М. М. ВАЙНБЕРГ
В. А. ТРЕНОГИН

ТЕОРИЯ ВЕТВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1969

517.2
В14
УДК 517.9

Теория ветвления решений нелинейных уравнений. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1969.

Книга посвящена актуальным вопросам теории нелинейных уравнений с аналитическими операторами, зависящими от числового или функционального параметра. В ней излагаются методы отыскания всех решений нелинейного уравнения, ответвляющихся от известного решения этого уравнения при изменении параметра. Такие математические задачи возникают при изучении различных вопросов механики и современной техники.

Методы, изложенные в книге, тесно связаны с давно известным в механике методом малого параметра, причем в наиболее важных для приложений случаях доказывается и сходимость этого метода.

Значительная часть книги посвящена вопросам, не излагавшимся до сих пор в монографиях.

Рисунков —19. Библ.—167 назв.

2-2-3
67-69

Оглавление

Глава V

Описание и построение решений нелинейных интегральных уравнений

Глава VI

Ветвление периодических решений дифференциальных уравнений

Глава X

Некоторые прикладные задачи

Предисловие

После выхода в свет монографии Л. Лихтенштейна [1], посвященной проблеме о ветвлении решений для некоторых классов аналитических нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, прошло более 35 лет.

За этот период теория ветвления интенсивно развивалась, были получены новые важные результаты, так что в настоящее время можно считать теорию ветвления решений нелинейных уравнений с аналитическими операторами в известном смысле завершенной.

Однако исследования в этой области, в которых принимали участие и авторы настоящей книги, изложены в виде кратких заметок и научных статей, опубликованных как у нас, так и за рубежом.

Это обстоятельство побудило авторов дать в настоящей книге систематическое изложение теории ветвления решений нелинейных уравнений с аналитическими операторами.

При этом мы придерживались принципа «от простого к сложному», с тем чтобы книга была доступна более широкому кругу читателей. Вот почему мы сначала рассматриваем классическую задачу о неявных функциях, интегральные, дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения, а затем лишь — уравнения в банаховых пространствах и примыкающие сюда задачи теории возмущений.

Отдельные части книги докладывались на математических конференциях, на Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде, в Московском математическом обществе и в семинарах при Московском университете. Всем лицам, принявшим участие в обсуждении, авторы выражают свою благодарность.

Особую благодарность авторы выражают Л. А. Люстернику и В. В. Немыцкому, беседы с которыми по отдельным частям книги во многом способствовали улучшению ее содержания.

Параграфы с 1 по 19 и 25 написаны М. М. Вайнбергом, параграфы с 21 по 24 и с 26 по 36 написаны В. А. Треногиным. Параграф 20 написан П. Г. Айзенгендлером, а параграф 37 написан Я. И. Секерж-Зеньковичем.

М. А. Наймарк и Д. П. Желобенко прочитали рукопись и сделали по ней ряд ценных замечаний. Авторы выражают им свою искреннюю благодарность.

Большой вклад внес редактор книги П. Г. Айзенгендлер, и авторы выражают ему свою глубокую благодарность.

Москва, май 1967 г. *Авторы*

Введение

В начале нашего столетия были опубликованы работы А. М. Ляпунова [1] и Э. Шмидта [1], заложившие основы теории ветвления решений функциональных уравнений.

В этих работах было показано, что задача о ветвлении решений нелинейных интегральных уравнений с аналитическими операторами может быть сведена к аналогичной задаче для систем неявных аналитических функций.

Хотя исследования Ляпунова возникли в связи с известной проблемой о фигурах равновесия вращающейся жидкости, они (а также исследования Шмидта) нашли применения в других областях и, в частности, в теории нелинейных колебаний.

За последнее время под влиянием различных задач механики и физики теория ветвления интенсивно развивалась, и это привело к решению ряда ее проблем и, в частности,— одной из трудных ее частей — о ветвлении решений нелинейных уравнений с аналитическими операторами в многомерном случае.

Настоящая книга и посвящена исследованию различных задач о ветвлении решений нелинейных уравнений с аналитическими операторами.

Математически задача о ветвлении решений уравнения может быть сформулирована следующим образом.

