений и теоремы существования собственных функций и точек ветвления нелинейных операторов Гаммерштейна и Ляпунова—Лихтенштейна. В основном, уравнения и операторы Гаммерштейна изучаются в пространстве вектор-функций.

В конце книги помещен список литературы. Ссылки на литературные источники, содержащиеся в тексте, указаны в квадратных скобках.

Ссылки даны лишь на опубликованные работы и диссертации. Правда, некоторые работы, на которые мы ссылаемся, были известны задолго до их публикации, так как они докладывались в семинаре по нелинейному анализу при Московском университете. К ним относятся работы Э. С. Цитланадзе [72, ж, и, к], А. П. Гремяченского [21], Я. В. Быкова [8], В. И. Кондрашева [35] и некоторые работы автора [9, г, д, к, с].

ГЛАВА I

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В настоящей главе рассматриваются некоторые вопросы дифференциального и интегрального исчисления, а также вопросы о непрерывности и компактности операторов. Эти вопросы, нужные для дальнейшего, представляют и самостоятельный интерес.

Хотя общее дифференциальное исчисление и некоторые вопросы общего интегрального исчисления являются одними из наиболее рано возникших глав функционального анализа, до сих пор нет монографий, в которых эти вопросы были бы изложены систематически и с достаточной полнотой[1]). Это обстоятельство побудило автора включить данную главу.

§ 1. О различных видах непрерывности операторов

1.1. Основные определения. Пусть E_x есть вещественное пространство типа Банаха[2]), т. е. полное линейное нормированное пространство с умножением его элементов на вещественные числа[3]), а $\mathbf{F}(x)$ — оператор с областью определения в E_x и областью значений в пространстве типа Банаха E_y. Мы будем говорить, что оператор $\mathbf{F}(x)$ действует в E_x, если $E_y = E_x$; в противном случае мы скажем, что оператор $\mathbf{F}(x)$ действует из E_x в E_y.

---

[1]) Некоторые вопросы нелинейного анализа изложены в книге Л. А. Люстерника и В. И. Соболева [47].

[2]) В дальнейшем мы будем рассматривать лишь вещественные банаховы пространства, а потому термин «вещественное» будем опускать.

[3]) См. [5] или [47], где содержится определение линейных нормированных пространств.

Определение 1.1. Оператор $\mathbf{F}(x)$ с областью определения E_x называется *непрерывным в точке* $x_0 \in E_x$, если, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к x_0

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0,$$

последовательность $\{\mathbf{F}(x_n)\}$ сходится к $\mathbf{F}(x_0)$

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{F}(x_n) - \mathbf{F}(x_0)\| = 0.$$

Разумеется, норма x берется в E_x, а норма $\mathbf{F}(x)$ берется в E_y.

Данное определение непрерывности эквивалентно следующему определению[1]).

Определение 1.1′. Оператор $\mathbf{F}(x)$ с областью определения E_x *непрерывен в точке* $x_0 \in E_x$, если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для всякого x, принадлежащего δ-окрестности $U(x_0, \delta)$ точки x_0, выполняется неравенство

$$\|\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x_0)\| < \varepsilon.$$

Определение 1.2. Оператор $\mathbf{F}(x)$ называется *равномерно непрерывным на множестве* $\omega \subset E_x$, если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для каждой пары точек x', $x'' \in \omega$, удовлетворяющей условию

$$\|x' - x''\| < \delta,$$

выполняется неравенство

$$\|\mathbf{F}(x') - \mathbf{F}(x'')\| < \varepsilon.$$

Определение 1.3. Функционал $f(x)$ называется *слабо непрерывным в точке* x_0, если, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к x_0,

$$\lim_{n\to\infty} l(x_n) = l(x_0),$$

где $l(x)$ — любой линейный функционал, определенный в E_x,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

---

[1]) Если оператор $\mathbf{F}(x)$ задан не во всем пространстве E_x, то эквивалентность, разумеется, имеет место, когда x_0 — предельная точка области определения $\mathbf{F}(x)$.

Заметим, что определения 1.1—1.2 сохраняются для функционалов, т. е. когда область значений оператора $\mathbf{F}(x)$ принадлежит числовой оси.

Определение 1.4. Оператор $\mathbf{F}(x)$, действующий из E_x в E_y, называется *компактным на множестве* $H \subset E_x$, если он преобразует всякое ограниченное множество из H в компактное множество пространства E_y.

Определение 1.5. Оператор $\mathbf{F}(x)$ называется *вполне непрерывным на множестве* $H \subset E_x$, если он непрерывен и компактен на H.

Определение 1.6. Мы скажем, что оператор $\mathbf{F}(x)$ является *вполне компактным* (см. [9, о], стр. 65) *на ограниченном множестве* $\omega \subset E_x$, если, какова бы ни была последовательность пар $\{x'_n, x''_n\} \in \omega$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \|x'_n - x''_n\| = 0,$$

из нее можно выделить подпоследовательность $\{x'_{n_k}, x''_{n_k}\}$, для которой

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{F}(x'_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} \mathbf{F}(x''_{n_k}) = y \in E_y.$$

Данное определение (см. теорему 1.3) эквивалентно следующему.

Определение 1.6′. Оператор $\mathbf{F}(x)$ называется *вполне компактным на ограниченном множестве* $\omega \subset E_x$, если он компактен и равномерно непрерывен на ω.

Для дальнейшего мы сделаем следующее замечание. Определения 1.1—1.6 используют два вида сходимости элементов: сильную сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$ к элементу x_0, т. е. когда

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x_0\| = 0,$$

и слабую сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$ к элементу x_0, т. е. когда для любого линейного функционала l, заданного в пространстве E_x,

$$\lim_{n \to \infty} l(x_n) = l(x_0).$$

В связи с этими двумя видами сходимости элементов (вместо термина «сильная сходимость» элементов мы будем употреблять термин «сходимость элементов») различают два вида непрерывности функционалов $f(x)$: сильную (которую мы будем называть просто непрерывностью), когда

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

для всякой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся (сильно) к x_0, и слабую (см. определение 1.3). Так как в конечномерных пространствах сильная сходимость элементов совпадает со слабой сходимостью элементов (см. [47], стр. 202), то слабая непрерывность функционалов может быть определена еще так: функционал $f(x)$ *слабо непрерывен в точке* x_0, если, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ также сходится слабо к $f(x_0)$. При переходе от функционалов к операторам $\mathbf{F}(x)$ дело обстоит иначе. Если по аналогии с функционалами ввести слабую непрерывность операторов (как это сделано в ряде работ, см., например, [72] и [9]), то в пространствах со слабо компактной сферой такая непрерывность окажется сильней сильной непрерывности (см. пункт 1.5), ибо из нее будет вытекать полная компактность оператора. Ввиду этого мы будем здесь придерживаться следующей терминологии.

Определение 1.7. Оператор $\mathbf{F}(x)$ называется *усиленно непрерывным в точке* x_0, если, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к x_0, последовательность $\{\mathbf{F}(x_n)\}$ сходится к $\mathbf{F}(x_0)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{F}(x_n) - \mathbf{F}(x_0)\| = 0.$$

Определение 1.8. Оператор $\mathbf{F}(x)$ называется *слабо непрерывным в точке* x_0, если, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к x_0, последовательность $\{\mathbf{F}(x_n)\}$ сходится слабо к $\mathbf{F}(x_0)$.

Для функционалов эти два определения (1.7 и 1.8) эквивалентны.

Множество K, принадлежащее банахову пространству E, называется *слабо компактным* в E, если для каждой последовательности $\{x_n\} \subset K$ найдется такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая слабо сходится к некоторому элементу $x_0 \in E$.

Определение 1.9. Говорят, что в банаховом пространстве E сфера *слабо компактна* (или шар *слабо компактен*), если всякое бесконечное ограниченное множество из E слабо компактно в нем.

Разумеется, если какой-нибудь шар $\|x\| \leqslant r$ (или сфера $\|x\| = r$, $r > 0$) слабо компактен (компактна), то в силу линейности пространства E и всякое ограниченное множество будет слабо компактным.

Определение 1.10. Множество $H \subset E$ называется *слабо замкнутым*, если ему принадлежат все его слабо предельные точки, т. е. если последовательность $\{x_n\}$, принадлежащая H, сходится слабо к элементу x_0, то $x_0 \in H$.

Отметим, что в банаховых пространствах шар $\|x\| \leqslant r$ слабо замкнут (см. [47], стр. 204).

В заключение этого пункта мы приведем два простых предложения функционального анализа, на которые мы в дальнейшем будем ссылаться.

Лемма 1.1. *Пусть в банаховом пространстве E задан линейный функционал $l(x)$. Тогда, каково бы ни было число $k > 1$, найдется такой единичный вектор $x_0 \in E$, что* $|l(x_0)| \geqslant \frac{1}{k} \|l\|$.

Действительно, данное предложение непосредственно следует из определения верхней грани и из равенства (см. [47], стр. 157, теорема 4):

$$\|l\| = \sup_{\|x\|=1} |l(x)|.$$

Лемма 1.2. *Пусть $\mathbf{A}$ — линейный ограниченный оператор из E_x в E_y. Тогда, каково бы ни было число $k > 1$, найдется такой единичный вектор $x_0 \in E_x$, что*

$$\|\mathbf{A}x_0\| \geqslant \frac{1}{k} \|\mathbf{A}\|.$$

Данное предложение непосредственно следует из определения верхней грани и из равенства (см. [47], стр. 137 и [3], стр. 63):

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathbf{A}x\|.$$

1.2. Условия полной непрерывности операторов.

Теорема 1.1. *Для того чтобы оператор $\mathbf{F}(x)$ был вполне непрерывным на ограниченном множестве $\omega \subseteq E_x$,* *необходимо и достаточно*[1]), *чтобы каждому* $\varepsilon > 0$ *отвечал ограниченный*[2]) *и непрерывный оператор* $\mathbf{P}(x)$, *обладающий следующими двумя свойствами*:

1°. *Существует конечномерное подпространство* $E^{(m)} \subset E_y$, *такое, что* $\mathbf{P}(x) \in E^{(m)}$ *для каждого* $x \in \omega$.

2°. $\|\mathbf{F}(x) - \mathbf{P}(x)\| < \varepsilon$.

Доказательство необходимости. Так как по условию $\mathbf{F}(\omega)$ есть компактное множество, то существует конечная ε-сеть (см. [47], стр. 63), т. е. конечное множество точек $y_1, y_2, \ldots, y_p \in E_y$, обладающих тем свойством, что для любого $x \in \omega$ найдется точка y_i, удовлетворяющая неравенству $\|\mathbf{F}(x) - y_i\| < \varepsilon$. Линейная оболочка $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k y_k$, где α_k — произвольные действительные числа, образует подпространство $E^{(m)} \subset E_y$, размерность которого $m \leqslant p$. Положим теперь

$$\mathbf{P}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)\, y_i}{\sum_{i=1}^{p} \mu_i(x)},$$

где

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|\mathbf{F}(x) - y_i\| & \text{для} \quad \|\mathbf{F}(x) - y_i\| \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{для} \quad \|\mathbf{F}(x) - y_i\| > \varepsilon. \end{cases}$$

Определенный таким образом оператор $\mathbf{P}(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Доказательство достаточности. Непрерывность оператора $\mathbf{F}(x)$ непосредственно вытекает из условия 2°. Доказательство компактности оператора $\mathbf{F}(x)$, т. е. доказательство того, что для произвольной последовательности $\{x_k\}$ из ω последовательность $\{\mathbf{F}(x_k)\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, мы проведем от противного.

Из допущения противного вытекает существование положительного ε_1 и такой последовательности $\{x_k\}$ из ω, что

---

1) См. [43], лемма 2 и [63, а], лемма 5.2.

2) Нелинейный оператор из E_x в E_y называется *ограниченным*, если он преобразует каждое ограниченное множество из E_x в ограниченное множество пространства E_y.

для произвольных i и j $(i \neq j)$ будет

$$\|\mathbf{F}(x_i) - \mathbf{F}(x_j)\| > \varepsilon_1. \tag{1.1}$$

Положим теперь, что оператор $\mathbf{P}(x)$ удовлетворяет условиям 1° и 2° при $\varepsilon = \frac{1}{6}\varepsilon_1$. Так как согласно условию 1° последовательность $\{\mathbf{P}(x_k)\}$ компактна, то найдется такая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что

$$\|\mathbf{P}(x_{n_k}) - \mathbf{P}(x_{n_1})\| < \frac{1}{6}\varepsilon_1 \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Отсюда и из условия 2° имеем:

$$\|\mathbf{F}(x_{n_k}) - \mathbf{F}(x_{n_1})\| \leqslant \|\mathbf{F}(x_{n_k}) - \mathbf{P}(x_{n_k})\| + \\ + \|\mathbf{P}(x_{n_k}) - \mathbf{P}(x_{n_1})\| + \|\mathbf{P}(x_{n_1}) - \mathbf{F}(x_{n_1})\| < \frac{1}{2}\varepsilon_1.$$

Это неравенство противоречит неравенству 1.1. Полученное противоречие доказывает компактность оператора $\mathbf{F}(x)$.

Пример. Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H (вещественном или комплексном) линейный оператор $\mathbf{A}$, который допускает матричное представление[1]), т. е. для всякого $z \in H$, $z = \sum_{k=1}^{\infty} x_k l_k$ ($\{l_k\}$ — ортонормальный базис в H)

$$\mathbf{A}z = \sum_{k=1}^{\infty} y_k l_k,$$

где

$$y_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} x_i,$$

и допустим, что

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty. \tag{1.2}$$

В этом случае каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $m = m(\varepsilon)$, что

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^2.$$

Здесь r — радиус шара $\|z\| \leqslant r$ из пространства H.

---

[1]) См. [3], стр. 76—87, 90—93.

Рассмотрим теперь линейный оператор $\mathbf{P}$, определенный равенством

$$\mathbf{P}z = \sum_{k=1}^{m} y_k l_k.$$

Оператор $\mathbf{P}$, очевидно, ограничен и его значения принадлежат m-мерному подпространству пространства H. Так как

$$\| \mathbf{A}z - \mathbf{P}z \| = \sum_{i=m+1}^{\infty} | y_i |^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \Big|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=m+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} | a_{ik} |^2 \| z \|^2 < \varepsilon^2,$$

то согласно теореме 1.1 оператор $\mathbf{A}$ вполне непрерывен. Этим, в частности, доказано, что линейный интегральный оператор

$$\mathbf{A}z = \int_{-\infty}^{+\infty} K(s, t)\, z(t)\, dt$$

с ядром Гильберта — Шмидта, т. е. с ядром, удовлетворяющим условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} | K(s, t) |^2\, ds\, dt < \infty,$$

вполне непрерывен, ибо такой оператор ([3], 84—87) приводится к матричному оператору, для которого выполняется неравенство (1.2).

В заключение этого пункта отметим, что условия усиленной непрерывности операторов будут приведены в пункте 7.2.

1.3. Связь между усиленной и полной непрерывностью операторов.

Теорема 1.2 (Цитланадзе [72, и]). *Из усиленной непрерывности оператора* $\mathbf{F}(x)$, *заданного в пространстве* E, *в котором шар* $\|x\| \leqslant r\ (r > 0)$ *слабо компактен, вытекает, что* $\mathbf{F}(x)$ *вполне непрерывен.*

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь компактность оператора $\mathbf{F}(x)$, ибо непрерывность $\mathbf{F}(x)$ есть следствие его усиленной непрерывности. Пусть $\{x_n\}$ есть последовательность, принадлежащая ограниченному множеству $\omega \subset E$. Так как ω ограничено, то оно слабо компактно, а следовательно, найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, слабо сходящаяся к x_0, для которой

$$\lim_{k \to \infty} \|\mathbf{F}(x_{n_k}) - \mathbf{F}(x_0)\| = 0.$$

Теорема доказана.

Отметим, что для линейных операторов, заданных в гильбертовом пространстве, имеет место обратное предложение (см. [47], стр. 214). Однако в общем случае из полной непрерывности оператора $\mathbf{F}(x)$ еще не следует его усиленная непрерывность; это видно из следующего примера.

Пример. Пусть

$$\mathbf{F}(x \mid s) = \int_0^1 K(s, t)\, x^2(t)\, dt\,^{1)},$$

где ядро $K(s, t)$ непрерывно по совокупности аргументов в единичном квадрате $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, в котором выполняется неравенство $0 < m \leqslant K(s, t)$. Оператор $\mathbf{F}(x)$ непрерывен в L^2, ибо если $x_n(t) \to x_0(t)$ при $n \to \infty$, то

$$\|\mathbf{F}(x_0 \mid s) - \mathbf{F}(x_n \mid s)\|^2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(s, t)\,[x_0^2(t) - x_n^2(t)]\, dt\right)^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant M^2 \int_0^1 \left\{\int_0^1 [x_0(t) + x_n(t)]^2\, dt \cdot \int_0^1 [x_0(t) - x_n(t)]^2\, dt\right\} ds \leqslant$$

$$\leqslant M^2 N \|x_0 - x_n\|^2,$$

где $M = \max K(s, t)$, $N = \sup\limits_{(n)} \|x_0 + x_n\|^2$.

Далее, если мы рассмотрим в L^2 шар D_r ($\|x\| \leqslant r$), то для всякого $x(t) \in D_r$

$$\|\mathbf{F}(x \mid s)\|^2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(s, t)\, x^2(t)\, dt\right)^2 ds \leqslant M^2 r^4. \tag{1.3}$$

Затем в силу равномерной непрерывности $K(s, t)$ каждому $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta > 0$, такое, что

$$|K(s + \Delta s, t) - K(s, t)| < \varepsilon,$$

---

1) Обозначением $\mathbf{F}(x \mid s)$ мы подчеркиваем, что оператор $\mathbf{F}$ зависит не только от функции x, но и от точки s.

если $|\Delta s| < \delta$. Отсюда следует, что

$$\int_0^1 [\mathbf{F}(x \mid s + \Delta s) - \mathbf{F}(x \mid s)]^2 ds \leqslant \varepsilon^2 r^4. \qquad (1.4)$$

Из неравенств (1.3) и (1.4) согласно теореме Рисса о компактности семейства функций (см. [47], стр. 73 или [65, в], стр. 36) следует компактность в L^2 оператора $\mathbf{F}(x \mid s)$. Таким образом, оператор $\mathbf{F}(x)$ вполне непрерывен в L^2.

Покажем, что оператор $\mathbf{F}(x)$ не является усиленно непрерывным. Действительно, в шаре D_r будет (если $\|x\| = r$):

$$\|\mathbf{F}(x \mid s)\| = \left(\int_0^1 \left[\int_0^1 K(s, t)\, x^2(t)\, dt\right]^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant mr^2 > 0.$$

Это неравенство показывает, что $\mathbf{F}(x)$ не может быть усиленно непрерывным, ибо усиленно непрерывный оператор преобразует всякую слабо сходящуюся к нулю последовательность в последовательность, которая сходится к $\mathbf{F}(\theta) = 0$ сильно (здесь $\|\theta\| = 0$).

Отметим еще, что в теореме 1.2 нельзя освободиться от требования слабой компактности шара пространства E; это видно из следующего примера (см. [72, к], стр. 241—242.)

Пример. Пусть $\mathbf{F}(x)$ есть единичный оператор, действующий из пространства C непрерывных функций в пространство L^2. Оператор $\mathbf{F}(x)$ не является компактным, ибо он преобразует последовательность $\{\sin 2\pi kt\}$ в ту же последовательность, которая в L^2 не компактна. Однако, какова бы ни была последовательность $\{x_n(t)\}$, слабо сходящаяся в C к $x(t) \in C$, эта последовательность в L^2 сходится сильно к $x(t) \in L^2$. Действительно, из слабой сходимости в C последовательности $\{x_n(t)\}$ к $x(t)$ следует (см. [5], стр. 116), что эта последовательность равномерно ограничена и что для всех $t \in [0, 1]$

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t) = x(t).$$

Но из последнего равенства и равномерной ограниченности последовательности $\{x_n(t)\}$ согласно известным теоремам о переходе к пределу под знаком интеграла (см. [10, a], теоремы I, VII, стр. 279—281) следует

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x_n^2(t)\, dt = \int_0^1 x^2(t)\, dt,$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 x_n(t)\, \alpha(t)\, dt = \int_0^1 x(t)\, \alpha(t)\, dt$$

для всякой функции $\alpha(t) \in L^2$. Из этих двух условий вытекает (см. [5], стр. 120), что последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится в L^2 сильно к $x(t) \in L^2$. Таким образом, единичный оператор, действующий из пространства C в пространство L^2, есть усиленно непрерывный оператор, который не является вполне непрерывным.

1.4. Вполне компактные операторы и равномерная непрерывность.

Теорема 1.3. [1]) *Определения* 1.6 *и* 1.6′ *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть оператор $\mathbf{F}(x)$ является вполне компактным в смысле определения 1.6. Рассмотрим тогда последовательность пар $\{x_n, x_n\}$, где x_n принадлежит ограниченному множеству $\omega \subset E_x$. Согласно определению 1.6, найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}, x_{n_k}\}$, для которой $\mathbf{F}(x_{n_k})$ сходится, т. е. $\mathbf{F}(x)$ — компактный оператор на ω.

Допустим теперь, что на некотором ограниченном множестве $\omega \subset E_x$ оператор $\mathbf{F}(x)$ не является равномерно непрерывным. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что, каково бы ни было $\delta_k > 0$, найдется пара точек x'_k, $x''_k \in \omega$, для которой

$$\|x'_k - x''_k\| < \delta_k \quad \text{и} \quad \|\mathbf{F}(x'_k) - \mathbf{F}(x''_k)\| \geqslant \varepsilon.$$

Полагая $\delta_k = \frac{1}{k}$, мы придем к противоречию с определением 1.6.

Обратно, пусть оператор $\mathbf{F}(x)$ является компактным и равномерно непрерывным. Рассмотрим произвольную последовательность пар $\{x'_n, x''_n\}$, принадлежащую некоторому ограниченному множеству $\omega \subset E_x$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \|x'_n - x''_n\| = 0.$$

Из компактности $\mathbf{F}(x)$ вытекает существование подпоследовательности $\{x'_{n_k}, x''_{n_k}\}$, для которой

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{F}(x'_{n_k}) = y_1 \in E_y, \qquad \lim_{k \to \infty} \mathbf{F}(x''_{n_k}) = y_2 \in E_y.$$

Если мы допустим, что $y_1 \neq y_2$, то, полагая $\|y_1 - y_2\| = 2\varepsilon$, мы найдем подпоследовательность $\{x'_{m_k}, x''_{m_k}\}$, для которой

$$\lim_{k \to \infty} \|x'_{m_k} - x''_{m_k}\| = 0 \quad \text{и} \quad \|\mathbf{F}(x'_{m_k}) - \mathbf{F}(x''_{m_k})\| \geqslant \varepsilon$$
$$(k = 1, 2, \ldots).$$

---

[1]) См. [9, о].

Это, однако, противоречит определению равномерной непрерывности.

Теорема доказана.

Из данной теоремы вытекает, что всякий вполне компактный оператор является вполне непрерывным. Обратное предложение не всегда имеет место, как видно из следующего примера.

Пример непрерывного и ограниченного функционала, который не является равномерно непрерывным. Пусть E есть бесконечномерное пространство типа Банаха, в котором, следовательно, сфера не компактна (см. [5], стр. 72). Так как сфера $\|x\| = 1$ не компактна, то найдется последовательность элементов x_1, x_2, x_3, ... ($\|x_k\| = 1$), для которой при $m \neq n$ $\|x_m - x_n\| \geqslant \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число < 1.

Построим последовательность y_1, y_2, y_3, ..., удовлетворяющую условиям:

$$\|y_k\| = 1 \quad \text{для} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\|x_k - y_k\| = \frac{\varepsilon}{k}.$$

Функционал $f(x)$ определим так:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x = x_k \text{ и } -1 \text{ при } x = y_k,\ k = 1, 2, 3, \ldots, \\ 1 - \dfrac{2k}{\varepsilon}\|x - x_k\| \quad \text{при } \|x - x_k\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2k},\ k = 1, 2, 3, \ldots, \\ \dfrac{2k}{\varepsilon}\|x - y_k\| - 1 \quad \text{при } \|x - y_k\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2k},\ k = 1, 2, 3, \ldots, \\ 0 \text{ для всех других } x. \end{cases}$$

Построенный таким образом функционал $f(x)$ непрерывен и ограничен в E. Однако $f(x)$ не будет равномерно непрерывным, ибо $f(x_k) - f(y_k) = 2$ для всякого k, хотя $\|x_k - y_k\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Отметим, что примерами вполне компактных операторов могут служить компактные операторы, удовлетворяющие условию Липшица.

1.5. О полной компактности и усиленной непрерывности операторов.

Теорема 1.4[1]). *Для того чтобы оператор* $\mathbf{F}(x)$, *заданный в пространстве* E, *в котором шар* $D(\|x\| \leqslant r)$ *слабо компактен, был усиленно непрерывным в* D, *необходимо, чтобы он был в* D *вполне компактным.*

---

[1]) См. [9, о], теорема 1.4.

Доказательство. Пусть $\{x'_n, x''_n\}$ есть произвольная последовательность пар, принадлежащих шару D, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \|x'_n - x''_n\| = 0.$$

Так как, по условию, шар D является слабо компактным, то найдется подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$, слабо сходящаяся к $x_0 \in D$. Из слабой сходимости $\{x'_{n_k}\}$ к x_0 следует также слабая сходимость $\{x''_{n_k}\}$ к x_0, ибо

$$\lim_{k\to\infty} \|x'_{n_k} - x''_{n_k}\| = 0.$$

Отсюда в силу усиленной непрерывности оператора $\mathbf{F}(x)$ имеем:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{F}(x'_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{F}(x''_{n_k}) = \mathbf{F}(x_0).$$

Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Из усиленной непрерывности оператора* $\mathbf{F}(x)$, *заданного в пространстве, в котором шар слабо компактен, следует его равномерная непрерывность.*

Заметим, что предложение, обратное теореме 1.4, неверно. Например, функционал $f(x) = \|x\|$ является вполне компактным, но он не будет слабо непрерывным.

Отметим, что теорема 1.4 сохраняется, если вместо шара D взять произвольную слабо замкнутую область W. В частности, за W можно взять любую ограниченную выпуклую (замкнутую или открытую) область пространства E, в котором сфера слабо компактна.

1.6. Об ограниченности операторов и функционалов. Как известно, из непрерывности функции на ограниченном замкнутом множестве n-мерного евклидова пространства вытекает, что на этом множестве функция равномерно непрерывна, ограничена и достигает своих граней.

Иначе обстоит дело с функционалами, заданными в бесконечномерных пространствах. Из непрерывности функционала в шаре D бесконечномерного пространства E типа Банаха еще не следует ни равномерная непрерывность, ни ограниченность этого функционала. Действительно, пусть E

есть бесконечномерное пространство типа Банаха, в котором, следовательно, шар $D(\|x\| \leqslant r)$ не является компактным множеством (см. [5], стр. 72). Так как шар D не является компактным, то найдется последовательность элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ($\|x_n\| = 1$), для которой при $m \neq n$ $\|x_m - x_n\| \geqslant \varepsilon$, где ε — положительное число, $\varepsilon < 1$. Построим функционал $f(x)$, полагая

$$f(x) = \begin{cases} k \text{ при } x = x_k, \ k = 1, 2, 3, \ldots; \\ k - \dfrac{2k}{\varepsilon}\|x - x_k\| \text{ при } \|x - x_k\| \leqslant \dfrac{1}{2}\varepsilon, \ k = 1, 2, 3 \ldots; \\ 0 \quad \text{для всех других } x. \end{cases}$$

Этот функционал непрерывен в E, но не ограничен в шаре $\|x\| \leqslant 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$.

Точно так же для операторов из непрерывности не следует ограниченность. Если, однако, потребовать положительную однородность оператора $\mathbf{F}(x)$, т. е. чтобы для $t \geqslant 0$ выполнялось равенство $\mathbf{F}(tx) = t^{\gamma}\mathbf{F}(x)$, где степень однородности $\gamma \geqslant 0$, то из непрерывности $\mathbf{F}(x)$ в точке $x = \theta$ следует ограниченность $\mathbf{F}(x)$ в любом шаре D. Действительно, из непрерывности $\mathbf{F}(x)$ в θ следует ограниченность $\mathbf{F}(x)$ в некоторой окрестности θ, а следовательно, в силу однородности и в любом шаре $\|x\| \leqslant r$.

Далее, как мы видели в пункте 1.4, из непрерывности и ограниченности функционала $f(x)$ в шаре $\|x\| \leqslant r$ еще не следует равномерная непрерывность $f(x)$ в этом шаре. Таким образом функционал, непрерывный в шаре $\|x\| \leqslant r$ бесконечномерного пространства E, ведет себя примерно так же как непрерывная функция, заданная на ограниченном открытом множестве конечномерного пространства. Аналогии подобного типа можно продолжать. Известно, например, что если функция одного переменного равномерно непрерывна на ограниченном числовом множестве, то она на таком множестве ограничена (даже, если это множество не замкнуто). Нечто подобное имеет место и для операторов. *Если оператор* $\mathbf{F}(x)$ *равномерно непрерывен в шаре* $D_r(\|x\| \leqslant r)$ *пространства Банаха* E, *то, какова бы ни была размерность* E, $\mathbf{F}(x)$ *ограничен в этом шаре* D_r.

Действительно, возьмем произвольную точку $x_0 \in D_r$ и рассмотрим отрезок луча tx_0 $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Пусть $\delta_1 > 0$ есть то значение δ, которое согласно определению 1.2 отвечает значению $\varepsilon = 1$. Положим

$$\Delta t = \frac{\delta_1}{r + \delta_1} < \frac{\delta_1}{r}$$

и будем откладывать Δt от начала отрезка $\Delta = [0, 1]$, пока отрезок Δ не покроется отрезками длины Δt. Пусть t_1, $t_2, \ldots, t_{n-1}$ суть координаты точек деления отрезка Δ $(t_0 = 0,\ t_n = 1)$. Тогда

$$n < 1 + \frac{1}{\Delta t} = 2 + \frac{r}{\delta_1}$$

и

$$\|\mathbf{F}(x_0)\| \leqslant \|\mathbf{F}(\theta)\| + \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{F}(t_k x_0) - \mathbf{F}(t_{k-1} x_0)\| <$$

$$< \|\mathbf{F}(\theta)\| + n < \|\mathbf{F}(\theta)\| + 2 + \frac{r}{\delta_1},$$

где r есть радиус шара D и θ — нулевой элемент пространства E. Последнее неравенство доказывает ограниченность $\mathbf{F}(x)$ в шаре D. Это предложение допускает следующее обобщение. *Если в пространстве E задана ограниченная односвязная область*[1] ω, *обладающая тем свойством, что каковы бы ни были точки a, $b \in \omega$, существует кривая $l \in \omega$, соединяющая a и b, длина которой меньше M, где M не зависит от выбора точек a, b и кривой l, то из равномерной непрерывности на ω функционала $f(x)$ или оператора $\mathbf{F}(x)$ следует их ограниченность на ω.* Таким образом для широкого класса ограниченных множеств $\omega \subset E$ справедливо предложение: *из равномерной непрерывности оператора $\mathbf{F}(x)$ на ω следует, что на ω $\mathbf{F}(x)$ ограничен.* При этом, однако, вопрос о достижении граней остается открытым. Более того, из равномерной непрерывности функционала $f(x)$ в шаре D бесконечномерного пространства E еще не следует, что $f(x)$ достигает своих граней на D. Это видно из следующего примера.

---

[1]) Определение односвязной области будет дано в пункте 2.6.

Пример. Пусть E есть бесконечномерное пространство типа Банаха и S — единичная сфера $\|x\|=1$. Так как S не компактна, то найдется $\varepsilon>0$ и последовательность $\{x_k\}\in S$ такая, что при $m\neq n$

$$\|x_m-x_n\|\geqslant 2\varepsilon,$$

где $\varepsilon<\frac{1}{2}$.

Рассмотрим последовательность шаров D_k $(\|x-x_k\|\leqslant\varepsilon)$, затем построим функционал $f(x)$, полагая

$$f(x)=\begin{cases}\|x\|, \text{ если } x\,\bar{\in}\, D_k,\ k=1,\ 2\ldots;\\ \|x\|+\dfrac{k-1}{\varepsilon k}(\varepsilon-\|x-x_k\|), \text{ если } x\in D_k.\end{cases}$$

Этот функционал равномерно непрерывен в любом шаре $\|x\|\leqslant r$. Однако в шаре $\|x\|\leqslant 1+\varepsilon$ он не достигает своей верхней грани $M=2$.

Отметим, наконец, что *если оператор* $\mathbf{F}(x)$ *усиленно непрерывен в шаре* D *пространства* E, *в котором всякое ограниченное множество слабо компактно, то* $\mathbf{F}(x)$ *ограничен и его норма достигает своих граней в* D. Это утверждение есть непосредственное следствие усиленной непрерывности $\mathbf{F}(x)$ и слабой компактности шара D $(\|x\|\leqslant r)$. Действительно, согласно теореме 1.2 $\mathbf{F}(D)$ есть компактное, а значит, и ограниченное множество. Затем достижение граней доказывается следующим образом. Пусть

$$M=\sup_D\|\mathbf{F}(x)\|$$

и $\{x_n\}$ — последовательность из D, для которой

$$\lim_{n\to\infty}\|F(x_n)\|=M.$$

Так как $\{x_n\}$ есть ограниченное множество, то в силу слабой компактности и слабой замкнутости D найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая слабо сходится к $x_0\in D$. Отсюда, так как $\mathbf{F}(x)$ усиленно непрерывен, то

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{F}(x_{n_k})-\mathbf{F}(x_0)\|=0.$$

Но

$$\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{F}(x_{n_k})\|=M,$$

следовательно, $\|\mathbf{F}(x_0)\|=M$. Так же доказывается, что $\|\mathbf{F}(x)\|$ достигает в D своей нижней грани.

Сделанные в этом пункте замечания показывают, что усиленно непрерывные, а также равномерно непрерывные операторы и функционалы играют специальную роль при решении некоторых экстремальных задач.

1.7. О непрерывности и полной вариации абстрактных функций. Оператор, действующий из n-мерного евклидова пространства в общее банахово пространство, называется *абстрактной функцией*.

Мы будем рассматривать абстрактные функции в случае $n=1$, т. е. функции, которые преобразуют точки числовой прямой в точки банахова пространства. Абстрактные функции во многом напоминают обычные функции. Для абстрактной функции, например, имеют место следующие предложения:

1°. Абстрактная непрерывная функция преобразует всякое ограниченное бесконечное множество в компактное множество.

2°. Абстрактная функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, равномерно непрерывна на нем.

Эти предложения доказываются так же, как для обычных функций.

Понятие полной вариации вводится для абстрактных функций так же, как для обычных функций (см. [17]). Пусть на отрезке $[a, b]$ задана абстрактная функция $x(t)$. Разделим $[a, b]$ на части точками

$$t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$$

и составим сумму

$$V = \sum_{k=0}^{n-1} \| x(t_{k+1}) - x(t_k) \| .$$

Верхняя грань множества всевозможных сумм V называется *полной вариацией функции* $x(t)$ *на отрезке* $[a, b]$ и обозначается через $\overset{b}{\underset{a}{V}}(x)$. Если $\overset{b}{\underset{a}{V}}(x) < +\infty$, то говорят, что $x(t)$ есть абстрактная функция *ограниченной вариации*. Если абстрактная функция $x(t)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. для любых $t', t'' \in [a, b]$

$$\| x(t') - x(t'') \| \leqslant M \, | t' - t'' | ,$$

то

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(x) \leqslant M(b-a),$$

а значит, $x(t)$ есть функция с ограниченной вариацией.

Теорема 1.5. *Если абстрактная функция $x(t)$ имеет производную*

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

которая ограничена на $[a, b]$, то на этом отрезке $x(t)$ удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Пусть $x(t) \in E$. Возьмем какой-нибудь элемент $e \in E^*$ (E^* — пространство, сопряженное к E) с единичной нормой и рассмотрим обычную функцию

$$\varphi(t) = (x(t), e),$$

где (x, e), при фиксированном e, есть линейный функционал, заданный в пространстве E. Согласно условию теоремы функция $\varphi(t)$ имеет ограниченную производную на $[a, b]$:

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, e\right) \text{ и } |\varphi'(t)| \leqslant \|e\| \left\|\frac{dx(t)}{dt}\right\| \leqslant M,$$

ибо $\left\|\frac{dx(t)}{dt}\right\| \leqslant M = \text{const}$. Отсюда вытекает, что для функции $\varphi(t)$ справедлива формула Лагранжа

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \left(\frac{dx(t_c)}{dt}, e\right)(t_2 - t_1), \quad t_c \in (t_1, t_2),$$

и что $\varphi(t)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant \left\|\frac{dx(t_c)}{dt}\right\| \|e\| \, |t_2 - t_1| \leqslant M\,|t_2 - t_1|.$$

Так как e — произвольный элемент из E^* с единичной нормой, то согласно лемме 1.1 его можно подобрать так, чтобы при фиксированных t_1 и t_2 имело место неравенство

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| = |(x(t_2) - x(t_1), e)| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \|x(t_2) - x(t_1)\| \cdot \|e\|.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства имеем

$$\|x(t_2)-x(t_1)\|\leqslant 2M\,|t_2-t_1|.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.2. Если абстрактная функция $x(t)$ имеет ограниченную производную на $[a, b]$, то на этом отрезке $[a, b]$ она является функцией с ограниченной вариацией.

Отметим еще, что если $t=\varphi(\tau)$ есть непрерывная возрастающая функция на $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$, то

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} x(t)=\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}} x[\varphi(\tau)].$$

1.8. О слабой компактности и слабой полноте пространств. Для применения вариационных методов к исследованию нелинейных уравнений и нелинейных операторов важно, чтобы пространство, в котором рассматриваются нелинейные уравнения и операторы, было слабо полным и чтобы в нем сфера была слабо компактной.

Пространство Банаха называется *слабо полным*, если в нем любая фундаментальная в смысле слабой сходимости последовательность $\{x_n\}$ имеет слабый предел $x_0\in E$, т. е. из равенства

$$\lim_{m,\, n\to\infty}(y,\ x_n-x_m)=0,$$

где y — произвольный элемент сопряженного пространства E^*, следует существование элемента $x_0\in E$ такого, что

$$\lim_{n\to\infty}(y,\ x_n)=(y,\ x_0).$$

Гильбертово пространство слабо полно ([3], стр. 71, следствие 2). Пространства L^p и l^p, где $p\geqslant 1$, слабо полны [1]) ([5], гл. IX, § 4). Всякое регулярное пространство слабо полно. Пространство непрерывных функций не является слабо полным ([5], стр. 121). Пространства, в которых сфера слабо компактна (см. определение 1.9), являются слабо полными. Имеет место и следующее предложение. *Если пространство E обладает слабой полнотой, а сопряженное*

---

[1]) Свойство слабой полноты пространства L доказал Г. Штейнгауз [77], а свойство слабой полноты пространств L^p и l^p, где $p>1$, доказал Ф. Рисс [61].

пространство E^* *сепарабельно, то шар* $\|x\| \leqslant r$ *слабо компактен*. Докажем это. Пусть $y_1, y_2, y_3, \ldots$ образуют счетную всюду плотную сеть в шаре $D_R(\|y\| \leqslant R)$ пространства E^*. Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ($\|x_k\| \leqslant r$) из E. Так как числовая последовательность (y_1, x_k) ограничена ($|(y_1, x_k)| \leqslant \leqslant \|y_1\| \|x_k\| \leqslant Rr$), то существует сходящаяся подпоследовательность $\left(y_1, x_k^{(1)}\right)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Затем из ограниченной последовательности $\left(y_2, x_k^{(1)}\right)$ мы выделяем сходящуюся подпоследовательность $\left(y_2, x_k^{(2)}\right)$. Продолжая этот процесс, мы получим таблицу

$$\begin{array}{llll}
\left(y_1, x_1^{(1)}\right), & \left(y_1, x_2^{(1)}\right), & \left(y_1, x_3^{(1)}\right), & \ldots \\
\left(y_2, x_1^{(2)}\right), & \left(y_2, x_2^{(2)}\right), & \left(y_2, x_3^{(2)}\right), & \ldots \\
\left(y_3, x_1^{(3)}\right), & \left(y_3, x_2^{(3)}\right), & \left(y_3, x_3^{(3)}\right), & \ldots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

каждая строчка которой образует сходящуюся числовую последовательность. Составляя диагональную последовательность $x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, \ldots$, мы убеждаемся, что для всякого n последовательность $\left(y_n, x_k^{(k)}\right)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, сходится. Так как $y_1, y_2, y_3, \ldots$ образует всюду плотную сеть в D_R, то для всякого $y \in D_R$ существует $\lim\limits_{k\to\infty} \left(y, x_k^{(k)}\right)$, т. е. последовательность $x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, \ldots$ является фундаментальной в смысле слабой сходимости в E. Так как E обладает слабой полнотой, то $\left\{x_k^{(k)}\right\}$ слабо сходится к некоторому элементу $x_0 \in E$. Этим доказана слабая компактность шара $\|x\| \leqslant r$.

Вопрос о слабой компактности шара связан с вопросом о регулярности пространства.

Банахово пространство E называется *регулярным* или *рефлективным*, если оно совпадает со своим вторым сопряженным E^{**}, т. е. если для всякого $z \in E^{**}$ найдется $x \in E$ такой, что

$$z(y) = y(x)$$

для всякого $y \in E^*$.

Гильбертово пространство регулярно как самосопряженное. Пространства L^p, где $p > 1$, регулярны. Пространства L и C не являются регулярными ([62], стр. 231—232).

С. Банаху принадлежит следующая теорема:

Теорема 1.6. *Если пространство E сепарабельно, то для его регулярности необходимо и достаточно, чтобы единичная сфера в E была слабо компактной* ([5], стр. 160, теорема 13).

Позднее, В. Гантмахер и В. Шмульян [15] доказали, что единичная сфера всякого регулярного пространства слабо компактна. Затем Эберлейн [78] и недавно Х. Никаидо [58] показали, что если единичная сфера пространства E слабо компактна, то E регулярно.

Таким образом, имеет место следующая теорема Гантмахер — Шмульяна — Эберлейна.

Теорема 1.7. *Для того чтобы единичная сфера банахова пространства E была слабо компактной, необходимо и достаточно, чтобы это пространство было регулярным.*

Вопрос о связи между регулярностью (а значит, и слабой компактностью сферы) банахова пространства и другими его свойствами рассматривали М. Г. Крейн ([4], 178—179), Д. П. Мильман [51], В. Л. Шмульян [75], И. А. Эзрохи [79] и другие.

Д. П. Мильман показал [51], что всякое равномерно выпуклое пространство Банаха регулярно. Пространство называется *равномерно выпуклым*, если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что для любых единичных векторов ($\|x\| = \|y\| = 1$), удовлетворяющих условию $\|x+y\| > 2(1-\delta)$, выполняется неравенство $\|x-y\| < \varepsilon$.

Вопрос о связи между регулярностью пространства E и его слабой полнотой рассмотрен в работе И. А. Эзрохи [79], из которой мы приведем следующий результат:

Теорема 1.8. [79]. *Если пространство E сепарабельно, то для его регулярности необходимо и достаточно, чтобы оно было слабо полным и чтобы сопряженное к нему пространство было сепарабельным.*

§ 2. Интеграл Стилтьеса и криволинейные интегралы

Впервые интеграл Римана для абстрактных функций рассматривал Н. Винер [11]. Позднее интеграл Римана для абстрактных функций был изучен в работах Л. Грэйвса [22], М. Кернера [33, 6], И. М. Гельфанда [17] и других авторов. Интеграл Стилтьеса для абстрактных функций был рассмотрен в работах М. К. Гавурина [13, а, г]. Криволинейные интегралы от абстрактных функций были рассмотрены в работах М. Кернера [33, б] и М. К. Гавурина [13]. В настоящем параграфе мы рассмотрим обобщения понятия об интеграле Римана — интеграл Стилтьеса и криволинейные интегралы. При изучении этого круга вопросов мы воспользуемся приемом М. К. Гавурина и изложим найденные им результаты [13, а, г].

2.1. Интеграл Стилтьеса. Пусть для элементов $x \in E_x$ определено умножение справа на элементы $y \in E_y$, обладающее следующими свойствами:

1°. $xy \in E_z$, где E_z — банахово пространство.

2°. $(ax_1 + bx_2)y = ax_1y + bx_2y$.

3°. $x(ay_1 + by_2) = axy_1 + bxy_2$, где a и b — произвольные вещественные числа, а x_1, x_2, x и y_1, y_2, y — произвольные элементы, соответственно принадлежащие пространствам E_x и E_y.

4°. $\|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|$.

Произведение, удовлетворяющее этим четырем условиям, определяет ограниченный билинейный оператор $\mathbf{w} = xy$, который действует из пространств E_x и E_y в пространство E_z и норма которого не превосходит единицы. Обратно, билинейный оператор $\mathbf{w} = \Phi(x, y)$, действующий из пространств E_x и E_y в пространство E_z и удовлетворяющий условию

$$\|\Phi\| = \sup_{\|x\| = \|y\| = 1} \|\Phi(x, y)\| \leqslant 1,$$

определяет умножение элементов $x \in E_x$ на элементы $y \in E_y$, которое удовлетворяет условиям 1° — 4°.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две ограниченные абстрактные функции $x(t) \in E_x$ и $y(t) \in E_y$. Пусть определено произведение $xy \in E_z$ для $x \in E_x$ и $y \in E_y$, удовлетворяющее условиям 1° — 4°. Разделим $[a, b]$ на части при помощи точек

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b, \tag{2.0}$$

выберем на каждом отрезке $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ по точке τ_k и составим интегральную сумму Стилтьеса

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} x(\tau_k)[y(t_{k+1}) - y(t_k)]. \tag{2.1}$$

Если при $\lambda = \max \Delta t_k \to 0$ существует предел $I \in E_z$ интегральных сумм σ (т. е. каждому $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что как только $\lambda < \delta$, то $\|I - \sigma\| < \varepsilon$ для любого способа разбиения $[a, b]$ на части и любого выбора точек τ_k), то этот предел I называется *интегралом Стилтьеса функции $x(t)$ по функции $y(t)$* и обозначается так:

$$\int_a^b x(t)\,dy(t).$$

Интеграл Римана от абстрактной функции $x(t)$ есть частный случай интеграла Стилтьеса, получающийся при $y(t) = t$.

Теорема 2.1 [1]). *Если абстрактная функция $x(t)$ непрерывна, а абстрактная функция $y(t)$ есть функция с ограниченной вариацией, то существует интеграл*

$$\int_a^b x(t)\,dy(t).$$

Доказательство. Так как из непрерывности на отрезке $[a, b]$ абстрактной функции $x(t)$ следует ее равномерная непрерывность, то заданному $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что из неравенства $|t'' - t'| \leqslant \delta$ следует неравенство $\|x(t'') - x(t')\| < \frac{\varepsilon}{2M}$, где $M = \overset{b}{\underset{a}{V}}(y)$.

Рассмотрим подразделение (2.0), для которого $\lambda \leqslant \delta$, и соответствующую ему сумму σ по формуле (2.1). Разделим каждый отрезок Δt_k на более мелкие части при помощи точек

$$t_k = t_{k,0} < t_{k,1} < t_{k,2} < \ldots < t_{k,i_k} = t_{k+1}$$

и образуем интегральную сумму

$$\sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{i_k - 1} x(\tau_{k,\nu})\,[y(t_{k,\nu+1}) - y(t_{k,\nu})],$$

где $t_{k,\nu} \leqslant \tau_{k,\nu} \leqslant t_{k,\nu+1}$. Так как для всякого ν $|\tau_{k,\nu} - \tau_k| \leqslant \delta$,

[1]) См. [13, г], стр. 83; ср. [1], стр. 200—201.

то

$$\| x(\tau_{k,\nu}) - x(\tau_k) \| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Отсюда

$$\sigma - \sigma' = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{i_k-1} x(\tau_k)[y(t_{k,\nu+1}) - y(t_{k,\nu})] -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{i_k-1} x(\tau_{k,\nu})[y(t_{k,\nu+1}) - y(t_{k,\nu})]$$

и

$$\|\sigma - \sigma'\| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{i_k-1} \|x(\tau_k) - x(\tau_{k,\nu})\| \, \|y(t_{k,\nu+1}) - y(t_{k,\nu})\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2M} \overset{b}{\underset{a}{V}}(y) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для всяких двух разбиений (2.0), для которых $\lambda \leqslant \delta$, мы получим для соответствующих сумм σ' и σ'' следующее неравенство:

$$\|\sigma' - \sigma''\| = \|\sigma' - \sigma + \sigma - \sigma''\| \leqslant \|\sigma' - \sigma\| + \|\sigma - \sigma''\| < \varepsilon.$$

Разделим теперь отрезок $[a, b]$ на m $(m = 2, 3, 4, \ldots)$ равных частей и для каждого m по формуле (2.1) выберем определенную интегральную сумму σ_m. Последовательность $\{\sigma_m\}$ будет фундаментальной, ибо по доказанному, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое n_0, что для всякого $n \geqslant n_0$ и любого натурального p будет $\|\sigma_n - \sigma_{n+p}\| < \varepsilon$. В силу полноты пространства E_z последовательность $\{\sigma_m\}$ сходится к некоторому элементу $I \in E_z$. Покажем, что I есть предел интегральных сумм σ. Действительно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое n_0, что для всякого $n \geqslant n_0$

$$\|I - \sigma_n\| < \varepsilon.$$

С другой стороны, заданному $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для всякого разделения (2.0), для которого $\lambda \leqslant \delta$, будет

$$\|\sigma - \sigma_n\| < \varepsilon,$$

если $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \delta$. Из последних двух соотношений имеем

$$\|\sigma - I\| \leqslant \|\sigma - \sigma_n\| + \|\sigma_n - I\| < 2\varepsilon,$$

а значит

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = I.$$

Теорема доказана.

2.2. Свойства интеграла Стилтьеса. Интеграл Стилтьеса имеет следующие свойства:

1°.

$$\int_a^b x(t)\,dy(t) = -\int_b^a x(t)\,dy(t).$$

2°. Если $x(t) = x_0 = \text{const}$, то

$$\int_a^b x(t)\,dy(t) = \int_a^b x_0\,dy(t) = x_0 y(t)\Big|_a^b,$$

где, как обычно,

$$y(t)\Big|_a^b = y(b) - y(a).$$

3°. Если $x(t) = x_0 \varphi(t)$, где $x_0 \in E_x$, а $\varphi(t)$ — вещественная функция, то из существования интеграла

$$\int_a^b \varphi(t)\,dy(t)$$

следует существование интеграла

$$\int_a^b x(t)\,dy(t)$$

и равенство

$$\int_a^b x(t)\,dy(t) = x_0 \int_a^b \varphi(t)\,dy(t).$$

4°. Если $y(t) = y_0 \psi(t)$, где $y_0 \in E_y$ и $\psi(t)$ — вещественная функция, то из существования интеграла Стилтьеса от x

по $\psi(t)$ следует существование интеграла Стилтьеса от $x(t)$ по $y(t)$ и равенство

$$\int_a^b x(t)\,dy(t) = \left(\int_a^b x(t)\,d\psi(t)\right) y_0.$$

5°.

$$\int_a^b [x_1(t)+x_2(t)]\,dy(t) = \int_a^b x_1(t)\,dy(t) + \int_a^b x_2(t)\,dy(t),$$

$$\int_a^b x(t)\,d[y_1(t)+y_2(t)] = \int_a^b x(t)\,dy_1(t) + \int_a^b x(t)\,dy_2(t),$$

причем из существования двух интегралов, входящих в каждое из равенств, следует и существование третьего интеграла.

6°. Из существования одного из интегралов

$$\int_a^b x(t)\,dy(t) \quad \text{и} \quad \int_a^b [dx(t)]\,y(t)$$

следует существование другого и равенство

$$\int_a^b x(t)\,dy(t) + \int_a^b [dx(t)]\,y(t) = x(t)\,y(t)\Big|_a^b,$$

которое называется *формулой интеграции по частям.*

7°. Если $a < c < b$, то имеет место равенство

$$\int_a^b x(t)\,dy(t) = \int_a^c x(t)\,dy(t) + \int_c^b x(t)\,dy(t),$$

если интеграл, входящий в левую часть равенства, существует.

8°. Если $t = \gamma(\tau)$ есть возрастающая и непрерывная функция на $[\alpha, \beta]$ $(a = \gamma(\alpha),\ b = \gamma(\beta))$, то

$$\int_a^b x(t)\,dy(t) = \int_\alpha^\beta x(\gamma(\tau))\,dy(\gamma(\tau)),$$

если интеграл, входящий в левую часть равенства, существует.

Свойства 1°—5° непосредственно следуют из определения интеграла. Для доказательства свойства 7° достаточно включить точку c в точки деления отрезка $[a, b]$. Свойство 8° доказывается так же, как для вещественных интегралов Стилтьеса.

Доказательство свойства 6°. Пусть существует первый интеграл. Представим интегральную сумму (2.1) в виде

$$\sigma = -\sum_{k=1}^{n-1} [x(\tau_k) - x(\tau_{k-1})]\, y(t_k) + x(\tau_{n-1})\, y(b) - x(\tau_0)\, y(t_0)$$

или

$$\sigma = x(t)\, y(t)\Big|_a^b - \{[x(\tau_0) - x(a)]\, y(a) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-1} [x(\tau_k) - x(\tau_{k-1})]\, y(t_k) + [x(b) - x(\tau_{n-1})]\, y(b)\}.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, есть интегральная сумма функции $y(t)$ по функции $x(t)$, у которой точками деления служат точки

$$a \leqslant \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_{n-1} \leqslant b,$$

а

$$t_k \in [\tau_{k-1}, \tau_k] = \Delta\tau_k.$$

Если $\lambda = \max \Delta t_k \to 0$, то и $\mu = \max \Delta\tau_k \to 0$, а значит, пределом фигурной скобки служит интеграл Стилтьеса функции $y(t)$ по функции $x(t)$. Свойство 6° доказано.

2.3. О предельном переходе под знаком интеграла Стилтьеса.

Теорема 2.2[1]). *Если последовательность непрерывных абстрактных функций $\{x_n(t)\}$ сходится равномерно к непрерывной абстрактной функции $x(t)$, а $y(t)$ — абстрактная функция с ограниченной вариацией, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\, dy(t) = \int_a^b x(t)\, dy(t).$$

---

[1]) См. [13, г].

Доказательство. Для доказательства мы сначала установим следующее неравенство:

$$\left\| \int_a^b x(t)\, dy(t) \right\| \leqslant \int_a^b \| x(t) \| \, d\overset{t}{\underset{a}{V}} y(t) \leqslant \max_{[a,\, b]} \| x(t) \| \overset{b}{\underset{a}{V}} y(t). \qquad (2.2)$$

Действительно,

$$\| \sigma \| = \left\| \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k) [y(t_{k+1}) - y(t_k)] \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \| x(\tau_k) \| \, \| y_{k+1}) - y(t_k) \| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \| x(\tau_k) \| \overset{t_{k+1}}{\underset{t_k}{V}} y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \| x(\tau_k) \| \left[\overset{t_{k+1}}{\underset{0}{V}} y(t) - \overset{t_k}{\underset{0}{V}} y(t) \right] = S.$$

Так как вещественная функция $\| x(t) \|$ непрерывна, а вещественная функция $\overset{t}{\underset{a}{V}} y(t)$ является монотонно возрастающей, то пределом S служит интеграл Стилтьеса функции $\| x(t) \|$ по функции $\overset{t}{\underset{a}{V}} y(t)$. Следовательно, переходя в последнем неравенстве к пределу при $\lambda = \max \Delta t_k \to 0$, мы получим неравенство (2.2). Используя это неравенство, напишем:

$$\left\| \int_a^b [x_n(t) - x(t)]\, dy(t) \right\| \leqslant \int_a^b \| x_n(t) - x(t) \| \, d\overset{t}{\underset{a}{V}} y(t).$$

Так как в силу равномерной сходимости $\{x_n(t)\}$ к $x(t)$ предел последнего интеграла равен нулю, то этим теорема доказана.

Теорема 2.3[1]). *Если абстрактная функция* $x(t)$ *непрерывна, а последовательность абстрактных функций* $\{y_n(t)\}$ *сходится к конечной функции* $y(t)$ *в каждой точке* $[a, b]$, *то при выполнении условия*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} y_n(t) < K = \text{const}$$

---

[1]) См. [13, г]. Ср. [55], стр. 207.

имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b x(t)\,dy_n(t)=\int_a^b x(t)\,dy(t).$$

Доказательство. Разделим отрезок $[a, b]$ произвольно на n частей и согласно условию напишем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\|y_m(t_{k+1})-y_m(t_k)\|<K.$$

Переходя здесь к пределу при $m\to\infty$, мы получим, что $\overset{b}{\underset{a}{V}}y(t)\leqslant K$. Пусть $\varepsilon>0$ выбрано произвольно; разобьем $[a, b]$ точками t_k на отрезки Δt_k так, чтобы колебание $x(t)$ на каждом из этих отрезков было меньше, чем $\varepsilon(3K)^{-1}$. Тогда

$$\int_a^b x(t)\,dy(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}x(t)\,dy(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[x(t)-x(t_k)]\,dy(t)+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1}x(t_k)\int_{t_k}^{t_{k+1}}dy(t).$$

Но

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}}dy(t)=y(t_{k+1})-y(t_k),$$

а на отрезке $[t_k, t_{k+1}]=\Delta t_k$

$$\|x(t)-x(t_k)\|<\varepsilon(3K)^{-1},$$

откуда согласно неравенству (2.2) имеем

$$\left\|\int_{t_k}^{t_{k+1}}[x(t)-x(t_k)]\,dy(t)\right\|<\varepsilon(3K)^{-1}\overset{t_{k+1}}{\underset{t_k}{V}}y(t),$$

а, значит,

$$\left\|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[x(t)-x(t_k)]\,dy(t)\right\|<\varepsilon(3K)^{-1}\overset{b}{\underset{a}{V}}y(t)\leqslant\frac{\varepsilon}{3},$$

Следовательно,

$$\int_a^b x(t)\,dy(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k)\,[y(t_{k+1}) - y(t_k)] + \frac{\varepsilon}{3}\eta,$$

где $\|\eta\| \leqslant 1$.

Аналогично

$$\int_a^b x(t)\,dy_m(t) = \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k)\,[y_m(t_{k+1}) - y_m(t_k)] + \frac{\varepsilon}{3}\eta_m$$

$$(\|\eta_m\| \leqslant 1).$$

Но при подходящем выборе m_0 для всякого $m \geqslant m_0$ будет

$$\left\| \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k)\,[y_m(t_{k+1}) - y_m(t_k)] - \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k)\,[y(t_{k+1}) - y(t_k)] \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда и из предыдущего следует, что для $m \geqslant m_0$ будет

$$\left\| \int_a^b x(t)\,dy_m(t) - \int_a^b x(t)\,dy(t) \right\| < \varepsilon.$$

Это неравенство доказывает теорему.

Теорема 2.4[1]). *Если последовательность непрерывных абстрактных функций $\{x_n(t)\}$ сходится равномерно к функции $x(t)$, а последовательность абстрактных функций $\{y_n(t)\}$ сходится к конечной функции $y(t)$ в каждой точке* $[a, b]$, *причем* $\overset{b}{\underset{a}{V}} y_n(t) < K = \text{const}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\,dy_n(t) = \int_a^b x(t)\,dy(t).$$

Доказательство. Напишем, что[2])

$$\int_a^b x_n(t)\,dy_n(t) - \int_a^b x(t)\,dy(t) =$$

$$= \int_a^b [x_n(t) - x(t)]\,dy_n(t) + \int_a^b x(t)\,d\,[y_n(t) - y(t)].$$

---

[1]) См. [13, г], стр. 86.

[2]) Очевидно, $x(t)$ — непрерывная функция.

Согласно теореме 2.3 предел второго интеграла в правой части равен нулю, а первый интеграл согласно неравенству (2.2) не превосходит $K \max\limits_{[a,\, b]} \|x_n(t) - x(t)\|$, так что и его предел равен нулю.

2.4. Абстрактные кривые. Пусть однозначная абстрактная функция $x(t)$ отображает отрезок $[a, b]$ на некоторое множество L пространства Банаха E. В этом случае L называется *дугой кривой*, заданной в E, а $x(t)$ называется *представлением дуги* L. Точка $x(a) \in E$ называется *началом* этой дуги, а точка $x(b) \in E$ называется *концом* дуги L. Если $x(t)$ — непрерывная функция, то кривая называется непрерывной. Если в выражении $x(t)$ мы положим $t = \varphi(\tau)$, где $\varphi(\tau)$ — непрерывная возрастающая функция, причем $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$, то мы получим другое представление дуги L. Мы будем рассматривать лишь такие представления дуги L, которые получаются одно из другого заменой аргумента непрерывной возрастающей функцией другого скалярного аргумента.

Дуга L непрерывной кривой называется *простой*, есл одно из ее представлений $x(t)$ устанавливает взаимно однозначное и непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ на L.

Определение 2.1. Дуга L называется *регулярной*, если ее представление $x(t)$ есть непрерывная функция с ограниченной вариацией.

Определение 2.2. Величина

$$|L| = \overset{b}{\underset{a}{V}} x(t),$$

которая не зависит (см. п. 1.7) от специального выбора представления L, называется *длиной* регулярной дуги.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь регулярные кривые. Выражение

$$x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

как обычно, называется отрезком, соединяющим точки x_1 и x_2. Если точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ последовательно соединить отрезками, то мы получим ломаную L_0. Длина этой ломаной, очевидно, равна

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k - x_{k-1}\|.$$

Говорят, что ломаная L_0 *вписана в кривую* L, если точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принадлежат кривой L.

Говорят, что последовательность кривых $\{L_n\}$ *сходится* к кривой L, если для $L_1, L_2, L_3, \ldots$ имеются представления $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots$, определенные на $[a, b]$, которые сходятся равномерно к представлению $x(t)$ кривой L.

Отметим, что для данной дуги L, представление которой есть $x(t)$, можно построить последовательность вписанных в L ломаных L_n, сходящуюся к L. Действительно, разобьем $[a, b]$ на n отрезков $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ и определим представление L_n так:

$$x_n(t) = x(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} [x(t_k) - x(t_{k-1})],$$

где $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Так как из непрерывности $x(t)$ следует ее равномерная непрерывность, то заданному числу $\frac{1}{n}$ отвечает $\delta_n > 0$ такое, что из неравенства $|t' - t''| < \delta_n$ следует неравенство

$$\|x(t') - x(t'')\| < \frac{1}{n}.$$

Полагая теперь $\Delta t_k = t_k - t_{k-1} < \delta_n$, мы получим, что для $t \in \Delta t_k$

$$\|x(t_{k-1}) - x_n(t)\| < \frac{1}{n}.$$

Отсюда и из предыдущего имеем

$$\|x(t) - x_n(t)\| < \frac{2}{n},$$

так что последовательность $\{L_n\}$ сходится к L.

2.5. Криволинейный интеграл. Пусть дуга L принадлежит открытому связному множеству ω пространства E_x. Множество ω называется связным, если любые две точки ω могут быть соединены кривой, лежащей в ω. Пусть L имеет представление $x(t)$, где $t \in [a, b]$. Рассмотрим непрерывный оператор $y = \Phi(x)$, который действует из E_x в E_y, и допустим, что задано произведение[1] $yx \in E_z$. При выполне-

---

[1]) Здесь и далее мы будем предполагать, что для элементов $y \in E_y$ определено умножение справа на элементы $x \in E_x$.

нии перечисленных условий согласно теореме 2.1 существует

$$\int_a^b \Phi[x(t)]\,dx(t), \tag{2.3}$$

который называется *криволинейным интегралом*, так как он зависит от кривой L. Этот интеграл согласно свойству 8° не зависит от специального представления кривой L, а потому его обозначают еще так:

$$\int_L \Phi(x)\,dx. \tag{2.4}$$

Теорема 2.5. [1]) *Если последовательность кривых L_n, принадлежащих открытому связному множеству $\omega\subset E_x$, сходится к кривой $L\subset\omega$, причем длины L_n ограничены в совокупности, то*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{L_n}\Phi(x)\,dx=\int_L\Phi(x)\,dx,$$

где сходимость понимается в смысле метрики пространства E_z, которому принадлежат рассматриваемые интегралы.

Теорема 2.5 в силу определения сходимости L_n к L является непосредственным следствием теоремы 2.4.

2.6. О независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Пусть ω — открытая односвязная область пространства E_x. Область ω называется *односвязной*, если всякая кривая, лежащая в ω, может быть сведена к любой точке $\bar{x}\in\omega$ путем непрерывной деформации в ω, т. е. какова бы ни была кривая L в ω, существует абстрактная функция $x(t, s)$, непрерывная в прямоугольнике $a\leqslant t\leqslant b$, $0\leqslant s\leqslant 1$, такая, что $x(t, 0)$ есть представление L, а $x(t, 1)=\bar{x}$.

Если оператор $\Phi(x)$ обладает в ω тем свойством, что интеграл (2.4) не зависит от формы дуги L, лежащей в ω, а зависит лишь от концов x_1 и x_2 этой дуги, то криволинейный интеграл записывается так:

$$\int_{x_1}^{x_2}\Phi(x)\,dx; \tag{2.5}$$

[1]) См. [13, г].

в этом случае криволинейный интеграл по замкнутой кривой, лежащей в ω, равен нулю, ибо

$$\int_{x_2}^{x_1} \Phi(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x)\,dx.$$

Теорема 2.6 [1]. *Если интеграл* (2.4) *равен нулю вдоль любого «треугольника»* [2], *выпуклая оболочка которого лежит в односвязной области* ω, *то он равен нулю вдоль любой замкнутой кривой* L, *лежащей в* ω.

Доказательство. Согласно условию теоремы интеграл (2.4) равен нулю вдоль любой замкнутой ломаной, выпуклая оболочка которой лежит в ω, ибо в этом случае он равен сумме интегралов по «треугольникам», лежащим в ω вместе со своими выпуклыми оболочками. Отсюда далее следует, что если замкнутая кривая L лежит в ω вместе со своей выпуклой оболочкой, то интеграл (2.4), взятый по такой кривой, равен нулю, ибо L можно аппроксимировать ломаными L_n, выпуклые оболочки которых лежат в ω. Так как

$$\int_{L_n} \Phi(x)\,dx = 0,$$

то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int_{L} \Phi(x)\,dx = 0.$$

Разберем теперь общий случай. Пусть кривая L, представление которой есть $x(t)$, лежит в ω (ее выпуклая оболочка может и не содержаться в ω). Так как ω — односвязная область, то какова бы ни была точка $x_0 \in \omega$, найдется абстрактная функция $x(t,\ s)$ такая, что $x(t,\ 0) = x(t)$, а $x(t,\ 1) = x_0$. Функция $x(t,\ s)$, непрерывная в прямоугольнике $a \leqslant t \leqslant b$ и $0 \leqslant s \leqslant 1$, равномерно непрерывна в нем. Из непрерывности $x(t,\ s)$ следует, что образ прямоугольника $0 \leqslant t \leqslant b$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ есть замкнутое множество в ω, а потому найдется такое $\varepsilon > 0$, что расстояние $\rho(\omega',\ x(t,\ s)) \geqslant \varepsilon$,

[1]) См. [13, г].

[2]) «Треугольником» называется замкнутая ломаная, состоящая из трех отрезков.

где ω' — граница ω. Данному ε в силу равномерной непрерывности $x(t, s)$ отвечает такое $\delta > 0$, что как только $|t' - t''| < \delta$ и $|s' - s''| < \delta$, то

$$\|x(t', s') - x(t'', s'')\| < \varepsilon.$$

Разобьем теперь отрезки $[a, b]$ и $[0, 1]$ при помощи точек

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b; \quad 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1$$

так, чтобы $t_i - t_{i-1} < \delta$ и $s_j - s_{j-1} < \delta$. Рассмотрим кривые L_{ij}, представление которых $x_{ij}(\tau)$ $(\tau \in [0, 4])$ имеет вид:

$$x_{ij}(\tau) = \begin{cases} x(t_{i-1}, s_{j-1} + \tau(s_j - s_{j-1})), & 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \\ x(t_{i-1} + (\tau - 1)(t_i - t_{i-1}), s_j), & 1 \leqslant \tau \leqslant 2, \\ x(t_i, s_j + (\tau - 2)(s_{j-1} - s_j)), & 2 \leqslant \tau \leqslant 3, \\ x(t_i + (\tau - 3)(t_{i-1} - t_i), s_{j-1}), & 3 \leqslant \tau \leqslant 4. \end{cases}$$

Эти кривые замкнуты, причем

$$\int_{L_{ij}} \Phi(x)\, dx = 0,$$

ибо

$$\|x_{ij}(\tau) - x(t_{i-1}, s_{j-1})\| < \varepsilon$$

для $\tau \in [0, 4]$, а значит L_{ij} находится в шаре радиуса ε, принадлежащем ω, а потому выпуклая оболочка L_{ij} принадлежит ω.

Из последнего равенства следует, что

$$\int_L \Phi(x)\, dx = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \int_{L_{ij}} \Phi(x)\, dx = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1.[1]) Из доказанной теоремы вытекает, что *если вдоль любого отрезка* L *с концами* x_1 *и* x_2, *лежащего в односвязной области* ω,

$$\int_L \Phi(x)\, dx = \mathbf{F}(x_2) - \mathbf{F}(x_1),$$

---

[1]) См. [13, г], стр. 92—93.

где $\mathbf{F}(x)$ *есть оператор, действующий из* E_x *в* E_z, *то криволинейный интеграл не зависит от пути, а значит, для любой дуги* L, *лежащей в* ω, *имеет место равенство*

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x)\,dx = \mathbf{F}(x_2) - \mathbf{F}(x_1).$$

2.7. Одно предложение об интеграле Римана. Раньше было отмечено, что интеграл Римана есть частный случай интеграла Стилтьеса. Для дальнейшего нам понадобится следующее предложение об интеграле Римана:

Теорема 2.7. *Если абстрактная функция* $x(t)$ *имеет непрерывную производную в промежутке* (a, b), *то, каковы бы ни были числа* α, $\beta \in (a, b)$, *имеет место формула*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{d\tau} x(\tau)\,d\tau = x(\beta) - x(\alpha). \tag{2.6}$$

Доказательство. Сначала мы докажем, что если абстрактная функция $y(t) \in E_x$ непрерывна на $[a, b]$, то для всякого $t \in [a, b]$

$$\frac{d}{dt} \int_{a}^{t} y(\tau)\,d\tau = y(t). \tag{2.7}$$

Действительно, пусть

$$z(t) = \int_{a}^{t} y(\tau)\,d\tau,$$

тогда путем применения к разности

$$\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} - y(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t}^{t+\Delta t} [y(\tau) - y(t)]\,d\tau$$

неравенства (2.2) получим

$$\left\| \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} - y(t) \right\| \leqslant \max_{\Delta t} \| y(\tau) - y(t) \|.$$

Переходя теперь к пределу при $\Delta t \to 0$, найдем, что $\frac{dz(t)}{dt} = y(t)$. Из равенства (2.7) следует

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{\alpha}^{t} \frac{d}{d\tau} x(\tau)\,d\tau - x(t)\right] = 0,$$

откуда согласно формуле Лагранжа для абстрактных функций имеем:

$$\int_{\alpha}^{t} \frac{d}{d\tau} x(\tau)\,d\tau = x(t) + c,$$

где $c = \text{const}$. Полагая $t = \alpha$, мы найдем, что $c = -x(\alpha)$, откуда

$$\int_{\alpha}^{t} \frac{d}{d\tau} x(\tau)\,d\tau = x(t) - x(\alpha).$$

Теорема доказана.

§ 3. Дифференциал и производная оператора

3.1. Дифференциал Гато, формула Лагранжа и условие Липшица.

Определение 3.1. Если в точке $x \in E$ существует

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{F}(x + th) - \mathrm{F}(x)}{t} = \mathrm{VF}(x, h), \quad h \in E, \tag{3.1}$$

то оператор $\mathrm{VF}(x, h)$ называется *дифференциалом Гато* (*или слабым дифференциалом*[1]) *в точке* x от оператора $\mathrm{F}(x)$.

Из данного определения следует, что для всякого действительного α

$$\mathrm{VF}(x, \alpha h) = \alpha \mathrm{VF}(x, h),$$

[1]) Предел (3.1) понимается здесь так:

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{1}{t}[\mathrm{F}(x + th) - \mathrm{F}(x)] - \mathrm{VF}(x, h) \right\| = 0,$$

а не в слабом смысле. Иногда дифференциал называется слабым, когда предел в (3.1) понимается в слабом смысле.

т. е. что $\mathbf{VF}(x, h)$ есть однородный оператор от h. Однако $\mathbf{VF}(x, h)$ не всегда является линейным оператором от h. В том случае, когда дифференциал Гато оператора $\mathbf{F}(x)$ есть линейный оператор от h, мы будем его обозначать через $\mathbf{DF}(x, h)$.

В дальнейшем известную роль будет играть *формула Лагранжа*. Как известно из классического анализа, формула Лагранжа, справедливая для скалярных функций, перестает быть верной для векторных функций. То же самое имеет место и в общих линейных пространствах. Формула Лагранжа справедлива для функционалов, но для операторов она может оказаться неверной. Для операторов формула Лагранжа имеет место лишь в некотором смысле, который будет уточнен ниже.

Лемма 3.1[1]). *Если дифференциал Гато $Vf(x, h)$ функционала $f(x)$ существует в каждой точке некоторого выпуклого множества $\omega \subset E$, то, каковы бы ни были точки x, $x+h \in \omega$, для них имеет место формула Лагранжа*

$$f(x+h)-f(x)=Vf(x+\tau h, h), \quad 0<\tau<1. \tag{3.2}$$

Доказательство. Положим $\varphi(t)=f(x+th)$; тогда

$$\varphi'(t)=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x+th+\Delta th)-f(x+th)}{\Delta t}=Vf(x+th, h).$$

Отсюда

$$f(x+h)-f(x)=\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\tau)=Vf(x+\tau h, h),$$

где $0<\tau<1$. Лемма доказана.

В том случае, когда дифференциал Гато является линейным, формула Лагранжа принимает вид

$$f(x+h)-f(x)=Df(x+\tau h, h), \quad 0<\tau<1. \tag{3.3}$$

Покажем, что в некотором смысле эта формула сохраняется для операторов. Пусть оператор $\mathbf{F}(x)$, действующий из E_x в E_y, имеет дифференциал Гато $\mathbf{VF}(x, h)$ в каждой точке некоторого выпуклого множества $\omega \subset E_x$. Рассмотрим линейный функционал от $z \in E_y^*$, где E_y^* — пространство, сопряженное к E_y,

$$\varphi(x, z)=(\mathbf{F}(x), z).$$

---

[1]) См. [33, а], стр. 150 (теорема 8).

Для этого функционала имеем

$$\frac{1}{t}[\varphi(x+th,\ z)-\varphi(x,\ z)]=\left(\frac{1}{t}[\mathbf{F}(x+th)-\mathbf{F}(x)],\ z\right).$$

Отсюда следует

$$V\varphi(x,\ z,\ h)=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x+th,\ z)-\varphi(x,\ z)}{t}=(\mathbf{VF}(x,\ h),\ z).$$

Но для функционала $\varphi(x,\ z)$ справедлива формула Лагранжа

$$\varphi(x+h,\ z)-\varphi(x,\ z)=V\varphi(x+\tau h,\ z,\ h),\quad 0<\tau<1,$$

откуда

$$(\mathbf{F}(x+h)-\mathbf{F}(x),\ z)=(\mathbf{VF}(x+\tau h,\ h),\ z),$$

где $x,\ x+h\in\omega$, $0<\tau<1$. Таким образом, нами доказана

Лемма 3.2 [1]). *Если оператор* $\mathbf{F}(x)$ *имеет дифференциал Гато в каждой точке некоторого выпуклого множества* $\omega\subset E_x$, *то для всяких* $x,\ x+h\in\omega$ *имеет место формула Лагранжа* [2])

$$(\mathbf{F}(x+h)-\mathbf{F}(x),\ e)=(\mathbf{VF}(x+\tau h,\ h),\ e),\tag{3.4}$$

где e — *произвольный элемент с единичной нормой пространства* E_y^*.

Отметим, что запись $(y,\ z)$ понимается как линейный функционал от $z\in E_z=E_y^*$ при фиксированном $y\in E_y$ или как линейный функционал от y при фиксированном $z\in E_y^*$. Отметим еще, что из формулы (3.4), как частный случай, вытекает формула Лагранжа для абстрактных функций, которая была нами использована в пункте 1.7.

Из формулы (3.4) мы сейчас выведем одно полезное неравенство. Так как единичный вектор $e\in E_y^*$ является произвольным, то при фиксированных x и h согласно лемме 1.1 его можно выбрать так, чтобы имело место неравенство

$$|(\mathbf{F}(x+h)-\mathbf{F}(x),\ e)|\geqslant\frac{1}{k}\|\mathbf{F}(x+h)-\mathbf{F}(x)\|,$$

---

[1]) См. [9,о], стр. 77—78.

[2]) Для (3.4) достаточно требовать существование слабого предела в (3.1).

где k — какое-нибудь число большее единицы не зависящее от x и h. Из равенства (3.4) имеем

$$|(\mathbf{F}(x+h)-\mathbf{F}(x),\ e)| \leqslant \|\mathbf{VF}(x+\tau h,\ h)\|.$$

Из последних двух неравенств следует

$$\|\mathbf{F}(x+h)-\mathbf{F}(x)\| \leqslant k\|\mathbf{VF}(x+\tau h,\ h)\|,$$

а так как k — любое число, большее единицы, то этим доказана

Лемма 3.3. *Если оператор* $\mathbf{F}(x)$ *имеет дифференциал Гато* $\mathbf{VF}(x,\ h)$ *в каждой точке некоторого выпуклого множества* $\omega \subset E_x$, *то для всяких* $x,\ x+h \in \omega$ *выполняется условие Липшица*

$$\|\mathbf{F}(x+h)-\mathbf{F}(x)\| \leqslant \|\mathbf{VF}(x+\tau h,\ h)\|, \tag{3.5}$$

где $\tau \in [0,\ 1]$.

Если оператор $\mathbf{F}(x)$ имеет в каждой точке множества ω линейный дифференциал Гато $\mathbf{DF}(x,\ h)$, то условие Липшица принимает вид:

$$\|\mathbf{F}(x+h)-\mathbf{F}(x)\| \leqslant \|\mathbf{DF}(x+\tau h,\ h)\| \leqslant \|\mathbf{DF}(x+\tau h)\|\ \|h\|, \tag{3.6}$$

где $\|\mathbf{DF}(x+\tau h)\|$ есть норма линейного оператора $\mathbf{DF}(x,\ h)$ в точке $x+\tau h$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

3.2. Достаточные условия линейности дифференциала Гато.

Теорема 3.1.[1]. *Пусть выполнены условия*:

1°. *Дифференциал Гато* $\mathbf{VF}(x_0,\ h)$ *оператора* $\mathbf{F}(x)$ *существует в некоторой окрестности* $U_0(x_0)$ *точки* x_0 *и непрерывен в этой точке* x_0.

2°. $\mathbf{VF}(x_0,\ h)$ *есть непрерывный оператор в точке* $h=\theta\ (\|\theta\|=0)$.

Тогда дифференциал Гато $\mathbf{VF}(x_0,\ h)$ *есть ограниченный линейный оператор от* h, *так что*

$$\mathbf{VF}(x_0,\ h)=\mathbf{DF}(x_0,\ h).$$

Доказательство. Из непрерывности $\mathbf{VF}(x_0,\ h)$ в точке $h=\theta$ следует существование таких чисел $m>0$ и $M>0$,

[1]) См. [9, о], теорема 2.1, и [50].

что при $\|h\| \leqslant m$ будет

$$\|\mathbf{VF}(x_0, h)\| \leqslant M.$$

Отсюда в силу однородности по h оператора $\mathbf{VF}(x_0, h)$ для произвольного $h \in E_x$ следует, что

$$\|\mathbf{VF}(x_0, h)\| = \left\| \frac{\|h\|}{m} \mathbf{VF}\left(x_0, \frac{mh}{\|h\|}\right) \right\| \leqslant \frac{M}{m} \|h\|,$$

т. е. что $\mathbf{VF}(x_0, h)$ есть ограниченный оператор.

Докажем теперь аддитивность $\mathbf{VF}(x_0, h)$. Пусть h_1 и h_2 — два произвольных элемента с единичной нормой и ε — произвольное положительное число. Из определения дифференциала Гато $\mathbf{VF}(x_0, h)$ следует существование такого $\delta(\varepsilon) > 0$, что как только $|t| < \delta$, для данных фиксированных h_1 и h_2

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{VF}(x_0, h_1) &= \frac{1}{t}[\mathbf{F}(x_0 + th_1) - \mathbf{F}(x_0)] + \alpha_1, \\ \mathbf{VF}(x_0, h_2) &= \frac{1}{t}[\mathbf{F}(x_0 + th_2) - \mathbf{F}(x_0)] + \alpha_2, \\ \mathbf{VF}(x_0, h_1 + h_2) &= \frac{1}{t}[\mathbf{F}(x_0 + th_1 + th_2) - \mathbf{F}(x_0)] + \alpha_3, \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

где $\|\alpha_i\| < \frac{1}{4}\varepsilon$, $i = 1, 2, 3$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{VF}(x_0, h_1 + h_2) - \mathbf{VF}(x_0, h_1) - \mathbf{VF}(x_0, h_2)\| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{|t|} \|\mathbf{F}(x_0 + th_1 + th_2) - \mathbf{F}(x_0 + th_2) - \\ - \mathbf{F}(x_0 + th_1) + \mathbf{F}(x_0)\| + \frac{3}{4}\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Применяя теперь формулу Лагранжа (3.4), напишем

$$(\mathbf{F}(x_0 + th_2 + th_1) - \mathbf{F}(x_0 + th_2), e) = t(\mathbf{VF}(x_0 + th_2 + \tau_1 h_1, h_1), e),$$
$$(\mathbf{F}(x_0 + th_1) - \mathbf{F}(x_0), e) = t(\mathbf{VF}(x_0 + \tau_2 h_1, h_1), e)$$

или

$$\begin{aligned} \gamma = (\mathbf{F}(x_0 + th_2 + th_1) - \mathbf{F}(x_0 + th_2) - \mathbf{F}(x_0 + th_1) + \mathbf{F}(x_0), e) = \\ = t(\mathbf{VF}(x_0 + th_2 + \tau_1 h_1, h_1) - \mathbf{VF}(x_0 + \tau_2 h_1, h_1), e), \end{aligned}$$

где e — произвольный элемент пространства E_y^* с единичной нормой, $0 < \tau_1 = \tau_1(e) < t$, $0 < \tau_2 = \tau_2(e) < t$.

Отсюда

$$|\gamma| \leqslant |t| \, \| \mathbf{VF}(x_0 + th_2 + \tau_1 h_1, \ h_1) - \mathbf{VF}(x_0 + \tau_2 h_1, \ h_1) \|.$$

Так как e — произвольный элемент с единичной нормой из E_y^*, то согласно лемме 1.1 его можно подобрать так, чтобы при фиксированных h_1, h_2, t имело место неравенство

$$|\gamma| = |(\mathbf{F}(x_0 + th_1 + th_2) - \mathbf{F}(x_0 + th_2) - \mathbf{F}(x_0 + th_1) + \mathbf{F}(x_0), e)| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} \| \mathbf{F}(x_0 + th_1 + th_2) - \mathbf{F}(x_0 + th_2) - \mathbf{F}(x_0 + th_1) + \mathbf{F}(x_0) \| \, \| e \|.$$

Из последних двух неравенств имеем

$$\| \mathbf{F}(x_0 + th_1 + th_2) - \mathbf{F}(x_0 + th_2) - \mathbf{F}(x_0 + th_1) + \mathbf{F}(x_0) \| \leqslant$$
$$\leqslant 2 |t| \, \| \mathbf{V}(x_0 + th_2 + \tau_1 h_1, \ h_1) - \mathbf{VF}(x_0 + \tau_2 h_1, \ h_1) \|. \qquad (3.9)$$

Так как $\mathbf{VF}(x, h)$ непрерывен в точке x_0, то при подходящем выборе δ

$$\| \mathbf{VF}(x_0 + th_2 + \tau_1 h_1, \ h_1) - \mathbf{VF}(x_0 + \tau_2 h_1, \ h_1) \| < \frac{1}{8} \varepsilon. \qquad (3.10)$$

Из неравенств (3.8), (3.9) и (3.10) вытекает

$$\| \mathbf{VF}(x_0, \ h_1 + h_2) - \mathbf{VF}(x_0, \ h_1) - \mathbf{VF}(x_0, \ h_2) \| < \varepsilon.$$

Так как ε — произвольное положительное число, то отсюда имеем аддитивность $\mathbf{VF}(x_0, h)$:

$$\mathbf{VF}(x_0, \ h_1 + h_2) = \mathbf{VF}(x_0, \ h_1) + \mathbf{VF}(x_0, \ h_2).$$

Раз оператор $\mathbf{VF}(x_0, h)$ однороден, ограничен и аддитивен, то он является ограниченным линейным оператором. Теорема доказана.

Для дальнейшего мы воспользуемся следующим понятием. Мы скажем, что оператор $\mathbf{F}(x)$ удовлетворяет в точке x_0 ослабленному условию Липшица, если каждому единичному вектору h отвечает такое $\delta(h) > 0$, что как только $|t| < \delta$, то

$$\| \mathbf{F}(x_0 + th) - \mathbf{F}(x_0) \| \leqslant C \| th \|,$$

где $C > 0$ не зависит от выбора вектора h, Теорема 3.2 [1]). *Для того чтобы дифференциал Гато* $\mathbf{V}\mathbf{F}(x_0, h)$ *оператора* $\mathbf{F}(x)$ *был ограниченным линейным оператором от* h, *необходимо и достаточно, чтобы для оператора* $\mathbf{F}(x)$ *выполнялись следущие два условия:*

1°. $\mathbf{F}(x)$ *удовлетворяет в точке* x_0 *ослабленному условию Липшица.*

2°. $\Delta^2_{th_1,\, th_2}\mathbf{F}(x_0) = o(t)$,

где

$$\Delta^2_{h_1,\, h_2}\mathbf{F}(x_0) = \mathbf{F}(x_0 + h_1 + h_2) - \mathbf{F}(x_0 + h_1) - \mathbf{F}(x_0 + h_2) + \mathbf{F}(x_0).$$

Доказательство необходимости. Пусть оператор $\mathbf{F}(x)$ имеет в точке x_0 ограниченный линейный дифференциал Гато $\mathbf{DF}(x_0, h)$; тогда

$$\left\| \frac{1}{t}[\mathbf{F}(x_0 + th) - \mathbf{F}(x_0)] \right\| = \\ = \|\mathbf{DF}(x_0, h) + \alpha\| \leqslant \|\mathbf{DF}(x_0)\| \, \|h\| + \|\alpha\|,$$

где $\|\alpha\| \to 0$ при $t \to 0$. Отсюда

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{1}{t}[\mathbf{F}(x_0 + th) - \mathbf{F}(x_0)] \right\| \leqslant \\ \leqslant \|\mathbf{DF}(x_0)\| \, \|h\| < (\|\mathbf{DF}(x_0)\| + 1)\|h\|,$$

а значит, существует такое $\delta(h) > 0$, что при $|t| < \delta$ будет выполнено неравенство

$$\|\mathbf{F}(x_0 + th) - \mathbf{F}(x_0)\| < |t|(\|\mathbf{DF}(x_0)\| + 1)\|h\| = C\|th\|,$$

т. е. $\mathbf{F}(x)$ удовлетворяет в точке x_0 ослабленному условию Липшица. Далее, из существования линейного дифференциала Гато на основании равенств (3.7) следует

$$\frac{1}{|t|}\|\mathbf{F}(x_0 + th_1 + th_2) - \mathbf{F}(x_0 + th_1) - \\ - \mathbf{F}(x_0 + th_2) + \mathbf{F}(x_0)\| \leqslant \|\alpha_1\| + \|\alpha_2\| + \|\alpha_3\| < \frac{3}{4}\varepsilon,$$

т. е.

$$\Delta^2_{th_1,\, th_2}\mathbf{F}(x_0) = o(t).$$

Доказательство достаточности. По условию

$$\|\mathbf{F}(x_0 + th) - \mathbf{F}(x_0)\| \leqslant C\|th\|,$$

---

[1]) Н. А. Иванов [26] доказал эту теорему для функционалов.

если $|t| < \delta(h)$. Отсюда следует

$$\|\mathbf{VF}(x_0,\ h)\| \leqslant C\|h\| = C \quad (\|h\| = 1),$$

т. е. оператор $\mathbf{VF}(x_0,\ h)$ непрерывен в нулевой точке $h = \theta$ как однородный и ограниченный оператор. Наконец, так как по условию

$$\Delta^2_{th_1,\ th_2}\mathbf{F}(x_0) = o(t),$$

то из неравенства (3.8) следует аддитивность дифференциала Гато $\mathbf{VF}(x_0, h)$. Раз однородный оператор $\mathbf{VF}(x_0, h)$ аддитивен и непрерывен по h, то он является ограниченным линейным оператором.

Теорема доказана.

3.3. Дифференциал Фреше.

Определение 3.2. Если в точке $x \in E_x$

$$\mathbf{F}(x+h) - \mathbf{F}(x) = \mathbf{u}(x,\ h) + \omega(x,\ h),$$

где $\mathbf{u}(x,\ h)$ есть линейный оператор от $h \in E_x$ и

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(x,\ h)\|}{\|h\|} = 0, \tag{3.11}$$

то $\mathbf{u}(x,\ h)$ называется *дифференциалом Фреше* (или *сильным дифференциалом*) *в точке* x, а $\omega(x,\ h)$ называется *остатком* этого дифференциала. Дифференциал Фреше оператора $\mathbf{F}(x)$ мы будем обозначать через $\mathbf{dF}(x,\ h)$.

Из данного определения непосредственно вытекает, что если в данной точке x_0 существует $\mathbf{dF}(x_0,\ h)$, то в этой точке существует $\mathbf{DF}(x_0,\ h)$, причем $\mathbf{DF}(x_0,\ h) = \mathbf{dF}(x_0,\ h)$.

Обратное предложение не всегда имеет место (см. [9, о], стр. 74 и 91—92).

3.4. Производные Гато и Фреше. Пусть оператор $\mathbf{F}(x)$, действующий из банахова пространства E_x в банахово пространство E_y, имеет в точке x линейный дифференциал Гато $\mathbf{DF}(x,\ h)$, являющийся ограниченным оператором. Этот линейный ограниченный оператор, который является элементом банахова пространства ([47], стр. 139) всех линейных операторов, действующих из E_x в E_y, называется *производной Гато* оператора $\mathbf{F}(x)$ в точке x и обозначается через $\mathbf{F}'(x)$. Мы, следовательно, можем написать

$$\mathbf{DF}(x,\ h) = \mathbf{F}'(x)\,h. \tag{3.12}$$

Совершенно так же вводится понятие *производной Фреше* $\mathbf{F}'(x)$ и формула

$$d\mathbf{F}(x, h) = \mathbf{F}'(x)h. \tag{3.13}$$

Для производных Гато и Фреше мы пользуемся одинаковым обозначением. Нужно, однако, иметь в виду, что из существования производной Фреше следует существование производной Гато, но обратное предложение не всегда имеет место.

Многие из свойств обычных производных переносятся на производные операторов. Например,

$$(c\mathbf{F}(x))' = c\mathbf{F}'(x),$$

где c — числовой множитель;

$$(\mathbf{F}_1(x) + \mathbf{F}_2(x))' = \mathbf{F}_1'(x) + \mathbf{F}_2'(x).$$

Если оператор $\mathbf{F}(x)$ действует из E_x в E_y, а $\Phi(y)$ действует из E_y в E_z, то при наличии производных $\mathbf{F}'(x)$, $\Phi'(y)$ и $[\Phi(\mathbf{F}(x))]'$ имеет место формула

$$[\Phi(\mathbf{F}(x))]' = \Phi'(y)\mathbf{F}'(x),$$

где произведение понимается как произведение линейного оператора, действующего из E_y в E_z на линейный оператор, действующий из E_x в E_y.

3.5. Связь между дифференциалами Гато и Фреше. Здесь мы дадим достаточные условия, при которых из существования дифференциала Гато следует существование совпадающего с ним дифференциала Фреше.

Теорема 3.3 [1]. *Если производная Гато* $\mathbf{F}'(x)$ *существует в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0 *и непрерывна в этой точке* x_0, *то существует*

$$d\mathbf{F}(x_0, h) = D\mathbf{F}(x_0, h).$$

Иными словами: непрерывная производная Гато есть производная Фреше.

Доказательство. По условию $D\mathbf{F}(x_0, h) = \mathbf{F}'(x_0)h$. Полагая $x_0 + h \in U(x_0)$, напишем:

$$\omega(x_0, h) = \mathbf{F}(x_0 + h) - \mathbf{F}(x_0) - \mathbf{F}'(x_0)h$$

[1]) См. [9, о], теорема 2.3. При других условиях связь между $d\mathbf{F}(x, h)$ и $D\mathbf{F}(x, h)$ была установлена Л. А. Люстерником [47], стр. 303. См. также [50].

или

$$(\omega(x_0, h), e) = (\mathbf{F}(x_0 + h) - \mathbf{F}(x_0), e) - (\mathbf{F}'(x_0) h, e),$$

где e — произвольный единичный элемент сопряженного пространства E_y^*. Применяя формулу (3.4) и учитывая, что здесь $\mathbf{VF}(x_0 + \tau h, h) = \mathbf{DF}(x_0 + \tau h, h) = \mathbf{F}'(x_0 + \tau h) h$, мы получим

$$(\omega(x_0, h), e) = ([\mathbf{F}'(x_0 + \tau h) - \mathbf{F}'(x_0)] h, e), \qquad (3.14)$$

где $0 < \tau < 1$.

Так как e — произвольный единичный вектор пространства E_y^*, то согласно лемме 1.1 его можно подобрать так, чтобы при фиксированном h было

$$|(\omega(x_0, h), e)| \geqslant \frac{1}{2} \|\omega(x_0, h)\| \|e\| = \frac{1}{2} \|\omega(x_0, h)\|.$$

Отсюда и из равенства (3.14) мы имеем

$$\|\omega(x_0, h)\| \leqslant 2 \|\mathbf{F}'(x_0 + \tau h) - \mathbf{F}'(x_0)\| \|h\|$$

или

$$\frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|} \leqslant 2 \|\mathbf{F}'(x_0 + \tau h) - \mathbf{F}'(x_0)\|. \qquad (3.15)$$

Но так как, по условию, $\mathbf{F}'(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$\lim_{\|h\| \to 0} \|\mathbf{F}'(x_0 + \tau h) - \mathbf{F}'(x_0)\| = 0.$$

Отсюда и из предыдущего имеем

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0,$$

т. е. выполнено (3.11), а значит $\mathbf{DF}(x_0, h) = \mathbf{dF}(x_0, h)$.

Теорема доказана.

Отметим, что при выполнении условий теоремы 3.3 равенство (3.1), где

$$\mathbf{VF}(x, h) = \mathbf{DF}(x, h),$$

выполняется равномерно относительно h ($\|h\| = 1$). Оказывается, что если равенство

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [\mathbf{F}(x_0 + th) - \mathbf{F}(x_0)] = \mathbf{DF}(x_0, h) = \mathbf{F}'(x_0) h$$

выполняется равномерно относительно h ($\|h\|=1$), то существует

$$\mathrm{dF}(x_0, h) = \mathrm{DF}(x_0, h).$$

Действительно, из данного допущения вытекает, что заданному $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что как только $|t| < \delta$,

$$\left\| \frac{1}{t}[\mathrm{F}(x_0+th) - \mathrm{F}(x_0)] - \mathrm{F}'(x_0)h \right\| < \varepsilon.$$

Полагая тогда

$$\frac{1}{t}[\mathrm{F}(x_0+th) - \mathrm{F}(x_0)] - \mathrm{F}'(x_0)h = \frac{1}{t}\,\omega(x_0, th),$$

мы будем иметь

$$\mathrm{F}(x_0+th) - \mathrm{F}(x_0) = \mathrm{F}'(x_0)th + \omega(x_0, th),$$

где

$$\frac{\|\omega(x_0, th)\|}{\|th\|} < \varepsilon,$$

ибо $\|h\| = 1$. Следовательно,

$$\mathrm{dF}(x_0, th) = \mathrm{F}'(x_0)th.$$

Сделаем еще одно замечание, которое нам понадобится в дальнейшем. Пусть оператор $\mathrm{F}(x)$ имеет дифференциал Гато $\mathrm{VF}(x_0, h)$ в точке x_0, т. е.

$$\lim_{t\to 0}\left\| \frac{\mathrm{F}(x_0+th) - \mathrm{F}(x_0)}{t} - \mathrm{VF}(x_0, h)\right\| = 0.$$

Тогда заданному $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что как только $|t| < \delta$,

$$\left\| \frac{1}{t}[\mathrm{F}(x_0+th) - \mathrm{F}(x_0)] - \mathrm{VF}(x_0, h)\right\| < \varepsilon$$

(h — фиксированная точка), а значит,

$$|t|(\|\mathrm{VF}(x_0, h)\| - \varepsilon) < \|\mathrm{F}(x_0+th) - \mathrm{F}(x_0)\| <$$
$$< |t|(\|\mathrm{VF}(x_0, h)\| + \varepsilon).$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to 0}\|\mathrm{F}(x_0+th) - \mathrm{F}(x_0)\| = 0, \tag{3.16}$$

т. е. если оператор $\mathrm{F}(x)$ имеет в точке x_0 дифференциал Гато, то $\mathrm{F}(x)$ непрерывен в точке x_0 вдоль любого направления h (можно считать $\|h\| = 1$).

§ 4. О непрерывности и компактности производной

В данном параграфе мы будем обозначать через D_r шар $\|x\| < r$ банахова пространства E_x, а через $D(x_0, \rho)$ — шар $\|x - x_0\| \leqslant \rho$.

4.1. О непрерывности производной.

Определение 4.1. Мы скажем, что оператор $\mathbf{F}(x)$ имеет на множестве $\mathfrak{w}$ *локально равномерный дифференциал* $d\mathbf{F}(x, h)$, если каждому $\varepsilon > 0$ и произвольному $x_0 \in \mathfrak{w}$ отвечают такие положительные числа $\eta(\varepsilon, x_0)$ и $\delta(\varepsilon, x_0)$, что для всякого x из шара $D(x_0, \eta)$ имеет место неравенство

$$\|\omega(x, h)\| < \varepsilon \|h\|,$$

если $\|h\| < \delta$.

Теорема 4.1 [1]. *Для непрерывности* $\mathbf{F}'(x)$ *в шаре* D_r *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{F}(x)$ *имел в* D_r *локально равномерный дифференциал, а* $\mathbf{F}'(x)$ *была в* D_r *локально ограниченной.*

Доказательство необходимости. Фиксируем $x_0 \in D_r$ и $\varepsilon > 0$. Так как по предположению $\mathbf{F}'(x)$ непрерывна в точке x_0, то заданным $\varepsilon > 0$ и x_0 отвечает такое $\rho > 0$, что если $\|x - x_0\| < \rho$, то

$$\|\mathbf{F}'(x) - \mathbf{F}'(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Положим $\eta = \delta = \frac{1}{2}\rho$ и рассмотрим такие $x, h \in E_x$, для которых $\|x - x_0\| \leqslant \eta$, $\|h\| < \delta$, $x, x + h \in D_r$. Для этих x и h мы применяем формулу Лагранжа (3.4)

$$(\mathbf{F}(x+h) - \mathbf{F}(x), e) = (\mathbf{F}'(x + \tau h)\, h, e),$$

где e — произвольный единичный вектор пространства E_y^* и $0 < \tau < 1$ (здесь $V\mathbf{F}(x, h) = d\mathbf{F}(x, h) = \mathbf{F}'(x)h$), а затем, согласно определению дифференциала Фреше, пишем

$$\mathbf{F}(x+h) - \mathbf{F}(x) = \mathbf{F}'(x)h + \omega(x, h).$$

Из последних двух равенств имеем:

$$(\omega(x, h), e) = ([\mathbf{F}'(x + \tau h) - \mathbf{F}'(x)]\, h, e). \tag{3.14}$$

[1]) См. [9, о], теорема 4.1.

Поступая теперь так же, как в п. 3.5, мы из равенства (3.14) получим равенство (3.15):

$$\frac{\|\omega(x, h)\|}{\|h\|} \leqslant 2\,\|\mathbf{F}'(x+\tau h)-\mathbf{F}'(x)\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\,\|\mathbf{F}'(x+\tau h)-\mathbf{F}'(x_0)\|+2\,\|\mathbf{F}'(x)-\mathbf{F}'(x_0)\|.$$

Но так как $\|x+\tau h-x_0\| \leqslant \|x-x_0\|+\|h\|<\eta+\delta=\rho$, то, согласно предыдущему, имеем

$$\|\omega(x, h)\|<\varepsilon\,\|h\|.$$

Наконец, из допущения непрерывности производной $\mathbf{F}'(x)$ следует ее локальная ограниченность. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Допустим, что в шаре D_r производная $\mathbf{F}'(x)$ локально ограничена, а дифференциал $\mathbf{dF}(x, h)$ является локально равномерным. Из локальной ограниченности $\mathbf{F}'(x)$ следует, что если зафиксировать $x_0 \in D_r$, то найдется шар $D(x_0, 2\rho_0)$, в котором $\mathbf{F}'(x)$ будет ограничена[1]). Из ограниченности $\mathbf{F}'(x)$, как это видно из неравенства (3.6), следует, что $\mathbf{F}(x)$ удовлетворяет в $D(x_0, 2\rho_0)$ условию Липшица, а значит, в этом шаре оператор $\mathbf{F}(x)$ равномерно непрерывен.

Пусть h есть произвольный элемент из E_x, для которого $\|h\|=\rho_0$. Для таких h напишем:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{F}(x+th)-\mathbf{F}(x)&=t\mathbf{F}'(x)\,h+\omega(x, th),\\ \mathbf{F}(x_0+th)-\mathbf{F}(x_0)&=t\mathbf{F}'(x_0)\,h+\omega(x_0, th), \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

где $x \in D(x_0, \rho_0)$ и $0<t<1$. Пусть ε — произвольное положительное число. В силу локальной равномерности $\mathbf{dF}(x, h)$ найдутся положительные ρ_1 и $t_0<1$ такие, что для всякого $x \in D(x_0, \rho_1)$

$$\|\omega(x, t_0h)\|<\frac{1}{8}\varepsilon t_0\rho_0. \tag{4.2}$$

Далее, так как $\mathbf{F}(x)$ равномерно непрерывен в $D(x_0, 2\rho_0)$, то заданным t_0 и ε отвечает такое $\rho_2>0$, что для всяких $x_1, x_2 \in D(x_0, 2\rho_0)$, для которых $\|x_2-x_1\|<\rho_2$, имеем

$$\|\mathbf{F}(x_2)-\mathbf{F}(x_1)\|<\frac{1}{8}\varepsilon t_0\rho_0. \tag{4.3}$$

---

[1]) Здесь и в дальнейшем, говоря $x \in D(x_0, \alpha)$, мы будем предполагать, что $x \in D_r \cap D(x_0, \alpha)$.

Полагая $\delta = \min(\rho_0, \rho_1, \rho_2)$, мы из (4.1), (4.2) и (4.3) получим, если $\|x - x_0\| < \delta$,

$$\|[\mathbf{F}'(x) - \mathbf{F}'(x_0)]\, t_0 h\| \leqslant \|\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x_0)\| + \\ + \|\mathbf{F}(x + t_0 h) - \mathbf{F}(x_0 + t_0 h)\| + \|\omega(x, t_0 h)\| + \\ + \|\omega(x_0, t_0 h)\| < \frac{1}{2}\varepsilon t_0 \rho_0$$

или

$$\|[\mathbf{F}'(x) - \mathbf{F}'(x_0)]\, h\| < \frac{1}{2}\varepsilon\rho_0. \tag{4.4}$$

Так как h есть произвольный элемент из E_x с нормой ρ_0, то согласно лемме 1.2 его можно подобрать так, чтобы при фиксированном x $(\|x - x_0\| < \delta)$

$$\|[\mathbf{F}'(x) - \mathbf{F}'(x_0)]\, h\| \geqslant \frac{1}{2}\|\mathbf{F}'(x) - \mathbf{F}'(x_0)\| \cdot \|h\| = \\ = \frac{1}{2}\|\mathbf{F}'(x) - \mathbf{F}'(x_0)\|\, \rho_0.$$

Отсюда и из (4.4) имеем

$$\|\mathbf{F}'(x) - \mathbf{F}'(x_0)\| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Как видно из доказательства, теорема 4.1 сохраняется, если вместо шара D_r взять ограниченную область.

4.2. О равномерной непрерывности производной.

Определение 4.2. Говорят, что оператор $\mathbf{F}(x)$ *равномерно дифференцируем на множестве* $\mathfrak{w}$, если равенство (3.11) выполняется равномерно относительно $x \in \mathfrak{w}$, т. е. если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что $\|\omega(x, h)\| < \varepsilon\|h\|$, как только $\|h\| < \delta$.

Теорема 4.2 [1]). *Для того чтобы ограниченная в шаре $D_{\alpha+r}$ производная $\mathbf{F}'(x)$ была равномерно непрерывной в шаре D_r, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathbf{F}(x)$ был равномерно дифференцируемым в этом шаре D_r $(r > 0,\ \alpha > 0)$.*

Доказательство необходимости. Пусть x_1, $x_2 \in D_r$, тогда

$$\mathbf{F}(x_2) - \mathbf{F}(x_1) = \mathbf{F}'(x_1)(x_2 - x_1) + \omega(x_1, x_2 - x_1).$$

---

1) См. [9, o], теоремы 4.2 и 2.4.

Далее, согласно формуле Лагранжа (3.4) будет

$$(\mathbf{F}(x_2)-\mathbf{F}(x_1),\ e)=(\mathbf{F}'(x_1+\tau(x_2-x_1))(x_2-x_1),\ e).$$

Отсюда и из предыдущего равенства имеем

$$(\omega(x_1,\ x_2-x_1),\ e)=$$
$$=([\mathbf{F}'(x_1+\tau(x_2-x_1))-\mathbf{F}'(x_1)]\ (x_2-x_1),\ e),$$

где e — произвольный единичный элемент из E_y^* и $0<\tau<1$. Повторяя рассуждения, которые привели нас от равенства (3.14) к неравенству (3.15), получим

$$\frac{\|\omega(x_1,\ x_2-x_1)\|}{\|x_2-x_1\|}\leqslant 2\ \|\mathbf{F}'(x_1+\tau(x_2-x_1))-\mathbf{F}'(x_1)\|.$$

Последнее неравенство в силу равномерной непрерывности производной $\mathbf{F}'(x)$ доказывает равномерность дифференциала.

Доказательство достаточности. Напишем

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{F}(x_2+th)-\mathbf{F}(x_2)&=\mathbf{F}'(x_2)th+\omega(x_2,\ th),\\ \mathbf{F}(x_1+th)-\mathbf{F}(x_1)&=\mathbf{F}'(x_1)th+\omega(x_1,\ th),\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

где $x_1,\ x_2\in D_r,\ 0<t<1$, h — произвольный элемент из E_x с нормой, равной α. Пусть ε — произвольное положительное число. Подберем $t_0=t(\varepsilon)$ так, чтобы

$$\|\omega(x_2,\ t_0h)\|<\frac{1}{8}\varepsilon t_0\alpha,\quad \|\omega(x_1,\ t_0h)\|<\frac{1}{8}\varepsilon t_0\alpha. \tag{4.6}$$

Это возможно в силу равномерности дифференциала $\mathbf{dF}(x,\ h)$, учитывая, что $\|h\|=\alpha$.

Так как из ограниченности $\mathbf{F}'(x)$ согласно неравенству (3.6) следует, что $\mathbf{F}(x)$ равномерно непрерывен в $D_{\alpha+r}$, то заданным числам $t_0>0$ и $\varepsilon>0$ отвечает такое число $\delta>0$, что для всяких $x',\ x''\in D_{\alpha+r}$, для которых $\|x'-x''\|<\delta$,

$$\|\mathbf{F}(x'')-\mathbf{F}(x')\|<\frac{1}{8}\varepsilon t_0\alpha. \tag{4.7}$$

Из (4.5), (4.6) и (4.7) имеем, что если $\|x_2-x_1\|<\delta$ и $x_1,\ x_2\in D_r$, то

$$\|[\mathbf{F}'(x_2)-\mathbf{F}'(x_1)]\,t_0h\|\leqslant\|\mathbf{F}(x_2)-\mathbf{F}(x_1)\|+$$
$$+\|\mathbf{F}(x_2+t_0h)-\mathbf{F}(x_1+t_0h)\|+\|\omega(x_1,\ t_0h)\|+$$
$$+\|\omega(x_2,\ t_0h)\|<\frac{1}{2}\varepsilon t_0\alpha$$

или

$$\|[\mathbf{F}'(x_2)-\mathbf{F}'(x_1)]\,h\| < \frac{1}{2}\varepsilon\alpha. \qquad (4.8)$$

Так как $h \in E_x$ есть произвольный элемент ($\|h\| = \alpha$), то, согласно лемме 1.2, его можно подобрать так, чтобы

$$\|[\mathbf{F}'(x_2)-\mathbf{F}'(x_1)]\,h\| \geqslant \frac{1}{2}\|\mathbf{F}'(x_2)-\mathbf{F}'(x_1)\|\,\|h\| = \\ = \frac{1}{2}\|\mathbf{F}'(x_2)-\mathbf{F}'(x_1)\|\alpha.$$

Отсюда и из (4.8) имеем:

$$\|\mathbf{F}'(x_2)-\mathbf{F}'(x_1)\| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство доказывает теорему, так как x_1 и x_2, для которых $\|x_2 - x_1\| < \delta$, были нами взяты произвольно из шара D_r.

Замечание 4.1. Отметим, что доказанная теорема может быть сформулирована так: *для того чтобы производная* $\mathbf{F}'(x)$ *равномерно непрерывного в шаре* $D_{\sigma+r}$ *оператора* $\mathbf{F}(x)$ *была равномерно непрерывной в* D_r, *необходимо и достаточно, чтобы дифференциал* $d\mathbf{F}(x, h)$ *был в* D_r *равномерным.*

Теорема 4.3. *Если производная* $\mathbf{F}'(x)$ *равномерно непрерывна в открытой ограниченной и выпуклой области* W, *то* $d\mathbf{F}(x, h)$ *является в* W *равномерным.*

Доказательство теоремы 4.3 совпадает с доказательством необходимости предыдущей теоремы.

4.3. Об одном необходимом условии компактности производной.

Лемма 4.1. *Если последовательность* $x_1, x_2, x_3, \ldots$, *принадлежащая компактному множеству* $\omega \subset E_x$, *сходится слабо к* $x_0 \in \omega$, *то она сходится (сильно) к* x_0, *т. е. для элементов компактного множества понятия сходимости и слабой сходимости совпадают.*

Доказательство. По условию для произвольного $y \in E_x^*$

$$\lim_{n\to\infty}(y, x_n) = (y, x_0).$$

Допустим теперь, что $\{x_n\}$ не сходится к x_0, тогда для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел n_1, n_2, n_3, ... будет

$$\|x_{n_k} - x_0\| \geqslant \varepsilon, \tag{4.9}$$

где ε — некоторое положительное число. Но так как $\{x_{n_k}\}$ принадлежат компактному множеству $\omega \subset E_x$, то найдется подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$, которая сходится к некоторому $x \in E_x$. Раз $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_{m_k} - x\| = 0$, то $\{x_{m_k}\}$ также сходится и слабо к x, т. е. для любого $y \in E_x^*$

$$\lim_{k\to\infty} (y, x_{m_k}) = (y, x).$$

Отсюда и из предыдущего имеем

$$(y, x) = (y, x_0).$$

Так как это равенство справедливо для любого $y \in E_x^*$, то $x = x_0$, а значит

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{m_k} - x_0\| = 0.$$

Последнее равенство противоречит неравенствам (4.9). Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 4.4 [1]. *Для того чтобы производная* $\mathbf{F}'(x)$ *вполне непрерывного оператора* $\mathbf{F}(x)$ *была компактной в ограниченной и выпуклой области* W, *необходимо, чтобы оператор* $\mathbf{F}(x)$ *был усиленно непрерывным в* W.

Для доказательства воспользуемся формулой Лагранжа (3.4), которая в силу равенства (3.13) принимает вид

$$(\mathbf{F}(x+h) - \mathbf{F}(x), e) = (\mathbf{F}'(x+\tau h)h, e), \tag{4.10}$$

где e — произвольный единичный вектор из E_y^* и $0 < \tau < 1$.

Пусть теперь $\{x_n\}$ есть произвольная последовательность из W, слабо сходящаяся к $x_0 \in W$. Докажем, что последовательность $\{\mathbf{F}(x_n)\}$ слабо сходится к $\mathbf{F}(x_0)$. Действительно, из допущения противного вытекает существование единичного вектора $e_0 \in E_y^*$, положительного ε и подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ таких, что

$$|(\mathbf{F}(x_{n_k}) - \mathbf{F}(x_0), e_0)| \geqslant \varepsilon. \tag{4.11}$$

---

[1]) Ср. [9, о], теорема 2.2.

Но согласно (4.10)

$$(\mathbf{F}(x_{n_k})-\mathbf{F}(x_0),\ e_0)=(\mathbf{F}'(x_0+t_{n_k}(x_{n_k}-x_0)(x_{n_k}-x_0),\ e_0)$$

и так как

$$x_0+t_{n_k}(x_{n_k}-x_0)\in W,$$

то в силу компактности в W оператора $\mathbf{F}'(x)$ существует такая подпоследовательность $\{m_k\}$, что

$$\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{F}'(x_0+t_{m_k}(x_{m_k}-x_0))-y_0\|=0,$$

где y_0 — элемент пространства всех линейных операторов из E_x в E_y.

Далее напишем, что

$$\mathbf{F}'(x_0+t_{m_k}(x_{m_k}-x_0))(x_{m_k}-x_0),\ e_0)=(y_0(x_{m_k}-x_0),\ e_0)+$$
$$+([\mathbf{F}'(x_0+t_{m_k}(x_{m_k}-x_0))-y_0](x_{m_k}-x_0),\ e_0).$$

Так как последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится слабо к x_0, а y_0 есть ограниченный линейный оператор, действующий из E_x в E_y, то (см. [47], стр. 203, теорему 3) последовательность $y_0(x_{m_k})$ сходится слабо к $y_0(x_0)$, а значит, $(y_0(x_{m_k}-x_0),\ e_0)\to 0$ при $k\to\infty$. Далее,

$$|([\mathbf{F}'(x_0+t_{m_k}(x_{m_k}-x_0))-y_0](x_{m_k}-x_0),\ e_0)|\leqslant$$
$$\leqslant\|\mathbf{F}'(x_0+t_{m_k}(x_{m_k}-x_0))-y_0\|\,2r\to 0$$

при $k\to\infty$, ибо $\sup\|x_n\|=r<\infty$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}(\mathbf{F}(x_{m_k})-\mathbf{F}(x_0),\ e_0)=0,$$

что противоречит неравенствам (4.11).

Полученное противоречие доказывает слабую сходимость $\{\mathbf{F}(x_n)\}$ к $\mathbf{F}(x_0)$. Но так как $\{\mathbf{F}(x_n)\}$ принадлежит компактному множеству, то согласно лемме 4.1 последовательность $\{\mathbf{F}(x_n)\}$ сходится (сильно) к $\mathbf{F}(x_0)$. Теорема доказана.

4.4. Об усиленной непрерывности производной, заданной в пространстве со слабо компактной сферой. Обозначим через E_{xy} пространство всех линейных операторов, действующих из банахова пространства E_x в банахово пространство E_y. Это пространство E_{xy} также является пространством Банаха. Как известно [1]), для линейных операторов z, принадлежащих E_{xy}, вводится два вида сходимости:

1°. Говорят, что последовательность $\{z_n\}$ *сходится равномерно к* $z_0 \in E_{xy}$, если

$$\lim_{n \to \infty} \|z_n - z_0\| = 0,$$

где $\| \quad \|$ есть норма, заданная в E_{xy}.

2°. Говорят, что последовательность $\{z_n\} \in E_{xy}$ *сходится сильно к* $z_0 \in E_{xy}$, если для каждого фиксированного $x \in E_x$ последовательность $\{z_n x\}$ сходится в смысле метрики E_y к $z_0 x$.

Пространство E_{xy} является полным не только в смысле равномерной сходимости, но и в смысле сильной сходимости [1]). Из равномерной сходимости последовательности $\{z_n\}$ следует и сильная сходимость этой последовательности; обратное предложение не всегда имеет место.

Лемма 4.2. *Если последовательность* $\{z_n\}$ *принадлежит компактному множеству* ω *пространства* E_{xy}, *то из сильной сходимости этой последовательности к* $z_0 \in \omega$ *следует ее равномерная сходимость к* z_0.

Доказательство. По условию для произвольного $x \in E_x$

$$\lim_{n \to \infty} \|z_n x - z_0 x\| = 0.$$

Допустим теперь, что последовательность $\{z_n\}$ не сходится равномерно к z_0, тогда для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $n_1, n_2, n_3, \ldots$ будет

$$\|z_{n_k} - z_0\| \geqslant \varepsilon, \tag{4.12}$$

где ε — некоторое положительное число. Но так как $\{z_{n_k}\}$ принадлежит компактному множеству $\omega \subset E_{xy}$, то найдется подпоследовательность $\{z_{m_k}\}$, которая сходится к некоторому $z \in E_{xy}$. Раз последовательность $\{z_{m_k}\}$ сходится равномерно к z, то она сходится к z сильно. Следовательно,

---

[1]) См. [47], § 19.

в силу единственности предела $z = z_0$, так что

$$\lim_{k \to \infty} \|z_{m_k} - z_0\| = 0.$$

Это равенство противоречит неравенствам (4.12). Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 4.5[1]). *Для того чтобы в шаре D_r пространства E_x, в котором сфера $\|x\| = r$ слабо компактна, производная $\mathbf{F}'(x)$ вполне непрерывного оператора была усиленно непрерывной, необходимо, чтобы $\mathbf{F}'(x)$ была вполне компактной в D_r, и достаточно, чтобы $\mathbf{F}'(x)$ была равномерно непрерывной в D_r и компактной в $D_{\alpha+r}$ (при некотором $\alpha > 0$).*

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 1.4. Докажем достаточность. Так как по условию $\mathbf{F}'(x)$ является равномерно непрерывной в шаре D_r, то согласно теореме 4.3 $\mathbf{dF}(x, h)$ является в D_r равномерным. Далее, так как по условию $\mathbf{F}'(x)$ компактна в $D_{\alpha+r}$, то согласно теореме 4.4 $\mathbf{F}(x)$ усиленно непрерывен в $D_{\alpha+r}$. Рассмотрим теперь произвольную последовательность $\{x_n\}$ из D_r, слабо сходящуюся к $x_0 \in D_r$. Пусть h есть произвольный элемент с единичной нормой. Выберем $\gamma > 0$ так, чтобы для $t \in (0, \gamma)$ и произвольного $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ было $x_n + th \in D_{\alpha+r}$. Из усиленной непрерывности $\mathbf{F}(x)$ следует

$$\lim_{n \to \infty} [\mathbf{F}(x_n + th) - \mathbf{F}(x_n)] = \mathbf{F}(x_0 + th) - \mathbf{F}(x_0),$$

или

$$\lim_{n \to \infty} [\mathbf{F}'(x_n)th + \omega(x_n, th)] = \mathbf{F}'(x_0)th + \omega(x_0, th),$$

или

$$\lim_{n \to \infty} \left[\mathbf{F}'(x_n)h + \frac{1}{t}\omega(x_n, th)\right] = \mathbf{F}'(x_0)h + \frac{1}{t}\omega(x_0, th).$$

Отсюда вытекает, что произвольному $\varepsilon > 0$ отвечает такое $n_0(\varepsilon, h)$, что для всякого $n \geqslant n_0$ будет

$$\left\|[\mathbf{F}'(x_n) - \mathbf{F}'(x_0)]h + \frac{1}{t}\omega(x_n, th) - \frac{1}{t}\omega(x_0, th)\right\| < \frac{1}{3}\varepsilon,$$

---

1) Ср. [9, о], теорема 4.3.

или при достаточно малом $t > 0$, для которого

$$\frac{1}{t}\|\omega(x_n, th)\| < \frac{1}{3}\varepsilon, \quad \frac{1}{t}\|\omega(x_0, th)\| < \frac{1}{3}\varepsilon,$$

будет

$$\|[\mathbf{F}'(x_n) - \mathbf{F}'(x_0)]\, h\| < \varepsilon.$$

Итак для произвольного $h \in E_x$ ($\|h\| = 1$) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{F}'(x_n)\, h = \mathbf{F}'(x_0)\, h,$$

т. е. последовательность линейных операторов $\mathbf{F}'(x_n)$ (элементов пространства E_{xy}) сходится сильно к линейному оператору $\mathbf{F}'(x_0)$ ($\mathbf{F}'(x_0) \in E_{xy}$). Но так как последовательность $\{\mathbf{F}'(x_n)\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, принадлежит компактному множеству $\mathbf{F}'(D_r)$ ($\mathbf{F}'(D_r)$ — множество в пространстве E_{xy}, в которое переходит шар D_r при помощи соответствия $x \to \mathbf{F}'(x)$, $x \in D_r$, $\mathbf{F}'(x) \in E_{xy}$), то согласно лемме 4.2 эта последовательность сходится равномерно к $\mathbf{F}'(x_0)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{F}'(x_n) - \mathbf{F}'(x_0)\| = 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 4.6[1]). *Пусть в пространстве E_x со слабо компактной сферой задан вполне непрерывный оператор* $\mathbf{F}(x)$, *который в шаре $D_{r+\alpha}$ ($\alpha > 0$) имеет компактную производную* $\mathbf{F}'(x)$. *Тогда, для того чтобы производная* $\mathbf{F}'(x)$ *была усиленно непрерывной в шаре D_r, необходимо и достаточно, чтобы оператор* $\mathbf{F}(x)$ *имел в D_r равномерный дифференциал.*

Доказательство необходимости. Из усиленной непрерывности в D_r производной $\mathbf{F}'(x)$ согласно теореме 1.4 следует равномерная непрерывность $\mathbf{F}'(x)$, а из равномерной непрерывности $\mathbf{F}'(x)$ согласно теореме 4.3 следует равномерная дифференцируемость $\mathbf{F}(x)$.

Доказательство достаточности. Из компактности в $D_{\alpha+r}$ производной $\mathbf{F}'(x)$ согласно теореме 4.4 следует усиленная непрерывность в $D_{\alpha+r}$ оператора $\mathbf{F}(x)$. Исходя теперь из усиленной непрерывности $\mathbf{F}(x)$, равномерности $d\mathbf{F}(x, h)$ и поступая так же, как при доказательстве

---

[1]) См. [9, о], теорема 4.4.

предыдущей теоремы, мы найдем, что $\mathbf{F}'(x)$ усиленно непрерывна в D_r. Теорема доказана.

Отметим, что в теоремах 4.5 и 4.6 шары D_r и $D_{\alpha+r}$ можно заменить множествами W и W_α, где W — ограниченная, открытая и выпуклая область, а W_α — α-окрестность множества W.

4.5. О производных вполне непрерывных операторов. В пунктах 4.3 и 4.4 при доказательстве различных предложений о производных $\mathbf{F}'(x)$ мы требовали, чтобы оператор $\mathbf{F}(x)$ был вполне непрерывным. Разумеется, можно было требовать компактности $\mathbf{F}(x)$, ибо непрерывность этого оператора следует из существования производной $\mathbf{F}(x)$. Выясним поэтому связь между полной непрерывностью оператора и полной непрерывностью его производной.

Теорема 4.7[1]. *Производная Фреше вполне непрерывного оператора является линейным вполне непрерывным оператором.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{F}(x)$ — сильно дифференцируемый и вполне непрерывный оператор, действующий из E_x в E_y. Докажем, что $\mathbf{F}'(x_0)$ — линейный вполне непрерывный оператор. Доказательство проведем от противного. Допустим, что $\mathbf{F}'(x_0)$ не является вполне непрерывным. Тогда найдется положительное ε и ограниченная последовательность $\{x_n\}$ такие, что $\|x_n\| < r$ и

$$\|\mathbf{F}'(x_0)x_i - \mathbf{F}'(x_0)x_k\| > 3\varepsilon, \quad i \neq k \quad (i, k = 1, 2, \ldots).$$

Так как $\mathbf{F}(x)$ — сильно дифференцируемый оператор, то заданному $\varepsilon > 0$ отвечает $\delta > 0$ такое, что как только $\|h\| < \delta$, то $\|\omega(x_0, rh)\| < \varepsilon\|h\|$. Напишем теперь, что

$$\mathbf{F}(x_0 + \delta x_k) - \mathbf{F}(x_0) = \mathbf{F}'(x_0)\delta x_k + \omega(x_0, \delta x_k).$$

Отсюда и из предыдущего имеем

$$\|\mathbf{F}(x_0 + \delta x_i) - \mathbf{F}(x_0 + \delta x_k)\| = \|\delta\mathbf{F}'(x_0)x_i - \delta\mathbf{F}'(x_0)x_k +$$
$$+ \omega(x_0, \delta x_i) - \omega(x_0, \delta x_k)\| \geqslant \delta\|\mathbf{F}'(x_0)x_i - \mathbf{F}'(x_0)x_k\| -$$
$$- \|\omega(x_0, \delta x_i)\| - \|\omega(x_0, \delta x_k)\| > 3\delta\varepsilon - 2\varepsilon\delta = \delta\varepsilon.$$

Это неравенство противоречит условию, что $\mathbf{F}(x)$ — вполне непрерывный оператор. Полученное противоречие доказывает теорему.

---

[1]) См. [36, в] и [57, ж], стр. 557; ср. [36, к], стр. 140.

Неизвестно, следует ли полная непрерывность оператора $\mathbf{F}(x)$ из того, что его производная $\mathbf{F}'(x)$ при каждом фиксированном x является линейным вполне непрерывным оператором.

Следующее предложение показывает, что полная непрерывность оператора иногда следует из свойств производной этого оператора.

Теорема 4.8. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *При каждом фиксированном $x \in E_x$ производная $\mathbf{F}'(x)$ — линейный вполне непрерывный оператор.*

2°. *Производная $\mathbf{F}'(x)$, как функция от x, есть компактный оператор из E_x в E_{xy}.*

Тогда $\mathbf{F}(x)$ — вполне непрерывный оператор из E_x в E_y.

Доказательство. Непрерывность $\mathbf{F}(x)$ следует из существования производной Фреше $\mathbf{F}'(x)$. Допустим, что $\mathbf{F}(x)$ не есть компактный оператор из E_x в E_y; тогда найдется такое $\varepsilon > 0$ и такая ограниченная последовательность $\{x_n\}$, что $\|\mathbf{F}(x_i) - \mathbf{F}(x_k)\| > 4\varepsilon$, $\|x_n\| \leqslant r$, $i \neq k$, $i, k = 1, 2, 3, \ldots$

Применяя формулу Лагранжа (3.4) и учитывая равенство (3.13), напишем

$$(\mathbf{F}(x_i) - \mathbf{F}(x_k),\ e_{ik}) = (\mathbf{F}'(x_k + t_{ik}(x_i - x_k))(x_i - x_k),\ e_{ik}),$$

где e_{ik} — произвольный единичный элемент из E_y^* и $0 < t_{ik} < 1$. Подберем e_{ik} так (см. лемму 1.1), чтобы

$$(\mathbf{F}(x_i) - \mathbf{F}(x_k),\ e_{ik}) \geqslant \frac{1}{2}\|\mathbf{F}(x_i) - \mathbf{F}(x_k)\|.$$

Отсюда и из предыдущего имеем

$$2\varepsilon < \frac{1}{2}\|\mathbf{F}(x_i) - \mathbf{F}(x_k)\| \leqslant (\mathbf{F}'(x_k + t_{ik}(x_i - x_k))(x_i - x_k),\ e_{ik}). \tag{4.13}$$

Так как

$$\|x_k + t_{ik}(x_i - x_k)\| \leqslant (1 - t_{ik})\|x_k\| + t_{ik}\|x_i\| \leqslant r,$$

то в силу компактности производной $\mathbf{F}'(x)$ и полноты пространства E_{xy} из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_m}\}$ такую, что $\{\mathbf{F}'(x_{k_m} + t_{ik_m} \times$ $\times (x_{i_m} - x_{k_m}))\}$ сходится к элементу $z_0 \in E_{xy}$, который согласно теореме 1.1 представляет собой линейный вполне непрерывный оператор[1]) из E_x в E_y. Запишем теперь неравенство (4.13) так:

$$2\varepsilon < ((\mathbf{F}'(x_{k_m}+t_{ik_m}(x_{i_m}-x_{k_m}))-z_0)(x_{i_m}-x_{k_m})+ \\ +z_0(x_{i_m}-x_{k_m}),\ e_{ik_m}) \leqslant \|(\mathbf{F}'(x_{k_m}+t_{ik_m}(x_{i_m}-x_{k_m}))-z_0)\times \\ \times(x_{i_m}-x_{k_m})+z_0(x_{i_m}-x_{k_m})\| \leqslant \\ \leqslant \|\mathbf{F}'(x_{k_m}+t_{ik_m}(x_{i_m}-x_{k_m}))-z_0\|\,\|x_{i_m}-x_{k_m}\|+ \\ +\|z_0(x_{i_m}-x_{k_m})\| \leqslant 2r\|\mathbf{F}'(x_{k_m}+t_{ik_m}(x_{i_m}-x_{k_m}))-z_0\|+ \\ +\|z_0x_{i_m}-z_0x_{k_m}\|.$$

Так как $\mathbf{F}'(x_{k_m}+t_{ik_m}(x_{i_m}-x_{k_m}))\to z_0$ при $m\to\infty$, то найдется такое m_0, что для $m \geqslant m_0$ будет:

$$2r\|\mathbf{F}'(x_{k_m}+t_{ik_m}(x_{i_m}-x_{k_m}))-z_0\| < \varepsilon.$$

Отсюда и из предыдущего имеем

$$2\varepsilon < \varepsilon + \|z_0x_{i_m}-z_0x_{k_m}\|, \quad m \geqslant m_0$$

или

$$\|z_0x_{i_m}-z_0x_{k_m}\| > \varepsilon, \tag{4.14}$$

где $i_m \neq k_m$.

Неравенство (4.14) невозможно для вполне непрерывного линейного оператора z_0. Полученное противоречие доказывает теорему.

---

[1]) Каждый оператор $\mathbf{F}'(x_{k_m}+t_{ik_m}(x_{i_m}-x_{k_m}))x$ удовлетворяет условиям 1° и 2° теоремы 1.1, а потому линейный оператор z_0x также удовлетворяет условиям 1° и 2° теоремы 1.1.

ГЛАВА II

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В настоящей главе излагается теория потенциального векторного поля в бесконечномерных пространствах. Рассмотрены критерии потенциальности как дифференцируемых операторов, так и недифференцируемых операторов, а также вопрос о компактности и усиленной непрерывности потенциальных операторов. Материал излагается с доказательствами.

§ 5. Градиент функционала, потенциальные операторы и условия потенциальности дифференцируемых операторов

5.1. Градиент функционала. Пусть функционал $f(x)$ имеет на некотором множестве $\sigma\subset E$ линейный дифференциал Гато $Df(x, h)$. Тогда $Df(x, h)=(y, h)$, где $y=\mathbf{F}(x)\in E^*$ есть оператор, действующий из E в сопряженное пространство E^* и определенный в каждой точке $x\in\sigma$.

Определение 5.1. Оператор $\mathbf{F}(x)$, определенный формулой

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(x+th)-f(x)]=(\mathbf{F}(x),\ h) \tag{5.1}$$

для произвольного $h\in E$, назовем[1]) *градиентом функционала* $f(x)$:

$$\mathbf{F}(x)=\operatorname{grad} f(x).$$

---

[1]) Понятие градиента функционала впервые встречается у Куранта ([41], стр. 214), но точного определения у него нет. Первое определение градиента функционала принадлежит Голомбу ([20], § 6). При введении понятия градиента Голомб рассматривал функционалы, дифференцируемые в смысле Фреше, причем на остаток дифференциала Фреше он накладывал специальные ограничения и тем самым сузил рассмотренный им класс операторов. Более

Из этого определения следует единственность градиента и равенство

$$\operatorname{grad}[f_1(x)+f_2(x)]=\operatorname{grad} f_1(x)+\operatorname{grad} f_2(x),$$

если каждое слагаемое правой части существует.

Отметим, что градиент функционала $f(x)$ есть производная Гато (см. формулу (3.12)) этого функционала, т. е. $\operatorname{grad} f(x)=f'(x)$, причем $\operatorname{grad} f(x)$ действует из заданного пространства E в E^*.

Определение 5.2. Градиент функционала $f(x)$ называется *сильным*, если этот функционал имеет дифференциал Фреше.

Замечание 5.1. Из теоремы 3.3 следует, что непрерывный градиент есть сильный градиент.

В качестве примера мы рассмотрим в вещественном пространстве Гильберта функционал $f(x)=\|x\|$ и найдем его градиент во всякой точке $x\neq\theta$ ($\|\theta\|=0$)

$$\|x+th\|-\|x\|=\frac{2(x, th)+\|th\|^2}{\|x+th\|+\|x\|}.$$

Отсюда

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+th\|-\|x\|}{t}=\frac{(x, h)}{\|x\|}, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{grad}\|x\|=\frac{x}{\|x\|}.$$

В качестве второго примера рассмотрим в том же вещественном гильбертовом пространстве функционал $\varphi(x)=$ $=(x, x)=\|x\|^2$. Для него имеем $\varphi(x+th)-\varphi(x)=$ $=2t(x, h)+t^2(h, h)$, откуда

$$\operatorname{grad}(x, x)=2x. \tag{5.2}$$

5.2. Потенциальные и симметричные операторы.

Определение 5.3. Мы скажем, что оператор $\mathbf{F}(x)$, действующий из пространства E в сопряженное простран-

---

широкий класс таких операторов был рассмотрен в работах Л. А. Люстерника [46], В. И. Соболева [66] и Э. С. Цитланадзе [72]; в этих работах операторы назывались не градиентами функционалов, а симметрическими операторами. Симметрические операторы представляли собою градиенты дифференцируемых в смысле Фреше функционалов. Данное здесь определение градиента, в котором требуется, чтобы функционал был лишь дифференцируем в смысле Гато, было использовано в работах автора [9, н, о] и в последующих работах [9].

ство E^*, является *потенциальным на некотором множестве* $H \subset E$, если существует такой функционал $f(x)$, что для всех $x \in H$

$$\operatorname{grad} f(x) = \mathbf{F}(x).$$

Ниже будут даны условия потенциальности операторов.

Пусть x, h_1, h_2 суть произвольные точки банахова пространства E и $\mathbf{F}(x, h_1, h_2)$ — оператор с областью значений в E или в другом банаховом пространстве. Оператор $\mathbf{F}(x, h_1, h_2)$ называется *билинейным относительно* h_1 *и* h_2, если $\mathbf{F}(x, h_1, h_2)$ есть линейный оператор как относительно h_1, так и относительно h_2. Это понятие сохраняется и для функционалов.

Определение 5.4. Билинейный оператор $\mathbf{F}(x, h_1, h_2)$ (или функционал $\varphi(x, h_1, h_2)$) называется *симметричным*, если $\mathbf{F}(x, h_1, h_2) = \mathbf{F}(x, h_2, h_1)$ ($\varphi(x, h_1, h_1) = \varphi(x, h_2, h_1)$).

Иногда понятие симметрии оператора $\mathbf{F}(x)$ вводится следующим образом. Пусть $\mathbf{F}(x)$ имеет линейный дифференциал Гато в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 (см. п. 3.1). Пусть далее $\mathbf{DF}(x, h_1)$ также имеет линейный дифференциал Гато в точке x_0, который обозначается через $\mathbf{D}^2\mathbf{F}(x, h_1; h_2)$ и называется *вторым дифференциалом* в точке x_0 от оператора $\mathbf{F}(x)$.

Определение 5.5. Если

$$\mathbf{D}^2\mathbf{F}(x_0, h_1; h_2) = \mathbf{D}^2\mathbf{F}(x_0, h_2; h_1),$$

то оператор $\mathbf{F}(x)$ называется *симметричным в точке* x_0.

В дальнейшем мы будем различать потенциальные операторы и сильно потенциальные операторы.

Определение 5.6. Оператор, являющийся сильным градиентом функционала, называется *сильно потенциальным* оператором.

Замечание 5.2. Из теоремы 3.2 следует, что непрерывный потенциальный оператор есть сильно потенциальный оператор.

5.3. Условия потенциальности дифференцируемых операторов.

Теорема 5.1 [1]). *Пусть выполнены условия*:

1°. *Оператор* $\mathbf{F}(x)$ *действует из пространства* E *в сопряженное пространство* E^*.

---

[1]) См. [9, о], теорема 3.1. Ср. также [33, б], теорема 2′ и [13, г] стр. 106.

2°. $\mathbf{F}(x)$ *имеет линейный дифференциал Гато* $\mathbf{DF}(x, h)$ *в каждой точке* x *шара* $D: \|x - x_0\| < r$.

3°. *В каждой точке* $x \in D$ *функционал* $(\mathbf{DF}(x, h_1), h_2)$ *непрерывен*[1]) *по* x.

Тогда, для того чтобы оператор $\mathbf{F}(x)$ *был потенциальным в шаре* D, *необходимо и достаточно, чтобы билинейный функционал* $(\mathbf{DF}(x, h_1), h_2)$ *был симметричным для всякого* $x \in D$, *т. е. чтобы*

$$(\mathbf{DF}(x, h_1), h_2) = (\mathbf{DF}(x, h_2), h_1). \tag{5.3}$$

Доказательство необходимости. Пусть $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$, т. е. $Df(x, h) = (\mathbf{F}(x), h)$. Зафиксируем $x \in D$, h_1, $h_2 \in E$ ($\|h_1\| = \|h_2\| = 1$). Подберем положительные числа a и b так, чтобы $x + uh_1 + vh_2 \in D$ для $0 \leqslant u \leqslant a$, $0 \leqslant v \leqslant b$.

Рассмотрим теперь выражение

$$\Delta = f(x + ah_1 + bh_2) - f(x + ah_1) - f(x + bh_2) + f(x).$$

Полагая

$$\varphi(x) = f(x + ah_1) - f(x),$$

получим

$$\Delta = \varphi(x + bh_2) - \varphi(x).$$

Применяя к последней разности формулу (3.3), получим

$$\begin{aligned}\Delta = D\varphi(x + \tau_1 bh_2, bh_2) = Df(x + \tau_1 bh_2 + ah_1, bh_2) - \\ - Df(x + \tau_1 bh_2, bh_2) = \\ = b(\mathbf{F}(x + \tau_1 bh_2 + ah_1) - \mathbf{F}(x + \tau_1 bh_2), h_2).\end{aligned}$$

Применяя теперь формулу (3.4), мы будем иметь

$$\Delta = ab(\mathbf{DF}(x + \tau_1 bh_2 + \tau_2 ah_1, h_1), h_2). \tag{5.4}$$

Полагая

$$\psi(x) = f(x + bh_2) - f(x),$$

найдем, что

$$\Delta = \psi(x + ah_1) - \psi(x),$$

---

[1]) Данное требование можно ослабить; достаточно потребовать непрерывности по x относительно произвольной плоскости (двумерного многообразия), проходящей через эту точку x.

откуда так же, как раньше, получим

$$\Delta = ab(\mathbf{DF}(x+\tau_3 ah_1+\tau_4 bh_2,\ h_2),\ h_1). \qquad (5.5)$$

Из (5.4) и (5.5) следует

$$(\mathbf{DF}(x+\tau_1 bh_2+\tau_2 ah_1,\ h_1),\ h_2) = \\ = (\mathbf{DF}(x+\tau_3 ah_1+\tau_4 bh_2,\ h_2),\ h_1).$$

Переходя здесь к пределу сначала при $a\to 0$, а затем при $b\to 0$, мы согласно условию 3° теоремы найдем

$$(\mathbf{DF}(x,\ h_1),\ h_2) = (\mathbf{DF}(x,\ h_2),\ h_1).$$

Доказательство достаточности. Если существует такой функционал $f(x)$, что $\operatorname{grad} f(x) = \mathbf{F}(x)$, т. е. $Df(x,\ h) = (\mathbf{F}(x),\ h)$, то для всякого $x\in D$ и любого $t\in[0,\ 1]$

$$\frac{d}{dt}f(x_0+t(x-x_0)) = Df(x_0+t(x-x_0),\ x-x_0) = \\ = (\mathbf{F}(x_0+t(x-x_0)),\ x-x_0).$$

Интегрируя это равенство по t, получим

$$f(x) = f_0 + \int_0^1 (\mathbf{F}(x_0+t(x-x_0)),\ x-x_0)\,dt, \qquad (5.6)$$

где $f_0 = f(x_0)$. Данный интеграл существует в силу условия 2° теоремы (см. (3.16)). Докажем, что если выполнено (5.3), то функционал (5.6) является потенциалом оператора $\mathbf{F}(x)$, т. е. $\operatorname{grad} f(x) = \mathbf{F}(x)$.

Пусть $x,\ x+h\in D$, тогда из (5.6) имеем

$$f(x+h)-f(x) = \int_0^1 [(\mathbf{F}(x_0+t(x-x_0+h)),\ x-x_0+h) - \\ - (\mathbf{F}(x_0+t(x-x_0)),\ x-x_0)]\,dt$$

или

$$f(x+h)-f(x) = \int_0^1 (\mathbf{F}(x_0+t(x-x_0)+th),\ h)\,dt + \\ + \int_0^1 (\mathbf{F}(x_0+t(x-x_0)+th)-\mathbf{F}(x_0+t(x-x_0)),\ x-x_0)\,dt. \qquad (5.7)$$

Представим второе слагаемое правой части (5.7) в виде

$$I=\int_0^1 dt\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{F}(x_0+t(x-x_0)+sh),\ x-x_0)\,ds=$$

$$=\int_0^1 dt\int_0^t (\mathbf{DF}(x_0+t(x-x_0)+sh,\ h),\ x-x_0)\,ds.$$

Данный интеграл существует в силу условия 3° теоремы. Используя теперь условие (5.3), напишем

$$I=\int_0^1 dt\int_0^t (\mathbf{DF}(x_0+t(x-x_0)+sh,\ x-x_0),\ h)\,ds.$$

Изменяя в этом интеграле порядок интегрирования, получим

$$I=\int_0^1 ds\int_s^1 (\mathbf{DF}(x_0+t(x-x_0)+sh,\ x-x_0),\ h)\,dt=$$

$$=\int_0^1 (\mathbf{F}(x_0+(x-x_0)+sh)-\mathbf{F}(x_0+s(x-x_0)+sh),\ h)\,ds.$$

Подставляя это выражение для I в правую часть (5.7), мы получим

$$f(x+h)-f(x)=\int_0^1 (\mathbf{F}(x+sh),\ h)\,ds.$$

Так как $(\mathbf{F}(x+sh),\ h)$ согласно условию 2° теоремы (см. (3.16)) есть непрерывная функция от s на $[0,\ 1]$, то, применяя к последнему интегралу теорему о среднем, получим

$$f(x+h)-f(x)=(\mathbf{F}(x+\tau h),\ h),\qquad 0<\tau<1.$$

Отсюда

$$f(x+th)-f(x)=(\mathbf{F}(x+\tau th),\ th)$$

или

$$\frac{1}{t}[f(x+th)-f(x)]=(\mathbf{F}(x+\tau th),\ h).$$

Из данного равенства согласно формуле (3.16), которая справедлива в силу условия 2° теоремы, имеем

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(x+th)-f(x)] = (\mathbf{F}(x),\ h),$$

т. е. что $\operatorname{grad} f(x) = \mathbf{F}(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Можно показать, что при выполнении условий теоремы 5.1 $Df(x,\ h) = d f(x,\ h)$, где $f(x)$ определяется формулой (5.6).

Следствие 5.1. Если выполнены условия теоремы 5.1, то существует единственный функционал, принимающий в точке x_0 заданное значение f_0 и имеющий градиентом данный оператор $\mathbf{F}(x)$. Этот функционал представим в виде

$$f(x) = f_0 + \int_0^1 (\mathbf{F}(x_0 + t(x-x_0)),\ x-x_0)\,dt. \tag{5.6}$$

Отметим также (см. [33, б], теорема 3′), что теорема 5.1 сохраняется для всякой односвязной области $\omega \subset E$.

5.4. О потенциальности произведения операторов. Пусть $\mathbf{A}$ есть ограниченный линейный оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H, а $\mathbf{F}(x)$ — потенциальный оператор, действующий в H и имеющий непрерывный по x линейный дифференциал $\mathbf{DF}(x,\ h)$. Выясним вопрос о потенциальности произведения $\mathbf{AF}(x)$. Так как в силу ограниченности линейного оператора $\mathbf{A}$ $\mathbf{DAF}(x,\ h) = \mathbf{ADF}(x, h)$, то условие потенциальности $\mathbf{AF}$ запишется в виде

$$(\mathbf{ADF}(x,\ h_1),\ h_2) = (\mathbf{ADF}(x,\ h_2)\ h_1).$$

Но

$(\mathbf{ADF}(x,\ h_2),\ h_1) = (\mathbf{DF}(x,\ h_2),\ \mathbf{A}^*h_1) = (\mathbf{DF}(x,\ \mathbf{A}^*h_1),\ h_2)$, ибо по условию $\mathbf{F}$ есть потенциальный оператор, а потому для него выполнено условие (5.3). Из двух последних соотношений получаем, что для *потенциальности произведения* $\mathbf{AF}$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\mathbf{ADF}(x,\ h_1),\ h_2) = (\mathbf{DF}(x_0\ \mathbf{A}^*h_1),\ h_2)$$

для произвольных $h_1,\ h_2 \in H$, *или чтобы*

$$\mathbf{ADF}(x,\ h) = \mathbf{DF}(x,\ \mathbf{A}^*h). \tag{5.7′}$$

Отсюда, в частности, следует, что для потенциальности произведения самосопряженного оператора $\mathbf{A}$ и потенциального оператора $\mathbf{F}(x)$ необходимо и достаточно, чтобы линейные (относительно $h \in H$) операторы $\mathbf{A}h$ и $\mathbf{DF}(x, h)$ были перестановочными.

Рассмотрим два примера.

Пример 5.1. Пусть $\mathbf{A}$ есть ограниченный линейный оператор, действующий в H, и $\mathbf{I}$ — единичный оператор. Так как единичный оператор согласно условию (5.3) является потенциальным, то из условия (5.7) следует, что для потенциальности $\mathbf{A}$ необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, т. е. чтобы $\mathbf{A}$ был самосопряженным оператором. В случае самосопряженности $\mathbf{A}$, мы из формулы (5.6) находим, что $\mathbf{A}$ является градиентом квадратичного функционала $\frac{1}{2}(\mathbf{A}x, x)$.

Пример 5.2. Рассмотрим в вещественном пространстве $L^2(B)$, где B есть ограниченная область n-мерного евклидова пространства, самосопряженный вполне непрерывный оператор

$$\mathbf{A}u = \int_B K(x, y)\, u(y)\, dy$$

и оператор $\mathbf{h}u = g(u(x), x)$, имеющий (см. п. 20.2) непрерывный дифференциал Гато

$$\mathbf{Dh}(u, v) = g'_u(u(x), x)\, v(x).$$

Для произведения $\mathbf{Ah}u$ условие (5.7) принимает вид

$$\int_B K(x, y)\, g'_u(u(y), y)\, v(y)\, dy = g'_u(u(x), x) \int_B K(x, y)\, v(y) dy.$$

Это равенство будет выполнено для произвольных $u, v \in L^2$ лишь тогда, когда $g'_u(u, x) = \mathrm{const}$. Таким образом, нелинейный оператор типа Гаммерштейна

$$\mathbf{Ah}u = \int_B K(x, y)\, g(u(y), y)\, dy$$

не является потенциальным.

5.5. Формула Лагранжа и условие Липшица для функционалов. Пусть функционал $f(x)$ имеет градиент $\mathbf{F}(x)$ в каждой точке некоторого выпуклого множества $\omega \subset E$. Согласно формуле (3.3) мы можем написать, что

$$f(x_2) - f(x_1) = (\mathbf{F}(x_1 + \tau(x_2 - x_1)),\ x_2 - x_1), \tag{5.8}$$

где x_1, $x_2 \in \omega$. Если $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$ ограничен на ω, т. е.

$$\sup_{\omega} \|F(x)\| = M < +\infty,$$

то из *формулы Лагранжа* (5.8) следует *неравенство Липшица*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \|\mathbf{F}(x_1 + \tau(x_2 - x_1))\| \, \|x_2 - x_1\| \leqslant M \|x_2 - x_1\|.$$

Этим доказано следующее предложение:

Лемма 5.1. *Если градиент функционала $f(x)$ ограничен на некотором выпуклом множестве $\omega \subset E$, то на ω функционал $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant M \|x_2 - x_1\|. \tag{5.9}$$

§ 6. Условия потенциальности недифференцируемых операторов

6.1. Теорема М. К. Гавурина[1]). Обозначим через E_{xy} пространство всех линейных операторов, действующих из банахова пространства E_x в банахово пространство E_y. Как известно ([47], § 19), E_{xy} есть также банахово пространство. Рассмотрим оператор $\Phi(x)$, который действует из E_x в E_{xy}. Согласно определению пространства E_{xy} выражение $\Phi(x) h \in E_y$, где x, $h \in E_x$. При каждом фиксированном x выражение $\Phi(x)\, h$ есть значение линейного оператора, действующего из E_x в E_y, для различных h. Выражение $\Phi(x) h$ представляет собою произведение $\Phi(x) \in E_{xy}$ на $h \in E_x$ (см. п. 2.1), обладающее свойствами 1°—4°.

Теорема 6.1 (М. К. Гавурин[1])). *Пусть $\Phi(x)$ — непрерывный оператор, определенный на открытом односвязном множестве ω пространства E_x и имеющий значения в E_{xy}. Для того чтобы интеграл*

$$\int \Phi(x)\, dx \tag{6.1}$$

не зависел от пути интегрирования в ω, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\Phi(x)$ был производной некоторого оператора $\mathbf{F}(x)$, заданного в ω и действующего из E_x в E_y, т. е. чтобы $\Phi(x) = \mathbf{F}'(x)$.

---

1) См. [13, г], стр. 99.

Доказательство необходимости. Пусть интеграл (6.1) не зависит от пути. Рассмотрим тогда оператор

$$\mathbf{F}(x)=\int_{x_0}^{x}\Phi(x)\,dx, \tag{6.2}$$

который при фиксированном $x_0 \in \omega$ зависит от $x \in \omega$. Этот оператор имеет значения в E_y. Найдем дифференциал Гато оператора $\mathbf{F}(x)$. С этой целью напомним, что криволинейный интеграл (6.2) можно записать так:

$$\mathbf{F}(x)=\int_{t_0}^{t}\Phi[x(\tau)]\,dx(\tau),$$

где $x(\tau)\in\omega$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$. Отсюда следует

$$\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{F}(x+h\,\Delta t)-\mathbf{F}(x)]=\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t}\Phi[x(\tau)]\,dx(\tau),$$

где $|\Delta t|<\alpha$, h — фиксированный вектор и α выбрано так, что $x+h\Delta t \in \omega$. Так как интеграл не зависит от пути интегрирования, то в последнем равенстве положим $x(\tau)=$ $=x(t)+(\tau-t)h$.

Далее напишем тождество

$$\Phi[x(t)]\,h=\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t}\Phi[x(t)]\,dx(\tau);\quad x(\tau)=x(t)+(\tau-t)\,h.$$

Из последних двух равенств имеем

$$\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{F}(x+h\,\Delta t)-\mathbf{F}(x)]-\Phi(x)h=$$
$$=\frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t}\{\Phi[x(\tau)]-\Phi[x(t)]\}\,dx(\tau).$$

Применяя теперь неравенство (2.2), получим

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}[\mathbf{F}(x+h\,\Delta t)-\mathbf{F}(x)]-\Phi(x)\,h\right\|\leqslant\frac{1}{|\Delta t|}\max_{\tau\in\sigma}\|\Phi[x(\tau)]-$$
$$-\Phi[x(t)]\|\overset{t+\Delta t}{\underset{t}{V}}x(\tau)=\frac{1}{|\Delta t|}\max_{\tau\in\sigma}\|\Phi[x(\tau)]-\Phi[x(t)]\|\,|\Delta t|\,\|h\|,$$
$$\sigma=[t,\ t+\Delta t].$$

Так как абстрактная функция $\Phi[x(\tau)]$ непрерывна на $[t, t+\Delta t]$, то

$$\lim_{\Delta t \to 0} \|\Phi[x(\tau)] - \Phi[x(t)]\| = 0.$$

Отсюда и из предыдушего находим, что оператор $\mathbf{F}(x)$ имеет линейный дифференциал Гато $\mathbf{DF}(x, h) = \Phi(x)h$, так что $\mathbf{F}(x)$ имеет производную Гато:

$$\mathbf{F}'(x) = \Phi(x).$$

Так как $\Phi(x)$ — непрерывный оператор, то согласно теореме 3.3 производная Гато $\mathbf{F}'(x)$ есть производная Фреше.

Доказательство достаточности. Пусть $\Phi(x) = \mathbf{F}'(x)$, где $\mathbf{F}(x)$ — оператор, действующий из $\omega \subset E_x$ в E_y. Рассмотрим криволинейный интеграл вдоль произвольного отрезка $L \subset \omega$ (соединяющего точку x_1 с точкой x_2):

$$\int_L \Phi(x)\,dx = \int_0^1 \Phi(x_1 + \tau(x_2 - x_1))\,d(x_1 + \tau(x_2 - x_1))$$

или (сравните с формулой (2.6))

$$\int_L \Phi(x)\,dx = \int_0^1 \Phi(x_1 + \tau(x_2 - x_1))\,(x_2 - x_1)\,d\tau =$$

$$= \int_0^1 \mathbf{F}'(x_1 + \tau(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)\,d\tau = \int_0^1 \frac{d}{d\tau}\mathbf{F}(x_1 + \tau(x_2 - x_1))\,d\tau.$$

Отсюда согласно теореме 2.7 имеем

$$\int_L \Phi(x)\,dx = \mathbf{F}(x_2) - \mathbf{F}(x_1).$$

Это равенство в силу следствия 2.1 доказывает теорему.

6.2. Условия потенциальности операторов. Непосредственным следствием теоремы Гавурина служит следующее предложение.

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия:*

1°. *Оператор* $\mathbf{F}(x)$ *действует из пространства* E_x *в сопряженное пространство* E_x^*.

2°. $\mathbf{F}(x)$ *непрерывен в открытой односвязной области* $\omega \subset E_x$.

Тогда, для того чтобы оператор $\mathbf{F}(x)$ *был потенциальным в области* ω, *необходимо и достаточно, чтобы для любой дуги* L, *лежащей в* ω, *криволинейный интеграл*

$$\int\limits_L (\mathbf{F}(x), dx) \tag{6.3}$$

не зависел от пути.

Действительно, в данном случае E_{xy} есть пространство всех линейных функционалов, заданных в E_x, т. е. пространство, сопряженное к E_x ($E_{xy} = E_x^*$), так что интегралы (6.1) и (6.2) суть интегралы от скалярных функций (функционалов). Ввиду этого интеграл (6.1) сводится к интегралу (6.3).

Замечание 6.1. Из доказательства теоремы Гавурина вытекает, что первообразная оператора $\mathbf{\Phi}(x)$ определяется формулой (6.2) с точностью до постоянного слагаемого, так что общий вид первообразной будет:

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \mathbf{\Phi}(x)\, dx, \tag{6.4}$$

где $\mathbf{F}_0$ — произвольный элемент пространства E_y. Так как интеграл (6.4) не зависит от пути, то если ω — выпуклая область, формула (6.4) может быть записана так:

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}_0 + \int\limits_0^1 \mathbf{\Phi}(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)\, dt. \tag{6.5}$$

Отсюда мы получаем следующую формулу для восстановления функционала $f(x)$ по его градиенту $\mathbf{F}(x)$, т. е. для потенциала $f(x)$ оператора $\mathbf{F}(x)$:

$$f(x) = f_0 + \int\limits_0^1 (\mathbf{F}(x_0 + t(x - x_0)),\ x - x_0)\, dt, \tag{6.6}$$

где $(\mathbf{F}(x), h)$ представляет собой значения линейного функционала $(\mathbf{F}(x)\, h)$, в точке $h \in E_x$.

6.3. Пример потенциального оператора. Пусть $g(u, x)$ есть вещественная функция, непрерывная по u ($-\infty < u < +\infty$) и измеримая по x в B при всяком фиксированном u, где B — измеримое множество конечной или бесконечной меры n-мерного евклидова пространства. Если вместо u мы подставим измеримую в B функцию $u(x)$, то получим оператор

$$\mathrm{h}u = g(u(x),\ x),$$

который преобразует всякую измеримую функцию $u(x)$ в измеримую функцию $g(u(x),\ x)$ (см. теорему 18.3). Этот оператор мы называем[1]) *оператором В. В. Немыцкого*. Для того чтобы h был непрерывным оператором с областью определения $L^p(B)$ и областью значения в $L^q(B)$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$, необходимо и достаточно, чтобы (см. теорему 19.1)

$$|g(u,\ x)| \leqslant a(x) + b\,|u|^r, \tag{6.7}$$

где $a(x) \in L^q$, $b > 0$, $r = pq^{-1} = p - 1$. Пусть выполнено неравенство (6.7), т. е. пусть оператор Немыцкого h действует из L^p в L^q. Покажем, что он является потенциальным. С этой целью рассмотрим вдоль отрезка $u(x) + tv(x)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, где $u(x)$, $v(x)$ — две произвольные функции из L^p, криволинейный интеграл

$$I = \int_0^1 (\mathrm{h}(u+tv),\ d(u+tv)) =$$

$$= \int_0^1 (g(u(x)+tv(x),\ x),\ d(u(x)+tv(x))) =$$

$$= \int_0^1 dt \int_B g(u(x)+tv(x),\ x)\, v(x)\, dx.$$

Изменяя порядок интегрирования (что возможно в силу теоремы Фубини), получим

$$I = \int_B dx \int_0^1 g(u(x)+tv(x),\ x)\, v(x)\, dt.$$

Полагая $u(x) + tv(x) = z$, получим

$$I = \int_B dx \int_{u(x)}^{u(x)+v(x)} g(z,\ x)\, dz = \Phi(u(x)+v(x)) - \Phi(u(x)).$$

Из этого равенства согласно следствию 2.1 вытекает, что

---

1) См. § 19.

рассматриваемый криволинейный интеграл не зависит от пути, так что по теореме 6.2 оператор $\mathbf{h}$ является потенциальным. Далее, по формуле (6.6) мы находим потенциал оператора $\mathbf{h}$, т. е. тот функционал $f(u)$, градиентом которого служит оператор $\mathbf{h}$:

$$f(u)=f_0+\int_0^1 dt\int_B g(0+tu(x),\ x)\,u(x)dx=$$
$$=f_0+\int_B dx\int_0^{u(x)} g(v,\ x)\,dv. \qquad (6.8)$$

§ 7. О компактности и усиленной непрерывности потенциальных операторов

7.1. О биортогональном базисе.

Определение 7.1. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ x_n\in E,\ \ y_n\in E^*$, где E^* — пространство, сопряженное к E) образуют *биортогональный счетный базис*, если

$$y_i(x_j)=(y_i,\ x_j)=\begin{cases}0, & i\neq j;\\ 1, & i=j;\end{cases}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

причем, каковы бы ни были элементы $x\in E$ и $y\in E^*$, имеют место разложения

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx_k,\quad y=\sum_{k=1}^{\infty}b_ky_k,$$

где при $n\to\infty$

$$\Big\|x-\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\Big\|\to 0,\quad \Big\|y-\sum_{k=1}^{n}b_ky_k\Big\|\to 0$$

(каждая норма берется в соответствующем пространстве).

Из этого определения вытекает, что

$$a_k=(y_k,\ x)=y_k(x);\quad b_k=(y,\ x_k)=y(x_k)$$

где $y_k(x)$ и $y(x_k)$ суть значения линейного функционала $y(x)$ при фиксированных $x,\ y,\ x_k,\ y_k$.

При наличии счетного биортогонального базиса мы можем каждое из пространств E и E^* представить в виде прямой суммы конечномерного и бесконечномерного пространств. Именно, так как

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(y_k, x)x_k; \quad y=\sum_{k=1}^{\infty}(y, x_k)y_k,$$

то, полагая

$$\mathrm{P}^{(n)}x=\sum_{k=1}^{n}(y_k, x)x_k; \quad \mathrm{P}_n x=\sum_{k=n+1}^{\infty}(y_k, x)x_k,$$

$$\tilde{\mathrm{P}}^{(n)}y=\sum_{k=1}^{n}(y, x_k)y_k; \quad \tilde{\mathrm{P}}_n y=\sum_{k=n+1}^{\infty}(y, x_k)y_k,$$

мы получим

$$x=\mathrm{P}^{(n)}x+\mathrm{P}_n x; \quad y=\tilde{\mathrm{P}}^{(n)}y+\tilde{\mathrm{P}}_n y,$$

где $\mathrm{P}^{(n)}$ есть оператор, который проектирует элемент x в n-мерное подпространство $E^{(n)}$ пространства E, а P_n есть оператор, который проектирует элемент x в бесконечномерное подпространство E_n пространства E (операторы $\tilde{\mathrm{P}}^{(n)}$ и $\tilde{\mathrm{P}}_n$ имеют аналогичный смысл в пространстве E^*). Каждый элемент $x\in E$ представляется единственным образом в виде суммы элементов $\mathrm{P}^{(n)}x\in E^{(n)}$ и $\mathrm{P}_n x\in E_n$, т. е. E разлагается на прямую сумму пространств $E^{(n)}$ и E_n:

$$E=E^{(n)}\dot{+}E_n.$$

То же самое имеет место для любого элемента $y\in E^*$, т. е. $\tilde{\mathrm{P}}^{(n)}y\in E^{*(n)}$, $\tilde{\mathrm{P}}_n y\in E_n^*$ и $E^*=E^{*(n)}\dot{+}E_n^*$.

Отметим еще, что

$$(\tilde{\mathrm{P}}^{(n)}y, \mathrm{P}_n(x))=(\tilde{\mathrm{P}}_n y, \mathrm{P}^{(n)}x)=0. \tag{7.1}$$

Действительно, например,

$$(\tilde{\mathrm{P}}^{(n)}y, \mathrm{P}_n x)=\Big(\sum_{k=1}^{n}(y, x_k)y_k, \sum_{i=n+1}^{\infty}(y_i, x)x_i\Big)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(y, x_k)\Big[\sum_{i=n+1}^{\infty}(y_i, x)(y_k, x_i)\Big]=0,$$

так как $(y_k, x_i)=0$ в силу того, что $i>k$. Итак,

$$\big(E^{(n)}, E_n^*\big)=\big(E_n, E^{*(n)}\big)=0.$$

В настоящем параграфе мы будем рассматривать регулярные банаховы пространства со счетным биортогональным базисом. Так как эти пространства регулярны и сепарабельны, то согласно теореме 1.8 они слабо полны. Более того, согласно теореме Банаха 1.6 единичная сфера в этих пространствах слабо компактна.

7.2. Условия усиленной непрерывности операторов.

Теорема 7.1. *Для того чтобы непрерывный оператор* $\mathbf{F}$, *заданный в регулярном банаховом пространстве со счетным биортогональным базисом, был усиленно непрерывным в шаре* $D_r(\|x\| \leqslant r)$, *необходимо и достаточно, чтобы каждому* $\varepsilon > 0$ *отвечало такое натуральное число* $n_0(\varepsilon)$, *что для всякого* $n \geqslant n_0$ *и произвольного* $x \in D_r$ *имело место неравенство*[1])

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{P}^{(n)}x) - \mathbf{F}(x)\| < \varepsilon. \tag{7.2}$$

Доказательство необходимости. Сначала докажем, что если последовательность $\{x^{(m)}\}$ слабо сходится к x_0, то последовательность $\{P^{(m)}x^{(m)}\}$ также слабо сходится к x_0.

Действительно, пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — биортогональный базис, а $x \in D_r$ — произвольный элемент. Рассмотрим последовательность $(y_k, x) = y_k(x)$, для которой при $n \geqslant k$

$$(y_k, x) = (y_k, \mathbf{P}^{(n)}x + \mathbf{P}_n x) = (y_k, \mathbf{P}^{(n)}x) + (y_k, \mathbf{P}_n x) =$$
$$= (y_k, \mathbf{P}^{(n)}x) + \Big(y_k, \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x_i\Big) = (y_k, \mathbf{P}^{(n)}x) + 0.$$

Отсюда при $m \geqslant k$ будет

$$(y_k, x^{(m)}) = (y_k, \mathbf{P}^{(m)}x^{(m)}),$$

а так как в силу слабой сходимости $\{x^{(m)}\}$ к x_0

$$\lim_{m \to \infty} (y_k, x^{(m)}) = (y_k, x_0),$$

то

$$\lim_{m \to \infty} (y_k, \mathbf{P}^{(m)}x^{(m)}) = (y_k, x_0).$$

---

[1]) Необходимость этого условия была установлена Э. С. Цитланадзе ([72], стр. 6, см. также [63, а], теорема 3.1). В таком виде теорема была установлена автором ([9, о], теорема 1.2).

Линейные комбинации элементов y_k образуют в E^* всюду плотное множество Δ, поэтому для произвольного линейного функционала $y \in \Delta$ имеем

$$\lim_{m \to \infty} (y, \mathbf{P}^{(m)} x^{(m)}) = (y, x_0). \tag{7.3}$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \| \mathbf{P}^{(n)} x - x \| = 0$ для произвольного $x \in E$, то

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathbf{P}^{(n)} x \| < +\infty.$$

Из последнего неравенства, которое имеет место для всякого $x \in E$, следует (см. [5], гл. V, § 1, теорема 5), что нормы $\| \mathbf{P}^{(m)} \|$ ограничены. Далее, в силу слабой сходимости $\{x^{(m)}\}$ к x_0 нормы $\| x^{(m)} \|$ также ограничены, откуда

$$\| \mathbf{P}^m x^{(m)} \| \leqslant \| \mathbf{P}^{(m)} \| \, \| x^{(m)} \| \leqslant \text{const}. \tag{7.4}$$

Условия (7.3) и (7.4), как известно (см. [5], гл. IX, § 1, теорема 1), достаточны для слабой сходимости $\{\mathbf{P}^{(m)} x^{(m)}\}$ к x_0.

Допустим теперь, что (7.2) не имеет места; тогда найдется последовательность $\{x^{(m_k)}\}$, для которой

$$\left\| \mathbf{F}\left(\mathbf{P}^{(m_k)} x^{(m_k)}\right) - \mathbf{F}\left(x^{(m_k)}\right) \right\| \geqslant \varepsilon.$$

Так как шар D_r слабо компактен, ибо E — регулярное пространство (см. теорему 1.6), то найдется подпоследовательность $\{x^{(n_k)}\}$, которая слабо сходится к $x_0 \in D_r$ и для которой при $k = 1, 2, 3 \ldots$

$$\left\| \mathbf{F}\left(\mathbf{P}^{(n_k)} x^{(n_k)}\right) - \mathbf{F}\left(x^{(n_k)}\right) \right\| \geqslant \varepsilon. \tag{7.5}$$

Но по доказанному из слабой сходимости $\{x^{(n_k)}\}$ к x_0 также вытекает слабая сходимость $\{\mathbf{P}^{(n_k)} x^{(n_k)}\}$ к x_0, что вследствие усиленной непрерывности $\mathbf{F}(x)$ противоречит неравенствам (7.5). Полученное противоречие доказывает необходимость условия (7.2).

Доказательство достаточности. Пусть $\{x^{(m)}\}$ есть последовательность из D_r, которая слабо сходится к $x_0 \in D_r$. Из условия (7.2) вытекает, что заданному $\varepsilon > 0$ отвечает такое n, что для всякого $x \in D_r$

$$\| \mathbf{F}(\mathbf{P}^{(n)} x) - \mathbf{F}(x) \| < \frac{1}{4} \varepsilon.$$

Отсюда

$$\|F(x^{(m)})-F(x_0)\|\leqslant\|F(x^{(m)})-F(P^{(n)}x^{(m)})\|+$$
$$+\|F(P^{(n)}x^{(m)})-F(P^{(n)}x_0)\|+$$
$$+\|F(P^{(n)}x_0)-F(x_0)\|<\frac{\varepsilon}{2}+\|F(P^{(n)}x^{(m)})-F(P^{(n)}x_0)\|. \quad (7.6)$$

Покажем, что последовательность $\{P^{(n)}x^{(m)}\}$ слабо сходится к $P^{(n)}x_0$. Действительно, пусть y есть произвольный линейный функционал, заданный в $E(y\in E^*)$. Для него имеем

$$y=\sum_{k-1}^{\infty} b_k y_k=\sum_{k=1}^{\infty}(y,\ x_k)\,y_k.$$

Так как последовательность $\{x^{(m)}\}$ слабо сходится к x_0, то

$$\lim_{m\to\infty}(y,\ x^{(m)})=(y,\ x_0).$$

В частности, для $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$$\lim_{m\to\infty}(y_k,\ x^{(m)})=(y_k,\ x_0).$$

Но так как при $k\neq i$ $(y_k,\ x_i)=0$ и $(y_k,\ x_k)=1$, то

$$(y,\ P^{(n)}x^{(m)})=\Bigl(\sum_{k=1}^{n}(y,\ x_k)\,y_k+\sum_{k=n+1}^{\infty}(y,\ x_k)\,y_k,\ \sum_{k=1}^{n}(y_k,\ x^{(m)})\,x_k\Bigr)=$$
$$=\Bigl(\sum_{k=1}^{n}(y,\ x_k)\,y_k,\ \sum_{k=1}^{n}(y_k,\ x^{(m)})\,x_k\Bigr)=\sum_{k=1}^{n}(y,\ x_k)(y_k,\ x^{(m)}).$$

Отсюда в силу предыдущего

$$\lim_{m\to\infty}(y,\ P^{(n)}x^{(m)})=\sum_{k=1}^{n}(y,\ x_k)(y_k,\ x_0)=(y,\ P^{n}x_0), \quad (7.7)$$

т. е. последовательность $\{P^{(n)}x^{(m)}\}$ слабо сходится к элементу $P^{(n)}x_0$. Но так как $P^{(n)}x_0$, $P^{(n)}x^{(m)}\in E^{(n)}$, а в конечномерном пространстве $E^{(n)}$ слабая сходимость совпадает с сильной (см. [47], стр. 202), то

$$\lim_{m\to\infty}\|P^{(n)}x^{(m)}-P^{(n)}x_0\|=0.$$

А так как $\mathbf{F}(x)$ непрерывен в E, заданному $\varepsilon > 0$ отвечает такое m_0, что для $m \geqslant m_0$

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{P}^n x^{(m)}) - \mathbf{F}(\mathbf{P}^n x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.8}$$

Из (7.6) и (7.8) получаем, что для $m \geqslant m_0$

$$\|\mathbf{F}(x^{(m)}) - \mathbf{F}(x_0)\| < \varepsilon.$$

Это неравенство в силу произвольности $\varepsilon > 0$ доказывает усиленную непрерывность оператора $\mathbf{F}(x)$. Теорема доказана.

Отметим, что данная теорема сохраняется для функционалов (когда область значений оператора $\mathbf{F}(x)$ принадлежит числовой оси).

7.3. О компактности потенциальных операторов в регулярных пространствах со счетным биортогональным базисом. Основные предложения настоящего пункта были доказаны Э. С. Цитланадзе [72, и] в предположении, что остаток $\omega(x, h)$ дифференциала $df(x, h)$ удовлетворяет условию $|\omega(x, h)| \leqslant c\|h\|^2$. Путем незначительных изменений доказательств Э. С. Цитланадзе мы показываем, что его предложения сохраняются, если требовать равномерности дифференциала $df(x, h)$. Так же как в § 4, мы будем обозначать через D_r шар $\|x\| < r$ рассматриваемого регулярного банахова пространства E.

Теорема 7.2[1]). *Пусть выполнены условия*:

1°. *Функционал* $f(x)$ *непрерывен в* E *и слабо непрерывен в* $D_{\alpha+r}$ *при некотором* $\alpha > 0$.

2°. $df(x, h)$ *является равномерным в шаре* D_r.

Тогда $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$ *компактен в шаре* D_r.

Доказательство. Так как из слабой непрерывности $f(x)$ следует равномерная непрерывность $f(x)$ (см. следствие теоремы 1.4), то из условий 1° и 2° согласно замечанию 4.1 следует равномерная непрерывность, а значит (см. пункт 1.6), и ограниченность оператора $\mathbf{F}(x)$ в шаре D_r.

Далее, для произвольных $x \in D_r$ и $x_0 \in E$ напишем

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathbf{P}^{(n)}x + \mathbf{P}_n x, \\ (\mathbf{P}^{(n)}\mathbf{F}(x),\ \mathbf{P}_n x_0) &= (\mathbf{P}_n\mathbf{F}(x),\ \mathbf{P}^{(n)}x_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

1) См. [72, и], стр. 8, лемма 3.

Пусть h есть произвольный элемент из E_n с единичной нормой; для него имеем

$$f(x+th)-f(x)=t(\mathbf{F}(x),\ h)+\omega(x,\ th),$$

где t — произвольное действительное число. Так как $h\in E_n$, то в силу (7.9) мы отсюда получаем

$$f(x+th)-f(x)=t(\mathbf{P}_n\mathbf{F}(x),\ h)+\omega(x,\ th). \quad (7.10)$$

Но, как известно (см. [47], стр. 162, следствие 1), элементу $\mathbf{P}_n\mathbf{F}(x)\in \overset{*}{E}_n$ отвечает элемент $h=h_0\in E_n$, $\|h_0\|=1$, такой, что значение функционала $(\mathbf{P}_n\mathbf{F}(x),\ h)$ при $h=h_0$ будет

$$|(\mathbf{P}_n\mathbf{F}(x),\ h_0)|=\|\mathbf{P}_n\mathbf{F}(x)\|.$$

Отсюда и из (7.10) имеем

$$t\|\mathbf{P}_n\mathbf{F}(x)\|=|f(x+th_0)-f(x)-\omega(x,\ th_0)|. \quad (7.11)$$

Далее, в силу линейности оператора $\mathbf{P}^{(n)}$ имеем $\mathbf{P}^{(n)}(x+th_0)=$ $=\mathbf{P}^{(n)}x+t\mathbf{P}^{(n)}h_0=\mathbf{P}^{(n)}x$, ибо $h_0\in E_n$, а потому $\mathbf{P}^{(n)}h_0=\theta$. Отсюда и из (7.11) имеем

$$t\|\mathbf{P}_n\mathbf{F}(x)\|\leqslant|f(x+th_0)-f(\mathbf{P}^{(n)}(x+th_0))|+$$
$$+|f(x)-f(\mathbf{P}^{(n)}(x)|+|\omega(x,\ th_0)|.$$

Но в силу равномерной дифференцируемости $f(x)$ положительное число t можно подобрать столь малым, чтобы $|\omega(x,\ th_0)|<\frac{1}{3}\varepsilon t\|h_0\|=\frac{1}{3}\varepsilon t$. Далее, согласно теореме 7.1 найдется такое $n_0(\varepsilon)$, что для всякого $n\geqslant n_0$ и $t\in(0,\ \alpha)$ будет

$$|f(x+th_0)-f(\mathbf{P}^{(n)}(x+th_0)|<\frac{1}{3}\varepsilon t,\quad |f(x)-f(\mathbf{P}^{(n)}x)|<\frac{1}{3}\varepsilon t.$$

Из последних неравенств после сокращения на t мы находим

$$\|\mathbf{P}_n\mathbf{F}(x)\|<\varepsilon.$$

Отсюда и из ограниченности в шаре D_r оператора $\mathbf{F}(x)$ согласно известной теореме о компактности (см. [47], стр. 225) следует компактность в шаре D_r оператора $\mathbf{F}(x)$. Теорема доказана [1]).

---

[1]) Данная теорема и некоторые другие предложения настоящего параграфа сохраняются при замене шара D_r замкнутым шаром.

Теорема 7.3. *Пусть выполнены условия:*

1°. *Функционал* $f(x)$ *непрерывен в* E *и слабо непрерывен в шаре* $D_{\alpha+r}$ *при некотором* $\alpha > 0$.

2°. *Оператор* $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$ *равномерно непрерывен в шаре* $D_{\alpha+r}$.

Тогда $\mathbf{F}(x)$ *есть компактный оператор в шаре* D_r.