Пусть $G(u, v)$ — нелинейный оператор, заданный на прямой сумме (топологическом произведении) линейных топологических пространств E и E_2 ($u \in E$, $v \in E_2$) со значениями в линейном пространстве E_1. Пусть, далее, известно, что при $v = v_0$ уравнение

$$G(u, v_0) = 0$$

имеет решение $u = u_0$, т. е. $G(u_0, v_0) = 0$. Возникает вопрос о решениях уравнения

$$G(u, v) = 0,$$

ответвляющихся от u_0 (уточнения см. ниже) при значениях параметра v (функционального или числового), близкого в некотором смысле к v_0. Путем сдвига

$$u = u_0 + x, \quad v = v_0 + y$$

и замены

$$G(x + u_0, \quad y + v_0) = F(x, y)$$

задача сводится к нахождению решений уравнения

$$F(x, y) = 0, \tag{0.1}$$

ответвляющихся от нулевого (ибо $F(0, 0) = 0$) при значениях y, близких к нулю пространства E_2.

Такие задачи возникли давно. К ним, в частности, относится классическая задача о неявных функциях, когда частная производная или якобиан обращается в нуль в соответствующей точке.

Как известно, Ньютон ([1], стр. 33—44) рассмотрел задачу об отыскании всех решений уравнения

$$f(x, y) = 0, \tag{0.2}$$

стремящихся к y_0 при $x \to x_0$, если $f'_y(x_0, y_0) = 0$ и $f(x, y)$ разлагается в ряд по целым положительным степеням $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$. Решение уравнения (0.2) он искал в виде ряда

$$y = y_0 + a_1 (x - x_0)^{\varepsilon_1} + a_2 (x - x_0)^{\varepsilon_2} + \ldots, \tag{0.3}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ — возрастающая последовательность рациональных чисел. Для нахождения возможных значений $a_1, \varepsilon_1, a_2, \varepsilon_2, \ldots$ Ньютон воспользовался геометрическим приемом, получившим название диаграммы Ньютона.

Дальнейшие исследования, в которых приняли участие Лагранж, Пюизе [1] и другие (см. статью Н. Г. Чеботарева [1], в которой освещена история вопроса), показали, что дробные степени, входящие в каждый ряд вида (0.3), имеют конечный общий знаменатель и что эти ряды сходятся вблизи точки x_0.

Аналогичная задача возникает при изучении систем неявных функций. Пусть $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ — вещественные или комплексные переменные и $F_i(y_1, y_2, \ldots, y_n; x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,— соответственно вещественные или комплекснозначные функции, аналитические в начале координат и удовлетворяющие условиям

$$F_i\,(0,\ 0,\ \ldots,\ 0;\ 0) = 0.$$

Положим

$$B = -\left\| \frac{\partial F_i\,(0,\ \ldots,\ 0,\ 0)}{\partial y_j} \right\| \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда система

$$F_i\,(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n;\ x) = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

если положить вектор $y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$, примет вид

$$By = Ax + \varphi\,(x,\ y), \tag{0.4}$$

где A — вектор с координатами $\dfrac{\partial F_i(0,\ \ldots,\ 0;\ 0)}{\partial x}$ и вектор-функция $\varphi\,(x,\ y)$ удовлетворяет условию: $\varphi\,(x,\ y) = o\,(|x| + \|y\|)$ при $x,\ y \to 0$ ($\|y\|$ — какая-нибудь норма конечномерного пространства).

Если матрица B обратима, то по известной теореме о неявных функциях в некоторой окрестности точки $x = 0$, $y = 0$ уравнение (0.4) имеет единственное решение $y = y\,(x)$, стремящееся к нулю при $x \to 0$, и это решение является аналитической функцией от x.

Однако если B — вырожденная матрица, то возможно явление ветвления, т. е. уравнение (0.4) может иметь в классе непрерывных функций более одного решения, каждое из которых удовлетворяет условию $y\,(0) = 0$. Говорят тогда, что решения (ветви) выходят из точки (0, 0) или что $x = 0$, $y = 0$ является точкой ветвления решений уравнения (0.4).

В вещественном случае, т. е. когда x, y и F_i вещественны, возможны и такие явления ветвления, когда уравнение (0.4) имеет одно число решений при $x < 0$ и другое число решений при $x > 0$.

Таким образом, если B — вырожденная матрица, то возникает задача о нахождении числа всех непрерывных решений уравнения (0.4), удовлетворяющих условию $y\,(0) = 0$, вида каждого решения и о построении этих решений.

Подобные задачи возникают и в теории интегральных и дифференциальных уравнений. Приведем два примера.