Доказательство. Из непрерывности $\operatorname{grad} f(x)$ в шаре $D_{\alpha+r}$ согласно теореме 3.3 следует

$$df(x, h) = (\mathbf{F}(x), h).$$

Пусть теперь $x_1, x_2 \in D_r$, тогда

$$f(x_2) - f(x_1) = (\mathbf{F}(x_1), x_2 - x_1) + \omega(x_1, x_2 - x_1).$$

Далее, согласно равенству (3.3) будет

$$f(x_2) - f(x_1) = (\mathbf{F}(x_1 + \tau(x_2 - x_1)), x_2 - x_1).$$

Отсюда и из предыдущего равенства имеем

$$\omega(x_1, x_2 - x_1) = (\mathbf{F}(x_1 + \tau(x_2 - x_1)) - \mathbf{F}(x_1), x_2 - x_1),$$

а следовательно,

$$\frac{|\omega(x_1, x_2 - x_1)|}{\|x_2 - x_1\|} \leqslant \|\mathbf{F}(x_1 + \tau(x_2 - x_1)) - \mathbf{F}(x_1)\|.$$

Данное неравенство в силу равномерной непрерывности оператора $\mathbf{F}(x)$ показывает равномерную дифференцируемость в шаре D_r функционала $f(x)$. Отсюда и из условия 1° согласно теореме 7.2 следует справедливость теоремы.

7.4. Об усиленной непрерывности градиента, заданного в пространстве со слабо компактной сферой.

Теорема 7.4[1]). *Для того чтобы в шаре* D_r *пространства* E, *в котором сфера* $\|x\| = r$ *слабо компактна, оператор* $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$ *был усиленно непрерывным, необходимо, чтобы* $\mathbf{F}(x)$ *был вполне компактным в* D_r, *и достаточно, чтобы* $\mathbf{F}(x)$ *был вполне компактным в* $D_{\alpha+r}$ (*при некотором* $\alpha > 0$).

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 1.4. Докажем достаточность. Так как по условию $\mathbf{F}(x)$ является равномерно непрерывным в шаре $D_{\alpha+r}$, то, поступая так же, как при доказательстве теоремы 7.3, найдем, что функционал $f(x)$ равномерно дифференцируем в D_r. Далее, так как по условию $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$ компактен в $D_{\alpha+r}$,

---

[1]) Ср. [9, ж], теорема 3 и [9, о], теорема 4.3.

то, как будет показано (см. теорему 8.2), функционал $f(x)$ слабо непрерывен в $D_{\alpha+r}$. Рассмотрим теперь произвольную последовательность $\{x_n\}$ из D_r, слабо сходящуюся к $x_0 \in D_r$. Пусть, далее, h есть произвольный элемент с единичной нормой. Выберем $\gamma > 0$ так, чтобы для $t \in (0, \gamma)$ и произвольного $n = 0, 1, 2, \ldots$ было $x_n + th \in D_{\alpha+r}$. В силу слабой непрерывности $f(x)$ в $D_{\alpha+r}$ мы будем иметь[1])

$$\lim_{n\to\infty} [f(x_n+th) - f(x_n)] = f(x_0+th) - f(x_0)$$

или

$$\lim_{n\to\infty} [(\mathbf{F}(x_n), th) + \omega(x_n, th)] = (\mathbf{F}(x_0), th) + \omega(x_0, th),$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \left[(\mathbf{F}(x_n), h) + \frac{1}{t}\omega(x_n, th)\right] = (\mathbf{F}(x_0), h) + \frac{1}{t}\omega(x_0, th).$$

Отсюда вытекает, что произвольному $\varepsilon > 0$ отвечает такое $n_0(\varepsilon, h)$, что для всякого $n \geqslant n_0$ будет

$$\left|(\mathbf{F}(x_n), h) - (\mathbf{F}(x_0), h) + \frac{1}{t}\omega(x_n, th) - \frac{1}{t}\omega(x_0, th)\right| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

или при достаточно малом $t > 0$, для которого

$$\frac{1}{t}|\omega(x_n, th)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{1}{t}|\omega(x_0, th)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

будет

$$|(\mathbf{F}(x_n) - \mathbf{F}(x_0), h)| < \varepsilon.$$

Итак, для произвольного $h \in E$ ($\|h\| = 1$) имеем

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{F}(x_n), h) = (\mathbf{F}(x_0), h),$$

т. е. последовательность элементов $\{\mathbf{F}(x_n)\}$ слабо сходится к элементу $\mathbf{F}(x_0)$. Но так как последовательность $\{\mathbf{F}(x_n)\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, принадлежит компактному множеству $\mathbf{F}(D_r)$, а для элементов компактных множеств слабая сходимость совпадает с сильной сходимостью (см. лемму 4.1), то $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{F}(x_n) - \mathbf{F}(x_0)\| = 0$. Теорема доказана.

Теорема 7.5. *Для того чтобы* $\operatorname{grad} f(x)$, *компактный в шаре* $D_{\alpha+r}$ *пространства* E, *в котором сфера* $\|x\| = r$ *слабо компактна, был усиленно непрерывным в шаре* D_r,

---

1) Ср. [72, и], стр. 8.

необходимо и достаточно, чтобы $df(x, h)$ *был равномерным в шаре* D_r.

Доказательство необходимости. Из усиленной непрерывности в D_r оператора $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$, согласно теореме 1.4 следует равномерная непрерывность $\mathbf{F}(x)$ в D_r. Используя равномерную непрерывность $\mathbf{F}(x)$ и поступая так же, как при доказательстве теоремы 7.3, мы найдем, что функционал $f(x)$ равномерно дифференцируем в D_r.

Доказательство достаточности. Из компактности в $D_{\alpha+r}$ $\operatorname{grad} f(x)$ следует слабая непрерывность в $D_{\alpha+r}$ функционала $f(x)$ (см. теорему 8.2). Исходя теперь из слабой непрерывности $f(x)$, равномерности $df(x, h)$ и поступая так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, мы найдем, что $\operatorname{grad} f(x)$ усиленно непрерывен в D_r.

7.5. Об усиленной непрерывности потенциальных операторов, заданных в регулярном пространстве со счетным биортогональным базисом.

Теорема 7.6. *Для того чтобы оператор* $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$, *где функционал* $f(x)$ *слабо непрерывен в шаре* $D_{\alpha+r}$, *был усиленно непрерывным в шаре* $D_r (\|x\| \leqslant r)$, *необходимо и достаточно*[1]), *чтобы* $df(x, h)$ *был равномерным в шаре* D_r.

Доказательство необходимости. Так как шар D_r слабо компактен, то согласно теореме 1.4 из усиленной непрерывности $\mathbf{F}(x)$ в D_r вытекает равномерная непрерывность $\mathbf{F}(x)$ в D_r. Отсюда так же, как при доказательстве теоремы 7.3, найдем, что $f(x)$ равномерно дифференцируем в шаре D_r.

Доказательство достаточности на основании теоремы 7.2 проводится так же, как в теореме 7.5.

Теорема 7.7. *Для того чтобы* $\operatorname{grad} f(x)$ ($f(x)$ *слабо непрерывен в* $D_{\alpha+r}$) *был усиленно непрерывным в шаре* D_r, *необходимо и достаточно, чтобы он был равномерно непрерывным в* D_r.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.4, а достаточность доказывается так же, как в предыдущей теореме и в теореме 7.3.

---

[1]) Достаточность этого условия, когда $|\omega(x, h)| \leqslant c\|h\|^2$, была доказана Э. С. Цитланадзе (см. [72, и], теорема 2).

ГЛАВА III

ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИОНАЛОВ И ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 8. О слабой полунепрерывности и непрерывности функционалов

8.1. Достаточные условия слабой полунепрерывности.

Определение 8.1. Функционал $f(x)$ называется *слабо полунепрерывным снизу (сверху) в точке* x_0, если, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к x_0, имеет место неравенство

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} f(x_n) \quad \left(\varlimsup_{n \to \infty} f(x_n) \leqslant f(x_0)\right).$$

Приведем два примера слабо полунепрерывных функционалов.

Пример 8.1. Пусть $\mathbf{A}$ — положительный самосопряженный оператор, заданный во всем вещественном гильбертовом пространстве H. В этом случае (см. пример 5.1) $\mathbf{A}$ есть градиент квадратичного функционала

$$f(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}x,\ x) + C = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x\right) + C\ (C = \text{const.}), \quad (8.1)$$

где $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — положительный квадратный корень из оператора $\mathbf{A}$. Полагая $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x = y$, мы получим, что $f(x) = \frac{1}{2}(y,\ y) + C$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, слабо сходящуюся к x_0. Так как самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ задан во всем пространстве, то он ограничен ([3], стр. 75). Из ограниченности $\mathbf{A}$ следует ограниченность $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, а потому (см. [47], стр. 203, теорема 3) последовательность $y_n = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x_n$ сходится слабо к $y_0 = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x_0$. Из слабой сходимости $\{y_n\}$ к y_0 следует ([47], стр. 204), что

$$(y_0, y_0) \leqslant \varlimsup_{n \to \infty} (y_n, y_n). \tag{8.2}$$

Следствием данного неравенства служит неравенство

$$(y_0, y_0) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} (y_n, y_n), \tag{8.3}$$

ибо если из последовательности $\{y_n\}$ мы выделим подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$, такую, что

$$\lim_{k \to \infty} (y_{n_k}, y_{n_k}) = \varliminf_{n \to \infty} (y_n, y_n),$$

то подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ будет также сходиться слабо к y_0, так что для нее будет выполнено неравенство (8.2), т. е.

$$(y_0, y_0) \leqslant \varlimsup_{k \to \infty} (y_{n_k}, y_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} (y_{n_k}, y_{n_k}) = \varliminf_{n \to \infty} (y_n, y_n).$$

Из неравенств (8.1) и (8.3) следует

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{n \to \infty} f(x_n).$$

Таким образом, функционал $f(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}x, x)$ слабо полунепрерывен снизу.

Пример 8.2. Пусть во всем вещественном гильбертовом пространстве H задан самосопряженный оператор $\mathbf{T}$, у которого положительная часть спектра произвольна, а отрицательная часть спектра состоит из конечного числа собственных значений, имеющих конечную кратность. В этом случае оператор $\mathbf{T}$ (см. пример 5.1) есть градиент квадратичного функционала

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{T}x, x) + C \quad (C = \text{const.}). \tag{8.4}$$

Напишем, что $\mathbf{T} = \mathbf{T}_+ + \mathbf{T}_-$, где $\mathbf{T}_+$ — положительная часть оператора $\mathbf{T}$, а $\mathbf{T}_-$ — отрицательная часть оператора $\mathbf{T}$ (см. [47], стр. 263). Тогда

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{T}_+ x, x) + \frac{1}{2}(\mathbf{T}_- x, x) + C.$$

Но согласно предыдущему примеру $\frac{1}{2}(\mathrm{T}_+x,\ x)$ есть слабо полунепрерывный снизу функционал, ибо T_+ — положительный самосопряженный оператор, а функционал $\frac{1}{2}(\mathrm{T}_-x,\ x)$ слабо непрерывен, так как оператор T_- действует из H в конечномерное подпространство пространства H (в конечномерных пространствах слабая сходимость совпадает с сильной, см. [47], стр. 202, теорема 1). Следовательно, функционал $\varphi(x)$ слабо полунепрерывен снизу, как сумма слабо полунепрерывного снизу и слабо непрерывного функционалов.

Сформулируем теперь достаточные условия слабой полунепрерывности снизу функционалов. Допустим, что в каждой фиксированной точке $x_0 \in D$, где D есть шар $\|x\| \leqslant r$ банахова пространства E, выполняется неравенство

$$f(x)-f(x_0)-Df(x_0,\ x-x_0) \geqslant 0. \tag{8.5}$$

Тогда, какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к элементу x_0, будет иметь место неравенство

$$f(x_n)-f(x_0) \geqslant Df(x_0,\ x_n-x_0). \tag{8.6}$$

Так как $Df(x_0,\ x_n-x_0)$ есть линейный функционал относительно x_n-x_0, то из слабой сходимости x_n к x_0 следует

$$\varliminf_{n\to\infty} Df(x_0,\ x_n-x_0) = \lim_{n\to\infty} Df(x_0,\ x_n-x_0) = 0.$$

Отсюда и из неравенства (8.6) вытекает, что

$$\varliminf_{n\to\infty} f(x_n)-f(x_0) \geqslant 0,$$

т. е. что $f(x)$ слабо полунепрерывен снизу в точке x_0.

Условие (8.5), в частности, выполняется, если функционал $f(x)$ имеет второй линейный дифференциал Гато D^2f, который удовлетворяет следующему условию:

$$D^2f(x,\ h,\ h) \geqslant 0. \tag{8.7}$$

Действительно, применяя формулу Лагранжа (3.3), получим

$$f(x)-f(x_0) = Df(x_0+\tau(x-x_0),\ x-x_0) =$$
$$= Df(x_0,\ x-x_0)+[Df(x_0+\tau(x-x_0),\ x-x_0)-Df(x_0,\ x-x_0)].$$

Применяя вновь к квадратной скобке формулу Лагранжа, получим

$$f(x)-f(x_0)=Df(x_0,\ x-x_0)+\\ +\tau D^2f(x_0+\tau'(x-x_0),\ x-x_0,\ x-x_0),$$

где $0<\tau<1,\ 0<\tau'<1$.

Отсюда и из неравенства (8.7) следует неравенство (8.5). Этим доказано следующее предложение.

Теорема 8.1 [1]). *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Функционал $f(x)$ имеет в шаре $D(\|x\|\leqslant r)$ банахова пространства E первый и второй* (см. п. 5.2) *линейные дифференциалы Гато $Df(x,\ h)$ и $D^2f(x,\ h,\ k)$, где h и k — произвольные элементы пространства E, а $x\in D$.*

2°. *Для $x\in D$ выполняется неравенство*

$$D^2f(x,\ h,\ h)\geqslant 0. \tag{8.7}$$

Тогда $f(x)$ слабо полунепрерывен снизу в D.

8.2. О слабой непрерывности функционалов. В настоящей работе при введении понятия слабой непрерывности функционалов мы пользуемся определением 1.3, т. е. функционал $f(x)$ называется слабо непрерывным в точке x_0, если, какова бы ни была последовательность элементов $\{x_n\}$, слабо сходящаяся к элементу x_0, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$.

В литературе имеется и другое определение слабой непрерывности, связанное с понятиями слабой топологии [2]). Пусть D есть шар $\|x\|\leqslant r$ банахова пространства E. Обозначим через D_r топологическое пространство, состоящее из точек $x\in D$, топология которого вводится следующим определением окрестности: δ-окрестность точки $x_0\in D_r$ определяется положительным числом δ, конечным числом линейных функционалов $l_1(x),\ l_2(x),\ \ldots,\ l_n(x)$ и состоит из всех точек $x\in D$, для которых

$$|l_i(x)-l_i(x_0)|<\delta \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Такая окрестность точки x_0 называется *слабой* в отличие от *сильной* окрестности, вводимой нормой элементов этого пространства. Как только введено понятие окрестности, понятие непрерывности вводится

---

1) Ср. [63, д], теорема 4.2.

2) См. [79] и [63, ж], где указана библиография. Более подробно библиография указана в обзорной статье J. Dieudonnè, Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 6, 495—512.

обычным образом: функционал $f(x)$ называется *слабо непрерывным в точке* $x_0 \in D_r$, если каждому $\varepsilon > 0$ отвечает слабая $\mathfrak{b}$-окрестность $U(x_0)$, такая, что для каждого $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Необходимое и достаточное условие слабой непрерывности функционалов (неравенство (7.2)), вытекающее из теоремы 7.1, оказывается мало обозримым: проверка этого условия в конкретных примерах оказывается затруднительной. В силу этого обстоятельства обычно пользуются достаточными условиями слабой непрерывности, которые хорошо обозримы. Наиболее простое достаточное условие содержится в следующем предложении.

Теорема 8.2. *Из компактности в шаре* $D(\|x\| \leqslant r)$ $\operatorname{grad} f(x)$ *вытекает, что в этом шаре функционал* $f(x)$ *является слабо непрерывным*[1]).

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность из D, слабо сходящаяся к $x_0 \in D$. Допустим, что при $n \to \infty$ $f(x_n) \not\to f(x_0)$. Тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что

$$|f(x_{n_k}) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon. \tag{8.8}$$

Применяя формулу Лагранжа (3.3), запишем

$$f(x_{n_k}) - f(x_0) = (\mathbf{F}(x_0 + t_{n_k}(x_{n_k} - x_0)),\ x_{n_k} - x_0).$$

Так как

$$\|x_0 + t_{n_k}(x_{n_k} - x_0)\| \leqslant (1 - t_{n_k})\|x_0\| + t_{n_k}\|x_{n_k}\| \leqslant r,$$

то в силу компактности в D оператора $\mathbf{F}(x)$ существуют элемент $y_0 \in E^*$ и подпоследовательность $\{m_k\}$ такие, что

$$\lim_{k \to \infty} \|\mathbf{F}(x_0 + t_{m_k}(x_{m_k} - x_0)) - y_0\| = 0.$$

Далее напишем

$$(\mathbf{F}(x_0 + t_{m_k}(x_{m_k} - x_0)),\ x_{m_k} - x_0) =$$
$$= (y_0,\ x_{m_k} - x_0) + (\mathbf{F}(x_0 + t_{m_k}(x_{m_k} - x_0)) - y_0,\ x_{m_k} - x_0).$$

---

[1]) См. [9, ж], теорема 1.

Но при $k \to \infty$ $(y_0, x_{m_k} - x_0) \to 0$, ибо $(x_{m_k} - x_0) \to \theta$, и

$$|(\mathbf{F}(x_0 + t_{m_k}(x_{m_k} - x_0)) - y_0, x_{m_k} - x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbf{F}(x_0 + t_{m_k}(x_{m_k} - x_0)) - y_0\| \cdot 2r \to 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_{m_k}) = f(x_0)$, что противоречит неравенствам (8.8). Полученное противоречие доказывает слабую непрерывность в D функционала $f(x)$. Теорема доказана.

Отметим, что из слабой непрерывности функционала не следует компактности его градиента. Это видно из примера функции $f(t) = t^2 \sin\frac{1}{t^2}$, которая непрерывна на отрезке [0,1], но производная которой является неограниченной на этом отрезке.

8.3. Об одном свойстве слабо непрерывных функционалов.

Теорема 8.3 [1]). *Если функционал $f(x)$ слабо непрерывен на ограниченной выпуклой и замкнутой области σ, принадлежащей гильбертовому* [2]) *пространству H, то, какова бы ни была внутренняя точка $x_0 \in \sigma$, на границе области σ существуют такие точки, в которых значения функционала $f(x)$ сколь угодно близки к значению $f(x_0)$, т. е. замыкание множества значений, принимаемых функционалом на границе σ, содержит множество значений, принимаемых функционалом во внутренних точках области σ.*

Доказательство. Пусть S — единичная сфера $\|x\| = 1$ в H и $\{x_n\} \in S$ — последовательность векторов, слабо сходящаяся к нулю θ пространства H. Рассмотрим луч $x_0 + tx_n$ $(0 \leqslant t)$, конец которого совпадает с точкой x_0, где x_0 — фиксированная внутренняя точка области σ. Пусть t_n есть расстояние вдоль луча $x_0 + tx_n$ от x_0 до границы σ. В силу ограниченности σ последовательность $\{t_n\}$ ограничена, так что последовательность $\{t_n x_n\}$ слабо сходится к θ и последовательность $\{x_0 + t_n x_n\}$ слабо сходится к элементу x_0. Так как $f(x)$ слабо непрерывен на σ, то последовательность $\{f(x_0 + t_n x_n)\}$, где $x_0 + t_n x_n$ принадлежит границе σ, сходится к $f(x_0)$. Следовательно, на границе

1) Ср. [36, к], стр. 313.

2) Гильбертово пространство мы всегда считаем бесконечномерным.

области σ имеются такие точки, в которых значения функционала f сколь угодно близки к $f(x_0)$. Так как x_0 — произвольная фиксированная точка области σ, то этим теорема доказана.

§ 9. Экстремальные точки функционалов

Пусть $f(x)$ — вещественный функционал, заданный в банаховом пространстве E. Точка $x_0 \in E$ называется *экстремальной точкой* функционала $f(x)$, если в некоторой окрестности $U(x_0)$ этой точки выполняется одно из следующих неравенств:

$$1)\ f(x) \leqslant f(x_0),\quad 2)\ f(x) \geqslant f(x_0) \quad \text{для всех } x \in U(x_0).$$

Далее, точка x_0 называется *критической точкой* функционала $f(x)$, если

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \theta \qquad (\|\theta\| = 0).$$

В настоящем параграфе мы сначала докажем хорошо известный факт, что для дифференцируемых функционалов сохраняется предложение обычного анализа о том, что всякая экстремальная точка является и критической точкой функционала, а затем мы рассмотрим некоторые достаточные условия существования экстремальных точек.

9.1. Необходимое условие экстремума функционалов.

Теорема 9.1. *Пусть функционал $f(x)$ задан в области ω банахова пространства E и x_0 — внутренняя точка области ω, в которой существует линейный дифференциал Гато. Тогда, для того чтобы точка x_0 была экстремальной, необходимо, чтобы она была критической, т. е. чтобы*

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \theta.$$

Доказательство. Пусть h — произвольный фиксированный вектор пространства E. Тогда $f(x_0 + th)$ есть вещественная функция, определенная в некоторой окрестности точки $t = 0$ и имеющая производную в точке $t = 0$. Отсюда, если x_0 — экстремальная точка функционала $f(x)$, то $t = 0$ есть экстремальная точка функции $f(x_0 + th)$, а потому

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + th)\big|_{t=0} = 0$$

или

$$Df(x_0, h) = 0,$$

или, наконец,

$$(\operatorname{grad} f(x_0), h) = 0.$$

Так как h — произвольный вектор пространства E, то $\operatorname{grad} f(x_0) = \theta$. Теорема доказана.

9.2. О минимуме функционалов. Пусть E — банахово пространство со слабо компактной сферой, т. е. пространство, в котором всякое бесконечное ограниченное множество слабо компактно. Если в таких пространствах[1]) рассматривать слабо полунепрерывные снизу функционалы, то для последних справедливо следующее предложение.

Теорема 9.2. *Если на ограниченном слабо замкнутом множестве σ банахова пространства E со слабо компактной сферой задан слабо полунепрерывный снизу функционал $f(x)$, то этот функционал ограничен снизу и достигает на σ своей нижней грани.*

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь тот случай, когда множество σ бесконечно. Допустим, что $f(x)$ снизу не ограничен на σ, тогда найдется такая последовательность $\{x_n\} \in \sigma$, что $f(x_n) < -n$. Так как в рассматриваемом пространстве E всякое ограниченное множество слабо компактно, то из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, слабо сходящуюся к x_0, причем в силу слабой замкнутости σ $x_0 \in \sigma$. Отсюда в силу слабой полунепрерывности снизу $f(x)$ мы будем иметь $f(x_0) \leqslant \varliminf_{k\to\infty} f(x_{n_k})$, что невозможно, так как $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = -\infty$. Полученное противоречие доказывает, что $f(x)$ ограничен снизу. Обозначим через d нижнюю грань $f(x)$ на σ, так что для всех $x \in \sigma$ $d \leqslant f(x)$.

Из определения нижней грани следует существование такой последовательности $\{x_n\} \in \sigma$, что $d = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Так как ограниченная последовательность $\{x_n\}$ слабо компактна, а σ слабо замкнуто, то из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, слабо сходящуюся к $x_0 \in \sigma$. Для этой подпоследовательности сохраняется

[1]) См. теорему 1.7.

равенство

$$d = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}).$$

С другой стороны, в силу слабой полунепрерывности снизу $f(x)$ имеем

$$f(x_0) \leqslant \underline{\lim}_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = d.$$

Отсюда и из неравенства $d \leqslant f(x)$ следует

$$d \leqslant f(x_0) \leqslant d,$$

т. е. что $d = f(x_0)$. Теорема доказана.

9.3. Об m-свойстве функционалов. В настоящем пункте, как и в предыдущем, мы будем рассматривать банаховы пространства E со слабо компактной сферой.

Пусть ω — ограниченное открытое множество в E, ω' — граница ω и $\overline{\omega} = \omega \cup \omega'$. Будем рассматривать всевозможные слабо замкнутые области $\overline{\omega}$, на которых функционал $\varphi(x)$ слабо полунепрерывен снизу.

Следует отметить, что из замкнутости множества W еще не следует его слабая замкнутость (множество W называется *слабо замкнутым*, если слабый предел всякой его последовательности $\{x_n\}$ принадлежит W). Например, в гильбертовом пространстве H сфера $\|x\| = r$ замкнута, но не слабо замкнута, ибо бесконечная ортонормальная система $\{e_n\}$ в H слабо сходится к нулевому элементу пространства.

Если среди различных $\overline{\omega}$ существует хотя бы одна $\overline{\omega}_0$ такая, что на ω_0' выполняется неравенство $\varphi(x) > \varphi(x_0)$, где x_0 есть какая-нибудь точка ω_0, то мы скажем, что *функционал $\varphi(x)$ обладает m-свойством.*

Затем назовем функционал $\varphi(x)$ *слабо дифференцируемым на множестве $\sigma \in E$*, если в каждой точке σ он имеет линейный дифференциал Гато.

Теорема 9.3[1]). *Если заданный в банаховом пространстве E со слабо компактной сферой слабо дифференцируемый функционал $\varphi(x)$ обладает m-свойством, то существует по меньшей мере одна критическая точка этого функционала.*

---

[1]) См. [9, п, т].

Доказательство. По условию для произвольной точки $x' \in \omega_0'$ выполняется неравенство $\varphi(x') > \varphi(x_0)$, где x_0 — фиксированная точка области ω_0, так что нижняя грань, которая согласно теореме 9.2 достигается на $\overline{\omega}_0$, не может достигаться на ω_0'. Этим доказано существование экстремальной точки, принадлежащей ω_0, которая по теореме 9.1 будет и критической.

9.4. Достаточные условия экстремума некоторых функционалов. Если функция одного переменного $f(t)$, заданная на всей числовой прямой, обладает тем свойством, что ее вторая производная удовлетворяет условию

$$f''(t) > \alpha, \text{ где } \alpha > 0 \text{ и } -\infty < t < +\infty,$$

то нетрудно проверить, что эта функция имеет экстремальную точку, в которой она принимает наименьшее значение. Нечто подобное имеет место и в некоторых линейных пространствах. Именно, справедливо следующее предложение.

Теорема 9.4. *Пусть в вещественном банаховом пространстве E со слабо компактной сферой задан вещественный функционал $f(x)$, имеющий линейные дифференциалы Гато первого и второго порядков, причем дифференциал второго порядка $D^2f(x, h, k)$ удовлетворяет неравенству*

$$D^2f(x, h, h) \geqslant \|h\| \gamma(\|h\|), \tag{9.1}$$

где $\gamma(t)$ — неотрицательная непрерывная функция, заданная для $t \geqslant 0$, и $\lim\limits_{t \to +\infty} \gamma(t) = +\infty$.

Тогда существует точка, в которой функционал $f(x)$ имеет относительный минимум.

Доказательство. Из неравенства (9.1) согласно теореме 8.1 вытекает слабая полунепрерывность снизу функционала $f(x)$ в любом шаре пространства E. Так как в данном пространстве по условию шар слабо компактен и слабо замкнут, то отсюда и из теоремы 9.2 следует, что функционал $f(x)$ достигает своей нижней грани в любом шаре. Покажем, что $f(x)$ обладает m-свойством по отношению к некоторому шару $\|x\| \leqslant R$. Пусть $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$; тогда

$$Df(x, h) = (\mathbf{F}(x), h) \text{ и } D^2f(x, h, k) = (\mathbf{DF}(x, k), h).$$

Согласно формуле (5.6) можно написать

$$(\mathbf{F}(x),\ h)=(\mathbf{F}(\theta),\ h)+\int_0^1(\mathbf{DF}(tx,\ x),\ h)\,dt$$

или, полагая $h=x$,

$$(\mathbf{F}(x),\ x)=(\mathbf{F}(\theta),\ x)+\int_0^1(\mathbf{DF}(tx,\ x),\ x)\,dt.$$

Отсюда и из неравенства (9.1) имеем

$$(\mathbf{F}(x),\ x)\geqslant(\mathbf{F}(\theta),\ x)+\|x\|\gamma(\|x\|). \tag{9.2}$$

Далее, согласно формуле (5.6) имеем

$$f(x)=f(\theta)+\int_0^1(\mathbf{F}(tx),\ x)\,dt=f(\theta)+\int_0^1(\mathbf{F}(tx),\ tx)\frac{dt}{t}.$$

Считая в этом равенстве $\|x\|=R$, мы отсюда и из неравенства (9.2) получим

$$f(x)\geqslant f(\theta)+\int_0^1[(\mathbf{F}(\theta),\ tx)+\|tx\|\gamma(t\|x\|)]\,\frac{dt}{t}=$$

$$=f(\theta)+(\mathbf{F}(\theta),\ x)+R\int_0^1\gamma(tR)\,dt$$

или

$$f(x)\geqslant f(\theta)+R\left(-\|\mathbf{F}(\theta)\|+\int_0^1\gamma(tR)\,dt\right). \tag{9.3}$$

Так как при достаточно большом R

$$\int_0^1\gamma(tR)\,dt-\|\mathbf{F}(\theta)\|>0,$$

то $f(x)>f(\theta)$ на сфере $\|x\|=R$. Отсюда по теореме 9.3 следует существование экстремальной точки x_0 функционала $f(x)$, где $\|x_0\|<R$. Теорема доказана.

§ 10. О разрешимости операторных уравнений

Пусть H — вещественное гильбертово пространство и $\mathbf{F}(x)$ — потенциальный оператор, заданный в H. В настоящем параграфе мы рассмотрим вопрос о существовании решения уравнения

$$x = \mathbf{BF}(x), \tag{10.1}$$

где $\mathbf{B}$ — самосопряженный оператор, заданный во всем пространстве H. Данное уравнение было рассмотрено Голомбом [20] и другими авторами. М. Голомб рассматривал уравнение (10.1) в предположении, что $\mathbf{B}$ есть вполне непрерывный, самосопряженный и положительный оператор, а $\mathbf{F}(x)$ — сильно потенциальный непрерывный оператор. Позднее было показано [9, т], что вариационный метод применим к доказательству существования решений уравнения (10.1), когда на операторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{F}$ накладывается меньше ограничений.

Для дальнейшего мы воспользуемся следующим простым предложением.

Лемма 10.1. *Если в гильбертовом пространстве заданы* $\operatorname{grad} f(x) = \mathbf{F}(x)$ *и самосопряженный оператор* $\mathbf{A}$, *то*

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{A}x) = \mathbf{AF}(\mathbf{A}x).$$

Доказательство. Пусть $\varphi(x) = f(\mathbf{A}x)$. Тогда

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x+th)-\varphi(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{A}x+t\mathbf{A}h)-f(\mathbf{A}x)}{t} =$$
$$= (\mathbf{F}(\mathbf{A}x),\ \mathbf{A}h) = (\mathbf{AF}(\mathbf{A}x),\ h),$$

т. е.

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = \mathbf{AF}(\mathbf{A}x).$$

Лемма доказана.

10.1. Уравнения с положительными операторами. В настоящем пункте мы рассмотрим уравнение (10.1) в предположении, что $\mathbf{B}$ — положительный оператор.

Теорема 10.1 [1]). *Пусть во всем вещественном гильбертовом пространстве H заданы положительный самосопряженный оператор* $\mathbf{B}$ *и оператор* $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$, *причем $f(x)$ удовлетворяет условию*

$$2f(x) \leqslant a_1(x,\ x) + a_2(x,\ x)^{\gamma} + a_3, \tag{10.2}$$

1) См. [9, п, т].

где a_2 и a_3 — какие-нибудь положительные числа, $0<\gamma<1$, $a_1\|\mathbf{B}\| < 1$, если $a_1 > 0$.

Пусть, далее, выполнено хоть одно из следующих условий:

(α) $f(x)$ *есть непрерывный функционал, а* $\mathbf{B}$ — *вполне непрерывный оператор*;

(β) $f(x)$ *есть слабо непрерывный функционал (или слабо полунепрерывный сверху)*.

Тогда операторное уравнение $x=\mathbf{BF}(x)$ *разрешимо*.

Для доказательства рассмотрим функционал

$$\varphi(x)=(x,\ x)-2f(\mathbf{A}x),$$

где $\mathbf{A}$ — положительный корень квадратный из оператора $\mathbf{B}$. Если выполнено условие (α), то вполне непрерывный линейный оператор $\mathbf{A}$ преобразует всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся ([47]), стр. 214), а потому $f(\mathbf{A}x)$ — слабо непрерывный функционал. Если выполнено условие (β), то самосопряженный и ограниченный оператор $\mathbf{A}$ преобразует всякую слабо сходящуюся последовательность в слабо сходящуюся, а так как $f(x)$ слабо полунепрерывен сверху, то и $f(\mathbf{A}x)$ — слабо полунепрерывный сверху функционал. Следовательно, функционал $\varphi(x)$ слабо полунепрерывен снизу, как сумма слабо полунепрерывного снизу (см. пример 8.1) функционала $(x,\ x)$ и слабо непрерывного (или слабо полунепрерывного снизу) функционала $-2f(\mathbf{A}x)$. Далее, из неравенства (10.2) имеем

$$\varphi(x)\geqslant(x,\ x)^{\gamma}\left[(x,\ x)^{1-\gamma}-a_2\|\mathbf{B}\|^{\gamma}\right]-a_3,$$

если $a_1<0$, а при $a_1>0$ будет

$$\varphi(x)\geqslant(x,\ x)^{\gamma}\left[(x,\ x)^{1-\gamma}(1-a_1\|\mathbf{B}\|)-a_2\|\mathbf{B}\|^{\gamma}\right]-a_3,$$

т. е. функционал $\varphi(x)$ неограниченно растет вместе с $\|x\|$, ибо $1-a_1\|\mathbf{B}\|>0$, если $a_1>0$. Следовательно, существует сфера $\|x\|=r$, на которой $\varphi(x)>\varphi(\theta)$, т. е. функционал $\varphi(x)$ обладает m-свойством.

Так как $\varphi(x)$ есть слабо дифференцируемый функционал, то согласно теореме 9.1 найдется точка $x_0\in H$ такая, что $\operatorname{grad}\varphi(x_0)=\theta$. Но $\operatorname{grad}(x,\ x)=2x$ и согласно лемме 10.1 $\operatorname{grad} f(\mathbf{A}x)=\mathbf{AF}(\mathbf{A}x)$, откуда

$$x_0-\mathbf{AF}(\mathbf{A}x_0)=\theta$$

или

$$\mathbf{A}x_0 - \mathbf{A}^2\mathbf{F}(\mathbf{A}x_0) = \theta.$$

Полагая $\mathbf{A}x_0 = z_0$ и учитывая, что $\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}$, имеем

$$z_0 = \mathbf{BF}(z_0).$$

Теорема доказана.

Отметим, что теорема сохраняется для уравнения $x = \lambda\mathbf{BF}(x)$, если $\lambda a_1 \|\mathbf{B}\| < 1$ (при $a_1 = 0$ параметр λ может принимать любые положительные значения) и $\lambda > 0$.

Замечание 10.1. Если потенциальный оператор $\mathbf{F}(x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|\mathbf{F}(x_2) - \mathbf{F}(x_1)\| \leqslant a_1 \|x_2 - x_1\| \quad (0 < a_1 \|\mathbf{B}\| < 1),$$

то уравнение $x = \mathbf{BF}(x)$ имеет единственное решение. Действительно, если x_1 и x_2 — два решения, то $\|x_2 - x_1\| \leqslant \leqslant \|\mathbf{B}\| a_1 \|x_2 - x_1\|$ и $x_1 = x_2$.

Замечание 10.2. Условие (10.2) выполняется, если

$$(\mathbf{F}(x),\ x) \leqslant a_1(x,\ x) + c_1(x,\ x)^\gamma,$$

где $a_1\|\mathbf{B}\| < 1$ при $a_1 > 0$, $0 < \gamma < 1$ и $(\mathbf{F}(tx), x)$ есть суммируемая функция от t на $[0, 1]$ при всяком $x \in H$.

Действительно, по условию $\frac{d}{dt} f(tx) = (\mathbf{F}(tx),\ x)$ есть суммируемая функция от t, а потому согласно известной теореме анализа (см. [55], стр. 234, теорема 1) из этого равенства следует

$$f(x) - f(\theta) = \int_0^1 (\mathbf{F}(tx),\ x)\, dt,$$

где $f(\theta) = + a_3$ есть произвольная постоянная. Отсюда следует, что

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2} a_1(x,\ x) + c_1(x,\ x)^\gamma \int_0^1 t^{2\gamma-1} dt + a_3 =$$

$$= \frac{1}{2} a_1(x,\ x) + a_2(x,\ x)^\gamma + a_3.$$

Теорема 10.2. *Пусть во всем вещественном гильбертовом пространстве H заданы положительный* *самосопряженный оператор* $\mathbf{B}$ *и потенциальный оператор* $\mathbf{F}(x)$, *удовлетворяющий условию*[1])

$$(\mathbf{DF}(x,\ h),\ h) \leqslant a_1(h,\ h), \tag{10.3}$$

где $a_1\|\mathbf{B}\| < 1$ *при* $a_1 > 0$.

Тогда операторное уравнение

$$x = \mathbf{BF}(x) \tag{10.1}$$

имеет по меньшей мере одно решение.

Доказательство. Пусть $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$. Рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x,\ x) - f(\mathbf{A}x),$$

где $\mathbf{A}$ — положительный квадратный корень из оператора $\mathbf{B}$. Для этого функционала $\varphi(x)$ имеем:

$$D\varphi(x,\ h) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(x+th) - \varphi(x)}{t} = (x,\ h) - (\mathbf{F}(\mathbf{A}x),\ \mathbf{A}h),$$

$$D^2\varphi(x,\ h,\ k) = \lim_{t \to 0} \frac{D\varphi(x+tk,\ h) - D\varphi(x,\ h)}{t} = \\ = (k,\ h) - (\mathbf{DF}(\mathbf{A}x,\ \mathbf{A}k),\ \mathbf{A}h).$$

Отсюда и из неравенства (10.3) имеем

$$D^2\varphi(x,\ h,\ h) \geqslant (h,\ h) \text{ при } a_1 < 0$$

и

$$D^2\varphi(x,\ h,\ h) \geqslant (h,\ h) - a_1(\mathbf{A}h,\ \mathbf{A}h) \geqslant (h,\ h) - a_1\|\mathbf{B}\|(h,\ h) = \\ = (h,\ h)(1 - a_1\|\mathbf{B}\|) \text{ при } a_1 > 0.$$

Из этого неравенства согласно теореме 9.4 следует существование экстремальной точки x_0 функционала $\varphi(x)$. Эта точка x_0 будет и критической точкой функционала $\varphi(x)$, ибо $\varphi(x)$ — дифференцируемый функционал, т. е. $\operatorname{grad}\varphi(x_0) = \theta$. Но

$$D\varphi(x,\ h) = (x,\ h) - (\mathbf{F}(\mathbf{A}x),\ \mathbf{A}h) = (x - \mathbf{AF}(\mathbf{A}x),\ h),$$

откуда

$$\operatorname{grad}\varphi(x_0) \equiv x_0 - \mathbf{AF}(\mathbf{A}x_0) = \theta$$

и

$$\mathbf{A}x_0 = \mathbf{A}^2\mathbf{F}(\mathbf{A}x_0).$$

---

[1]) Можно показать, что из (10.3) следует неравенство (10.2).

Полагая $\mathbf{A}x_0 = z_0$, мы получим окончательно

$$z_0 = \mathbf{BF}(z_0).$$

Теорема доказана.

Отметим, что и эта теорема сохраняется для уравнения $x = \lambda \mathbf{BF}(x)$, если $0 < \lambda a_1 \|\mathbf{B}\| < 1$.

10.2. Уравнения с квазидефинитными операторами. Самосопряженный оператор **B** назовем *квазиположительным*, если его отрицательный спектр непустой и состоит из конечного числа собственных значений, имеющих конечную кратность, а положительный спектр непустой и произвольный. Самосопряженный оператор **B** назовем *квазиотрицательным*, если непустой отрицательный его спектр является произвольным, а положительный спектр его непустой и состоит из конечного числа собственных значений, имеющих конечную кратность. Разумеется, если оператор **B** является квазиположительным и квазиотрицательным, то он действует из гильбертова пространства H в конечномерное подпространство пространства H.

Теорема 10.3[1]. *Пусть выполнены условия:*

1°. *Оператор* **B**, *заданный во всем пространстве* H, *является квазиотрицательным, а значит, его положительный спектр принадлежит отрезку* $[m, \beta]$, *где* $m > 0$.

2°. $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$, *причем*

$$f(x) \geqslant \frac{1}{m}(x, x) + a_2 (x, x)^\gamma + a_3, \tag{10.4}$$

где a_2 *и* a_3 — *какие-нибудь отрицательные числа*, $0 < \gamma < 1$.

3°. *Либо* $f(x)$ *есть непрерывный функционал, а* **B** — *вполне непрерывный оператор, либо* $f(x)$ — *слабо полунепрерывный снизу функционал.*

Тогда операторное уравнение $x = \mathbf{BF}(x)$ *разрешимо.*

Доказательство. Так как самосопряженный оператор **B** задан во всем пространстве H, то он ограничен (см. [3], стр. 75), а потому

$$\inf_{\|x\|=1} (\mathbf{B}x, x) = \alpha > -\infty; \quad \sup_{\|x\|=1} (\mathbf{B}x, x) = \beta < +\infty,$$

где согласно условию $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Пусть, далее, $\mathbf{E}_t$ есть разложение единицы оператора **B**; тогда $\mathbf{E}(\Delta) = \mathbf{E}_\beta - \mathbf{E}_m = \mathbf{P}_1$

---

[1]) См. [9, т].

есть оператор проектирования на инвариантное подпространство $H_1 \subset H$, которое приводит $\mathbf{B}$. Подпространство H_1 является конечномерным, ибо по условию положительная часть спектра оператора $\mathbf{B}$ состоит из конечного числа его собственных значений, имеющих конечную кратность. Пусть, далее, $\mathbf{P}_2$ — оператор проектирования на подпространство $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H} \dot{-} \mathbf{H}_1$. Положим

$$((x))^2 = \|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2$$

и рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = 2f(\mathbf{A}x) - ((x))^2, \tag{10.5}$$

где $\mathbf{A}$ есть главный квадратный корень из оператора $\mathbf{B}$, т. е. $\mathbf{A} = \mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_-$, где $\mathbf{A}_+$ есть положительный квадратный корень из положительной части $\mathbf{B}_+$ оператора $\mathbf{B}$ (см. [47], стр. 263), а $\mathbf{A}_-$ есть положительный квадратный корень из абсолютного значения отрицательной части $\mathbf{B}_-$ оператора $\mathbf{B}$. Функционал $\varphi(x)$ слабо дифференцируем и слабо полунепрерывен снизу, как сумма двух таких функционалов. Действительно, $f(\mathbf{A}x)$ слабо полунепрерывен снизу по условию теоремы, а $-((x))^2 = (\mathbf{P}_2 x, \mathbf{P}_2 x) - (\mathbf{P}_1 x, \mathbf{P}_1 x)$ слабо полунепрерывен снизу, ибо, как мы видели в примере 8.1, функционал $(\mathbf{P}_2 x, \mathbf{P}_2 x)$ слабо полунепрерывен снизу и функционал $(\mathbf{P}_1 x, \mathbf{P}_1 x)$ слабо непрерывен (так как в конечномерных пространствах (см. [47], стр. 202, теорема 1) слабая сходимость совпадает с сильной). Далее, из неравенства (10.4) мы находим, что

$$\varphi(x) \geqslant \frac{2}{m}(\mathbf{A}x, \mathbf{A}x) + 2a_2(\mathbf{A}x, \mathbf{A}x)^{\gamma} + 2a_3 + \\ + (\mathbf{P}_2 x, \mathbf{P}_2 x) - (\mathbf{P}_1 x, \mathbf{P}_1 x).$$

Так как проектирующие операторы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ приводят оператор $\mathbf{A}$, то

$$\|\mathbf{A}x\|^2 = \|\mathbf{A}\mathbf{P}_1 x\|^2 + \|\mathbf{A}\mathbf{P}_2 x\|^2 \geqslant \|\mathbf{A}\mathbf{P}_1 x\|^2 = \\ = \int_{\sqrt{m}}^{\sqrt{\beta}} t^2\, d(\mathbf{E}_t \mathbf{P}_1 x, \mathbf{P}_1 x) \geqslant m \|\mathbf{P}_1 x\|^2. \tag{10.6}$$

Отсюда и из предыдущего неравенства имеем

$$\varphi(x) \geqslant \|\mathbf{P}_2 x\|^2 + \|\mathbf{P}_1 x\|^2 + 2a_2(\mathbf{A}x,\ \mathbf{A}x)^\gamma + 2a_3 =$$
$$= \|x\|^2 + 2a_2(\mathbf{A}x,\ \mathbf{A}x)^\gamma + 2a_3.$$

Но

$$(\mathbf{A}x,\ \mathbf{A}x) = (|\mathbf{B}|\,x,\ x) \leqslant \|\mathbf{B}\|\,\|x\|^2,$$

где $|\mathbf{B}|$ — абсолютное значение оператора $\mathbf{B}$, и $a_2 < 0$, откуда

$$\varphi(x) \geqslant (x,\ x) + 2a_2\|\mathbf{B}\|^\gamma (x,\ x)^\gamma + 2a_3 \geqslant$$
$$\geqslant (x,\ x)^\gamma [(x,\ x)^{1-\gamma} + 2a_2\|B\|^\gamma] + 2a_3.$$

Из этого неравенства следует существование сферы $\|x\| = r$, на которой $\varphi(x) > \varphi(\theta)$.

Таким образом, слабо дифференцируемый функционал $\varphi(x)$ обладает m-свойством, а значит, согласно теореме 9.3 $\operatorname{grad}\varphi(x_0) = \theta$, где $\|x_0\| < r$.

Найдем градиент функционала $\varphi(x)$. По условию $\operatorname{grad} f(x) = \mathbf{F}(x)$, откуда согласно лемме 10.1 $\operatorname{grad} f(\mathbf{A}x) = \mathbf{AF}(\mathbf{A}x)$. Далее,

$$\lim_{t\to 0}\frac{((x+th))^2 - ((x))^2}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{2t(\mathbf{P}_1 x,\ \mathbf{P}_1 h) - 2t(\mathbf{P}_2 x,\ \mathbf{P}_2 h) + t^2((h))^2}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\,[2(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_2 x,\ h) + t((h))^2] = 2(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_2 x,\ h),$$

т. е.

$$\operatorname{grad}((x))^2 = 2(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_2 x). \tag{10.7}$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad}\varphi(x) = 2\mathbf{AF}(\mathbf{A}x) - 2\mathbf{P}_1 x + 2\mathbf{P}_2 x,$$

а потому равенство $\operatorname{grad}\varphi(x_0) = \theta$ принимает вид

$$\mathbf{AF}(\mathbf{A}x_0) - (\mathbf{P}_1 x_0 - \mathbf{P}_2 x_0) = \theta. \tag{10.8}$$

Обозначив через $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$ положительный квадратный корень из абсолютного значения оператора $\mathbf{B}$, мы будем иметь

$$\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}\mathbf{A} = (\mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_-)(\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_-) = \mathbf{A}_+^2 - \mathbf{A}_-^2 = \mathbf{B}_+ + \mathbf{B}_- = \mathbf{B};$$
$$\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = (\mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_-)(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = \mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_- = \mathbf{A},$$

Отсюда и из равенства (10.8) мы находим

$$\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}\mathbf{AF}(\mathbf{A}x_0) - \mathbf{B}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)\,x_0 = 0$$

или

$$\mathbf{BF}(\mathbf{A}x_0) - \mathbf{A}x_0 = 0.$$

Полагая $\mathbf{A}x_0 = z_0$, имеем окончательно

$$\mathbf{BF}(z_0) = z_0.$$

Теорема доказана.

Замечание 10.3. Аналогичная теорема справедлива, если $\mathbf{B}$ — квазиположительный оператор.

Отметим еще, что к теореме 10.3 можно прийти, исходя из функционала $\varphi(x) = 2f\left(\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}x\right) - ((x))^2$, причем данная теорема справедлива для уравнения $x = \lambda\mathbf{BF}(x)$, где $\lambda > 1$.

Теорема 10.4. *Пусть во всем вещественном гильбертовом пространстве H заданы квазиотрицательный оператор $\mathbf{B}$, положительный спектр которого принадлежит отрезку $[m, \beta]$, где $m > 0$, и потенциальный оператор $\mathbf{F}(x)$, удовлетворяющий условию*

$$(\mathbf{DF}(x, h), h) \geqslant \frac{2}{m}(h, h). \tag{10.9}$$

Тогда операторное уравнение

$$x = \mathbf{BF}(x) \tag{10.1}$$

имеет по меньшей мере одно решение.

Доказательство. Пусть $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$. Рассмотрим функционал $\varphi(x)$, определенный равенством (10.5). Для этого функционала имеем

$$D\varphi(x, h) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(x+th) - \varphi(x)}{t} =$$

$$= 2(\mathbf{F}(\mathbf{A}x), \mathbf{A}h) - 2(\mathbf{P}_1x - \mathbf{P}_2x, h),$$

$$D^2\varphi(x, h, k) = \lim_{t\to 0}\frac{D\varphi(x+kt, h) - D\varphi(x, h)}{t} =$$

$$= 2(\mathbf{DF}(\mathbf{A}x, \mathbf{A}k), \mathbf{A}h) - 2(\mathbf{P}_1k - \mathbf{P}_2k, h).$$

Отсюда и из неравенства (10.9) имеем

$$D^2\varphi(x, h, h) \geqslant \frac{4}{m}(\mathbf{A}h, \mathbf{A}h) - 2((h))^2$$

или согласно неравенству (10.6)

$$D^2\varphi(x, h, h) \geqslant 4(\mathbf{P}_1 h, \mathbf{P}_1 h) - 2((h))^2 = 2(h, h).$$

Из данного неравенства согласно теореме 9.4 вытекает существование экстремальной точки x_0 функционала $\varphi(x)$, которая является и критической точкой, ибо $\varphi(x)$ — дифференцируемый функционал. Итак,

$$\operatorname{grad} \varphi(x_0) = \theta.$$

Но

$$D\varphi(x, h) = 2(\mathbf{AF}(\mathbf{A}x), h) - 2(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_2 x, h),$$

откуда

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = 2\mathbf{AF}(\mathbf{A}x) - 2(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_2 x),$$

а значит,

$$(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) x_0 = \mathbf{AF}(\mathbf{A}x_0).$$

Данное равенство совпадает с равенством (10.8). Поступая теперь так же, как при доказательстве теоремы 10.3, и полагая $\mathbf{A}x_0 = z_0$, мы из последнего равенства путем умножения на $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$ получим

$$z_0 = \mathbf{BF}(z_0).$$

Теорема доказана.

Отметим еще, что к теореме можно прийти, исходя из функционала $\varphi(x) = 2f\left(\mathbf{B}_{\frac{1}{2}} x\right) - ((x))^2$, причем эта теорема сохраняется для уравнения $x = \lambda \mathbf{BF}(x)$, где λ — любое вещественное число, большее единицы.

10.3. Уравнения первого рода. По аналогии с линейными интегральными уравнениями первого рода, уравнение

$$\mathbf{T}(x) = y, \tag{10.10}$$

где $\mathbf{T}$ — заданный оператор, y — заданный элемент пространства, x — неизвестный элемент, называется *уравнением первого рода*. Мы рассмотрим уравнение (10.10) в гильбертовом пространстве H.

Пусть потенциальный оператор $\mathbf{F}(x)$, заданный в H, удовлетворяет условию

$$(\mathbf{DF}(x, h), h) \geqslant c(h, h), \tag{10.11}$$

где x и h — произвольные элементы пространства H, а c — некоторое положительное число. Так как $\mathbf{F}(x)$ — потенциальный оператор, то $\mathbf{F}(x)=\operatorname{grad} f(x)$, где по формуле (5.6)

$$f(x)=\int_0^1 (\mathbf{F}(tx),\ x)\,dt.$$

Рассмотрим функционал

$$\varphi(x)=f(x)-(x,\ y),$$

для которого

$$D\varphi(x,\ h)=(\mathbf{F}(x),\ h)-(h,\ y);$$

$$D^2\varphi(x,\ h,\ h)=(D\mathbf{F}(x,\ h),\ h)\geqslant c(h,\ h).$$

Согласно теоремам 9.4 и 9.1 существует элемент x_0, такой, что $\operatorname{grad}\varphi(x_0)=\theta$. Но

$$\operatorname{grad}\varphi(x)=\mathbf{F}(x)-y,$$

откуда

$$\mathbf{F}(x_0)=y.$$

Этим доказана

Теорема 10.5. *Если потенциальный оператор* $\mathbf{F}(x)$, *заданный в гильбертовом пространстве* H, *удовлетворяет условию*

$$(D\mathbf{F}(x,\ h),\ h)\geqslant c(h,\ h), \tag{10.11}$$

где c — *некоторое положительное число, то уравнение*

$$\mathbf{F}(x)=y, \tag{10.12}$$

где y — *фиксированный элемент пространства* H, *имеет по меньшей мере одно решение.*

Пусть в H задан линейный оператор $\mathbf{A}$, который имеет обратный оператор $\mathbf{A}^{-1}$. Тогда согласно теореме 10.5 уравнение

$$\mathbf{F}(x)=\mathbf{A}^{-1}y$$

имеет по меньшей мере одно решение, а значит, и уравнение

$$\mathbf{AF}(x)=y$$

имеет по крайней мере одно решение.

ГЛАВА IV

УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ И УСЛОВНО КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ФУНКЦИОНАЛОВ

§ 11. Поверхности второго порядка в гильбертовом пространстве

11.1. Понятие гиперболоида в гильбертовом пространстве[1]). В n-мерном евклидовом пространстве гиперболоид определяется уравнением

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e_k x_k^2}{a_k^2} = 1,$$

где $e_k = \pm 1$, причем $\sum\limits_{k=1}^{n} e_k < n$.

Рассмотрим теперь в вещественном гильбертовом пространстве l_2 многообразие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k x_k^2}{a_k^2} = 1,$$

где $e_k = \pm 1$, $a_k^2 \geqslant \alpha > 0$; $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty$.

Такое многообразие естественно назвать *гиперболоидом в гильбертовом пространстве* l_2, если для некоторого n

$$\left| \sum_{k=1}^{n} e_k \right| < n.$$

---

1) Понятия, рассматриваемые в данном пункте, связаны с понятиями, которые встречаются в задаче С. Л. Соболева об эрмитовых операторах в пространстве с индефинитной метрикой. Как известно, эта задача была решена в работах Л. С. Понтрягина [60], М. Г Крейна [38] и И. С. Иохвидова [28].

В том случае, когда для всякого k $a_k = c = \text{const.}$, мы получаем простейший гиперболоид

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^k x_k^2 = c^2.$$

Положим

$$((x))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} e_k x_k^2.$$

Функционал $\varphi(x) = ((x))^2$ может принимать в l_2 положительные и отрицательные значения, ибо среди e_k имеются положительные и отрицательные. Гиперболоид $((x)) = c > 0$ при заданном ортонормальном базисе $\{\varepsilon_k\}$ индуцирует разложение пространства l_2 в прямую (ортогональную) сумму двух подпространств E_1 и E_2. Именно, за проекции $\mathbf{P}_1 x$ и $\mathbf{P}_2 x$ вектора $x \in l_2$ в подпространства E_1 и E_2 примем выражения

$$\mathbf{P}_1 x = \sum_{e_k = 1} \varepsilon_k x_k; \quad \mathbf{P}_2 x = \sum_{e_k = -1} \varepsilon_k x_k,$$

тогда

$$x = \mathbf{P}_1 x + \mathbf{P}_2 x,$$

$$\|x\|^2 = \|\mathbf{P}_1 x\|^2 + \|\mathbf{P}_2 x\|^2; \quad ((x))^2 = \|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2.$$

При переходе от пространства l_2 к общему гильбертову пространству H мы приходим к следующему определению гиперболоида.

Пусть пространство H разложено в ортогональную сумму двух подпространств H_1 и H_2 $(H_1 \dot{+} H_2 = H)$. Обозначим через $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ операторы проектирования в подпространства H_1 и H_2 и положим

$$\varphi(x) = ((x))^2 = \|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2, \tag{11.1}$$

тогда многообразие

$$((x)) = c > 0 \tag{11.2}$$

будет представлять собой *гиперболоид в гильбертовом пространстве* H. Так как $\|x\|^2 = \|\mathbf{P}_1 x\|^2 + \|\mathbf{P}_2 x\|^2$, то отсюда и из (11.1) имеем

$$\|\mathbf{P}_1 x\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}((x))^2; \qquad \|\mathbf{P}_2 x\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}((x))^2. \tag{11.3}$$

Далее, градиент функционала $\varphi(x) = ((x))^2$ согласно (10.7) определяется формулой

$$\operatorname{grad}((x))^2 = 2\mathbf{P}_1 x - 2\mathbf{P}_2 x.$$

Положим

$$\mathbf{W}x = \frac{1}{2}\operatorname{grad}((x))^2 = \mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_2 x. \tag{11.4}$$

Для дальнейшего рассмотрим еще гиперболические области V_c, точки которых определяются условием

$$((x)) = (\|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant c > 0, \tag{11.5}$$

и коническую область V_0:

$$((x)) = (\|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0.$$

Разумеется, всякая гиперболическая область $V_c \subset V_0$. Отметим, что если x есть внутренний элемент конической области V_0, т. е. $(\|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2)^{\frac{1}{2}} = \alpha > 0$, то точки луча tx, $t \in [0, +\infty)$, для которых $t \geqslant \frac{c}{\alpha}$, принадлежат гиперболической области V_c, а те точки луча, для которых $0 \leqslant t < \frac{c}{\alpha}$, не принадлежат V_c. Если $x \overline{\in} V_0$, то луч tx $(0 \leqslant t < +\infty)$ не имеет общих точек с V_c. Таким образом всякий внутренний луч конической области V_0 пересекается с гиперболоидом $((x)) = c > 0$ в единственной точке. Границу конической области V_0 мы обозначим через K. Многообразие K определяется условием $((x)) = 0$. Если рассмотреть единичную сферу S_1 $(\|x\| = 1)$, то точки S_1, для которых $\|\mathbf{P}_1 x\| = \|\mathbf{P}_2 x\|$, принадлежат K, а точки S_1, для которых $\|\mathbf{P}_1 x\| > \|\mathbf{P}_2 x\|$, принадлежат $V_0 \setminus K$. Лучи tx $(x \in S_1)$, для которых $\|\mathbf{P}_1 x\| > \|\mathbf{P}_2 x\|$, пересекают гиперболоид $((x)) = c > 0$ в точке, удаленной от нулевого элемента 0 на расстояние $t = c(\|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2)^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда видно, что $t \to +\infty$, если $(\|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2) \to 0$, т. е. многообразие K является асимптотическим коническим многообразием для гиперболоидов $((x)) = c > 0$.

Относительно области V_c $(c \geqslant 0)$ справедливо следующее предложение.

Лемма 11.1. *Если собственное подпространство $H_1 \subset H$ конечномерно, то область $V_c (c \geqslant 0)$ слабо замкнута.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ есть произвольная последовательность из V_c, слабо сходящаяся к x_0. Так как по условию подпространство H_1 конечномерно, а в конечномерных пространствах (см. [47], стр. 202, теорема 1) слабая сходимость совпадает с сильной, то

$$\|\mathbf{P}_1 x_0\| = \lim_{n \to \infty} \|\mathbf{P}_1 x_n\|.$$

Далее имеем (см. (8.3), стр. 101), что норма слабого предела удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{P}_2 x_0\| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \|\mathbf{P}_2 x_n\|,$$

откуда

$$((x_0))^2 = \|\mathbf{P}_1 x_0\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x_0\|^2 \geqslant c^2.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим еще более общие гиперболоиды. Пусть пространство H есть ортогональная сумма подпространств H_1, $H_2, \ldots, H_m$. Обозначим произвольный элемент пространства H_k через x_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, тогда произвольный элемент $x \in H$ представится единственным образом в виде суммы:

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_m.$$

Положим

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{q} \frac{(x_k, x_k)}{a_k^2} - \sum_{k=1+q}^{m} \frac{(x_k, x_k)}{a_k^2},$$

тогда многообразие Γ_c, определяемое равенством $\psi(x) = c > 0$, представляет гиперболоид в пространстве H. Гиперболоид Γ_c является однополостным при $q > 1$ и двухполостным при $q = 1$. Так же, как при доказательстве леммы 11.1, легко устанавливается следующее предложение: *если подпространства H_1, $H_2, \ldots, H_q$ конечномерны, то область $\psi(x) \geqslant c$, где $c \geqslant 0$, слабо замкнута.*

11.2. Гиперболоиды, порожденные операторами. Пусть $\mathbf{B}$ есть самосопряженный оператор, определенный во всем гильбертовом пространстве H. Так как из данного предположения следует, что линейный оператор $\mathbf{B}$ ограничен, то

$$\inf_{\|x\|=1} (\mathbf{B}x, x) = \alpha > -\infty; \quad \sup_{\|x\|=1} (\mathbf{B}x, x) = \beta < +\infty.$$

Будем предполагать, что $\alpha < 0$, $\beta > 0$.

Пусть, далне, $\mathbf{E}_t$ есть разложение единицы оператора $\mathbf{B}$; тогда $\mathbf{E}(\Delta) = \mathbf{E}_\beta - \mathbf{E}_0 = \mathbf{P}_1$ есть оператор проектирования на инвариантное подпространство $H_1 \subset H$, которое приводит $\mathbf{B}$. Таким образом, оператор $\mathbf{B}$ индуцирует разложение пространства H в прямую сумму двух подпространств H_1 и $H_2 = H \dot{-} H_1$, и тем самым порождает гиперболоид

$$((x)) = (\|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2)^{\frac{1}{2}} = c > 0,$$

где $\mathbf{P}_2$ есть оператор проектирования в H_2.

В том случае, когда положительная часть спектра оператора $\mathbf{B}$ принадлежит отрезку $[m, \beta]$, где $m > 0$, имеет место следующее предложение.

Лемма 11.2. *Если положительная часть спектра самосопряженного оператора* $\mathbf{B}$ *принадлежит отрезку* $[m. \beta]$, *где* $m > 0$, *то для гиперболической области*

$$((x)) = (\|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant c > 0, \tag{11.6}$$

порожденной оператором $\mathbf{B}$, *имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{B}x\| \geqslant \frac{m}{\sqrt{2}} \left(((x))^2 + \|x\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{m}{\sqrt{2}} (c^2 + \|x\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

которое сохраняется и для конической области V_0, *т. е. когда* $c = 0$.

Доказательство. Так как проектирующие операторы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ приводят оператор $\mathbf{B}$, то

$$\|\mathbf{B}x\|^2 = \|\mathbf{BP}_1 x\|^2 + \|\mathbf{BP}_2 x\|^2 \geqslant \|\mathbf{BP}_1 x\|^2 =$$
$$= \int_m^\beta t^2 d(\mathbf{E}_t \mathbf{P}_1 x, \mathbf{P}_1 x) \geqslant m^2 \|\mathbf{P}_1 x\|^2.$$

Отсюда и из неравенств (11.3) имеем:

$$\|\mathbf{B}x\|^2 \geqslant \frac{m^2}{2} \left(((x))^2 + \|x\|^2 \right) \geqslant \frac{m^2}{2} (c^2 + \|x\|^2).$$

Лемма доказана.

Следует отметить, что в некоторых случаях оператор **B** оставляет инвариантной порожденную им гиперболическую область V_c. Это имеет, например, место, если положительная часть спектра оператора **B** принадлежит отрезку $[1, \beta]$, а отрицательная часть спектра принадлежит отрезку $[-1, 0]$. Действительно, в этом случае имеем

$$((\mathbf{B}x))^2 = \|\mathbf{P}_1\mathbf{B}x\|^2 - \|\mathbf{P}_2\mathbf{B}x\|^2 = \|\mathbf{B}\mathbf{P}_1x\|^2 - \|\mathbf{B}\mathbf{P}_2x\|^2 =$$
$$= \int_1^\beta t^2 d(\mathbf{E}_t\mathbf{P}_1x, \mathbf{P}_1x) - \int_{-1}^0 t^2 d(\mathbf{E}_t\mathbf{P}_2x, \mathbf{P}_2x) \geqslant$$
$$\geqslant \|\mathbf{P}_1x\|^2 - \|\mathbf{P}_2x\|^2 \geqslant c^2.$$

11.3. Эллипсоиды. Пусть пространство H есть ортогональная сумма подпространств $H_1, H_2, \ldots, H_m$. Так же, как раньше, обозначим через x_k произвольный элемент пространства H_k, тогда для произвольного элемента $x \in H$ мы будем иметь единственное представление: $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$. *Эллипсоид* в пространстве H определяется следующим уравнением:

$$\sum_{k=1}^m \frac{(x_k, x_k)}{a_k^2} = 1.$$

Область, в которой

$$\sum_{k=1}^m \frac{(x_k, x_k)}{a_k^2} \leqslant c \qquad (c > 0),$$

мы будем называть *эллиптической* и обозначим через E_c. Отметим, что *область* E_c *слабо замкнута*. Действительно, пусть $\{x^{(n)}\}$ есть произвольная последовательность из E_c, слабо сходящаяся к $x^{(0)}$. Так как (см. (8.3), стр. 101)

$$\left(x_k^{(0)}, x_k^{(0)}\right) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \left(x_k^{(n)}, x_k^{(n)}\right),$$

то $\sum_{k=1}^m a_k^{-2}\left(x_k^{(0)}, x_k^{(0)}\right) \leqslant c$, т. е. $x^{(0)} \in \mathrm{E}_c$.

11.4. Гиперболоиды, порожденные операторами в пространстве вектор-функций. Пусть пространство H есть прямая сумма гильбертовых пространств[1]) $H^{(1)}, H^{(2)}, \ldots, H^{(n)}$, т. е.

$$H = H^{(1)} \dot{+} H^{(2)} \dot{+} \ldots \dot{+} H^{(n)}$$

[1]) См. [54], стр. 113.

с обычной алгеброй и скалярным произведением. Именно, если $x_i \in H^{(i)}$, то $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x \in H$, причем

$$\lambda \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\},$$

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} + \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} = \\ = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\},$$

$$(x, y) \equiv (\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}) = \\ = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) + \ldots + (x_n, y_n).$$

H есть также гильбертово пространство. Рассмотрим в H оператор $\mathbf{B} = (\mathbf{B}^{(1)}, \mathbf{B}^{(2)}, \ldots, \mathbf{B}^{(n)})$, где $\mathbf{B}^{(i)}$ есть самосопряженный оператор, заданный во всем пространстве $H^{(i)}$. По определению

$$\mathbf{B}x = \{\mathbf{B}^{(1)}x_1, \mathbf{B}^{(2)}x_2, \ldots, \mathbf{B}^{(n)}x_n\}.$$

Положим

$$\alpha_i = \inf_{\| x \| = 1} (\mathbf{B}^{(i)}x_i, x_i), \quad \beta_i = \sup_{\| x_i \| = 1} (\mathbf{B}^{(i)}x_i, x_i)$$

и будем предполагать, что $\alpha_i \leqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i < 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i > 0$. Пусть $\mathbf{E}_t^{(i)}$ есть разложение единицы оператора $\mathbf{B}^{(i)}$ и $\mathbf{P}_1^{(i)} = \mathbf{E}(\Delta) = \mathbf{E}_{\beta_t}^{(i)} - \mathbf{E}_0^{(i)}$.

Положим

$$\mathbf{P}_1 x = (\mathbf{P}_1^{(1)}x_1, \mathbf{P}_1^{(2)}x_2, \ldots, \mathbf{P}_1^{(n)}x_n),$$

где $\mathbf{P}_1^{(i)}$ — оператор проектирования из $H^{(i)}$ на инвариантное подпространство $H_1^{(i)} \subset H^{(i)}$, которое приводит оператор $\mathbf{B}^{(i)}$. $\mathbf{P}_1$ — оператор проектирования из H в $H_1 = H_1^{(1)} \dotplus H_1^{(2)} \dotplus \ldots \dotplus H_1^{(n)}$. Обозначим через $\mathbf{P}_2$ оператор проектирования из H в $H_2 = H_2^{(1)} \dotplus H_2^{(2)} \dotplus \ldots \dotplus H_2^{(n)}$, где $H_2^{(i)} = H^{(i)} \dot{-} H_1^{(i)}$. Ясно, что для всякого элемента $x \in H$ имеют место равенства

$$x = \mathbf{P}_1 x + \mathbf{P}_2 x; \quad \| x \|^2 = \| \mathbf{P}_1 x \|^2 + \| \mathbf{P}_2 x \|^2. \tag{11.7}$$

Так же как в п. 11.2, положим

$$((x)) = (\|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{P}_1^{(i)} x_i\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{P}_2^{(i)} x_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

и рассмотрим гиперболоиды $((x)) = c > 0$. В том случае, когда каждый из операторов $\mathbf{B}^{(i)}$ является отрицательным или квазиотрицательным, имеет место следующее предложение (предполагается, что хоть один из операторов $\mathbf{B}^{(i)}$ — квазиотрицательный).

Лемма 11.3. *Если положительная часть спектра каждого из самосопряженных операторов $\mathbf{B}^{(i)}$ принадлежит отрезку $[m_i, \beta_i]$ где $m_i > 0$, если $\beta_i > 0$, то для гиперболической области $((x)) \geqslant c > 0$, порожденной оператором $\mathbf{B}$, имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{B}x\| \geqslant \frac{m}{\sqrt{2}} \left(((x))^2 + \|x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \frac{m}{\sqrt{2}} (c^2 + \|x\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

где m — наименьшее из положительных чисел m_i, которое сохраняется для конической области V_0.

Доказательство:

$$\|\mathbf{B}x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{B}^{(i)} x_i\|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{B}^{(i)} \mathbf{P}_1^{(i)} x_i\|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{m_i}^{\beta_i} t^2 d(\mathbf{E}_t^{(i)} \mathbf{P}_1^{(i)} x_i, \ \mathbf{P}_1^{(i)} x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m_i^2 \|\mathbf{P}_1^{(i)} x_i\|^2 \geqslant m^2 \|\mathbf{P}_1 x\|^2 =$$

$$= \frac{m^2}{2} \left(((x))^2 + \|x\|^2\right) \geqslant \frac{m^2}{2} (c^2 + \|x\|^2).$$

11.5. Об одном свойстве рассматриваемых гиперболоидов. Хорошо известно, что если в гильбертовом пространстве мы возьмем произвольную сферу $S(\|x\| = r)$, то на ней найдется последовательность векторов, которая слабо сходится к нулевому элементу пространства. Оказывается, что пересечение сферы S и конической области V_0 не содержит такой последовательности векторов, если подпространство H_1 конечномерно.

Лемма 11.4. *Если собственное подпространство $H_1 \subset H$ конечномерно, то пересечение конической области V_0,* *определяемой равенством* $((x)) = (\|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$, *с единичной сферой* $S_1(\|x\| = 1)$, *а значит, и со всякой другой сферой* $S(\|x\| = r)$, *не содержит такой последовательности векторов, которая сходилась бы слабо к нулевому элементу.*

Доказательство. Допустим, что последовательность $\{x_n\} \in V_0 \cap S_1$ слабо сходится к нулю θ пространства H. Рассмотрим тогда функционал $\varphi(x) = \|\mathbf{B}x\|$, где $\mathbf{B}$ — вполне непрерывный самосопряженный оператор, у которого подпространство собственных векторов, отвечающих его положительным собственным значениям, совпадает с H_1. Так как (см. [47], стр. 214, теорема 1) вполне непрерывный оператор $\mathbf{B}$ преобразует всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся, то $\varphi(x)$ — слабо непрерывный функционал и $\varphi(\theta) = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0$. Но так как $x_n \in V_0$ и $\|x_n\| = 1$, то согласно лемме 11.2 $\varphi(x_n) \geqslant \frac{m}{\sqrt{2}}$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма показывает, что если H_1 — конечномерно, то коническая область V_0, которая содержит внутренние точки бесконечномерного пространства H, в каком-то смысле близка к конечномерной части пространства H.

§ 12. Условно экстремальные и условно критические точки функционалов

12.1. Основные понятия. Пусть в банаховом пространстве E заданы два непрерывных вещественных функционала $f(x)$ и $\varphi(x)$. Обозначим через U_c многообразие, определяемое уравнением $\varphi(x) = c$, где $c = \text{const}$.

Определение 12.1. Точка $x_0 \in U_c$ называется *точкой условного относительного минимума функционала* $f(x)$ *относительно многообразия* U_c, если существует некоторая δ-окрестность $V(\|x - x_0\| < \delta)$ точки x_0 такая, что для всех x, принадлежащих пересечению $V \cap U_c$, выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$.

Аналогично определяются точки *условного относительного максимума.*

Определение 12.2. Точки условного относительного минимума и максимума функционала $f(x)$ относительно многообразия U_c называются *условно экстремальными точками функционала* $f(x)$ *относительно многообразия* U_c.

Пусть, далее, функционалы $f(x)$ и $\varphi(x)$ сильно дифференцируемы, т. е. дифференцируемы в смысле Фреше, в каждой точке $x \in E$.

Определение 12.3. Точка $x_0 \in U_c$ называется *обыкновенной точкой многообразия* U_c, если $\|\operatorname{grad} \varphi(x_0)\| > 0$.

Определение 12.4. Точка $x_0 \in U_c$ называется *условно критической точкой функционала* $f(x)$ *относительно многообразия* U_c, если

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \mu \operatorname{grad} \varphi(x_0),$$

где μ — некоторое число.

12.2. Теорема Люстерника. Л. А. Люстерник [46, а] установил общее предложение (см. [42], стр. 165), которое в простейшем случае ([9, м], теорема A) может быть сформулировано следующим образом:

Теорема 12.1. *Пусть в банаховом пространстве E заданы вещественные функционалы $f(x)$ и $\varphi(x)$, которые в точке $x_0 \in E$ сильно дифференцируемы (т. е. в этой точке они имеют дифференциалы в смысле Фреше), причем* $\|\operatorname{grad} \varphi(x_0)\| > 0$ *(т. е. x_0 есть обыкновенная точка многообразия $\varphi(x) = \varphi(x_0)$). Тогда, если x_0 есть экстремальная точка функционала $f(x)$ относительно многообразия $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, то x_0 является критической точкой этого функционала относительно данного многообразия, т. е.*

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \mu \operatorname{grad} \varphi(x_0).$$

Теорема может быть кратко сформулирована так: *Для того чтобы обыкновенная точка многообразпя U_c была условно экстремальной точкой функционала $f(x)$, необходимо, чтобы эта точка была условно критической точкой функционала $f(x)$ относительно многообразия U_c.*

Мы приведем здесь элементарное доказательство этой теоремы для двух частных случаев, которые используем в дальнейшем.

12.3. Доказательство теоремы Люстерника для сферы. Рассмотрим в вещественном гильбертовом пространстве H сферу $(x, x) = a^2 > 0$, которую обозначим через S_a. Покажем, что любая точка сферы S_a является ее обыкновенной точкой. Действительно, полагая $\varphi(x) = (x, x)$, мы будем иметь (см.

второй пример п. 5.1)

$$\operatorname{grad}(x, x) = 2x. \tag{12.1}$$

Пусть, далее, $f(x)$ — вещественный функционал, заданный в H и имеющий в каждой точке дифференциал Фреше. Допустим, что $x_0 \in S_a$ есть условно экстремальная точка функционала $f(x)$ относительно сферы S_a, и докажем, что в этом случае

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \mu x_0, \tag{12.2}$$

где μ — некоторое действительное число.

Для доказательства обозначим через $\mathfrak{H}_1$ одномерное пространство вектора x_0 и через $\mathfrak{H}$ ортогональное дополнение в H к $\mathfrak{H}_1$, так что

$$H = \mathfrak{H}_1 \dot{+} \mathfrak{H}.$$

Покажем, что $\operatorname{grad} f(x_0)$ ортогонален к $\mathfrak{H}$, откуда будет следовать, что $\operatorname{grad} f(x_0) \in \mathfrak{H}_1$, т. е. что равенство (12.2) имеет место. С этой целью возьмем произвольный вектор $h \in \mathfrak{H}$ с нормой a (так что $h \in S_a$) и рассмотрим совокупность векторов

$$x = (1 + \alpha\varepsilon)\, x_0 + \varepsilon h, \tag{12.3}$$

которая принадлежит двумерному линейному подпространству пространства H, натянутому на ортогональные векторы x_0 и h. Для того чтобы вектор $x \in S_a$, нужно, чтобы

$$(1 + \alpha\varepsilon)^2 a^2 + \varepsilon^2 a^2 = a^2,$$

т. е. чтобы

$$\alpha^2\varepsilon + 2\alpha + \varepsilon = 0. \tag{12.4}$$

Положим

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} = \frac{-\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

т. е. тому корню уравнения (12.4), который стремится к нулю одновременно с ε. Для таких α $x \in S_a$. Так как $f(x)$ имеет дифференциал Фреше, то для $x \in S_a$ мы можем написать:

$$f(x) - f(x_0) = (\operatorname{grad} f(x_0),\ \alpha\varepsilon x_0 + \varepsilon h) + \omega(x_0,\ \alpha\varepsilon x_0 + \varepsilon h),$$

где

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\omega(x_0,\ \alpha\varepsilon x_0 + \varepsilon h)}{\|\alpha\varepsilon x_0 + \varepsilon h\|} = 0 \quad \text{или} \quad \omega(x_0,\ \alpha\varepsilon x_0 + \varepsilon h) = o(\varepsilon).$$

Так как $\alpha\varepsilon = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, то мы можем написать

$$f(x) - f(x_0) = \varepsilon(\operatorname{grad} f(x_0),\ h) + o(\varepsilon). \tag{12.5}$$

Но по условию x_0 есть экстремальная точка функционала $f(x)$ относительно сферы S_a, а значит, в некоторой окрестности (принадлежащей S_a) точки x_0 левая часть равенства (12.5) должна сохранить знак. Отсюда следует, что правая часть равенства (12.5) должна сохранить свой знак для достаточно малых по абсолютному значению ε. Это возможно лишь тогда, когда $(\operatorname{grad} f(x_0),\ h) = 0$. Так как h есть произвольный вектор из $\mathfrak{H}$ с нормой a, то $\operatorname{grad} f(x_0)$ принадлежит $\mathfrak{H}_1$, т. е. имеет место равенство (12.2). Этим доказано следующее предложение[1]).

Теорема 12.2. *Если x_0 есть условно экстремальная точка сильно дифференцируемого функционала $f(x)$ относительно сферы $(x,\ x) = a^2 > 0$, то*

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \mu x_0, \tag{12.2}$$

где μ — некоторое действительное число.

12.4. Доказательство теоремы Люстерника для гиперболоидов. Пусть в вещественном гильбертовом пространстве H задан гиперболоид

$$\Gamma_c : ((x)) = c > 0.$$

Положим

$$\varphi(x) = ((x))^2 = \|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2,$$

где $\mathbf{P}_1 x$ и $\mathbf{P}_2 x$ суть проекции вектора x на подпространства H_1 и H_2 $(H = H_1 \dotplus H_2)$. Так как согласно равенству (11.4)

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = 2\mathbf{P}_1 x - 2\mathbf{P}_2 x, \tag{12.6}$$

то каждая точка гиперболоида Γ_c является его обыкновенной точкой.

Пусть, далее, $f(x)$ — вещественный функционал, заданный в H и имеющий в каждой точке дифференциал Фреше. Допустим, что x_0 есть условно экстремальная точка функционала $f(x)$ относительно гиперболоида Γ_c. Так как $x_0 \in \Gamma_c$, то $x_0 = \mathbf{P}_1 x_0 + \mathbf{P}_2 x_0$ и $\|\mathbf{P}_1 x_0\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x_0\|^2 = c^2$. Положим $\tilde{x}_0 = \mathbf{P}_1 x_0 - \mathbf{P}_2 x_0 = \mathbf{W} x_0$. Ясно, что $\tilde{x}_0 \in \Gamma_c$. Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ одномерное подпространство пространства H, к которому

[1]) См. [63, б], лемма 2.6.

принадлежит $\tilde{x}_0$, а через $\mathfrak{H}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{H}_1$ в H, так что $H = \mathfrak{H}_1 \dot{+} \mathfrak{H}$. Покажем, что $\operatorname{grad} f(x_0)$ принадлежит подпространству $\mathfrak{H}_1$, т. е. что он ортогонален любому вектору $h \in \mathfrak{H}$. Так как при доказательстве ортогональности длина вектора не имеет значения, то мы будем предполагать, что $\|h\| = 1$.

Сначала рассмотрим совокупность векторов

$$x = x_0 + \varepsilon h, \tag{12.7}$$

где $h \in \mathfrak{H}$, т. е. $(\tilde{x}_0, h) = 0$, $\|h\| = 1$, $((h)) = 0$ и ε — произвольное действительное число. Из этих условий следует, что

$$\begin{aligned} ((x))^2 &= \|\mathbf{P}_1 x_0 + \varepsilon \mathbf{P}_1 h\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x_0 + \varepsilon \mathbf{P}_2 h\|^2 = \|\mathbf{P}_1 x_0\|^2 + \\ &+ 2\varepsilon (\mathbf{P}_1 x_0, \mathbf{P}_1 h) + \varepsilon^2 \|\mathbf{P}_1 h\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x_0\|^2 - 2\varepsilon (\mathbf{P}_2 x_0, \mathbf{P}_2 h) - \\ &- \varepsilon^2 \|\mathbf{P}_2 h\|^2 = ((x_0))^2 + 2\varepsilon (\mathbf{P}_1 x_0 - \mathbf{P}_2 x_0, h) + \\ &+ \varepsilon^2 ((h))^2 = ((x_0))^2 + 2\varepsilon (\tilde{x}_0, h) = ((x_0))^2 = c^2, \end{aligned}$$

т. е. что $x \in \Gamma_c$ при любом ε. Для таких x (определенных равенством (12.7)) напишем:

$$f(x) - f(x_0) = (\operatorname{grad} f(x_0), \varepsilon h) + \omega (x_0, \varepsilon h), \tag{12.8}$$

где

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\omega (x_0, \varepsilon h)}{\|\varepsilon h\|} = 0,$$

т. е.

$$\omega (x_0, \varepsilon h) = o(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Так как при достаточно малых по абсолютному значению ε всякий вектор из совокупности (12.7) принадлежит той окрестности (на гиперболоиде Γ_c) точки x_0, в которой левая часть равенства (12.8) сохраняет знак (ибо x_0 — условно экстремальная точка), то из равенства (12.8) (если учесть, что $\omega (x_0, \varepsilon h) = o(\varepsilon)$) следует

$$(\operatorname{grad} f(x_0), h) = 0.$$

Итак, $\operatorname{grad} f(x_0)$ ортогонален любому вектору $h \in \mathfrak{H}$, если этот вектор принадлежит асимптотическому коническому многообразию K, т. е. $((h)) = 0$.

Рассмотрим теперь совокупность векторов для различных вещественных чисел α и ε:

$$x = (1 + \alpha\varepsilon) x_0 + \varepsilon h, \tag{12.9}$$

где $h \in \mathfrak{H}$, $((h)) \neq 0$, $\|h\| = 1$. Подберем α так, чтобы каждый вектор этой совокупности принадлежал Γ_c. С этой целью напишем:

$$((x))^2 = \|(1+\alpha\varepsilon)\mathbf{P}_1 x_0 + \varepsilon \mathbf{P}_1 h\|^2 - \|(1+\alpha\varepsilon)\mathbf{P}_2 x_0 + \varepsilon \mathbf{P}_2 h\|^2 =$$
$$= (1+\alpha\varepsilon)^2 \|\mathbf{P}_1 x_0\|^2 + 2\varepsilon(1+\alpha\varepsilon)(\mathbf{P}_1 x_0, \mathbf{P}_1 h) + \varepsilon^2 \|\mathbf{P}_1 h\|^2 -$$
$$- (1+\alpha\varepsilon)^2 \|\mathbf{P}_2 x_0\|^2 - 2\varepsilon(1+\alpha\varepsilon)(\mathbf{P}_2 x_0, \mathbf{P}_2 h) - \varepsilon^2 \|\mathbf{P}_2 h\|^2 =$$
$$= (1+\varepsilon\alpha)^2((x_0))^2 + 2\varepsilon(1+\alpha\varepsilon)(\mathbf{P}_1 x_0 - \mathbf{P}_2 x_0, h) + \varepsilon^2((h))^2.$$

Так как $((x_0))^2 = c^2$ и $(\mathbf{P}_1 x_0 - \mathbf{P}_2 x_0, h) = (\tilde{x}_0, h) = 0$, то требование $((x))^2 = c^2$ приводит к равенству

$$\alpha^2\varepsilon + 2\alpha + c^{-2}((h))^2\varepsilon = 0.$$

Примем за α следующий корень:

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 - c^{-2}((h))^2\varepsilon^2}}{\varepsilon} = \frac{-((h))^2\varepsilon}{c^2(1 + \sqrt{1 - c^{-2}((h))^2\varepsilon^2})}, \tag{12.10}$$

который стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. При таком α каждый вектор из совокупности (12.9) принадлежит Γ_c для тех ε, для которых α вещественно. Для этих векторов x напишем

$$f(x) - f(x_0) = (\operatorname{grad} f(x_0), \alpha\varepsilon x_0 + \varepsilon h) + \omega(x_0, \alpha\varepsilon x_0 + \varepsilon h), \tag{12.11}$$

где

$$\omega(x_0, \alpha\varepsilon x_0 + \varepsilon h) = o(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Так как при достаточно малых по абсолютному значению ε всякий вектор из совокупности (12.9), где α определяется равенством (12.10) принадлежит той окрестности (на гиперболоиде Γ_c) точки x_0, в которой левая часть равенства (12.11) сохраняет знак, то из равенства (12.11) (если учесть, что при $\varepsilon \to 0$ $\alpha\varepsilon = o(\varepsilon)$ и $\omega(x_0, \alpha\varepsilon x_0 + \varepsilon h) = o(\varepsilon)$) следует, что

$$(\operatorname{grad} f(x_0), h) = 0.$$

Отсюда и из предыдущего следует, что $\operatorname{grad} f(x_0)$ ортогонален подпространству $\mathfrak{H}$, а значит,

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \mu(\mathbf{P}_1 x_0 - \mathbf{P}_2 x_0).$$

Этим доказана следующая

Теорема 12.3. *Если x_0 есть условно экстремальная точка сильно дифференцируемого функционала $f(x)$ отно-*

сительно гиперболоида $((x)) = c > 0$ *в вещественном гильбертовом пространстве* $\left(((x))^2 = \|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2\right)$, *то*

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \mu(\mathbf{P}_1 x_0 - \mathbf{P}_2 x_0) = \mu \mathbf{W} x_0,$$

где μ — *некоторое вещественное число.*

§ 13. Об условном экстремуме и о критических точках

13.1. Достаточные условия условного экстремума для некоторых ограниченных многообразий. Раньше (теорема 9.2) было доказано, что если на ограниченном слабо замкнутом множестве σ банахова пространства со слабо компактной сферой задан слабо полунепрерывный снизу функционал, то он достигает на σ своей нижней грани. Аналогично доказывается следующее предложение.

Теорема 13.1. *Если на ограниченном слабо замкнутом множестве* σ *банахова пространства со слабо компактной сферой задан слабо полунепрерывный сверху функционал, то он достигает на* σ *своей верхней грани.*

Из теорем 9.2 и 13.1 следует

Теорема 13.2 (обобщенная теорема Вейерштрасса). *Если на ограниченном слабо замкнутом множестве* σ *банахова пространства со слабо компактной сферой задан слабо непрерывный функционал, то он достигает на* σ *своих граней (верхней и нижней).*

Из этих простых предложений и теоремы 9.1 вытекает, что если в ограниченной слабо замкнутой и слабо компактной области ω задан функционал $f(x)$, для которого $\|\operatorname{grad} f(x)\| > 0$, то в случае слабой непрерывности $f(x)$ этот функционал достигает на границе ω' области ω своих граней, а в случае слабой полунепрерывности $f(x)$ он достигает на ω' своей верхней или нижней грани. Приходим, следовательно, к предложению.

Теорема 13.3. *Пусть в ограниченной слабо замкнутой и слабо компактной области* ω *банахова пространства задан вещественный функционал, который в каждой точке* ω *имеет градиент. Тогда*

1°. *Если* $f(x)$ *слабо непрерывен в* ω *и в каждой внутренней точке* ω *выполняется неравенство*

$$\|\operatorname{grad} f(x)\| > 0, \tag{13.1}$$

то функционал $f(x)$ достигает своих граней на границе ω' области ω.

2°. *Если $f(x)$ слабо непрерывен в ω, а неравенство* (13.1) *выполняется для всех внутренних точек ω, кроме одной, то $f(x)$ достигает на ω' по меньшей мере одной из своих граней.*

3°. *Если $f(x)$ слабо полунепрерывен снизу (сверху) в ω и неравенство* (13.1) *выполняется во всех внутренних точках ω, то $f(x)$ достигает на ω' своей нижней (верхней) грани.*

Теорема дает достаточные условия условного экстремума относительно ω'.

13.2. Достаточные условия условного экстремума относительно гиперболоидов в гильбертовом пространстве. Пусть вещественное гильбертово пространство H есть ортогональная сумма двух подпространств H_1 и H_2, где H_1 имеет конечную размерность, а $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ — операторы проектирования из H соответственно в H_1 и H_2. В этом случае согласно лемме 11.1 коническая область V_0 и гиперболические области V_c $(c > 0)$ слабо замкнуты. Пусть, далее, $\varphi(x)$ — вещественный функционал, заданный в области V_0. Рассмотрим вопрос об условном экстремуме функционала $\varphi(x)$ относительно гиперболоидов $\Gamma_c\big(((x)) = c\big)$, лежащих в области V_c.

Теорема 13.4. *Если вещественный слабо полунепрерывный снизу функционал $\varphi(x)$ удовлетворяет в конической области V_0 условиям:*

1° $$\|\operatorname{grad} \varphi(x)\| > 0, \tag{13.1}$$

2° *для внутренних точек V_0*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \varphi(x) = +\infty, \tag{13.2}$$

то, каков бы ни был гиперболоид Γ_c, на нем найдется по меньшей мере одна точка, в которой функционал $\varphi(x)$ имеет условный минимум.

Доказательство. Рассмотрим произвольную гиперболическую область V_c и зафиксируем в ней некоторую точку x_0. Согласно условию (13.2) найдется такая сфера $S(\|x\| = a > \|x_0\|)$, что на пересечении $S \cap V_c$ будет $\varphi(x) > \varphi(x_0)$. Так как V_c слабо замкнута, то и пересечение области V_c и шара $D(\|x\| \leqslant a)$ слабо замкнуто и слабо компактно, так что согласно теореме 13.3 $\varphi(x)$ достигает своей нижней грани на границе $V_c \cap D$. Но на $S \cap V_c$ $\varphi(x) > \varphi(x_0)$, где $x_0 \in V_c \cap (D \setminus S)$, так что $\varphi(x)$ достигает своей нижней грани в некоторой точке x_1 гиперболоида Γ_c, причем $\|x_1\| < a$. Теорема доказана.

Отметим, что если условия теоремы 13.4 выполняются в некоторой гиперболической области V_α, то утверждение этой теоремы будет иметь место для всякого гиперболоида V_c, где $c \geqslant \alpha$. При доказательстве теоремы 13.4 было использовано требование неограниченного роста функционала $\varphi(x)$, т. е. условие 2°. Приведем теперь предложение, в котором требование неограниченного роста $\varphi(x)$ заменено другим требованием.

Теорема 13.5. *Пусть вещественный слабо полунепрерывный снизу функционал $\varphi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1°. *Функционал непрерывен в нуле пространства.*

2°. *Функционал имеет положительную монотонную миноранту на пересечении конической области V_0 и некоторого шара D_R $(\|x\| \leqslant R)$, т. е. для $x \in V_0 \cap D_R$*

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(0) + \alpha(\|x\|), \tag{13.3}$$

где $\alpha(t)$ есть положительная монотонно возрастающая функция на отрезке $[0, R]$.

3°. *Для внутренних точек $x \in V_0 \cap D_R$ выполняется неравенство*

$$\|\operatorname{grad} \varphi(x)\| > 0. \tag{13.1}$$

Тогда существует такое $r > 0$, что на всяком гиперболоиде Γ_c, где $c \leqslant r$, имеется по меньшей мере одна условно минимальная точка функционала $\varphi(x)$.

Доказательство. Так как $\alpha(t)$ есть монотонно возрастающая положительная функция, то из неравенства (13.3) следует, что для $x \in V_0 \cap S$, где S есть сфера $\|x\| = a \leqslant R$, будет

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(0) + \alpha(a). \tag{13.4}$$

Из непрерывности $\varphi(x)$ в точке 0 следует существование такого шара $D_r(\|x\| \leqslant r)$, для точек которого $\varphi(x) < \varphi(0) + \alpha(a)$. Рассмотрим теперь произвольную гиперболическую область V_c, где $0 < c \leqslant r$, и пересечение $D \cap V_c$, где

D — шар $\|x\| \leqslant a$. Так как V_c слабо замкнута, то область $D \cap V_c$ ограничена, слабо замкнута и в ней выполнено неравенство (13.1). Отсюда согласно теореме 13.3 следует, что функционал $\varphi(x)$ достигает своей нижней грани на границе области $D \cap V_c$, т. е. $d_c = \varphi(x_c) = \inf\limits_{D \cap V_c} \varphi(x)$, где $x_c \in (D \cap \Gamma_c) \cup (S \cap V_c)$.

Согласно неравенству (13.4) $x_c \bar{\in} S \cap V_c$, ибо пересечение $D_r \cap V_c$ непусто, а в D_r имеем $\varphi(x) < \varphi(\theta) + \alpha(a)$, следовательно, $x_c \in \Gamma_c \cap (D \setminus S)$. Теорема доказана.

Отметим, что для выполнения условий 2° и 3° теоремы 13.5 достаточно, чтобы имело место следующее неравенство:

$$(\operatorname{grad} \varphi(x),\ x) > 0$$

для всякого ненулевого вектора $x \in V_0 \cap D_R$.

Действительно, из данного неравенства сразу следует неравенство (13.1). Покажем, что из данного неравенства следует и неравенство (13.3). В самом деле,

$$\frac{d}{dt} \varphi(tx) = (\operatorname{grad} \varphi(tx),\ x) = \frac{1}{t} (\operatorname{grad} \varphi(tx),\ tx) > 0,$$

т. е. функционал $\varphi(x)$ растет вдоль любого луча, выходящего из нуля θ и принадлежащего конической области. Возрастание происходит вдоль любого отрезка такого луча длины R с концом в точке θ. Рассмотрим теперь пересечение $V_0 \cap S_r$, где S_r — сфера $0 < \|x\| = r < R$. В каждой точке этого пересечения $\varphi(x) > \varphi(\theta)$ в силу роста $\varphi(x)$. Положим

$$\varphi(\theta) + \alpha(r) = \inf_{\sigma_r} \varphi(x),$$

где $\sigma_r = V_0 \cap S_r$. Число $\alpha(r)$ существует согласно теореме 9.2, ибо $\varphi(x)$ — слабо полунепрерывный снизу функционал на ограниченном и слабо замкнутом множестве $V_0 \cap D_r$, где D_r — шар $\|x\| \leqslant r$. Покажем, что $\alpha(r)$ — монотонно возрастающая положительная функция в промежутке $(0,\ R)$. Действительно, если мы допустим, что $\alpha(r) \leqslant 0$, то найдется последовательность $\{x_n\} \in \sigma_r$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \varphi(x_n) = \inf_{\sigma_r} \varphi(x) = \beta \leqslant \varphi(\theta).$$

Так как шар D_r слабо компактен, то из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая слабо сходится к $x_0 \in V_0 \cap D_r$, причем согласно лемме 11.4 $x_0 \neq \theta$. Так как $\varphi(x)$ — слабо полунепрерывный снизу функционал, то

$$\varphi(x_0) \leqslant \varliminf_{k \to \infty} \varphi(x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} \varphi(x_{n_k}) = \beta \leqslant \varphi(\theta).$$

Это, однако, противоречит условию роста функционала $\varphi(x)$ вдоль всякого отрезка луча, выходящего из точки θ, ибо $x_0 \neq \theta$. Таким образом, $\alpha(r) > 0$, если $0 < r < R$. Далее, так как в силу возрастания функционала $\varphi(x)$

$$\inf_{\sigma_{r_1}} \varphi(x) \leqslant \inf_{\sigma_{r_2}} \varphi(x),$$

если $r_1 < r_2$, то $\alpha(r)$ — положительная монотонно возрастающая функция в промежутке $(0, R)$. Этим доказано следующее предложение.

Теорема 13.6. *Пусть вещественный, дифференцируемый и слабо полунепрерывный снизу функционал $\varphi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1°. *Функционал непрерывен в нуле пространства.*

2°. *Для всякого ненулевого вектора $x \in V_0 \cap D_R$, где D_R — шар $\|x\| \leqslant R$, выполняется неравенство*

$$(\operatorname{grad} \varphi(x),\ x) > 0.$$

Тогда существует такое $r > 0$, что на всяком гиперболоиде Γ_c, где $c \leqslant r$, имеется по меньшей мере одна условно минимальная точка функционала $\varphi(x)$.

В том случае, когда $\operatorname{grad} \varphi(x) = \mathbf{\Phi}(x)$ имеет линейный дифференциал Гато $\mathbf{D\Phi}(x)$, можно сформулировать простые требования, которые обеспечивают выполнение условий теорем 13.4 и 13.6. Такие требования содержатся в следующих предложениях.

Теорема 13.7. *Пусть градиент $\mathbf{\Phi}(x)$ вещественного функционала $\varphi(x)$, заданного в гильбертовом пространстве H, удовлетворяет следующим условиям:*

1°. $\|\mathbf{\Phi}(\theta)\| = 0$.

2°. *В каждой точке $x \in H$*

$$(\mathbf{D\Phi}(x, h),\ h) \geqslant 0. \tag{13.5}$$

3°. *В конической области V_0 имеет место неравенство*

$$(\mathbf{D}\Phi(x, h), h) \geqslant \gamma(\|h\|), \tag{13.6}$$

где h — произвольный элемент пространства H, $\gamma(t)$ — возрастающая функция, заданная для $t \geqslant 0$, причем $\gamma(0) = 0$ и

$$\lim_{t \to +\infty} \gamma(t) = +\infty. \tag{13.7}$$

Тогда на всяком гиперболоиде Γ_c найдется по меньшей мере одна условно экстремальная (минимальная) точка функционала $\varphi(x)$.

Доказательство. Так как $d^2\varphi(x, h, h) = (\mathbf{D}\Phi(x, h), h)$, то из неравенства (13.5) согласно теореме 8.1 следует, что функционал $\varphi(x)$ слабо полунепрерывен снизу. Далее, по формуле (5.6) (учитывая, что $\|\Phi(\theta)\| = 0$) можно написать

$$(\Phi(x), h) = (\Phi(\theta), h) + \int_0^1 (\mathbf{D}\Phi(tx, x), h)\, dt =$$
$$= \int_0^1 (\mathbf{D}\Phi(tx, x), h)\, dt$$

или, если положим $h = x \in V_0$,

$$(\Phi(x), x) = \int_0^1 (\mathbf{D}\Phi(tx, x), x)\, dt.$$

Отсюда и из неравенства (13.6) имеем

$$(\Phi(x), x) \geqslant \int_0^1 \gamma(\|x\|)\, dt = \gamma(\|x\|), \tag{13.8}$$

т. е. для $x \in V_0$ имеем

$$\|\operatorname{grad} \varphi(x)\| > 0, \quad \text{если} \quad x \neq \theta. \tag{13.1}$$

Применяя вновь формулу (5.6), мы из (13.8) получим

$$\varphi(x) = \varphi(\theta) + \int_0^1 (\Phi(tx), x)\, dt \geqslant \varphi(\theta) +$$
$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 (\Phi(tx), x)\, dt \geqslant \varphi(\theta) + \int_{\frac{1}{2}}^1 \gamma(t\|x\|) \frac{dt}{t}.$$

Отсюда и из равенства (13.7) следует, что

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \varphi(x) = +\infty \tag{13.2}$$

для $x \in V_0$. Таким образом, функционал $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 13.4, а значит, имеет место утверждение теоремы 13.4, которое совпадает с утверждением данной теоремы.

Теорема 13.8. *Пусть градиент $\mathbf{\Phi}(x)$ вещественного функционала $\varphi(x)$, заданного в гильбертовом пространстве H и непрерывного в нуле θ пространства H, удовлетворяет следующим условиям:*

1°. $\|\mathbf{\Phi}(\theta)\| = 0$.

2°. *В каждой точке x некоторого шара $D(\|x\| \leqslant a)$*

$$(\mathbf{D\Phi}(x, h), h) \geqslant 0. \tag{13.5}$$

3°. *Для точек $x \in V_0 \cap D$ имеет место неравенство*

$$(\mathbf{D\Phi}(x, h), h) > 0,$$

где h — любой ненулевой элемент пространства H.

Тогда существует такое $r > 0$, что на всяком гиперболоиде Γ_c, где $c \leqslant r$, имеется по меньшей мере одна условно экстремальная (минимальная) точка функционала $\varphi(x)$.

Доказательство. Так как утверждение данной теоремы совпадает с утверждением теоремы 13.6, то достаточно показать, что из условий данной теоремы следуют все условия теоремы 13.6. Из неравенства (13.5) согласно теореме 8.1 следует слабая полунепрерывность снизу в шаре D функционала $\varphi(x)$. Затем, поступая так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, мы найдем, что для всякого $x \in V_0 \cap D$ будет

$$(\mathbf{\Phi}(x), x) > 0, \tag{13.8'}$$

если $x \neq \theta$. Таким образом выполнены все условия теоремы 13.6. Теорема доказана.

Замечание 13.1. Непосредственным следствием теорем 13.5—13.8 является следующее предложение. При выполнении условий какой-нибудь из теорем 13.5—13.8 можно утверждать, что, *каково бы ни было $\beta > 0$, найдется континуум условно экстремальных точек функционала $\varphi(x)$*

относительно гиперболоидов Γ_c, *нормы которых не превосходят числа* β.

Замечание 13.2. Все предложения настоящего пункта переносятся на более общие (чем гиперболические) неограниченные слабо замкнутые области.

13.3. Об условно критических точках относительно сферы. В пункте 13.1 были установлены предложения, которые согласно теореме 12.1 обеспечивают существование условно критических точек функционала относительно сферы $\|x\| = r$ гильбертова пространства. Здесь мы докажем некоторые предложения при условии, что сильно дифференцируемый функционал $f(x)$, заданный в вещественном гильбертовом пространстве H, не имеет критических точек на некоторой сфере $\|x\| = r$.

Теорема 13.9[1]. *Пусть выполнены условия:*

1°. *Сильно дифференцируемый и слабо полунепрерывный снизу функционал* $f(x)$, *заданный в вещественном гильбертовом пространстве* H, *не имеет критических точек на сфере* $\|x\| = r$.

2°. $f(\theta)$ *не является абсолютным минимумом* $f(x)$ *в шаре* $D(\|x\| \leqslant r)$.

Тогда операторное уравнение

$$\operatorname{grad} f(x) = \mu x$$

имеет континуум ненулевых решений в шаре $\|x\| < r$, *соответствующих различным значениям параметра* μ.

Доказательство. Из слабой полунепрерывности снизу функционала $f(x)$ согласно теореме 9.2 следует существование точки $x_0 \in D$, такой, что

$$m = \min_D f(x) = f(x_0) < f(\theta).$$

Рассмотрим функционал

$$\varphi_\alpha(x) = \alpha(x, x) + f(x),$$

где α — любое число, принадлежащее интервалу $\left(0, \frac{f(\theta) - m}{(x_0, x_0)}\right)$. Так как (см. пример 8.1) (x, x) — слабо полунепрерывный снизу функционал, то $\varphi_\alpha(x)$ — слабо полунепрерывный снизу функционал, как сумма двух таких функционалов. От-

---

[1]) Ср. [40] и [36, к], стр. 343.

сюда согласно теореме 9.2 следует существование такой точки $x_\alpha \in D$, что

$$\min_D \varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x_\alpha).$$

Легко видеть, что $x_\alpha \neq \theta$. Действительно, $\varphi_\alpha(\theta) = f(\theta)$, а так как, по условию,

$$0 < \alpha < (x_0, x_0)^{-1}[f(\theta) - m],$$

то

$$\varphi_\alpha(\theta) = f(\theta) > \alpha(x_0, x_0) + m = \alpha(x_0, x_0) + f(x_0) = \\ = \varphi_\alpha(x_0) \geqslant \varphi_\alpha(x_\alpha),$$

т. е. $x_\alpha \neq \theta$. Покажем еще, что $\|x_\alpha\| < r$. Действительно, из допущения противного согласно теореме 12.2 следует, что $\operatorname{grad} \varphi_\alpha(x_\alpha) = \mu x_\alpha$, а так как согласно формуле (5.2) или (12.1)

$$\operatorname{grad} \varphi_\alpha(x_\alpha) = 2\alpha x_\alpha + \operatorname{grad} f(x_\alpha), \tag{13.9}$$

то

$$\operatorname{grad} f(x_\alpha) = (\mu - 2\alpha) x_\alpha, \tag{13.10}$$

где $\|x_\alpha\| = r$, т. е. функционал $f(x)$ имеет критические точки на сфере $(x, x) = r^2$. Это, однако, противоречит условию теоремы. Следовательно, $\|x_\alpha\| < r$. Раз точка x_α является внутренней точкой шара D, то согласно теореме 9.1 $\operatorname{grad} \varphi_\alpha(x_\alpha) = \theta$ или согласно равенству (13.9)

$$\operatorname{grad} f(x_\alpha) = -2\alpha x_\alpha, \tag{13.11}$$

где $\|x_\alpha\| > 0$ и α — произвольное положительное число, меньшее $(x_0, x_0)^{-1}[f(\theta) - m]$. Теорема доказана.

Замечание 13.3. Отметим, что если условие 2° теоремы 13.9 заменить требованием, чтобы $\|\operatorname{grad} f(\theta)\| > 0$, то равенство (13.11) будет иметь место для произвольного положительного α. Действительно, из равенства (13.9) следует, что функционал $\varphi_\alpha(x)$ не может достигать своей нижней грани в D ни в точке θ (ибо $\operatorname{grad} \varphi_\alpha(\theta) = \operatorname{grad} f(\theta)$, а тогда по теореме 9.1 $\operatorname{grad} \varphi_\alpha(\theta) = \theta$), ни на сфере $(x, x) = r$, ибо тогда должно было бы выполняться равенство (13.10), которое противоречит условию 1° теоремы 13.9. Следовательно, для произвольного положительного α имеет место равенство (13.11), где $\|x_\alpha\| < r$. Из теоремы 13.9, путем изменения знака у $f(x)$, следует

Теорема 13.10. *Пусть выполнены условия*:

1°. *Сильно дифференцируемый (в смысле Фреше) и слабо полунепрерывный сверху функционал $f(x)$, заданный в вещественном гильбертовом пространстве H, не имеет критических точек на сфере $(x, x) = r^2$.*

2°. *$f(\theta)$ не является абсолютным максимумом функционала $f(x)$ в шаре $D(\|x\| \leqslant r)$.*

Тогда операторное уравнение

$$\operatorname{grad} f(x) = \mu x$$

имеет континуум ненулевых решений в шаре $\|x\| < r$, соответствующих различным значениям μ.

Так как слабо непрерывный функционал $f(x)$ слабо полунепрерывен снизу и сверху, то из теорем 13.9 и 13.10 вытекает следующая теорема.

Теорема 13.11. *Евли дифференцируемый в смысле Фреше слабо непрерывный функционал, заданный в вещественном гильбертовом пространстве H, не имеет критических точек на сфере $(x, x) = r^2$, то операторное уравнение*

$$\operatorname{grad} f(x) = \mu x$$

имеет континуум ненулевых решений в шаре $\|x\| < r$, соответствующих различным значениям параметра μ.

Отметим, что в данной теореме в отличие от двух предыдущих мы не налагаем никаких ограничений на $f(\theta)$, ибо так как на сфере $\|x\| = r$ нет критических точек функционала $f(x)$, то $f(x)$ не может быть постоянным в шаре $D(\|x\| \leqslant r)$. Ввиду этого

$$m = \min_D f(x) < \max_D f(x) = M,$$

а потому $f(\theta)$ отлично от одного из чисел m или M.

13.4. Об условно критических точках относительно гиперболоидов. В пункте 13.2 были установлены достаточные условия существования условно критических точек относительно гиперболоидов в гильбертовом пространстве. Здесь мы выведем одно следствие из допущения, что функционал $f(x)$ не имеет критических точек относительно некоторых гиперболоидов в гильбертовом пространстве.

Так же, как в пункте 13.2, будем рассматривать гиперболоиды Γ_c $\big(((x))=c>0\big)$ и гиперболические области V_c $\big(((x))\geqslant c>0\big)$, заданные в вещественном гильбертовом пространстве H, где

$$((x))=(\|\mathbf{P}_1x\|^2-\|\mathbf{P}_2x\|^2)^{\frac{1}{2}},\quad \mathbf{P}_1x+\mathbf{P}_2x=x,$$

а $\mathbf{P}_1$ — оператор проектирования из H в подпространство H_1, имеющее конечную размерность.

Лемма 13.1. *Если функционал $f(x)$ не имеет условно критических точек относительно гиперболоида Γ_c, то и функционал*

$$\varphi_\alpha(x)=f(x)-\alpha((x))^2,$$

где α — произвольное вещественное число, также не имеет условно критических точек относительно данного гиперболоида Γ_c.

Доказательство. Согласно равенству (10.7) мы можем написать

$$\operatorname{grad}\varphi_\alpha(x)=\operatorname{grad}f(x)-2\alpha(\mathbf{P}_1x-\mathbf{P}_2x).$$

Если теперь допустить, что функционал $\varphi_\alpha(x)$ имеет условно критические точки относительно гиперболоида Γ_c, то согласно (10.7)

$$\operatorname{grad}\varphi_\alpha(x)=\mu\operatorname{grad}((x))^2=2\mu(\mathbf{P}_1x-\mathbf{P}_2x).$$

Из последних двух равенств мы находим, что для некоторого $x\in\Gamma_c$

$$\operatorname{grad}f(x)=2(\mu+\alpha)(\mathbf{P}_1x-\mathbf{P}_2x)=(\mu+\alpha)\operatorname{grad}((x))^2,$$

что противоречит условию. Лемма доказана.

Отметим, что данная лемма имеет место и тогда, когда размерность подпространства H_1 является бесконечной.

Теорема 13.12. *Если сильно дифференцируемый и слабо полунепрерывный снизу функционал $f(x)$, заданный в вещественном гильбертовом пространстве H, не имеет условно критических точек относительно гиперболоида Γ_c и в гиперболической области V_c удовлетворяет условию*

$$\lim_{\|x\|\to\infty}[f(x)-a_0((x))^2]=+\infty, \tag{13.12}$$

то, каково бы ни было положительное число $\alpha \leqslant a_0$, *уравнение*

$$\operatorname{grad} f(x) = 2\alpha(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_2 x)$$

имеет по меньшей мере одно решение x_α, *удовлетворяющее условию* $((x_\alpha)) > c$.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$\varphi_\alpha(x) = f(x) - \alpha(\,(x)\,)^2,$$

который слабо полунепрерывен снизу как сумма двух таких функционалов (см. пример 8.2) Согласно условию (13.12) найдется сфера $S(\|x\| = r)$, на которой $\varphi_\alpha(x) > \varphi_\alpha(x_0)$, где $x_0 \in V_c$ и $\|x_0\| < r$. Так как шар $D(\|x\| \leqslant r)$ слабо замкнут и V_c — слабо замкнутая область по лемме 11.1, то пересечение $V_c \cap D$ — слабо замкнутая область. Отсюда согласно теореме 9.2 мы заключаем, что существует точка $x_\alpha \in V_c \cap D$ такая, что

$$\min_{V_c \cap D} \varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x_\alpha).$$

Из неравенства $\varphi_\alpha(x) > \varphi_\alpha(x_0)$, которое выполняется для $x \in S$, следует, что $x_\alpha \overline{\in} S$. Затем согласно лемме 13.1 $x_\alpha \overline{\in} \Gamma_c$, так что x_α — внутренняя точка области $V_c \cap D$, а потому согласно теореме 9.1 $\operatorname{grad} \varphi_\alpha(x_\alpha) = 0$. Так как

$$\operatorname{grad} \varphi_\alpha(x) = \operatorname{grad} f(x) - 2\alpha(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_2 x),$$

то

$$\operatorname{grad} f(x_\alpha) = 2\alpha(\mathbf{P}_1 x_\alpha - \mathbf{P}_2 x_\alpha).$$

Теорема доказана.

Замечание 13.4. Отметим, что условие (13.12) выполняется, если для $x \in V_c$ выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant 2a_0(x, x) + a_1(x, x)^\gamma + a_2,$$

где $0 < \gamma < 1$, $a_1 < 0$, $a_2 < 0$. Действительно, в этом случае для $\alpha \leqslant a_0$ мы будем иметь

$$f(x) - \alpha(\,(x)\,)^2 \geqslant 2a_0(\|\mathbf{P}_1 x\|^2 + \|\mathbf{P}_2 x\|^2) - \alpha(\|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2) +$$
$$+ a_1(x, x)^\gamma + a_2 \geqslant 2a_0(\|\mathbf{P}_1 x\|^2 + \|\mathbf{P}_2 x\|^2) - a_0(\|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2) +$$
$$+ a_1(x, x)^\gamma + a_2 \geqslant a_0(\|\mathbf{P}_1 x\|^2 + \|\mathbf{P}_2 x\|^2) + a_1(x, x)^\gamma + a_2 =$$
$$= (x, x)^\gamma [a_0(x, x)^{1-\gamma} + a_1] + a_2.$$

Отсюда следует условие (13.12).

Теорема 13.13. *Пусть сильно дифференцируемый и слабо полунепрерывный снизу функционал $f(x)$, заданный в вещественном гильбертовом пространстве H, не имеет условно критических точек относительно гиперболоида Γ_c и в гиперболической области V_c*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty. \tag{13.13}$$

Тогда операторное уравнение

$$\operatorname{grad} f(x) = \mu(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_2 x)$$

имеет континуум решений, лежащих внутри V_c, а значит, их нормы больше c[1]).

Доказательство. Пусть $x_0 \in \Gamma_c$ и $\|x_0\| = c$. Из равенства (13.13) следует существование сферы $S(\|x\| = R)$, на которой

$$f(x) > f(x_0) + \frac{1}{2}. \tag{13.14}$$

Рассмотрим теперь функционал

$$\varphi_\alpha(x) = f(x) - \frac{1}{2}\alpha((x))^2,$$

где $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{R^2}$, который слабо полунепрерывен снизу как сумма двух таких функционалов (см. пример 8.2). Так как шар $D(\|x\| \leqslant R)$ слабо замкнут и слабо компактен и по лемме 11.1 гиперболическая область V_c слабо замкнута, то пересечение $V_c \cap D$ — слабо замкнутая и слабо компактная область. Отсюда согласно теореме 9.2 существует точка $x_\alpha \in V_c \cap D$ такая, что

$$\min_{V_c \cap D} \varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x_\alpha).$$

Далее, так как в области $V_c \cap D$

$$c^2 \leqslant ((x))^2 = \|\mathbf{P}_1 x\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x\|^2 \leqslant \|x\|^2 \leqslant R^2$$

и по условию $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{R^2}$, то согласно неравенству (13.14)

---

[1]) Ср. [36, к], стр. 349.

на множестве $S \cap V_c$ выполняется неравенство

$$\varphi_\alpha(x) = f(x) - \frac{1}{2}\alpha((x))^2 \geqslant f(x) - \frac{1}{2R^2}((x))^2 \geqslant f(x) - \frac{1}{2} >$$

$$> f(x_0) \geqslant f(x_0) - \frac{1}{2}\alpha((x_0))^2 = \varphi_\alpha(x_0) \geqslant \varphi_\alpha(x_\alpha).$$

Ввиду этого вектор $x_\alpha \overline{\in} S \cap V_c$. Далее, согласно лемме 13.1 вектор $x_\alpha \overline{\in} \Gamma_c \cap D$. Следовательно, вектор x_α является внутренней точкой пересечения $V_c \cap D$, а потому согласно теореме 9.1 $\operatorname{grad} \varphi_\alpha(x_\alpha) = 0$. Так как

$$\operatorname{grad} \varphi_\alpha(x) = \operatorname{grad} f(x) - \alpha(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_2 x),$$

то

$$\operatorname{grad} f(x_\alpha) = \alpha(\mathbf{P}_1 x_\alpha - \mathbf{P}_2 x_\alpha),$$

где α — любое число полуинтервала $(0, R^{-2}]$. Теорема доказана.

§ 14. Условно критические точки четных функционалов

Для четных функционалов, заданных в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве, Л. А. Люстерник впервые установил [46, б] существование счетного числа условно критических точек относительно любой сферы $\|x\| = r > 0$. Методы, развитые Л. А. Люстерником в работе [46, б], были использованы другими авторами для установления аналогичных результатов. При доказательстве существования счетного числа условно критических точек Л. А. Люстерник требовал, чтобы градиент $\mathbf{F}(x)$ рассматриваемого функционала $f(x)$ был позитивным, т. е. $(\mathbf{F}(x), x) > 0$ для $\|x\| > 0$, усиленно непрерывным[1]), нечетно-однородным и чтобы он удовлетворял условию Липшица. Некоторые из этих ограничений оказались лишними и они были сняты в работах В. И. Соболева и автора.

---

[1]) В работе [46, б] требование усиленной непрерывности градиента отсутствует в формулировке теоремы, но используется при доказательстве теоремы. В другой работе [46, в] требуется, чтобы градиент был компактным и удовлетворял условию Липшица. Из этих двух условий согласно теореме 7.4 следует усиленная непрерывность градиента.

В. И. Соболев показал [66, а, б], что утверждение теоремы Л. А. Люстерника о существовании счетного числа условно критических точек сохраняется при отказе от требования нечетной однородности градиента, а затем автор установил [9, е, п], что в теореме Л. А. Люстерника можно отказаться не только от требований нечетной однородности градиента, но и от требования, чтобы градиент удовлетворял условию Липшица.

Методы Л. А. Люстерника были использованы в работах Э. С. Цитланадзе [72] для доказательства существования у четных функционалов счетного числа условно критических точек относительно некоторых ограниченных многообразий в банаховых пространствах.

В настоящем параграфе мы докажем существование счетного числа условно критических точек относительно любой сферы $\|x\| = r > 0$ сепарабельного гильбертова пространства у четных функционалов, градиенты которых позитивны и усиленно непрерывны[1]). Для этого мы предварительно рассмотрим некоторые вспомогательные понятия.

14.1. Категория множества Люстерника—Шнирельмана. Для оценки числа геометрически различных критических точек функций Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман ввели понятие *категории множества* [48, г]. Категория множества связана с понятием непрерывной деформации. Пусть множества V_1 и V_2 принадлежат множеству U. Говорят, что множество V_2 есть результат непрерывной деформации на U множества V_1, если существует непрерывный по $x \in U$ и $t \in [0, 1]$ оператор $\Psi(x, t)$, значения которого принадлежат U для всех $t \in [0, 1]$, причем $\Psi(V_1, 0) = V_1$, $\Psi(V_1, 1) = V_2$. В конечномерном или компактном пространстве E^n категория определяется так. Замкнутое множество $A \subset E^n$ есть *множество категории* 1 *по отношению к* E^n, если его можно свести к точке непрерывной деформацией внутри E^n. Замкнутое множество $B \subset E^n$ есть *множество категории* k *по отношению к* E^n (или *на* E^n), если его можно представить как соединение k замкнутых множеств категории 1 на E^n и оно не может быть составлено из мень-

---

[1]) Согласно теореме 7.6 требование усиленной непрерывности градиента может быть заменено требованием равномерной дифференцируемости функционала.

шего числа таких частей. Кратко пишут $\operatorname{cat}_{E^n} B = k$. Категория обладает следующими свойствами:

1) *Если* $A \subset B$, *то* $\operatorname{cat}_{E^n} A \leqslant \operatorname{cat}_{E^n} B$.

2) $\operatorname{cat}_{E^n}(A \cup B) \leqslant \operatorname{cat}_{E^n} A + \operatorname{cat}_{E^n} B$.

3) *При непрерывной деформации категория не понижается.*

4) *Категория достаточно малой окрестности* $U(A, \varepsilon)$ *множества* A *совпадает с категорией* A.

5) *Если* A *— замкнутое множество размерности* m *на* E^n, *то* $\operatorname{cat}_{E^n} A \leqslant m + 1$.

Из последнего свойства имеем следствие: *если* $\operatorname{cat}_{E^n} A = m + 1$, *то размерность множества* A *не меньше, чем* m. Понятие категории множества переносится на бесконечномерные пространства.

Для наших целей понадобится понятие «категории множества» в проективном гильбертовом пространстве. Пусть S есть сфера $\|x\| = a$ вещественного гильбертова пространства H. Отождествляя (склеивая) диаметрально противоположные точки S, т. е. точки x и $-x$, принадлежащие S, мы получим проективное гильбертово пространство, которое обозначим через S^*, а точки S^* — через x^*. Расстояние между точками x_1^*, $x_2^* \in S^*$ определяется, как наименьшее из чисел $\rho(x_1, x_2)$, $\rho(-x_1, x_2)$, где ρ есть расстояние в H.

Категория множества в S^* вводится так же, как в конечномерных пространствах. Следует отметить, что категория множества относительно пространства, вообще говоря, понижается при вкладывании этого пространства в более широкое пространство. Однако категория множества относительно проективного пространства не изменяется при вкладывании данного проективного пространства в более широкое проективное пространство. В частности, если замкнутое множество $A^* \subset S_n^* \subset S^*$, где S_n^* есть n-мерное евклидово проективное пространство (оно получается путем отождествления диаметрально противоположных точек n-мерной евклидовой сферы $S_n \subset S$), то (см. [72, к], лемма 6)

$$\operatorname{cat}_{S_n^*} A^* = \operatorname{cat}_{S^*} A^*.$$

Отсюда согласно известной теореме Л. Г. Шнирельмана ([76] и [48, а], стр. 26) о том, что n-мерное проективное пространство имеет категорию относительно самого себя, равную $n+1$, вытекает следующее предложение ([72, к], лемма 7).

Лемма 14.1. *В проективном гильбертовом пространстве S^* существуют множества любой категории.*

Так как четные функционалы, заданные на S, можно рассматривать, как функционалы, заданные на S^*, то лемма 14.1 при некоторых дополнительных ограничениях позволяет перенести на четные функционалы, заданные в H (или в пространстве Банаха), замечательное предложение Л. А. Люстерника (см. [46, г] и [48, в], стр. 176) о том, что *число геометрически различных стационарных точек любой функции, заданной на многообразии R, не меньше, чем категория R относительно самого себя.*

14.2. Принцип критической точки. Пусть в вещественном гильбертовом пространстве H задан позитивный оператор $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$. Так как в H $\operatorname{grad}(x, x) = 2x$, то условно критические точки функционала $f(x)$ относительно сферы $(x, x) = a^2$ удовлетворяют равенству

$$\operatorname{grad} f(x) = \frac{1}{2} \lambda \operatorname{grad}(x, x),$$

которое может быть записано так:

$$\mathbf{F}(x) = \lambda x, \tag{14.1}$$

где

$$\lambda = (x, x)^{-1} (\mathbf{F}(x), x) = a^{-2} (\mathbf{F}(x), x).$$

Отсюда и из равенства (14.1) мы приходим к выводу, что критические точки функционала $f(x)$ относительно сферы $(x, x) = a^2$ суть нули оператора

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{F}(x) - a^{-2} (\mathbf{F}(x), x) x, \tag{14.2}$$

принадлежащие сфере $(x, x) = a^2$.

Если в конечномерном пространстве E заданы непрерывная функция $f(x)$ и замкнутое многообразие $\varphi(x) = c = \text{const}$, то теорема Вейерштрасса о достижении граней устанавливает (если f и φ имеют сильные градиенты) существование не менее двух критических точек функции $f(x)$ относительно многообразия $\varphi(x) = c$. Для оценки общего числа геометрически различных критических точек функции $f(x)$ относительно многообразия R Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом был установлен «принцип критической точки» [48, г]. Этот принцип состоит в следующем. Пусть V есть компактное множество на R. Рассмотрим совокупность всех множеств, которые получаются из V путем непрерывной деформации на R. Эта совокупность называется *компактным гомотопическим классом* ([48, в], стр. 170). Положим

$$c = \inf_{[V]} \max_{V} f(x),$$

где $[V]$ — компактный гомотопический класс на многообразии R конечномерного пространства E, и обозначим через $V_0 \in [V]$ минимальное множество, т. е. то множество, на котором $\max\limits_{V} f(x) = c$. Принцип критической точки Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана состоит в том, что *минимальное множество содержит по меньшей мере одну критическую точку*. Этот принцип переносится и на бесконечномерные пространства. Пусть $[V]$ есть компактный гомотопический класс центрально симметрических множеств на сфере $S(\|x\| = a)$ вещественного гильбертова пространства H, т. е. совокупность центрально симметрических замкнутых и компактных множеств сферы S, обладающая тем свойством, что если эта совокупность содержит множество V, то она содержит все замкнутые компактные центрально симметрические множества, которые получаются из V путем непрерывной деформации на S. Обозначим через $C(V)$ минимум слабо непрерывного функционала $f(x)$ на V и положим

$$c = \sup_{[V]} C(V) = \sup_{[V]} \min_{V} f(x). \qquad (14.3)$$

Принцип критической точки функционала относительно сферы гильбертова пространства может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 14.1. *Пусть выполнены условия:*

1°. *Функционал $f(x)$ имеет усиленно непрерывный градиент $\mathbf{F}(x)$ в шаре $\|x\| \leqslant R$ вещественного гильбертова пространства H и $f(\theta) = 0$, где $\|\theta\| = 0$.*

2°. *Нечетный потенциальный оператор $\mathbf{F}(x)$ позитивен, т. е.*

$$(\mathbf{F}(x), x) > 0, \quad \|x\| > 0. \qquad (14.4)$$

Тогда, каков бы ни был компактный гомотопический класс $[V]$ на сфере $S(\|x\| = a \leqslant R)$ или на S^*, существует *по меньшей мере одна точка $x_0 \in S$ (или $x_0 \in S^*$), в которой*

$$f(x_0) = c = \sup_{[V]} \min_{V} f(x),$$

причем x_0 есть критическая точка функционала $f(x)$ относительно сферы S.

Доказательство. Так как функционал $f(x)$ имеет усиленно непрерывный градиент, то согласно теоремам 1.4 и 8.2 $f(x)$ есть слабо непрерывный функционал, а потому существует число

$$c = \sup_{[V]} \min_{V} f(x), \tag{14.3}$$

ибо $f(x)$ как слабо непрерывный функционал ограничен на S. Из определения числа c вытекает существование последовательности $\{x_n\}$, принадлежащей множествам класса $[V]$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$. Докажем существование такой последовательности $\{x_n\} \in S$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c; \quad \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{A}(x_n)\| = 0, \tag{14.5}$$

где оператор $\mathbf{A}(x)$ определяется равенством (14.2). Равенства (14.5) мы будем доказывать от противного. Если допустить, что равенства (14.5) не имеют места, то найдутся такие числа $\alpha > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, что

$$\|\mathbf{A}(x)\| > \alpha \tag{14.6}$$

для тех $x \in S$, для которых $|f(x) - c| < \varepsilon_0$. Обозначим через $\omega_{\varepsilon_0} \subset S$ то множество, на котором выполняется неравенство $|f(x) - c| < \varepsilon_0$. В силу леммы 1.2 каждому $x \in \omega_{\varepsilon_0}$ отвечает такой h_x, что $\|h_x\| = 1$ и

$$(\mathbf{A}(x),\ h_x) \geqslant \frac{1}{2} \|\mathbf{A}(x)\|.$$

Отсюда и из неравенства (14.6) вытекает, что для произвольного $x^* \in \omega_{\varepsilon_0}$ будет

$$(\mathbf{A}(x^*),\ h_{x^*}) > \frac{1}{2}\alpha. \tag{14.7}$$

Воспользуемся теперь усиленной непрерывностью оператора $\mathbf{F}(x)$. Из усиленной непрерывности $\mathbf{F}(x)$ согласно теореме 1.4 вытекает равномерная непрерывность $\mathbf{F}(x)$

в шаре $\|x\| = a$. Отсюда следует, что заданному $\alpha > 0$ отвечает такое $r > 0$, что для всех x_1 и x_2 из шара $\|x\| \leqslant a$, для которых $\|x_2 - x_1\| \leqslant r$, будет

$$\|\mathbf{A}(x_2) - \mathbf{A}(x_1)\| < \frac{\alpha}{8} \quad \text{и} \quad \|\tilde{\mathbf{A}}(x_2) - \mathbf{A}(x_1)\| < \frac{\alpha}{8},$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}}(x) = \mathbf{F}(x) - a^{-2}(\mathbf{F}(x), z)\, z; \quad z \in S, \quad \|x - z\| \leqslant r.$$

Отсюда и из неравенства (14.7) вытекает, что, какова бы ни была точка $x^* \in \omega_{\varepsilon_0}$, существует шар $\|x - x^*\| \leqslant r$, для всех точек которого выполняется неравенство

$$(\tilde{\mathbf{A}}(x), h_{x^*}) > \frac{1}{4}\alpha. \tag{14.8}$$

Рассмотрим теперь на сфере S кривые $x(t)$, определяемые дифференциальным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = h - \frac{1}{a^2}(x(t), h)\; x(t), \tag{14.9}$$

где $h \in H$ и $\|h\| = 1$.

Правая часть этого уравнения удовлетворяет условию Липшица

$$\begin{aligned}\|(x_2, h)\, x_2 - (x_1, h)\, x_1\| \leqslant \|x_1\|\, |(x_2, h) - (x_1, h)| &+ \\ + |(x_2, h)|\, \|x_2 - x_1\| \leqslant \|x_1\|\, \|h\|\, \|x_2 - x_1\| &+ \\ + \|x_2\|\, \|h\|\, \|x_2 - x_1\| \leqslant 2a \|x_2 - x_1\|&,\end{aligned}$$

ибо $\|h\| = 1$, $\|x_1\| \leqslant a$, $\|x_2\| \leqslant a$. Раз правая часть дифференциального уравнения (14.9) удовлетворяет условию Липшица, то задача Коши для этого уравнения имеет (см. [47], стр. 291) единственное решение $x(t)$, $t \in [0, t_1]$, где t_1 не зависит от начального условия $x_0 = x(0)$ и от h, причем равномерно на S $\|x(t) - x(0)\| \leqslant \delta$ и $\|x(t) - x(0)\| \to 0$ при $t \to 0$. Будем еще считать, что t_1 выбрано так, что

$$\|x(t) - x(0)\| \leqslant \delta < r$$

для $t \in [0, t_1]$. Пусть теперь $x_0 = x(0)$ есть произвольная точка множества ω_{ε_0}. Применяя формулу Лагранжа (5.8), напишем

$$f(x(t_1))-f(x_0)=(\mathbf{F}(x_0+\tau(x(t_1)-x_0)),\quad x(t_1)-x_0),$$

где

$$x_\tau=x_0+\tau(x(t_1)-x_0)\quad \text{и}\quad \|x_\tau-x_0\|\leqslant\delta<r.$$

Но согласно равенству (14.9)

$$x(t_1)-x_0=\int_0^{t_1}[h_0-a^{-2}(x(t),\ h_0)\,x(t)]\,dt,$$

где h_0 взято так, чтобы выполнялось неравенство (14.7) для x_0 и h_0. Отсюда и из предыдущего имеем

$$f(x(t_1))-f(x_0)=$$

$$=\int_0^{t_1}[(\mathbf{F}(x_\tau),h_0)-a^{-2}(\mathbf{F}(x_\tau),\ x(t))(x(t),h_0)]\,dt=\int_0^{t_1}(\mathbf{A}(x_\tau),h_0)\,dt$$

или согласно неравенству (14.8)

$$f(x(t_1))-f(x_0)>\frac{1}{4}\alpha t_1. \tag{14.10}$$

Положим теперь $\varepsilon=\min\left\{\frac{1}{8}\alpha t_1,\ \varepsilon_0\right\}$ и рассмотрим такое множество V_ε, на котором

$$\min_{V_\varepsilon} f(x)\geqslant c-\varepsilon.$$

Тогда для всякого $x_0\in V_\varepsilon\cap\omega_{\varepsilon_0}$ мы согласно неравенству (14.10) будем иметь

$$f(x(t_1))-f(x_0)>2\varepsilon.$$

Отсюда, так как $f(x_0)\geqslant c-\varepsilon$, имеем

$$f(x(t_1))>c+\varepsilon. \tag{14.11}$$

Будем теперь деформировать множество V_ε следующим образом. Каждую точку $x_0\in V_\varepsilon$, в которой $|f(x_0)-c|\leqslant\varepsilon$, мы будем перемещать по кривой $x(t)$ до тех пор, пока $f(x(t))$ не станет равным $c+\varepsilon$. Это возможно согласно неравенству (14.11). Точки $x_0\in V_\varepsilon$, в которых $f(x_0)\geqslant c+\varepsilon$, мы оставим на месте. В результате такой непрерывной деформации компактное множество $V_\varepsilon\subset[V]$ перейдет в компактное множество $\tilde{V}_\varepsilon$, на котором $f(x) \geqslant c+\varepsilon$. Отсюда имеем

$$c = \sup_{[V]} \min_{V} f(x) \geqslant \min_{\tilde{V}_\varepsilon} f(x) = c+\varepsilon,$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает существование такой последовательности $\{x_n\} \in S$, для которой выполняются равенства (14.5). Так как сфера S слабо компактна, то из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_n^{(1)}\}$, которая сходится слабо к $x_0 \in D$, где D есть шар $\|x\| \leqslant a$. В силу слабой непрерывности функционала $f(x)$ мы согласно равенствам (14.5) имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^{(1)}) = f(x_0) = c, \tag{14.12}$$

а так как $c > 0$, то $x_0 \neq 0$. Отметим, что неравенство $c > 0$ вытекает из следующего. Согласно равенству (5.6) мы можем написать

$$f(x) = \int_0^1 (\mathbf{F}(tx),\ x)\,dt = \int_0^1 (\mathbf{F}(tx),\ tx)\,\frac{dt}{t}.$$

Отсюда и из условия (14.4) следует, что $f(x) > 0$, если $\|x\| > 0$. Таким образом,

$$\min_{V} f(x) > 0,$$

а значит, и $c > 0$. Далее, так как $\mathbf{F}(x)$ есть усиленно непрерывный оператор, то

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{F}(x_n^{(1)}) = y; \quad \lim_{n\to\infty} (\mathbf{F}(x_n^{(1)}),\ x_n^{(1)}) = (\mathbf{F}(x_0),\ x_0)$$

и согласно условию (14.4) $(\mathbf{F}(x_0),\ x_0) = \beta > 0$, ибо $\|x_0\| > 0$. Отсюда и из равенств (14.5) и (14.2) следует

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(1)} = a^2\beta^{-1}y,$$

т. е. последовательность $\{x_n^{(1)}\}$ сходится сильно. Так как $\{x_n^{(1)}\} \in S$, то $a^2\beta^{-1}y \in S$, причем $a^2\beta^{-1}y = x_0$, ибо сильный предел должен совпасть со слабым. Переходя теперь к пределу в равенстве (14.5), мы получим окончательно

$$\mathbf{F}(x_0) = a^{-2}(\mathbf{F}(x_0),\ x_0)\,x_0;\quad x_0 \in S.$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема переносится на более общие пространства, так что справедлива

Теорема 14.2. *Пусть выполнены условия:*

1°. *Четный функционал $f(x)$ имеет усиленно непрерывный градиент $\mathbf{F}(x)$ в шаре $\|x\| \leqslant R$ вещественного банахова пространства со счетным базисом, в котором всякое ограниченное множество слабо компактно.*

2°. *Потенциальный оператор $\mathbf{F}(x)$ позитивен, т. е. $(\mathbf{F}(x),\ x) > 0$.*

3°. *Оператор $\Phi(x) = \operatorname{grad}\|x\|$ удовлетворяет на сфере $\|x\| = a \leqslant R$ условию Липшица и имеет обратный непрерывный оператор.*

Тогда, каков бы ни был компактный гомотопический класс $[V]$ на $S^*(\|x\| = a \leqslant R)$, существует по меньшей мере одна точка $x_0 \in S^*$, в которой

$$c = \sup_{[V]} \min_{V} f(x) = f(x_0),$$

причем x_0 есть критическая точка функционала $f(x)$ относительно сферы S.

Доказательство этой теоремы в основном совпадает с доказательством теоремы 14.1.

14.3. Критические точки четных функционалов. При исследовании вопроса о критических точках слабо непрерывного функционала $f(x)$ относительно сферы S известную роль играет следующее свойство таких функционалов. Если на сфере $S \subset H$ задан слабо непрерывный функционал $f(x)$, для которого $f(0) = 0$, то $|f(x)|$ не может быть ограничено снизу положительным числом, ибо на S существуют последовательности $\{x_n\}$, которые слабо сходятся к 0, а потому для такой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Имеет место и следующее более сильное предложение.

Лемма 14.2. *Если в сепарабельном гильбертовом пространстве H задан четный, слабо непрерывный функционал, который в нулевой точке пространства равен нулю, то каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое натуральное n, что всякое компактное множество $V \subset S^*$, категория кото-*

рого больше n, содержит по меньшей мере одну точку, в которой абсолютное значение функционала меньше ε.

Доказательство. Согласно теореме 7.1 заданному $\varepsilon>0$ отвечает такое n, что для любого $x\in S^*$ будет

$$|f(x)-f(\mathbf{P}^{(n)}x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(\mathbf{P}^{(n)}x)|+|f(\mathbf{P}^{(n)}x)|<\frac{\varepsilon}{2}+|f(\mathbf{P}^{(n)}x)|. \quad (14.13)$$

Далее, так как $f(\theta)=0$, то заданному $\varepsilon>0$ отвечает такая δ-окрестность нулевого элемента θ, что как только $\|x\|\leqslant\delta$, то

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \quad (11.14)$$

Рассмотрим теперь произвольное компактное множество $V\subset S^*$. Если V содержит такие x, для которых $\|\mathbf{P}^{(n)}x\|\leqslant\delta$, то согласно неравенствам (14.14) и (14.13) $|f(x)|<\varepsilon$, и лемма доказана; если V не содержит таких точек, т. е. если для любого $x\in V$ $\|\mathbf{P}^{(n)}x\|>\delta$, то это множество V мы непрерывно деформируем по S^* при помощи оператора

$$\mathbf{D}_n(x,\,t)=a\,\frac{x(1-t)+t\,\mathbf{P}^{(n)}x}{\|x(1-t)+t\,\mathbf{P}^{(n)}x\|},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Этот оператор непрерывен, ибо $(1-t)\,x+t\,\mathbf{P}^{(n)}x=\mathbf{P}^{(n)}x+ +(1-t)\,\mathbf{P}_nx$ $(\mathbf{P}^{(n)}x+\mathbf{P}_nx=x)$, откуда

$$\|(1-t)\,x+t\mathbf{P}^{(n)}x\|^2=\|\mathbf{P}^{(n)}x\|^2+(1-t)^2\|\mathbf{P}_nx\|^2\geqslant\|\mathbf{P}^{(n)}x\|^2>\delta^2.$$

Затем,

$$\mathbf{D}_n(x,\,0)=x;\quad \mathbf{D}_n(x,\,1)=\frac{\mathbf{P}^{(n)}x}{\|\mathbf{P}^{(n)}x\|}\,a.$$

Но $\mathbf{D}_n(V,\,1)\subset S^*_{n-1}$, так что $\operatorname{cat}_{S^*}\mathbf{D}_n(V,\,1)\leqslant n$. Отсюда, так как $\mathbf{D}_n(V,\,1)$ есть непрерывная деформация V, то, согласно свойству 3 категорий, $\operatorname{cat}_{S^*}V\leqslant n$, а значит, если $\operatorname{cat}_{S^*}V>n$, то V содержит по меньшей мере одну точку x_0, для которой $\|\mathbf{P}^{(n_0)}x_0\|\leqslant\delta$, откуда согласно неравенствам (14.14) и (14.13) $|f(x)|<\varepsilon$. Лемма доказана.

Замечание 14.1. Отметим, что доказанная лемма сохраняется для слабо непрерывных четных функционалов, заданных в регулярном пространстве типа Банаха со счетным биортогональным базисом.

Теорема 14.3. *Пусть в шаре $\|x\| \leqslant R$ вещественного сепарабельного гильбертова пространства H задан четный функционал $f(x)$, который имеет усиленно непрерывный и позитивный градиент $\mathbf{F}(x)$. Тогда на всякой сфере $S(\|x\| = a \leqslant R)$ существует последовательность критических точек этого функционала (относительно S), которая сходится слабо к нулевому элементу θ.*

Доказательство. Так как $f(x)$ есть четный функционал, то его можно рассматривать в проективном гильбертовом пространстве S^*. Согласно лемме 14.1 в S^* существуют множества любой категории. Обозначим через $[V]_k$ компактный гомотопический класс множеств на S^*, имеющих категорию $\geqslant k$. Согласно теореме 14.1 существует по меньшей мере одна критическая точка $x_k \in S^*$, для которой

$$f(x_k) = \sup_{[V]_k} \min_{V} f(x) = c_k.$$

Рассмотрим последовательность критических значений функционала $f(x)$.

$$c_1, \ c_2, \ \ldots, \ c_n, \ \ldots$$

Из самого определения следует, что последовательность положительных чисел монотонно убывает, т. е. $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \geqslant c_3 \geqslant \ldots$, причем согласно лемме 14.2

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 0. \tag{14.15}$$

В силу слабой компактности S^* из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая слабо сходится к x_0, так что в силу слабой непрерывности $f(x)$ мы согласно равенству (14.15) имеем

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} c_{n_k} = 0,$$

т. е. $x_0 = \theta$, ибо если $\|x_0\| > 0$, то в силу позитивности $\mathbf{F}(x)$ мы из равенства (5.6) имеем

$$f(x_0) = \int_0^1 (\mathbf{F}(tx_0), \ x_0)\, dt = \int_0^1 (\mathbf{F}(tx_0), \ tx_0) \frac{dt}{t} > 0.$$

Итак, последовательность критических точек слабо сходится к θ. Теорема доказана.

ГЛАВА V

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ТОЧКИ ВЕТВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 15. Собственные функции произведения положительных и потенциальных операторов

15.1. Основные понятия, введение. Пусть нелинейный оператор $\mathbf{T}$ действует в некотором банаховом пространстве E. Элемент $x_0 \in E$ называется *элементом с неподвижным направлением* (или *неподвижным направлением*) *оператора* $\mathbf{T}$, если $\mathbf{T}x_0 = \mu_0 x_0$, где μ_0 — некоторое число и $|\mu_0| \, \|x_0\| > 0$. Если оператор $\mathbf{T}$ оставляет инвариантным нулевой элемент θ пространства E, т. е. $\mathbf{T}\theta = \theta$, то элемент $x_0 \in E$ называется *собственным элементом* этого оператора, когда $\mathbf{T}x_0 = \mu_0 x_0$, где μ_0 — некоторое число и $\|x_0\| > 0$. Собственный элемент оператора $\mathbf{T}$ также называют *собственным вектором* (или *собственной функцией*, если E — функциональное пространство). Число μ_0, входящее в равенство $\mathbf{T}x_0 = \mu_0 x_0$, называют *собственным значением* или *собственным числом оператора* $\mathbf{T}$, *соответствующим собственному элементу* x_0. Число $\lambda_0 = \frac{1}{\mu_0}$ (при $\mu_0 \neq 0$) называют *характеристическим числом* оператора $\mathbf{T}$. Собственный элемент оператора $\mathbf{T}$ будет элементом с неподвижным направлением, если соответствующее ему собственное значение μ отлично от нуля.

Неподвижные направления и собственные векторы нелинейных операторов, заданных в общих пространствах, впервые, по-видимому, рассматривали Биркгоф и Келлог [6].

Задача о собственных функциях нелинейных операторов возникла в связи с работами А. М. Ляпунова [49], А. И. Некрасова [56] и других авторов. К рассмотрению собственных функций нелинейных операторов также приводят задачи о нелинейных колебаниях [27], об устойчивости сжатых стержней [80] и другие задачи.

В настоящем и следующем параграфах мы исследуем вопрос о собственных элементах произведения операторов **AF**, где **A** — самосопряженный оператор, заданный во всем вещественном гильбертовом пространстве H (а следовательно (см. [3], стр. 75), ограниченный в H), а **F** — сильно потенциальный оператор в H. Будут доказаны предложения о собственных элементах и неподвижных направлениях операторов **AF**, которые охватывают все теоремы существования собственных элементов и неподвижных направлений, доказанные вариационным методом для нелинейных операторов.

15.2. О вариационных методах. Вариационные методы доказательства существования собственных элементов и неподвижных направлений нелинейных операторов **T** в том виде, в каком они известны сейчас, заключаются в следующем. По заданному оператору **T** строится некоторый функционал φ, определенный в том же пространстве, где действует **T**, или в другом пространстве, а затем доказывается существование у функционала φ условно критических точек относительно некоторого многообразия, заданного в том же пространстве, в котором определен функционал φ. По условно критическим точкам функционала φ конструируются собственные элементы или неподвижные направления оператора **T**. Эти методы существенно используют потенциальность некоторых операторов, которые позволяют конструировать функционалы φ по операторам **T**.

Вариационный метод доказательства существования собственных функций нелинейных операторов (эти операторы будут нами изучены в пунктах 21.2 и 21.1)

$$\mathbf{F}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \dots \int_0^1 K_n(s, t_1, \dots, t_n)\, x(t_1) \dots x(t_n)\, dt_1 \dots dt_n,$$

где K_n симметричны относительно своих аргументов $(s, t_1, \dots, t_n)$ и непрерывны по совокупности аргументов в $(n+1)$-мерном единичном кубе, и

$$\mathbf{T}(u)=\int_0^1 K(s, t)\, g(u(t), t)\, dt,$$

где $g(u, t)$ — аналитическая функция от u и непрерывная функция от t, был впервые применен Л. Лихтенштейном [44, б]. Позднее, М. Голомб, сохранив условие Лихтенштейна о положительной определенности и непрерывности ядра $K(s, t)$, показал [20, а], что оператор Гаммерштейна $\mathbf{T}$ имеет собственные функции, принадлежащие пространству C, если вещественная функция $g(u, t)$ непрерывна по совокупности аргументов. В своей работе [20, а] М. Голомб также доказал существование собственных функций у произведения $\mathbf{AF}$, где $\mathbf{A}$ — положительный вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H, а $\mathbf{F}$ — сильно потенциальный непрерывный оператор в H.

Следует, однако, отметить, что вариационный метод доказательства существования собственных функций нелинейных операторов в том виде, в каком он изложен в работах Лихтенштейна и Голомба, использовал следующие построения. Либо некоторое гильбертово пространство аппроксимировалось конечномерными подпространствами, либо выделялась минимизирующая последовательность для основного функционала. В первом случае задача сводилась к аналогичной задаче в конечномерных пространствах, для решения которой использовалась теорема Вейерштрасса о том, что функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве конечномерного пространства, достигает на нем своих граней. Эта теорема обеспечивала существование условно критических точек. Затем совершался предельный переход по некоторой подпоследовательности полученной последовательности условно критических точек, который приводил к доказательству существования собственной функции заданного нелинейного оператора. Во втором случае предельный переход совершался по некоторой подпоследовательности минимизирующей последовательности. Эти два построения приводили к большим выкладкам и к преодолению некоторых технических трудстей.

Здесь излагается другой метод, отличный от только что указанного, который был предложен и развит в работах автора [9, м, п, р, т, у]. Этот метод использует слабую замкнутость и слабую компактность некоторых множеств гильбертова пространства и опирается на теоремы 12.2 и 12.3. Применение этого метода к доказательству существования собственных функций нелинейных операторов в основном приводит лишь к доказательству слабой полунепрерывности или слабой непрерывности некоторых функционалов, построенных по заданным операторам. При помощи этого метода удалось чрезвычайно элементарно получить как те предложения, которые были известны раньше, так и новые предложения, которые прежним методом не получаются. В случае нечетных операторов мы пользуемся методом Л. А. Люстерника, о котором шла речь в § 14.

15.3. Неподвижные направления произведения операторов.

Теорема 15.1. *Пусть во всем вещественном гильбертовом пространстве H заданы сильно потенциальный оператор $\mathbf{F}$, который является позитивным, т. е. $(\mathbf{F}(x), x) > 0$, если $\|x\| > 0$, и положительный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$. Пусть, далее, выполнено хоть одно из следующих условий:*

(α) $\mathbf{A}$ — *вполне непрерывен.*

(β) $\mathbf{F}$ — *градиент слабо непрерывного функционала.*

Тогда, какова бы ни была сфера $\|x\| = r > 0$ пространства H, на ней существует по меньшей мере один вектор x_r такой, что $z_r = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x_r$, где $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный из оператора $\mathbf{A}$, есть элемент с неподвижным направлением оператора $\mathbf{AF}$.

Доказательство. Положим $\mathbf{F}(x) \doteq \operatorname{grad} f(x)$ и рассмотрим (как при доказательстве теоремы 10.1) функционал $\psi(x) = f(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x)$. Так же, как и в пункте 10.1, мы приходим к выводу, что функционал $\psi(x)$ слабо непрерывен, ибо $f(x)$ непрерывен как сильно дифференцируемый функционал. Далее, так как шар $D(\|x\| \leqslant r)$ гильбертова пространства H слабо компактен ([3], стр. 72) и слабо замкнут ([47], стр. 214), то согласно теореме 13.2 функционал $\psi(x)$ достигает своих граней в шаре D. Покажем, что $\psi(x)$ достигает своей верхней грани на сфере $\|x\| = r$. Действительно, так как $(\mathbf{F}(x), x) > 0$, то при $t > 0$

$$\frac{d}{dt} f(tx) = (\mathbf{F}(tx), x) = \frac{1}{t} (\mathbf{F}(tx), tx) > 0,$$

т. е. функционал $f(x)$ растет вдоль любого луча, выходящего из точки θ, а значит, и $\psi(x) = f(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x)$ растет вдоль любого луча, выходящего из точки θ, если $\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x\| > 0$. Следовательно, функционал $\psi(x)$ имеет минимум m в нуле, а максимум M на сфере $\|x\| = r$ в некоторой точке x_r, которая согласно теореме 12.1 является условно критической. При этом, если $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x_r = \theta$, то $m = M$, что невозможно, так как $\mathbf{A}$ — положительный оператор и $f(tx)$ — возрастающая функция t при $t > 0$. Ввиду этого можно считать, что x_r — условно критическая точка функционала $\psi(x)$ относительно сферы $\|x\| = r$, причем $\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x_r\| > 0$. Отсюда в силу теоремы 12.2 $\operatorname{grad}\psi(x_r) = \mu x_r$ или согласно лемме 10.1

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x_r\right) = \mu x_r. \qquad (15.1)$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ и полагая $z_r = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x_r$, мы получим $\mathbf{AF}(z_r) = \mu z_r$. Наконец, из равенства (15.1) имеем

$$\mu(x_r, x_r) = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x_r\right), x_r\right) = \left(\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x_r\right), \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x_r\right) > 0,$$

ибо $(\mathbf{F}(x), x) > 0$, если $\|x\| > 0$, а $\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x_r\| > 0$. Следовательно, $\mu > 0$. Теорема доказана.

Отметим, что найденные неподвижные направления $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x_r$ оператора $\mathbf{AF}$ являются и собственными элементами этого оператора, ибо θ — точка абсолютного минимума функционала $f(x)$, а поэтому согласно теореме 9.1 $\mathbf{F}(\theta) = \operatorname{grad} f(\theta) = \theta$.

Отметим еще, что при выполнении условий теоремы 15.1 оператор $\mathbf{AF}$ имеет континуум собственных элементов, отвечающих положительным собственным значениям. Для доказательства данного утверждения мы предварительно рассмотрим в H две сферы $S_1(\|x\| = r_1)$ и $S_2(\|x\| = r_2)$, где $r_1 \neq r_2$. Согласно доказанной теореме существуют собственные векторы $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x_{r_1}$ и $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x_{r_2}$ оператора $\mathbf{AF}$. Для того чтобы равенство $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x_{r_1} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x_{r_2}$ не имело места, нужно, чтобы вектор

$x_{r_1}-x_{r_2}$ не принадлежал подпространству нулей H_0 оператора $\mathbf{A}$, которое совпадает с подпространством нулей оператора $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, т. е. функционал $\psi(x)$ нужно рассматривать на ортогональном дополнении $H_1=H\dot{-}H_0$. Рассмотрение функционала $\psi(x)$ на подпространстве H_1 возможно, так как градиент этого функционала

$$\operatorname{grad}\psi(x)=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x\right) \tag{15.2}$$

действует из H_1 в H_1. Действительно, если возьмем произвольный вектор $h\in H_0$, то $\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x\right),\ h\right)=\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x\right),\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h\right)=$ $=\left(\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x\right),\ \theta\right)=0$, т. е. для всякого $x\in H_1$ $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x\right)\in H_1$. В случае полной непрерывности $\mathbf{A}$, H_1 — собственное подпространство оператора $\mathbf{A}$. Если при доказательстве теоремы 15.1 мы рассмотрим шар D^1 ($\|x\|\leqslant r$) в подпространстве H_1 вместо шара $D(\|x\|=r)$ пространства H, то все выкладки сохранятся, причем x_r будет принадлежать сфере $\|x\|=r$ подпространства H_1. В этом случае разность $x_{r_1}-x_{r_2}$ есть ненулевой вектор подпространства H_1, а потому $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}(x_{r_1}-x_{r_2})\neq\theta$. Следовательно, при выполнении условий теоремы 15.1 оператор $\mathbf{AF}$ имеет континуум собственных векторов, соответствующих положительным собственным значениям этого оператора.

В том случае, когда оператор $\mathbf{A}$ является единичным ($\mathbf{A}x=x$), из теоремы 15.1 следует предложение: *позитивный градиент слабо непрерывного функционала имееет собственные векторы любой нормы, отвечающие положительным собственным значениям.*

15.4. Существование собственных элементов.

Теорема 15.2 [1]. *Пусть во всем вещественном гильбертовом пространстве H заданы сильно потенциальный оператор $\mathbf{F}(x)=\operatorname{grad}f(x)$ и положительный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$. Пусть, далее, выполнено хоть одно из следующих условий:*

(α) $\mathbf{F}(\theta)=\theta$ *и* $\mathbf{A}$ — *вполне непрерывный оператор.*

(β) $\mathbf{F}(\theta)=\theta$ *и* $f(x)$ *слабо непрерывен.*

---

[1]) Ср. [36, к], стр. 343 и [9,у], стр. 400—402.

Тогда, каково бы ни было положительное число a, существует континуум собственных элементов оператора $\mathbf{AF}$, *нормы которых не превосходят числа a.*

Доказательство. Пусть H_0 — подпространство нулей оператора $\mathbf{A}$. Рассмотрим на ортогональном дополнении $H_1 = H \dot{-} H_0$ функционал $\psi(x) = f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x\right)$, где $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный из оператора $\mathbf{A}$. Согласно лемме 10.1 градиент этого функционала определяется равенством (15.2), а значит, он действует из H_1 в H_1. Правда, для некоторых $x \in H_1$ вектор $\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x\right)$ может принадлежать подпространству H_0; для таких x будет: $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x\right) = \theta$. Отметим еще, что из определения H_1 следует: $\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x\right\| > 0$ для всякого ненулевого вектора $x \in H_1$. Рассмотрим теперь в пространстве H_1 произвольную сферу $(x, x) = r^2$, где $\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right\| r \leqslant a$. Если на каждой такой сфере функционал $\psi(x)$ имеет критические точки, то в этих точках будет $\operatorname{grad} \psi(x) = \frac{1}{2} \mu \operatorname{grad}(x, x)$, или согласно равенствам (15.2) и (5.2)

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x\right) = \mu x, \tag{15.1}$$

где $\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x\right\| > 0$, ибо $\|x\| = r$, и $\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x\right\| \leqslant \left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right\| r \leqslant a$. Применяя к равенству (15.1) оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, мы получим, что $\mathbf{AF}(z) = \mu z$, где $z = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x$, $0 < \|z\| \leqslant \left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right\| r \leqslant a$, т. е. что z — собственный элемент оператора $\mathbf{AF}$. Ясно, что для двух различных сфер пространства H_1 мы получим различные собственные элементы (см. п. 15.3), так что их будет континуум. Разберем теперь случай, когда на некоторой сфере $(x, x) = r^2$ пространства H, где $\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right\| r \leqslant a$, функционал $\psi(x)$ не имеет критических точек. Так как из условий (α) или (β) следует слабая непрерывность функционала $\psi(x)$ (см. доказательство теоремы 15.1), то согласно теореме 13.11 уравнение $\operatorname{grad} \psi(x) = \nu x$ или уравнение (15.1) имеет в H_1 континуум ненулевых решений, отвечающих неунлевым значениям μ, нормы которых меньше r. Применяя оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ к обеим частям равенства (15.1) и полагая $z = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x \neq \theta$, мы получим, что $\mathbf{AF}(z) = \mu z$, т. е. что оператор $\mathbf{AF}$ имеет континуум собственных векторов, нормы которых не превосходят числа a. Теорема доказана.

Отметим, что требование $\mathbf{F}(\theta) = \theta$ не было использовано при доказательстве. Оно понадобилось лишь для того, чтобы можно было говорить о собственных элементах вместо того, чтобы говорить о ненулевых решениях.

Из теоремы 15.2, как частный случай, когда оператор $\mathbf{A}$ — единичный, следует предложение.

Теорема 15.3. *Каждый сильный градиент слабо непрерывного функционала, обращающийся в нуль в нуле пространстве H, имеет континуум собственных элементов, нормы которых не превосходят произвольно заданного положительного числа.*

Отметим еще, что из теоремы 15.2, как частный случай, вытекает теорема 8 из работы М. Голомба [20,а], в которой дополнительно требуется непрерывность сильного градиента. Помимо требования непрерывности градиента (в теореме 15.2 оно отсутствует), Голомб при введении понятия градиента накладывал на остаток дифференциала дополнительные ограничения, которые были им использованы при доказательстве.

Сформулируем теперь предложение, которое непосредственно следует из теорем 13.3 и 12.2.

Теорема 15.4. *Сильный градиент слабо непрерывного функционала, обращающийся в нуль лишь в нуле гильбертова пространства H, имеет собственные векторы любой нормы.*

15.5. Собственные элементы нечетных операторов. В случае нечетных операторов для доказательства существования собственных элементов используются методы Л. А. Люстерника, о которых шла речь в § 14.

Сначала мы рассмотрим вопрос о собственных элементах нечетных потенциальных операторов $\mathbf{F}$, а затем установим предложения о собственных элементах произведения $\mathbf{AF}$, где $\mathbf{A}$ — положительный оператор.

Теорема 15.5. *Пусть* $\mathbf{F}$ *есть потенциальный, усиленно непрерывный, нечетный* ($\mathbf{F}(-x) = -\mathbf{F}(x)$) *и позитивный*

($(\mathrm{F}(x), x) > 0$, *когда* $\|x\| > 0$) *оператор в шаре* $\|x\| \leqslant R$ *вещественного сепарабельного гильбертова пространства* H. *Тогда на всякой сфере* $S(\|x\| = a \leqslant R)$ *существует последовательность собственных элементов оператора* F, *которая сходится слабо к нулевому элементу* θ, *а соответствующие им собственные значения этого оператора положительны и сходятся к нулю*[1]).

Доказательство. Рассмотрим четный функционал

$$f(x) = \int_0^1 (\mathrm{F}(tx), x)\,dt.$$

По теореме 5.1 $\mathrm{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$, откуда согласно теореме 14.3 вытекает, что существует последовательность критических точек $x_n \in S$ функционала $f(x)$, которая слабо сходится к θ. Для каждого x_n имеем

$$\mathrm{F}(x_n) = \mu_n x_n, \quad x_n \in S.$$

Отсюда

$$\mu_n = a^{-2} (\mathrm{F}(x_n), x_n) > 0.$$

Так как $\mathrm{F}(x)$ усиленно непрерывен и $\{x_n\}$ слабо сходится к θ, то

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n = a^{-2} \lim_{n\to\infty} (\mathrm{F}(x_n), x_n) = 0,$$

ибо $\mathrm{F}(\theta) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 15.6[2]). *Пусть выполнены условия:*

1°. F — *непрерывный потенциальный оператор, заданный в вещественном гильбертовом пространстве* H.

2°. $\mathrm{F}(-x) = -\mathrm{F}(x)$ *и для* $\|x\| > 0$ $(\mathrm{F}(x), x) > 0$.

3°. A — *положительный, самосопряженный, вполне непрерывный оператор в* H, *обладающий счетным множеством собственных элементов.*

---

[1]) В таком виде теорема принадлежит автору [9, е] и представляет собой обобщение соответствующих теорем Л. А. Люстерника и В. И. Соболева. Утверждение данной теоремы было впервые установлено Л. А. Люстерником [46, б] при дополнительных ограничениях, что оператор F является нечетно однородным и удовлетворяет условию Липшица. Позднее В. И. Соболев [66, б] обобщил теорему Л. А. Люстерника; он показал, что утверждение данной теоремы имеет место при дополнительном ограничении, что оператор F удовлетворяет условию Липшица.

[2]) См. [9, ч], теорема 2.

Тогда, каково бы ни было $c>0$, оператор **AF** *имеет не менее счетного числа попарно линейно независимых собственных элементов, представимых в виде*

$$\psi_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k^{(\nu)}}{\sqrt{\lambda_k}} x_k, \ (\eta_1^{(\nu)}, \eta_2^{(\nu)}, \eta_3^{(\nu)}, \ldots) = \eta^{(\nu)} \in l_2 \, (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

где

$$\| \eta^{(\nu)} \| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k^{(\nu)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = c,$$

а x_k и λ_k суть собственные векторы и числа оператора **A**. *Эти собственные элементы оиератора* **AF** *соответствуют собственным значениям μ_ν, представимым в виде*

$$\mu_\nu = c^{-2} (\psi_\nu, \ F(\psi_\nu)),$$

причем μ_ν образуют убывающую последовательность, сходящуюся к нулю.

Доказательство. Так как **F** есть нечетный оператор, то функционал

$$f(x) = \int_0^1 (\mathbf{F}(tx), \ x) \, dt$$

является четным, причем согласно теореме 5.1 $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$. Далее, так как $(\mathbf{F}(x), x) > 0$, если $\|x\| > 0$, то при $x \neq \theta$ $f(x) > 0$. В точке $x = \theta$ функционал $f(x)$ имеет минимум, откуда $\mathbf{F}(\theta) = \theta$. Пусть $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ есть положительный квадратный корень из оператора **A**. Рассмотрим функционал $\varphi(x) = f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x\right)$. Этот функционал слабо непрерывен, ибо $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ как линейный вполне непрерывный оператор является усиленно непрерывным (см. [47], стр. 214), а $f(x)$ непрерывен. Согласно лемме 10.1 имеем

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F} \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x \right) = \mathbf{\Phi}(x). \tag{15.3}$$

Обозначим через H_0 подпространство нулей операторов **A** и $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ $\left(\mathbf{A}h = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} h = \theta, \text{ если } h \in H_0\right)$ и будем рассматривать функционал $\varphi(x)$ на подпространстве $H \dot{-} H_0$, которое является сепарабельным. Отметим, что оператор $\mathbf{\Phi}$ позитивен в $H \dot{-} H_0$, ибо для всякого $h \in (H \dot{-} H_0)$, $\|h\| > 0$, $\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h\right\| > 0$, откуда

$$(\mathbf{\Phi}(h),\ h) = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h\right),\ h\right) = \left(\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h\right),\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h\right) > 0.$$

Оператор $\mathbf{\Phi}$ действует в пространстве $H \dot{-} H_0$ и усиленно непрерывен в H как непрерывный оператор $\mathbf{F}$ от усиленно непрерывного оператора $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$. Таким образом, четный функционал $\varphi(x)$ имеет градиент, который в пространстве $H \dot{-} H_0$ удовлетворяет всем условиям теоремы 15.5. Отсюда следует, что на всякой сфере $\|h\| = c > 0$ пространства $H \dot{-} H_0$ существует счетное множество геометрически различных собственных элементов оператора $\mathbf{\Phi}$, т. е. для $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$\mu_\nu h_\nu = \mathbf{\Phi}(h_\nu); \quad \|h_\nu\| = c, \tag{15.4}$$

где

$$\mu_\nu = \|h_\nu\|^{-2}(\mathbf{\Phi}(h_\nu),\ h_\nu) \tag{15.5}$$

есть последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Из равенств (15.3) и (15.4) следует, что

$$\mu_\nu \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h_\nu = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Phi}(h_\nu) = \mathbf{AF}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h_\nu\right)$$

или $\mu_\nu\psi_\nu = \mathbf{AF}(\psi_\nu)$, где

$$\psi_\nu = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h_\nu. \tag{15.6}$$

Далее, из равенств (15.4), (15.5) и (15.6) имеем

$$\mu_\nu = c^{-2}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h_\nu\right),\ h_\nu\right) = c^{-2}(\psi_\nu,\ \mathbf{F}(\psi_\nu)).$$

Так как для $i \neq j$ $h_i \neq h_j$, то из равенства (15.6) выводим

$$\psi_i - \psi_j = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}(h_i - h_j) \neq \theta, \text{ ибо } (h_i - h_j) \in (H \dot{-} H_0),$$

а для всякого элемента h этого пространства, отличного от нулевого, $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h \neq \theta$. Пусть $\{x_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ суть соответственно собственные элементы и характеристические числа оператора **A**. Тогда для всякого $h \in (H \dot{-} H_0)$

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} (h, x_k) x_k; \quad \|h\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (h, x_k)^2, \quad \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} h = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h, x_k)}{\sqrt{\lambda_k}} x_k.$$

Отсюда и из (15.6) имеем

$$\psi_\nu = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} h_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h_\nu, x_k)}{\sqrt{\lambda_k}} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k^{(\nu)}}{\sqrt{\lambda_k}} x_k,$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k^{(\nu)})^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (h_\nu, x_k)^2 = \|h_\nu\|^2 = c^2.$$

Наконец, если мы допустим, что при $i \neq j$ $\psi_i = t\psi_j$, то $h_i = th_j$, откуда $\eta_k^{(i)} = t\eta_k^{(j)}$ и $c^2 = \|\eta^{(i)}\|^2 = t^2 \|\eta^{(j)}\|^2 = t^2 c^2$. Отсюда, так как согласно теореме 15.5 противоположные собственные элементы отождествлены, получаем, что $\{\psi_\nu\}$ попарно линейно независимы. Теорема, следовательно, доказана.

Теорема 15.7. *Пусть выполнены условия:*

1°. **F** — *потенциальный, усиленно непрерывный, нечетный и позитивный оператор в шаре* $\|x\| \leqslant R$ *вещественного сепарабельного гильбертова пространства* H.

2°. **A** — *положительный, самосопряженный, заданный во всем пространстве* H *оператор, причем подпространство* $H_1 = H \dot{-} H_0$, *где* H_0 *есть подпространство нулей оператора* **A**, *имеет бесконечную размерность.*

Тогда, какова бы ни была сфера

$$\|x\| = a \leqslant \rho R,$$

где $\rho \|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\| = 1$, *существует последовательность собственных элементов оператора* **AF**, *которая сходится слабо к нулевому элементу* θ, *а соответствующие собственные значения этого оператора положительны и сходятся к нулю. Каждая собственная функция последовательности представима в виде*

$$\psi_\nu = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} h_\nu, \quad \|h_\nu\| = a \; (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

и соответствует собственному значению

$$\mu_\nu = a^{-2}(\psi_\nu, \ \mathbf{F}(\psi_\nu)).$$

Доказательство этой теоремы проводится так же, как доказательство предыдущей теоремы.

§ 16. Собственные функции произведения квазидефинитных и потенциальных операторов

В данном параграфе мы рассмотрим вопрос о собственных функциях произведения операторов $\mathbf{BF}$, где $\mathbf{B}$ квазиотрицательный (см. п. 10.2) оператор, заданный во всем вещественном гильбертовом пространстве H, а $\mathbf{F}$ — сильно потенциальный оператор, действующий в H. Вопрос о собственных функциях такого произведения был сначала рассмотрен в работах [9, з, к, п, р], а затем в ([37] и [9, у]). При изучении этого вопроса мы воспользуемся гиперболоидами, порожденными оператором $\mathbf{B}$ (см. п. 11.2), и понятием главного квадратного корня из оператора $\mathbf{B}$.

Определение 16.1. Оператор $\mathbf{A} = \mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_-$, где $\mathbf{A}_+$ есть положительный квадратный корень из положительной части оператора $\mathbf{B}$, а $\mathbf{A}_-$ есть положительный квадратный корень из абсолютного значения отрицательной части $\mathbf{B}$, называется *главным квадратным корнем из оператора* $\mathbf{B}$.

Отметим еще, что через $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$ мы будем обозначать положительный квадратный корень из абсолютного значения оператора $\mathbf{B}$.

16.1. Существование собственных функций.

Теорема 16.1[1]. *Пусть выполнены условия:*

1°. *В вещественном гильбертовом пространстве H задан сильный градиент $\mathbf{F}$ слабо полунепрерывного снизу функционала $f(x)$, который является позитивным, т. е. для $x \neq \theta$*

$$(\mathbf{F}(x), \ x) > 0. \tag{16.1}$$

2°. *Квазиотрицательный оператор $\mathbf{B}$ задан во всем пространстве H.*

[1] См. [9, у], теорема 4.3.

3°. *Для* $x \in \mathbf{B}_{\frac{1}{2}} V_0$ *и* $x \in \mathbf{A} V_0$ *где* V_0 — *коническая область, порожденная оператором* $\mathbf{B}$, *выполняется равенство*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} (\mathbf{F}(x),\ x) = \infty. \tag{16.2}$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

1°. *Каков бы ни был гиперболоид* $((x)) = c > 0$, *порожденный оператором* $\mathbf{B}$, *существует по крайней мере два собственных элемента оператора* $\mathbf{BF}$, *представимых в виде*

$$y_c^{(1)} = \mathbf{A} x_c^{(1)};\ \ y_c^{(2)} = \mathbf{B}_{\frac{1}{2}} x_c^{(2)};\ \ x_c^{(1)},\ \ x_c^{(2)} \in \big(((x)) = c\big)$$

и соответственно отвечающих положительным собственным значениям

$$\mu_c^{(i)} = c^{-2} (\mathbf{F}(y_c^{(i)}),\ y_c^{(i)}) > 0 \qquad (i = 1,\ 2),$$

где $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$ — *положительный квадратный корень из абсолютного значения оператора* $\mathbf{B}$, *а* $\mathbf{A}$ — *главный квадратный корень из оператора* $\mathbf{B}$.

2°. *Каково бы ни было положительное число* α, *существует континуум собственных элементов, нормы которых больше* α, *и континуум собственных элементов, нормы которых меньше* α.

3°. *Эти собственные элементы, найденные для различных* c, *различны.*

Доказательство. Так как $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$, то

$$\frac{d}{dt} f(tx) = (\mathbf{F}(tx),\ x) = \frac{1}{t} (\mathbf{F}(tx),\ tx) > 0,$$

т. е. при каждом фиксированном x $f(tx)$ есть возрастающая в промежутке $(0,1)$ функция от t. Отсюда согласно известной теореме анализа (см. [10, а], стр. 295, теорема VI) о нахождении первообразных функций

$$f(x) = f(\theta) + \int_0^1 (\mathbf{F}(tx),\ x)\, dt,\ \ \|\theta\| = 0. \tag{16.3}$$

Используя теперь условие (16.1), мы находим, что

$$f(x) > f(\theta) + \int_{0,5}^1 (\mathbf{F}(tx),\ tx) \frac{dt}{t}.$$

Отсюда в силу условия (16.2) следует, что для $x \in \mathbf{B}_{\frac{1}{2}} V_0$ и $x \in \mathbf{A} V_0$

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty. \tag{16.4}$$

Рассмотрим теперь в конической области V_0 функционал $\varphi(x) = f(\mathbf{A}x)$, где $\mathbf{A}$ — главный квадратный корень из оператора $\mathbf{B}$.

Так как по условию оператор $\mathbf{B}$ определен всюду в H, то оператор $\mathbf{A}$ также определен всюду в H, а потому $\mathbf{A}$ — ограниченный оператор. Из ограниченности оператора $\mathbf{A}$ следует, что он преобразует всякую слабо сходящуюся к x_0 последовательность в последовательность, которая сходится слабо к $\mathbf{A}x_0$. Отсюда следует слабая полунепрерывность снизу функционала $\varphi(x) = f(\mathbf{A}x)$, ибо $f(x)$ слабо полунепрерывен снизу по условию.

Далее, из равенства (16.4) и в силу леммы 11.2 следует, что для $x \in V_0$ выполняется равенство[1])

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \varphi(x) = +\infty. \tag{16.5}$$

Покажем еще, что для точек области V_0, если $x \neq 0$, $\|\operatorname{grad} \varphi(x)\| > 0$. Действительно, согласно лемме 10.1

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = \mathbf{AF}(\mathbf{A}x), \tag{16.6}$$

откуда согласно лемме 11.2 и в силу условия (16.1) мы имеем, что в области V_0

$$(\operatorname{grad} \varphi(x),\ x) = (\mathbf{AF}(\mathbf{A}x),\ x) = (\mathbf{F}(\mathbf{A}x),\ \mathbf{A}x) > 0.$$

Следовательно, для $x \in V_0$, если $x \neq 0$,

$$\|\operatorname{grad} \varphi(x)\| > 0. \tag{16.7}$$

Из слабой полунепрерывности снизу функционала $\varphi(x)$ и из соотношений (16.5) и (16.7) согласно теореме 13.4 следует, что, каков бы ни был гиперболоид $\Gamma_c\big(((x)) = c > 0\big)$, на нем существует по меньшей мере одна условно экстремальная

---

[1]) Операторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ порождают одинаковые гиперболоиды Γ_c, ибо ортогональная сумма собственных подпространств, отвечающих положительным собственным значениям этих операторов, одинакова как для $\mathbf{B}$, так и для $\mathbf{A}$.

точка $x_c^{(1)}$ функционала $\varphi(x)$. Отсюда согласно теореме 12.3 имеем

$$\operatorname{grad}\varphi(x_c^{(1)}) = \mu_1(\mathbf{P}_1 x_c^{(1)} - \mathbf{P}_2 x_c^{(1)})$$

или согласно равенству (16.6)

$$\mathbf{AF}(\mathbf{A}x_c^{(1)}) = \mu_1(\mathbf{P}_1 x_c^{(1)} - \mathbf{P}_2 x_c^{(1)}), \qquad (16.8)$$

где $\mathbf{P}_1$ —оператор проектирования в H_1 (H_1 — ортогональная сумма собственных подпространств оператора $\mathbf{B}$, отвечающих его положительным собственным значениям), а $\mathbf{P}_2$ — оператор проектирования в $H_2 = H \dot{-} H_1$. Так как

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_-; \quad \mathbf{B}_{\frac{1}{2}} = \mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_-,$$

то в силу того, что подпространство H_1 приводит операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$, мы имеем

$$\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}\mathbf{A} = \mathbf{A}_+^2 - \mathbf{A}_-^2 = \mathbf{B}; \quad \mathbf{B}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = \mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_- = \mathbf{A}. \qquad (16.9)$$

Умножая равенство (16.8) на $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$, мы согласно соотношениям (16.9) получим

$$\mathbf{BF}(\mathbf{A}x_c^{(1)}) = \mu_1 \mathbf{A}x_c^{(1)},$$

где согласно лемме 11.2 $\|\mathbf{A}x_c^{(1)}\| > 0$. Полагая $\mathbf{A}x_c^{(1)} = y_c^{(1)}$, получим

$$\mathbf{BF}(y_c^{(1)}) = \mu_1 y_c^{(1)}. \qquad (16.10)$$

Далее, умножая скалярно обе части равенства (16.8) на $x_c^{(1)}$, получим

$$(\mathbf{AF}(\mathbf{A}x_c^{(1)}),\ x_c^{(1)}) = \mu_1(\mathbf{P}_1 x_c^{(1)} - \mathbf{P}_2 x_c^{(1)},\ x_c^{(1)}) =$$
$$= \mu_1(\|\mathbf{P}_1 x_c^{(1)}\|^2 - \|\mathbf{P}_2 x_c^{(1)}\|^2) = \mu_1 c^2.$$

Отсюда, так как $\mathbf{A}x_c^{(1)} = y_c^{(1)}$, имеем

$$\mu_1 = c^{-2}(\mathbf{F}(y_c^{(1)}),\ y_c^{(1)}) > 0. \qquad (16.11)$$

Рассмотрим теперь функционал $\psi(x) = f\left(\mathbf{B}_{\frac{1}{2}} x\right)$.