Пусть $K(s, t)$ и $B_{mn}(s, t)$ — заданные непрерывные функции в единичном квадрате $(0 \leqslant s, t \leqslant 1)$, $f(s)$ — заданная непрерывная функция на $[0, 1]$, $u(s)$ — неизвестная функция, непрерывная на $[0, 1]$ и λ — числовой параметр. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$u(s) - Au = \lambda f(s) + \sum_{m+n \geqslant 2} \lambda^n \int_0^1 B_{mn}(s, t)\, u^m(t)\, dt, \tag{0.5}$$

где

$$Au = \int_0^1 K(s, t)\, u(t)\, dt.$$

Если 1 не является собственным значением оператора A, то оператор $B = I - A$ имеет ограниченный обратный B^{-1}. Применяя к обеим частям равенства (0.5) оператор B^{-1}, мы получим уравнение $u(s) = T(u, \lambda)$, эквивалентное уравнению (0.5), причем при достаточно малых $|\lambda|$ и $|u(s)|$ оператор $T(u, \lambda)$ будет сжимающим относительно $u(t)$. Ввиду этого уравнение (0.5) имеет при достаточно малых $|\lambda|$ единственное решение $u_\lambda(s)$, непрерывно зависящее от параметра λ и обращающееся в нуль при $\lambda = 0$.

Если 1 — собственное значение оператора A, то оператор B необратим, и тогда возможно явление ветвления, как и в классической задаче о неявных функциях. Здесь, в случае ветвления, каждая ветвь $u_\lambda(s)$ представляет собою семейство функций, непрерывно зависящее от параметра λ и стремящееся к нулю при $\lambda \to 0$. При этом функция $u_\lambda(s)$ при каждом фиксированном λ непрерывна по $s \in [0, 1]$ и удовлетворяет уравнению (0.5).

К явлению ветвления здесь можно отнести и такие случаи, когда в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$, $u(s) \equiv 0$ (точки функционального пространства) уравнение (0.5) не имеет решений.

Рассмотрим еще задачу Пуанкаре о периодических решениях системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \lambda g(t, x, \lambda), \tag{0.6}$$

где x, f, g представляют собою n-мерные векторы, λ — числовой параметр. Предполагается, что f и g — аналитические функции по x и λ, непрерывные по совокупности аргументов и ω-периодические по t.

Пусть при $\lambda = 0$ система (0.6) имеет ω-периодическое решение $\varphi(t)$. Ставится задача о нахождении при достаточно малых $|\lambda|$ всех непрерывных и ω-периодических решений $\psi(t, \lambda)$ системы (0.6), удовлетворяющих условию $\psi(t, 0) = \varphi(t)$. Оказывается (см. гл. VI), что если некоторая матрица B обратима, то данная задача имеет единственное решение, а если B — вырожденная матрица, то возможно явление ветвления, как и в классической задаче о неявных функциях.

Эти и другие примеры приводят к постановке следующей абстрактной задачи (A).

Пусть E и E_1 — линейные топологические пространства (в частности, банаховы пространства), λ — числовой параметр, $x \in E$, $F(x, \lambda)$ — аналитический оператор в точке $x = 0$, $\lambda = 0$ со значениями в пространстве E_1, удовлетворяющий условию $F(0, 0) = 0$. Рассмотрим уравнение $F(x, \lambda) = 0$, которое в силу аналитичности F (см., например, Хилле и Филлипс [1], гл. 26) принимает вид

$$Bx = F_{01}\lambda + \sum_{i+k\geqslant 2} \frac{1}{i!k!} F_{ik} x^i \lambda^k, \qquad (0.7)$$

где $(-1)\ F_{10} = B$ — линейный оператор из E в E_1, F_{01} — элемент из E_1, F_{ik} — частные производные Фреше от $F(x, \lambda)$ в точке $x = 0$, $\lambda = 0$ порядка i по x и порядка k по λ. Так же, как в предыдущих примерах, ставится задача об отыскании всех решений уравнения (0.7), непрерывно зависящих от параметра λ и стремящихся к нулю при $\lambda \to 0$.

Оказывается, что если оператор B обратим, то при достаточно малых $|\lambda|$ уравнение (0.7) имеет единственное решение, непрерывно зависящее от λ и стремящемся к нулю при $\lambda \to 0$, причем это решение представимо в виде сходящегося ряда

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \lambda^m. \qquad (0.8)$$

Если оператор B необратим, то возможно явление ветвления.