Повторяя для него предыдущие рассуждения, мы найдем

$$\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}\mathbf{F}\left(\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}x_c^{(2)}\right)=\mu_2(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)\,x_c^{(2)}. \tag{16.8'}$$

Умножая обе части этого равенства на A и учитывая соотношения

$$\mathbf{A}\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}=\mathbf{A}_+^2-\mathbf{A}_-^2=\mathbf{B};\quad \mathbf{A}(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)=\mathbf{A}_++\mathbf{A}_-=\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}, \tag{16.9'}$$

мы получим

$$\mathbf{B}\mathbf{F}(y_c^{(2)})=\mu_c y_c^{(2)}, \tag{16.10'}$$

где $y_c^{(2)}=\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}x_c^{(2)}$. Так же, как раньше, найдем

$$\mu_2=c^{-2}(\mathbf{F}(y_c^{(2)}),\ y_c^{(2)})>0 \tag{16.11'}$$

Этим доказана первая часть теоремы.

Так как $x_c^{(i)}\in\Gamma_c$, то согласно лемме 11.2 $\|\mathbf{A}x_c^{(1)}\|>0$ и $\left\|\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}x_c^{(2)}\right\|>0$. Отсюда следует, что $x_c^{(i)}\in(H\dot{-}H_0)$, где H_0 — подпространство нулей операторов $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$. Так как для двух различных элементов x_1, $x_2\in(H\dot{-}H_0)$ выполняются неравенства

$$\|\mathbf{A}(x_2-x_1)\|>0;\quad \left\|\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}(x_2-x_1)\right\|>0,$$

то, если $c_1\neq c_2$,

$$\|\mathbf{A}x_{c_1}^{(1)}-\mathbf{A}x_{c_2}^{(1)}\|>0\quad\text{и}\quad\left\|\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}x_{c_1}^{(2)}-\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}x_{c_2}^{(2)}\right\|>0.$$

Этим доказано утверждение 3° теоремы.

Так как функционал $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 13.6, то из этой теоремы, ограниченности операторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$ и замечания 13.1 следует существование континуума собственных элементов, нормы которых меньше произвольного положительного числа.

Наконец, так как согласно лемме 11.2

$$\|\mathbf{A}x_c^{(1)}\|\geqslant c\sqrt{m},\quad \left\|\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}x_c^{(2)}\right\|\geqslant c\sqrt{m}, \tag{16.12}$$

где m — наименьшее положительное собственное значение оператора $\mathbf{B}$, то отсюда и из предыдущего следует существование континуума собственных элементов, нормы которых больше произвольного положительного числа. Теорема доказана.

Сделаем следующие замечания.

Замечание 16.1. При доказательстве теоремы 16.1 используется лишь слабая полунепрерывность снизу функционалов $\varphi(x)=f(\mathbf{A}x)$ и $\psi(x)=f\left(\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}x\right)$. Если оператор $\mathbf{B}$ вполне непрерывен, то операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$ вполне непрерывны, а значит, они преобразуют всякую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся последовательность. Отсюда следует слабая непрерывность функционалов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, ибо $f(x)$ непрерывен как функционал, имеющий сильный градиент $\mathbf{F}$. Следовательно, если оператор $\mathbf{B}$ вполне непрерывен, то в теореме 16.1 можно отказаться от требования, чтобы функционал $f(x)$ был слабо полунепрерывным снизу.

Замечание 16.2. Если условие (16.1) заменить требованием: $(\mathbf{F}(x,\ x)\geqslant 0$, то из условия (16.2) будет следовать, что $(\mathbf{F}(x),\ x)>0$, если $\|x\|\geqslant\alpha_1$, а потому утверждение теоремы 16.1 о существовании на гиперболоидах собственных элементов будет иметь место для всякого гиперболоида Γ_c, для которого $c\geqslant\alpha_1$.

Замечание 16.3. Если условие (16.2) заменить требованием: для $x\in\mathbf{A}V_0$ и $x\in\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}V_0$

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x)=+\infty, \tag{16.4}$$

то утверждения теоремы 16.1 сохранятся. Однако в конкретных задачах задается не функционал $f(x)$, а его градиент $\mathbf{F}$. Ввиду этого условие (16.2) более обозримо, чем равенство (16.4).

16.2. Существование континуума решений.

Теорема 16.2[1]. *Пусть в вещественном гильбертовом пространстве H задан сильно потенциальный оператор* $\mathbf{F}$,

[1]) Ср. [36, к], стр. 348—349 и [9, р], стр. 676—677.

удовлетворяющий условию

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \int_0^1 (\mathbf{F}(tx),\ x)\, dt = +\infty \tag{16.13}$$

для всякого ненулевого вектора $x \in \mathbf{A}V_0$, где $\mathbf{A}$ — главный квадратный корень из квазиотрицательного оператора $\mathbf{B}$ и V_0 — коническая область, порожденная оператором $\mathbf{B}$. Пусть, далее, выполнено хоть одно из следующих условий:

(α) Оператор $\mathbf{B}$ вполне непрерывен.

(β) $\mathbf{F}$ — градиент слабо полунепрерывного снизу функционала $f(x)$.

Тогда операторное уравнение

$$\mu x = \mathbf{BF}(x) \tag{16.14}$$

имеет континуум решений, нормы которых превосходят произвольно заданное положительное число.

Отметим, что теорема сохраняется при замене $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$, где $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный из абсолютного значения оператора $\mathbf{B}$.

Доказательство. Рассмотрим функционал $\varphi(x) = f(\mathbf{A}x)$, где f — потенциал оператора $\mathbf{F}$, т. е. $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$, а значит,

$$\frac{d}{dt} f(tx) = (\mathbf{F}(tx),\ x).$$

Из этого равенства и из условия (16.13), из которого вытекает суммируемость по $t \in [0, 1]$ функции $(\mathbf{F}(tx),\ x)$, следует (см. [55], стр. 234, теорема 1), что

$$f(x) = f(\theta) + \int_0^1 (\mathbf{F}(tx),\ x)\, dt, \quad \|\theta\| = 0. \tag{16.3}$$

При выполнении условия (α) функционал $\varphi(x)$ слабо непрерывен как непрерывный функционал от вполне непрерывного линейного (а значит, и усиленно непрерывного) оператора.

При выполнении условия (β), функционал $\varphi(x)$ слабо полунепрерывен снизу как слабо полунепрерывный снизу функционал f от линейного непрерывного оператора $\mathbf{A}$.

Рассмотрим теперь произвольную гиперболическую область V_c, порожденную операторами **B** и **A**. Из равенств (16.13) и (16.3) согласно лемме 11.2 следует, что в области V_c

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \varphi(x) = +\infty.$$

Если допустить, что функционал $\varphi(x)$ не имеет условно критических точек относительно гиперболоида Γ_c, то функционал $\varphi(x)$ будет удовлетворять всем условиям теоремы 13.13, а потому согласно этой теореме уравнение

$$\operatorname{grad} \varphi(x) = \mu(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_2 x) = \mu \mathbf{W} x \tag{16.15}$$

имеет континуум решений, нормы которых больше числа c. Если допустим, что $\varphi(x)$ имеет условно критические точки относительно произвольного гиперболоида Γ_c, то по теореме 12.3 уравнение (16.15) имеет решения, принадлежащие любому гиперболоиду Γ_c, а значит, это уравнение имеет континуум решений, нормы которых больше произвольного числа c. Следовательно, уравнение (16.15) всегда имеет континуум решений, нормы которых превосходят произвольное число. Так как согласно лемме 10.1 $\operatorname{grad} \varphi(x) = \mathbf{AF}(\mathbf{A}x)$, то уравнение (16.15) принимает вид

$$\mu \mathbf{W} x = \mathbf{AF}(\mathbf{A}x).$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$, мы согласно равенствам (16.9) получим

$$\mu \mathbf{A} x = \mathbf{BF}(\mathbf{A}x).$$

Полагая $\mathbf{A}x = z$ и учитывая, что согласно лемме 11.2 $\|\mathbf{A}x\| \geqslant c\sqrt{m}$, где m — наименьшее положительное собственное значение оператора **B**, мы приходим к выводу, что уравнение $\mu z = \mathbf{BF}(z)$ имеет континуум решений, нормы которых больше произвольного числа, ибо c — произвольное положительное число. Теорема доказана.

Сделаем следующее замечание.

З а м е ч а н и е 16.4. Для выполнения условия (16.13) достаточно, чтобы

$$(\mathbf{F}(x),\ x) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\|x\|\to\infty} (\mathbf{F}(x),\ x) = +\infty,$$

ибо в этом случае мы имеем

$$\int_0^1 (\mathbf{F}(tx),\ x)\,dt = \int_0^1 (\mathbf{F}(tx),\ tx)\frac{dt}{t} \geqslant \int_{0,5}^1 (\mathbf{F}(tx),\ tx)\frac{dt}{t},$$

а значит, условие (16.13) будет выполнено. В данном случае, когда $(\mathbf{F}(x),\ x) \geqslant 0$, функционал (см. равенство (16.3)) $f(x)$ имеет абсолютный минимум в нулевой точке пространства, а значит, по теореме 9.1 $\operatorname{grad} f(\theta) = \theta$, т. е. $\mathbf{F}(\theta) = \theta$. Следовательно, в данном случае теорема 16.2 есть теорема о существовании собственных функций оператора $\mathbf{BF}$.

16.3. Существование малых собственных элементов.

Теорема 16.3. *Пусть во всем вещественном гильбертовом пространстве H заданы квазиотрицательный оператор $\mathbf{B}$ и сильно потенциальный оператор $\mathbf{F}$ $(\mathbf{F}(\theta) = \theta)$, который для всяких ненулевых векторов $x \in \mathbf{A}(V_0 \cap D_R)$ и $x \in \mathbf{B}_{\frac{1}{2}}(V_0 \cap D_R)$, где D_R — шар $\|x\| \leqslant R$, удовлетворяет неравенству $(\mathbf{F}(x),\ x) > 0$. Пусть, далее, выполнено хоть одно из следующих условий:*

(α) Оператор $\mathbf{B}$ вполне непрерывен.

(β) $\mathbf{F}$ — градиент слабо полунепрерывного снизу функционала $f(x)$.

Тогда найдется такое $r > 0$, что, каков бы ни был гиперболоид Γ_c: $((x)) = c \leqslant r$, порожденный оператором $\mathbf{B}$, существует по крайней мере два собственных элемента оператора $\mathbf{BF}$, представимых в виде

$$y_c^{(1)} = \mathbf{A}x_c^{(1)};\ y_c^{(2)} = \mathbf{B}_{\frac{1}{2}}x_c^{(2)} \qquad (x_c^{(1)},\ x_c^{(2)} \in \Gamma_c)$$

и соответственно отвечающих положительным собственным значениям

$$\mu_c^{(i)} = c^{-2}(\mathbf{F}(y_c^{(i)}),\ y_c^{(i)}) > 0, \qquad i = 1,\ 2.$$

Среди этих собственных элементов имеется континуум таких, нормы которых меньше произвольного положительного числа.

Доказательство. Так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, рассмотрим функционал $\varphi(x) = f(\mathbf{A}x)$. Данный функционал непрерывен, ибо f непрерывен как сильно дифференцируемый функционал, а $\mathbf{A}$ — ограниченный оператор, так как он задан во всем пространстве H и является самосопряженным. Этот функционал φ слабо полунепрерывен снизу, так как при выполнении условия (β) f обладает этим свойством, а $\mathbf{A}$ — ограниченный оператор, а при выполнении условия (α) $\mathbf{A}$ вполне непрерывен. Так как по лемме 10.1 $\operatorname{grad}\varphi(x) = \mathbf{AF}(\mathbf{A}x)$, то согласно условию теоремы для всякого ненулевого вектора $x \in V_0 \cap D_R$ будет

$$(\operatorname{grad}\varphi(x),\ x) = (\mathbf{AF}(\mathbf{A}x),\ x) = (\mathbf{F}(\mathbf{A}x),\ \mathbf{A}x) > 0.$$

Таким образом, функционал $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 13.6, а значит, существует такое $r > 0$, что на всяком гиперболоиде Γ_c, где $c \leqslant r$, имеется по меньшей мере одна условно экстремальная точка функционала $\varphi(x)$ относительно Γ_c. Отсюда согласно теореме 12.3 следует, что существует вектор $x_c \in \Gamma_c$, удовлетворяющий при некотором μ_c уравнению

$$\operatorname{grad}\varphi(x_c) = \mu_c(\mathbf{P}_1 x_c - \mathbf{P}_2 x_c) = \mu_c \mathbf{W} x_c.$$

Так как $\operatorname{grad}\varphi(x_c) = \mathbf{AF}(\mathbf{A}x_c)$, то

$$\mathbf{AF}(\mathbf{A}x_c) = \mu_c(\mathbf{P}_1 x_c - \mathbf{P}_2 x_c) = \mu_c \mathbf{W} x_c. \tag{16.15}$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$, мы согласно равенствам (16.9) получим $\mu_c \mathbf{A} x_c = \mathbf{BF}(\mathbf{A}x_c)$. Полагая $z_c = \mathbf{A}x_c$. получим

$$\mu_c z_c = \mathbf{BF}(z_c), \tag{16.14}$$

где согласно лемме 11.2 $\|z_c\| = \|\mathbf{A}x_c\| \geqslant c\sqrt{m}$ (m—наименьшее положительное собственное значение оператора $\mathbf{B}$). Эти собственные элементы $\mathbf{A}x_c$, как мы видели при доказательстве теоремы 16.1, различны для различных c. Следовательно, их будет континуум. Наконец, так как (см. доказательство теорем 13.5 и 13.6) $\|x_c\| < r \leqslant a \leqslant R$ и $\mathbf{A}$ — ограниченный оператор, то

$$\|z_c\| = \|\mathbf{A}x_c\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|x_c\| < r\|\mathbf{A}\|.$$

Значит, существует континуум ненулевых решений уравнения (16.14), нормы которых меньше произвольного положительного числа. Эти решения являются собственными элементами оператора $\mathbf{BF}$, ибо $\mathbf{F}(\theta)=\theta$. Далее, из равенства (16.15) имеем

$$\mu_c((x_c))^2=(\mathbf{AF}(\mathbf{A}x_c),\ x_c)$$

или

$$\mu_c=c^{-2}(\mathbf{F}(\mathbf{A}x_c),\ \mathbf{A}x_c)=c^{-2}(\mathbf{F}(z_c),\ z_c).$$

Повторяя все предыдущие выкладки для функционала $\psi(x)=$ $=f\left(\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}x\right)$, мы получим аналогичные результаты, но собственные элементы оператора $\mathbf{BF}$ будут представимы в виде: $z_c=\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}x_c$. Теорема доказана.

16.4. Другие теоремы существования собственных функций.

Теорема 16.4. *Пусть сильный градиент* $\mathbf{F}$ *вещественного функционала* $f(x)$, *заданный в гильбертовом пространстве* H, *удовлетворяет следующим условиям*:

1°. $\|\mathbf{F}(\theta)\|=0$.

2°. *В каждой точке* $x\in H$

$$(\mathbf{DF}(x,\ h),\ h)\geqslant 0.$$

3°. *Для* $x\in \mathbf{A}V_0$ *и* $x\in \mathbf{B}_{\frac{1}{2}}V_0$, *где* V_0 — *коническая область, порожденная заданным во всем пространстве* H *квазиотрицательным оператором* $\mathbf{B}$, *имеет место неравенство*

$$(\mathbf{DF}(x,\ h),\ h)\geqslant\gamma(\|h\|),$$

где $\gamma(t)$ — *возрастающая функция, заданная для* $t\geqslant 0$) *причем* $\gamma(0)=0$ *и* $\lim\limits_{t\to+\infty}\gamma(t)=+\infty$.

Тогда имеет место утверждение теоремы 16.1.

Доказательство этой теоремы использует теорему 13.7 и проводится так же, как доказательство теоремы 16.1.

Теорема 16.5. *Пусть сильный градиент* $\mathbf{F}(x)$ *вещественного функционала* $f(x)$, *заданного в гильбертовом пространстве* H, *удовлетворяет следующим условиям*:

1°. $\|\mathbf{F}(\theta)\|=0$.

2°. *В каждой точке* x *некоторого шара* D_R $(\|x\|\leqslant R)$

$$(\mathbf{DF}(x,\ h),\ h)\geqslant 0.$$

3°. *Для* $x \in \mathbf{A}(V_0 \cap D_R)$ *и* $x \in \mathbf{B}_{\frac{1}{2}}(V_0 \cap D_R)$ *имеет место неравенство*

$$(\mathbf{DF}(x, h), h) > 0.$$

Тогда имеет место утверждение теоремы 16.3.

Доказательство этой теоремы использует теорему 13.8 и проводится так же, как доказательство теоремы 16.3.

§ 17. Точки ветвления нелинейных операторов

17.1. Точки ветвления и бифуркации. Пусть E_1, E_2 и E_3 — банаховы пространства и $\Psi(u, v)$ — оператор, определенный для $u \in E_1$, $v \in E_2$, с областью значений в E_3. Пусть, далее,

$$\Psi(u_0, v_0) = \theta, \quad (u_0 \in E_1, \ v_0 \in E_2, \ \|\theta\| = 0), \tag{17.1}$$

причем в некоторой окрестности точки (u_0, v_0) уравнение

$$\Psi(u, v) = \theta \tag{17.2}$$

имеет единственное непрерывное решение $u = \Phi(v)$, т. е.

$$\Psi(\Phi(v), v) = \theta, \tag{17,3}$$

тогда точка (u_0, v_0) называется *регулярной точкой уравнения* (17.2). В противном случае точка (u_0, v_0) называется *точкой ветвления уравнения* (17.2).

Специальный интерес представляет следующий вид точек ветвления. Пусть при любом $v \in E_2$ имеет место равенство

$$\Psi(\theta, v) = \theta. \tag{17.4}$$

При выполнении данного равенства точка (θ, v_0) (или, кратко, v_0) — точка ветвления, если выполнено следующее достаточное условие: каждым положительным δ и η соответствуют элементы $u \in E_1$ и $v \in E_2$, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < \|u\| < \delta, \quad \|v - v_0\| < \eta,$$

такие, что для них имеет место равенство (17.2). Такие точки ветвления называются *точками бифуркации уравнения* (17.2).

Пусть $\mathbf{F}$ — оператор, действующий в банаховом пространстве E. Рассмотрим оператор

$$\boldsymbol{\Psi}(x, \lambda) = \mathbf{F}(x) - \lambda x,$$

где λ — числовой параметр, принимающий комплексные значения. Точки ветвления и точки бифуркации (при $\mathbf{F}(\theta) = \theta$) уравнения $\boldsymbol{\Psi}(x, \lambda) = \theta$ соответственно называются *точками ветвления и точками бифуркации оператора* $\mathbf{F}$.

Точки ветвления и точки бифуркации нелинейных уравнений и нелинейных операторов рассматривались А. М. Ляпуновым [49], Э. Шмидтом [74], А. И. Некрасовым [56], А. Гаммерштейном [14, б], Р. Иглишем [27], автором [9, а], Н. Н. Назаровым [53], В. В. Немыцким [57, е, ж], М. А. Красносельским [36, ж, и], А. И. Поволоцким [37] и др.

17.2. Теорема Гильдебрандта и Грэйвса. При исследовании вопроса о точках ветвления и точках бифуркации нелинейных уравнений и операторов известную роль играет теорема о неявных операторах. Мы здесь воспользуемся следующей теоремой, доказанной Гильдебрандтом и Грэйвсом [1]) [19].

Теорема 17.1. *Пусть $\boldsymbol{\Psi}(u, v)$ — оператор, определенный для $u \in E_1$ и $v \in E_2$, где E_1 и E_2 — банаховы пространства, и значения которого принадлежат банахову пространству E_3. Пусть, далее, $\boldsymbol{\Psi}(u_0, v_0) = \theta$, причем в точке (u_0, v_0) оператор $\boldsymbol{\Psi}(u, v)$ непрерывен по совокупности (u, v) и имеет по u в некоторой окрестности точки (u_0, v_0) непрерывную частную производную Фреше $\boldsymbol{\Psi}'_u(u, v)$, которая в точке (u_0, v_0) является ограниченным линейным оператором, имеющим обратный ограниченный оператор. Тогда уравнение $\boldsymbol{\Psi}(u, v) = \theta$ имеет единственное решение относительно u при каждом v, принадлежащем некоторой окрестности точки v_0.*

Гильдебрандт и Грэйвс доказали данную теорему методом последовательных приближений. Идея другого доказательства теоремы о неявных операторах принадлежит В. В. Немыцкому. В. В. Немыцкий [57, е, ж] установил теорему существования для специального класса неявных операто-

[1]) Мы здесь приводим лишь формулировку этой теоремы; ее доказательство можно также найти в книге Л. А. Люстерника и В. И. Соболева ([47], § 44).

ров, причем данное им доказательство напоминает классический метод Дини доказательства теоремы о неявных функциях. Эта идея В. В. Немыцкого была использована в работах Р. Герчинского [18] для доказательства общих теорем о неявных операторах.

Непосредственным следствием теоремы Гильдебрандта и Грэйвса является следующее предложение.

Теорема 17.2 [1]. *Пусть вполне непрерывный оператор* $\mathbf{F}$, *действующий в банаховом пространстве E и обращающийся в нуль в нуле пространства E, имеет в некоторой окрестности нуля непрерывную производную Фреше. Тогда точками бифуркации оператора* $\mathbf{F}$ *могут лишь служить собственные значения линейного оператора* $\mathbf{F}'(\theta)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$\Psi(x, \lambda) = \mathbf{F}(x) - \lambda x,$$

где λ принимает комплексные значения, а $x \in E$. Согласно условию в некоторой окрестности точки θ существует непрерывная производная

$$\Psi'_x(h, \lambda) = \mathbf{F}'(h) - \lambda \mathbf{I},$$

где $\mathbf{I}$ — единичный оператор, а h — какой-нибудь вектор из некоторой окрестности точки θ.

По теореме 4.7 производная $\mathbf{F}'(h)$ — линейный вполне непрерывный оператор, а потому оператор $\mathbf{F}'(\theta)$ имеет не более счетного числа собственных значений. Если λ_0 не является собственным значением оператора $\mathbf{F}'(\theta)$, то существует ограниченный оператор $[\mathbf{F}'(\theta) - \lambda_0 \mathbf{I}]^{-1}$, и потому согласно теореме 17.1 уравнение $\Psi(x, \lambda_0) = \theta$ или

$$\mathbf{F}(x) = \lambda_0 x$$

имеет единственное нулевое решение в некоторой окрестности точки λ_0. Следовательно, точками бифуркации оператора $\mathbf{F}$ могут лишь быть собственные значения линейного оператора $\mathbf{F}'(\theta)$. Теорема доказана.

---

[1]) Эта теорема устанавливалась различными авторами: для интегрально степенных рядов — в [74], для аналитических операторов Гаммерштейна — в [27, в] и [14, б], для неаналитических операторов Гаммерштейна — в [9, а, б], где она доказана методом неявных функций. См. также [36, к], стр. 195.

Как увидим в дальнейшем, при некоторых дополнительных ограничениях все собственные значения оператора $\mathbf{F}'(\theta)$ являются точками бифуркации оператора $\mathbf{F}$.

17.3. Существование одной точки бифуркации. Пусть $\mathbf{F}$ — нелинейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и удовлетворяющий условию $\mathbf{F}(\theta)=\theta$, где θ — нулевой элемент пространства H. Из определения точек бифуркации оператора $\mathbf{F}$ следует, что если λ_0 — точка бифуркации оператора $\mathbf{F}$, то существует последовательность [1]) собственных значений $\{\lambda_n\}$ оператора $\mathbf{F}$, сходящаяся к λ_0, причем соответствующая последовательность собственных функций $\{x_n\}$ сходится к θ. Так как $\mathbf{F}(x_n)=\lambda_n x_n$, то

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(\mathbf{F}(x_n),\ x_n)}{(x_n,\ x_n)}=\lambda_0.$$

Полагая

$$\omega(x)=\frac{(\mathbf{F}(x),\ x)}{(x,\ x)},$$

мы приходим к выводу, что если функционал $\omega(x)$ имеет предел в точке θ, то оператор $\mathbf{F}$ не может иметь более одной точки бифуркации. Следовательно, для того чтобы оператор $\mathbf{F}$ имел более одной точки бифуркации, необходимо. чтобы функционал $\omega(x)$ не имел предела в точке θ.

Рассмотрим теперь предложения, в которых устанавливается существование по меньшей мере одной точки бифуркации.

Теорема 17.3. *Пусть во всем вещественном гильбертовом пространстве H заданы сильно потенциальный оператор $\mathbf{F}(x)=\operatorname{grad} f(x)$, удовлетворяющий в некотором шаре $(x,\ x)\leqslant r^2$ условию*

$$|(\mathbf{F}(x),\ x)|\leqslant C(x,\ x),\quad C=\text{const},$$

и положительный, самосопряженный оператор $\mathbf{A}$. Пусть, далее, выполнено хоть одно из следующих условий:

(α) $\mathbf{F}(\theta)=\theta$ и $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор.

(β) $\mathbf{F}(\theta)=\theta$ и $f(x)$ — слабо непрерывный функционал.

Тогда существует по меньшей мере одна точка бифуркации оператора $\mathbf{AF}$.

[1]) Случай $\lambda_n=\lambda_0$ при всяком n не исключается.

Доказательсво. Из теоремы 15.2 следует, что при выполнении условий данной теоремы существует сходящаяся к нулю последовательность $\{z_n\}$ собственных элементов оператора $\mathbf{AF}$, представимых в виде $z_n = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x_n$, причем каждый собственный элемент z_n соответствует собственному числу μ_n, представимому в виде

$$\mu_n x_n = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F} \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x_n \right) \text{ или } \mu_n z_n = \mathbf{AF}(z_n).$$

Отсюда

$$\mu_n (x_n, x_n) = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F} \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x_n \right), x_n \right) = (\mathbf{F}(z_n), z_n)$$

и согласно условию теоремы

$$|\mu_n| (x_n, x_n) \leqslant C (z_n, z_n) \leqslant C \|\mathbf{A}\| (x_n, x_n)$$

или

$$|\mu_n| \leqslant C \|\mathbf{A}\|.$$

Если последовательность $\{\mu_n\}$ сходится к μ_0, то теорема доказана, ибо тогда точка μ_0 — точка бифуркации оператора $\mathbf{AF}$. Если последовательность $\{\mu_n\}$ не является сходящейся, то в силу ограниченности данной последовательности из нее можно выделить различные сходящиеся подпоследовательности, а значит, оператор $\mathbf{AF}$ имеет более одной точки бифуркации. Теорема доказана.

Из данной теоремы следует, что если вместо условия $\mathbf{F}(x), x) \leqslant C(x, x)$ имеет место соотношение

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{(\mathbf{F}(x), x)}{(x, x)} = 0,$$

то единственной точкой бифуркации оператора $\mathbf{AF}$ будет являться нуль. Данное утверждение было установлено для операторов Гаммерштейна в работах ([9, в], п. 2.2 и [9, г], теорема V).

Теорема 17.4. *Пусть в вещественном гильбертовом пространстве H задан сильный градиент $\mathbf{F}$ слабо полунепрерывного снизу функционала $f(x)$, удовлетворяющий условию*

$$(\mathbf{F}(x), x) > 0$$

для $x \in \mathbf{B}_{\frac{1}{2}}(V_0 \cap D)$ *или для* $x \in \mathbf{A}(V_0 \cap D)$, *где* D — *шар* $\|x\| \leqslant a$, $\mathbf{B}$ — *квазиотрицательный оператор*, $\mathbf{A}$ — *главный квадратный корень из оператора* $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$ — *положительный квадратный корень из абсолютного значения оператора* $\mathbf{B}$, V_0 — *конус, порожденный оператором* $\mathbf{B}$. *Пусть, далее, в некоторой окрестности нуля пространства* H *выполнено условие*

$$|(\mathbf{F}(x), x)| \leqslant C(x, x), \quad C = \text{const}.$$

Тогда оператор **BF** *имеет по меньшей мере одну точку бифуркации.*

Доказательство данной теоремы использует теорему 16.3 и проводится так же, как доказательство предыдущей теоремы.

Теорема 17.5. *Пусть сильный градиент* $\mathbf{F}$ *вещественного функционала, заданного в гильбертовом пространстве* H, *удовлетворяет следующим условиям*:

1°. $\|\mathbf{F}(\theta)\| = 0$.

2°. *В каждой точке* x *некоторого шара* $D(\|x\| \leqslant a)$ *выполняется неравенство* $(\mathbf{DF}(x, h), h) \geqslant 0$.

3°. *Для* $x \in \mathbf{A}(V_0 \cap D)$ (*или* $x \in \mathbf{B}_{\frac{1}{2}}(V_0 \cap D)$), *где* V_0, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_{\frac{1}{2}}$ *имеют тот же смысл, что и в предыдущей теореме, имеет место неравенство* $(\mathbf{DF}(x, h), h) > 0$.

4°. *Существует некоторый шар* $D_0(\|x\| \leqslant r_0)$ *такой, что для* $x \in \mathbf{A}(V_0 \cap D_0)$ (*или* $x \in \mathbf{B}_{\frac{1}{2}}(V_0 \cap D_0)$, *выполняется неравенство*

$$(\mathbf{F}(x), x) \leqslant C(x, x),$$

где $C = \text{const}$.

Тогда оператор **BF** *имеет по меньшей мере одну точку бифуркации.*

Доказательство данной теоремы использует теорему 16.5 и проводится так же, как доказательство теоремы 17.3.

Теорема 17.6 [1]). *Пусть выполнены следующие условия*:

---

[1]) Ср. [36, к], стр. 321—322.

1°. *В вещественном гильбертовом пространстве* H *задан градиент* $\mathbf{F}$ *слабо полунепрерывного сверху функционала, причем* $\mathbf{F}(\theta)=\theta$, *где* θ — *нуль пространства* H.

2°. *Оператор* $\mathbf{F}$ *имеет в нуле* θ *производную Фреше* $\mathbf{F}'(\theta)$, *которая является самосопряженным оператором.*

3°. *Во всем пространстве* H *задан положительный, самосопряженный оператор* $\mathbf{A}$.

4°. $\mathbf{AF}'(\theta)$ — *вполне непрерывный самосопряженный оператор, у которого положительная часть спектра не является пустой.*

Тогда наибольшее положительное собственное число оператора $\mathbf{AF}'(\theta)$ *является точкой бифуркации оператора* $\mathbf{AF}$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — потенциал оператора $\mathbf{F}$. Так как согласно формуле (5.6) потенциал оператора определяется с точностью до постоянного слагаемого, то можно считать, что $f(\theta)=0$. Рассмотрим функционал $\varphi(x)=$ $=f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x\right)$, где $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный из оператора $\mathbf{A}$. Согласно лемме 10.1

$$\Phi(x)=\operatorname{grad}\varphi(x)=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x\right).$$

Функционал $\varphi(x)$ слабо полунепрерывен сверху как слабо полунепрерывный сверху функционал от линейного ограниченного оператора $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$.

По условию

$$\mathbf{F}(z)=\mathbf{F}'(\theta)z+\omega(\theta,\ z),$$

где заданному $\varepsilon>0$ отвечает такое $\delta>0$, что как только $\|z\|<\delta$, то $\|\omega(\theta,\ z)\|<\varepsilon\|z\|$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{F}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x\right)=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{F}'(\theta)\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x+\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\omega\left(\theta,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x\right),$$

где

$$\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\omega\left(\theta,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x\right)\right\|\leqslant\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right\|\left\|\omega\left(\theta,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}x\right)\right\|<\|\mathbf{A}\|\varepsilon\|x\|,$$

как только $\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right\|\|x\|<\delta(\varepsilon)$. Следовательно,

$$\Phi'(\theta)=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{F}'(\theta)\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как согласно условиям теоремы операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{F}'(\theta)$ перестановочны, то $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ и $\mathbf{F}'(\theta)$ также перестановочны (см. [47], стр. 260). Отсюда и из условия 4° следует, что $\mathbf{\Phi}'(\theta)$ — вполне непрерывный оператор.

Раз $\mathbf{\Phi}'(\theta)$ — производная Фреше оператора $\mathbf{\Phi}$, то в некоторой окрестности нуля они близки, а потому их потенциалы (см. формулу (5.6))

$$\psi(x) = \int_0^1 (\mathbf{\Phi}'(\theta)\,tx,\ x)\,dt = \frac{1}{2}(\mathbf{\Phi}'(\theta)\,x,\ x)$$

и $\varphi(x)$ близки. Из близости потенциалов φ и ψ следует, что в шаре достаточно малого радиуса потенциал φ принимает максимум на векторе, близком к вектору, на котором ψ принимает максимум. Но векторы, на которых ψ и φ принимают максимальные значения, суть собственные функции их градиентов $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Phi}'(\theta)$. Следовательно, и соответствующие собственные числа близки, т. е. у оператора $\mathbf{\Phi}$ имеются собственные числа, близкие к наибольшему собственному числу оператора $\mathbf{\Phi}'(\theta)$, ибо (см., например, [62], стр. 257) наибольшее собственное число оператора $\mathbf{\Phi}'(\theta)$ соответствует тем собственным векторам, на которых квадратичная форма $(\mathbf{\Phi}'(\theta)\,x,\ x)$ принимает наибольшее значение (мы не предполагаем здесь, что собственные векторы оператора $\mathbf{\Phi}'(\theta)$ нормированы). Эти простые соображения, которые носят геометрический характер, приводят к следующим вычислениям.

Пусть ε — заданное положительное число. Тогда положительное число δ_0 можно подобрать так, чтобы в шаре $D(\|x\| \leqslant \delta,\ \delta \leqslant \delta_0)$ было

$$\|\mathbf{\Phi}(x) - \mathbf{\Phi}'(\theta)\,x\| \leqslant \varepsilon \|x\|, \tag{17.5}$$

ибо $\mathbf{\Phi}'(\theta)$ — производная Фреше от оператора $\mathbf{\Phi}$ в нуле θ, т. е.

$$\mathbf{\Phi}(x) = \mathbf{\Phi}'(\theta)\,x + \omega(\theta,\ x).$$

Отсюда

$$\int_0^1 (\mathbf{\Phi}(tx),\ x)\,dt = \int_0^1 (\mathbf{\Phi}'(\theta)\,tx,\ x)\,dt + \int_0^1 (\omega(\theta,\ tx),\ x)\,dt$$

и согласно формуле (5.6)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\Phi'(\theta)x,\ x) + \int_0^1 (\omega(\theta,\ tx),\ x)\,dt$$

или

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant \int_0^1 |(\omega(\theta,\ tx),\ x)|\,dt \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon(x,\ x). \quad (17.6)$$

Пусть μ_0 — наибольшее собственное число оператора $\Phi'(\theta)$ и H_0 — подпространство собственных векторов оператора $\Phi'(\theta)$, соответствующих собственному числу μ_0. Тогда для произвольного $h \in H_0$ будет $\Phi'(\theta)h = \mu_0 h$, откуда согласно неравенству (17.6) имеем

$$\varphi(h) \geqslant \psi(h) - |\varphi(h) - \psi(h)| \geqslant \frac{1}{2}(\Phi'(\theta)h,\ h) - \\ - \frac{1}{2}\varepsilon(h,\ h) = \frac{1}{2}(\mu_0 - \varepsilon)(h,\ h).$$

Из данного неравенства следует, что

$$\varphi(x_0) = \max_D \varphi(x) \geqslant \varphi(h) \geqslant \frac{1}{2}(\mu_0 - \varepsilon)\delta^2, \quad (17.7)$$

ибо согласно теореме 13.1 $\varphi(x)$ достигает своей верхней грани на D как слабо полунепрерывный сверху функционал. Далее,

$$\varphi(x_0) \leqslant \psi(x_0) + |\varphi(x_0) - \psi(x_0)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}(\Phi'(\theta)x_0,\ x_0) + \frac{1}{2}\varepsilon(x_0,\ x_0).$$

Напишем, что $x_0 = \mathrm{P}_0 x_0 + \mathrm{P}_1 x_0$, где P_0 и P_1 суть операторы проектирования из H соответсвенно в подпространства H_0 и $H_1 = H \dot{-} H_0$. Тогда можно написать

$$(\Phi'(\theta)x_0,\ x_0) = (\Phi'(\theta)\mathrm{P}_0 x_0,\ \mathrm{P}_0 x_0) + (\Phi'(\theta)\mathrm{P}_1 x_0,\ \mathrm{P}_1 x_0),$$

ибо

$$(\Phi'(\theta)\mathrm{P}_0 x_0,\ \mathrm{P}_1 x_0) = (\Phi'(\theta)\mathrm{P}_1 x_0,\ \mathrm{P}_0 x_0) = 0,$$

или

$$(\Phi'(\theta)x_0,\ x_0) = \mu_0\|\mathrm{P}_0 x_0\|^2 + (\Phi'(\theta)\mathrm{P}_1 x_0,\ \mathrm{P}_1 x_0).$$

Но

$$(\Phi'(\theta)\mathrm{P}_1 x_0,\ \mathrm{P}_1 x_0) \leqslant \mu_1\|\mathrm{P}_1 x_0\|^2,$$

где μ_1 — следующее за μ_0 собственное число оператора $\Phi'(\theta)$ или нуль, если μ_0 — единственное положительное собственное число. Отсюда

$$(\Phi'(\theta)x_0, x_0) \leqslant \mu_0 \|P_0x_0\|^2 + \mu_1 \|P_1x_0\|^2,$$

так что согласно предыдущему имеем

$$\varphi(x_0) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon(x_0, x_0) + \frac{1}{2}\nu_0\|P_0x_0\|^2 + \frac{1}{2}\mu_1\|P_1x_0\|^2.$$

Отсюда и из неравенства (17.7) следует

$$(\mu_0 - \varepsilon)\delta^2 \leqslant \varepsilon\delta^2 + \nu_0\|P_0x_0\|^2 + \mu_1\|P_1x_0\|^2,$$

ибо $(x_0, x_0) \leqslant \delta^2$.

При помощи полученного неравенства и соотношения

$$\|P_0x_0\|^2 + \|P_1x_0\|^2 = \|x_0\|^2 \leqslant \delta^2$$

мы сначала находим, что

$$\|P_1x_0\|^2 \leqslant \frac{2\varepsilon}{\mu_0 - \mu_1}\delta^2, \tag{17.8}$$

а затем, усилив его, мы можем написать, что

$$(\mu_0 - \varepsilon)\delta^2 \leqslant \varepsilon\delta^2 + \nu_0\|P_0x_0\|^2 + \mu_0\|P_1x_0\|^2.$$

Отсюда и из неравенства (17.8) мы находим

$$\|P_0x_0\|^2 \geqslant \mu_0^{-1}(\mu_0 - 2\varepsilon)\delta^2 - \frac{2\varepsilon}{\mu_0 - \mu_1}\delta^2.$$

Из данного неравенства следует, что

$$\|\Phi'(\theta)x_0\|^2 \geqslant \|\Phi'(\theta)P_0x_0\|^2 = \mu_0^2\|P_0x_0\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \mu_0(\mu_0 - 2\varepsilon)\delta^2 - \frac{2\varepsilon\mu_0^2}{\mu_0 - \mu_1}\delta^2.$$

Отсюда и из неравенства (17.5) имеем

$$\|\Phi(x_0)\| \geqslant \|\Phi'(\theta)x_0\| - \|\Phi(x_0) - \Phi'(\theta)x_0\| \geqslant$$
$$\geqslant \left\{\mu_0(\mu_0 - 2\varepsilon) - \frac{2\varepsilon\mu_0^2}{\mu_0 - \mu_1}\right\}^{\frac{1}{2}}\delta - \varepsilon\delta. \tag{17.9}$$

Из данного неравенства следует, что при достаточно малом $\varepsilon \|\Phi(x_0)\| > 0$, так что согласно теореме 9.1 x_0 не может быть внутренней точкой шара. Следовательно, по теореме 12.2

$$\Phi(x_0) = \mu x_0,$$

т. е. x_0 — собственный вектор оператора Φ и $\|x_0\| = \delta \leqslant \leqslant \delta_0(\varepsilon)$.

Далее, используя неравенства (17.5) и (17.8), имеем

$$\delta |\mu - \mu_0| = \|\mu x_0 - \mu_0 x_0\| \leqslant \|\Phi(x_0) - \Phi'(\theta) x_0\| + \\ + \|\Phi'(\theta) x_0 - \mu_0 x_0\| \leqslant \varepsilon\delta + \|\Phi'(\theta) P_1 x_0 - \mu_0 P_1 x_0\| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\delta + (\|\Phi'(\theta)\| + \mu_0)\left(\frac{2\varepsilon}{\mu_0 - \mu_1}\right)^{\frac{1}{2}} \delta.$$

Следовательно, каково бы ни было $\eta > 0$, число ε можно подобрать столь малым, чтобы

$$|\mu - \mu_0| < \eta,$$

т. е. μ_0 — точка бифуркации оператора $\Phi(x) = A^{\frac{1}{2}} F\left(A^{\frac{1}{2}} x\right)$. Наконец, так как из равенства $\mu x_0 = A^{\frac{1}{2}} F\left(A^{\frac{1}{2}} x_0\right)$ следует, что $\mu z_0 = AF(z_0)$, где $\|z_0\| = \left\|A^{\frac{1}{2}} x_0\right\| \leqslant \left\|A^{\frac{1}{2}}\right\| \|x_0\|$, то μ_0 — точка бифуркации оператора AF. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 17.1. Отметим, что если в условии 1° теоремы 17.6 потребовать, чтобы потенциал $f(x)$ оператора F был слабо полунепрерывным снизу, то можно утверждать, что наименьшее отрицательное собственное число оператора $AF'(\theta)$ будет точкой бифуркации оператора AF, если $AF'(\theta)$ имеет отрицательные собственные значения. Действительно, данный случай сводится к рассмотренному путем замены f на $-f$.

Отметим еще следующее. Так как из полной непрерывности F (см. теорему 8.2) следует слабая непрерывность его потенциала и полная непрерывность (теорема 4.7) производной F', то из доказанной теоремы следует п р е д л о ж е н и е ([36, ж], теорема 1): *если производная Фреше* $F'(\theta)$ *вполне непрерывного потенциального оператора* F $(F(\theta) = \theta)$ *является самосопряженным оператором в вещественном гильбертовом пространстве, то наибольшее положитель-*

ное и наименьшее отрицательное собственные числа оператора $\mathbf{F}'(\theta)$ *являются точками бифуркации оператора* $\mathbf{F}$.

17.4. Теорема М. А. Красносельского. Если на оператор $\mathbf{F}$, о котором шла речь в последнем предложении, наложить дополнительные ограничения, то имеет место следующее более общее предложение, доказанное М. А. Красносельским ([36, ж], теорема 2).

Теорема 17.7. *Если производная Фреше* $\mathbf{F}'(\theta)$ *усиленно непрерывного (в некоторой окрестности нуля* θ *вещественного гильбертова пространства) потенциального оператора* $\mathbf{F}\,(\mathbf{F}(\theta)=\theta)$ *является самосопряженным оператором, то каждое собственное число оператора* $\mathbf{F}'(\theta)$ *является точкой бифуркации оператора* $\mathbf{F}$.

ГЛАВА VI

ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В настоящей главе рассматриваются некоторые нелинейные операторы и функционалы, которые нужны для применения общих теорем, полученных в предыдущих главах, к изучению нелинейных интегральных уравнений и нелинейных интегральных операторов.

§ 18. Об одном виде (C)-свойства функций

Н. Н. Лузин в своей известной работе [45] обратил внимание на одно характеристическое свойство измеримых функций, названное им (C)-свойством, и показал, какую важную роль в теории функций играет это свойство.

При исследовании нелинейных интегральных уравнений

$$u(x) = \int_a^b K(x, y) g(u(y), y)\, dy \equiv \mathbf{\Gamma} u \qquad (18.1)$$

или систем подобного вида возникают вопросы о свойствах измеримых функций, заданных в бесконечной полосе ($a \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < u < +\infty$) плоскости (x, u). Именно, при исследовании уравнения (18.1) возникает вопрос о свойствах функции $g(u(x), x)$, когда известно, что функция $u(x)$ принадлежит определенному классу. Если ядро $K(x, y)$ (или первая его итерация) непрерывно, то возникает вопрос о непрерывных решениях уравнения (18.1); в этом случае, если допустить, что $g(u, x)$ непрерывна по совокупности аргументов, функция $g(u(x), x)$ непрерывна для всякой непрерывной функции $u(x)$, а потому оператор $\mathbf{\Gamma}$ непрерывен в пространстве C. Иначе обстоит дело, если отказаться от непрерывности ядра $K(x, y)$ и функции $g(u, x)$ и искать решения уравнения (18.1), принадлежащие пространству $L^p (p \geqslant 1)$, как это было сделано в работе В. В. Немыцкого [57, а]. В этом случае возникает вопрос о том, какому пространству принадлежит функция $g(u(x), x)$, если $u(x)$ принадлежит пространству L^p. Данный вопрос приводит к рассмотрению оператора

$$\mathfrak{h}u = g(u(x), x),$$

который мы будем называть *оператором Немыцкого*, так как в работе В. В. Немыцкого [57, а] содержатся предложения, которые дали возможность начать исследования этого оператора.

При исследовании оператора $\mathfrak{h}$ (см. [9, г] и [9, с]) возникают вопросы об измеримости различных функций [9, с]. Оказалось, что эти вопросы тесно связаны с одним видом (C)-свойства [9, с].

18.1. Основная теорема. Сначала приведем определение (C)-свойства и формулировку теоремы Н. Н. Лузина (см. [45], стр. 65).

Определение 18.1. Говорят, что *функция* $\varphi(x)$, *конечная почти всюду на измеримом множестве* E, *обладает на* E (C)*-свойством*, если, каково бы ни было положительное ε, существует замкнутое множество $F \subset E$ такое, что $\operatorname{mes} F \geqslant \operatorname{mes} E - \varepsilon$, на котором $\varphi(x)$ непрерывна.

Теорема 18.1 (Н. Н. Лузина). *Для того чтобы функция* $\varphi(x)$, *конечная почти всюду на измеримом множестве* E s*-мерного евклидова пространства, была измеримой на* E, *необходимо и достаточно, чтобы она обладала на* E (C)*-свойством.*

Этой теоремой мы и воспользуемся. Пусть B есть измеримое множество конечной меры s-мерного евклидова пространства и $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ — действительная функция, заданная для $x \in B$ и $u_i \in (-\infty, +\infty)$. Для краткости формулировок различных предложений мы введем следующие определения.

Определение 18.2. Мы скажем, что $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ есть (H)*-функция*, если она непрерывна по совокупности $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ почти при каждом значении $x \in B$ и измерима в B по x при фиксированных $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $u_i \in (-\infty, +\infty)$.

Такие функции рассматривал Каратеодори при изучении дифференциальных уравнений ([31], стр. 665).

Определение 18.3. Мы скажем [9, с], что *функция* $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$, определенная для $x \in B$ и $u_i \in (-\infty, +\infty)$, где B есть измеримое множество конечной меры s-мерного евклидова пространства, *обладает усиленным* (C)-*свойством*, если, каково бы ни было $\eta > 0$, найдется такое замкнутое множество $F \subset B$, мера которого больше $\operatorname{mes} B - \eta$, что на топологическом произведении множества F и n-мерного евклидова пространства переменных $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ функция $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ непрерывна по совокупности всех аргументов.

Теорема 18.2[1]) (основная). *Для того чтобы функция $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ была (H)-функцией, необходимо и достаточно, чтобы она обладала усиленным (C)-свойством.*

Достаточность условия теоремы очевидна; непрерывность функции $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ по совокупности $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ почти при всех $x \in B$ следует из условия, а измеримость $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ по $x \in B$ при фиксированных $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ непосредственно следует из теоремы 18.1 Докажем необходимость условия. Пусть $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ есть (H)-функция. Будем ее рассматривать на топологическом произведении множества B и n-мерного куба $|u_i| \leqslant a$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пусть ε есть произвольное положительное число, а $E_{\varepsilon m}$ есть множество всех $x \in B$, на котором из неравенства

$$|u_i^{(2)} - u_i^{(1)}| \leqslant \frac{1}{m} (i = 1, 2, \ldots, n)$$

следует неравенство

$$|g(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}, x) - g(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}, x)| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Измеримость множества $E_{\varepsilon m}$ непосредственно следует из условия. Для того чтобы в этом убедиться, лучше рассматривать дополнительное можество $CE_{\varepsilon m} = B \setminus E_{\varepsilon m}$.

---

[1]) См. [9, с, х]; ср. также работу: Красносельский М. А. и Ладыженский Л. А., Условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона, Труды Моск. матем. об-ва, 1954, т. 3.

Точка $x_0 \in CE_{\varepsilon m}$, если хоть для одной пары точек

$$M_1(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}) \quad \text{и} \quad M_2(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}),$$

координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$|u_i^{(2)} - u_i^{(1)}| \leqslant \frac{1}{m},$$

выполняется следующее неравенство:

$$|g(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}, x) - g(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}, x)| > \frac{1}{3}\varepsilon.$$

При этом достаточно рассмотреть такие пары M_1 и M_2, принадлежащие кубу $|u_i| \leqslant a$, координаты которых рациональны. Так как при фиксированных M_1 и M_2 $g(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}, x)$ и $g(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}, x)$ измеримы в B по условию, то

$$E\left(|g(M_2, x) - g(M_1, x)| > \frac{1}{3}\varepsilon\right)$$

есть лебегово множество, а потому $CE_{\varepsilon m}$ — измеримое множество как соединение счетного числа лебеговых множеств. Из измеримости $CE_{\varepsilon m}$ следует измеримость множества $E_{\varepsilon m}$.

Из определения множеств $E_{\varepsilon m}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ следует, что $E_{\varepsilon 1} \subset E_{\varepsilon 2} \subset E_{\varepsilon 3} \subset \ldots$ Рассмотрим соединение $E_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{\varepsilon m}$ и положим $F_0 = B \setminus E_0$. Покажем, что $\operatorname{mes} F_0 = 0$. Действительно, если мы допустим, что $\operatorname{mes} F_0 > 0$, то, взяв почти любую точку $x_0 \in F_0$ и произвольное положительное число δ_0, найдем хотя бы одну пару точек $(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)})$ и $(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)})$, принадлежащую n-мерному кубу $|u_i| \leqslant a$, для которой из неравенства $|u_i^{(2)} - u_i^{(1)}| \leqslant \delta_0$ будет следовать неравенство

$$|g(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}, x_0) - g(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}, x_0)| > \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Так как δ_0 есть произвольное положительное число, то последние неравенства противоречат условию, что почти при всяком $x \in B$ функция $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ непрерывна по совокупности $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и, следовательно, равномерно непрерывна в кубе $|u_i| \leqslant a$. Полученное противоречие показывает, что $\operatorname{mes} F_0 = 0$. Раз $\operatorname{mes} F_0 = 0$, то заданному $\eta > 0$

отвечает такое натуральное m_0, что для всякой пары точек $(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)})$ и $(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)})$ из куба $|u_i| \leqslant a$, удовлетворяющей неравенству $|u_i^{(2)} - u_i^{(1)}| \leqslant \frac{1}{m_0}$, выполняются неравенства

$$|g(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}, x) - g(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}, x)| \leqslant \frac{1}{3}\varepsilon,$$

если $x \in E_{\varepsilon m_0}$ и $\operatorname{mes} E_{\varepsilon m_0} > \operatorname{mes} B - \frac{1}{3}\eta$.

Положим теперь $p = 1 + [a]$, где $[a]$ есть целая часть a, и разобьем куб $|u_i| \leqslant a$ на $q = p^n m_0^n$ равных кубов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_q$. Пусть $(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}, \ldots, u_n^{(\nu)})$ есть центр куба Δ_ν. Так как по условию $g(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}, \ldots, u_n^{(\nu)}, x)$ измерима в B по x, то согласно теореме 18.1 Н. Н. Лузина найдется замкнутое множество F_ν, мера которого больше $\operatorname{mes} B - \frac{1}{3q}\eta$, на котором $g(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}, \ldots, u_n^{(\nu)}, x)$ равномерно непрерывна по x. Полагая $V = \bigcap_{\nu=1}^{q} F_\nu$, мы получим, что для всякого $\nu = 1, 2, \ldots, q$ функция $g(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}, \ldots, u_n^{(\nu)}, x)$ будет равномерно непрерывна по x на множестве V. Это значит, что заданному $\frac{\varepsilon}{3}$ отвечает такое δ_1, что для всякого $\nu = 1, 2, \ldots, q$ выполняется неравенство

$$g(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}, \ldots, u_n^{(\nu)}, x^{(2)}) - g(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}, \ldots, u_n^{(\nu)}, x^{(1)})| < \frac{\varepsilon}{3},$$

как только точки $x^{(1)}, x^{(2)} \in V$ находятся в одном s-мерном кубе с ребром δ_1. Полагая

$$E = V \cap E_{\varepsilon m_0} \quad \text{и} \quad \delta = \min\{m_0^{-1}, \delta_1\},$$

мы получим, что на топологическом произведении куба $|u_i| \leqslant a$ и множества E будет

$$|g(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}, x^{(2)}) - g(u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}, x^{(1)})| < \varepsilon,$$

как только евклидово расстояние между точками

$$(u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}, x^{(2)}) \quad \text{и} \quad (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}, x^{(1)})$$

меньше δ. Ясно, что $\operatorname{mes} E > \operatorname{mes} B - \frac{2}{3}\eta$. Так как E есть измеримое множество, то оно содержит замкнутое подмножество F, для которого $\operatorname{mes} F > \operatorname{mes} E - \frac{1}{3}\eta$. Таким образом, $\operatorname{mes} F > \operatorname{mes} B - \eta$, причем на топологическом произведении множества F и куба $|u_i| \leqslant a$ функция $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ непрерывна по совокупности всех аргументов. Разобьем теперь n-мерное евклидово пространство $R^{(n)}$ переменных $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ на счетное множество кубов $V_1, V_2, V_3, \ldots$ Согласно доказанному, каково бы ни было $\eta > 0$, найдется замкнутое множество G_ν, мера которого больше $\operatorname{mes} B - \frac{1}{2^{\nu+1}}\eta$, такое, что $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ будет непрерывна по совокупности всех аргументов на топологическом произведении множества G_ν и куба V_ν. Полагая $G = \bigcap\limits_{\nu=1}^{\infty} G_\nu$, мы получим, что $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ будет непрерывна по совокупности всех аргументов на топологическом произведении пространства $R^{(n)}$ и множества G. Так как $\operatorname{mes} G_\nu > \operatorname{mes} B - \frac{1}{2^{\nu+1}}\eta$,

то $\operatorname{mes} G > \operatorname{mes} B - \eta \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} 2^{-(\nu+1)} = \operatorname{mes} B - \frac{1}{2}\eta$. Так как множество G измеримо, то оно содержит замкнутое подмножество D, мера которого больше $\operatorname{mes} B - \frac{1}{2}\eta$. Следовательно, на топологическом произведении пространства $R^{(n)}$ и замкнутого множества $D \subset B$ ($\operatorname{mes} D > \operatorname{mes} B - \eta$) функция $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ непрерывна по совокупности всех аргументов $(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$. Теорема доказана.

18.2. Об измеримости некоторых функций.

Теорема 18.3. *Если $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ есть (H)-функция, то, каковы бы ни были почти всюду конечные и измеримые на B функции $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$, функция $g(v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x), x)$ измерима на множестве B.*

Доказательство. Согласно теореме 18.2, каково бы ни было положительное η, найдется такое замкнутое множество $E_1 \subset B$, где $\operatorname{mes} E_1 > \operatorname{mes} B - \frac{1}{2}\eta$, что $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$

будет непрерывна по совокупности всех аргументов на топологическом произведении множества E_1 и n-мерного евклидова пространства $R^{(n)}$ переменных $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Далее, согласно теореме 18.1 найдется замкнутое множество $E_2 \subset B$, мера которого больше $\operatorname{mes} B - \frac{1}{2}\eta$, на котором $v_1(x)$, $v_2(x), \ldots, v_n(x)$ непрерывны. Следовательно, на множестве $E = E_1 \cap E_2$ функция $g(v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x), x)$ непрерывна по x как непрерывная функция от непрерывных функций. Отсюда, так как η есть произвольное положительное число и $\operatorname{mes} E > \operatorname{mes} B - \eta$, по теореме 18.1 $g(v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x), x)$ измерима по x на множестве B. Теорема доказана.

Отметим, что первое доказательство данной теоремы, по-видимому, принадлежит К. Каратеодори ([31], стр. 665—666). Затем она была вновь доказана П. И. Романовским ([9, г], стр. 382—383), причем его доказательство совпало с первоначальным. Данное здесь доказательство содержится в работе ([9, х], теорема 3). Оно отличается от доказательства Каратеодори и Романовского.

Теорема 18.4. *Если $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ есть (H)-функция, то, каков бы ни был n-мерный куб $\Delta(|u_i| \leqslant \alpha)$, функция*

$$a_\alpha(x) = \max_{\Delta} g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$$

измерима по x на множестве B.

Доказательство. Согласно теореме 18.2, каково бы ни было положительное η, найдется замкнутое множество $E \subset B$, мера которого больше $\operatorname{mes} B - \eta$, такое, что на топологическом произведении куба Δ и множества E функция $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ будет непрерывна по совокупности $(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$. Ввиду этого функция

$$a_\alpha(x) = \max_{\Delta} g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$$

будет непрерывна по x на множестве E. Отсюда, так как η есть произвольное положительное число и $\operatorname{mes} E > \operatorname{mes} B - \eta$, согласно теореме 18.1 $a_\alpha(x)$ измерима на множестве B. Теорема доказана.

Теорема 18.5. *Если* $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ *есть* (H)*-функция, то, каков бы ни был* n*-мерный куб* $\Delta(|u_i| \leqslant \alpha)$, *среди вектор-функций* $(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))$, *осуществляющих равенство*

$$|g(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x), x)| = a_\alpha(x) = \\ = \max_{\Delta} |g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)|,$$

имеются измеримые.

Доказательство. Пусть $\varphi_i(x)$ — наименьшее значение $u_i \in [-\alpha, +\alpha]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, для которых $|g(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), x)| = a_\alpha(x)$ и

$$a^{(1)}_{\alpha\gamma}(x) = \max_{\Delta'} |g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)|,$$

где Δ' — параллелепипед $-\alpha \leqslant u_1 \leqslant \gamma$, $|u_i| \leqslant \alpha$ для $i = 2, 3, \ldots, n$; $-\alpha \leqslant \gamma \leqslant \alpha$.

Согласно теореме 18.4 функции $a_\alpha(x)$ и $a^{(1)}_{\alpha\gamma}(x)$ измеримы, а потому функция

$$f(x) = \frac{1 + a_\alpha(x)}{1 + a^{(1)}_{\alpha\gamma}(x)} \geqslant 1$$

измерима, ибо $1 + a^{(1)}_{\alpha\gamma}(x) \geqslant 1$. Из измеримости $f(x)$ следует измеримость множеств $E(f(x) > h)$, где $h \geqslant 1$. Но множества $E(f > 1)$ совпадают с множествами $E(\varphi_1(x) > \gamma)$. Следовательно, функция $\varphi_1(x)$ измерима на множестве B. Так же доказывается измеримость функций $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Теорема доказана.

18.3. Асимптотическая непрерывность. Теорема 18.3 показывает, что оператор Немыцкого

$$\mathbf{H}v = g(v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x), x)$$

преобразует каждую систему из n измеримых функций $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x)$ в измеримую функцию $\mathbf{H}v$. Для этого оператора, когда $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ есть (H)-функция, имеет место следующее предложение.

Теорема 18.6. (В. В. Немыцкого[1]). *Оператор Немыцкого* $\mathrm{H}u = g(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)$ *асимптотически непрерывен (непрерывен по мере), т. е., каковы бы ни были* $\varepsilon > 0$ *и* $\eta > 0$, *найдется такое* $\delta(\varepsilon, \eta) > 0$, *что из неравенства*

$$|u_i(x) - v_i(x)| < \delta \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где почти всюду конечные вектор-функции $(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ *и* $(v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x))$ *измеримы в* B *по* x, *а* $(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ *фиксированы, будет следовать неравенство*

$$|g(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x) - g(v_1(x), v_2(x), \ldots, v_n(x), x)| < \varepsilon,$$

имеющее место на замкнутом множестве $E \subset B$, *для которого* $\operatorname{mes} E > \operatorname{mes} B - \eta$.

Доказательство. Так как почти всюду конечные функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ измеримы, то согласно теореме 18.1 заданному $\eta > 0$ отвечает замкнутое множество $E_1 \subset B$, мера которого больше $\operatorname{mes} B - \frac{1}{2}\eta$, на котором функции $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ равномерно непрерывны. Положим $\alpha_i = \max\limits_{(E_1)} |u_i(x)|$, $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, $a = \alpha + 1$.

Согласно теореме 18.2 заданному $\eta > 0$ отвечает замкнутое множество $E_2 \subset B$ $\left(\operatorname{mes} E_2 > \operatorname{mes} B - \frac{1}{2}\eta\right)$ такое, что на топологическом произведении куба $\Delta(|u_i| \leqslant a)$ и множества E_2 функция $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ равномерно непрерывна по совокупности $(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$. Следовательно, $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ равномерно непрерывна по совокупности всех аргументов на топологическом произведении куба Δ и множества $E = E_1 \cap E_2$, где $\operatorname{mes} E > \operatorname{mes} B - \eta$. Из равномерной непрерывности следует, что заданному $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что на E

$$|g(u_1(x), \ldots, u_n(x), x) - g(v_1(x), \ldots, v_n(x), x)| < \varepsilon,$$

как только $|u_i(x) - v_i(x)| < \delta$. Теорема доказана.

---

[1]) См. [57, а], стр. 440, лемма 2.

§ 19. О непрерывности оператора Немыцкого [1])

При изучении нелинейных интегральных операторов типа Гаммерштейна

$$\mathbf{\Gamma} u=\int_B K(x,\ y) g(u(y),\ y) dy,$$

как увидим в дальнейшем, важную роль играют операторы, порожденные функциями многих переменных. Пусть вещественная функция $g(u,\ x)$ есть (H)-функция (см. определение 18.2). Функция $g(u,\ x)$ порождает оператор $\mathbf{h}$, заданный на некоторой совокупности вещественных функций $u(x)$ равенством

$$\mathbf{h} u=g(u(x),\ x) \quad (x \in B)^{2)}.$$

Этот оператор мы будем называть *оператором Немыцкого* по причинам, которые были указаны в предыдущем параграфе.

Мы будем рассматривать классы вещественных функций $L^p(B)$, т. е. совокупность вещественных функций, заданных на измеримом множестве B и суммируемых на B со степенью p, где $p>0$. В том случае, когда $p \geqslant 1$, класс L^p называется *пространством* L^p.

Определение 19.1. Говорят, что *оператор* $\mathbf{h}$ *действует из* L^p *в* L^{p_1} $(p>0,\ p_1>0)$, если $\mathbf{h} u \in L^{p_1}$ для всякой функции $u(x) \in L^p$.

При рассмотрении основной теоремы мы не будем останавливаться на доказательстве измеримости всех вспомогательных множеств и функций. Отметим лишь, что измеримость этих множеств и функций следует из теорем 18.2—18.5.

19. 1. Основная теорема.

Теорема 19.1 (основная). *Для того чтобы оператор Немыцкого*

$$\mathbf{h} u=g(u(x),\ x),$$

где $g(u,\ x)$ — (H)-*функция, был непрерывным оператором, действующим из класса* L^p *в класс* L^{p_1} $(p>0,\ p_1>0)$,

[1]) См. [9, г, д, и, с] и [36, а, б, в].

[2]) B — измеримое множество s-мерного евклидова пространства.

необходимо и достаточно[1]), *чтобы*

$$|g(u, x)| \leqslant a(x) + b|u|^r, \tag{19.1}$$

где

$$r = p/p_1,$$
$$b > 0,$$
$$a(x) \in L^{p_1}.$$

Доказательство необходимости. Пусть $\mathfrak{h}$ — непрерывный оператор, действующий из L^p в L^{p_1}. Покажем, что из этого предположения (что $\mathfrak{h}$ действует из L^p в L^{p_1}) следует неравенство (19.1). Сначала разберем случай $r = 0$, т. е. оператор $\mathfrak{h}$ действует из L^p в пространство ограниченных измеримых функций, а значит, $a(x) \leqslant c$ почти для всех $x \in B$. Положим

$$\alpha_n(x) = \max_{|u| \leqslant n} |g(u, x)|$$

и рассмотрим семейство измеримых функций $u = \varphi_n(x)$, удовлетворяющих данному равенству. Существование измеримых функций $\varphi_n(x)$ следует из теоремы 18.5. Так как $|\varphi_n(x)| \leqslant n$, то согласно условию $\operatorname{vrai\,sup} \alpha_n(x) = b_n < +\infty$, причем $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant \ldots$ Если мы докажем, что последовательность $\{b_n\}$ ограничена, то этим будет доказана необходимость условия в случае $r = 0$. Доказательство проведем от противного. Допустим, что последовательность $\{b_n\}$ неограничена. Положим тогда

$$E_n = E(|g(u, x)| > b_n),$$

где E_n есть множество тех $x \in B$, для которых $|g(u, x)| > b_n$ хотя бы для некоторых u. Для множеств E_n, измеримость которых была установлена при доказательстве теоремы 18.2, имеем: $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ Положим $E_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ и покажем, что $\operatorname{mes} E_0 = 0$. Действительно, если мы допустим, что $\operatorname{mes} E_0 = \alpha > 0$, то можно будет выбрать счетное множество попарно непересекающихся множеств $\{e_n\} \subset E_0$

---

[1]) Доказательство необходимости было впервые опубликовано в работе [9, с]; доказательство достаточности было опубликовано раньше [9, г, д].

и функции $\psi_n(x)$, удовлетворяющие условиям:

1°. $\operatorname{mes} e_n > 0$,

2°. $|g(\psi_n(x), x)| > b_n$ для $x \in e_n$,

3°. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{e_n} |\psi_n(x)|^p \, dx < +\infty$.

Полагая тогда

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_n(x), & x \in e_n \\ 0, & x \in B \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n, \end{cases}$$

мы получим, что $\psi(x) \in L^p$, но что функция $g(\psi(x), x)$ не ограничена на множестве $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} e_n$. Это противоречит условию. Полученное противоречие показывает, что $\operatorname{mes} E_0 = 0$. Отсюда и из допущения неограниченности последовательности $\{b_n\}$ следует, если положим $\sigma_n = E_n \setminus E_{n+1}$, что среди множеств σ_n найдется подпоследовательность $\{\sigma_{n_k}\}$ таких, что $\operatorname{mes} \sigma_{n_k} > 0$. На каждом множестве σ_{n_k} будет

$$b_{n_k} < |g(u, x)| \leqslant b_{n_{k+1}},$$

где левая часть неравенств имеет место для некоторых значений u, а правая часть неравенств имеет место для всех u. Обозначим через V_{n_k} семейство измеримых [1]) функций $u = \varphi_{n_k}(x)$, удовлетворяющих на σ_{n_k} последним неравенствам, и выберем из каждого семейства V_{n_k} такую функцию $\varphi_{n_k}(x)$, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{e_{n_k}} |\varphi_{n_k}(x)|^p \, dx < \infty,$$

где $e_{n_k} \subset \sigma_{n_k}$ выбраны для этой цели подходящим образом ($\operatorname{mes} e_{n_k} > 0$). Полагая тогда

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_{n_k}(x), & x \in e_{n_k}, \\ 0, & x \in B \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} e_{n_k}, \end{cases}$$

мы получим $\psi(x) \in L^p$, но функция $g(\psi(x), x)$ не ограни-

[1]) Их измеримость следует из теорем § 18.

чена на $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} e_{n_k}$. Это противоречит условию. Полученное противоречение доказывает, что $b_n \leqslant c = \text{const}$. Значит, первая часть теоремы доказана в предположении, что $r = 0$.

Пусть теперь $r > 0$. Рассмотрим расходящуюся возрастающую последовательность положительных чисел $\{b_n\}$. Далее, положим

$$\alpha_n(x) = \max_{|u| \leqslant n} |g(u, x)|, \quad a_1(x) = \alpha_1(x)$$

и обозначим через E_1 множество значений x, на котором $|g(u, x)| > a_1(x) + b_1 |u|^r$ хотя бы для некоторых значений u, т. е. $E_1 = E(|g(u, x)| > a_1(x) + b_1 |u|^r)$. Затем положим

$$a_2(x) = \begin{cases} a_1(x), & x \in B \setminus E_1 \\ \alpha_2(x), & x \in E_1, \end{cases}$$

$$E_2 = E(|g(u, x)| > a_2(x) + b_2 |u|^r),$$

и продолжим данный процесс, полагая

$$a_n(x) = \begin{cases} a_{n-1}(x), & x \in B \setminus E_{n-1}, \\ \alpha_n(x), & x \in E_{n-1}, \end{cases}$$

$$E_n = E(|g(u, x)| > a_n(x) + b_n |u|^r).$$

Каждая функция последовательности $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \ldots$ согласно теореме 18.4 есть измеримая функция. Далее, так как по условию всякая измеримая ограниченная функция преобразуется оператором $\mathfrak{h}$ в функцию класса L^{p_1}, то $\alpha_n(x) \in L^{p_1}$. Отсюда следует, что $a_n(x) \in L^{p_1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Из самого способа построения множеств $E_1, E_2, E_3, \ldots$ следует [1]), что $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ Положим $E_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ и докажем, что $\operatorname{mes} E_0 = 0$. Действительно, допуская, что $\operatorname{mes} E_0 = \gamma > 0$, рассмотрим произвольное множество $e \subset E_0$, для которого $\operatorname{mes} e > 0$. На множестве e выполняется неравенство

$$|g(u, x)| > a_n(x) + b_n |u|^r \tag{19.2}$$

---

[1]) Если бы $\operatorname{mes} E_n = 0$ для некоторого n, то предложение было бы доказано; поэтому будем предполагать, что $\operatorname{mes} E_n > 0$ для всякого n.

для всякого n, а потому среди измеримых функций семейства $u=\varphi(x)$, для которых осуществляется неравенство (19.2), имеется последовательность неограниченно возрастающих. Следовательно, каково бы ни было число N, найдется функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая неравенству (19.2), для которой

$$\int_e |\varphi(x)|^p \, dx \geqslant N.$$

Используя данное неравенство, справедливое для всякого подмножества $e \subset E_0$ с положительной мерой, можно выбрать последовательность попарно непересекающихся множеств e_1, e_2, e_3, ..., входящих в множество E_0, и такие функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, ..., чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{e_k} |\varphi_k(x)|^p \, dx < +\infty; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{p_1} \int_{e_k} |\varphi_k(x)|^p \, dx = +\infty. \tag{19.3}$$

Полагая тогда

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_k(x), & x \in e_k, \\ 0, & x \in B \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} e_k, \end{cases} \tag{19.4}$$

мы получим

$$\int_B |\psi(x)|^p \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{e_k} |\varphi_k(x)|^p \, dx < +\infty, \tag{19.5}$$

т. е. $\psi(x) \in L^p$. Так как функции $\varphi_k(x)$, по построению, удовлетворяют неравенствам

$$|g(\varphi_k(x), x)| > a_k(x) + b_k |\varphi_k(x)|^r, \quad x \in e_k, \tag{19.2}$$

то отсюда и из (19.3) имеем

$$\left.\begin{aligned} \int_B |g(\psi(x), x)|^{p_1} \, dx \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{e_k} |g(\psi(x), x)|^{p_1} \, dx = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{e_k} |g(\varphi_k(x), x)|^{p_1} \, dx \geqslant \\ \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{p_1} \int_{e_k} |\varphi_k(x)|^p \, dx = +\infty. \end{aligned}\right\} \tag{19.6}$$

Таким образом, $\psi(x) \in L^p$, $g(\psi(x), x) \bar{\in} L^{p_1}$ что противоречит условию теоремы, согласно которому оператор $\mathbf{h}$ действует из L^p в L^{p_1}. Следовательно, $\operatorname{mes} E_0 = 0$.

Обозначим через U_k семейство функций $u = \varphi_k(x)$, удовлетворяющих на E_k неравенствам (19.2). К семейству U_k мы также отнесем функции $u = \omega_k(x)$, удовлетворяющие на E_k соотношению

$$\psi_k(x) = \sup_{\varphi_k \in U} |g(\varphi_k(x), x)|.$$

Если среди функций семейства U_k имеются такие $\tilde{\varphi}_k(x)$, которые не принадлежат L^p, т. е.

$$\int_{E_k} |\tilde{\varphi}_k(x)|^p \, dx = +\infty,$$

то такое семейство мы обозначим через $\tilde{U}_k$. Разумеется, если при $k = k_0$ мы имеем $\tilde{U}_{k_0}$, то и при $k < k_0$ будет $\tilde{U}_k$. Покажем, что множество семейств $\tilde{U}_k$ является конечным. Доказательство проведем от противного. Допустим, что при любом k мы имеем $\tilde{U}_k$. Положим тогда $\sigma_k = E_k \setminus E_{k+1}$. Так как по доказанному $\operatorname{mes} E_0 = 0$, то найдется последовательность σ_{n_k} таких, что $\operatorname{mes} \sigma_{n_k} > 0$. На σ_{n_k} выполняется неравенство

$$a_{n_k}(x) + b_{n_k} |u|^r < |g(u, x)| \leqslant a_{n_{k+1}}(x) + b_{n_{k+1}} |u|^r, \tag{19.7}$$

причем левая часть этого неравенства имеет место для некоторых u, а правая часть — для всех u. Обозначим через V_{n_k} семейство функций $u = \varphi_{n_k}(x)$, удовлетворяющих на σ_{n_k} неравенствам (19.7). Так как согласно допущению при любом k существуют $\tilde{\varphi}_k(x) \bar{\in} L^p$, то можно подобрать такие $\varphi_{n_k}(x) \in V_{n_k}$ и такие подмножества $e_{n_k} \subset \sigma_{n_k}$, что будут выполнены соотношения (19.3), если в них заменить k на n_k. Определив тогда функцию $\psi(x)$ при помощи равенства (19.4), в котором k заменено на n_k, мы согласно неравенствам (19.5) и (19.6), в которых k заменено на n_k, придем к противоречию с условием теоремы, так как $\psi(x) \in L^p$, а $g(\psi(x), x) \bar{\in} L^{p_1}$. Полученное противоречие доказывает, что семейства $\tilde{U}_k$ образуют конечное множество. Обозначим через $k_0 - 1$ наибольший из номеров семейств $\tilde{U}_k$ и рассмотрим семейство U_{k_0}. Функции $u = \varphi_{k_0}(x)$ удовлетворяют на E_{k_0} неравенству (19.2), а на множестве $B \setminus E_{k_0}$

$$|g(u, x)| \leqslant a_{k_0}(x) + b_{k_0}|u|^r. \tag{19.8}$$

Так как все функции семейства U_{k_0} принадлежат классу L^p, то и функции $\omega_{k_0}(x)$, удовлетворяющие на E_{k_0} соотношению

$$\psi_{k_0}(x) = \sup_{\varphi_{k_0} \in U_{k_0}} |g(\varphi_{k_0}(x), x)|$$

также принадлежат L^p. Так как оператор $\mathbf{h}$ согласно условию действует из L^p в L^{p_1}, то из соотношения $\omega_{k_0}(x) \in L^p$ следует, что $\psi_{k_0}(x) \in L^{p_1}$ на множестве E_{k_0}. Полагая теперь

$$a(x) = \begin{cases} a_{k_0}(x), & x \in B \setminus E_{k_0}, \\ \psi_{k_0}(x), & x \in E_{k_0}, \end{cases}$$

мы отсюда и из неравенства (19.8) имеем, что

$$|g(u, x)| \leqslant a(x) + b_{k_0}|u|^r$$

для всех $u \in (-\infty, +\infty)$ и почти для всех $x \in B$. Этим доказана первая часть теоремы о необходимости условия (19.1) для того, чтобы $\mathbf{h}$ был непрерывным оператором из L^p в L^{p_1} $(p > 0,\ p_1 > 0)$.

Доказательство достаточности[1]. Помимо обозначений

$$\|u\|^p = \int_B |u(x)|^p\,dx; \quad \|\mathbf{h}u\|^{p_1} = \int_B |\mathbf{h}u|^{p_1}\,dx$$

мы будем пользоваться и следующими обозначениями:

$$\|u\|_F^p = \int_F |u(x)|^p\,dx; \quad \|\mathbf{h}u\|_F^{p_1} = \int_F |\mathbf{h}u|^{p_1}\,dx,$$

где F — произвольное измеримое подмножество множества B.

Сначала мы будем предполагать, что $\operatorname{mes} B < \infty$.

Пусть выполнено условие (19.1) и u_0 — произвольный вектор из L^p. Рассмотрим произвольную последовательность

[1]) Предполагается, что $p_1 < +\infty$.

$\{u_m\} \in L^p$, сходящуюся в L^p к u_0. Согласно тоореме 18.6, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что при $|u_m(x) - u_0(x)|^p < \delta$ будет: $|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0| < \varepsilon$ на множестве $A_m \subset B$, где $\operatorname{mes}(B \setminus A_m) < \eta$. Но по условию $\|u_m - u_0\|^p \to 0$ при $m \to \infty$, поэтому найдется такое $m_1(\varepsilon, \eta)$, что при $m \geqslant m_1$ $|u_m(x) - u_0(x)|^p < \delta$ для $x \in C_m \subset B$, где $\operatorname{mes}(B \setminus C_m) < \eta$. Отсюда вытекает, что

$$\|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\|^{p_1} = \|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\|_{E_m}^{p_1} + \|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\|_{F_m}^{p_1} < \\ < \varepsilon^{p_1} \operatorname{mes} B + \|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\|_{E_m}^{p_1}, \qquad (19.9)$$

где $E_m = B \setminus F_m$, $F_m = A_m \cap C_m$.

Выкладки, связанные с оценкой $\|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\|_{E_m}^{p_1}$, различны в зависимости от того, будут ли положительные числа p и p_1 меньше единицы или нет. Так как $\|u_m - u_0\|^p \to 0$, то при $p < 1$ имеем

$$\|u_m\|^p \leqslant \|u_0\|^p + \|u_m - u_0\|^p,$$

а потому числа m_1 и η можно выбрать так, чтобы $\|u_0\|_{E_m}^p < \frac{1}{2}\varepsilon^p$ и $\|u_m - u_0\|^p < \frac{1}{2}\varepsilon^p$. Отсюда

$$\|u_m\|_{E_m} < \varepsilon, \qquad (19.10)$$

если $m \geqslant m_1$. При $p \geqslant 1$ мы можем написать

$$\|u_m\| \leqslant \|u_0\| + \|u_m - u_0\|,$$

так что при подходящем выборе m_1 и η неравенство (19.10) будет также выполнено. Пусть, далее, $p_1 < 1$. Тогда

$$\|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\|^{p_1} \leqslant \|\mathbf{h}u_m\|^{p_1} + \|\mathbf{h}u_0\|^{p_1}$$

и согласно (19.1) мы будем иметь

$$\|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\|^{p_1} \leqslant 2\,\|a(x)\|^{p_1} + b^{p_1}\|u_m\|^p + b^{p_1}\|u_0\|^p.$$

Отсюда, так как при подходящем выборе η $2\|a(x)\|_{E_m}^{p_1} < \varepsilon^p$, и из неравенств (19.10) и предыдущих мы находим, что

$$\|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\|_{E_m}^{p_1} < \varepsilon^p\left(1 + \frac{3}{2}b^{p_1}\right).$$

Из полученного неравенства и неравенства (19.9) имеем

$$\|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\|^{p_1} < \varepsilon^{p_1} \operatorname{mes} B + \varepsilon^p \left(1 + \frac{3}{2} b^{p_1}\right). \qquad (19.11)$$

Пусть, наконец, $p_1 \geqslant 1$, тогда $\|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\| \leqslant \|\mathbf{h}u_m\| + \|\mathbf{h}u_0\|$, и согласно условию (19.1) мы будем иметь

$$\|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\| \leqslant 2\|a(x)\| + b\|u_m\|^r + b\|u_0\|^r.$$

Так как, при подходящем выборе η, $2\|a(x)\|_{E_m} < \varepsilon$ и $\|u_0\|^r_{E_m} < \varepsilon^r$, то отсюда и из неравенства (19.10) имеем

$$\|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\|_{E_m} < \varepsilon + 2b\varepsilon^r.$$

Из этого неравенства и неравенства (19.9) следует

$$\|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\|^{p_1} < \varepsilon^{p_1} \operatorname{mes} B + (\varepsilon + 2b\varepsilon^r)^{p_1}. \qquad (19.12)$$

Из неравенств (19.11) и (19.12) в силу произвольности положительного ε мы находим, что для любых положительных чисел p и p_1

$$\lim_{m \to \infty} \|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\| = 0,$$

т. е. $\mathbf{h}$ — непрерывный оператор из L^p в L^{p_1}.

Пусть теперь $\operatorname{mes} B = \infty$. Так как $u_0 \in L^p$, то, каково бы ни было положительное μ, найдется такой шар $D(\|x\| \leqslant R)$, что на множестве $G = B \setminus (B \cap D)$ будет $\|u_0\|_G < \mu$. Отсюда, так как $\{u_m\}$ сходится к u_0, согласно неравенству (19.1) имеем, что для $m \geqslant m_2$ и $p_1 \geqslant 1$, как раньше для ε, будет

$$\|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\|^{p_1}_G < (\mu + 2b\mu^r)^{p_1} = \gamma.$$

Из данного неравенства и неравенства (19.12) следует, что если $m \geqslant \max\{m_1, m_2\}$, то

$$\|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\|^{p_1} < \gamma + \varepsilon^{p_1} \operatorname{mes}(D \cap B) + (\varepsilon + 2b\varepsilon^r)^{p_1},$$

где ε — произвольное положительное число, не зависящее от радиуса R шара D. Из последнего неравенства мы вновь получаем, что при $p_1 \geqslant 1$ (и аналогично при $p_1 < 1$)

$$\lim_{m \to \infty} \|\mathbf{h}u_m - \mathbf{h}u_0\| = 0.$$

Этим доказано, что из условия (19.1) следует непрерывность отератора $\mathbf{h}$ из L^p в L^{p_1}. Теорема доказана.

Следствие 19.1. Из доказанной теоремы следует, что если оператор $\mathbf{h}$ действует из класса L^p в класс L^{p_1}, то

$$\int_B |g(u(x), x)|^{p_1} dx \leqslant c_1 + b_1 \int_B |u(x)|^p dx,$$

а если он действует из класса L^p в пространство L^{p_1} ($p > 0$, $p_1 \geqslant 1$), то

$$\left(\int_B |g(u(x), x)|^{p_1} dx\right)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant c_2 + b_2 \left(\int_B |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p_1}},$$

где c_1, c_2, b_1, b_2 — постоянные.

19.2. Оператор Немыцкого в пространстве вектор-функций. Рассмотрим оператор Немыцкого в пространстве вектор-функций $L_{p,n}$. Пусть для $i = 1, 2, \ldots n$ $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$, где по-прежнему $x \in B$, суть (H)-функции. Каждая функция $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ порождает оператор $\mathbf{h}_i$, заданный на некоторой совокупности вещественных вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ равенством

$$\mathbf{h}_i u = g_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x).$$

Согласно теореме 18.3 этот оператор преобразует каждую измеримую вектор-функцию в измеримую скалярную функцию. Теорема 19.1 сохраняется для оператора $\mathbf{h}_i$, который будет действовать из $L_{p,n}$ в L^{p_1}. При этом неравенство (19.1) примет вид

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) + b \sum_{k=1}^{n} |u_k|^r, \tag{19.1'}$$

где

$$a_i(x) \in L^{p_1}, \quad b > 0, \quad r = p/p_1.$$

Совокупность операторов $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n$ образует *оператор Немыцкого* $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots \mathbf{h}_n)$, для которого справедлива

Теорема 19.2. *Для того чтобы* $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$, *где*

$$\mathbf{h}_i u = g_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x),$$

был непрерывным оператором с областью определения $L_{p,n}$ *и областью значений в* $L_{p_1,n}$ ($p > 0$, $p_1 > 0$), *необхо-*

димо и достаточно, чтобы (H)-функции $g_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяли следующим неравенствам:

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) + b \sum_{k=1}^{n} |u_k|^r, \qquad (19.1')$$

где

$$a_i(x) \in L^{p_1}, \ b > 0, \ r = p/p_1.$$

Оператор Немыцкого можно рассматривать в пространстве вектор-функций $L_{[p, n]}$, которое представляет собой прямую сумму пространств $L^{p_1}, L^{p_2}, \ldots, L^{p_n}$ $(p_k \geqslant 1)$. Теорема 19.1 непосредственно переносится на оператор Немыцкого, действующий из $L_{[p, n]}$ в $L_{[p', n]}$. Утверждение теоремы 19.1 сохраняется при замене неравенства (19.1) следующими неравенствами [1]):

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) + b \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{r_{ki}}, \qquad (19.1'')$$

где

$$a_i(x) \in L^{p_i}, \quad b > 0, \quad r_{ki} = p_k/p_i'.$$

Отметим еще, что оператор Немыцкого был рассмотрен Я. Б. Рутицким [64] в пространствах Орлича.

19.3. О равномерной непрерывности. Если (H)-функция $g(u, x)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|g(u_2, x) - g(u_1, x)| \leqslant M |u_2 - u_1|^r,$$

где

$$u_1, u_2 \in (-\infty, +\infty), \ r = p/p_1, \ p_1 \geqslant p \geqslant 1, \ M = \text{const},$$

то оператор Немыцкого действует из пространства L^p в пространство L^{p_1} и является равномерно непрерывным, ибо он удовлетворяет в этом случае условию Липшица

$$\|\mathbf{h}u - \mathbf{h}v\| \leqslant M \|u - v\|^r.$$

Таким образом, в некоторых случаях оператор $\mathbf{h}$ является равномерно непрерывным [2]).

---

[1]) Ср. [59].

[2]) Было бы интересно выяснить структуру (H)-функции $g(u, x)$, порождающей равномерно непрерывный оператор Немыцкого.

Оказывается [9, п], что из равномерной непрерывности оператора $\mathbf{h}$ в каком-нибудь шаре рассматриваемого пространства следует его равномерная непрерывность в любом другом шаре этого пространства. Отметим еще, что из непрерывности оператора Немыцкого на ограниченном замкнутом множестве еще не следует его равномерная непрерывность [9, п].

§ 20. О дифференцируемости операторов Немыцкого и Гаммерштейна[1])

В настоящем параграфе мы сначала дадим достаточные условия слабой дифференцируемости, т. е. существования линейного дифференциала Гато, оператора Немыцкого, а затем покажем, что эти условия приводят к достаточным условиям сильной дифференцируемости оператора Гаммерштейна.

20.1. Вспомогательные предложения о непрерывности некоторых операторов. Пусть функция $g(u, x)$, измеримая на множестве B по x, имеет частную производную $g'_u(u, x)$, которая непрерывна по $u \in (-\infty, +\infty)$. В этом случае согласно теореме 18.3 оператор

$$\mathbf{H}(u, v) = g'_u(u(x), x)\, v(x) \tag{20.1}$$

преобразует каждую пару измеримых функций $u(x)$ и $v(x)$ в измеримую функцию. Для решения вопроса о дифференцируемости оператора Немыцкого $\mathbf{h}u = g(u(x), x)$ нужно предварительно исследовать оператор $\mathbf{H}(u, v)$. Докажем следующее предложение.

Лемма 20.1. *Пусть*

$$\mathbf{h}'u = g'_u(u(x), x)$$

— непрерывный оператор из пространства L^p в $L^{p/p-2}$, где $p > 2$. Тогда имеют место следующие утверждения:

1°. *При каждом фиксированном $v \in L^p$*

$$\mathbf{H}(u, v) = g'_u(u(x), x)\, v(x) \tag{20.1}$$

есть непрерывный относительно u оператор с областью

1) См. [9, о, п].

определения L^p и областью значений в $L^q (p^{-1}+q^{-1}=1)$.

2°.

$$\mathrm{h}u = g(u(x),\ x)$$

есть оператор, который действует из пространства L^p в пространство L^q и удовлетворяет условию Липшица в любом шаре пространства L^p.