В случае ветвления уравнение (0.7) может иметь при достаточно малых $|\lambda|$ бесконечное или конечное число решений $x(\lambda)$, непрерывно зависящих от λ и удовлетворяющих условию $x(0) = 0$. Когда число решений конечное, каждое из них представимо в виде

$$x = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \lambda^{\frac{m}{s}}, \tag{0.9}$$

где s — натуральное число (свое для каждого решения).

Для решения этой задачи нужно выяснить, сколько решений она имеет, каков вид каждого решения, и указать пути их построения.

Перейдем к освещению основных методов, применяемых в теории ветвления.

Нами было отмечено, что если оператор B обратим, то уравнение (0.7) имеет единственное решение $x(\lambda)$, непрерывно зависящее от λ и удовлетворяющее условию $x(0) = 0$, причем оно представимо в виде (0.8). Для построения этого решения можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Именно, подставляя (0.8) в обе части равенства (0.7) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, мы для определения неизвестных b_m получим рекуррентную систему. Эта рекуррентная система разрешима и имеет единственное решение, ибо уравнение (0.7) имеет единственное решение вида (0.8).

Укажем, что таким способом отыскания решений пользовался еще Лагранж в работах [1, 2], послуживших началом метода малого параметра.

Метод построения решений в виде рядов по малому параметру широко применяется в задачах механики и физики (например, методы Пуанкаре и Ляпунова в теории нелинейных колебаний, работы Н. Н. Боголюбова и его учеников по теоретической физике). Однако когда оператор B необратим, то применение этого метода без дополнительной информации о решениях изучаемой задачи может привести (и приводит иногда) к почти неопределимым трудностям по следующим причинам.

Во-первых, в этом случае решения уравнения (0,7), обращающиеся в нуль при $\lambda = 0$, могут быть представимы как по целым, так и по дробным степеням λ. Ввиду этого, если искать решение уравнения (0.7) в виде ряда (0.9), т. е. по степеням $\lambda^{1/s}$ без предварительной информации об s, то рекуррентная система, получающаяся для определения неизвестных коэффициентов b_m, может оказаться неразрешимой. При этом может случиться, что первое неразрешимое уравнение рекуррентной системы имеет очень большой номер.

Во-вторых, когда оператор B необратим, уравнение (0.7) может иметь решения, зависящие от одного или более произвольных параметров. В данном случае ряды вида (0.8) и (0.9) могут расходиться при любом $\lambda \neq 0$, но формально удовлетворять уравнению (0.7). По этой причине до последнего времени не было общих теорем о сходимости рядов вида (0.9), представляющих решения уравнения (0.7), а в каждой отдельной задаче для доказательства сходимости таких рядов строились мажоранты.

В данной книге будет выделен широкий класс уравнений вида (0.7), названный ниже квазирегулярным, для которого все решения, непрерывно зависящие от параметра λ и обращающиеся в нуль при $\lambda = 0$, представимы при достаточно малых $|\lambda|$ в виде сходящихся рядов (0.8) и (0.9). При этом будет указан прием для нахождения всех дробных степеней, входящих в (0.9).

Будет также доказано, что для этого класса метод неопределенных коэффициентов (с учетом предварительной информации о виде дробных степеней) приводит к разрешимой рекуррентной системе, причем ряды, получающиеся этим методом, сходятся при достаточно малых $|\lambda|$. Таким образом, если уравнение вида (0.7) принадлежит к квазирегулярному классу, то всякое его решение вида (0.8) или (0.9), полученное методом неопределенных коэффициентов, является сходящимся при достаточно малых $|\lambda|$.

Отметим еще, что если уравнение вида (0.7) не принадлежит к упомянутому классу, то оно имеет бесчисленное множество решений вида (0.8) и (0.9), сходящихся при достаточно малых $|\lambda|$, бесчисленное множество решений вида (0.8) и (0.9), расходящихся при всяком $\lambda \neq 0$, и бесчисленное множество решений, не представимых в виде рядов.

Выделение квазирегулярного класса и доказательство перечисленных утверждений используют метод Ляпунова и Шмидта и недавние исследования, связанные с развитием этого метода. А. М. Ляпунов [1—3] и Э. Шмидт [1] рассмотрели нелинейные интегральные уравнения [1]) вида (0.7) в предположении, что область значений линейного оператора B замкнута и что подпространства нулей операторов B и B^* имеют одинаковые конечные размерности $r \geqslant 1$.