Доказательство. Применяя элементарное неравенство Гельдера

$$|ab| \leqslant s^{-1}|a|^s + t^{-1}|b|^t, \quad s^{-1}+t^{-1}=1,$$

напишем

$$|\mathrm{H}(u,\ v)|^q = |g'_u(u(x),\ x)|^q\,|v(x)|^q \leqslant$$
$$\leqslant \frac{q}{p}|v(x)|^p + \frac{p-2}{p-1}|g'_u(u(x),\ x)|^{q\frac{p-1}{p-2}}$$

или

$$|\mathrm{H}(u,\ v)|^q \leqslant \frac{q}{p}|v(x)|^p + \frac{p-2}{p-1}|g'_u(u(x),\ x)|^{\frac{p}{p-2}}. \tag{20.2}$$

Так как по условию правая часть неравенства (20.2) есть непрерывный оператор с областью определения L^p и областью значений в L^1, то согласно теореме 19.1 $\mathrm{H}(u,\ v)$ есть непрерывный оператор относительно u с областью определения L^p и областью значений в L^q. Первая часть леммы доказана. Для доказательства второй части леммы возьмем две произвольные функции $u(x)$ и $v(x)$, принадлежащие шару $\|u\| \leqslant r$ пространства L^p, и составим разность

$$\mathrm{h}u - \mathrm{h}v = \int_{v(x)}^{u(x)} g'_u(z,\ x)\,dz.$$

Полагая $z = tu(x) + (1-t)v(x)$, получим

$$\mathrm{h}u - \mathrm{h}v = (u(x) - v(x)) \int_0^1 g'_u[v(x) + t(u(x) - v(x)),\ x]\,dt,$$

где

$$\int_0^1 g'_u[v(x)+t(u(x)-v(x)),\ x]\,dt =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{m}g'_u\left[v(x)+\frac{i}{m}(u(x)-v(x)),\ x\right]$$

существует и представляет измеримую функцию от x как предел последовательности измеримых функций. Далее напишем, что

$$|\mathfrak{h}u-\mathfrak{h}v|^q = |u(x)-v(x)|^q\left|\int_0^1 g'_u[v(x)+t(u(x)-v(x)),\ x]\,dt\right|^q$$

или, после применения к интегралу неравенства Гельдера,

$$|\mathfrak{h}u-\mathfrak{h}v|^q \leqslant |u(x)-v(x)|^q\int_0^1 |g'_u[v(x)+t(u(x)-v(x)),\ x]|^q dt.$$

Интегрируя и применяя неравенство Гельдера, получим

$$\int_B |\mathfrak{h}u-\mathfrak{h}v|^q dx \leqslant \left(\int_B |u(x)-v(x)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} \times$$

$$\times\left(\int_B\left[\int_0^1 |g'_u[v(x)+t(u(x)-v(x)),\ x]|^q dt\right]^{\frac{p-1}{p-2}}dx\right)^{\frac{p-2}{p-1}}.$$

Отсюда путем применения неравенства Гельдера к внутреннему интегралу $\left(s=\frac{p-1}{p-2},\ t=p-1,\ s^{-1}+t^{-1}=1\right)$ получим

$$\int_B |\mathfrak{h}u-\mathfrak{h}v|^q dx \leqslant \left(\int_B |u(x)-v(x)|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} \times$$

$$\times\left(\int_B dx\int_0^1 |g'_u[v(x)+t(u(x)-v(x)),\ x]|^{\frac{p}{p-2}} dt\right)^{\frac{p-2}{p-1}}.$$

Изменяя в последнем интеграле порядок интегрирования (что мы вправе здесь сделать — см., например [10, б], стр. 108), получим

$$\|\mathbf{h}u-\mathbf{h}v\|\leqslant\|u-v\|\times$$
$$\times\left(\int_0^1 dt\int_B |g'_u(v(x)+t(u(x)-v(x)),\ x)|^{\frac{p}{p-2}}dx\right)^{\frac{p-2}{p}},\quad(20.3)$$

где $\|\mathbf{h}u-\mathbf{h}v\|$ берется в пространстве L^q, а $\|u-v\|$ берется в пространстве L^p.

Так как по условию оператор $\mathbf{h}'u=g'_u(u(x),\ x)$ действует из пространства L^p в пространство $L^{p/p-2}$ и $\|u(x)\|\leqslant r$, $\|v(x)\|\leqslant r$, так что $\|v(x)+t(u(x)-v(x))\|=\|tu(x)+$ $+(1-t)v(x)\|\leqslant t\|u(x)\|+(1-t)\|v(x)\|\leqslant tr+(1-t)r=r$, то согласно следствию 19.1 имеем

$$\left(\int_B |g'_u(v(x)+t(u(x)-v(x)),\ x)|^{\frac{p}{p-2}}dx\right)^{\frac{p-2}{p}}\leqslant c+br^{p-2}.$$

Отсюда и из неравенства (20.3) следует, что

$$\|\mathbf{h}u-\mathbf{h}v\|\leqslant(c+br^{p-2})\|u-v\|.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда $p=2$. В этом случае имеет место предложение.

Лемма 20.2. *Если измеримая по x функция $g(u,\ x)$ имеет частную производную $g'_u(u,\ x)$, которая для всех u и почти для всех x ограничена и непрерывна по u ($u\in(-\infty,\ +\infty)$, $x\in B$), то оператор*

$$\mathbf{H}(u,\ v)=g'_u(u(x),\ x)\,v(x)\quad(v\in L^2)$$

непрерывен по u в L^2, а оператор $\mathbf{h}u=g(u(x),\ x)$ удовлетворяет в L^2 условию Липшица.

Доказательство. Непрерывность оператора $\mathbf{H}(u,\ v)$ непосредственно следует из теоремы 19.1. Для доказательства второй части леммы мы составим разность

$$\mathbf{h}u-\mathbf{h}v=\int_{v(x)}^{u(x)} g'_u(z,\ x)\,dz,$$

где $u(x)$ и $v(x)$ суть две произвольные функции пространства L^2. Полагая $z = tu(x) + (1-t)v(x)$, получим

$$\mathbf{h}u - \mathbf{h}v = (u(x) - v(x)) \int_0^1 g'_u [v(x) + t(u(x) - v(x)),\ x]\, dt.$$

Отсюда в силу ограниченности $g'_u(z, x)$ почти для всех x имеем

$$\|\mathbf{h}u - \mathbf{h}v\| \leqslant M \|u - v\|,$$

т. е. оператор $\mathbf{h}$ удовлетворяет условию Липшица в пространстве L^2. Лемма доказана.

Отметим, что условие ограниченности $g'_u(u, x)$ почти для всех x не только достаточно для непрерывности оператора $\mathbf{H}(u, v)$, но и необходимо. Действительно, из непрерывности $\mathbf{H}(u, v)$ при любом фиксированном $v \in L^2$, следует, что

$$\int_B (\mathbf{h}'u)^2 (v(x))^2\, dx < \infty.$$

Раз данный интеграл существует для произвольной функции $v(x) \in L^2$, то, как известно (см. [5], стр. 73), функция $\mathbf{h}'u = g'_u(u(x), x)$ ограничена почти всюду для всякой фиксированной функции $u(x) \in L^2$. Отсюда согласно доказанному на стр. 205 следует, что функция $g'_u(u, x)$ ограничена почти для всех x. Необходимость, следовательно, доказана.

20.2. Существование линейного дифференциала Гато. Доказанные в предыдущем пункте леммы приводят к предложениям о слабой дифференцируемости оператора Немыцкого.

Теорема 20.1. *Если* $\mathbf{h}'u = g'_u(u(x), x)$ *есть непрерывный оператор с областью определения* L^p *и областью значений в* $L^{p/p-2}$, *то оператор* $\mathbf{h}$ *имеет в каждом шаре* $\|u\| \leqslant r$ *пространства* L^p *линейный ограниченный дифференциал Гато*

$$\mathbf{Dh}(u, v) = g'_u(u(x), x)\, v(x) = \mathbf{H}(u, v),$$

который непрерывен по совокупности (u, v).

Доказательство. По формуле Лагранжа

$$\mathbf{h}(u + tv) - \mathbf{h}u = t g'_u(u(x) + t\theta(x)\, v(x),\ x)\, v(x).$$

Отсюда, так как при фиксированном $v \in L^p$

$$\lim_{t \to 0} \|t\theta(x) v(x)\| = 0,$$

согласно лемме 20.1 имеем

$$\mathbf{D}\mathbf{h}(u, v) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [\mathbf{h}(u + tv) - \mathbf{h}u] = \\ = g'_u(u(x), x) v(x) = \mathbf{H}(u, v),$$

т. е. оператор $\mathbf{h}$ имеет линейный дифференциал Гато. Далее, так как

$$\int_B |\mathbf{D}\mathbf{h}(u, v)|^q dx = \int_B |\mathbf{h}'u|^q |v(x)|^q dx,$$

то, применяя к правой части неравенство Гельдера, получим

$$\int_B |\mathbf{D}\mathbf{h}(u, v)|^q dx \leqslant \|v\|^q \|\mathbf{h}'u\|^q$$

или

$$\|\mathbf{D}\mathbf{h}(u, v)\| \leqslant \|\mathbf{h}'u\| \|v\|,$$

где норма левой части берется в пространстве L^q, норма $\mathbf{h}'u$ берется в пространстве $L^{p/p-2}$, а норма v берется в пространстве L^p. Так как оператор $\mathbf{h}'$ действует из пространства L^p в пространство $L^{p/p-2}$, то согласно следствию 19.1 $\|\mathbf{h}'u\| \leqslant M_r = \mathrm{const}$ в шаре $\|u\| \leqslant r$, а потому $\|\mathbf{D}\mathbf{h}(u, v)\| \leqslant \leqslant M_r \|v\|$, т. е. линейный дифференциал Гато ограничен. Первая часть теоремы доказана. Используя теперь неравенство (20.2), мы согласно теореме 19.1 приходим ко второй части теоремы.

В случае $p = 2$ приходим к предложению.

Теорема 20.2. *Если измеримая по x функция $g(u, x)$ имеет частную производную $g'_u(u, x)$, которая непрерывна по u и ограничена почти при всех x ($x \in B$, $u \in (-\infty, +\infty)$), то оператор Немыцкого $\mathbf{h}u = g(u(x), x)$ имеет в пространстве L^2 линейный дифференциал Гато*

$$\mathbf{D}\mathbf{h}(u, v) = g'_u(u(x), x) v(x) = \mathbf{H}(u, v), \qquad (20.4)$$

который ограничен и непрерывен по совокупности (u, v), Доказательство первой части использует лемму 20.2 и проводится так же, как доказательство первой части теоремы 20.1. Вторая часть теоремы следует из теоремы 19.1 и из неравенства

$$|\mathbf{Dh}(u, v)| \leqslant M|v(x)|, \tag{20.5}$$

которое получается прямо из условия теоремы.

Доказанные теоремы имеют непосредственное приложение к решению вопроса о дифференцируемости оператора типа Гаммерштейна. Именно, *если вполне непрерывный оператор*

$$\mathbf{A}u = \int_B K(x, y)\, u(y)\, dy \tag{20.6}$$

действует из пространства L^q *в пространство* L^p $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$, *то при выполнении условий теорем* 20.1 *и* 20.2 *оператор типа Гаммерштейна*

$$\mathbf{\Gamma} u = \mathbf{Ah}u \equiv \int_B K(x, y)\, g(u(y), y)\, dy,$$

который в данном случае действует из пространства L^p *в пространство* L^p *и является вполне непрерывным, имеет вполне непрерывный линейный дифференциал Гато*

$$\mathbf{D\Gamma}(u, v) = \int_B K(x, y)\, g'_u(u(y), y)\, v(y)\, dy. \tag{20.7}$$

20.3. Об одном специальном свойстве оператора Немыцкого в L^2. В работе [9.о] (стр. 91—92) было показано, что если нелинейная по u (H)-функция $g(u, x)$ порождает оператор Немыцкого, который действует в L^2, то этот оператор нигде не имеет дифференциала Фреше, но всюду имеет дифференциал Гато $\mathbf{Dh}(u, v) = g'_u(u(x), x)\, v(x)$, если $g'_u(u, x)$ ограничена и непрерывна по u. Подобные примеры, по-видимому, раньше не были известны. Были лишь известны примеры операторов, построенных Морисом Фреше [68, б), которые имеют дифференциалы Гато, но в отдельных точках не имеют дифференциалов Фреше. Позднее, Алексеевич и Орлич [2] опубликовали другой подобный пример, т. е. пример оператора, который, как и оператор Немыцкого, всюду имеет дифференциал Гато, но нигде не имеет дифференциала Фреше.

20.4. О сильной дифференцируемости операторов Гаммерштейна. В пункте 20.2 было обращено внимание на то, что предложения о дифференцируемости оператора Немыцкого имеют непосредственное приложение к решению вопроса о слабой дифференцируемости операторов Гаммерштейна. Здесь мы покажем, что теорема 20.1 приводит к достаточным условиям сильной дифференцируемости оператора Гаммерштейна[1])

$$\mathbf{\Gamma} u = \int_B K(x, y) g(u(y), y)\, dy = \mathbf{A}\mathbf{h} u. \tag{20.8}$$

Теорема 20.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. $K(x, y) \in L^p(B \times B)$, где $p > 2$ *и* B — *измеримое множество s-мерного евклидова пространства.*

2°. *Измеримая по* x *на множестве* B *функция* $g(u, x)$ *имеет частную производную* $g'_u(u, x)$, *которая непрерывна по* $u \in (-\infty, +\infty)$, *причем*

$$\mathbf{h}' u = g'_u(u(x), x) \tag{20.9}$$

есть непрерывный оператор из пространства L^p *в пространство* $L^{p/p-2}$.

Тогда в каждой точке $u \in L^p$ *оператор* (20.8) *имеет дифференциал Фреше*

$$\mathbf{\Gamma}'(u) v \equiv \mathbf{d\Gamma}(u, v) = \int_B K(x, y) g'_u(u(y), y) v(y)\, dy.$$

Доказательство. Из условия 2° согласно теореме 20.1 следует, что оператор Немыцкого $\mathbf{h} u = g(u(x), x)$ имеет непрерывную производную Гато (20.9). Отсюда сле-

---

[1]) Некоторые предложения относительно сильной дифференцируемости оператора $\mathbf{\Gamma}$ имеются в работе: Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б., Дифференцирование нелинейных интегральных операторов, действующих в пространствах Орлича. ДАН, 1952, т. 85, № 1.

дует, что

$$\|\mathbf{h}(u+v)-\mathbf{h}u-\mathbf{D}\mathbf{h}(u,\ v)\|_q=\|(g'_u(u(x)+\theta(x)v(x),\ x)-$$
$$-g'_u(u(x),\ x))\,v(x)\|_q\leqslant\|g'_u(u(x)+\theta(x)v(x),\ x)-$$
$$-g'_u(u(x),\ x)\|_w\cdot\|v\|_p,\quad w=\frac{p}{p-2}.$$

Так как $\mathbf{h}'$ — непрерывный оператор из L^p в L^w, то

$$\mathbf{D}\mathbf{h}(u,\ v)=\mathbf{d}\mathbf{h}(u,\ v),$$

ибо

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|\mathbf{h}(u+v)-\mathbf{h}u-\mathbf{D}\mathbf{h}(u,\ v)\|_q}{\|v\|_p}=0, \tag{20.10}$$

где значки внизу у норм означают, что нормы берутся соответственно в L^w, L^p и L^q $(p^{-1}+q^{-1}=1)$. Отметим, что согласно лемме 20.1 операторы $\mathbf{h}$ и $\mathbf{d}\mathbf{h}(u,\ v)=g'_u(u(x),x)\,v(x)$, действуют из L^p в L^q. Отсюда и из условия 1 теоремы вытекает, что операторы (20.8) и

$$\mathbf{T}v=\int_B K(x,\ y)\,g'_u(u(y),\ y)\,v(y)\,dy \tag{20.11}$$

действуют в пространстве L^p.

Напишем теперь

$$\mathbf{\Gamma}(u+v)-\mathbf{\Gamma}(u)-\mathbf{T}v=\int_B K(x,\ y)\,[\mathbf{h}(u+v)-\mathbf{h}u-\mathbf{h}'(u)v]\,dy;$$

применяя неравенство Гельдера, получим

$$|\mathbf{\Gamma}(u+v)-\mathbf{\Gamma}(u)-\mathbf{T}v|\leqslant\Big(\int_B|K(x,y)|^p\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}\times$$
$$\times\|\mathbf{h}(u+v)-\mathbf{h}u-\mathbf{h}'(u)\,v\|_q$$

или

$$\|\mathbf{\Gamma}(u+v)-\mathbf{\Gamma}(u)-\mathbf{T}v\|_p\leqslant\Big(\int_B\int_B|K(x,\ y)|^p\,dx\,dy\Big)^{\frac{1}{p}}\times$$
$$\times\|\mathbf{h}(u+v)-\mathbf{h}u-\mathbf{h}'(u)\,v\|_q.$$

Отсюда и из равенства (20.10) следует

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\|\mathbf{\Gamma}(u+v)-\mathbf{\Gamma}(u)-\mathbf{T}v\|_p}{\|v\|_p}=0,$$

т. е. $\mathbf{T}v=\mathbf{d\Gamma}(u, v)$) Теорема доказана.

Замечание 20.1. Отметим, что *если в некоторой точке* $u(x)$ *функционального пространства* L^p *выполняется неравенство для всякого значения* $v\in(-\infty, +\infty)$:

$$|g(u(x)+v, x)-g(u(x), x)-\\ -g'_u(u(x), x)v|\leqslant a(x)|v|^r+b|v|^{p-1},$$

где

$$a(x)\in L^{\frac{pq}{p-qr}},\quad 1<r<p-1,\quad p>2,\quad b\geqslant 0,\quad p^{-1}+q^{-1}=1,$$

$\mathbf{h}v=g(v(x), x)$ — *непрерывный оператор Немыцкого из* L^p в L^q, *то оператор Гаммерштейна* (20.8) *имеет в точке* $u\in L^p$ *дифференциал Фреше* $\mathbf{d\Gamma}(u, v)$, *представимый в виде* (20.11).

Действительно, поступая так же, как при доказательстве теоремы 20.3, мы при помощи данного неравенства найдем

$$|\mathbf{\Gamma}(u+v)-\mathbf{\Gamma}u-\mathbf{T}v|\leqslant\left(\int_B|K(x, y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\times\\ \times\|\mathbf{h}(u+v)-\mathbf{h}u-\mathbf{h}'(u)v\|_q\leqslant\left(\int_B|K(x, y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}}\times\\ \times(\|a(x)|v(x)|^r\|_q+b\|v\|_p^{p-1}).$$

Но

$$\|a(x)|v(x)|^r\|_q=\left(\int_B|a(x)|^q|v(x)|^{qr}dx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\\ \leqslant\|v\|_p^r\left(\int_B|a(x)|^{\frac{pq}{p-qr}}dx\right)^{\frac{p-qr}{pq}},$$

откуда

$$\frac{\|\mathbf{\Gamma}(u+v)-\mathbf{\Gamma}u-\mathbf{T}v\|_p}{\|v\|_p}\leqslant\left(\int_B\int_B|K(x, y)|^p dx\,dy\right)^{\frac{1}{p}}\times\\ \times\left[\left(\int_B|a(x)|^{\frac{pq}{p-qr}}dx\right)^{\frac{p-qr}{pq}}\|v\|_p^{r-1}+b\|v\|_p^{p-2}\right]$$

или

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{\|\mathbf{\Gamma}(u+v)-\mathbf{\Gamma}u-\mathbf{T}v\|_p}{\|v\|_p}=0,$$

т. е. $\mathbf{T}v=\mathbf{d\Gamma}(u, v)$. Утверждение доказано.

Отметим, что утверждение данной теоремы сохраняется, если условие 1° заменить следующим условием (см. доказательство теоремы 26.8): самосопряженный дефинитный или квазидефинитный оператор

$$\mathbf{A}u=\int\limits_B K(x, y)u(y)\,dy$$

действует вполне непрерывно из L^q в L^p $(p^{-1}+q^{-1}=1)$.

§ 21. Потенциалы операторов Немыцкого и Ляпунова—Лихтенштейна

21.1. Потенциал оператора Немыцкого. В п. 6.3 мы видели, что оператор Немыцкого $\mathbf{h}u=g(u(x), x)$, если он действует из L^p в L^q $(p\geqslant 2,\ p^{-1}+q^{-1}=1)$, является потенциальным и что его потенциал

$$f(u)=f_0+\int\limits_B dx\int\limits_0^{u(x)} g(v, x)\,dv. \tag{6.8}$$

Здесь мы выясним условия потенциальности оператора Немыцкого, действующего из пространства вектор-функций $L_{p,n}$ в пространство вектор-функций $L_{q,n}$ $(p\geqslant 2,\ p^{-1}+q^{-1}=1)$, и найдем его потенциал.

Пусть оператор Немыцкого $\mathbf{h}=(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$, где

$$\mathbf{h}_i u=g_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x),$$

есть непрерывный оператор с областью определения $L_{p,n}$ и областью значений в $L_{q,n}$ $(p\geqslant 2,\ p^{-1}+q^{-1}=1)$, и значит, согласно теореме 19.2 (H)-функции $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$

удовлетворяют неравенствам

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) + b\sum_{k=1}^{n} |u_k|^{p-1},$$

где $a_i(x) \in L^q$ и $b > 0$, ибо здесь $r = p/q = p - 1$. Для краткости мы будем пользоваться обычными обозначениями для вектор-функции: $(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u$.

Выясним условия потенциальности оператора $\mathbf{h}$. С этой целью мы сначала допустим, что $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ имеют непрерывные по $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ частные производные

$$g'_{ik}(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_k} g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

и что

$$\mathbf{H}(u, v) = (\mathbf{H}_1(u, v), \mathbf{H}_2(u, v), \ldots, \mathbf{H}_n(u, v)),$$

где

$$\mathbf{H}_i(u, v) = \sum_{k=1}^{n} g'_{ik}(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)\, v_k(x),$$

(при каждом фиксированном $v \in L_{p,n}$) есть непрерывный относительно u оператор с областью определения $L_{p,n}$ $(p \geqslant 2)$ и областью значений в $L_{q,n}$. В этом случае, используя формулу Лагранжа

$$g_i(u_1 + tv_1, u_2 + tv_2, \ldots, u_n + tv_n, x) - g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) =$$
$$= t\sum_{k=1}^{n} g'_{ik}(u_1 + t\theta(x)v_1, u_2 + t\theta(x)v_2, \ldots$$
$$\ldots, u_n + t\theta(x)v_n, x)\, v_k(x),$$

получим

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[\mathbf{h}_i(u + tv) - \mathbf{h}_i u] =$$
$$= \lim_{t \to 0} \sum_{k=1}^{n} g'_{ik}(u_1(x) + t\theta(x)v_1(x), \ldots$$
$$\ldots, u_n(x) + t\theta(x)v_n(x), x)\, v_k = \sum_{k=1}^{n} g'_{ik}(u_1(x), u_2(x), \ldots$$
$$\ldots, u_n(x), x)\, v_k(x) = \mathbf{H}_i(u, v),$$

ибо при фиксированном $v \in L_{p,\,n}$

$$\lim_{t\to 0} \|t\theta(x) v_k(x)\| = 0, \quad 0 < \theta(x) < 1.$$

Отсюда имеем, что

$$\mathbf{Dh}(u, v) = (\mathbf{H}_1(u, v), \mathbf{H}_2(u, v), \ldots, \mathbf{H}_n(u, v)) = \mathbf{H}(u, v).$$

Согласно теореме 5.1 для потенциальности оператора $\mathbf{h}$ необходимо и достаточно, чтобы для произвольных w, $v \in L_{p,\,n}$

$$(\mathbf{Dh}(u, v), w) = (\mathbf{Dh}(u, w), v).$$

На основании предыдущего данное условие принимает вид

$$\int\limits_B \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \big(g'_{ki}(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x) -$$

$$- g'_{ik}(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)\big) v_i(x) w_k(x)\, dx = 0,$$

откуда в силу произвольности $v_i(x)$ и $w_k(x)$ имеем

$$g'_{ki}(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = g'_{ik}(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Полученные равенства, как известно, необходимы и достаточны для того, чтобы вектор

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n)$$

был потенциальным, т. е. чтобы

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x). \quad (21.1)$$

Таким образом, для потенциальности оператора $\mathbf{h}$, удовлетворяющего ранее указанным условиям, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись[1]) равенства (21.1). Пусть выполнены равенства (21.1). Тогда, полагая в равенстве (5.6)

---

[1]) Условие (21.1) впервые встречается в работе М. Голомба [20, б], а затем в работах А. П. Гремячинского [21] и Э. Роте [63, в].

$x_0=\theta$, мы получим

$$f(u)=f_0+\int_0^1(\mathbf{h}\,tu,\ u)\,dt=$$

$$=f_0+\int_0^1 dt\sum_{i=1}^n\int_B g_i(tu_1(x),\dots,\ tu_n(x),\ \ x)\,u_i(x)\,dx=$$

$$=f_0+\int_B dx\sum_{i=1}^n\int_0^1 g_i(tu_1(x),\ tu_2(x),\dots,\ tu_n(x),\ x)\,u_i(x)\,dt=$$

$$=f_0+\int_B dx\int_0^1\frac{d}{dt}G(tu_1(x),\ tu_2(x),\dots,\ tu_n(x),\ x)\,dt=$$

$$=f_0+\int_B G(u_1(x),\ u_2(x),\dots,\ u_n(x),\ x)\,dx-$$

$$-\int_B G(0,\ 0,\dots,\ 0,\ x)\,dx.$$

Полагая

$$f_0=\int_B G(0,\ 0,\dots,\ 0,\ x)\,dx,$$

мы получим окончательно, что

$$f(u)=\int_B G(u_1(x),\ u_2(x),\dots,\ u_n(x),\ x)\,dx. \qquad (21.2)$$

Таким образом, $\mathbf{h}u=\operatorname{grad}f(u)$, где функционал $f(u)$ определяется равенством (21.2). Полученный результат, как мы сейчас покажем, оказывается верным при меньших ограничениях; нужно лишь требовать непрерывность оператора $\mathbf{h}$ и выполнения условия (21.1). Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 21.1 [1]). *Если* $\mathbf{h}=(\mathbf{h}_1,\ \mathbf{h}_2,\dots,\ \mathbf{h}_n)$, *где*

$$\mathbf{h}_i u=g_i(u_1(x),\ u_2(x),\dots,\ u_n(x),\ x)$$

---

[1]) Данная теорема была установлена автором и использована в ряде работ [9, г, к, л]. Для случая $n=1$ теорема 21.1 вошла в обзорную статью [9, о]. Для $n>1$ теорема 21.1 была опубликована позже ([9, у], теорема 2.1).

и (H)-функции

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x), \quad (21.1)$$

есть непрерывный оператор с областью определения $L_{p,n}$ *и областью значений в* $L_{q,n}$ $(p \geqslant 2,\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$, *т. е. согласно теореме* 19.2

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) + b \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{p-1}, \quad (21.3)$$

где $b > 0$, $a_i(x) \in L^q$, *то функционал*

$$f(u) = \int_B G(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)\, dx \quad (21.2)$$

удовлетворяет условию Липшица в любом шаре $\|u\| \leqslant r$ *пространства* $L_{p,n}$, *причем*

$$\mathfrak{h}u = \operatorname{grad} f(u) = \operatorname{grad} \int_B G(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)\, dx.$$

Доказательство. Возьмем два произвольных вектора $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ и $u(x) + v(x) = (u_1(x) + v_1(x), \ldots, u_n(x) + v_n(x))$ пространства $L_{p,n}$ и рассмотрим криволинейный интеграл вдоль отрезка $u(x) + tv(x)$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$:

$$I = \int_0^1 (\mathfrak{h}(u + tv),\ d(u + tv)) =$$

$$= \int_0^1 dt \sum_{i=1}^{n} \int_B g_i(u_1(x) + tv_1(x), \ldots, u_n(x) + tv_n(x), x) \times$$

$$\times v_i(x)\, dx = \int_0^1 dt \int_B \Big(\sum_{i=1}^{n} g_i(u_1(x) + tv_1(x), \ldots, u_n(x) +$$

$$+ tv_n(x), x)\, v_i(x)\Big)\, dx =$$

$$= \int_0^1 dt \int_B \frac{d}{dt} G(u_1(x) + tv_1(x), \ldots, u_n(x) + tv_n(x), x)\, dx.$$

Применяя теорему Фубини об изменении порядка интегрирования, получим

$$I = \int_B G(u_1(x)+v_1(x),\ldots, u_n(x)+v_n(x), x)\,dx - \\ - \int_B G(u_1(x),\ldots, u_n(x), x)\,dx = \Phi(u(x)+v(x)) - \Phi(u(x)).$$

Из этого равенства согласно следствию 2.1 вытекает, что рассматриваемый криволинейный интеграл не зависит от пути, так что по теореме 6.2 оператор $\mathbf{h}$ является потенциальным. Далее, по формуле (6.6) мы находим потенциал этого оператора

$$f(u) = f_0 + \int_0^1 (h(0+tu), u)\,dt = \\ = f_0 + \int_B G(u_1(x),\ldots, u_n(x), x)\,dx - \\ - \int_B G(0, 0,\ldots, 0, x)\,dx = \\ = \int_B G(u_1(x), u_2(x),\ldots, u_n(x), x)\,dx. \qquad (21.2)$$

Наконец, так как из неравенства (21.3) непосредственно следует, что оператор $\mathbf{h}$ ограничен в любом шаре пространства $L_{p,n}$, то при помощи леммы 5.1 мы приходим к выводу, что потенциал оператора $\mathbf{h}$, т. е. функционал $f(u)$, удовлетворяет условию Липшица в любом шаре пространства $L_{p,n}$. Теорема доказана.

Отметим еще, что данная теорема сохраняется и в пространстве вектор-функций $L_{[p,n]}$ (см. п. 19.2), если вместо неравенства (21.3) выполнено неравенство (19.1″).

21.2. Потенциал оператора Ляпунова—Лихтенштейна. Здесь мы рассмотрим оператор, который был изучен в работах Л. Лихтенштейна [44, б], В. И. Соболева [66, а, б], Э. С. Цитланадзе [72, д, к] и автора [9, н]. Так как этот оператор представляет частный случай оператора Ляпунова [49], изученного в работе Э. Шмидта [74], то мы будем его называть *оператором Ляпунова—Лихтенштейна.*

Пусть $\{K_{n-1}(t_1, t_2, \ldots, t_n)\}$ $(n=2, 3, \ldots)$ есть последовательность действительных симметричных функций, каждая из которых задана в единичном кубе $(0 \leqslant t_i \leqslant 1,\ i=1, 2, \ldots, n)$ евклидова пространства n измерений. Симметрия понимается в том смысле, что функция K_{n-1} не изменяется при любой перестановке ее аргументов.

Рассмотрим оператор Ляпунова—Лихтенштейна в единичном шаре $\|x\| \leqslant 1$ пространства L^2:

$$\mathbf{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_n(s, t_1, \ldots, t_n)\, x(t_1) \ldots \\ \ldots x(t_n)\, dt_1 \ldots dt_n. \quad (21.4)$$

Если мы допустим, что данный оператор имеет слабый дифференциал, то в силу симметрии ядер K_n будем иметь

$$\mathbf{DF}(x, h) = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_n(s, t_1, \ldots, t_n)\, h(t_1)\, x(t_2) \ldots \\ \ldots x(t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Умножая это равенство на $h_1(s)$, после почленного интегрирования получим

$$(\mathbf{DF}(x, h), h_1) = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_n(s, t_1, \ldots, t_n)\, h_1(s) \times \\ \times h(t_1)\, x(t_2) \ldots x(t_n)\, ds\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Отсюда в силу симметрии ядер K_n вытекает

$$(\mathbf{DF}(x, h), h_1) = (\mathbf{DF}(x, h_1), h),$$

т. е. оператор $\mathbf{F}(x)$ является потенциальным. Из (21.4) в силу потенциальности оператора $\mathbf{F}(x)$ мы согласно теореме 5.1 находим (если положить $f_0=0$), что

$$f(x)=\int_0^1 (\mathbf{F}(tx),\ x)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 t^n\,dt\int_0^1\ldots\int_0^1 K_n(s, t_1, \ldots, t_n)\times$$

$$\times\, x(s)\,x(t_1)\ldots x(t_n)\,ds\,dt_1\ldots dt_n=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\int_0^1\ldots\int_0^1 K_n(s,\ t_1,\ \ldots,\ t_n)\,x(s)\,x(t_1)\ldots$$

$$\ldots x(t_n)\,ds\,dt_1\ldots dt_n.$$

Результат, к которому мы пришли формально, оказывается верным при некоторых предположениях. Именно, имеет место следующая теорема (см. [9,о], теорема 5.3).

Теорема 21.2. *Пусть выполнены условия*:

1°. $\{K_{n-1}(t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n)\}$ *есть последовательность действительных симметричных и суммируемых с квадратом в единичном кубе* ($0\leqslant t_i\leqslant 1$) *евклидова пространства ядер.*

2°.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\ldots\int_0^1 [K_n(t_1,\ \ldots,\ t_{n+1})]^2\,dt_1\ldots dt_{n+1}\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty.$$

Тогда функционал[1])

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1\ldots\int_0^1 K_{n-1}(t_1,\ \ldots,\ t_n)\prod_{i=1}^{n}x(t_i)\,dt_i \qquad (21.5)$$

имеет в шаре $\|x\|\leqslant r<1$ *пространства* L^2 *усиленно не-*

---

[1]) Функционал (21.5) и оператор (21.4) были рассмотрены Лихтенштейном ([44, б], стр. 142). См. также [46, в], [66, а, б], [72, д, к,]. В этих работах при исследовании $f(x)$ и $\mathbf{F}(x)$ налагались более сильные ограничения, чем в теореме 21.2, которая была опубликована в работе [9, н].

прерывный градиент, представимый в виде

$$\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 K_n(s,\ t_1,\ \dots,\ t_n) \prod_{i=1}^{n} x(t_i)\, dt_i. \qquad (21.4)$$

Доказательство. Пусть D — открытый единичный шар $\|x\| < 1$ пространства $L^2(0,\ 1)$. Пусть, далее, $x(t_i)$ и $h(t_i)$ суть элементы шара D, для которых $x + th \in D$, если $t \in [0,\ 1]$. Рассмотрим при таких фиксированных x и h функцию

$$f(x+th) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \dots \int_0^1 K_{n-1}(t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_n) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} [(x(t_i) + th(t_i))\, dt_i],$$

заданную на отрезке $[0,\ 1]$. Из условия 2° теоремы и применения неравенств Минковского и Коши — Буняковского вытекает равномерная сходимость на $[0,\ 1]$ ряда для $f(x+th)$, возможность дифференцирования по t каждого слагаемого этого ряда под знаком интеграла и равномерная сходимость ряда, составленного из производных каждого слагаемого ряда для $f(x+th)$. Следовательно, согласно известной теореме о почленном дифференцировании ряда имеем

$$\frac{d}{dt} f(x+th) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K_{n-1}(t_1,\ \dots,\ t_n) \times$$
$$\times \left\{ \sum_{k=1}^{n} h(t_k) \prod_{i=1}^{k-1} [x(t_i) + th(t_i)] \times \right.$$
$$\left. \times \prod_{i=k+1}^{n} [x(t_i) + th(t_i)] \right\} dt_1\, dt_2 \dots dt_n$$

или в силу симметрии ядер K_{n-1}

$$\frac{d}{dt} f(x+th) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_n(s, t_1, \ldots, t_n) h(s)\, ds \times \\ \times \prod_{i=1}^{n} [x(t_i) + th(t_i)]\, dt_i.$$

Полагая $t=0$, мы получим дифференциал Гато функционала (21.5) в точке x:

$$Df(x, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_n(s, t_1, \ldots, t_n) h(s)\, ds \prod_{i=1}^{n} x(t_i)\, dt_i.$$

Этот дифференциал есть линейный функционал относительно h, так что

$$Df(x, h) = (\mathbf{F}(x), h),$$

где $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$ определяется формулой (21.4). Для доказательства компактности оператора $\mathbf{F}(x)$ мы сначала заметим, что из 2° путем применения неравенств Минковского и Коши — Буняковского следует ограниченность оператора в единичном шаре $\|x\| < 1$. Оценим теперь разность

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_n(s+\Delta s, t_1, \ldots, t_n) - \\ - K_n(s, t_1, \ldots, t_n)] \prod_{i=1}^{n} x(t_i)\, dt_i.$$

Применяя ранее упомянутые неравенства для оценки нормы этой разности, получим

$$\|I\| \leqslant \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_n(s+\Delta s, t_1, \ldots, t_n) - K_n(s, t_1, \ldots, t_n)]^2 \times \right. \\ \left. \times\, ds\, dt_1 \ldots dt_n \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_n(s+\Delta s, t_1, \ldots, t_n) - \right. \\ \left. - K_n(s, t_1, \ldots, t_n)]^2\, ds\, dt_1 \ldots dt_n \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Как обычно, $K_n(s+\Delta s, t_1, \ldots, t_n)$ считается нулем, когда $s+\Delta s \overline{\in} [0, 1]$, причем интегрирование по s и $s+\Delta s$ производится в промежутке $(0, 1)$. Пусть ε — произвольное положительное число. Согласно условию 2° теоремы натуральное число n_0 можно подобрать так, чтобы

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_n(s+\Delta s, t_1, \ldots, t_n) - \right.$$

$$\left. - K_n(s, t_1, \ldots, t_n)]^2\, ds\, dt_1 \ldots dt_n\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_n(s+\Delta s, t_1, \ldots, t_n)]^2\, ds\, dt_1 \ldots dt_n\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_n(s, t_1, \ldots, t_n)]^2\, ds\, dt_1 \ldots dt_n\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, в силу интегрируемости с квадратом ядер K_n можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, чтобы для всякого $|\Delta s| < \delta$ и любого $n = 1, 2, \ldots, n_0$ было

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_n(s+\Delta s, t_1, \ldots, t_n) -$$

$$- K_n(s, t_1, \ldots, t_n)]^2\, ds\, dt_1 \ldots dt_n < \left(\frac{\varepsilon}{2n_0}\right)^2.$$

Отсюда и из предыдущих неравенств мы находим, что если

$$|\Delta s| < \delta(\varepsilon), \text{ то } \|I\| < \varepsilon.$$

Из полученного неравенства согласно теореме М. Рисса (см. [57, в], стр. 160) следует компактность оператора $\mathbf{F}(x)$. Докажем, наконец, равномерную непрерывность градиента $\mathbf{F}(x)$. Пусть $x_1, x_2 \in D$. Исходя из формулы 21.4, напишем:

$$\|\mathbf{F}(x_2)-\mathbf{F}(x_1)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\left\{\int_0^1 \ldots \int_0^1 K_n(s,\ t_1,\ \ldots,\ t_n) \times \right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\prod_{i=1}^{n} x_2(t_i)-\prod_{i=1}^{n} x_1(t_i)\right] dt_1 \ldots dt_n\right\}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{n_0}\left(\int_0^1\left\{\int_0^1 \ldots \int_0^1 K_n(s,\ t_1,\ \ldots,\ t_n) \times \right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\prod_{i=1}^{n} x_2(t_i)-\prod_{i=1}^{n} x_1(t_i)\right] dt_1 \ldots dt_n\right\}^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+2 \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_n(s,\ t_1,\ \ldots,\ t_n)]^2 ds\, dt_1 \ldots dt_n\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Но согласно условию 2° теоремы заданному $\varepsilon > 0$ отвечает такое $n_0(\varepsilon)$, что

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_n(s,\ t_1,\ \ldots,\ t_n)]^2 ds\, dt_1 \ldots dt_n\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Далее, исходя из тождества

$$\prod_{i=1}^{n} x_2(t_i)-\prod_{i=1}^{n} x_1(t_i)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k-1} x_1(t_i) \prod_{j=k}^{n} x_2(t_j)-\prod_{i=1}^{k} x_1(t_i) \prod_{j=k+1}^{n} x_2(t_j)\right)$$

и применяя неравенства Минковского и Коши — Буняковского, найдем, учитывая, что $\|x_1\| < 1$, $\|x_2\| < 1$,

$$I_{n_0} = \sum_{n=1}^{n_0} \left(\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_n(s, t_1, \ldots, t_n) \left[\prod_{i=1}^{n} x_2(t_i) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \prod_{i=1}^{n} x_1(t_i) \right] dt_1 \ldots dt_n \right\}^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \|x_2 - x_1\| \sum_{n=1}^{n_0} n \left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_n(s, t_1, \ldots, t_n)]^2 \, ds \, dt_1 \ldots dt_n \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Подбирая теперь $\delta(\varepsilon, n_0) > 0$ так, чтобы

$$\delta \sum_{n=1}^{n_0} n \left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_n(s, t_1, \ldots, t_n)]^2 \, ds \, dt_1 \ldots dt_n \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

мы найдем, что при $\|x_2 - x_1\| < \delta(\varepsilon, n_0)$ будет $I_{n_0} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Отсюда и из предыдущего имеем, что $\|\mathbf{F}(x_2) - \mathbf{F}(x_1)\| < \varepsilon$, если $\|x_2 - x_1\| < \delta$, т. е. что оператор $\mathbf{F}(x)$ равномерно непрерывен в шаре D. Итак, градиент $\mathbf{F}(x)$ компактен и равномерно непрерывен в D, т. е. (см. определение 1.6′) $\mathbf{F}(x)$ является вполне компактным оператором в шаре D. Отсюда согласно теореме 7.4 и следует теорема.

§ 22. О некоторых свойствах интегральных квадратичных форм в пространствах L^q ($q \leqslant 2$)

22.1. Постановка вопроса. Рассмотрим линейный интегральный оператор

$$\mathbf{A}u = \int_B K(x, y)\, u(y)\, dy \tag{22.1}$$

с вещественным симметричным ядром $K(x, y)$, которое определено на топологическом произведении $B \times B$, где B — измеримое множество конечной меры s-мерного евклидова пространства.

Мы будем предполагать, что $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный самосопряженный оператор, действующий в пространстве $L^2(B)$, т. е. что область определения оператора $\mathbf{A}$

совпадает с $L^2(B)$, а область значений (изменения) $\mathbf{A}$ лежит в $L^2(B)=L^2$. Это условие, в частности, выполняется, если симметричное ядро $K(x, y)\in L^p$, где $p\geqslant 2$.

Наряду с оператором $\mathbf{A}$ мы будем рассматривать билинейную форму

$$(\mathbf{A}u, v)=\int_B\int_B K(x, y)u(y)v(x)\,dy\,dx \tag{22.2}$$

и квадратичную форму

$$J(u)=\int_B\int_B K(x, y)u(y)u(x)\,dy\,dx, \tag{22.3}$$

где $u(x)$ и $v(y)$ принадлежат L^2 или пространству L^q при $q<2$.

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(|\lambda_i|\leqslant|\lambda_{i+1}|)$ и $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x), \ldots$ $(\varphi_i(x)\in L^2)$ характеристические числа и соответствующие им собственные функции ядра $K(x, y)$.

Положим

$$\mathbf{A}_n u=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\int_B\varphi_k(y)u(y)\,dy=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\varphi_k, u)}{\lambda_k}\varphi_k(x) \tag{22.4}$$

и

$$J_n(u)=(\mathbf{A}_n u, u). \tag{22.5}$$

Хорошо известно, что если $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор в L^2, то квадратичная форма $J(u)$ обладает следующими свойствами.

1°. *Каков бы ни был шар $D(\|x\|\leqslant r)$ пространства L^2, квадратичная форма $J(u)$ слабо непрерывна в D, а значит, достигает своих граней в D. При этом если $J(u)$ принимает положительные значения, то она достигает своей верхней грани на сфере $S(\|u\|=r)$; если $J(u)$ принимает отрицательные значения, то она достигает своей нижней грани на S.*

2°. *Для всякого вектора $u\in L^2$*

$$\lim_{n\to\infty} J_n(u)=J(u).$$

3°. $\lim\mu_n=0$, *где* $\mu_n=\max\limits_D|J(u)-J_n(u)|$. Оказывается, что вопрос о применимости вариационных методов к решению задачи о собственных функциях нелинейного оператора $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{Ah}$ или о разрешимости уравнения $\mathbf{\Gamma} u = u$, где $\mathbf{h}$ — оператор Немыцкого, действующий из пространства L^p в пространство L^q $(p > 2,\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$, приводит к выяснению вопроса о том, сохраняются ли свойства 1°, 2° и 3° в пространствах L^q, где $q < 2$, когда оператор $\mathbf{A}$ действует вполне непрерывно из L^q в L^p, например, когда $K(x, y) \in \in L^p(B \times B)$.

Мы здесь докажем[1]), что свойства 1°, 2° и 3° сохраняются и в пространствах L^q, где $q < 2$.

Так как из сходимости квадратичных форм $J_n(u)$ к $J(u)$ следует сходимость билинейных форм $(\mathbf{A}_n u, v)$ к $(\mathbf{A}u, v)$, ибо $(\mathbf{A}_n u, v) = \frac{1}{4}[(\mathbf{A}_n(u+v), u+v) - (\mathbf{A}_n(u-v), u-v)]$, то из свойства 2° следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{A}u - \mathbf{A}_n u\|_p = 0,$$

а из свойства 3° следует, что последнее равенство выполняется равномерно относительно $u \in D_r$, где D_r — шар $\|u\| \leqslant r$ пространства L^q. Так как $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_n\| = \sup\limits_{D_1} \|\mathbf{A}u - \mathbf{A}_n u\|_p$, то из свойства 3° следует, что операторы $\mathbf{A}_n$, действующие из L^q в L^p, сходятся по норме к оператору $\mathbf{A}$.

22.2. О слабой непрерывности квадратичных форм. В настоящем пункте мы докажем, что при некоторых достаточных условиях квадратичная форма $J(u)$ слабо непрерывна в L^q.

Лемма 22.1. *Если самосопряженный в L^2 оператор* $\mathbf{A}$, *определенный равенством* (22.1), *есть ограниченный оператор из L^q в L^p, то для всяких $u, v \in L^q$ имеет место равенство*

$$(\mathbf{A}u, v) = (\mathbf{A}v, u). \tag{22.6}$$

Доказательство использует непрерывность оператора $\mathbf{A}$. Допустим, что для некоторых $u_0(x), v_0(x) \in L^q$

---

[1]) См. [9, ц].

имеет место неравенство

$$0 < \varepsilon = (\mathbf{A}u_0,\ v_0) - (\mathbf{A}v_0,\ u_0). \tag{22.7}$$

Рассмотрим тогда в пространстве L^q δ-окрестности $U(u_0)$ и $U(v_0)$ векторов u_0 и v_0, а также два единичных шара $D(u_0)$ и $D(v_0)$ с центрами соответственно в точках u_0 и v_0. Так как по условию $\mathbf{A}$ — ограниченный оператор из L^q в L^p, то для всяких $u \in D(u_0)$ и $v \in D(v_0)$ будет

$$\left.\begin{aligned} &\int_B \left| \int_B K(x,\ y)\, u(y)\, dy \right|^p dx < M^p, \\ &\int_B \left| \int_B K(x,\ y)\, v(y)\, dy \right|^p dx < M^p, \end{aligned}\right\} \tag{22.8}$$

где постоянная M зависит лишь от u_0 и v_0, причем заданному $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для всяких $u \in U(u_0)$ и $v \in U(v_0)$ будет

$$\left.\begin{aligned} &\|v - v_0\| = \left(\int_B |v(x) - v_0(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} < \frac{\varepsilon}{16M}, \\ &\|u - u_0\| < \frac{\varepsilon}{16M}, \\ &\left(\int_B \left| \int_B K(x,\ y)[u(y) - u_0(y)]\, dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{16\|v_0\|}, \\ &\int_B \left| \int_B K(x,\ y)[v(y) - v_0(y)]\, dy \right|^p dx \Bigg)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{16\|u_0\|}, \end{aligned}\right\} \tag{22.9}$$

где $\|u_0\|$ и $\|v_0\|$ берутся в пространстве L^q.

Ввиду того, что каждую функцию $z(x) \in L^q$ можно аппроксимировать в смысле метрики L^q с любой степенью точности функциями из пространства L^2, найдутся функции $u_1(x)$ и $v_1(x)$ из пространства L^2, которые соответственно принадлежат окрестностям $U(u_0)$ и $U(v_0)$. Для этих u_1 и v_1 будут выполнены неравенства (22.8) и (22.9), а потому, используя неравенства Гельдера, получим

$$|(\mathbf{A}u_1, v_1) - (\mathbf{A}u_0, v_0)| =$$

$$= \left| \int\limits_B \left(\int\limits_B K(x, y) u_1(y)\, dy \right) [v_1(x) - v_0(x)]\, dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_B \left(\int\limits_B K(x, y) [u_1(y) - u_0(y)]\, dy \right) v_0(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_B \left| \int\limits_B K(x, y) u_1(y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \|v_1 - v_0\| +$$

$$+ \left(\int\limits_B \left| \int\limits_B K(x, y) [u_1(y) - u_0(y)]\, dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \|v_0\| <$$

$$< \frac{M\varepsilon}{16M} + \frac{\|v_0\|\,\varepsilon}{16\|v_0\|} = \frac{1}{8}\varepsilon.$$

Исходя из условия, что $K(x, y) = K(y, x)$, и поступая так же, как раньше, мы из неравенств (22.8) и (22.9) найдем

$$|(\mathbf{A}v_1, u_1) - (\mathbf{A}v_0, u_0)| < \frac{1}{8}\varepsilon.$$

Из последних двух неравенств и равенства (22.7), если учесть, что по условию леммы оператор $\mathbf{A}$ является самосопряженным в L^2, т. е. $(\mathbf{A}u_1, v_1) = (\mathbf{A}v_1, u_1)$, следует

$$0 < \varepsilon = (\mathbf{A}u_0, v_0) - (\mathbf{A}v_0, u_0) =$$

$$= [(\mathbf{A}u_0, v_0) - (\mathbf{A}u_1, v_1)] + [(\mathbf{A}v_1, u_1) - (\mathbf{A}v_0, u_0)] \leqslant$$

$$\leqslant |(\mathbf{A}u_0, v_0) - (\mathbf{A}u_1, v_1)| + |(\mathbf{A}v_1, u_1) - (\mathbf{A}v_0, u_0)| < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 22.2. *Если самосопряженный в L^2 оператор $\mathbf{A}$, определенный равенством (22.1), есть ограниченный оператор из L^q в L^p, то для всякого $u \in L^q$* $\operatorname{grad} J(u) = 2\mathbf{A}u$.

Доказательство. Пусть $u(x)$—фиксированный, а $h(x)$ ($\|h\|=1$)—произвольный элементы пространства L^q. Напишем:

$$J(u+th)-J(u)=\int_B\Big(\int_B K(x,\ y)[u(y)+th(y)]\,dy\Big)\times$$

$$\times[u(x)+th(x)]\,dx-\int_B\Big(\int_B K(x,\ y)\,u(y)\,dy\Big)u(x)\,dx=$$

$$=t\Big\{\int_B\Big(\int_B K(x,\ y)\,u(y)\,dy\Big)h(x)\,dx+$$

$$+\int_B\Big(\int_B K(x,\ y)\,h(y)\,dy\Big)u(x)\,dx\Big\}+$$

$$+t^2\int_B\Big(\int_B K(x,\ y)\,h(y)\,dy\Big)h(x)\,dx,$$

откуда

$$DJ(u,\ h)=\lim_{t\to 0}\frac{J(u+th)-J(u)}{t}=J(u,\ h)+J(h,\ u)$$

или согласно лемме 22.1

$$DJ(u,\ h)=2J(u,\ h)=2\int_B\Big(\int_B K(x,\ y)\,u(y)\,dy\Big)h(x)\,dx,$$

а значит,

$$\operatorname{grad}J(u)=2\int_B K(x,\ y)\,u(y)\,dy=2\mathbf{A}u.$$

Лемма доказана.

При помощи последних двух лемм мы докажем следующее предложение.

Теорема 22.1. *Если самосопряженный в* L^2 *оператор* $\mathbf{A}$, *определенный равенством* (22.1), *действует вполне непрерывно из* L^q *в* L^p ($p\geqslant 2,\ p^{-1}+q^{-1}=1$), *то квадратичная форма* $J(u)=(\mathbf{A}u,\ u)$ *слабо непрерывна в* L^q, *а значит, она достигает своих граней в любом шаре* $D(\|u\|\leqslant r)$ *пространства* L^q ($q>1$). *При этом если* $J(u)$ *принимает в* D *положительные и отрицательные значения, то она достигает своих граней на сфере* $\|u\|=r$.

Доказательство. Согласно лемме 22.2 $\operatorname{grad} J(u)=2\mathbf{A}u$, а так как по условию оператор $\mathbf{A}$ действует вполне непрерывно из L^q в L^p, то по теореме 8.2 функционал $J(u)$ слабо непрерывен в L^q. Из слабой непрерывности $J(u)$ в D согласно теореме 13.2 следует, что квадратичная форма $J(u)$ достигает своих граней в шаре D. Наконец, так как при $\mu=\mathrm{const}$ $J(\mu u)=\mu^2 J(u)$, то квадратичная форма $J(u)$ достигает своей верхней грани на сфере $\|u\|=r$, если она принимает в шаре D положительные значения. То же самое можно сказать и о нижней грани, если $J(u)$ принимает в D отрицательные значения. Теорема доказана.

22.3. О сходимости последовательности квадратичных форм $J_n(\mathbf{u})$.

Лемма 22.3. *Если вполне непрерывный в L^2 квазиположительный оператор $\mathbf{A}$, определенный равенством* (22.1) *и имеющий счетное число характеристических чисел, есть ограниченный оператор из L^q в L^p ($p\geqslant 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$), то найдется такое натуральное n_0, что для всякого $n\geqslant n_0$ и любого фиксированного $u\in L^q$ будет*

$$J_n(u)\leqslant J_{n+1}(u)\leqslant J(u), \tag{22.10}$$

где $\mathbf{J}_n(u)$ определяется равенством (22.5).

Доказательство. По условию среди характеристических чисел $\{\lambda_k\}$ оператора $\mathbf{A}$ имеется лишь конечное число отрицательных, а потому найдется такое n_0, что для всякого $n\geqslant n_0$ будет $\lambda_n>0$. Отсюда и из равенств (22.4) и (22.5) следует

$$J_{n+1}(u)-J_n(u)=\frac{1}{\lambda_{n+1}}(\varphi_{n+1},\ u)^2\geqslant 0,$$

где

$$(\varphi_{n+1},\ u)=\int\limits_B \varphi_{n+1}(x)\,u(x)\,dx$$

существует для всякой функции $u(x)\in L^q$, ибо по условию оператор $\mathbf{A}$ действует из L^q в L^p, а поэтому все собственные функции $\varphi_n(x)\in L^p$. Последнее неравенство показывает, что $J_n(u)\leqslant J_{n+1}(u)$.

Остается показать, что для всякого $n \geqslant n_0$ и произвольного $u \in L^q$ имеет место неравенство $J_n(u) \leqslant J(u)$, которое согласно равенствам (22.3), (22.4) и (22.5) принимает вид $((\mathbf{A} - \mathbf{A}_n) u, u) \geqslant 0$, или в развернутом виде

$$\int\limits_B \int\limits_B N_n(x, y) u(y) u(x) \, dy \, dx \geqslant 0, \qquad (22.11)$$

где

$$N_n(x, y) = K(x, y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(y)}{\lambda_k}.$$

Неравенство (22.11) справедливо для всякой функции $u(x) \in L^2$, ибо по условию при $n \geqslant n_0$ оператор $\mathbf{A} - \mathbf{A}_n$ является положительным в пространстве L^2. Для $u \in L^q$ неравенство (22.11) мы будем доказывать от противного. Допустим, что для некоторой функции $u_0(x) \in L^q$ имеет место неравенство

$$\int\limits_B \int\limits_B N_n(x, y) u_0(y) u_0(x) \, dy \, dx = -\varepsilon < 0. \qquad (22.12)$$

Так же, как и при доказательстве леммы 22.1, рассмотрим единичный шар $D(u_0)$ и δ-окрестность ($\delta < 1$) $U(u_0)$ такую, чтобы для $u(x) \in U(u_0)$ выполнялось неравенство $\|u - u_0\| < \frac{\varepsilon}{4M}$, в котором постоянная M удовлетворяет неравенствам (22.8) при замене $K(x, y)$ на $N_n(x, y)$ для всякой функции $u(x) \in D(u_0)$. Рассуждая так, как при доказательстве леммы 22.1, мы можем утверждать, что найдется функция $u_1(x)$ из пространства L^2, принадлежащая $U(u_0)$, для которой будут выполнены неравенства

$$\int\limits_B \left| \int\limits_B N_n(x, y) u_1(y) \, dy \right|^p dx < M^p, \quad \|u_0 - u_1\| < \frac{\varepsilon}{4M}. \qquad (22.13)$$

Из неравенства (22.12), если учесть, что неравенство (22.11) справедливо для всякой функции $u(x) \in L^2$, имеем

$$-\varepsilon = \int_B \int_B N_n(x, y) u_1(y) u_1(x) \, dy \, dx + \int_B \int_B N_n(x, y) u_0(y) [u_0(x) - u_1(x)] \, dy \, dx + \int_B \int_B N_n(x, y) [u_0(y) - u_1(y)] u_1(x) \, dy \, dx \geqslant 0 - \left| \int_B \left(\int_B N_n(x, y) u_0(y) \, dy \right) [u_0(x) - u_1(x)] \, dx + \int_B \left(\int_B N_n(x, y) [u_0(y) - u_1(y)] \, dy \right) u_1(x) \, dx \right|.$$

Используя теперь лемму 22.1 и неравенство (22.13), мы из полученного неравенства находим

$$\varepsilon \leqslant \| u_0 - u_1 \| \left[\left(\int_B \left| \int_B N_n(x, y) u_0(y) \, dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_B \left| \int_B N_n(x, y) u_1(y) \, dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] < \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как данное неравенство невозможно для $\varepsilon > 0$, то и неравенство (22.12) невозможно. Лемма доказана.

Лемма 22.4. *Если вполне непрерывный в L^2 квазиположительный оператор* $\mathbf{A}$, *определенный равенством* (22.1), *есть ограниченный оператор из L^q в L^p* ($p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$), *то в каждом шаре $D(\|u\| \leqslant r)$ пространства L^q функционал $J_n(u)$, определенный равенством* (22.5), *удовлетворяет условию Липшица*

$$|J_n(u_2) - J_n(u_1)| \leqslant C \| u_2 - u_1 \|, \tag{22.14}$$

где постоянная C зависит от r, но не зависит от n.

В доказательстве нуждается лишь тот случай, когда число характеристических чисел оператора $\mathbf{A}$ счетно, что мы и будем предполагать. Сначала покажем, что нормы значений в L^q операторов

$$\mathbf{A}_n u = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\varphi_k, u)}{\lambda_k} \varphi_k(x) \tag{22.4}$$

ограничены равномерно относительно $u \in D$ и равностепенно относительно n. Так как по условию оператор $\mathbf{A}$ является квазиположительным, то натуральное n_0 мы выберем так, чтобы при $n \geqslant n_0$ было $\lambda_n > 0$. Подберем теперь единичный вектор $v(x) \in L^q$ так (см. [47], стр. 162, следствие 1), чтобы при фиксированных $n \geqslant n_0$ и $u(x) \in D$ выполнялось равенство

$$(\mathbf{A}_n u, v) = \| \mathbf{A}_n u \| = \left(\int\limits_B | \mathbf{A}_n u |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда и из равенства (22.4) следует

$$\| \mathbf{A}_n u \| = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\varphi_k, u)(\varphi_k, v)}{\lambda_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|(\varphi_k, u)|}{\sqrt{|\lambda_k|}} \cdot \frac{|(\varphi_k, v)|}{\sqrt{|\lambda_k|}}.$$

Применяя неравенство Коши, получим

$$\| \mathbf{A}_n u \| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(\varphi_k, u)^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(\varphi_k, v)^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}}$$

или согласно лемме 22.3 и равенству (22.4)

$$\| \mathbf{A}_n u \| \leqslant \left(J_n(u) + 2 \sum_k{}' \frac{(\varphi_k, u)^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}} \left(J_n(v) + 2 \sum_k{}' \frac{(\varphi_k, v)^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(J(u) + 2 \sum_k{}' \frac{(\varphi_k, u)^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}} \left(J(v) + 2 \sum_k{}' \frac{(\varphi_k, v)^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{22.15}$$

где $\sum\limits_k{}'$ распространяется на те k, для которых $\lambda_k < 0$. Далее, так как по условию $\mathbf{A}$ — ограниченный оператор из L^q в L^p, то из равенства (22.3) следует, что для всякого v из единичного шара пространства L^q и для всякого $u \in D$

будут выполнены неравенства

$$|J(u)| \leqslant a_1, \quad |J(v)| \leqslant a_2 = \text{const},$$

где постоянная a_1 зависит лишь от радиуса r шара D Наконец,

$$2 \sum_k{}' \frac{(\varphi_k, u)^2}{|\lambda_k|} \leqslant 2r^2 \sum_k{}' \frac{\|\varphi_k\|^2}{|\lambda_k|} = b_1,$$

$$2 \sum_k{}' \frac{(\varphi_k, v)^2}{|\lambda_k|} \leqslant 2 \sum_k{}' \frac{\|\varphi_k\|^2}{|\lambda_k|} = r^{-2} b_1 = b_2,$$

где $\|\varphi_k\|$ — норма в пространстве L^p собственной функции φ_k. Из последних неравенств и неравенства (22.15) следует, что для $n \geqslant n_0$

$$\|\mathbf{A}_n u\| \leqslant (a_1 + b_1)^{\frac{1}{2}} (a_2 + b_2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} C, \tag{22.16}$$

причем при подходящем выборе b_1 данное неравенство будет справедливо и для $n < n_0$.

Так как согласно лемме 22.2 $\operatorname{grad} J_n(u) = 2\mathbf{A}_n u$, то отсюда и из неравенства (22.16) согласно лемме 5.1 следует неравенство (22.14). Лемма доказана.

Теорема 22.2. *Если вполне непрерывный в L^2 квазиположительный оператор* $\mathbf{A}$, *определенный равенством* (22.1), *есть ограниченный оператор из L^q в L^p* ($p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$), *то для всякого вектора $u(x) \in L^q$ имеет место равенство*

$$\lim_{n \to \infty} J_n(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \left(\int_B \varphi_k(y) u(y)\, dy \right)^2 = J(u).$$

Доказательство. Рассмотрим при фиксированном $u \in L^q$ последовательность $\{J_n(u)\}$. По лемме 22.3 эта последовательность, если исключить из нее конечное число членов, является монотонной и ограниченной, а потому она сходится к некоторому числу $l(u)$. Покажем, что функционал $l(u)$ непрерывен в каждой точке $u_0 \in L^q$. Для этого мы каждому $\varepsilon > 0$ поставим в соответствие $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3C}, r\right)$, где C — постоянная Липшица, входящая в неравенство (22.14) при $r = 2\|u_0\|$, и рассмотрим δ-окрестность $U(u_0)$ точки u_0. Для произвольной точки $u \in U(u_0)$ напишем:

$$(u) - l(u_0) = l(u) - J_n(u) + J_n(u) - J_n(u_0) + J_n(u_0) - l(u_0),$$

откуда согласно лемме 22.4 будет

$$|l(u) - l(u_0)| \leqslant |l(u) - J_n(u)| + \\ + C\|u - u_0\| + |J_n(u_0) - l(u_0)|.$$

Так как при $n \to +\infty$ $J_n(u) \to l(u)$, то для фиксированных u и u_0 можно подобрать натуральное n такое, чтобы

$$|l(u) - J_n(u)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |l(u_0) - J_n(u_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства мы находим

$$|l(u) - l(u_0)| < \varepsilon,$$

т. е. функционал $l(u)$ непрерывен в точке u_0. Так как в пространстве L^2 последовательность $J_n(u)$ сходится к $J(u)$, то функционалы $l(u)$ и $J(u)$ совпадают на всюду плотном множестве пространства L^q. Но функционал $l(u)$ непрерывен по доказанному, а функционал $J(u)$ непрерывен по лемме 5.1, так как согласно лемме 22.2 он имеет градиент, который является ограниченным линейным оператором из L^q в L^p. Из непрерывности $l(u)$ и $J(u)$ следует, что во всех точках пространства L^q $l(u) = J(u)$, ибо $l(u)$ и $J(u)$ совпадают на всюду плотном множестве в L^q — в точках пространства L^2. Теорема доказана [1]).

22.4. Обобщенная теорема Дини. Для дальнейшего мы докажем следующее предложение, которое представляет собой обобщенную теорему Дини.

Лемма 22.5. *Пусть в слабо полном банаховом пространстве E, в котором всякое ограниченное множество слабо компактно, задана монотонная последовательность слабо непрерывных функционалов $\{f_n(x)\}$. Тогда если в некотором шаре $D(\|x\| \leqslant r)$ пространства E последовательность $\{f_n\}$ сходится к слабо непрерывному функционалу $f(x)$, то $\{f_n\}$ сходится в D равномерно к $f(x)$.*

---

[1]) Данная теорема и леммы 22.3, 22.4 сохраняются, если **A** — положительный оператор.

Доказательство мы проведем для монотонно возрастающей последовательности. Допустим, что в шаре D последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится равномерно к $f(x)$; это означает существование такого $\varepsilon > 0$, что, каково бы ни было n, найдется элемент $x_n \in D$, такой, что $f(x_n) - f_n(x_n) \geqslant \varepsilon$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ таких элементов. Так как по условию пространство E обладает слабой полнотой, то в силу слабой компактности и слабой замкнутости шара D найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая сходится слабо к элементу $x_0 \in D$. Так как по условию $f_n(x)$ возрастает, то из неравенства $f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon$ следует, что и подавно для всякого $n \leqslant n_k$

$$f(x_{n_k}) - f_n(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что для всякого $k \geqslant k_0$

$$f(x_{n_k}) - f_{n_{k_0}}(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon.$$

Так как разность $f(x) - f_{n_k}(x)$ слабо непрерывна и последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится слабо к x_0, то из последнего неравенства, путем перехода к пределу, находим

$$f(x_0) - f_{n_{k_0}}(x_0) \geqslant \varepsilon \tag{22.17}$$

для всякого k_0. Но по условию

$$\lim_{k_0 \to \infty} f_{n_{k_0}}(x_0) = f(x_0),$$

что противоречит неравенствам (22.17). Полученное противоречие доказывает лемму.

22.5. О равномерной сходимости квадратичных форм. Из лемм 22.3, 22.5 и теорем 22.1, 22.2 непосредственно вытекает следующее основное предложение.

Теорема 22.3. *Если оператор* $\mathbf{A}$, *определенный равенством* (22.1), *является квазиположительным* [1]) (*или квазиотрицательным*) *в* L^2 *и действует вполне непрерывно из* L^q *в* L^p $(p^{-1} + q^{-1} = 1,\ 1 < q \leqslant 2)$, *то для всякого элемента* $u \in D$, *где* D *есть произвольно заданный шар*

[1]) Теорема сохраняется и для положительных операторов.

$\|u\| \leqslant r$ *пространства* L^q, *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \max_D |J(u) - J_n(u)| = 0,$$

из которого, в частности, следует, что каждому $\varepsilon > 0$ *отвечает такое* n_0, *что для всякого* $n \geqslant n_0$ *и произвольного* $u \in D$ *имеет место неравенство*

$$J_{n+m}(u) - J_n(u) < \varepsilon, \tag{22.18}$$

где m — *любое натуральное число.*

Замечание 22.1. Отметим, что все теоремы, доказанные в этом параграфе, сохраняются для линейных интегральных операторов, действующих из пространства $L_{q,n}$ в пространство вектор-функций $L_{p,n}$, т. е. для операторов $\mathbf{A}u = (\mathbf{A}_1 u_1, \mathbf{A}_2 u_2, \ldots, \mathbf{A}_n u_n)$, где

$$\mathbf{A}_i u_i = \int\limits_B K_i(x, y) u_i(y)\, dy, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)).$$

При этом квадратичная форма в пространстве $L_{p,n}$ принимает вид

$$J(u) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_B \Big(\int\limits_B K_i(x, y) u_i(y)\, dy \Big) u_i(x)\, dx.$$

Замечание 22.2. Если $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор как в L^2, так и из L^q в L^p $(p > 2,\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$, то предложения, доказанные в данном параграфе, сохраняются в случае $\operatorname{mes} B = \infty$.

§ 23. Функционал $f(\xi)$

23.1. Постановка вопроса. Рассмотрим n линейных самосопряженных в пространстве L^2 квазиположительных (или положительных) интегральных операторов

$$\mathbf{A}_i u = \int\limits_B K_i(x, y) u(y)\, dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{23.1}$$

каждый из которых действует вполне непрерывно из пространства L^q в пространство L^p $(p \geqslant 2,\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$, где B — измеримое множество конечной меры s-мерного евклидова пространства. Пусть $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{i3}, \ldots$ и $\varphi_{i1}(x)$, $\varphi_{i2}(x)$, $\varphi_{i3}(x)$, ... $(x \in B)$ суть характеристические числа и соответствующие им собственные функции вполне непрерывного и самосопряженного в L^2 оператора $\mathbf{A}_i$.

Обозначим через $l_{2,n}$ прямую сумму n вещественных пространств $l_2^{(1)}$, $l_2^{(2)}$, ..., $l_2^{(n)}$, где $l_2^{(i)}$ есть евклидово пространство, если для данного i совокупность $\{\lambda_{ik}\}$ конечна, и $l_2^{(i)}$ есть гильбертово пространство, если для данного i совокупность $\{\lambda_{ik}\}$ бесконечна. Точки (векторы) пространства $l_2^{(i)}$ мы обозначим через ξ_i:

$$\xi_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3}, \ldots),$$

а точки пространства $l_{2,n}$ — через ξ:

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Положим

$$\|\xi\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu} \xi_{i\nu}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее рассмотрим семейство функций

$$\omega_i(x) = \sum_{\nu} \frac{e_{i\nu}\xi_{i\nu}}{\sqrt{|\lambda_{i\nu}|}} \varphi_{i\nu}(x), \tag{23.2}$$

где $e_{i\nu} = \operatorname{sign} \lambda_{i\nu}$, и функционал (который в дальнейшем мы иначе запишем)

$$f(\xi) = \int_B G(\omega_1(y), \omega_2(y), \ldots, \omega_n(y), y)\, dy, \tag{23.3}$$

где вещественная функция вещественных аргументов

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x), \qquad u_i \in (-\infty, +\infty), \qquad x \in B$$

имеет по u_i частные производные

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x), \tag{23.4}$$

которые являются (H)-функциями, т. е. g_i непрерывны по совокупности $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ почти при каждом фиксированном x и измеримы в B по x при фиксированных

$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Будем еще предполагать, что функция $G(0, 0, \ldots, 0, x)$ измерима в B.

В настоящем параграфе мы исследуем семейства функций (23.2) и градиент функционала $f(\xi)$, который играет важную роль при изучении вариационным методом оператора Гаммерштейна в пространстве вектор-функций $L_{p,n}$.

23.2. О главном квадратном корне из линейного интегрального оператора. В п. 10.2 и в § 16 (определение 16.1) мы встретились с понятием главного квадратного корня из самосопряженного оператора $\mathbf{A}$, который совпадает с положительным квадратным корнем из $\mathbf{A}$, если $\mathbf{A}$ — положительный оператор. Здесь мы покажем, что семейство функций (23.2) представляет собой спектральное представление главного квадратного корня из оператора $\mathbf{A}_i$, определенного формулой (23.1), а затем исследуем некоторые свойства этого корня.

Так как по условию $\mathbf{A}_i$ есть самосопряженный, вполне непрерывный оператор в пространстве L^2, то из спектральной теории линейных операторов в гильбертовом пространстве (см., например, [3], стр. 186) следует, что

$$\mathbf{A}_i u = \sum_{\nu} \frac{(\varphi_{i\nu}, u)}{\lambda_{i\nu}} \varphi_{i\nu}(x),$$

а потому главный квадратный корень

$$\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u = \sum_{\nu} \frac{(\varphi_{i\nu}, u)\, e_{i\nu}}{\sqrt{|\lambda_{i\nu}|}} \varphi_{i\nu}(x), \tag{23.5}$$

где

$$e_{i\nu} = \operatorname{sign} \lambda_{i\nu}, \qquad \sum_{\nu} (\varphi_{i\nu}, u)^2 \leqslant \left(\int_B u^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Полагая $(\varphi_{i\nu}, u) = \xi_{i\nu}$, мы отсюда и из равенства (23.2) находим, что $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u = \omega_i(x)$.

Итак, каждому элементу $u \in L^2$ отвечает элемент ξ_i пространства $l_2^{(i)}$, который определяет по формуле (23.2) функцию $\omega_i(x) \in L^2$, причем $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u = \omega_i(x)$. Если рассматривать в L^2 собственное подпространство $L^2_{\mathbf{A}_i}$ оператора $\mathbf{A}_i$, то пространства $L^2_{\mathbf{A}_i}$ и $l_2^{(i)}$ будут изометричными. Таким образом, семейство функций $\omega_i(x)$ представляет собой множество значений оператора $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u$ для различных $u \in L^2$.

Выясним теперь вопрос о сходимости в пространстве L^p ряда (23.2).

Теорема 23.1. *Для того чтобы ряд* (23.2) *сходился в пространстве* L^p *равномерно относительно* $\xi \in D_1$, *где* D_1 — *шар* $\|\xi_i\| \leqslant 1$, *необходимо и достаточно выполнение следующего условия: каждому* $\varepsilon > 0$ *отвечает такое* m_0, *что для всякого* $m \geqslant m_0$ *и любого натурального* r *выполняется неравенство*

$$J_{m+r}(u) - J_m(u) < \varepsilon \tag{23.6}$$

равномерно относительно u, *принадлежащих шару* $\|u\| \leqslant 1$ *пространства* L^q ($p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$), *где*

$$J_m(u) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{(\varphi_{i\nu}, u)^2}{\lambda_{i\nu}} = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\lambda_{i\nu}} \left(\int\limits_B \varphi_{i\nu}(x) u(x)\, dx \right)^2. \tag{23.7}$$

Переходя к доказательству теоремы, мы допустим, что число характеристических чисел оператора $\mathbf{A}_i$ бесконечно, ибо только этот случай требует доказательства.

Доказательство достаточности. Так как по условию оператор $\mathbf{A}_i$ действует из L^q в L^p, то собственные функции $\varphi_{i\nu}(x) \in L^p$, а потому

$$\sum_{\nu=1+m}^{m+r} \frac{e_{i\nu}\xi_{i\nu}}{\sqrt{|\lambda_{i\nu}|}} \varphi_{i\nu}(x) = \omega_{i,m,r}(x) \in L^p.$$

Пусть теперь $z(x)$ есть произвольная функция пространства L^q с единичной нормой; тогда

$$(\omega_{i,m,r}, z) = \int\limits_B \omega_{i,m,r}(x)\, z(x)\, dx = \sum_{\nu=1+m}^{m+r} \frac{e_{i\nu}\xi_{i\nu}}{\sqrt{|\lambda_{i\nu}|}} (\varphi_{i\nu}, z) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\nu=1+m}^{m+r} \xi_{i\nu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\nu=1+m}^{m+r} \frac{(\varphi_{i\nu}, z)^2}{|\lambda_{i\nu}|} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{\nu=1+m}^{m+r} \frac{(\varphi_{i\nu}, z)^2}{|\lambda_{i\nu}|} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как по условию оператор $\mathbf{A}_i$ является квазиположительным, то число m_0 можно выбрать так, чтобы для $m \geqslant m_0$ было $\lambda_{im} > 0$, а значит, для таких m последнее неравенство можно записать так:

$$(\omega_{i,m,r}, z) \leqslant \left(\sum_{\nu=1+m}^{m+r} \frac{(\varphi_{i\nu}, z)^2}{\lambda_{i\nu}} \right)^{\frac{1}{2}} = (J_{m+r}(z) - J_m(z))^{\frac{1}{2}} < \sqrt{\varepsilon}.$$

Подберем теперь $z(x)$ так (см. [47], стр. 162), чтобы

$$(\omega_{i,m,r}, z) = \left(\int\limits_B |\omega_{i,m,r}(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \|z\| =$$

$$= \left(\int\limits_B |\omega_{i,m,r}(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из последних двух соотношений мы находим, что

$$\|\omega_{i,m,r}\| = \left(\int\limits_B |\omega_{i,m,r}(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \sqrt{\varepsilon}, \qquad (23.7)$$

а значит, ряд (23.2) сходится в L^p равномерно относительно ξ к некоторой функции $\omega_i(x) \in L^p$.

Доказательство необходимости. Пусть ряд (23.2) сходится равномерно по ξ в L^p; это означает, что заданному $\varepsilon > 0$ отвечает m_0, что для $m \geqslant m_0$ (можно считать $\lambda_{im} > 0$) и произвольного r будет

$$\|\omega_{i,m,r}\| = \left(\int\limits_B |\omega_{i,m,r}(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

равномерно относительно ξ_i, принадлежащих единичному шару пространства $l_2^{(i)}$. Напишем

$$\int\limits_B \omega_{i,m,r}(x) z(x) \, dx = \sum_{\nu=1+m}^{m+r} \frac{\xi_{i\nu}}{\sqrt{\lambda_{i\nu}}} (\varphi_{i\nu}, z),$$

где $z(x)$ принадлежит единичному шару пространства L^q, и подберем элемент $(\xi_{i,m+1}, \xi_{i,m+2}, \ldots, \xi_{i,m+r})$ так, чтобы

$$\sum_{\nu=1+m}^{m+r} \frac{\xi_{i\nu}}{\sqrt{\lambda_{i\nu}}}(\varphi_{i\nu}, z) = \left(\sum_{\nu=1+m}^{m+r} \xi_{i\nu}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\nu=1+m}^{m+r} \frac{(\varphi_{i\nu}, z)^2}{\lambda_{i\nu}}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{\nu=1+m}^{m+r} \frac{(\varphi_{i\nu}, z)^2}{\lambda_{i\nu}}\right)^{\frac{1}{2}} = (J_{m+r}(z) - J_m(z))^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда и из предыдущего имеем

$$(J_{m+r}(z) - J_m(z))^{\frac{1}{2}} = \int\limits_B \omega_{i,m,r}(x)\, z(x)\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_B |\omega_{i,m,r}(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \|z\| \leqslant \left(\int\limits_B |\omega_{i,m,r}(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Теорема доказана. Отметим, что равномерная сходимость ряда (23.2) означает сходимость по норме операторов $\mathbf{A}_{in}^{\frac{1}{2}}$ к оператору $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$.

Замечание 23.1. Из доказанной теоремы, теоремы 22.3 и того, что оператор $\mathbf{A}_i$ действует вполне непрерывно из L^q в L^p, вытекает, что каждая функция семейства (23.2) принадлежит пространству L^p или что главный квадратный корень $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ из оператора $\mathbf{A}_i$ действует из пространства L^2 в пространство L^p.

Главный квадратный корень $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$, спектральное разложение которого представлено формулой (23.5), является вполне непрерывным в L^2; это следует из общей теории линейных операторов в гильбертовом пространстве и легко устанавливается непосредственно (см., например, [9, г], лемма 1). Мы сейчас установим более сильное предложение, что оператор $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ действует вполне непрерывно из L^2 в L^p. Это предложение вытекает из следующей теоремы, которая нам понадобится в дальнейшем.

Теорема 23.2. *Если последовательность* $\xi_i^{(1)}$, $\xi_i^{(2)}$, $\xi_i^{(3)}, \ldots$, *принадлежащая шару* $\|\xi_i\| \leqslant c$, *сходится слабо в* $l_2^{(i)}$ *к* $\xi_i^{(0)}$, *то соответствующая ей по формуле* (23.2) *последовательность* $\omega_i^{(1)}(x)$, $\omega_i^{(2)}(x)$, $\omega_i^{(3)}(x), \ldots$ *сходится в* L^p *к* $\omega_i^{(0)}(x)$.

Доказательство. Составляя разность

$$\omega_i^{(0)}(x) - \omega_i^{(n)}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e_{i\nu}(\xi_{i\nu}^{(0)} - \xi_{i\nu}^{(n)})}{\sqrt{|\lambda_{i\nu}|}} \varphi_{i\nu}(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и пользуясь теоремой 22.3, мы так же, как при выводе неравенства (23.7), найдем, что равномерно относительно n

$$\|\omega_{i,m,r}^{(0)}(x) - \omega_{i,m,r}^{(n)}(x)\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $m \geqslant m_0(\varepsilon)$, $\lambda_{im} > 0$, а r — любое натуральное число. В силу произвольности натурального r мы отсюда имеем, что

$$\left\| \sum_{k=1+m}^{\infty} \frac{\xi_{ik}^{(0)} - \xi_{ik}^{(n)}}{\sqrt{\lambda_{ik}}} \varphi_{ik}(x) \right\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (23.8)$$

где $\| \quad \|_p$ берется в пространстве L^p.

Далее, так как $\{\xi_i^{(n)}\}$ слабо сходится к $\xi_i^{(0)}$, то (см. [47], стр. 205) для всякого k $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_{ik}^{(n)} = \xi_{ik}^{(0)}$, а значит, заданным числам $\varepsilon > 0$ и $m_0(\varepsilon)$ отвечает такое n_0, что для $n \geqslant n_0$ будет

$$\frac{|\xi_{ik}^{(0)} - \xi_{ik}^{(n)}|}{\sqrt{|\lambda_{ik}|}} \|\varphi_{ik}(x)\| < \frac{\varepsilon}{2m_0} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m_0). \qquad (23.9)$$

Из (23.8) и (23.9) мы находим, что для $n \geqslant n_0$

$$\|\omega_i^{(0)}(x) - \omega_i^{(n)}(x)\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{m_0} \frac{|\xi_{ik}^{(0)} - \xi_{ik}^{(n)}|}{\sqrt{|\lambda_{ik}|}} \|\varphi_{ik}(x)\|_p + \left\| \sum_{k=1+m_0}^{\infty} \frac{\xi_{ik}^{(0)} - \xi_{ik}^{(n)}}{\sqrt{\lambda_{ik}}} \varphi_{ik}(x) \right\| < \varepsilon.$$

Так как ε — произвольное положительное число, то отсюда имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|\omega_i^{(0)}(x) - \omega_i^{(n)}(x)\| = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие 23.1. Из представления (23.2) и доказанной теоремы следует, что *главный квадратный корень* $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ *из оператора* $\mathbf{A}_i$ *действует вполне непрерывно из пространства* L^2 *в пространство* L^p.

Доказательство. Из представления (23.2) и теоремы 23.2 следует, что оператор $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ преобразует всякую слабо сходящуюся в L^2 последовательность $\{u_n\}$ в последовательность $\{\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_n\}$, которая сходится сильно в L^p, а значит, если последовательность $\{u^{(n)}\}$ сходится сильно в L^2 к $u^{(0)}$, то последовательность $\{\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u^{(n)}\}$ сходится к $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u^{(0)}$ в смысле метрики пространства L^p, т. е. $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ действует непрерывно из L^2 в L^p.

Остается показать, что оператор $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ преобразует всякое ограниченное множество пространства L^2 в компактное множество пространства L^p. Действительно, пусть $u(x) \in D_R$, где D_R — шар $\|u\| \leqslant R$ пространства L^2. Допустим, что $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}(D_R) \subset L^p$ не компактно в L^p, тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется множество $\{\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_n\}$ такое, что для всяких $k \neq j$ будет

$$\left\| \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_k - \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_j \right\| > \varepsilon. \tag{23.10}$$

Выберем теперь из $u_n \in D_R$ подпоследовательность u_{n_ν}, которая сходится слабо к $u_0 \in D_R$; для этой подпоследовательности последовательность $\{\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_{n_\nu}\}$ должна сходиться сильно в смысле метрики пространства L^p к $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_0$, что противоречит неравенствам (23.10). Полученное противоречие доказывает справедливость следствия 23.1.

23.3. Расширение квадратного корня. Если самосопряженный в L^2 квазиположительный оператор $\mathbf{A}_i$ действует вполне непрерывно из L^q в L^p $(p \geqslant 2,\ p^{-1}+q^{-1}=1)$, то, как было установлено (см. следствие 23.1), главный квадратный корень $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ из оператора $\mathbf{A}_i$ действует вполне непрерывно из L^2 в L^p, а потому, каковы бы ни были функции $u(x) \in L^2$ и $v(x) \in L^q$ выражение

$$\left(\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u,\ v\right) = \int\limits_B \left(\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u\right) v(x)\,dx$$

имеет смысл. Далее, так как для всякой функции $u(x) \in L^2$ ряд (23.5) сходится в смысле метрики пространства L^p, можно написать:

$$\left(\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u,\ v\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{ik},\ u)\,(\varphi_{ik},\ v)}{\sqrt{|\lambda_{ik}|}}\, e_{ik}. \tag{23.11}$$

Может случиться, что для некоторых $v \in L^q$ и $u \in L^2$ выполняется равенство

$$\left(\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u,\ v\right) = (u,\ \mathbf{T}_i v),$$

тогда $\mathbf{T}_i$ будет сопряженным к $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ оператором, т. е. $\mathbf{T}_i = \left(\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}\right)^*$. Для элементов $v \in L^2$ мы имеем $\mathbf{T}_i v = \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}v$. Следовательно, $\mathbf{T}_i$ является расширением оператора $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$. Равенство (23.11) показывает, что для тех $v \in L^q$, для которых оператор $\mathbf{T}_i$ существует, должно выполняться равенство

$$\mathbf{T}_i v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_{ik}\,(\varphi_{ik},\ v)}{\sqrt{|\lambda_{ik}|}}\, \varphi_{ik}(x), \tag{23.12}$$

причем данный ряд должен сходиться к $\mathbf{T}_i v$ в смысле метрики пространства L^2. Так как согласно теореме 22.2 для всякой функции $v(x) \in L^q$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{ik}, v)^2}{|\lambda_{ik}|} < +\infty,$$

то ряд (23.12) сходится в метрике L^2, а потому он определяет линейный оператор $\mathbf{T}_i$, который действует из L^q в L^2. Нами, следовательно, доказано следующее предложение.

Лемма 23.1. *Если вполне непрерывный в L^2 квазиположительный оператор $\mathbf{A}_i$ есть ограниченный оператор, действующий из L^q в L^p* ($p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$), *то линейный оператор $\mathbf{T}_i$, определенный равенством* (23.12), *действует из L^q в L^2.*

Таким образом, определенный в L^2 оператор $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ допускает расширение $\mathbf{T}_i$ на все пространство L^q. Так как операторы $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ и $\mathbf{T}_i$ определяются при помощи одинаковых формул (23.5) и (23.12) с той разницей, что в (23.5) функция $u(x) \in L^2$, а в (23.12) функция $v(x) \in L^q$, то мы можем для них употреблять одинаковые обозначения. Лемма 23.1, следовательно, утверждает, что определенный в L^2 оператор $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ действует из L^q в L^2.

Подберем теперь единичный вектор $u(x) \in L^2$ так, чтобы для данного вектора $v(x) \in L^q$ было ([47], стр. 162, следствие 1)

$$(\mathbf{T}_i v, u) = \left(\int_B |\mathbf{T}_i v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \|u\| = \left(\int_B |\mathbf{T}_i v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{T} v\|.$$

Отсюда

$$\|\mathbf{T}_i v\| = (\mathbf{T}_i v, u) = \left(v, \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u\right) \leqslant \|v\|_q \|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u\|_p.$$

Но согласно следствию 23.1 $\|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u\|_p \leqslant N = \mathrm{const}$ для всех векторов u из единичного шара пространства L^2, откуда

$$\|\mathbf{T}_i v\| \leqslant N \|v\|_q, \tag{23.12'}$$

т. е. оператор $\mathbf{T}_i$, действующий из пространства L^q в пространство L^2, является ограниченным. Более того, из следствия 23.1 согласно известному предложению о полной непрерывности сопряженного оператора ([47], стр. 218, теорема 4), которое, впрочем, легко устанавливается здесь и непосредственно, мы приходим к следующему предложению.

Теорема 23.3. *Если квазиположительный (или положительный) в L^2 оператор $\mathbf{A}_i$, определенный равенством* (23.1), *действует вполне непрерывно из L^q в L^p ($p \geqslant 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$), то линейный оператор $\mathbf{T}_i$, определенный равенством* (23.12), *действует вполне непрерывно из L^q в L^2.*

Учитывая замечание об одинаковом обозначении для операторов $\mathbf{T}_i$ и $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$, мы из теоремы 23.3 и следствия 23.1 приходим к следующей теореме.

Теорема 23.4. *Если самосопряженный в L^2 квазиположительный (или положительный) оператор $\mathbf{A}_i$, определенный равенством* (23.1), *действует вполне непрерывно из L^q в L^p ($p \geqslant 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$), то определенный в L^2 главный корень квадратный из оператора $\mathbf{A}_i$*

$$\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_{ik}(\varphi_{ik}, u)}{\sqrt{|\lambda_{ik}|}} \varphi_{ik}(x), \quad e_{ik} = \operatorname{sign} \lambda_{ik} \tag{23.5}$$

действует вполне непрерывно из L^q в L^2 и из L^2 в L^p.

Отметим, что квадратный корень из интегрального оператора (23.1), записанный в виде (23.5) или (23.2), был применен автором к исследованию оператора Гаммерштейна в работе [9, а] и в более поздних работах (см., например, [9, в, г, е, з]), а также в работах М. А. Красносельского [36, г, д]). В отличие от работы Голомба [20], в перечисленных работах корень из интегрального оператора действует из пространства L_2 в пространство L_p, $p \geqslant 2$.