При выполнении этих условий их метод исследования заключается в том, что задача (A) об отыскании всех решений уравнения (0.7), непрерывно зависящих от λ и обращающихся в нуль при $\lambda = 0$, сводится к аналогичной задаче в конечномерном пространстве следующим образом.

Доказывается, что формула

$$x = \sum_{k_1+\ldots+k_r+k\geqslant 1} a_{k_1\ldots k_r k}\xi_1^{k_1}\ldots\xi_r^{k_r}\lambda^k, \tag{0.10}$$

в которой $\xi_i = \xi_i(\lambda)$ являются непрерывными решениями системы

$$\sum_{k_1+\ldots+k_r\geqslant 2} L^{(i)}_{k_1\ldots k_r 0}\xi_1^{k_1}\ldots\xi_r^{k_r} + \\ + \sum_{k_1+\ldots+k_r\geqslant 0} \xi_1^{k_1}\ldots\xi_r^{k_r}\sum_{k\geqslant 1} L^{(i)}_{k_1\ldots k_r k}\lambda^k = 0, \tag{0.11}$$

удовлетворяющими условию $\xi_i(0) = 0$, дает все решения задачи (A). Именно, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех решений задачи (A) и множеством всех непрерывных решений системы (0.11), удовлетворяющих условию $\xi_i(0) = 0$. Такие решения системы (0.11) называются малыми. В силу этого соответствия и формулы (0.10) задача (A) сводится к определению всех малых решений системы (0.11), называемой уравнением разветвления для задачи (A). Исходя из

---

[1]) В работе Э. Шмидта [1] параметр λ может быть и функциональным.

формулы (0.10), мы путем исследования уравнения разветвления (0.11) получаем информацию о числе и виде всех решений задачи (A). Эта информация, когда решения имеют вид (0.8) или (0.9), используется при нахождении этих решений методом неопределенных коэффициентов.

Таким образом, при решении различных задач теории ветвления метод Ляпунова и Шмидта сочетается с методом неопределенных коэффициентов.

Книга состоит из десяти глав.

Главы I и II служат основой всей книги. Они начинаются с изучения задачи о неявных функциях, когда матрица Якоби в соответствующей точке является вырожденной. Показано, в частности, что если дефект матрицы B, входящей в уравнение (0.4), равен r, то задача об отыскании всех непрерывных решений уравнения (0.4), стремящихся к нулю при $x \to 0$, сводится к нахождению всех малых решений уравнения разветвления (0.11). В связи с этим §§ 2—6 глав I и II посвящены исследованию уравнения разветвления, играющего важную роль во всех других главах книги. Исследование уравнения разветвления начинается с одномерного случая, т. е. когда $r = 1$. В одномерном случае исследование ведется при помощи диаграммы Ньютона. Дается описание диаграммы Ньютона, обоснование метода исследования при помощи этой диаграммы, а затем на конкретных примерах иллюстрируется, как этот метод приводит к описанию и построению всех малых решений уравнения разветвления.

В §§ 3 и 4 рассматриваются некоторые вопросы алгебры и теории функций многих комплексных переменных, нужные для исследования уравнения разветвления в общем виде. При этом наиболее важным является вопрос о делимости в специальном кнльце псевдомногочленов, который используется как в § 5, так и в § 6 при изложении некоторого видоизменения кронекеровского метода исключения. В §§ 5 и 6 устанавливаются предложения, при помощи которых в последнее время удалось развить наиболее трудную часть теории ветвления. Эти предложения существенно используются в других главах.

В главах III и IV излагается теория ветвления решений нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений и освещаются основные факты этой теории. В § 7 вводятся интегро-степенные ряды и оператор Ляпунова — Шмидта, изучаются их свойства, а затем применяются различные методы исследования простейшего нелинейного интегрального уравнения.

В § 8 исследуется общее нелинейное интегральное уравнение Ляпунова — Шмидта. Сначала изучается регулярный случай, а затем при помощи леммы Шмидта — и случай ветвления. Выводится уравнение разветвления как в одномерном случае ветвления, так и в многомерном случае ветвления.

В § 9 рассматриваются системы уравнений Ляпунова — Шмидта, нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с интегро-степенными рядами, другие виды интегро-дифференциальных уравнений и выводятся соответствующие уравнения разветвления.