23.4. О главном квадратном корне в пространстве вектор-функций. Рассмотрим оператор $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$, где операторы $\mathbf{A}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются по формуле (23.1). Если $u = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ есть вектор-функция, то по определению

$$\mathbf{A}u = (\mathbf{A}_1 u_1, \mathbf{A}_2 u_2, \ldots, \mathbf{A}_n u_n).$$

Оператор $\mathbf{A}$ мы назовем *квазиположительным*, если хоть один из операторов $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ является квазиположительным, а остальные — либо положительны, либо квазиположительны. Аналогично определяется *квазиотрицательный* оператор в пространстве вектор-функций. Оператор $\mathbf{A}$ называется *положительным*, если каждый из операторов $\mathbf{A}_i$ является положительным $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Главный корень квадратный из оператора $\mathbf{A}$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}}, \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}}, \ldots, \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}}\right).$$

Так же, как в предыдущем пункте, устанавливается, что семейство функций (для различных $\xi \in l_{2,n}$)

$$\omega(x) = (\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x))$$

совпадает со спектральным представлением в пространстве $L_{2,n}$ главного квадратного корня, т. е. совпадает с

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u = \left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}}u_1, \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}}u_2, \ldots, \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}}u_n\right),$$

где $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i$ представлено по формуле (23.5).

Используя предложения, установленные в пункте 23.2, или повторяя выкладки этого пункта для пространств $L_{2,n}$, $l_{2,n}$, $L_{p,n}$, $L_{q,n}$, где $p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, мы придем к следующим предложениям.

Теорема 23.5. *Если положительный или квазиположительный оператор* $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$ *действует вполне непрерывно из пространства* $L_{q,n}$ *в пространство* $L_{p,n}$ $(p \geqslant 2,\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$, *то для всякой точки* $\xi \in l_{2,n}$ *вектор-функция*

$$\omega(x) = (\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)),$$

компоненты которой $\omega_i(x)$ *определяются по формуле* (23.2), *принадлежит пространству* $L_{p,n}$.

Теорема 23.6. *Если оператор* $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$, *где оператор* $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *определен равенством* (23.1), *является квазиположительным* (*или положительным*) *в* $L_{2,n}$ *и действует вполне непрерывно из* $L_{q,n}$ *в* $L_{p,n}$ $(p \geqslant 2,\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$, *то, какова бы ни была* *последовательность* $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \ldots$, *принадлежащая* $l_{2,n}$ *и слабо сходящаяся в этом пространстве к элементу* $\xi^{(0)} \in l_{2,n}$, *соответствующая ей по формуле* (23.2) *последовательность* $\omega^{(1)}(x), \omega^{(2)}(x), \omega^{(3)}, \ldots$ *сходится в* $L_{p,n}$ *к* $\omega^{(0)}(x)$.

Теорема 23.7. *Если выполнены условия теоремы* 23.6, *то определенный в* $L_{2,n}$ *главный корень квадратный из оператора* $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}}, \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}}, \ldots, \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}}\right),$$

где для $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i = \sum_{\nu} \frac{e_{i\nu}(\varphi_{i\nu}, u_i)}{\sqrt{|\lambda_{i\nu}|}} \varphi_{i\nu}(x), \quad e_{i\nu} = \operatorname{sign} \lambda_{i\nu}, \tag{23.5}$$

действует вполне непрерывно из $L_{q,n}$ *в* $L_{2,n}$ *и из* $L_{2,n}$ *в* $L_{p,n}$.

23.5. Градиент основного функционала. Рассмотрим сначала правую часть равенства (23.3) как функционал, определенный в пространстве $L_{p,n}$. В этом случае он совпадает с функционалом (21.2), рассмотренным в п. 21.1,

$$f(u) = \int_B G(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)\,dx. \tag{21.2}$$

Теорема 23.8. *Пусть выполнены условия*:

1°. *Оператор* $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$, *где* (*для* $i = 1, 2, \ldots, n$) *оператор* $\mathbf{A}_i$ *определен равенством* (23.1), *является положительным или квазиположительным в* $L_{2,n}$ *и действует вполне непрерывно из* $L_{q,n}$ *в* $L_{p,n}$ ($p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$).

2°. *Оператор Немыцкого*

$$\mathbf{h}u = (\mathbf{h}_1 u, \mathbf{h}_2 u, \ldots, \mathbf{h}_n u),$$

где $\mathbf{h}_i u = g_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)$ *есть непрерывный оператор с областью определения* $L_{p,n}$ *и областью значений в* $L_{q,n}$, *т. е.* (см. теорему 19.2)

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) + b \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{p-1}, \quad a_i(x) \in L^q, \ b > 0.$$

Тогда функционал $f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} v\right)$, *где* $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — *главный корень квад-*

ратный из оператора $\mathbf{A}$, *имеет в любом шаре пространства* $L_{2,n}$ *усиленно непрерывный градиент, представимый в виде*

$$\operatorname{grad} f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v\right) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v = \left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}_1\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}}v,\ \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}_2\mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}}v,\ \ldots,\ \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}_n\mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}}v\right). \tag{23.13}$$

Доказательство. По теореме 21.1 для всякой вектор-функции $u \in L_{p,n}$

$$\operatorname{grad} f(u) = \mathbf{h}u = (\mathbf{h}_1 u,\ \mathbf{h}_2 u,\ \ldots,\ \mathbf{h}_n u).$$

Далее, по теореме 23.7 оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ действует вполне непрерывно из $L_{q,n}$ в $L_{2,n}$ и из $L_{2,n}$ в $L_{p,n}$. Отсюда следует, что для $v,\ w \in L_{2,n}$ будет

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v + t\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}w\right) - f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v\right)\right] = \left(\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}w\right) = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v,\ w\right),$$

т. е.

$$\operatorname{grad} f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v\right) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v.$$

Этот градиент усиленно непрерывен, ибо оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ преобразует всякую слабо сходящуюся последовательность из $L_{2,n}$ в сильно сходящуюся последовательность пространства $L_{p,n}$ (см. доказательство следствия 23.1), откуда согласно условию $\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ преобразует всякую слабо сходящуюся последовательность из $L_{2,n}$ в сильно сходящуюся последовательность пространства $L_{q,n}$ и $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ преобразует всякую слабо сходящуюся последовательность из $L_{2,n}$ в сильно сходящуюся последовательность пространства $L_{2,n}$ ($\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ действует вполне непрерывно из $L_{q,n}$ в $L_{2,n}$). Теорема доказана.

Перейдем теперь от пространства $L_{2,n}$ к пространству $l_{2,n}$. Так как спектральное разложение в $L_{2,n}$ оператора $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ совпадает с семейством $\omega(x)$, то функционал $f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v\right)$, если воспользоваться спектральным разложением $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v$, перейдет в функционал $f(\xi)$. Далее

$$\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}_i\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}v=\sum_{\nu}\frac{e_{i\nu}\varphi_{i\nu}(x)}{\sqrt{|\lambda_{i\nu}|}}\int\limits_B\varphi_{i\nu}(y)\,g_{i\nu}(\omega_1(y),\ \omega_2(y),\ \ldots,\ \omega_n(y),\ y)\,dy,$$

а значит, коэффициенты Фурье этого вектора, которые образуют вектор $\mathbf{F}_i(\xi)$ в пространстве $l_2^{(i)}$, будут

$$\mathbf{F}_{i\nu}(\xi)=\frac{e_{i\nu}}{\sqrt{|\lambda_{i\nu}|}}\int\limits_B\varphi_{i\nu}(y)\,g_{i\nu}(\omega_1(y),\ \omega_2(y),\ \ldots,\ \omega_n(y),\ y)\,dy.$$

Отсюда и из теоремы 23.8 следует предложение, которое эквивалентно теореме 23.8 и которое было использовано автором в ряде работ (см., например, [9. у]).

Теорема 23.9. *Пусть выполнены условия:*

1°. *Оператор* $\mathbf{A}=(\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_n)$ *является положительным или квазиположительным в* $L_{2,n}$ *и действует вполне непрерывно из* $L_{q,\,n}$ *в* $L_{p,\,n}$ $(p\geqslant 2,\ p^{-1}+q^{-1}=1)$.

2°. *Оператор Немыцкого*

$$\mathbf{h}u=(\mathbf{h}_1u,\ \mathbf{h}_2u,\ \ldots,\ \mathbf{h}_nu),$$

где $\mathbf{h}_iu=g_i(u_1(x),\ u_2(x)\ \ldots,\ u_n(x),\ x)$, *есть непрерывный оператор с областью определения* $L_{p,\,n}$, *и областью значений в* $L_{q,\,n}$, *т. е.* (см. теорему 19.2)

$$|\,g_i(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ x)\,|\leqslant a_i(x)+b\sum_{k=1}^{n}|\,u_k\,|^{p-1},\ a_i(x)\in L^q,\ b>0.$$

Тогда функционал $f(\xi)$, *определенный формулами* (23.3) *и* (23.2), *имеет в любом шаре* $\|\xi\|\leqslant c$ *пространства* $l_{2,\,n}$ *усиленно непрерывный градиент, представимый в виде*

$$\operatorname{grad} f(\xi)=\mathbf{F}\xi=(\mathbf{F}_1\xi,\ \mathbf{F}_2\xi,\ \ldots,\ \mathbf{F}_n\xi)\in l_{2,\,n},$$

$$\mathbf{F}_i\xi=(\mathbf{F}_{i1}\xi,\ \mathbf{F}_{i2}\xi,\ \mathbf{F}_{i3}\xi,\ \ldots)$$

и

$$\mathbf{F}_{i\nu}\xi=\frac{e_{i\nu}}{\sqrt{|\lambda_{i\nu}|}}\int\limits_B\varphi_{i\nu}(y)\,g_i(\omega_1(y),\ \omega_2(y),\ \ldots,\ \omega_n(y),\ y)\,dy.$$

Отметим, что настоящая теорема может быть доказана непосредственно, как теорема 2.2 работы [9, у].

Отметим еще, что для всех предложений настоящего параграфа также справедливо замечание 22.2.

ГЛАВА VII
НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 24. Существование и единственность решений

В настоящем параграфе вариационным методом будут установлены теоремы существования и единственности решений уравнений вида $\mathbf{T}x = x$, где $\mathbf{T}$ — оператор Гаммерштейна в пространстве вектор-функций.

Существуют и другие методы изучения вопроса о решениях таких уравнений. К таким методам относятся метод последовательных приближений, который подробно изложен в работах В. В. Немыцкого [57, а, в], другие приближенные методы, которые были развиты в работах Л. В. Канторовича [29] и других ленинградских математиков (см. [30], где указана библиография), топологические методы, предложенные в работах Биркгофа и Келлога [6] и развитые затем в работах В. В. Немыцкого [57], Ю. Шаудера [73] и их многочисленных последователей ([24], [20], [25], [23], [63, е], см. также [36, з], где указана библиография), метод теории конусов в пространстве Банаха, развитый М. Г. Крейном и М. А. Рутманом [39].

Вариационные методы исследования нелинейных интегральных уравнений, по-видимому, впервые встречаются у Г. Фубини [69], а затем в работах Л. Лихтенштейна ([44, а], стр. 79—84 и [44, б]), А. Гаммерштейна [14] и М. Голомба [20]. Позднее вариационные методы были развиты в работах Э. Роте [63, в, г], автора [9] и М. А. Красносельского [36]. Вариационные методы доказательства существования решений уравнения $\mathbf{T}x = x$, как мы видели в § 10, применимы тогда, когда $\mathbf{T} = \mathbf{AF}$, где $\mathbf{F}$ — потенциальный оператор, а $\mathbf{A}$ — самосопряженный оператор; примерами уравнений с такими операторами могут служить уравнения

Гаммерштейна

$$u(x) = \int_B K(x, y) g(u(y), y) dy,$$

где $K(x, y)$ — симметричное ядро, и системы подобного вида:

$$u_i(x) = \int_B K_i(x, y) g_i(u_1(y), u_2(y), \ldots, u_n(y), y) dy \qquad (24.1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

с симметричными ядрами, где (см. теорему 21.1)

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x). \quad (21.1)$$

Отметим, что при изучении систем типа Гаммерштейна топологическими методами не нужно требовать ни симметрии ядер, ни условия (21.1); однако при изучении системы Гаммерштейна вариационными методами получаются другие оценки для констант, входящих в различные неравенства, которые могут оказаться полезными в конкретных задачах.

При изучении системы (24.1) мы будем рассматривать в пространстве вектор-функций $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ линейный интегральный оператор $\mathbf{A}u = (\mathbf{A}_1 u_1, \mathbf{A}_2 u_2, \ldots, \mathbf{A}_n u_n)$, где

$$\mathbf{A}_i u_i = \int_B K_i(x, y) u_i(y) dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В этом параграфе и в дальнейшем мы будем придерживаться следующей терминологии. Ядро $K_i(x, y)$ будем называть *положительным*, если $\mathbf{A}_i$ — самосопряженный оператор с положительным спектром. Ядро $K_i(x, y)$ будем называть *квазиположительным*, если оператор $\mathbf{A}_i$ — квазиположительный, т. е. если выполнены следующие условия:

1) $\mathbf{A}_i$ — самосопряженный оператор в L^2,

2) спектр оператора $\mathbf{A}_i$ имеет непустые положительную и отрицательную части,

3) отрицательная часть спектра состоит из конечного числа собственных значений, имеющих конечную кратность.

Аналогично определяется квазиотрицательное ядро; говорят, что $K_i(x, y)$ — *квазиотрицательное ядро*, если оператор $-\mathbf{A}_i$ является квазиположительным.

Оператор $\mathbf{A}u=(\mathbf{A}_1u_1, \mathbf{A}_2u_2, \ldots, \mathbf{A}_nu_n)$ называется *положительным* в $L_{2,n}$, если каждый из операторов $\mathbf{A}_i$ является положительным в L^2. Оператор $\mathbf{A}u=(\mathbf{A}_1u_1, \mathbf{A}_2u_2, \ldots, \mathbf{A}_nu_n)$ будем называть *квазиположительным в* $L_{2,n}$, если хоть один из операторов $\mathbf{A}_i$ является квазиположительным, а любой из остальных операторов $\mathbf{A}_i$ является либо положительным, либо квазиположительным.

Оператор $\mathbf{A}$ будем называть *квазиотрицательным в* $L_{2,n}$, если $-\mathbf{A}$ является квазиположительным в $L_{2,n}$.

24.1. Системы с позитивными ядрами.

Теорема 24.1 [1]). *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Каждый интегральный оператор*

$$\mathbf{A}_iu_i=\int\limits_B K_i(x, y)\,u_i(y)\,dy \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

с симметричным положительным ядром $K_i(x, y)$ действует вполне непрерывно из L^q в L^p ($p\geqslant 2$, $p^{-1}+q^{-1}=1$).

2°. $\mathbf{h}u=(\mathbf{h}_1u, \mathbf{h}_2u, \ldots, \mathbf{h}_nu)$, *где* $\mathbf{h}_iu=g_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)$, *является непрерывным оператором из $L_{p,n}$ в $L_{q,n}$* (см. теорему 19.2).

3°.

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)=\frac{\partial}{\partial u_i}G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x), \tag{21.1}$$

где [2]) $G(0, 0, \ldots, 0, x)$ — *измеримая функция на множестве B конечной меры s-мерного евклидова пространства, и*

$$2G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_iu_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\,|u_i|^{\alpha}+c(x),$$

где $0\leqslant a_i<\lambda_{i1}$ (λ_{i1} — *наименьшее характеристическое число ядра* $K_i(x, y)$), $0<\alpha<2$, $0\leqslant b_i(x)\in L^{\gamma}$, $\gamma=\dfrac{2}{2-\alpha}$, $0\leqslant c(x)\in L^1$.

Тогда система (24.1) *имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее пространству $L_{p,n}$.*

Доказательство. Согласно условию теоремы оператор $\mathbf{A}u=(\mathbf{A}_1u_1, \mathbf{A}_2u_2, \ldots, \mathbf{A}_nu_n)$ является самосопряжен-

---

[1]) См. [9, т], теорема 3.

[2]) Для одного уравнения, т. е. в случае $n=1$, условие (21.1) автоматически выполняется.

ным в $L_{2,n}$ и действует вполне непрерывно из $L_{q,n}$ в $L_{p,n}$, причем согласно теореме 21.1 функционал

$$f(u)=\int_B G(u_1(y),\ u_2(y),\ \ldots,\ u_n(y),\ y)\,dy$$

удовлетворяет условию Липшица в любом шаре пространства $L_{p,n}$ и $\operatorname{grad} f(u)=\mathbf{h}u$. Рассмотрим теперь в пространстве $L_{2,n}$ функционал

$$\varphi(u)=(u,\ u)-2f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right),$$

где $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный из оператора $\mathbf{A}$ в пространстве $L_{2,n}$, который согласно условиям данной теоремы (см. теорему 23.7) действует вполне непрерывно из $L_{2,n}$ в $L_{p,n}$. Для данного функционала согласно условию 3° теоремы имеем

$$\varphi(u)=(u,\ u)-2f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right)\geqslant(u,\ u)-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}a_i\int_B\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_i\right)^2dy-\sum_{i=1}^{n}\int_B b_i(y)\left|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i\right|^{\alpha}dy-\int_B c(y)\,dy.$$

Но

$$\int_B\left(\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i\right)^2dy=\left(\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i,\ \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i\right)=\left(\mathbf{A}_iu_i,\ u_i\right)\leqslant\frac{1}{\lambda_{i1}}(u_i,\ u_i).$$

Согласно неравенству Гельдера для интегралов

$$\int_B b_i(x)\left|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i\right|^{\alpha}dy\leqslant r_i^{\frac{2-\alpha}{2}}\left(\int_B\left(\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i\right)^2dy\right)^{\frac{\alpha}{2}}\leqslant r_i^{\frac{2-\alpha}{2}}\lambda_{i1}^{-\frac{\alpha}{2}}(u_i,\ u_i)^{\frac{\alpha}{2}},$$

где

$$r_i=\int_B(b_i(y))^{\frac{2}{2-\alpha}}dy.$$

Пользуясь полученной оценкой и применяя неравенство Гельдера для суммы, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \int_B b_i(y) \left| \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i \right|^{\alpha} dy \leqslant \sum_{i=1}^{n} r_i^{\frac{2-\alpha}{2}} \lambda_{i1}^{-\frac{\alpha}{2}} (u_i, u_i)^{\frac{\alpha}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \lambda_{i1}^{\frac{\alpha}{\alpha-2}} \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} (u, u)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Из этого и предыдущих неравенств следует

$$\varphi(u) \geqslant (u, u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_{i1}} (u_i, u_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \lambda_{i1}^{\frac{\alpha}{\alpha-2}} \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} (u, u)^{\frac{\alpha}{2}} - C,$$

где

$$C = \int_B c(y)\, dy,$$

или

$$\varphi(u) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{a_i}{\lambda_{i1}}\right) (u_i, u_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \lambda_{i1}^{\frac{\alpha}{\alpha-2}} \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} (u, u)^{\frac{\alpha}{2}} - C.$$

Полагая

$$a_0 = \min_i \left(1 - \frac{a_i}{\lambda_{i1}}\right), \quad \beta = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \lambda_{i1}^{\frac{\alpha}{\alpha-2}} \right)^{\frac{2-\alpha}{2}},$$

мы окончательно имеем

$$\varphi(u) \geqslant (u, u)^{\frac{\alpha}{2}} \left[a_0 (u, u)^{\frac{2-\alpha}{2}} - \beta \right] - C,$$

т. е. функционал $\varphi(u)$ удовлетворяет тем же требованиям, что и функционал $\varphi(x)$, построенный в § 10 при доказательстве теоремы 10.1. Ввиду этого согласно теореме 10.1 существует такой вектор $u_0 \in L_{2,n}$, что $\operatorname{grad} \varphi(u_0) = \theta$, т. е. $2u_0 - 2 \operatorname{grad} f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_0\right) = \theta$, и согласно теореме 23.8 $u_0 = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_0$. Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ и полагая $z_0 = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_0$, мы получим: $z_0 = \mathbf{A}\mathbf{h} z_0$, т. е. что z_0 является решением уравнения (24.1), которое принадлежит пространству $L_{p,\,n}$, ибо согласно теореме 23.7 оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ действует из $L_{2,\,n}$ в $L_{p,\,n}$. Теорема доказана.

Замечание 24.1. Если и в $L_{2,\,n}$ оператор $\mathbf{A}$ вполне непрерывен, то в теореме 24.1 не нужно требовать, чтобы $\operatorname{mes} B < \infty$. Далее, если оператор $\mathbf{h}$ удовлетворяет условиям Липшица с подходящей постоянной Липшица, то согласно замечанию 10.1 в условиях теоремы 24.1 можно утверждать, что существует единственное решение.

Отметим еще, что если выполнены условия доказанной теоремы, то система

$$\left.\begin{aligned} u_i(x) = \lambda \int_B K_i(x,\ y)\, g_i(u_1(y),\ u_2(y),\ \ldots,\ u_n(y),\ y)\, dy \\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \end{aligned}\right\} \quad (24.2)$$

имеет решение, когда $0 \leqslant \lambda a_i < \lambda_{i1}$. Если же сверх того $a_i = 0$ для всех i, то данная система имеет решение при любом значении параметра $\lambda \geqslant 0$.

Теорема 24.2 [1]). *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Каждый интегральный оператор*

$$\mathbf{A}_i u_i = \int_B K_i(x,\ y)\, u_i(y)\, dy \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

является положительным и вполне непрерывным в L^2.

2°. *(H)-функции* [2])

$$g_i(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ x),$$

где $G(0,\ 0,\ \ldots,0,\ x)$ — *измеримая функция на множестве* B *конечной меры* s*-мерного евклидова пространства, и*

$$|g_i(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ x)| \leqslant$$
$$\leqslant a_i(x) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} |u_k| + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}(x) |u_k|^{\alpha-1}, \quad (24.3)$$

где

$$0 \leqslant a_i(x) \in L^2,\ 0 \leqslant \beta_{ik}(x) \in L^{\gamma},\ \gamma = \frac{2}{2-\alpha},\ 1 < \alpha < 2,\ \alpha_{ik} \geqslant 0.$$

---

[1]) См. [9, и], теорема 3.

[2]) См. определение 18.2.

3°. *Сумма элементов i-й строки и i-го столбца одной из треугольных матриц*

$$C_1 = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad C_2 = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix}$$

или полусумма элементов i-й строки и i-го столбца матрицы

$$C_3 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdot & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

меньше λ_{i1} — наименьшего характеристического числа ядра $K_i(x, y)$.

Тогда система

$$\left. \begin{aligned} u_i(x) = \int\limits_B K_i(x, y)\, g_i(u_1(y), u_2(y), \dots, u_n(y), y)\, dy \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (24.1)$$

имеет решение, принадлежащее пространству $L_{2,n}$.

Доказательство. Из неравенств (24.3) согласно теореме 19.2 следует, что оператор Немыцкого $\mathbf{h}u = (\mathbf{h}_1 u, \mathbf{h}_2 u, \dots, \mathbf{h}_n u)$, где $\mathbf{h}_i u = g_i(u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), x)$ есть непрерывный оператор в пространстве вектор-функций $L_{2,n}$, ибо согласно элементарному неравенству Гельдера

$$|ab| \leqslant p^{-1}|a|^p + q^{-1}|b|^q \qquad (p > 1,\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$$

можно написать:

$$\beta_{ik}(x)\,|u_k|^{\alpha-1} \leqslant (\alpha - 1)\,|u_k| + (2 - \alpha)\,(\beta_{ik}(x))^{\frac{1}{2-\alpha}},$$

где по условию

$$(\beta_{ik}(x))^{\frac{1}{2-\alpha}} \in L^2.$$

Исходя теперь из условия 2° теоремы, напишем:

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{u_k} g_k(0, \ldots, 0, v, u_{k+1}, \ldots, u_n, x)\,dv =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{|u_k|} g_k(0, \ldots, 0, v \operatorname{sign} u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n, x)\,dv$$

Отсюда согласно неравенству (24.3) имеем

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \leqslant G_1 + G_2,$$

где

$$G_1 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{|n_k|} \left[a_k(x) + \alpha_{kk} v + \sum_{r=1+k}^{n} \alpha_{kr} |u_r|\right] dv,$$
$$G_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{|u_k|} \left[\beta_{kk}(x)\, v^{\alpha-1} + \sum_{r=1+k}^{n} \beta_{kr}(x) |u_r|^{\alpha-1}\right] dv.$$

Используя неравенство $ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, мы получаем

$$G_1 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k^2(x)}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} u_k^2 + \frac{1}{2} \alpha_{kk} u_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{r=1+k}^{n} \alpha_{kr} (u_k^2 + u_r^2)\right],$$

где ε — произвольное положительное число. Отсюда после преобразования находим

$$G_1 \leqslant \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} a_k^2(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\varepsilon + \sum_{r=k}^{n} \alpha_{kr} + \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_{rk}\right) u_k^2.$$

Положим

$$a_k^{(0)} = \sum_{r=k}^{n} \alpha_{kr} + \sum_{r=1}^{k-1} \alpha_{rk}.$$

Так как по условию теоремы $a_k^{(0)} < \lambda_{k1}$, то число ε можно подобрать столь малым, чтобы

$$a_k = \varepsilon + a_k^{(0)} < \lambda_{k1}.$$

Далее, напишем

$$G_2 = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\alpha} \beta_{kk}(x) |u_k|^\alpha + |u_k| \sum_{r=1+k}^{n} \beta_{kr}(x) |u_r|^{\alpha-1} \right]$$

и, применяя элементарное неравенство Гельдера

$$|u_k u_r^{\alpha-1}| \leqslant \frac{1}{\alpha} |u_k|^\alpha + \frac{\alpha-1}{\alpha} |u_r|^\alpha,$$

получим

$$G_2 \leqslant \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left(\beta_{kk}(x) + \sum_{r=1+k}^{n} \beta_{kr}(x) \right) |u_k|^\alpha + \\ + \frac{\alpha-1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=1+k}^{n} \beta_{kr}(x) |u_r|^\alpha \right) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x) |u_k|^\alpha,$$

где согласно условию $b_k(x) \in L^\gamma$, $\gamma = \frac{2}{2-\alpha}$.

Таким образом,

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) |u_i|^\alpha + c(x),$$

где

$$a_i < \lambda_{i1}, \ 1 < \alpha < 2, \ b_i(x) \in L^\gamma, \ \gamma = \frac{2}{2-\alpha}, \ c(x) \in L,$$

т. е. выполнены все условия теоремы 24.1 при $p = 2$. Следовательно, в данном случае теорема 24.2 следует из теоремы 24.1.

Далее, представив (на основании условия 2°) G в виде

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \\ = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{u_k} g_k(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, v, 0, 0, \ldots, 0, x) dv$$

и поступая так же, как раньше, мы найдем, что условие 3° теоремы 24.1 будет выполнено, если сумма элементов i-й строки и i-го столбца треугольной матрицы C_2 будет меньше, чем λ_{k1}. Комбинируя два приведенных вида представлений функции G, мы приходим к выводу, что если полусумма элементов i-й строки и i-го столбца матрицы C_3 (диагональный элемент α_{kk} войдет в сумму всех элементов два раза) меньше λ_{k1}, то условие 3° теоремы 24.1 выполняется. Отсюда вытекает, что теорема 24.2 следует из теоремы 24.1.

Теорема 24.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Измеримая по $x \in B$ функция $g(u, x)$ имеет частную производную $g'_u(u, x)$, которая непрерывна по $u \in (-\infty, +\infty)$, причем для всех $u \in (-\infty, +\infty)$ и почти для всех $x \in B$ она удовлетворяет неравенству $g'_u(u, x) \leqslant M$ и ограничена снизу.*

2°. *Интегральный оператор*

$$\mathbf{A}u = \int_B K(x, y)\, u(y)\, dy$$

с вещественным симметричным ядром $K(x, y)$ типа Карлемана[1]) *является самосопряженным и положительным в пространстве $L^2(B)$, где B — измеримое множество s-мерного евклидова пространства.*

3°. $M\|\mathbf{A}\| < 1$, *если* $M > 0$.

Тогда нелинейное интегральное уравнение

$$u(x) = \int_B K(x, y)\, g(u(y), y)\, dy \tag{24.4}$$

имеет решение, принадлежащее L^2, причем если $|g'_u(u, x)| < M$, то это решение будет единственным.

Доказательство. Из условия 1° согласно лемме 20.2 и теореме 20.2 следует, что оператор Немыцкого $\mathbf{h}u = g(u(x), x)$, который является потенциальным, — непрерывный оператор в пространстве L^2 и имеет в L^2 ограниченный линейный дифференциал Гато

$$\mathbf{Dh}(u, v) = g'_u(u(x), x)\, v(x).$$

Далее,

$$(\mathbf{Dh}(u, v), v) = \int_B g'_u(u(x), x)\, v^2(x)\, dx \leqslant M \int_B v^2(x)\, dx = M(v, v).$$

---

[1]) См. [32] и [67], гл. X, § 1.

Отсюда и из условия 3° согласно теореме 10.2 следует, что уравнение (24.4) имеет решение. Наконец, согласно условию Липшица (3.6) следует, что если $|g'_u(u, x)| < M$, то потенциальный оператор $\mathbf{h}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной Липшица M, так что согласно замечанию 10.1 уравнение (24.4) имеет единственное решение. Теорема доказана [1]).

Отметим, что аналогичная теорема имеет место и для системы (24.1).

24.2. Системы с квазидефинитными ядрами.

Теорема 24.4. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Интегральный оператор* $\mathbf{A}u = (\mathbf{A}_1 u_1, \mathbf{A}_2 u_2, \ldots, \mathbf{A}_n u_n)$, *где*

$$\mathbf{A}_i u_i = \int_B K_i(x, y) u_i(y)\, dy,$$

является квазиотрицательным в пространстве $L_{2,n}$ *и действует вполне непрерывно из* $L_{q,n}$ *в* $L_{p,n}$ $(p \geqslant 2,\ p^{-1} + q^{-1} = 1)$.

2°. *Оператор Немыцкого* $\mathbf{h}u = (\mathbf{h}_1 u, \mathbf{h}_2 u, \ldots, \mathbf{h}_n u)$, *где* $\mathbf{h}_i u = g_i(u_1(x), u_2(x) \ldots, u_n(x), x)$, *является непрерывным оператором из* $L_{p,n}$ *в* $L_{q,n}$ (см. теорему 19.2).

3°. $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \dfrac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$, (21.1)

где [2]) $G(0, 0, \ldots, 0, x)$ — *измеримая функция на множестве* B *конечной меры* s*-мерного евклидова пространства, и*

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) |u_i|^\alpha + c(x), \quad (24.5)$$

где [3]) $a_i = \dfrac{1}{\lambda_{i1}}$ (λ_{i1} — *наибольшее положительное характе-*

---

[1]) Теорема также следует из принципа сжатых отображений, если $|g'_u(u, x)| < M$. При отказе от этого требования теорема не следует из принципа сжатых отображений.

[2]) Если $n = 1$, то условие (21.1) не является дополнительным ограничением.

[3]) Если ядро K_i не имеет положительных характеристических чисел, то полагаем $a_i = 0$.

ристическое число ядра $K_i(x, y)$), $0 < \alpha < 2$, $0 \geqslant b_i(x) \in L^{\gamma}$, $\gamma = \frac{2}{2-\alpha}$, $0 \geqslant c(x) \in L$.

Тогда система

$$u_i(x) = \int\limits_B K_i(x, y)\, g_i(u_1(y), u_2(y), \ldots, u_n(y), y)\, dy \qquad (24.1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее пространству $L_{p, n}$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\mathbf{A}u = (\mathbf{A}_1 u_1, \mathbf{A}_2 u_2, \ldots, \mathbf{A}_n u_n)$, который согласно условию 1° действует вполне непрерывно из пространства вектор-функций $L_{q, n}$ в пространство $L_{p, n}$ и является квазиотрицательным в $L_{2, n}$. Обозначим через $\mathbf{P}_{i1}$ оператор проектирования из L^2 на подпространство H_{i1} собственных функций ядра $K_i(x, y)$, которые соответствуют положительным характеристическим числам. Согласно условию это подпространство является конечномерным. Обозначим через $\mathbf{P}_{i2}$ оператор проектирования из L^2 на ортогональное дополнение к H_{i1} в L^2. Положим

$$\mathbf{P}_1 = (\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{21}, \ldots, \mathbf{P}_{n1}); \quad \mathbf{P}_2 = (\mathbf{P}_{12}, \mathbf{P}_{22}, \ldots, \mathbf{P}_{n2});$$

тогда для любого вектора $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in L_{2, n}$ мы будем иметь

$$u = \mathbf{P}_1 u + \mathbf{P}_2 u.$$

Рассмотрим теперь функционал

$$((u))^2 = \|\mathbf{P}_1 u\|^2 - \|\mathbf{P}_2 u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{P}_{i1} u_i\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{P}_{i2} u_i\|^2$$

и функционал

$$f(u) = \int\limits_B G(u_1(y), u_2(y), \ldots, u_n(y), y)\, dy.$$

Согласно теореме 21.1 функционал $f(u)$ удовлетворяет условию Липшица в любом шаре пространства $L_{p, n}$, причем $\operatorname{grad} f(u) = \mathbf{h}u$. Далее, так же, как при доказательстве теоремы 10.2, положим $\varphi(u) = 2f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right) - ((u))^2$, где $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — главный корень квадратный в $L_{2,n}$ из оператора $\mathbf{A}$. Согласно теореме 23.7 оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ действует вполне непрерывно из $L_{2,n}$ в $L_{p,n}$.

Оценим теперь (при помощи неравенства (24.5)) снизу функционал $\varphi(u)$ в пространстве $L_{2,n}$:

$$\varphi(u)=2f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right)-((u))^2\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}a_i\int\limits_B\left(\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i\right)^2dy+$$

$$+2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_B b_i(y)\left|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i\right|^{\alpha}dy+2\int\limits_B c(y)\,dy-((u))^2.$$

Но

$$\int\limits_B\left(\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i\right)^2dy=\left(\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i,\ \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i\right)=\left\|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}\mathbf{P}_{i1}u_i\right\|^2+\left\|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}\mathbf{P}_{i2}u_i\right\|^2\geqslant$$

$$\geqslant\left\|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}\mathbf{P}_{i1}u_i\right\|^2\geqslant\frac{1}{\lambda_{i1}}\|\mathbf{P}_{i1}u_i\|^2,$$

где λ_{i1} — наибольшее положительное характеристическое число ядра $K_i(x, y)$, откуда

$$2\sum_{i=1}^{n}a_i\int\limits_B\left(\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i\right)^2dy\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{1}{\lambda_{i1}}\|\mathbf{P}_{i1}u_i\|^2=2\|\mathbf{P}_1u\|^2.$$

Затем, так же как при доказательстве теоремы 24.1, найдем, что

$$2\sum_{i=1}^{n}\int\limits_B|b_i(x)|\left|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i\right|^{\alpha}dy\leqslant 2\left(\sum_{i=1}^{n}r_i\mu_{i1}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}(u,\ u)^{\frac{\alpha}{2}},$$

где

$$r_i=\int\limits_B|b_i(y)|^{\frac{2}{2-\alpha}}dy,$$

а μ_{i1} — наибольшее из абсолютных значений собственных чисел ядра $K_i(x, y)$.

Из найденных неравенств следует:

$$\varphi(u) \geqslant 2\|\mathbf{P}_1 u\|^2 - ((u))^2 -$$

$$- 2\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \mu_{i1}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} (u,\ u)^{\frac{\alpha}{2}} + 2\int_B c(y)\,dy =$$

$$= (u,\ u)^{\frac{\alpha}{2}}\left[(u,\ u)^{\frac{2-\alpha}{2}} - 2\left(\sum_{i=1}^{n} r_i \mu_{i1}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}\right] + 2\int_B c(y)\,dy,$$

ибо

$$2\|\mathbf{P}_1 u\|^2 - ((u))^2 = 2\|\mathbf{P}_1 u\|^2 - \|\mathbf{P}_1 u\|^2 + \|\mathbf{P}_2 u\|^2 = (u,\ u).$$

Таким образом, функционал $\varphi(u)$ удовлетворяет тем же требованиям, что и функционал $\varphi(x)$, построенный в § 10 при доказательстве теоремы 10.3. Ввиду этого согласно теореме 10.3 найдется такой вектор u_0 пространства $L_{2,\,n}$, что $\operatorname{grad}\varphi(u_0) = \theta$, или, так как согласно равенству (10.7) $\operatorname{grad}((u))^2 = 2\mathbf{P}_1 u - 2\mathbf{P}_2 u$,

$$2\operatorname{grad} f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_0\right) - 2(\mathbf{P}_1 u_0 - \mathbf{P}_2 u_0) = \theta.$$

Отсюда согласно теореме 23.8 о представлении $\operatorname{grad} f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_0\right)$ имеем

$$\mathbf{P}_1 u_0 - \mathbf{P}_2 u_0 = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_0. \tag{24.6}$$

Обозначив теперь через $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$ положительный корень квадратный из абсолютного значения оператора $\mathbf{A}$, мы будем иметь

$$\mathbf{A}_{\frac{1}{2}} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{A}; \quad \mathbf{A}_{\frac{1}{2}}(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует, что если мы применим к обеим частям равенства (24.6) оператор $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$, то получим

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_0 = \mathbf{A} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_0.$$

Полагая здесь $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_0 = z_0$, где $z_0 \in L_{p,\,n}$ (ибо согласно теореме 23.7 оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ действует из $L_{2,\,n}$ в $L_{p,\,n}$), мы получим, что $z_0 = \mathbf{Ah}z_0$. Теорема доказана [1]).

Отметим, что к доказанной теореме можно прийти, исходя из функционала $\varphi(x) = 2f\left(\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}\right) - ((u))^2$, причем систему (24.1) можно заменить системой (24.2), если $\lambda \geqslant 1$.

Отметим еще, что теорема 24.4 остается справедливой, если операторы $\mathbf{A}_i$ являются квазиположительными, а вместо неравенства (24.5) выполняется следующее неравенство:

$$G(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ x) \leqslant -\sum_{i=1}^{n} a_i u_i^2 + \sum b_i(x)\,|\,u_i\,|^{\alpha} + c(x),$$

где $a_i = \lambda_{i1}^{-1}$ (λ_{i1} — абсолютное значение наименьшего отрицательного характеристического числа ядра $K_i(x,\ y)$), $0 < \alpha < 2$, $0 \leqslant b_i(x) \in L^{\gamma}$, $\gamma = \dfrac{2}{2-\alpha}$, $0 \leqslant c(x) \in L$. Данный случай сводится к предыдущему путем изменения знака у K_i и g_i.

Теорема 24.5. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Интегральный оператор*

$$\mathbf{A}u = \int_B K(x,\ y)\,u(y)\,dy$$

с симметричным ядром типа Карлемана [2]) *является квазиотрицательным в пространстве $L^2(B)$, где B — измеримое множество конечномерного евклидова пространства.*

2°. *Измеримая по $x \in B$ функция $g(u,\ x)$ имеет частную производную $g'_u(u,\ x)$, которая непрерывна по $u \in (-\infty,\ +\infty)$, причем для всех $u \in (-\infty,\ +\infty)$ и почти для всех $x \in B$ она удовлетворяет неравенству $g'_u(u,\ x) \geqslant 2\lambda_1$, где λ_1 — наибольшее (положительное) характеристическое число ядра $K(x,\ y)$, и ограничена в существенном.*

---

[1]) Если и в $L_{2,\,n}$ оператор $\mathbf{A}$ действует вполне непрерывно, то в теореме не нужно требовать, чтобы $\operatorname{mes} B < \infty$. Отметим, что если $\operatorname{mes} B = \infty$, то из того, что вектор-функция $u(x)$ принадлежит пространству $L_{p,\,n}$, где $p > 2$, еще не следует, что $u(x) \in L_{2,\,n}$.

[2]) См. [32] и [67], гл. X, § 1.

Тогда нелинейное интегральное уравнение

$$u(x) = \int_B K(x, y) g(u(y), y) dy \tag{24.4}$$

имеет по меньшей мере одно решение.

Доказательство. Из условия 2° согласно лемме 20.2 и теореме 20.2 следует, что оператор Немыцкого $\mathbf{h}u = g(u(x), x)$ является непрерывным в L^2 и имеет в этом пространстве ограниченный линейный дифференциал Гато $\mathbf{D}\mathbf{h}(u, v) = g'_u(u(x), x) v(x)$. Отсюда согласно условию 2° следует, что

$$(\mathbf{D}\mathbf{h}(u, v), v) = \int_B g'_u(u(x), x) v^2(x) dx \geqslant 2\lambda (v, v).$$

Так как (см. п. 6.3) оператор Немыцкого является потенциальным, то из последнего неравенства и условия 1° согласно теореме 10.4 следует, что уравнение (24.4) имеет решение. Теорема доказана.

24.3. Системы с ограниченными ядрами. В настоящем пункте мы рассмотрим систему (24.1) в предположении, что каждое ядро $K_i(x, y)$ является ограниченным. В этом случае интегральный оператор

$$\mathbf{A}_i u_i = \int_B K_i(x, y) u_i(y) dy \tag{24.7}$$

действует из пространства L в пространство ограниченных функций, и, как покажем, если $\mathbf{A}_i$ является еще дефинитным или квазидефинитным, главный квадратный корень из $\mathbf{A}_i$ действует из L^2 в пространство ограниченных измеримых функций.

Лемма 24.1 [1]). *Если симметричное квазидефинитное (или дефинитное) ядро $K_i(x, y)$ ограничено, то для главного квадратного корня $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ из оператора*

$$\mathbf{A}_i u_i = \int_B K_i(x, y) u_i(y) dy, \tag{24.7}$$

---

[1]) См. [14, б], стр. 135 и [9, г], лемма 7.

где B — измеримое множество конечной меры s-мерного евклидова пространства, имеет место неравенство

$$\left| \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i \right| \leqslant M_i \| u_i \|, \tag{24.8}$$

где $u_i \in L^2$, а M_i^2 есть существенная верхняя грань ядра $N_i(x, y)$ абсолютного значения оператора $\mathbf{A}_i$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что ядро $K_i(x, y)$ является квазиположительным, т. е. что все его характеристические числа, за исключением конечного числа, положительны. Согласно условию можно написать

$$N_i(x, y) = K_i(x, y) + 2 \sum_{(\nu)}' \frac{\varphi_{i\nu}(x)\, \varphi_{i\nu}(y)}{|\lambda_{i\nu}|},$$

где $\sum'$ распространяется на те ν, для которых $\lambda_{i\nu} < 0$, а $\varphi_{i\nu}(x)$ — собственные функции ядра K_i, соответствующие числам $\lambda_{i\nu}$. Так как из ограниченности ядра $K_i(x, y)$ следует ограниченность собственных функций, то

$$2 \sum_{(\nu)}' |\lambda_{i\nu}^{-1}|\, \varphi_{i\nu}(x)\, \varphi_{i\nu}(y)$$

ограничена, а значит,

$$\operatorname{vrai\,sup} N_i(x, y) = M_i^2 < +\infty,$$

так как ядро $N_i(x, y)$ является положительным. Напишем спектральное разложение (в пространстве L^2) главного корня квадратного из оператора $\mathbf{A}_i$

$$\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{i\nu}, u_i)}{\sqrt{|\lambda_{i\nu}|}} \operatorname{sign} \lambda_{i\nu} \varphi_{i\nu}(x).$$

Применяя неравенство Коши, получим

$$\left| \int_{\sigma} \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i \, dx \right| = \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{i\nu}, u_i)}{\sqrt{|\lambda_{i\nu}|}} \operatorname{sign} \lambda_{i\nu} \int_{\sigma} \varphi_{i\nu}(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} (\varphi_{i\nu}, u_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{i\nu}|} \left(\int_{\sigma} \varphi_{i\nu}(x)\, dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{i\nu}|} \left(\int_{\sigma} \varphi_{i\nu}(x)\, dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| u_i \|,$$

где σ — какое-нибудь измеримое подмножество множества B. Далее, согласно теореме разложения ([62], стр 262), которая в данном случае имеет место, мы можем написать:

$$\int_B \int_B N_i(x, y) h(x) h(y)\, dx\, dy = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{i\nu}|} \left(\int_B \varphi_{i\nu}(x) h(x)\, dx \right)^2.$$

Полагая

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \overline{\in} \sigma, \\ 1 & \text{при } x \in \sigma, \end{cases}$$

получим

$$\int_\sigma \int_\sigma N_i(x, y)\, dx\, dy = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{i\nu}|} \left(\int_\sigma \varphi_{i\nu}(x)\, dx \right)^2.$$

Отсюда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_{i\nu}|} \left(\int_\sigma \varphi_{i\nu}(x)\, dx \right)^2 = \int_\sigma \int_\sigma N_i(x, y)\, dx\, dy \leqslant M_i^2 (\operatorname{mes} \sigma)^2.$$

Сопоставляя последнее неравенство с предыдущим, находим

$$\left| \int_\sigma \mathrm{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i\, dx \right| \leqslant M_i \| u_i \| \operatorname{mes} \sigma$$

или

$$\left| \frac{1}{\operatorname{mes} \sigma} \int_\sigma \mathrm{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i\, dx \right| \leqslant M_i \| u_i \|. \tag{24.9}$$

Отсюда вытекает, что $\left| \mathrm{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i \right| \leqslant M_i \| u_i \|$ почти всюду в B, ибо если допустить, что на некотором множестве σ положительной меры $\mathrm{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i < -M_i \| u_i \|$ или $\mathrm{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i > M_i \| u_i \|$, то это будет противоречить неравенству (24.9). Лемма доказана.

Теорема 24.6 [1]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Каждое ядро $K_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ симметрично, положительно и существенно ограничено на про-*

---

[1]) Ср. [9, и], теорема 4.

изведении $(B \times B)$, *где* B — *измеримое множество конечной меры* s-*мерного евклидова пространства.*

2°.

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \quad (21.1)$$

и

$$2G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) |u_i|^\alpha + c(x),$$

где $0 \leqslant a_i < \lambda_{i1}$ (λ_{i1} — *наименьшее характеристическое число ядра* $K_i(x, y)$), $0 < \alpha < 2$, $0 \leqslant b_i(x) \in L^\gamma$, $\gamma = \frac{2}{2-\alpha}$, $0 \leqslant c(x) \in L$.

3°. *Для* $|u_k| \leqslant r$

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_{ir}(x) \in L^q, \quad (24.10)$$

где $1 < q < 2$.

Тогда система (24.1) *имеет по крайней мере одно ограниченное решение.*

Доказательство. Рассмотрим интегральные операторы (24.7), которые действуют из пространства L в пространство ограниченных функций, и так же, как при доказательстве теоремы 24.1, построим в пространстве вектор-функций $L_{2,n}$ функционал $\varphi(u) = (u, u) - 2f\left(\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u\right)$.

Функционал $\varphi(u)$ определен в пространстве $L_{2,n}$, ибо согласно равенству (21.1) (см. § 21) мы имеем

$$f\left(\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u\right) = \int_B dx \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 g_i\left(t\mathrm{A}_1^{\frac{1}{2}} u_1, t\mathrm{A}_2^{\frac{1}{2}} u_2, \ldots, t\mathrm{A}_n^{\frac{1}{2}} u_n, x\right) \mathrm{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i \, dt,$$

где по лемме 24.1 $\mathrm{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i$ — ограниченная функция для всякой функции $u_i(x) \in L^2$. Согласно неравенству (24.10) для таких $\mathrm{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i$ функция $g_i\left(t\mathrm{A}_1^{\frac{1}{2}} u_1, t\mathrm{A}_2^{\frac{1}{2}} u_2, \ldots, t\mathrm{A}_n^{\frac{1}{2}} u_n, x\right)$ мажорируется функцией из пространства L^q. Для данного функционала, как мы видели при доказательстве теоремы 24.1, справедливо неравенство

$$\varphi(u) \geqslant (u, u)^{\frac{\alpha}{2}} \left[a_0 (u, u)^{\frac{2-\alpha}{2}} - \beta\right] - C,$$

из которого следует, что на некоторой сфере $\|u\|=R$ пространства $L_{2,n}$ $\varphi(u)>\varphi(\theta)$. Ввиду этого мы будем рассматривать функционал $\varphi(u)$ в шаре $\|u\|\leqslant R$, который обозначим через D. Когда $u\in D$, то и $\|u_i\|\leqslant R$, а потому согласно лемме 24.1 $\left|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i\right|\leqslant M_iR$. Отсюда вытекает, что достаточно рассматривать функции $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ для тех u_k, для которых $|u_k|\leqslant MR$, где $M=\max(M_1, \ldots, M_n)$. Для таких u_k согласно неравенству (24.10) $|g_i|\leqslant a_{iMR}(x)\in L^q$, поэтому для тех u_k, для которых $|u_k|>MR$, мы можем продолжить функции $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ так, чтобы согласно теореме 19.2 оператор Немыцкого $\mathbf{h}=(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$, где $\mathbf{h}_iu=g_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)$, действовал непрерывно из пространства функций $L_{p,n}(p^{-1}+q^{-1}=1)$ в пространство $L_{q,n}$. Отсюда согласно теореме 23.8 следует, что

$$\operatorname{grad} f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right)=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u$$

задан в $L_{2,n}$ и действует вполне непрерывно. Действительно, оператор $\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}$ согласно лемме 24.1 действует из $L_{2,n}$ в пространство ограниченных вектор-функций $L_{\infty,n}$, а потому оператор $\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ согласно предыдущему действует из $L_{2,n}$ в $L_{q,n}$. Но согласно теореме 23.7 оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ действует вполне непрерывно из пространства $L_{q,n}$ в пространство $L_{2,n}$, ибо оператор $\mathbf{A}$ действует вполне непрерывно из $L_{q,n}$ в $L_{p,n}(p^{-1}+q^{-1}=1)$ при любом $p>2$ ($K_i(x, y)$ — ограниченные ядра), откуда следует, что $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ действует вполне непрерывно в $L_{2,n}$.

Поступая теперь так же, как при доказательстве теоремы 24.1, мы найдем $u_0=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_0$, где u_0 — вектор из $L_{2,n}$. Применяя к обеим частям последнего равенства оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ и полагая $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_0=z_0$, получим

$$z_0=\mathbf{A}\mathbf{h}z_0,$$

где согласно лемме 24.1 $z_0 = \mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u_0$ есть ограниченная вектор-функция. Теорема доказана.

Отметим, что данная теорема сохраняется для уравнения (24.2), если выполнено условие $0 < \lambda < 1$.

Теорема 24.7. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Каждое ядро $K_i(x, y)$ квазиотрицательно или отрицательно и ограничено в существенном на топологическом произведении $B \times B$, где B — измеримое множество конечной меры s-мерного евклидова пространства.*

2°.

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \quad (21.1)$$

и

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) |u_i|^{\alpha} + c(x), \quad (24.5)$$

где $a_i = \lambda_{i1}^{-1}$ (λ_{i1} — наибольшее положительное характеристическое число ядра $K_i(x, y)$) ($a_i = 0$, если K_i не имеет[1]) положительных характеристических чисел), $0 < \alpha < 2$, $0 \leqslant b_i(x) \in L^{\gamma}$, $\gamma = \frac{2}{2-\alpha}$, $0 \leqslant c(x) \in L$.

3°. *Для $u_k \in [-r, +r]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ выполняется неравенство*

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_{ir}(x) \in L^q, \quad (24.10)$$

где $1 < q < 2$.

Тогда система (24.1) *имеет по крайней мере одно ограниченное решение.*

Доказательство данной теоремы во многом повторяет доказательство теорем 24.4 и 24.6.

Рассмотрим функционал $\varphi(u) = 2f\left(\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u\right) - ((u))^2$, где $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$ — главный корень квадратный из оператора $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$ и A_i определяется равенством (24.7), а $((u))^2$ — функционал, рассмотренный при доказательстве теоремы 24.4. Так же, как при доказательстве теоремы 24.6, мы находим,

[1]) Мы предполагаем, что хотя бы одно из ядер $K_i(x, y)$ имеет положительные характеристические числа.

что функционал $\varphi(u)$ определен в $L_{2,n}$ и удовлетворяет неравенству, которое было установлено при доказательстве теоремы 24.4:

$$\varphi(u) \geqslant (u, u)^{\frac{\alpha}{2}} \left[(u, u)^{\frac{2-\alpha}{2}} - 2 \left(\sum_{i=1}^{n} r_i \mu_{i1}^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \right] + 2 \int_B c(x)\, dx.$$

Из данного неравенства следует, что в пространстве $L_{2,n}$ существует сфера $(u, u) = R^2$, на которой $\varphi(u) > \varphi(0)$. Ввиду этого достаточно рассматривать функционал $\varphi(u)$ в шаре $D(\|u\| \leqslant R)$.

Рассуждая теперь так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, мы найдем, что оператор Немыцкого $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$ действует непрерывно из $L_{p,n}$ в $L_{q,n}$ и что $\operatorname{grad} f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$ действует вполне непрерывно в пространстве $L_{2,n}$. Поступая теперь так же, как при доказательстве теоремы 24.4, мы найдем, что $z_0 = \mathbf{A}\mathbf{h}\, z_0$, где $z_0 = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_0$ и $u_0 \in L_{2,n}$.

Согласно лемме 24.1 z_0 — ограниченная вектор-функция, т. е. $z_0 \in L_{\infty,n}$. Теорема доказана.

Отметим, что данная теорема сохраняется для уравнения (24.2), если $\lambda > 1$. Отметим еще, что утверждение данной теоремы остается справедливым, если ядра $K_i(x, y)$ являются положительными или квазиположительными, а в правой части неравенства (24.5) стоит знак минус. При этом λ_{i1} — абсолютное значение наименьшего отрицательного характеристического числа.

§ 25. Собственные функции нелинейных интегральных операторов

§ 25.1. Операторы Гаммерштейна с позитивными ядрами. В настоящем пункте мы будем рассматривать операторы Гаммерштейна:

$$\mathbf{\Gamma} = (\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2, \ldots, \mathbf{\Gamma}_n),$$

где

$$\mathbf{\Gamma}_i u = \int_B K_i(x, y)\, g_i(u_1(y), u_2(y), \ldots, u_n(y), y)\, dy,$$

которые действуют в пространстве вектор-функций $L_{p,n}(B)$,

$p \geqslant 2$, B — измеримое множество конечной меры[1]) s-мерного евклидова пространства.

Мы будем предполагать, что выполнены следующие условия:

(α_1) *Линейный интегральный оператор* $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$, *где*

$$\mathbf{A}_i u_i = \int_B K_i(x, y) u_i(y) dy, \tag{25.1}$$

действует вполне непрерывно из $L_{q,n}$ *в* $L_{p,n}$ ($p \geqslant 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$), *отличен от нулевого оператора и является позитивным в* $L_{2,n}$, *т. е. каждый оператор* $\mathbf{A}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) *является самосопряженным в* L^2 *и все его характеристические числа* $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots$ *положительны.*

(α_2) (H)-*функции* (см. определение 18.2) g_i *являются частными производными некоторой функции* G, *т. е.*

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \tag{25.2}$$

и

$$g_i(0, 0, \ldots, 0, x) \equiv 0.$$

$$(\alpha_3) \quad |g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) + b \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{p-1}, \tag{25.3}$$

где $a_i(x) \in L^q$, $b \geqslant 0$.

Последнее условие обеспечивает непрерывность оператора Немыцкого (см. теорему 19.2) $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$, где $\mathbf{h}_i u = g_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)$, из $L_{p,n}$ в $L_{q,n}$, а равенство (25.2) обеспечивает потенциальность этого оператора (см. теорему 21.1). Разумеется, в случае $n = 1$ равенство (25.2) не является дополнительным ограничением. Отметим еще, что оператор $\mathbf{\Gamma}$ есть произведение двух операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{h}$:

$$\mathbf{\Gamma} u = \mathbf{A}\mathbf{h} u = (\mathbf{A}_1\mathbf{h}_1 u, \mathbf{A}_2\mathbf{h}_2 u, \ldots, \mathbf{A}_n\mathbf{h}_n u).$$

Теорема 25.1[2]). *Пусть выполнены условия* (α_1) — (α_3), *причем*

$$\operatorname{sign} g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \operatorname{sign} u_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{25.4}$$

Тогда, какова бы ни была сфера $\|u\| = c$ *пространства* $L_{2,n}$, *на ней найдется по меньшей мере один*

[1]) Ниже будет отмечено, что при одном дополнительном условии можно отказаться от требования, чтобы $\operatorname{mes} B < \infty$.

[2]) См. [9, у], теорема 3.2 и [9, ц].

элемент u_c, *такой, что* $z_c = \mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u_c$, *где* $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$ — *положительный корень квадратный из оператора* A, *есть собственная функция оператора* $\Gamma u = \mathrm{A}\mathbf{h}u = (\mathrm{A}_1\mathbf{h}_1 u,\ \mathrm{A}_2\mathbf{h}_2 u,\ \ldots,\ \mathrm{A}_n\mathbf{h}_n u)$, *принадлежащая пространству* $L_{p,n}$ *и соответствующая положительному собственному значению* μ_c, *представимому в виде* $\mu_c = c^{-2}(\mathbf{h}z_c,\ z_c)$.

Доказательство. Рассмотрим два функционала:

$$f(u) = \int\limits_B G(u_1(y),\ u_2(y),\ \ldots,\ u_n(y),\ y)\,dy,$$

согласно теореме 21.1 удовлетворяющий условию Липшица в любом шаре пространства $L_{p,n}$ и такой, что $\operatorname{grad} f(u) = \mathbf{h}u$, и

$$\varphi(u) = f\left(\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u\right),$$

где $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный из оператора A в пространстве $L_{2,n}$. Согласно теореме 23.7 оператор $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$ действует вполне непрерывно из $L_{2,n}$ в $L_{p,n}$. По теореме 23.8 $\Phi(u) = \operatorname{grad} f\left(\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u\right) = \mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u$ есть усиленно непрерывный оператор в $L_{2,n}$. Данный оператор является позитивным на пространстве $H_1 = L_{2,n} \dot{-} H_0$, где H_0 — пространство нулей оператора A, ибо согласно равенству (25.4)

$$(\Phi(u),\ u) = \left(\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u,\ u\right) = \left(\mathbf{h}\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u,\ \mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(g_i\left(\mathrm{A}_1^{\frac{1}{2}} u_1,\ \mathrm{A}_2^{\frac{1}{2}} u_2,\ \ldots,\ \mathrm{A}_n^{\frac{1}{2}} u_n,\ x\right),\ \mathrm{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i\right) > 0,$$

если $\|u\| > 0$. Отсюда согласно теореме 15.1 или согласно замечанию в конце пункта 15.3 существуют в H_1 собственные векторы оператора Φ с любой нормой, отвечающие положительным собственным значениям, т. е. при любом $c > 0$ будет

$$\mu_c u_c = \mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u_c, \tag{25.5}$$

где $u_c \in H_1$ и $\|u_c\| = c$. Из данного равенства имеем

$$\mu_c(u_c,\ u_c) = \left(\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u_c,\ u_c\right) = \left(\mathbf{h}\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u_c,\ \mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u_c\right).$$

Полагая $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_c = z_c$, имеем $\mu_c = c^{-2}(\mathbf{h}z_c, z_c)$. Применяя к обеим частям равенства (25.5) оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ и учитывая, что $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_c = z_c$, получим $\mu_c z_c = \mathbf{A}\mathbf{h}z_c$. Теорема доказана.

Отметим, что из доказанной теоремы по соображениям п. 15.3 следует существование континуума собственных функций оператора $\mathbf{\Gamma}$, отвечающих положительным собственным значениям.

Теорема 25.2. *Если выполнены условия* (α_1)—(α_3), *то, каково бы ни было положительное число* a, *существует континуум собственных функций оператора* $\mathbf{\Gamma}u = (\mathbf{A}_1\mathbf{h}_1 u, \mathbf{A}_2\mathbf{h}_2 u, \ldots, \mathbf{A}_n\mathbf{h}_n u)$, *принадлежащих пространству* $L_{p,n}$, *нормы которых в этом пространстве не превосходят числа* a.

Доказательство этой теоремы проводится так же, как доказательство предыдущей теоремы, но вместо теоремы 15.1 здесь нужно использовать теорему 15.3.

Теорема 25.3 [1]. *Пусть выполнены условия* (α_1)—(α_3), *причем*

$$\operatorname{sign} g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \operatorname{sign} u_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{25.4}$$

и

$$g_i(0, \ldots, 0, -u_i, -u_{i+1}, \ldots, -u_n, x) = \\ = -g_i(0, \ldots, 0, u_i, \ldots, u_n, x) \tag{25.6}$$

или

$$g_i(-u_1, -u_2, \ldots, -u_i, 0, \ldots, 0, x) = \\ = -g_i(u_1, u_2, \ldots, u_i, 0, \ldots, 0, x). \tag{25.7}$$

Тогда, какова бы ни была сфера $S_c(\|u\| = c)$ *пространства* $L_{2,n}$, *найдется сходящаяся к нулю последовательность попарно линейно независимых собственных функций оператора* $\mathbf{\Gamma}u = (\mathbf{A}_1\mathbf{h}_1 u, \mathbf{A}_2\mathbf{h}_2 u, \ldots, \mathbf{A}_n\mathbf{h}_n u)$, *представимых в виде* $z_{c_\nu} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_{c_\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, *где* $u_{c_\nu} \in S_c$ *и* $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — *положительный корень квадратный из оператора* $\mathbf{A}$, *и принадлежащих пространству* $L_{p,n}$. *Эти собственные функции соответствуют положительным собственным значе-*

---

[1]) См. [9, л], стр. 10 и [9, п], теорема 12.4.

ниям, представимым в виде $\mu_{c_\nu} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{h}z_{c_\nu}, z_{c_\nu})$ *и сходящимся к нулю.*

Доказательство. В случае $p=2$ теорема является непосредственным следствием теоремы 15.6. В общем случае мы рассматриваем функционал $\varphi(u) = f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right)$, который был нами использован при доказательстве теоремы 25.1 и который согласно теореме 23.8 имеет усиленно непрерывный градиент $\Phi(u) = \operatorname{grad} f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u$ в пространстве $L_{2,n}$. Для наших целей (см. п. 15.3) достаточно рассматривать функционал φ и его градиент Φ на подпространстве $H_1 = L_{2,n} \dot{-} H_0$, где H_0 — подпространство нулей оператора $\mathbf{A}$. В этом подпространстве из равенства $\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right\| = 0$ следует, что $\|u\| = 0$, а потому в нем для всякого ненулевого вектора u выполняется неравенство

$$(\Phi(u), u) = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u, u\right) = \left(\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u, \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_B \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i g_i\left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}}u_1, \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}}u_2, \ldots, \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}}u_n, x\right)dx > 0,$$

ибо функции g_i удовлетворяют условию (25.4). Таким образом, усиленно непрерывный градиент является позитивным в подпространстве H_1. Далее, исходя из тождества

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) - G(0, \ldots, 0, x) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} [G(0, \ldots, 0, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_n, x) -$$
$$- G(0, \ldots, 0, u_{i+1}, \ldots, u_n, x)] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{u_i} \frac{\partial}{\partial z_i} G(0, \ldots, 0, z_i, u_{i+1}, \ldots, u_n, x)\,dz_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{u_i} g_i(0, \ldots, 0, z_i, u_{i+1}, \ldots, u_n, x)\,dz_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{1} u_i g_i(0, \ldots, 0, tu_i, u_{i+1}, \ldots, u_n, x)\,dt,$$

в котором можно положить $G(0, \ldots, 0, x) = 0$, ибо функция G определяется по функциям g_i с точностью до постоянного слагаемого, мы согласно равенству (25.6) приходим к выводу, что функционал

$$f(u) = \int_B G(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)\,dx$$

является четным. Аналогично доказывается, что из равенства (25.7) также следует четность функционала f.

Таким образом, оператор $\mathbf{\Phi}(u) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u$ удовлетворяет всем условиям теоремы 15.5, откуда следует, что на всякой сфере $\|u\| = c$ подпространства H_1 существует слабо сходящаяся к нулю последовательность попарно линейно независимых собственных функций $\{u_{c_\nu}\}$ оператора $\mathbf{\Phi}$, т. е.

$$\mu_{c_\nu} u_{c_\nu}(x) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_{c_\nu}, \tag{25.8}$$

причем собственные значения μ_{c_ν} сходятся к нулю. Так как $u_{c_\nu} \in S_c$, то из равенства (25.8) следует

$$\mu_{c_\nu}(u_{c_\nu}, u_{c_\nu}) = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_{c_\nu}, u_{c_\nu}\right) = \left(\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_{c_\nu}, \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_{c_\nu}\right).$$

Полагая $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_{c_\nu} = z_{c_\nu}$ и учитывая, что $(u_{c_\nu}, u_{c_\nu}) = c^2$, мы находим $\mu_{c_\nu} = c^{-2}(\mathbf{h}z_{c_\nu}, z_{c_\nu})$.

Так как согласно теореме 23.2 (см. также доказательство следствия 23.1) оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ преобразует всякую слабо сходящуюся последовательность из $L_{2,n}$ в сильно сходящуюся последовательность пространства $L_{p,n}$, то из слабой сходимости к нулю последовательности $\{u_{c_\nu}\}$ следует, что последовательность $\{z_{c_\nu}\}$ сходится сильно к нулю пространства $L_{p,n}$. Применяя теперь оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ к обеим частям равенства (25.8) и учитывая, что $z_{c_\nu} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_{c_\nu}$, получим $\mu_{c_\nu} z_{c_\nu} = \mathbf{A}\mathbf{h}z_{c_\nu}$.

Доказательство того, что эти собственные функции z_{c_ν} (мы здесь не различаем z_{c_ν} и $-z_{c_\nu}$, т. е. считаем две такие функции за одну) попарно линейно независимы, проводится так же, как при доказательстве теоремы 15.6. Теорема доказана [1]).

Замечание 25.1. Отметим, что из доказанной теоремы 25.3 следует, что точка $\mu=0$ является точкой бифуркации оператора $\mathbf{\Gamma}$, если выполнены условия теоремы.

Отметим еще, что в теореме 25.3 утверждается существование континуума собственных функций оператора $\mathbf{\Gamma}=\mathbf{Ah}$, ибо каждая функция последовательности $\{z_{c_\nu}\}$ не совпадает ни с какой из функций последовательности $\{z_{c'_\nu}\}$, если $c\neq c'$. Это было нами выяснено в п. 15.3 после доказательства теоремы 15.1.

25.2. Операторы Гаммерштейна с квазидефинитными ядрами. В настоящем пункте мы будем предполагать, что выполняются следующие условия:

(β_1) *Линейный интегральный оператор* $\mathbf{A}=(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$, *где*

$$\mathbf{A}_i u_i = \int\limits_B K_i(x, y)\, u_i(y)\, dy, \tag{25.1}$$

является квазиотрицательным и действует вполне непрерывно как в $L_{2,n}$, *так и из* $L_{q,n}$ *в* $L_{p,n}$ $(p\geqslant 2,\ p^{-1}+q^{-1}=1)$. Мы здесь не предполагаем, что $\operatorname{mes} B<\infty$.

(β_2) *(H)-функции* [2]) g_i *являются частными производными функции* G, *т. е.*

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)=\frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x), \tag{25.2}$$

и

$$g_i(0, \ldots, 0, x)\equiv 0.$$

Данное условие (β_2) совпадает с условием (α_2) предыдущего пункта.

(β_3) *Оператор Немыцкого* $\mathbf{h}=(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$, *где* $\mathbf{h}_i u = g_i(u_1(x), \ldots, u_n(x), x)$, *есть непрерывный оператор из* $L_{p,n}$ *в* $L_{q,n}$ $(p\geqslant 2,\ p^{-1}+q^{-1}=1)$ (см. § 19).

---

[1]) Если оператор $\mathbf{A}$ действует вполне непрерывно и в $L_{2,n}$, то в теоремах 25.1—25.3 не нужно предполагать, что $\operatorname{mes} B<+\infty$.

[2]) См. определение 18.2.

Отметим, что если симметричные ядра K_i удовлетворяют неравенствам

$$\int\limits_B \int\limits_B K_i^2(x, y)\,dx\,dy < \infty, \quad \int\limits_B \int\limits_B |K_i(x, y)|^p\,dx\,dy < \infty$$

(если $\operatorname{mes} B < \infty$, то из второго неравенства следует первое, а если $\operatorname{mes} B = +\infty$, то эти неравенства независимы) и число положительных характеристических чисел этих ядер конечно, то оператор $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$ удовлетворяет условию (β_1).

Теорема 25.4. *Пусть выполнены условия* (β_1)—(β_3), *причем*

$$\lim_{\|u\|_2 \to \infty} f(u) = \lim_{\|u\|_2 \to \infty} \int\limits_B G(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)\,dx = +\infty, \tag{25.9}$$

где $\|u\|_2$ — *норма функции* $u(x)$ *в* $L_{2,n}$. *Тогда, каково бы ни было число* α, *оператор* $\mathbf{\Gamma} u = \mathbf{A}\mathbf{h}u = (\mathbf{A}_1\mathbf{h}_1 u, \mathbf{A}_2\mathbf{h}_2 u, \ldots, \mathbf{A}_n\mathbf{h}_n u)$ *имеет континуум собственных вектор-функций* z, *принадлежащих пространству* $L_{p,n}$ *и представимых как в виде* $z = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$, *так и в виде* $z = \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u$ $\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right.$ — *главный квадратный корень в* $L_{2,n}$ *из оператора* $\mathbf{A}$, *а* $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$ — *положительный квадратный корень в* $L_{2,n}$ *из абсолютного значения оператора* $\left.\mathbf{A}\right)$, *нормы которых в* $L_{2,n}$ *больше* α.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $L_{2,n}$ гиперболоиды $\mathbf{\Gamma}_c$ и коническую область V_0, порожденные оператором $\mathbf{A}$ (см. п. 11.4). Затем рассмотрим функционалы

$$f(u) = \int\limits_B G(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)\,dx$$

и

$$\varphi(u) = f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right).$$

По теореме 23.8 оператор $\mathbf{\Phi}(u) = \operatorname{grad} \varphi(u) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$ является усиленно непрерывным в пространстве $L_{2,n}$, откуда согласно теоремам 1.2 и 8.2 следует слабая непрерывность $\varphi(u)$. Так как согласно лемме 11.3 $\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right\| \to \infty$, когда

$u \in V_0$ и $\|u\|_2 \to \infty$, то из условия (25.9) следует, что в конической области V_0, а значит, и во всякой гиперболической области V_c,

$$\lim_{\|u\|_2 \to \infty} \varphi(u) = +\infty.$$

Таким образом, функционал $\varphi(u)$ удовлетворяет тем же условиям, что и функционал $\varphi(x)$, рассмотренный при доказательстве теоремы 16.2. Следовательно, при $p=2$ доказываемая теорема следует из теоремы 16.2, а при $p>2$ дальнейшее доказательство сходно с доказательством теоремы 16.2.

Рассмотрим произвольный гиперболоид $\mathbf{\Gamma}_c$, порожденный операторами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$. Если мы допустим, что функционал $\varphi(u)$ имеет условно критические точки относительно произвольного гиперболоида Γ_c, то по теореме 12.3 уравнение

$$\operatorname{grad} \varphi(u) = \mu(\mathbf{P}_1 u - \mathbf{P}_2 u) \equiv \mu \mathbf{W} u \tag{25.10}$$

имеет решения, принадлежащие этому гиперболоиду Γ_c, а значит, каково бы ни было c, уравнение (25.10) имеет континуум решений, нормы которых больше c. Если же допустить, что функционал $\varphi(u)$ не имеет условно критических точек относительно некоторого гиперболоида Γ_c, то по теореме 13.13 уравнение 25.10 имеет континуум решений, нормы которых больше числа c.

Так как согласно предыдущему $\operatorname{grad}\varphi(u) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u$, то уравнение (25.10) принимает вид

$$\mu \mathbf{W} u = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u, \tag{25.10'}$$

причем согласно только что доказанному, каково бы ни было число $c>0$, оно имеет континуум решений, принадлежащих гиперболической области V_c и нормы которых в $L_{2,n}$ больше c. Раз эти решения принадлежат V_c, то по лемме 11.3 для этих решений имеем

$$\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right\| \geqslant \left[\frac{m}{2}(c^2 + \|u\|^2)\right]^{\frac{1}{2}} \geqslant c\sqrt{m},$$

где m^{-1} — наибольшее из положительных характеристических чисел ядер $K_i(x, y)$. Следовательно, эти решения принадлежат пространству $H_1 = L_{2,n} \dot{-} H_0$, где H_0 — подпространство нулей оператора $\mathbf{A}$. Раз решения уравнения (25.10′) принадлежат подпространству H_1, то разность двух решений u_1 и u_2 также принадлежит H_1, а потому $\left\| \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} (u_2 - u_1) \right\| > 0$, т. е. $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_1 \neq \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_2$. Применив к обеим частям равенства (25.10′) оператор $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$, мы согласно равенствам (16.9) получим $\mu \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u = \mathbf{A}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$ или, полагая $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u = z$, $\mu z = \mathbf{A}\mathbf{h} z$, где согласно предыдущему $\|z\| = \left\| \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u \right\| \geqslant c\sqrt{m}$. Так как c — произвольное положительное число, то оператор $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{\Gamma}$ имеет континуум собственных вектор-функций z, представимых в виде $z = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$ и нормы которых в пространстве $L_{2,n}$ больше произвольного положительного числа. При этом согласно теореме 23.7 $z = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u \in L_{p,n}$.

К такому же выводу мы придем, если вместо функционала $\varphi(u)$ рассмотреть функционал $\psi(u) = f\left(\mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u\right)$. При этом каждая функция z из континуума собственных вектор-функций оператора $\mathbf{\Gamma}$, нормы которых больше произвольного числа, представима в виде $z = \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u$, где $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный в пространстве $L_{2,n}$ из абсолютного значения оператора $\mathbf{A}$. Теорема доказана.

Отметим, что из равенства (25.10) следует

$$\mu\,((u))^2 = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u,\ u\right) = \left(\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right) = (\mathbf{h}z,\ z),$$

т. е. каждая собственная вектор-функция $z = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$ или $z = \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u$ оператора $\mathbf{A}\mathbf{h}$ соответствует собственному числу μ, представимому в виде

$$\mu = ((u))^{-2} (\mathbf{h}z,\ z). \tag{25.11}$$

Замечание 25.2. Если $\operatorname{mes} B < +\infty$, то при выполнении условий теоремы 25.4 можно утверждать, что, каково бы ни было число α, существует континуум собственных вектор-функций, нормы которых в пространстве $L_{p,\,n}$ больше числа α.

Действительно, так как при $p \geqslant 2$

$$\int\limits_B \left(\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i\right)^2 dx \leqslant \left(\int\limits_B \left|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i\right|^p dx\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int\limits_B dx\right)^{\frac{p-2}{p}},$$

то

$$\left\|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i\right\|_p \geqslant (\operatorname{mes} B)^{\frac{2-p}{2p}} \left\|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i\right\|_2.$$

Значки внизу у нормы указывают, что нормы берутся соответственно в пространствах L^p и L^2. Используя теперь неравенство Гельдера:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant n^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

напишем

$$\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i\right\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant n^{-\frac{1}{q}} \sum_{i=1}^{n} \left\|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i\right\|_p.$$

Отсюда и из предыдущего имеем

$$\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right\|_p \geqslant n^{-\frac{1}{q}} (\operatorname{mes} B)^{\frac{2-p}{2p}} \sum_{i=1}^{n} \left\|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i\right\|_2$$

или согласно неравенству Минковского

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

имеем окончательно

$$\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right\|_p \geqslant n^{-\frac{1}{q}} (\operatorname{mes} B)^{\frac{2-p}{2p}} \left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right\|_2. \tag{25.12}$$

Полученное неравенство показывает, что если нормы в пространстве $L_{2,\,n}$ собственных вектор-функций $z = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$ оператора $\mathbf{Ah}$ больше произвольного числа, то их нормы и в пространстве $L_{p,\,n}$ больше произвольного числа. Отметим еще, что из неравенства (25.12) следует, что в теореме 25.4 можно считать, что равенство (25.9) выполняется, когда $\|u\|_p \to \infty$.

Замечание 25.3. Отметим, что для выполнения условия (25.9) достаточно, чтобы (ср. с неравенством (24.5))

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \geqslant a \sum_{(i)} u_i^2 + \sum_{(i)} b_i(x) |u_i|^\alpha + c(x), \quad (25.13)$$

где

$$a > 0, \ 0 < \alpha < 2, \ 0 \geqslant b_i(x) \in L^\gamma, \ \gamma = \frac{2}{2-\alpha}, \quad 0 \leqslant c(x) \in L.$$

Действительно, используя оценки, полученные при доказательстве теоремы 24.1, мы из этого неравенства найдем

$$f(u) \geqslant (u, u)^{\frac{\alpha}{2}} \left[a(u, u)^{\frac{2-\alpha}{2}} - \left(\sum_i r_i \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \right] - \int_B |c(x)| \, dx,$$

т. е. $f(u) \to +\infty$, если $(u, u) \to \infty$. Далее, как видно из доказательства теоремы 24.4, достаточно, чтобы в неравенстве (25.13) $\sum\limits_{(i)}$ распространялась лишь на те i, для которых $\mathbf{A}_i$ имеет положительные характеристические числа. Отметим еще, что для выполнения условия (25.9) достаточно, чтобы

$$u_i g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) \geqslant a_i u_i^2 + b_i(x) |u_i|^\alpha, \quad (25.14)$$

где

$$a_i > 0, \ 0 < \alpha < 2, \ 0 \geqslant b_i(x) \in L^\gamma, \ \gamma = \frac{2}{2-\alpha}, \ 0 \geqslant c_i(x) \in L.$$

Действительно, полагая в формуле (5.6) $f_0 = 0$, мы получим (ср. с выводом формулы (21.2)):

$$f(u) = \int_0^1 (\mathbf{h} tu, u) \, dt =$$

$$= \int_0^1 dt \sum_{i=1}^n \int_B g_i(tu_1(x), tu_2(x), \ldots, tu_n(x), x) \, u_i(x) \, dx =$$

$$= \int_B dx \sum_{i=1}^n \int_0^1 g_i(tu_1(x), tu_2(x), \ldots, tu_n(x), x) \, u_i(x) \, dt.$$

Отсюда и из условия (25.14) имеем

$$f(u) \geqslant \int_B dx \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n (a_i t u_i^2 + t^{\alpha-1} b_i(x) \,|\, u_i(x)\,|^\alpha + c_i(x)) \right] dt =$$

$$= \int_B \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{2} u_i^2(x) + \frac{1}{\alpha} b_i(x) \,|\, u_i(x)\,|^\alpha + c_i(x) \right) dx.$$

Оценивая подинтегральную сумму так же, как и раньше, и полагая $a = \frac{1}{2} \min\limits_{(i)} a_i$, получим

$$f(u) \geqslant (u,\ u)^{\frac{\alpha}{2}} \left[a\,(u,\ u)^{\frac{2-\alpha}{2}} - \frac{1}{1+\alpha} \left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \right] -$$
$$- \sum_{i=1}^n \int_B |\, c_i(x)\,|\, dx,$$

т. е. $f(u) \to +\infty$, если $(u,\ u) \to +\infty$.

И здесь, как видно из доказательства теоремы 24.4, достаточно, чтобы неравенство

$$u_i g_i(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ x) \geqslant a_i u_i^2 + b_i(x) \,|\, u_i\,|^\alpha$$

имело место лишь для тех i, для которых оператор $\mathbf{A}_i$ имеет положительные характеристические числа.

Теорема 25.5. *Пусть выполнены условия* (β_1)—(β_3), *причем если* $\|u\|_2 > 0$, *то*

$$(\beta_4) \qquad \sum_{i=1}^n \int_B u_i(x)\, g_i(u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ x)\, dx > 0.$$

Тогда найдется такое $r > 0$, *что, каков бы ни был гиперболоид* $\|u\| = c \leqslant r$, *порожденный оператором* $\mathbf{A}$, *существуют по крайней мере две собственные вектор-функции оператора* $\mathbf{Ah}$, *принадлежащие пространству* $L_{p,\,n}$ (*и* $L_{2,\,n}$) *и представимые в виде*

$$z_c^{(1)} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)}\ ;\ z_c^{(2)} = \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u_c^{(2)} \ (((u_c^{(1)})) = ((u_c^{(2)})) = c),$$

где $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — *главный корень квадратный в* $L_{2,n}$ *из оператора* $\mathbf{A}$, *а* $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$ — *положительный корень квадратный в* $L_{2,n}$ *из абсолютного значения оператора* $\mathbf{A}$.

Эти собственные функции соответственно отвечают положительным собственным значениям

$$\mu_c^{(i)} = c^{-2}(\mathbf{h}z_c^{(i)}, z_c^{(i)}) > 0 \quad (i = 1, 2).$$

Среди собственных функций $z_c^{(1)}$ (*и* $z_c^{(2)}$) *имеется континуум таких, нормы которых меньше произвольного положительного числа.*

Доказательство. При $p = 2$ сформулированная теорема следует из теоремы 16.3, а в случае $p \geqslant 2$ она доказывается примерно так же, как теорема 16.3. Рассмотрим коническую область V_0, порожденную оператором $\mathbf{A}$ (см. п. 11.4), и функционалы $f(u) = \int\limits_B G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)\,dx$, $\varphi(u) = f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right)$. По теореме 23.8 оператор $\Phi(u) = \operatorname{grad} \varphi(u) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$ является усиленно непрерывным в пространстве $L_{2,n}$, а потому в силу теорем 1.2 и 8.2 функционал $\varphi(u)$ слабо непрерывен. Далее, в области V_0

$$(\operatorname{grad} \varphi(u), u) = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u, u\right) = \left(\mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u, \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_B g_i\left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}} u_1, \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}} u_2, \ldots, \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}} u_n, x\right) A_i^{\frac{1}{2}} u_i \, dx > 0,$$

ибо по лемме 11.3, если $\|u\|_2 > 0$ и $u \in V_0$, то $\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right\|_2 > 0$, а значит, положительность этой суммы следует из условия (β_4) теоремы.

Таким образом, функционал $\varphi(u)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 13.6, а потому найдется такое $r > 0$, что на всяком гиперболоиде Γ_c, где $c \leqslant r$, существует по меньшей мере одна условно экстремальная точка $u_c^{(1)}$ функционала $\varphi(u)$ относительно Γ_c. Ввиду этого по теореме 12.3

найдется такое число $\mu_c^{(1)}$, что

$$\operatorname{grad} \varphi (u_c^{(1)}) = \mu_c^{(1)} (\mathbf{P}_1 u_c^{(1)} - \mathbf{P}_2 u_c^{(1)}) \equiv \mu_c^{(1)} \mathbf{W} u_c^{(1)}$$

или, так как $\operatorname{grad} \varphi (u) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$,

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)} = \mu_c^{(1)} \mathbf{W} u_c^{(1)}. \tag{25.10'}$$

Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$, мы в силу равенств (16.9) получим: $\mu_c^{(1)} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)}$, т. е. $z_c^{(1)} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)}$ есть собственная вектор-функция оператора $\mathbf{A}\mathbf{h}$, которая, как легко вывести из равенства (25.10′), соответствует собственному значению $\mu_c^{(1)} = c^{-2} (\mathbf{h} z_c^{(1)},\ z_c^{(1)})$.

Согласно условию теоремы $\mu_c^{(1)} > 0$, ибо $(\mathbf{h} z_c^{(1)},\ z_c^{(1)}) > 0$, если $\| z_c^{(1)} \| > 0$, а согласно лемме 11.3 имеем: $\| z_c^{(1)} \| = \left\| \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} x_c \right\| \geqslant c \sqrt{m}$ (m — наименьшее из положительных собственных значений операторов $\mathbf{A}_i$).

Для различных c, как мы видели при доказательстве предыдущей теоремы, $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)}$ различны, а значит, оператор $\mathbf{A}\mathbf{h}$ имеет континуум собственных вектор-функций. Далее (см. доказательство теорем 13.5 и 13.6), каково бы ни было $a > 0$, найдется такое $r\,(0 < r \leqslant a)$, что $\| u_c^{(1)} \| < r \leqslant a$, а так как $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — ограниченный оператор, то $\| z_c^{(1)} \| = \left\| \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)} \right\| \leqslant a \left\| \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right\|$. Ввиду этого среди собственных функций оператора $\mathbf{A}\mathbf{h}$ имеется континуум таких, нормы которых меньше произвольного положительного числа. К таким же результатам мы придем, исходя из рассмотрения функционала $\psi (u) = f \left(\mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u \right)$. При этом во всех предыдущих выкладках придется заменить $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ на $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$ и наоборот. Теорема доказана.

Отметим, что условие (β_4) выполняется, если $\operatorname{sign} u_i = \operatorname{sign} g_i (u_1, \ldots, u_n, x)$.

Теорема 25.6. *Пусть выполнены условия* $(\beta_1)-(\beta_3)$, *причем если* $\|u\|_2 > 0$,

$$(\beta_4)\quad \sum_{i=1}^{n} \int_B u_i(x)\, g_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)\,dx > 0,$$

$$\lim_{\|u\|_2\to\infty} \int_B G(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)\,dx = +\infty. \quad (25.9)$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

а) *Каков бы ни был гиперболоид* Γ_c, *порожденный оператором* $\mathbf{A}$, *существуют по крайней мере две собственные вектор-функции оператора* $\mathbf{Ah}$, *принадлежащие пространству* $L_{p,n}$ (*и* $L_{2,n}$) *и представимые в виде*

$$z_c^{(1)} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)},\quad z_c^{(2)} = \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u_c^{(2)}\quad (u_c^{(1)},\ u_c^{(2)} \in \Gamma_c),$$

где $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — *главный корень квадратный из оператора* $\mathbf{A}$, *а* $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$ — *положительный корень квадратный из абсолютного значения оператора* $\mathbf{A}$. *Эти собственные функции соответственно отвечают положительным собственным значениям, представимым в виде* $\mu_c^{(i)} = c^{-2}(\mathbf{h}z_c^{(i)}, z_c^{(i)}) > 0$.

б) *Среди собственных функций* $z_c^{(1)}$ (*и* $z_c^{(2)}$) *имеется континуум таких, нормы которых в пространстве* $L_{2,n}$ *больше произвольного числа, и континуум таких, нормы которых меньше произвольного положительного числа.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный гиперболоид Γ_c, порожденный оператором $\mathbf{A}$ (см. п. 11.4), и функционалы $\varphi(u) = f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right)$, $\psi(u) = f\left(\mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u\right)$, где

$$f(u) = \int_B G(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)\,dx.$$

В конической области V_0, как это было установлено для $\varphi(u)$ при доказательстве теоремы 25.4, будет

$$\lim_{\|u\|_2\to\infty} \varphi(u) = +\infty,\qquad \lim_{\|u\|_2\to\infty} \psi(u) = +\infty.$$

Поэтому если мы возьмем точку $u_0 \in \Gamma_c$, для которой $\|u_0\| = c$, то найдется сфера $S(\|u\| = R)$, на которой $\varphi(u) > \varphi(u_0)$ и $\psi(u) > \psi(u_0)$.

Рассмотрим теперь пересечение $V_c \cap D$, где D — шар $\|u\| \leqslant R$. Так как шар D в гильбертовом пространстве $L_{2,n}$ слабо компактен и слабо замкнут, а по лемме 11.1 область V_c слабо замкнута, то пересечение $V_c \cap D = \sigma_c$ слабо замкнуто и слабо компактно.

Далее, по теореме 23.8 операторы $\Phi(u) = \operatorname{grad} \varphi(u) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$ и $\Psi(u) = \operatorname{grad} \psi(u) = \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u$ усиленно непрерывны, так что согласно теоремам 1.2 и 8.2 функционалы $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ слабо непрерывны. Наконец, согласно условию (β_4)

$$(\operatorname{grad} \varphi(u),\ u) = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u,\ u\right) = \left(\mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_B g_i\left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}} u_1,\ \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}} u_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}} u_n,\ x\right) \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i \, dx > 0,$$

ибо по лемме 11.3 для всякого ненулевого вектора из V_0 $\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right\| > 0$. Точно так же находим, что $(\operatorname{grad} \psi(u),\ u) > 0$, если $\|u\|_2 > 0$. Таким образом, во внутренних точках σ_c $\|\operatorname{grad} \varphi(u)\| \cdot \|\operatorname{grad} \psi(u)\| > 0$, а потому $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ согласно теореме 13.3 достигают своих нижних граней на границе σ_c. Но на $S \cap V_c$ $\varphi(u) > \varphi(u_0)$ и $\psi(u) > \psi(u_0)$, а потому φ и ψ достигают своих граней на $\Gamma_c \cap (D \setminus S)$, так что согласно теореме 12.3 найдутся такие точки $u_c^{(1)},\ u_c^{(2)} \in \Gamma_c$, что

$$\operatorname{grad} \varphi(u_c^{(1)}) = \mu_c^{(1)} \mathbf{W} u_c^{(1)}; \quad \operatorname{grad} \psi(u_c^{(2)}) = \mu_c^{(2)} \mathbf{W} u_c^{(2)}$$

или

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)} = \mu_c^{(1)} \mathbf{W} u_c^{(1)}; \quad \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u_c^{(2)} = \mu_c^{(2)} \mathbf{W} u_c^{(2)}, \qquad (25.10')$$

где согласно лемме 11.3 $\|z_c^{(1)}\| \equiv \left\| \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)} \right\| > 0$ и $\|z_c^{(2)}\| \equiv \equiv \left\| \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u_c^{(2)} \right\| > 0$. Из равенства (25.10′) мы находим, что

$$\mu_c^{(1)}((u_c^{(1)}))^2 = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)},\ u_c^{(1)}\right) =$$

$$= \left(\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)},\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)}\right) = \left(\mathbf{h} z_c^{(1)},\ z_c^{(1)}\right) > 0$$

или $\mu_c^{(1)} = c^{-2}(\mathbf{h}z_c^{(1)},\ z_c^{(1)}) > 0$, ибо $((u_c^{(1)}))^2 = c^2$. Точно так же найдем

$$\mu_c^{(2)} = c^{-2}(\mathbf{h}z_c^{(2)},\ z_c^{(2)}) > 0.$$

Затем, из тех же равенств (25.10′) путем применения операторов $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$ и $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ соответственно согласно соотношениям (16.9) и (16.9′) находим

$$\mathbf{A}\mathbf{h}z_c^{(i)} = \mu_c^{(i)} z_c^{(i)} \quad (i = 1,\ 2).$$

Этим доказано утверждение а) теоремы. Утверждение б) теоремы следует из теорем 25.4 и 25.5.

25.3. Операторы Гаммерштейна с ограниченными ядрами. Здесь мы рассмотрим операторы Гаммерштейна $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}\mathbf{h} = (\mathbf{A}_1\mathbf{h}_1,\ \mathbf{A}_2\mathbf{h}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_n\mathbf{h}_n)$, где $\mathbf{A}_i u_i = \int\limits_B K_i(x,\ y) \times u_i(y)\,dy$, $\mathbf{h}_i u = g_i(u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ x)$, действующие в пространстве вектор-функций, в предположении, что каждое ядро $K_i(x,\ y)$ симметрично, положительно или квазиотрицательно и ограничено в существенном на топологическом произведении $B \times B$. При этом будем предполагать, что $\operatorname{mes} B < \infty$; последнее требование вызвано тем, что мы будем пользоваться леммой 24.1.

Требование квазиположительности ядер K_i путем изменения знака оператора $\mathbf{\Gamma}$ сводится к требованию квазиотрицательности этих ядер.

Из теорем 19.2, 25.1 и 25.4 видно, что в случае ограниченности ядер $K_i(x,\ y)$ функции $g_i(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ x)$ могут расти по $(u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n)$ как многочлены любой степени. Оказывается, что в случае ограниченных ядер имеют место более сильные утверждения, которые будут доказаны в настоящем пункте.

Теорема 25.7. *Если каждое ядро $K_i(x, y)$ симметрично, положительно и ограничено, а (H)-функции $g_i = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ удовлетворяют в некоторой окрестности* $(0, \ldots, 0)$ *неравенствам*

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) \in L^q \quad (1 < q < 2),$$

причем $g_i(0, \ldots, 0, x) = 0$, *то, каково бы ни было положительное число* α, *существует континуум собственных вектор-функций* $z(x) = (z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x))$ *оператора*

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{Ah} = (\mathbf{A}_1\mathbf{h}_1, \mathbf{A}_2\mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{A}_n\mathbf{h}_n),$$

где

$$\mathbf{A}_i u_i = \int\limits_B K_i(x, y) u_i(y) \, dy,$$

$$\mathbf{h}_i u = g_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x),$$

для которых $\operatorname{vrai\,sup} |z_i(x)| < \alpha$.

Доказательство. Пусть положительное число c_0 выбрано так, что для $u_k \in [-c_0, c_0]$ выполняется условие теоремы

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) \in L^q \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть M_i^2 — существенная верхняя грань ядра $K_i(x, y)$ и $M = \max\{M_1, \ldots, M_n\}$. Тогда согласно лемме 24.1 имеем

$$\operatorname{vrai\,sup} \left| \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i \right| \leqslant M_i \|u_i\| \leqslant M \|u\|,$$

где норма берется соответственно в L^2 и $L_{2,n}$, а $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный из оператора $\mathbf{A}$. Подберем теперь число $a > 0$ так, чтобы $Ma = c_0$; тогда в шаре $D(\|u\| \leqslant a)$ пространства $L_{2,n}$ будем иметь

$$\left| g_i\left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}} u_1, \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}} u_2, \ldots, \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}} u_n, x\right) \right| \leqslant a_i(x) \in L^q.$$

Для дальнейшего будем применять оператор Немыцкого $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$ к оператору $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, а последний мы будем рассматривать в шаре D. В силу последнего неравенства мы можем продолжить функции $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ для $u_k \overline{\in} [-c_0, c_0]$ так, чтобы согласно теореме 19.2 $\mathbf{h}$ был непрерывным оператором из $L_{p,n}$ в $L_{q,n}$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$.

Так как каждое ядро $K_i(x, y)$ ограничено, то оператор $\mathbf{A}$ действует вполне непрерывно из $L_{q,n}$ в $L_{p,n}$, а потому, полагая

$$\varphi(u) = f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right),$$

где

$$f(u) = \int\limits_B G(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)\,dx$$

и функция G подобрана так, что $G(0, \ldots, 0, x) = 0$, мы согласно теореме 23.8 получим, что $\Phi(u) = \operatorname{grad} \varphi(u) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$ есть усиленно непрерывный оператор в пространстве $L_{2,n}$. Отсюда согласно теоремам 1.2 и 8.2 следует слабая непрерывность функционала $\varphi(u)$, а значит, по теореме 15.3, каково бы ни было положительное число $r \leqslant a$, оператор $\Phi(u) = \operatorname{grad} \varphi(u)$ имеет континуум собственных функций, нормы которых меньше r, т. е. уравнение

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u = \mu u \tag{25.5'}$$

имеет такие решения. Рассматривая функционал $\varphi(u)$ в подпространстве $H_1 = L_{2,n} \dot{-} H_0$, где H_0 — подпространство нулей оператора $\mathbf{A}$, и учитывая, что $\operatorname{grad} \varphi(u) = \Phi(u)$ действует из H_1 в H_1, мы можем утверждать, что уравнение (25,5′) имеет континуум ненулевых решений, принадлежащих H_1 $\left(\text{а значит, } \left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right\| > 0\right)$, нормы которых меньше r. Применяя оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ к обеим частям равенства (25.5′) и полагая $z = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$, мы получим $\mu z = \mathbf{A}\mathbf{h} z$, где согласно предыдущему $|z_i| = \left|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i\right| \leqslant M\|u\| \leqslant Mr$.

Так как для этих решений $z = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$, $u \in H_1$ и $\|u\| > 0$, то для различных u различны и $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$. Следовательно, оператор $\mathbf{Ah}$ имеет континуум собственных вектор-функций $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, причем $\operatorname{vrai\,sup}|z_i| \leqslant Mr$, где r — любое фиксированное положительное число $\leqslant a$. Теорема доказана.

Замечание 25.4. Если в теореме 25.7 дополнительно потребовать, чтобы в рассматриваемой окрестности $(0, 0, \ldots, 0)$ выполнялось условие

$$\operatorname{sign} g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \operatorname{sign} u_i \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{25.4}$$

то можно утверждать, что, какова бы ни была сфера $\|u\| = r \leqslant a$ пространства $L_{2,n}$, на ней найдется по меньшей мере одна такая вектор-функция $u_r \in H_1$, что $z_r = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_r$ будет собственной вектор-функцией оператора $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{Ah}$, соответствующей положительному собственному значению, представимому в виде $\mu_r = r^{-2}(\mathbf{h}z_r, z_r)$.

Действительно, если выполнено условие (25.4), то в подпространстве H_1 мы для функционала $\varphi(u)$ имеем

$$(\operatorname{grad}\varphi(u), u) = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{hA}^{\frac{1}{2}}u, u\right) = \left(\mathbf{hA}^{\frac{1}{2}}u, \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_B g_i\left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}}u_1, \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}}u_2, \ldots, \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}}u_n, x\right)\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_i\,dx > 0,$$

когда $\|u\| > 0$, ибо в подпространстве H_1 из неравенства $\|u\| > 0$ следует, что $\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right\| > 0$. Ввиду этого функционал $\varphi(u)$, построенный при доказательстве теоремы 25.7, удовлетворяет в шаре D условиям теоремы 15.4. Отсюда следует, что уравнение (25.5′) имеет в подпространстве H_1 на каждой сфере $\|u\| = r \leqslant a$ по меньшей мере одно решение u_r, которое соответствует значению μ_r. При этом

$$\mu_r(u_r, u_r) = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{hA}^{\frac{1}{2}}u_r, u_r\right) = \left(\mathbf{hA}^{\frac{1}{2}}u_r, \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_r\right) = (\mathbf{h}z_r, z_r)$$

или $\mu_r = r^{-2}(\mathbf{h}z_r, z_r) > 0$, ибо $(u_r, u_r) = r^2$ и $\|z_r\| = \left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_r\right\| > 0$, так как u_r принадлежит сфере $\|u\| = r$ подпространства H_1. Далее, так же как при доказательстве теоремы 25.7, из равенства (25.5′) мы непосредственно находим, что $z_r = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_r$ является собственной вектор-функцией оператора $\mathbf{A}\mathbf{h}$, причем для $z_{ir} = \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_{ir}$ имеем

$$\operatorname{vrai\,sup} |z_{ir}| = \operatorname{vrai\,sup} \left| \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_{ir} \right| \leqslant M \| u_r \| = Mr.$$

Перейдем теперь к рассмотрению случая квазиотрицательных ядер. При переходе от положительных ядер к квазиотрицательным доказательство отличается лишь тем, что вместо сферы в пространстве $L_{2,\,n}$ приходится рассматривать соответствующий гиперболоид в этом пространстве.

Теорема 25.8. *Пусть выполнены следующие условия*:

1°. *Каждое ядро $K_i(x, y)$, заданное на топологическом произведении $B \times B$, где B — множество конечной меры s-мерного евклидова пространства, симметрично, ограничено и отрицательно или квазиотрицательно, причем по крайней мере одно из ядер $K_i(x, y)$ квазиотрицательно.*

2°. *(H)-функции $g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ удовлетворяют условиям*:

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x), \quad (25.2)$$

$g_i(0, 0, \ldots, 0, x) = 0$ *и (без ограничения общности)* $G(0, \ldots, 0, x) = 0$.

3°. *В некоторой окрестности точки $u = 0$, т. е. точки* $(0, 0, \ldots, 0)$, *выполняется неравенство*

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) \in L^q,$$

где $1 < q < 2$, *причем*

$$\operatorname{sign} g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \operatorname{sign} u_i \ (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (25.4)$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

а) *Найдется такое $a > 0$, что, каков бы ни был гиперболоид $((u)) = c < a$, порожденный оператором $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$, где*

$$\mathbf{A}_i u_i = \int_B K_i(x, y) u_i(y)\, dy,$$

существуют по крайней мере две собственные вектор-функции $z_c^{(1)} = (z_{1c}^{(1)}, z_{2c}^{(1)}, \ldots, z_{nc}^{(1)})$ и $z_c^{(2)} = (z_{1c}^{(2)}, z_{2c}^{(2)}, \ldots, z_{nc}^{(2)})$

оператора $\mathbf{A}\mathbf{h} = (\mathbf{A}_1\mathbf{h}_1, \mathbf{A}_2\mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{A}_n\mathbf{h}_n)$, *где* $\mathbf{h}_i u = g_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)$, *представимые в виде*

$$z_c^{(1)} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c^{(1)};\ z_c^{(2)} = \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u_c^{(1)} \quad (((u_c^{(1)})) = ((u_c^{(2)})) = c),$$

где $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — *главный корень квадратный в* $L_{2,n}$ *из оператора* $\mathbf{A}$, *а* $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$ — *положительный корень квадратный в* $L_{2,n}$ *из абсолютного значения оператора* $\mathbf{A}$. *Эти собственные вектор-функции соответственно отвечают положительным собственным значениям оператора* $\mathbf{A}\mathbf{h}$, *представимым в виде* $\mu_c^{(i)} = c^{-2}(\mathbf{h}z_c^{(i)}, z_c^{(i)})$.

б) *Каково бы ни было положительное число* α, *среди собственных вектор-функций* $z_c^{(1)}$ (*и* $z_c^{(2)}$) *имеется континуум таких, для которых* $\operatorname{vrai\,sup} |z_{ic}^{(k)}| < \alpha$ $(k = 1, 2;$ $i = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Пусть ядро $N_i(x, y)$ имеет те же собственные функции, что и ядро $K_i(x, y)$, а его характеристические числа соответственно равны абсолютным значениям характеристических чисел ядра $K_i(x, y)$, т. е. интегральный оператор

$$\mathbf{B}_i u_i = \int_B N_i(x, y) u_i(y) dy$$

представляет собой абсолютное значение интегрального оператора $\mathbf{A}_i$.

Положим $\operatorname{vrai\,sup} N_i(x, y) = M_i^2$ и $M = \max\{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$. Поступая так же, как при доказательстве теоремы 25.7, мы найдем, что в шаре $D(\|u\| \leqslant a)$ пространства $L_{2,n}$ функционал $\varphi(u) = f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u\right)$ слабо непрерывен, его градиент $\Phi(u) = \operatorname{grad} \varphi(u) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u$ усиленно непрерывен и

$$\operatorname{vrai\,sup} \left| \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_i \right| \leqslant M_i \|u_i\| \leqslant M \|u\|, \tag{25.15}$$

если $u = (u_1, \ldots, u_n) \in D$.

Поступая затем так же, как при доказательстве теоремы 25.5, т. е. используя теоремы 13.6 и 12.3, мы получим, что для всякого положительного $r \leqslant a$ уравнение

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_c^{(1)} = \mu_c^{(1)}\mathbf{W}u_c^{(1)} \tag{25.10}$$

имеет на всяком гиперболоиде Γ_c, порожденном оператором $\mathbf{A}$ (см. п. 11.4), где $0 < c < r \leqslant a$, по меньшей мере одно решение $u_c^{(1)}$, причем $c \leqslant \|u_c^{(1)}\| < r$. Отсюда, так же как при доказательстве теоремы 25.5, найдем, что вектор-функция $z_c^{(1)} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_c^{(1)}$ является собственной функцией оператора $\mathbf{Ah}$, соответствующей положительному собственному значению $\mu_c^{(1)} = c^{-2}(\mathbf{h}z_c^{(1)}, z_c^{(1)})$, и что для различных c эти собственные функции различны (а значит, их будет континуум).

Далее, для $z_c^{(1)} = (z_{1c}^{(1)}, z_{2c}^{(1)}, \ldots, z_{nc}^{(1)})$ мы согласно неравенству (25.15) находим

$$\operatorname{vrai\,sup}|z_{ic}^{(1)}| = \operatorname{vrai\,sup}\left|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_{ic}\right| \leqslant M\|u_c^{(1)}\| < Mr.$$

Так как r — произвольное положительное число, меньшее a, то среди собственных функций $z_c^{(1)}$ имеется континуум таких, для которых $\operatorname{vrai\,sup}|z_{ic}^{(1)}|$ меньше произвольного положительного числа.

Совершенно так же, рассматривая функционал $\psi(u) = f\left(\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}u\right)$, мы найдем, что на всяком гиперболоиде Γ_c, где $0 < c < r \leqslant a$, найдется такая вектор-функция $u_c^{(2)}$, что $z_c^{(2)} = \mathbf{A}_{\frac{1}{2}}u_c^{(2)}$ будет собственной функцией оператора $\mathbf{Ah}$, соответствующей положительному собственному значению $\mu_c^{(2)} = c^{-2}(\mathbf{h}z_c^{(2)}, z_c^{(2)})$, и что среди $z_c^{(2)}$ имеется континуум таких, для которых $\operatorname{vrai\,sup}|z_{ic}^{(2)}|$ меньше произвольного положительного числа. Теорема доказана.

25.4. Операторы Гаммерштейна с ядрами Карлемана. Теорема 25.9. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Интегральный оператор*

$$\mathbf{A}u = \int\limits_B K(x, y)u(y)\,dy$$

с симметричным ядром типа Карлемана[1]) *является квазиотрицательным в пространстве* $L^2(B)$, *где* B — *измеримое множество конечномерного евклидова пространства.*

2°. *Измеримая по* $x \in B$ *функция* $g(u, x)$ *имеет частную производную* $g'_u(u, x)$, *которая непрерывна по* $u \in (-\infty, +\infty)$, *причем для всех* $u \in (-\infty, +\infty)$ *и почти для всех* $x \in B$ *она удовлетворяет неравенству* $g'_u(u, x) \geqslant 0$.

3°. *Для ненулевых* $u(x) \in V_0$, *где* V_0 — *коническая область, порожденная оператором* $\mathbf{A}$, *выполняется неравенство*

$$g'_u\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u(x),\ x\right) \geqslant a > 0$$

почти для всех $x \in B$, *где* $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — *главный корень квадратный из оператора* $\mathbf{A}$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

а) *Каков бы ни был гиперболоид* $((u)) = c > 0$, *порожденный оператором* $\mathbf{A}$, *существует по крайней мере одна собственная функция оператора* $\mathbf{Ah}$, *где* $\mathbf{h}$ — *оператор Немыцкого, представимая в виде* $y_c = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_c\,(((u_c)) = c)$ *и отвечающая положительному собственному числу* $\nu_c = c^{-2}(\mathbf{h}y_c, y_c)$.

б) *Каково бы ни было положительное число* α, *среди собственных функций* y_c *существует континуум таких, нормы которых больше* α, *и континуум таких, нормы которых меньше* α.

Отметим, что теорема сохраняется при замене $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ на $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$, где $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный из абсолютного значения оператора $\mathbf{A}$.

Доказательство. Из условия 2° согласно лемме 20.2 и теореме 20.2 следует, что оператор $\mathbf{h}u = g(u(x), x)$ непрерывен в L^2 и имеет в этом пространстве ограниченный линейный дифференциал Гато $\mathbf{Dh}(u, v) = g'_u(u(x), x)v(x)$, причем $(\mathbf{Dh}(u, v), v) = \int\limits_B v^2(x) g'_u(u(x), x)\,dx \geqslant 0$. Далее,

---

[1]) См. [32] и [67], гл. X, § 1.

из условия 3° следует, что для $u \in \mathbf{A}V_0$

$$(\mathbf{Dh}(u, v), v) = \int\limits_B v^2(x) g'_u(u(x), x)\, dx \geqslant a(v, v). \quad (25.16)$$

Отсюда, так как (см. п. 6.3) оператор Немыцкого $\mathbf{h}$ является потенциальным, получаем, что операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{h}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 16.4, а потому утверждения данной теоремы следуют из утверждений теоремы 16.4 (или 16.1). Теорема доказана.

Теорема 25.10. *Пусть выполнены условия* 1° *и* 2° *теоремы* 25.9 *и следующее условие*:

Для ненулевых $u(x) \in V_0$, *где* V_0 — *коническая область, порожденная оператором* $\mathbf{A}$, *выполняется неравенство* $g'_u\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u, x\right) > 0$ *почти для всех* x, *где* $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — *главный корень квадратный из оператора* $\mathbf{A}$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

а) *Найдется такое* $r > 0$, *что, каков бы ни был гиперболоид* $((u)) = c < r$, *порожденный оператором* $\mathbf{A}$, *существует по меньшей мере одна собственная функция оператора* $\mathbf{Ah}$, *где* $\mathbf{h}u = g(u(x), x)$, *представимая в виде* $y_c = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_c\ (((u_c)) = c)$ *и отвечающая положительному собственному числу* $\nu_c = c^{-2}(\mathbf{h}y_c, y_c)$.

б) *Среди собственных функций* y_c *имеется континуум таких, нормы которых меньше произвольного положительного числа.*

Отметим, что теорема сохраняется при замене $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ на $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$, где $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный из абсолютного значения оператора $\mathbf{A}$.

Доказательство сформулированной теоремы использует теорему 16.5 и проводится так же, как доказательство предыдущей теоремы. При этом вместо неравенства (25.16) получается следующее неравенство: $(\mathbf{Dh}(u, v), v) > 0$.

Замечание 25.5. Отметим, что последняя теорема сохраняется для операторов Гаммерштейна $\mathbf{Ah} = (\mathbf{A}_1\mathbf{h}_1, \mathbf{A}_2\mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{A}_n\mathbf{h}_n)$, действующих в пространстве вектор-функций. При этом нужно требовать, чтобы оператор $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$ был квазиотрицательным (или квазиположительным) и чтобы матрица $(g'_{ik}(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)$ была положительно определенной, ибо (см. п. 21.1)

$$(\mathbf{Dh}(u, v), v) = \sum_{i, k=1}^{n} \int_B g'_{ik} v_i(x) v_k(x)\, dx.$$

25.5. Операторы Ляпунова — Лихтенштейна. В настоящем пункте мы будем рассматривать оператор $\Phi(x) = \alpha(s)\mathbf{F}(x)$, где $\mathbf{F}$ — оператор, рассмотренный в пункте 21.2, а $\alpha(s)$ — ограниченная измеримая и неотрицательная функция на отрезке $[0,1]$, которая отлична от нуля на множестве положительной меры.

Оператор $\mathbf{F}$ был рассмотрен в работах Л. Лихтенштейна [44, б], Л. А. Люстерника [40, в] и Э. С. Цитланадзе [72, д, к] в предположении непрерывности ядер $K_{n-1}(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. В случае суммируемых с квадратом ядер оператор $\mathbf{F}$ был рассмотрен в работах В. И. Соболева [66, а] и при меньших ограничениях — в работах автора [9, н, о].

Теорема 25.11. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. $\{K_{n-1}(t_1, t_2, \ldots, t_n)\}$ *есть последовательность вещественных симметричных и суммируемых с квадратом в единичном кубе* $(0 \leqslant t_i \leqslant 1)$ *евклидова пространства ядер.*

2°. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1})]^2\, dt_1 \ldots dt_{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

3°. *Функция* $\alpha(s) \geqslant 0$ *измерима и* $\operatorname{vrai\,sup} \alpha(s) = M^2 > 0$.

Тогда, каково бы ни было положительное число a, *существует континуум собственных функций оператора*

$$\Phi(x) = \alpha(s)\mathbf{F}(x) \equiv \alpha(s) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_n(s, t_1, \ldots, t_n) \prod_{i=1}^{n} x(t_i)\, dt_i,$$

принадлежащих L^2 *и нормы которых меньше* a.

Доказательство. Оператор $\mathbf{F}$ согласно теореме 21.2 является вполне компактным в шаре $\|x\| \leqslant 1$. Из компактности **F** согласно теореме 8.2 вытекает слабая непрерывность в этом шаре его потенциала (21.5). Далее, оператор $\mathbf{A}x = \alpha(s)x(s)$ является самосопряженным и положительным во всем пространстве L^2. Таким образом, выполнены все условия теоремы 15.2, откуда и следует настоящая теорема[1]).

Отметим, что если помимо условий 1°—3° теоремы 25.11 выполнено следующее условие $\|\mathbf{\Phi}(x)\| > 0$, если $\|x\| > 0$ и $\alpha(s) \equiv 1$, то для оператора $\mathbf{\Phi}$ справедливо утверждение теоремы 15.4[1]). Если оператор **F** является позитивным, то при выполнении условий теоремы 25.11 для оператора $\mathbf{\Phi}$ справедливы утверждения теоремы 15.1[1]).

Рассмотрим еще случай нечетного оператора.

Теорема 25.12. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. $K_{2n-1}(t_1, t_2, \ldots, t_{2n})$ *есть последовательность действительных, симметричных и суммируемых с квадратом в единичном кубе* $(0 \leqslant t_i \leqslant 1)$ *евклидова пространства ядер, для которых*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{2n-1}(t_1, \ldots, t_{2n}) \prod_{i=1}^{2n} x(t_i)\, dt_i > 0,$$

если $(x, x) > 0$.

2°. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_{2n-1}(t_1, \ldots, t_{2n})]^2 dt_1 \ldots dt_{2n} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

3°. *Функция* $\alpha(s)$ *измерима на* $(0, 1)$, $\alpha(s) \geqslant 0$ *и* $\operatorname*{vrai\,sup}_{[0,1]} \alpha(s) = M^2 > 0$.

Тогда, какова бы ни была сфера пространства $L^2 : \|x\| = a < M^{-1}$, *существует последовательность собственных функций оператора*

$$\mathbf{\Phi}(x) = \alpha(s)\mathbf{F}(x) \equiv$$
$$\equiv \alpha(s) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{2n-1}(s, t_1, \ldots, t_{2n-1}) \prod_{i=1}^{2n-1} x(t_i)\, dt_i,$$

---

[1]) При этом нормы собственных векторов $\leqslant 1$.

которая сходится слабо к нулю пространства L^2, *а соответствующие собственные значения оператора* Φ *положительны и сходятся к нулю. Каждая собственная функция последовательности представима в виде* $x_k(s) = \sqrt{\alpha(s)}\, h_k(s)$, $\|h_k(s)\| = a$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, *и соответствует собственному значению* $\mu_k = a^{-2}(x_k, \mathbf{F}(x_k))$.

Доказательство. Согласно теореме 21.2 оператор $\mathbf{F}$ является потенциальным, причем в шаре $\|x\| \leqslant r < 1$ он усиленно непрерывен. Из условия 1° теоремы следует позитивность оператора $\mathbf{F}$, а из вида этого оператора вытекает его нечетность. Далее, оператор $\mathbf{A}x = \alpha(s)\, x(s)$ задан во всем пространстве и является самосопряженным положительным, причем $\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right\| = M$. Следовательно, выполнены все условия теоремы 15.7, откуда и следует настоящая теорема.

Отметим, что теоремы 25.11 и 25.12 сохраняются для оператора $\Phi = \mathbf{AF}$, где $\mathbf{A}$ — самосопряженный положительный оператор, заданный во всем пространстве L^2.

§ 26. Собственные числа и точки ветвления нелинейных интегральных операторов

26.1. О собственных значениях операторов Гаммерштейна с позитивными ядрами [1]). В § 25 были установлены теоремы существования собственных функций нелинейных интегральных операторов. При этом в большинстве установленных там предложений остался открытым вопрос о числе собственных значений (чисел) рассмотренных операторов. Только в теоремах 25.3 и 25.12 было установлено существование последовательности положительных собственных чисел, сходящейся к нулю.

В настоящем пункте будут установлены некоторые достаточные условия существования бесконечного числа различных положительных собственных чисел операторов Гаммерштейна.

Теорема 26.1. *Пусть выполнены условия* (α_1) *и* (α_2) п. 25.1, *причем* $p > 2$,

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant b \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{p-1} \tag{26.1}$$

---

[1]) Предложения этого пункта представляют собой уточнение предложений § 5 из [9, г].

и

$$\operatorname{sign} g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \operatorname{sign} u_i. \tag{26.2}$$

Тогда существует континуум положительных собственных чисел оператора $\mathbf{\Gamma} u = \mathbf{A}\mathbf{h}u = (\mathbf{A}_1\mathbf{h}_1 u, \mathbf{A}_2\mathbf{h}_2 u, \ldots, \mathbf{A}_n\mathbf{h}_n u)$, *меньших произвольного положительного числа, причем нуль является точкой бифуркации этого оператора.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы имеют место утверждения теоремы 25.1, т. е., каково бы ни было положительное число a, существует континуум собственных функций $z_c = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c$ оператора $\mathbf{\Gamma}$, отвечающих положительным собственным числам μ_c, нормы которых меньше a, ибо, как было установлено в теореме 25.1, на всякой сфере $S_c(\|u\| = c)$ существует собственная вектор-функция $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c$, где $u_c \in S_c$, а $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — ограниченный оператор.

Установим теперь оценки для собственных чисел, которые согласно теореме 25.1 имеют вид

$$\mu_c = c^{-2}(\mathbf{h}z_c, z_c) = c^{-2}\left(\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c, \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c\right) =$$

$$= \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{n} \int_B g_i\left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}} u_{1c}, \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}} u_{2c}, \ldots, \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}} u_{nc}, x\right) \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_{ic}\, dx.$$

Так как согласно теореме 23.7 оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ действует вполне непрерывно из $L_{2,n}$ в $L_{p,n}$, то из условия (26.1) путем применения неравенства Гельдера мы отсюда находим

$$\mu_c \leqslant \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{n} \left\| \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_{ic} \right\|_p \cdot \left\| b \sum_{k=1}^{n} \left| \mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}} u_{kc} \right|^{p-1} \right\|_q,$$

где значки p и q внизу означают, что нормы берутся соответственно в пространствах L^p и L^q $\left(p - 1 = \frac{p}{q}\right)$, или

$$\mu_c \leqslant \frac{b}{c^2} \sum_{i=1}^{n} \left\| \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_{ic} \right\|_p \sum_{k=1}^{n} \left\| \mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}} u_{kc} \right\|_p^{p-1},$$

или путем применения неравенства Гельдера

$$\mu_c \leqslant \frac{b}{c^2} n^{\frac{1}{p}} \left\| A^{\frac{1}{2}} u_c \right\|_p^{p-1} \sum_{i=1}^{n} \left\| A_i^{\frac{1}{2}} u_{ic} \right\|_p \leqslant \frac{bn}{c^2} \left\| A^{\frac{1}{2}} u_c \right\|_p^p. \quad (26.3)$$

Оценим теперь $\left\| A^{\frac{1}{2}} u_c \right\|_p$. Пусть u — произвольная вектор-функция из $L_{2,n}$, а v — единичная вектор-функция из $L_{q,n}$. Учитывая, что согласно теореме 23.7 оператор $A^{\frac{1}{2}}$ действует вполне непрерывно из $L_{q,n}$ в $L_{2,n}$ и из $L_{2,n}$ в $L_{p,n}$, мы подберем единичную вектор-функцию v так, чтобы при данной фиксированной вектор-функции $u \in L_{2,n}$ было

$$\left(A^{\frac{1}{2}} u,\ v\right) = \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|_p \|v\|_q = \left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|_p.$$

Отсюда следует

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|_p = \left(A^{\frac{1}{2}} u,\ v\right) = \left(u,\ A^{\frac{1}{2}} v\right) \leqslant \|u\|_2 \left\| A^{\frac{1}{2}} v \right\|_2.$$

Так как $A^{\frac{1}{2}}$ действует вполне непрерывно из $L_{q,n}$ в $L_{2,n}$, то для вектор-функций v, принадлежащих единичной сфере пространства $L_{q,n}$, будет: $\left\| A^{\frac{1}{2}} v \right\|_2 \leqslant N = \text{const}$. Отсюда и из предыдущего неравенства имеем

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} u \right\|_p \leqslant N \|u\|_2. \quad (26.3')$$

Из неравенств (26.3) и (26.3′) получим

$$\mu_c \leqslant \frac{b}{c^2} n N^p \|u_c\|_2^p = bnN^p c^{p-2},$$

ибо $\|u_c\|_2 = c$. Так как по условию $p > 2$, то отсюда вытекает существование континуума положительных собственных чисел μ_c оператора Γ, меньших произвольного положительного числа, ибо c — произвольное положительное число. Далее следует, что 0 — точка бифуркации оператора Γ, ибо $\|u_c\| = c$, а $A^{\frac{1}{2}}$ — ограниченный оператор. Теорема доказана.

Замечание 26.1. Если отказаться от условия (26.2), то мы приходим к предложению: *пусть при $p > 2$ выпол-*

нены условия (α_1)—(α_2) п. 25.1 *и неравенство* (26.1); *тогда континуум собственных функций оператора* $\mathbf{\Gamma}$, *который существует согласно теореме* 15.2, *с нормами меньше произвольного положительного числа* a *соответствует собственным числам, абсолютное значение которых меньше* ka, *где* $k = \text{const}$. *Следовательно, и в данном случае точка* 0 — *точка бифуркации оператора* $\mathbf{\Gamma}$.

Доказательство данного предложения использует теорему 15.2 и проводится так же, как доказательство теоремы 26.1. При этом если μ — собственное число, соответствующее собственной функции $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u$, то $|\mu| \leqslant bnN^p \|u\|^{p-2}$, где N имеет тот же смысл, что и раньше.

Теорема 26.2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Линейный оператор* $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots \mathbf{A}_n)$, *где* $\mathbf{A}_i u_i = \int\limits_B K_i(x, y)\, u_i(y)\, dy$, $(\operatorname{mes} B < \infty)$, *отличный от нулевого, действует вполне непрерывно в* $L_{2, n}$ *и является позитивным.*

2°. (H)-*функции* g_i (см. определение 18.2) *удовлетворяют условиям:*

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x),$$

$$g_i(0, 0, \ldots, 0, x) \equiv 0.$$

$$3°.\ |g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant a_i(x) + b \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{p-1}, \tag{26.4}$$

где $a_i(x) \in L^2$, $b > 0$, $1 < p < 2$, *и*

$$\operatorname{sign} g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \operatorname{sign} u_i. \tag{26.2}$$

Тогда у оператора $\mathbf{\Gamma} u = \mathbf{A}\mathbf{h}u = (\mathbf{A}_1\mathbf{h}_1 u, \mathbf{A}_2\mathbf{h}_2 u, \ldots, \mathbf{A}_n\mathbf{h}_n u)$ *существует континуум положительных собственных чисел, меньших произвольного положительного числа.*

Доказательство. Из условия (26.4) согласно теореме 19.2 следует, что оператор Немыцкого $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n)$, $\mathbf{h}_i u = g_i(u_1(x), \ldots, u_n(x), x)$, непрерывен в пространстве $L_{2, n}$. Отсюда и из условий теоремы следуют утверждения теоремы 25.1 для пространства $L_{2, n}$, т. е., какова бы ни была сфера S_c $(\|u\| = c)$ пространства $L_{2, n}$, на ней существует такая вектор-функция u_c, что $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_c$, где $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный из оператора $\mathbf{A}$, является собственной вектор-функцией оператора $\mathbf{\Gamma}$, отвечающей положительному собственному числу

$$\mu_c = c^{-2}\left(\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_c\right).$$

Найдем теперь оценку для μ_c, вывод которой немного отличается от вывода в предыдущей теореме, так как здесь используется конечность $\operatorname{mes} B$. Используя неравенство (26.4) напишем:

$$\mu_c = \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_c,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_c\right) =$$

$$= \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}\int_B g_i\left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}}u_{1c},\ \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}}u_{2c},\ \ldots,\ \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}}u_{nc},\ x\right)\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_{ic}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_{ic}\right\|\cdot\left\|a_i(x) + b\sum_{k=1}^{n}\left|\mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}}u_{kc}\right|^{p-1}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{c^2}\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_c\right\| + \frac{b}{c^2}\sum_{i=1}^{n}\left\|\mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}}u_{ic}\right\|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_B \left|\mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}}u_{kc}\right|^{\frac{2p}{q}}dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

где нормы берутся соответственно в L^2 и $L_{2,\,n}$, $\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n}\|a_i(x)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $1 < p < 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Далее,

$$\int_B \left|\mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}}u_{kc}\right|^{\frac{2p}{q}}dx \leqslant (\operatorname{mes} B)^{\frac{q-p}{q}}\left\|\mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}}u_{kc}\right\|^{\frac{2p}{q}},$$

откуда согласно неравенству Гельдера для сумм имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_B \left|\mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}}u_{kc}\right|^{2(p-1)}dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant (\operatorname{mes} B)^{\frac{q-p}{2q}}\,n^{\frac{2q-p}{2q}}\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u_c\right\|^{p-1}.$$

Отсюда и из оценки для μ_c путем повторного применения неравенства Гельдера для сумм следует

$$\mu_c \leqslant \frac{a}{c^2}\left\| \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c \right\| + \frac{b}{c^2} (\operatorname{mes} B)^{\frac{q-p}{2q}} n^{\frac{3q-p}{2q}} \left\| \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c \right\|^p.$$

Но

$$\left\| \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c \right\| \leqslant \left\| \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right\| \| u_c \| = \left\| \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \right\| c = \beta c,$$

откуда, полагая $(\operatorname{mes} B)^{\frac{q-p}{2q}} n^{\frac{3q-p}{2q}} = \gamma$, получается

$$\mu_c \leqslant \frac{\alpha\beta}{c} + b\beta^p \gamma c^{p-2}.$$

Это неравенство доказывает теорему, ибо $p < 2$ и c — произвольное положительное число.

Перейдем теперь к случаю ограниченных ядер.

Теорема 26.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Каждое ядро $K_i(x, y)$ симметрично, положительно и ограничено на топологическом произведении $B \times B$, где B — множество конечной меры s-мерного евклидова пространства.*

2°. *(H)-функции g_i удовлетворяют условиям:*

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots u_n, x),$$
$$g_i(0, 0, \ldots, 0, x) = 0$$

и (без ограничения общности) $G(0, \ldots, 0, x) = 0$.

3°.

$$\operatorname{sign} g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \operatorname{sign} u_i \tag{26.2}$$

и в некоторой окрестности точки $(0, 0, \ldots, 0)$ *выполняется неравенство*

$$| g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} w_{ik}(| u_k |), \tag{26.5}$$

где $w_{ik}(| u_k |)$ — монотонно возрастающие функции, обращающиеся в нуле в нуль, и при $u \to 0$ $w_{ik}(u) = o(u)$.

Тогда у оператора $\mathbf{\Gamma} u = \mathbf{A h} u = (\mathbf{A}_1 \mathbf{h}_1 u, \mathbf{A}_2 \mathbf{h}_2 u, \ldots \mathbf{A}_n \mathbf{h}_n u)$, где

$$\mathbf{A}_i u_i = \int_B K_i(x, y) u_i(y)\, dy, \quad \mathbf{h}_i u = g_i(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x),$$

существует континуум положительных собственных чисел, *меньших произвольного положительного числа, причем нуль является точкой бифуркации оператора* $\mathbf{\Gamma}$.

Доказательство. Из условий теоремы согласно теореме 25.7 и замечанию 25.4 следует существование такого положительного числа a, что на всякой сфере $S_r(\|u\| = r \leqslant a)$ пространства $L_{2,\,n}$ существует такая вектор-функция u_r, что $z_r = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_r$, где $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$—положительный корень квадратный из оператора $\mathbf{A}$, является собственной вектор-функцией оператора $\mathbf{\Gamma}$, соответствующей положительному собственному числу $\mu_r = r^{-2}(\mathbf{h} z_r, z_r)$, причем (см. доказательство теоремы 25.7)

$$\operatorname{vrai\,sup} \left| \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_{ir} \right| \leqslant M \| u_r \| = Mr. \tag{26.6}$$

Оценим теперь μ_r. Согласно неравенству (26.5) имеем

$$\mu_r = r^{-2}(\mathbf{h} z_r, z_r) = r^{-2}\left(\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_r,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_r\right) =$$
$$= \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{n} \int_B g_i\left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}} u_{1r},\ \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}} u_{2r},\ \ldots,\ \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}} u_{nr},\ x\right) \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_{ir}\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{r^2} \int_B \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_{ir} \right| w_{ik}\left(\left| \mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}} u_{kr} \right| \right) \right\} dx.$$

Так как функции w_{ik} монотонно возрастают, то отсюда и из неравенства (26.6) следует

$$\mu_r \leqslant \frac{M}{r} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} w_{ik}(Mr) \operatorname{mes} B. \tag{26.7}$$

Из полученного неравенства следует существование континуума собственных чисел оператора $\mathbf{\Gamma}$, меньших произвольного положительного числа, ибо $w_{ik}(u) = o(u)$ при $u \to 0$. Так как этим собственным числам соответствуют собственные функции $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_r$, для которых $\operatorname{vrai\,sup} \left| \mathbf{A}_i^{\frac{1}{2}} u_{ir} \right| \leqslant Mr$, то точка $\mu = 0$ является точкой бифуркации оператора $\mathbf{\Gamma}$. Теорема доказана.

Отметим, что если отказаться от условия (26.2), то при выполнении других условий теоремы 26.3 имеет место следующее утверждение: *существует континуум собственных чисел оператора* $\mathbf{\Gamma}$, *абсолютное значение которых меньше произвольного положительного числа, причем нуль является точкой бифуркации оператора* $\mathbf{\Gamma}$.

Теорема 26.4. *Пусть выполнены условия* 1°—2° *теоремы* 26.3 *и следующее условие*

$$4^\circ. \qquad \operatorname{sign} g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \operatorname{sign} u_i, \tag{26.2}$$

причем для всех u_k *имеет место неравенство*

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} w_{ik}(|u_{ik}|),$$

где $w_{ik}(|u|)$ — *монотонно возрастающая положительная функция, удовлетворяющая при* $u \to +\infty$ *условию* $w_{ik}(u) = o(u)$.

Тогда существует континуум собственных положительных чисел оператора $\mathbf{\Gamma}$, *меньших произвольного положительного числа.*

Доказательство. Поступая так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, мы найдем, что для всякого r удет иметь место неравенство (26.7), из которого следует утверждение теоремы, ибо при $r \to +\infty$ $w_{ik}(u) = o(u)$.

26.2. О собственных значениях операторов Гаммерштейна с квазиотрицательными ядрами.

Теорема 26.5. *Пусть выполнены условия* 1° *и* 2° *теоремы* 25.8 *и условие* 3° *теоремы* 26.3.

Тогда для оператора $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{Ah}$, *где* $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$ — *квазиотрицательный оператор, имеет место утверждение теоремы* 26.3.

Доказательство. Из условий данной теоремы согласно теореме 25.8 следует существование континуума собственных функций оператора $\mathbf{\Gamma}$, меньших произвольного положительного числа, представимых в виде $z_c = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c$ и $z_c = \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u_c$, где $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — главный корень квадратный из оператора $\mathbf{A}$, а $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный из абсолютного значения оператора $\mathbf{A}$, и соответствующих положительным собственным числам:

$$\mu_c = c^{-2}(\mathbf{h}z_c,\ z_c).$$

Напомним, что последняя формула (см. доказательство теоремы 25.8) была найдена из равенства

$$\mu_c \mathbf{W} u_c = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c. \qquad (25.10')$$

Так как согласно равенствам (16.9) и (16.9′)

$$\mathbf{W}^2 u_c = u_c,\quad \mathbf{W}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{A}_{\frac{1}{2}},\quad \mathbf{W}\mathbf{A}_{\frac{1}{2}} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}},$$

то из равенства (25.10′) следует $\mu_c u_c = \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c$, откуда

$$\mu_c = \|u_c\|^{-2}\left(\mathbf{A}_{\frac{1}{2}} \mathbf{h} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c,\ u_c\right) = \|u_c\|^{-2}\left(\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c,\ \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u_c\right) =$$

$$= \|u_c\|^{-2} \sum_{i=1}^{n} \int_B g_i\left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}} u_{1c},\ \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}} u_{2c},\ \ldots,\ \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}} u_{nc},\ x\right) (\mathbf{A}_i)_{\frac{1}{2}} u_{ic}\, dx.$$

Отсюда и из неравенства (26.5) следует

$$\mu_c \leqslant \|u_c\|^{-2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left|(\mathbf{A}_i)_{\frac{1}{2}} u_{ic}\right| w_{ik}\left(\left|\mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}} u_{kc}\right|\right) \operatorname{mes} B$$

(здесь для краткости перед знаком абсолютного значения опущен символ vrai sup). Но из неравенства (25.15) следует

$$\operatorname{vrai\,sup}\left|(\mathbf{A}_i)_{\frac{1}{2}} u_{ic}\right| \leqslant M\|u_c\|;\quad \operatorname{vrai\,sup}\left|\mathbf{A}_k^{\frac{1}{2}} u_{kc}\right| \leqslant M\|u_c\|,$$

откуда в силу монотонности функций w_{ik} имеем

$$\mu_c \leqslant \frac{M}{\|u_c\|} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} w_{ik}(M\|u_c\|) \operatorname{mes} B.$$

Так как (см. доказательство теоремы 25.8) $\|u_c\| \leqslant r$, где r — произвольное положительное число, меньшее a, а $w_{ik}(u) = o(u)$ при $u \to 0$, то из последней оценки для μ_c следует утверждение теоремы.

Теорема 26.6. *Пусть выполнены условия* (β_1) *и* (β_2) п. 25.2, *причем* $p > 2$,

$$|g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)| \leqslant b \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{p-1} \tag{26.1}$$

и

$$\operatorname{sign} g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \operatorname{sign} u_i. \tag{26.2}$$

Тогда существует континуум положительных собственных чисел оператора $\mathbf{\Gamma} u = \mathbf{A}\mathbf{h}u = (\mathbf{A}_1\mathbf{h}_1 u, \mathbf{A}_2\mathbf{h}_2 u, \ldots, \mathbf{A}_n\mathbf{h}_n u)$, *меньших произвольного положительного числа, причем нуль является точкой бифуркации этого оператора.*

Доказательство. Из условия (26.1) согласно теореме 19.2 следует, что $\mathbf{h}$ — непрерывный оператор из $L_{p,n}$ в $L_{q,n}$. Затем из равенства (26.2) следует условие (β_4) теоремы 25.5. Таким образом, выполнены все условия теоремы 25.5, а потому имеют место утверждения теоремы 25.5, т. е. существует континуум собственных вектор-функций оператора $\mathbf{\Gamma}$, представимых в виде $z_c = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c$ и $z_c = \mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u_c (\|u_c\|_2 < r)$, где r — произвольное положительное число, меньшее a, и соответствующих положительным собственным числам, которые, как мы выяснили при доказательстве предыдущей теоремы, имеют вид

$$\mu_c = \|u_c\|^{-2} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{n} \int_B g_i\left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}} u_{1c}, \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}} u_{2c}, \ldots, \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}} u_{nc}, x\right) (\mathbf{A}_i)_{\frac{1}{2}} u_{ic}\, dx.$$

(Имеется и континуум таких μ_c, которые определяются равенством, получающимся из данного путем замены $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ на $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$ и $\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}$ на $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$.) Поступая теперь так же, как при доказательстве теоремы 26.1, мы из этого равенства найдем (см. неравенство (26.3)):

$$\mu_c \leqslant \frac{bn}{\|u_c\|_2^2} \left\|\mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u_c\right\|_p^{p-1} \left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c\right\|_p,$$

где

$$\left\| \mathrm{A}_{\frac{1}{2}} u_c \right\|_p \leqslant N \| u_c \|_2; \quad \left\| \mathrm{A}^{\frac{1}{2}} u_c \right\|_p \leqslant N \| u_c \|_2$$

(значки внизу у норм означают, что нормы берутся соответственно в пространствах $L_{p,\,n}$ и $L_{2,\,n}$). Отсюда имеем

$$\mu_c \leqslant bnN^p \| u_c \|^{p-2} \leqslant bnN^p r^{p-2}.$$

Из полученного неравенства следует существование континуума таких положительных μ_c, которые меньше произвольного положительного числа, так как r — любое положительное число, меньшее a. Этим доказана теорема, ибо среди соответствующих собственных функций имеется континуум таких, нормы которых меньше произвольного положительного числа.

Теорема 26.7. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Линейный квазиотрицательный интегральный оператор* $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n)$, *где*

$$\mathrm{A}_i u_i = \int\limits_B K_i(x, y) u_i(y)\, dy, \quad \operatorname{mes} B < +\infty,$$

действует вполне непрерывно в пространстве $L_{2,\,n}$.

2°. *(H)-функции* g_i (см. определение 18.2) *удовлетворяют условиям*:

$$g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, u_2, \ldots, u_n, x),$$

$$g_i(0, 0, \ldots, 0, x) = 0.$$

$$3°.\ | g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) | \leqslant a_i(x) + b \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{p-1}, \tag{26.4}$$

где $a_i(x) \in L^2$, $b > 0$, $1 < p < 2$, *и*

$$\operatorname{sign} g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, x) = \operatorname{sign} u_i. \tag{26.2}$$

$$4°.\ \lim_{\|u\| \to \infty} \int\limits_B G(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)\, dx = +\infty. \tag{26.8}$$

Тогда существует континуум положительных собственных чисел оператора $\Gamma u = \mathrm{A}\mathrm{h}u = (\mathrm{A}_1\mathrm{h}_1 u, \mathrm{A}_2\mathrm{h}_2 u, \ldots, \mathrm{A}_n\mathrm{h}_n u)$, *меньших произвольного положительного числа.*

Доказательство. Из условия (26.4) согласно теореме 19.2 следует, что оператор Немыцкого $\mathrm{h} = (\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \ldots, \mathrm{h}_n)$, где $\mathbf{h}_i u = g_i(u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ x)$, непрерывен в пространстве $L_{2,\,n}$. Отсюда и из других условий теоремы следуют утверждения теоремы 25.6 для пространства $L_{2,\,n}$. В частности, каково бы ни было число r, существует континуум собственных вектор-функций оператора $\mathbf{\Gamma}$, представимых в виде $z_c = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c$, где $\|u_c\| > r$, и соответствующих положительным собственным значениям, которые, как было установлено при доказательстве теоремы 26.5, имеют вид

$$\mu_c = \frac{1}{\|u_c\|^2} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} \int_B g_i\left(\mathbf{A}_1^{\frac{1}{2}} u_{1c},\ \mathbf{A}_2^{\frac{1}{2}} u_{2c},\ \ldots,\ \mathbf{A}_n^{\frac{1}{2}} u_{nc},\ x\right)(\mathbf{A}_i)_{\frac{1}{2}}\, u_{ic}\, dx.$$

Так же, как при доказательстве теоремы 26.2, получается

$$\mu_c \leqslant \frac{a}{\|u_c\|^2}\left\|\mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u_c\right\| + \frac{b}{\|u_c\|^2}(\operatorname{mes} B)^{\frac{q-p}{2q}}\, n^{\frac{3q-p}{2q}}\left\|\mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u_c\right\|\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c\right\|^{p-1}.$$

Но

$$\left\|\mathbf{A}_{\frac{1}{2}} u_c\right\| \leqslant \left\|\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}\right\|\|u_c\|; \quad \left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u_c\right\| \leqslant \left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right\|\|u_c\|,$$

откуда, полагая $\left\|\mathbf{A}_{\frac{1}{2}}\right\| = \beta$, следует

$$\mu_c \leqslant \frac{\alpha\beta}{\|u_c\|} + b\beta^p\gamma\|u_c\|^{p-2},$$

где

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n}\|a_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma = (\operatorname{mes} B)^{\frac{q-p}{2q}}\, n^{\frac{3q-p}{2q}}.$$

Полученное неравенство доказывает теорему, ибо $p < 2$, а $\|u_c\| > r$, где r — произвольное число.

26.3. Примеры точек ветвления. Здесь мы приведем некоторые примеры из работы [9, а].

1°. Пусть

$$\lambda u(x) = \int_B \alpha(x)\,\alpha(y)\,u(y)\cos(u(y))\,dy,$$

где $\alpha(x)$ — непрерывная функция на ограниченном замкнутом множестве s-мерного евклидова пространства. Данное уравнение имеет нулевые решения при любом значении λ, а ненулевые решения (собственные функции) имеют вид

$$u(x)=\xi\alpha(x) \quad (\alpha(x)\not\equiv 0),$$

где ξ — любое число, отличное от нуля, и соответствуют собственным числам

$$\lambda_\xi=\int\limits_B \alpha^2(y)\cos(\xi\alpha(y))\,dy.$$

Так как отсюда следует, что

$$|\lambda_\xi|\leqslant\int\limits_B \alpha^2(y)\,dy=l,$$

то множество собственных чисел [1]) данного оператора принадлежит отрезку $[-l, +l]$. Точка $\lambda_0=l$ является единственной точкой бифуркации рассматриваемого оператора.

2°. Пусть

$$\lambda u(x)=\int\limits_B \alpha(x)\alpha(y)u(y)e^{u(y)}\,dy\equiv\Gamma u,$$

где $\alpha(x)$ и B имеют тот же смысл, что и в предыдущем примере. И здесь, что непосредственно видно, собственные функции имеют вид: $u(x)=\xi\alpha(x)$, где ξ — любое число, отличное от нуля, и соответствуют собственным числам

$$\lambda_\xi=\int\limits_B \alpha^2(y)e^{\xi\alpha(y)}\,dy.$$

Отсюда видно, что если $\alpha(x)$ не изменяет знака в B, то спектр (см. сноску) состоит из полупрямой $(0, +\infty)$. В противном случае спектр заполняет часть этой полупрямой.

---

[1]) Множество собственных значений нелинейного оператора, по предложению В. В. Немыцкого, было названо в работе [9, а], на которую ссылается и Н. Н. Назаров [53, б], спектром этого оператора. В этой работе [9, а] спектр нелинейного оператора назван сплошным, если множество собственных значений содержит некоторый интервал, и — точечным, если множество собственных значений не содержит никакого интервала. Отметим еще, что в этой работе впервые построен пример счетного, нигде не плотного спектра. Вопрос о структуре спектра нелинейных операторов был рассмотрен в работах В. В. Немыцкого [57, е, ж].

Далее, точка

$$\lambda_0 = \int_B \alpha^2(y)\,dy$$

является единственной точкой бифуркации оператора $\mathbf{\Gamma}$.

3°. Пусть

$$\mathbf{\Gamma}u = \int_0^{2\pi} \sin x \sin y\,[u(y) + u^2(y)]\,dy.$$

Полагая $u(x) = \xi \sin x$, мы для уравнения $\lambda u(x) = \mathbf{\Gamma}u$ получим

$$\lambda\xi = \int_0^{2\pi} \sin y\,[\xi \sin y + \xi^2 \sin^2 y]\,dy = \pi\xi.$$

Здесь спектр состоит из одной точки $\lambda = \pi$, совпадающей с точкой бифуркации. Этому собственному числу $\lambda = \pi$ соответствует континуум собственных функций $u(x) = \xi \sin x$ (для любого $\xi \neq 0$).

4°. Пусть

$$\mathbf{\Gamma}u = \int_0^{2\pi} (\alpha_1(x)\alpha_1(y) + \alpha_2(x)\alpha_2(y))\,[u(y) + u^2(y)]\,dy,$$

где

$$\alpha_1(x) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{если } 0 \leqslant x < \pi, \\ 0, & \text{если } x \geqslant \pi, \end{cases}$$

и

$$\alpha_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -\sin x, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$$

В данном случае видно, что решение уравнения $\lambda u(x) = \mathbf{\Gamma}u$ следует искать в виде

$$u(x) = \xi_1\alpha_1(x) + \xi_2\alpha_2(x). \tag{26.9}$$

Полагая здесь $\xi_2 = 0$, мы найдем, что при $\lambda = \frac{\pi}{2}$ уравнение $\frac{\pi}{2}u(x) = \mathbf{\Gamma}u$ имеет решения $u(x) = \xi\alpha_1(x)$ при любом значении ξ. Полагая в равенстве (26.9) $\xi_1 = 0$, мы найдем, что при любом λ уравнение (26.9) имеет решение $u_\lambda(x)=$ $=\frac{3}{8}(\pi-2\lambda)\alpha_2(x)$. К этому результату приводит подстановка (26.9) в уравнение $\lambda u(x)=\mathbf{\Gamma}u$. Таким образом, две ветви — нулевая и $u_\lambda(x)$ совпадают в точке ветвления $\lambda=\frac{\pi}{2}$, которая является и точкой бифуркации.

26.4. Точки бифуркации операторов Гаммерштейна.

Теорема 26.8. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Самосопряженный в L^2 положительный оператор*

$$\mathbf{A}u=\int\limits_B K(x,\ y)\,u(y)\,dy$$

действует вполне непрерывно из L^q в L^p, где $p>2$ $(p^{-1}+q^{-1}=1)$ и B — измеримое множество s-мерного евклидова пространства.

2°. *Измеримая по x на множестве B функция $g(u,\ x)$ удовлетворяет условию $g(0,\ x)\equiv 0$ и имеет частную производную $g'_u(u,\ x)$, которая непрерывна по $u\in(-\infty,+\infty)$, причем $\mathbf{h}'u=g'_u(u(x),\ x)$ есть непрерывный оператор из L^p в L^γ, $\gamma=\frac{p}{p-2}$, т. е.* (см. теорему 19.2) $|g'_u(u,\ x)|\leqslant$ $\leqslant a(x)+b\,|u|^{p-2}$, *где* $a(x)\in L^\gamma$.

Тогда каждое собственное число оператора

$$\mathbf{\Gamma}'(\theta)\,v=\int\limits_B K(x,\ y)\,g'_u(0,\ y)\,v(y)\,dy \qquad (26.10)$$

является точкой бифуркации оператора

$$\mathbf{\Gamma}u=\int\limits_B K(x,\ y)\,g(u(y),\ y)\,dy. \qquad (26.11)$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный из оператора $\mathbf{A}$. Из условия 1° согласно теореме 23.7 следует, что оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ действует вполне непрерывно из L^2 в L^p и из L^q в L^2. Затем, из условия 2° согласно лемме 20.1 вытекает, что оператор Немыцкого $\mathbf{h}u=g(u(x),\ x)$ есть непрерывный оператор из L^p в L^q $(p^{-1}+q^{-1}=1)$, а потому согласно теореме 21.1 (или согласно пункту 6.3) потенциал этого оператора будет

$$f(u)=\int\limits_B dy\int\limits_0^{u(y)} g(v,\ y)\,dv.$$

Рассмотрим теперь в пространстве L^2 функционал $\varphi(u)=f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right)$, который согласно теореме 23.8 имеет в L^2 усиленно непрерывный градиент

$$\Phi(u)=\operatorname{grad}\varphi(u)=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\,\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u.$$

Покажем, что потенциальный оператор Φ имеет производную Фреше в каждой точке $u\in L^2$. Действительно, из условия 2°, как это было установлено при доказательстве теоремы 20.3, следует, что оператор Немыцкого $\mathbf{h}$ имеет в каждой точке пространства L^p непрерывную производную Фреше, причем дифференциал Фреше

$$d\mathbf{h}(u,\ v)=g'_u(u(x),\ x)\,v(x)$$

действует из L^p в L^q, т. е.

$$\mathbf{h}(u+v)-\mathbf{h}u=g'_u(u(x),\ x)\,v(x)+\omega(x,\ u(x),\ v(x)),$$

где

$$\lim_{\|v\|_p\to 0}\frac{\|\omega(x,\ u(x),\ v(x))\|_q}{\|v\|_p}=0 \qquad (26.12)$$

(значки внизу у норм означают, что нормы берутся соответственно в пространствах L^q и L^p). Исходя из последних равенств, напишем:

$$\Phi(u+v)-\Phi(u)=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\left[\mathbf{h}\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u+\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v\right)-\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right]=$$
$$=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\left[g'_u\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u,\ x\right)\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v\right]+\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\left[\omega\left(x,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v\right)\right].$$

Но согласно неравенству (23.12′)

$$\left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\left[\omega\left(x,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v\right)\right]\right\|_2\leqslant N_1\left\|\omega\left(x,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v\right)\right\|_q.$$

а согласно неравенству (26.12)

$$\left\| \omega\left(x,\ A^{\frac{1}{2}} u,\ A^{\frac{1}{2}} v\right)\right\|_q < \varepsilon \left\| A^{\frac{1}{2}} v \right\|_p,$$

где $\varepsilon \to 0$, когда $\left\| A^{\frac{1}{2}} v \right\|_p \to 0$.

Наконец согласно неравенству (26.3′) имеем $\left\| A^{\frac{1}{2}} v \right\|_p \leqslant \leqslant N_2 \| v \|_2$.

Из последних неравенств имеем

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} \left[\omega\left(x,\ A^{\frac{1}{2}} u,\ A^{\frac{1}{2}} v\right)\right]\right\|_2 < \varepsilon N_1 N_2 \| v \|_2,$$

где постоянные N_1 и N_2 зависят от элемента $u \in L^2$ (мы предполагаем, что не нарушает общности, что векторы v принадлежат единичному шару пространства L^2). Следовательно,

$$\lim_{\| v \|_2 \to 0} \frac{\left\| A^{\frac{1}{2}} \omega\left(x,\ A^{\frac{1}{2}} u,\ A^{\frac{1}{2}} v\right)\right\|_2}{\| v \|_2} = 0,$$

т. е. оператор Φ имеет дифференциал Фреше:

$$d\Phi(u,\ v) = A^{\frac{1}{2}}\left(g'_u\left(A^{\frac{1}{2}} u,\ x\right) \cdot A^{\frac{1}{2}} v\right).$$

Отсюда следует, что производная Фреше

$$\Phi'(\theta) = A^{\frac{1}{2}}\left(g'_u(0,\ x) \cdot A^{\frac{1}{2}}\right).$$

Производная $\Phi'(\theta)$ представляет собой самосопряженный оператор в L^2, ибо

$$(\Phi'(\theta) v,\ w) = \left(A^{\frac{1}{2}}\left[g'_u(0,\ x) \cdot A^{\frac{1}{2}} v\right],\ w\right) =$$

$$= \left(g'_u(0,\ x) A^{\frac{1}{2}} v,\ A^{\frac{1}{2}} w\right) = \int_B g'_u(0,\ x) \cdot A^{\frac{1}{2}} v \cdot A^{\frac{1}{2}} w\, dx =$$

$$= \left(A^{\frac{1}{2}} v,\ g'_u(0,\ x) A^{\frac{1}{2}} w\right) = \left(v,\ A^{\frac{1}{2}}\left[g'_u(0,\ x) A^{\frac{1}{2}} w\right]\right).$$

Таким образом, оператор Φ удовлетворяет всем условиям теоремы 17.7, откуда следует, что каждое собственное число оператора $\Phi'(\theta)$ является точкой бифуркации оператора Φ. Но собственные числа оператора $\Phi'(\theta)$ совпадают с собственными числами оператора $\Gamma'(\theta)$, ибо из равенства $\mu u = A^{\frac{1}{2}}\left(g'_u(0, x) A^{\frac{1}{2}} u\right)$, где $|\mu|\,\|u\| > 0$, следует, что $\left\|A^{\frac{1}{2}} u\right\| > 0$, а потому, применяя оператор $A^{\frac{1}{2}}$ и полагая $z = A^{\frac{1}{2}} u$, получим, что $\mu z = A(g'_u(0, x)\cdot z)$, т. е. (см. равенство (26.10)), что μ — собственное число оператора $\Gamma'(\theta)$. Далее, если μ_0 — собственное число оператора Φ, т. е. $\Phi(u_0) \equiv A^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}A^{\frac{1}{2}} u_0 = \mu_0 u_0$, где $\mu_0 \neq 0$, то $\left\|A^{\frac{1}{2}} u_0\right\| > 0$. Отсюда, применяя к обеим частям последнего равенства оператор $A^{\frac{1}{2}}$ и полагая затем $A^{\frac{1}{2}} u_0 = z_0$, мы согласно равенству (26.11) получим $\Gamma z_0 = \mu_0 z_0$, т. е. μ_0 — собственное число оператора Γ. Следовательно, точки бифуркации оператора Φ будут точками бифуркации Γ. Отсюда и из предыдущего следует, что собственные числа оператора $\Gamma'(\theta)$ будут точками бифуркации оператора Γ. Теорема доказана.

В случае ограниченных ядер имеет место следующее предложение[1]).

Теорема 26.9. *Пусть выполнены следующие условия:*

1°. *Ядро $K(x, y)$ интегрального оператора*

$$Au = \int_B K(x, y)\, u(y)\, dy$$

симметрично, имеет лишь положительные характеристические числа, измеримо и ограничено в существенном на топологическом произведении $B \times B$, где B — измеримое множество конечной меры s-мерного евклидова пространства.

2°. *Измеримая по x на множестве B функция $g(u, x)$ удовлетворяет условию $g(0, x) \equiv 0$, имеет непрерывные по $u \in [-2c, +2c]$ ограниченные частные производные $g'_u(u, x)$ и $g''_{u^2}(u, x)$, причем на отрезке $[-2c, +2c]$ выполняется неравенство $|g(u, x)| \leqslant a(x) \in L^q$, где $1 < q < 2$.*

---

[1]) Ср. [36, ж], стр. 213—214.

Тогда каждое собственное число оператора (26.10) *является точкой бифуркации оператора* (26.11).

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — положительный корень квадратный из оператора $\mathbf{A}$. Из условия 1° согласно лемме 24.1 следует, что для всякого вектора $u \in L^2$

$$\operatorname{vrai\,sup}\left|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right| \leqslant M\|u\|, \tag{26.13}$$

где $M^2 = \sup K(x, y)$. Отсюда, опуская для краткости (что мы будем делать и впредь) символ vrai sup, в шаре $D(\|u\| \leqslant cM^{-1})$ будет

$$\left|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right| \leqslant c. \tag{26.14}$$

Исходя из условия 2°, мы продолжим вне отрезка $[-2c, +2c]$ функцию $g(u, x)$ так, чтобы согласно теореме 19.2 $\mathbf{h}u = g(u(x), x)$ был непрерывным оператором из L^p в $L^q (p^{-1} + q^{-1} = 1)$. Тогда согласно теореме 21.1 оператор $\mathbf{h}$ будет иметь потенциал

$$f(u) = \int_B dy \int_0^{u(y)} g(v, y)\,dv.$$

Рассмотрим теперь в шаре D пространства L^2 функционал $\varphi(u) = f\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u\right)$. Так как согласно условию 1° оператор $\mathbf{A}$ действует вполне непрерывно из L^q в L^p, то из теоремы 23.8 следует, что оператор $\Phi(u) = \operatorname{grad}\varphi(u) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{h}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u$ усиленно непрерывен в шаре D. Покажем, что в каждой точке этого шара D потенциальный оператор Φ имеет производную Фреше

$$\Phi'(u) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\left[g'_u\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u, x\right)\cdot\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\right].$$

Действительно, пусть u — фиксированный вектор из шара D, а v — произвольный вектор шара D. Напишем:

$$\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi'(u)v =$$
$$= \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\left[g\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u + \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v, x\right) - g\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u, x\right) - \right.$$
$$\left. - g'_u\left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}u, x\right)\cdot\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}v\right].$$

Так как согласно неравенству (26.14) $\left|A^{\frac{1}{2}}u\right| \leqslant c$, $\left|A^{\frac{1}{2}}v\right| \leqslant c$, то из условия 2° теоремы путем применения формулы Лагранжа получим

$$g\left(A^{\frac{1}{2}}u + A^{\frac{1}{2}}v,\ x\right) - g\left(A^{\frac{1}{2}}u,\ x\right) = \\ = g'_u\left(A^{\frac{1}{2}}u + \theta_1(x)A^{\frac{1}{2}}v,\ x\right)\cdot A^{\frac{1}{2}}v.$$

Затем

$$g'_u\left(A^{\frac{1}{2}}u + \theta_1(x)A^{\frac{1}{2}}v,\ x\right) - g'_u\left(A^{\frac{1}{2}}u,\ x\right) = \\ = \theta_1(x)\,g''_{u^2}\left(A^{\frac{1}{2}}u + \theta_2(x)A^{\frac{1}{2}}v,\ x\right)A^{\frac{1}{2}}v,$$

где $|\theta_1(x)| < 1$, $|\theta_2(x)| < 1$.

Отсюда и из предыдущего, учитывая неравенство (26.13), имеем

$$\left|g\left(A^{\frac{1}{2}}u + A^{\frac{1}{2}}v,\ x\right) - g\left(A^{\frac{1}{2}}u,\ x\right) - g'_u\left(A^{\frac{1}{2}}u,\ x\right)\cdot A^{\frac{1}{2}}v\right| < \\ < \left|g''_{u^2}\left(A^{\frac{1}{2}}u + \theta_2(x)A^{\frac{1}{2}}v,\ x\right)\cdot\left(A^{\frac{1}{2}}v\right)^2\right| \leqslant NM^2\|v\|^2,$$

ибо по условию $\left|g''_{u^2}\left(A^{\frac{1}{2}}u + \theta_2(x)A^{\frac{1}{2}}v,\ x\right)\right| \leqslant N = \text{const}$. Из этих неравенств и неравенства (26.13) далее следует

$$|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi'(u)v| \leqslant M\,\|NM^2\|\,v\,\|^2\| = \\ = NM^3\|v\|^2(\operatorname{mes} B)^{\frac{1}{2}}$$

или

$$\|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi'(u)v\| < NM^3\|v\|^2 \operatorname{mes} B.$$

Следовательно,

$$d\Phi(u,\ v) = \Phi'(u)v.$$

Поступая далее так же, как в предыдущей теореме, мы придем к утверждению теоремы.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. и Колмогоров А. Н., Введение в теорию функций действительного переменного, ОНТИ, 1938.

2. Алексеевич А. (Alexiewicz A.) и Орлич В. (Orlicz W.), On the differentials in Banach spaces. Ann. Soc. polon. math. **25** (1952), 95—99 (1953).

3. Ахиезер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов, Гостехиздат, 1950.

4. Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, Гос. научн.-техн. изд. Украины, 1938.

5. Банах С. С., Курс функціонального аналізу. Київ, 1948.

6. Биркгоф Г. Д. (Birkhoff G. D.) и Келлог О. Д. (Kellog O. D.), Invariant points in functions spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922), 96—115.

7. Борисович Ю. Г., а) К вопросу об оценке количества критических точек функционалов. Диссертация, Казанский гос. университет, 1955.

б) Об оценке количества критических точек функционалов. ДАН **101**, № 2 (1955), 205—207.

8. Быков Я. В., К проблеме собственных функций нелинейных интегральных уравнений. ДАН **72**, № 3 (1950), 449—452.

9 Вайнберг М. М., а) О собственных значениях одного класса нелинейных интегральных уравнений и о разветвлении его решений. Диссертация, МГУ, 1940.

б) Об одной теореме Гаммерштейна для нелинейных интегральных уравнений. Уч. зап. МГУ **1**, вып. 100 (1946), 93—103.

в) Теоремы существования собственных значений для одного класса нелинейных интегральных уравнений. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та **15**, вып. 1 (1950), 103—127.

г) Теоремы существования собственных значений для одного класса систем нелинейных интегральных уравнений. Матем. сб. **26 (68)**: 3 (1950), 365—394.

д) О непрерывности некоторых операторов специального вида. ДАН **73**, № 2 (1950), 253—255.

е) О собственных элементах одного класса нелинейных операторов. ДАН **75**, № 5 (1950), 609—612.

ж) О слабой непрерывности функционалов и их градиентов. ДАН **78**, № 5 (1951), 841—844.

з) Существование собственных функций у нелинейных интегральных уравнений с непозитивными ядрами. ДАН **78**, № 6 (1951)., 1077—1080.

и) Теоремы существования для систем нелинейных интегральных уравнений. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та **18**, вып. 2 (1951), 225—257.

к) К вариационной теории собственных значений иелинейных интегральных уравнений. ДАН **80**, № 3 (1951), 309—312.

л) К вопросу о вариационной теории собственных значений нелинейных интегральных уравнений. Матем. сб. **30** (**72**) (1952), 3—10.

м) О некоторых вариационных принципах в теории операторных уравнений. УМН **7**, вып 2 (1952), 197—200.

н) О дифференциале и градиенте функционалов. УМН **7**, вып. 3 (1952), 139—143.

о) Некоторые вопросы дифференциального исчисления в линейных пространствах. УМН **7**, вып. 4 (1952), 55—102.

п) Потенциальные операторы и вариационная теория нелинейных операторных уравнений. Докторская диссертация, МГУ, 1952, 1—245.

р) Существование собственных функций у нелинейных интегральных операторов с непозитивными ядрами и у произведения самосопряженного и потенциального операторов. Матем. сб. **32** (**74**): 3 (1953), 665—680.

с) О структуре одного оператора. ДАН **92**, № 2 (1953), 213—216.

т) О разрешимости некоторых операторных уравнений. ДАН **92**, № 3 (1953), 457—460.

у) Вариационная теория собственных функций нелинейных интегральных и других операторов. Труды Моск. матем. об-ва **3** (1954), 375—406.

ф) Интегральное уравнение Урысона. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та **21** (1954), 49—64.

х) Об одном виде (C)-свойства функций. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та **21** (1954), 65—72.

ц) О некоторых свойствах квадратичных форм в пространствах L^q ($q < 2$). ДАН **100**, № 5 (1955), 845—848.

ч) О неподвижных направлениях произведения некоторых операторов. ДАН **85**, № 2 (1952), 261—263.

10. Валле-Пуссен Ш. Ж., а) Курс анализа бесконечно малых, т. 1, ГТТИ, 1933.

б) Курс анализа бесконечно малых, т. 2, ГТТИ, 1933.

11 Винер Н. (Wiener N.), Note on a paper of M. Banach. Fund. Math. **4** (1923), 136—143.

12. Воскресенский Е. П. и Соболев В. И., Об одном классе нелинейных интегральных уравнений. ДАН **79**, № 5 (1951), 747—748.

13. Гавурин М. К., а) Über die Stieltjessche Integration abstrakter Funktionen. Fund. Math. **27** (1936), 254—268.

б) О k-кратно линейных операциях в пространствах Банаха. ДАН **22**, № 9 (1939), 547—551.

в) К построению дифференциального и интегрального исчисления в пространствах Банаха. ДАН **22**, № 9 (1939), 552—556.

г) Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований. Уч. зап. ЛГУ, сер. матем. **19** (1950), 59—154.

14. Гаммерштейн А. (Hammerstein A.), а) Über nichtlineare Integralgleichungen und die damit zusamenhängenden Randwertaufgaben. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung **38** (1929), 21—28.

б) Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. Acta Math. **54** (1930), 117—176.

15. Гантмахер В. Р. и Шмульян В. Л., а) О линейных пространствах, единичная сфера которых слабо компактна. ДАН **17** (1937), 91—94.

б) О слабой компактности в пространстве Банаха. Матем. сб. **8** (**50**) (1940), 489—492.

16. Гато Р. (Cateaux R.), а) Sur les fonctionelles continues et les fonctionelles analytiques. C. R. **157** (1913), 325—327.

б) Sur les fonctionelles continues et les fonctionelles analytiques. Bull. de la Soc. Math. de France **50** (1922), 1—21.

17. Гельфанд И. М., Abstrakte Funktionen und lineare Operationen. Матем. сб. **4** (**46**): 2 (1938), 235—283.

18. Герчинский Р., а) Некоторые топологические свойства нелинейных отображений в функциональных пространствах. Кандидатская диссертация, МГУ, 1955.

б) Теоремы о существовании неявных функций в функциональных пространствах. ДАН **105**, № 1 (1955), 7—10.

19. Гильдебрандт Т. (Hildebrandt T. H.) и Грэйвс Л. (Graves L. M.), Implicit functions and their differentials in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29** (1927), 127—153.

20. Голомб М. (Golomb M.), а) Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und algemeinen Funktionalglichungen. Math. Zeitchrift **39** (1934), 45—75.

б) Über Systeme von nichtlinearen Integralgleichungen. Publ. Math Univ. Belgrade **5** (1936), 52—83.

21 Гремяченский А. П., О собственных значениях систем нелинейных интегральных уравнений. ДАН **60**, № 3 (1948), 337—340.

22. Грэйвс Л. (Graves L. M.), Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29** (1927), 163—177.

23. Дольф К. (Dolf C. L.), Nonlinear integral equations of the Hammerstein type. Trans. Amer. Math. Soc. **60**, № 2 (1949), 289—307.

24. Драгони (Dragoni G. S.), Sur sistemi di equazini integrali non lineari Rendiconti del Seminario Matem. di Padova **VII** (1936), 1—35.

25. Дубровский В. М., а) О некоторых нелинейных интегральных уравнениях. Уч. зап. МГУ **30** (1939), 49—60.

б) Системы нелинейных интегральных уравнений. УМН **4**. вып. 2 (30) (1949), 176—177.

26. Иванов Н. А., О дифференциалах Гато и Фреше. УМН **10**, вып. 2 (64) (1955), 161—166.

27. Иглиш Р. (Iglisch R.), а) Zur Theorie der Schwingungen. Monatshefte f. Math. und Physik **37** (1930), 325—342; **39** (1932), 173—220; **42** (1935), 7—36.

б) Zur Theorie der reelen Verzweigungen von Lösingen nichtlinearer Integralgleichungen. Journal für die reine und angewandte Math. **164**, № 3 (1931), 150—172.

в) Reele Lösungsfelder der elleptischen Differentialgleichung und nichtlinearer Integralgleichungen. Math. Ann. **101** (1929), 98—119.

28. Иохвидов И. С., а) О спектрах эрмитовых и унитарных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. ДАН **71**, № 2 (1950), 225—228.

б) Унитарные и самосопряженные операторы в пространстве с индефинитной метрикой. Автореферат кандидатской диссертации, Одесса, 1950.

29. Канторович Л. В., а) О функциональных уравнениях. Уч. зап. ЛГУ **3** (17) (1937), 17—33.

б) The method of successive approximations for functional equations. Acta Math. **71** (1939), 63—97.

в) Функциональный анализ и прикладная математика. УМН **3**, вып. 6 (28) (1948), 89—185.

30. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Гостехиздат, 1950.

31. Каратеодори К. (Carathéodory C.), Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig und Berlin, 1927.

32. Карлеман Т. (Carleman T.), Sur les équations intégrales singulières à noyau réel symétrique. Uppsala, 1923.

33. Кернер М. (Kerner M.), а) Sur les variations faibles et fortes d'une fonctionelle. Annaly di Math. **4**, № 10 (1932), 145—164.

б) Die Differentiale in der algemeinen Analysis. Ann. of Math. **34** (1933), 546—572.

34. Колмогоров А. Н., Über die Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel. Nachrichten Ges. Wiss., Göttingen, 1931, 60—63.

35. Кондрашов В. И., Теория краевых задач и задач о собственных значениях для вариационных и дифференциальных уравнений в областях с вырожденными контурами. Автореферат докторской диссертации. Матем. ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, 1950.

36. Красносельский М. А., а) Признаки непрерывности некоторых нелинейных операторов. Укр. матем. журнал **2**, № 3 (1950), 70—86.

б) Непрерывность оператора fu. ДАН **77**, № 2 (1951). 185—188.

в) Исследования по нелинейному функциональному анализу. Докторская диссертация, Ин-т матем. АН УССР, 1950.

г) Расщепление линейных операторов, действующих из L_p в L_q. ДАН **82**, № 3 (1952), 333—336.

д) Некоторые свойства корня из линейного интегрального оператора. ДАН **88**, № 5 (1953), 749—751.

е) Новые теоремы существования решений у нелинейных интегральных уравнений. ДАН **88**, № 6 (1953), 949—952.

ж) Применение вариационных методов в задаче о точках бифуркации. Матем. сб. **33**, № 1 (1953), 199—214.

з) Некоторые задачи нелинейного анализа. УМН **9**, вып. 3 (61) (1954), 57—114.

и) К задаче о точках бифуркации. ДАН **79**, № 3 (1951), 389—392.

к) Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, 1956.

37. Красносельский М. А. и Поволоцкий А. И., К вариационным методам в задаче о точках бифуркации. ДАН **91**, № 1 (1953), 19—22.

38. Крейн М. Г., а) Винтовые линии в пространстве Лобачевского бесконечного числа измерений и лоренцовы преобразования. УМН **III**, вып. 3 (25) (1948), 158—160.

б) Об одном применении принципа неподвижной точки в теории линейных преобразований пространств с индефинитной метрикой. УМН **V**, вып. 2 (36) (1950), 180—190.

39. Крейн М. Г. и Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. УМН **III**, вып. 1 (23) (1948), 3—95.

40. Кулаков Н. Г., Исследование одной системы нелинейных интегральных уравнений. Диссертация, Моск. обл. пед. ин-т, 1955.

41. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1. ГТТИ, 1933.

42. Лаврентьев М. и Люстерник Л., Основы вариационного исчисления, т. 1, ч. 2. ОНТИ, 1935.

43. Лерей Ж. и Шаудер Ю., Топология и функциональные уравнения. УМН **1**, вып. 3—4 (13—14) (1946), 71—85.

44. Лихтенштейн Л. (Lichtenstein L.), а) Über einige Existenzprobleme der Variationsrechnung. Journal für Math. **145** (1915), 24—85.

б) Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen. Berlin, 1931.

45. Лузин Н. Н., Интеграл и тригонометрический ряд. Гостехиздат, 1951.

46. Люстерник Л. А., а) Об условных экстремумах функционалов. Матем. сб. **41**, 3 (1934), 390—401.

б) Об одном классе нелинейных операторов в гильбертовом пространстве. Изв. АН СССР, сер. матем., № 5 (1939), 257—264.

в) Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **19** (1947), 1—100.

г) Grundlagen der allgemeinen Eigenwerttheorie. Monatsheft für Math. und. Phys. **37** (1930), 125—130.

47. Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа. Гостехиздат, 1951.

48. Люстерник Л. А. и Шнирельман Л. Г., а) Топологические методы в вариационных задачах. Труды Института математики и механики при 1 МГУ, 1930, 1—68.

б) Применение топологии к эстремальным задачам. Труды 2 Всесоюзного матем. съезда, т. 1 (1935), 224—237.

в) Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхности. УМН **II**, вып. 1 (17) (1947), 166—217.

г) Sur un principe topologique d'analyse. Comp. Rend. de l'Acad. de Sci. de Paris **188** (1929), 295—297.

49. Ляпунов А. М., Sur les figures d'equilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide homogéne donée d'un mouvement de rotation, premiere partie. Etude général du probleme. Зап. Академии наук, С.-Петербург, 1906, 1—225.

50. Маринеску Г. (Marinescu G.), Asupra diferentialei si derivatei in spatiile normate. Bull. stiint. Acad. R. P. Romane, Seet. mat. si fiz. **6**, № 2 (1954), 213—219.

51. Мильман Д. П., О некоторых признаках регулярности пространства типа Банаха. ДАН **20** (1938), 243—246.

52. Михлин С. Г., а) Прямые методы в математической физике. Гостехиздат, 1950.

б) Вариационные методы решения задач математической физики. УМН **V**, вып. 6 (40) (1950), 3—51.

в) Об уравнениях эллиптического типа. ДАН **77**, № 3 (1951), 377—380.

г) Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат, 1952.

д) О применимости вариационного метода к некоторым вырождающимся эллиптическим уравнениям. ДАН **91**, № 4 (1953) 723—726.

53. Назаров Н. Н., а) Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна. Труды Средне-азиатского гос. ун-та, серия V-а, математика, вып. 23 (1941), Ташкент, стр. 79.

б) Некоторые вопросы теории спектров нелинейных интегральных уравнений. Труды института матем. и мех. Академии Наук Уз. ССР, вып. 4 (1948), матем. анализ и механика, 28—44.

54. Наймарк М. А., Линейныс дифференциальные операторы Гостехиздат, 1954.

55. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, 1950.

56. Некрасов А. И., Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. Изд. АН СССР, 1951.

57. Немыцкий В. В., а) Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений. Матем. сб. **41** (1934), 438—452.

б) Об одном общем классе нелинейных интегральных уравнений. Матем. сб. **41** (1934), 655—658.

в) Метод неподвижных точек в анализе. УМН, вып. 1 (1936), 141—174.

г) Solution des équations elliptiques pour les «petits» domains. Матем. сб. **1** (43) (1936), 485—500.

д) Нелинейные интегральные уравнения, сравнимые с линейными. ДАН **15**, № 1 (1937), 17—20.

е) Некоторые вопросы структуры спектра нелинейных вполне непрерывных операторов. ДАН **80**, № 2 (1951), 161—163.

ж) Структура спектра нелинейных вполне непрерывных операторов. Матем. сб. **33** (**75**): 3 (1953), 545—558.

58. Никаидо Х. (Nikaido H.), On a minimax theorem and its applications to functional analysis. J. Math. Soc. Japan **5**, № 1 (1953), 86—94.

59. Поволоцкий А. И., Нелокальные теоремы существования решений у систем нелинейных интегральных уравнений. ДАН **99**, № 6 (1954), 901—904.

60. Понтрягин Л С., Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. Изв. АН СССР (сер. матем.) **8**, № 6 (1944), 243—280.

61. Рисс Ф. (Riesz F.), Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Ann. **69** (1910), 449—497.

62. Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу. ГИИЛ, 1954.

63. Роте Э. (Rathe E.), а) Gradient Mappings in Hilbert space. Ann. of Math. **47**, № 3 (1946), 580—592.

б) Completely continuous Scalars and variational methods. Ann. of Math. **49**, № 2 (1948), 265—278.

в) Weak Topology and Nonlinear Integral Equations. Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), 75—92.

г) Critical Points and Gradient Fields of Scalar in Hilbert Space. Acta Math. **85**: 1—2 (1951), 73—98.

д) A Note on the Banach spaces of Calkin and Morrey. Pacific J. Math. **3** (1953), 493—499.

е) Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen, Compositio Math **5** (1937), 177—197.

ж) Gradient mappings and extrema in Banach spaces. Duke Math. Journal **15** (1948), 421—431.

64. Рутицкий Я. Б., а) Про один нелінійний оператор, що діє в просторах Орліча. Доповіді АН УССР **3**, № 3 (1952), 161—166.

б) Об одном классе линейных нормированных пространств и их некоторых приложениях к исследованию нелинейных интегральных уравнений. Диссертация, Киевский госуд. университет, 1952.

65. Соболев С. Л., а) Общая теория диффракции волн на римановых поверхностях. Труды физ.-мат. ин-та им. Стеклова АН СССР, т. 9 (1935), 39—106.

б) Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений. Матем. сб. 2 (**44**): 3 (1937), 465—498.

в) Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. Изд. ЛГУ, 1950.

66. Соболев В. И., а) О собственных элементах некоторых нелинейных операторов. Диссертация, МГУ (1940), 1—47.

б) О собственных элементах некоторых нелинейных операторов. ДАН **31**, № 8 (1941), 734—736.

в) Об одном нелинейном интегральном уравнении. ДАН **71**, № 5 (1950), 831—834.

67. Стоун М. (Stone M. H.), Linear transformations in Hilbert spaces. New-York, 1932.

68. Фреше М. (Fréchet M.), а) La notion de différentielle dans l'analyse générale. Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Supér. 42 (1925), 293—323.

б) Sur la notion différentielle. Journal de Math. 16 (1937), 233—250.

69. Фубини Г. (Fubini G.), Alcuni nuovi problemi di calcolo delle variazioni con applicazioni alla teoria delle equazioni integro-differenziali. Annali di Matematica 20 (1913), 217—244.

70. Фридрихс К. (Friedrichs K.), а) Spektraltheorie halbbeschrankter Operatorn und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. Math. Ann. 109 (1934), 465—487, 685—713.

б) On the boundary — value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality. Ann. of Math. 48, № 2 (1947), 441—471.

71. Хилл Э, Функциональный анализ и полугруппы, ГИИЛ, 1951, Москва.

72. Цитланадзе Э. С., а) Некоторые вопросы собственных значений для нелинейных операторов в гильбертовом пространстве. ДАН 53, № 4 (1946), 311—314.

б) Некоторые вопросы условного экстремума и вариационной теории собственных значений. ДАН 56, № 1 (1947), 17—20.

в) К вопросу о собственных значениях нелинейных вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве. ДАН 57, № 9 (1947), 879—881.

г) Доказательство принципа критической точки для условного экстремума в пространстве типа B. Сообщ. АН Груз. ССР 8, № 1—2 (1947), 7—10.

д) Об интегральных уравнениях типа Лихтенштейна. Сообщ. АН Груз. ССР 8, № 6 (1947), 359—363.

е) К вариационной теории одного класса нелинейных операторов в пространстве $L_p\,(p > 1)$. ДАН 71, № 3 (1950), 441—444.

ж) Некоторые задачи вариационного исчисления в функциональных пространствах. Докторская диссертация, МГУ, 1950, 1—118.

з) Об экстремумах функционалов в линейных пространствах. ДАН 74, № 6 (1951), 797—800.

и) О дифференцировании функционалов. Матем. сб. 29 (71): 1 (1951), 3—12.

к) Теоремы существования точек минимакса в пространствах Банаха и их приложения. Труды Моск. матем. об-ва 2 (1953), 235—274.

73. Шаудер Ю. (Schauder J.), а) Der Fixpunktsatz in Funktionalraumen. Stud. Math. 2 (1930), 1—6.

б) Über den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit und Lösbarkeit partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Math. Ann. 106 (1932), 661—721.

74. Шмидт Э. (Schmidt E.), Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, III Theil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen. Math. Ann. 65 (1908), 370—399.

75. Шмульян В. Л., О некоторых геометрических свойствах единичной сферы пространства типа (B). Матем. сб. **6** (48): 1 (1940), 77—94.

76. Шнирельман Л. Г., Über eine neue kombinatorische Invariante. Monatsheft fur Math. und Phys. **37**, № 1 (1930), 131—134.

77. Штейнхауз Г. (Steinhaus H.), Additive und stetige Funktionaloperationen. Math. Zeitschr. **5** (1919), 186—221.

78. Эберлейн В. Ф. (Eberlein W. F.), Weak compactness in Banach spaces I., Proc. Nat. Acad. Sci. **33** (1947), 51—53.

79. Эзрохи И. А., Некоторые типы линейных соответствий пространств Банаха. Уч. зап. ЛГУ, сер. матем. **16** (1949), 54—119.

80. Ясинский Ф. С., Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. Гостехиздат, 1952, приложение IV, 125—129.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