В § 10 изучаются общее интегральное уравнение и интегральное уравнение Гаммерштейна с аналитическими правыми частями в предположении, что при некотором значении параметра они имеют решения, и ставится для них задача о ветвлении. Путем сдвига эти уравнения приводятся соответственно к следующим видам:

$$u(s)-\int_B K(s, t)\,u(t)\,dt=\lambda f(s)+\sum_{m+n\geqslant 2}\lambda^n\int_B B_{mn}(s, t)\,u^m(t)\,dt$$

и

$$u(s)-\int_B K(s, t)\,u(t)\,dt=$$
$$=\lambda f(s)+\lambda\sum_{m=1}^{\infty}{}'\int_B B_m(s, t)\,u^m(t)\,dt+\sum_{m=2}^{\infty}\int_B C_m(s, t)\,u^m(t)\,dt,$$

для которых задача о ветвлении в точке $\lambda=0$ изучается в основном в пространстве комплекснозначных функций, непрерывных на ограниченном замкнутом множестве B конечномерного евклидова пространства.

Для этих уравнений выводятся уравнения разветвления, вычисляются коэффициенты рядов, представляющих решения этих уравнений, обращающиеся в нуль при $\lambda=0$, а в § 11 вычисляются коэффициенты соответствующих уравнений разветвления для одномерного и двумерного случаев ветвления.

В главе V излагаются методы, приводящие к описанию и построению решений уравнений, рассмотренных в § 10, и изучается задача об особых решениях нелинейных интегральных уравнений.

В § 12 путем исследования уравнения разветвления дается описание малых решений нелинейных интегральных уравнений в одномерном, двумерном и многомерном случаях ветвления. Дается описание ветвей в случае бифуркации и исследуется вопрос о ветвлении изолированного решения. В § 13 показано, как строить решения путем сочетания методов теории ветвления с методом неопределенных коэффициентов. В качестве примеров рассмотрены краевая задача для квазилинейных дифференциальных уравнений эллиптического типа и задача Некрасова о волнах установившегося вида.

В § 14 дается описание особых решений нелинейных интегральных уравнений и указывается, как их строить. При этом используются те же методы, что и в предыдущих двух параграфах.

Глава VI посвящена изучению задачи Пуанкаре о периодических решениях. Этой задачей занимались многие авторы (см., например, Л. Чезари [1]), которые в своих исследованиях ограничились рассмотрением отдельных частных случаев. Оказывается, что методы теории ветвления дают подход для решения задачи Пуанкаре в общей постановке. Это и показано в данной главе.

В §§ 15 и 16 исследуются уравнения, которые в векторной записи имеют соответственно вид ранее приведенного уравнения (0.6) и

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(t) + \lambda g(t, x, \lambda).$$

После постановки задачи и освещения метода Пуанкаре приводятся некоторые вспомогательные предложения и выводятся соответствующие уравнения разветвления. Исследование уравнения разветвления приводит к выводам о числе решений рассматриваемой задачи и о виде каждого решения.

Аналогичное исследование проводится в § 17 для автономных систем дифференциальных уравнений. Как всегда, изучение задачи Пуанкаре для автономных систем связано с преодолением дополнительных трудностей, так как и период отыскиваемых ветвей неизвестен. В § 18 пока ано, как строятся решения изучаемой задачи для автономных и неавтономных систем.

В § 19 показано, что задача об особых периодических решениях некоторого вида сводится к задаче Пуанкаре, изученной в § 16. В этом параграфе изучается также задача Пуанкаре в банаховых пространствах.

В последнем параграфе данной главы изучается вопрос об устойчивости периодических решений задачи Пуанкаре. Этот вопрос представляет большой интерес как для теории, так и для ее приложений. Оказывается, что и в вопросе об устойчивости периодических решений, зависящих от малого параметра, методы теории ветвления позволяют изучить задачу в более общей постановке и приводят к новым важным фактам.

В предыдущих главах были рассмотрены алгебраические, интегральные, интегро-дифференциальные уравнения, а также задача о периодических решениях. Однако круг задач, в которых применяется теория ветвления, все время расширяется. Поэтому имеет смысл дать изложение общей абстрактной теории, которая охватывала бы возможно широкие классы задач.

В главе VII такая теория строится для уравнений в банаховых пространствах с линейной фредгольмовской частью. § 21 содержит вспомогательные сведения из теории нормально разрешимых ограниченных линейных операторов в банаховых пространствах.

Если фредгольмовский оператор B необратим, то для изучения уравнения $Bx = h$ можно поступить двояко: либо рассмотреть сужение $\hat{B}$ оператора B, имеющее обратный оператор $\hat{B}^{-1}$, либо построить обратимый оператор $\widetilde{B}$, действующий во всем пространстве (обобщенная лемма Шмидта). В этом же параграфе приводится известная теорема С. М. Никольского и устанавливается связь с сопряженным оператором B^*.

В § 22 приведены известные факты нелинейного функционального анализа, относящиеся к теории аналитических операторов. Излагаются теоремы о неявных операторах в аналитическом и неаналитическом случаях.

Рассмотрен и случай неограниченных операторов. Основное содержание главы составляют §§ 23—25, в которых дается решение основной задачи теории ветвления в аналитическом случае, а также получен ряд других результатов.

В § 23 показано, что задача отыскания малых решений уравнения $\Phi(x, y) = 0$, где $\Phi(0, 0) = 0$, оператор Φ достаточно гладкий, а $B = -\Phi_x(0, 0)$ — оператор фредгольмовский, с числом нулей $n > 0$, эквивалентна задаче отыскания малых решений некоторой алгебраической системы n числовых уравнений с n неизвестными и параметром y. Эта система, называемая уравнением разветвления, имеет, вообще говоря, неединственное решение. Уравнение разветвления выведено как с помощью оператора $\hat{B}$, так и с помощью обобщенной леммы Шмидта. При этом получены две эквивалентные формы уравнения разветвления, каждая из них имеет свои преимущества при рассмотрении конкретных вопросов.

В §§ 24 и 25 в основном изучается уравнение вида (0.7), когда число нулей оператора B равно n. Уравнение разветвления имеет вид (0.11). Вычисляются его первые коэффициенты при $r = 1$ и $r = 2$, а затем путем применения соответствующих результатов глав I, II устанавливаются различные предложения о числе и виде решений уравнения (0.7).

В главе VIII рассмотрен более общий случай, когда линейная часть B оператора Φ является нетеровской.

В § 26 рассмотрены вспомогательные вопросы линейной теории. § 27 содержит теоремы о ветвлении решений.

Пусть n — число нулей оператора B, а m — число нулей оператора B^*. Если $n > 0$, $m > 0$, то, как и выше, задача отыскания малых решений уравнения (0.7) сводится к уравнению разветвления, которое представляет собою систему m числовых уравнений с n числовыми неизвестными и параметром и может быть исследовано методами §§ 5 и 6.

Если $n = 0$, $m > 0$, то уравнение (0.7) перегружено и, оказывается, может иметь не более одного решения. Рассмотрен и случай $n > 0$, $m = 0$, когда уравнение (0.7) недогружено и имеет семейство решений, зависящих от n свободных параметров.

В § 28 показана применимость полученных результатов к сингулярным нелинейным интегральным уравнениям с ядром типа Коши в пространствах Гёльдера и к сингулярным нелинейным интегральным уравнениям с ядром типа Гильберта в пространствах Лебега.

В последние годы различными авторами установлена нетеровость (или фредгольмовость) различных операторов, порожденных эллиптическими краевыми задачами для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Каждый такой результат позволяет применить абстрактную схему глав VII и VIII к соответствующему классу нелинейных задач. При этом получается большое разнообразие как методов, так и результатов в зависимости от того, какой класс задач и в каких пространствах рассматривается. В § 29 рассмотрено три класса краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений, достаточно полно на наш взгляд иллюстрирующих имеющиеся возможности.

К теории ветвления тесно примыкает большая группа задач теории возмущений. Некоторые из этих задач приводятся в главе IX.

В § 30 изложены в основном известные результаты о жордановых цепочках и наборах фредгольмовских операторов, близкие к исследованиям М. В. Келдыша, А. С. Маркуса и других. В § 31 изучается задача о возмущении линейного уравнения малым линейным слагаемым. Этой задаче посвящены работы многих авторов. Наиболее полно ее рассмотрели М. И. Вишик и Л. А. Люстерник. Оказывается, что методы теории ветвления позволяют уточнить некоторые известные факты.

§ 32 содержит решение задачи о собственных значениях и собственных элементах линейных операторов. Этой задаче посвящена обширная литература. Хороший обзор относящихся сюда работ имеется в книге Данфорда и Шварца. Наш подход отличается от общепринятого лишь систематическим применением методов теории ветвления, развитых для нелинейных задач. Это позволяет не только довольно просто получить известные результаты, но и в ряде случаев установить новые. Некоторые утверждения § 32 являются уточнениями или обобщениями результатов М. И. Вишика и Л. А. Люстерника.

В § 33 рассмотрена задача, являющаяся обобщением на нелинейный случай задачи, рассмотренной в § 31.

Понятие жордановой цепочки переносится на нелинейный случай. Это позволяет в сочетании с методами главы VII исследовать все решения задачи с заданным порядком роста как ограниченные, так и особые. Близкая задача изучалась в § 14.

Заметим, что аппарат, развитый в § 33, нашел применение и в других нелинейных задачах, например в задаче об «уединенной волне».

В последней X главе книги приводятся некоторые конкретные прикладные задачи, решение которых получается методами теории ветвления.

ГЛАВА I

Системы неявных функций и классическая теория ветвления

§ 1. Задача о неявных функциях

1.1. Классические теоремы о неявных функциях. Сначала мы приведем формулировки известных теорем о неявных функциях, доказательство которых можно найти в различных курсах математического анализа (см., например, Валле-Пуссен [1], Гурса [1, 2], Фихтенгольц [1], Немыцкий, Слудская, Черкасов [1]).

Теорема 1.1. *Пусть* $F_i(y_1, y_2, \ldots, y_p; x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, — *вещественные непрерывные функции вещественных аргументов, обращающиеся в нуль в точке* M $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_s^0)$. *Тогда, если в некоторой окрестности* U *точки* M *функции* F_i *имеют по* $y_1, y_2, \ldots, y_p$ *частные производные, непрерывные в точке* M, *и функциональный определитель*

$$I = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$$

не равен нулю в точке M, *то система уравнений*

$$F_i(y_1, y_2, \ldots, y_p; x_1, x_2, \ldots, x_s) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

имеет в некоторой окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_s^0)$ *единственное непрерывное решение*

$$y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_s), \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

удовлетворяющее условию

$$\varphi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_s^0) = y_i^0.$$

Если в дополнение к условиям теоремы 1.1 потребовать существования в U непрерывных частных производных от функций F_i по всем аргументам y_j и x_k, то функции φ_i будут иметь в некоторой окрестности U_1 точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_s^0)$ непрерывные частные производные. Вообще, если функции F_i достаточно гладки в U, то функции φ_i имеют такую же гладкость в U_1. Имеет место и следующее предложение.

Теорема 1.2. *Пусть в некотором шаре с центром в точке M функции F_i разлагаются в сходящиеся ряды по степеням $(y_i - y_i^0)$ и $(x_k - x_k^0)$, $i = 1, 2, \ldots, p$; $k = 1, 2, \ldots, s$, причем эти ряды не содержат свободных членов. Тогда, если функциональный определитель $I = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_p)}$ отличен от нуля в точке M, то система уравнений*

$$F_i(y_1, y_2, \ldots, y_p; x_1, x_2, \ldots, x_s) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, p,$$

имеет единственное решение $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, удовлетворяющее условию $\varphi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_s^0) = y_i^0$, причем в некотором шаре с центром в точке $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_s^0)$ функции φ_i разлагаются в сходящиеся ряды по степеням $(x_k - x_k^0)$.

Заметим, что теорема 1.2 справедлива и в комплексном случае, т. е. когда F_i — комплекснозначные функции комплексных аргументов.

1.2. Общее исследование задачи о неявных функциях. Пусть функции $F_i(y_1, y_2, \ldots, y_q; x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, определены и достаточно гладки в некоторой окрестности точки $M(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_q^0; x_1^0, x_2^0, \ldots, x_s^0)$. Без ограничения общности мы можем считать, что

$$x_1^0 = x_2^0 = \ldots = x_s^0 = y_1^0 = y_2^0 = \ldots = y_q^0 = 0,$$

так как путем замены $y_i = y_i^0 + Y_i$ и $x_k = x_k^0 + X_k$ общий случай сводится к данному. Мы также будем предполагать, что $F_i(0, 0, \ldots, 0; 0, 0, \ldots, 0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Рассмотрим систему

$$F_i(y_1, y_2, \ldots, y_q; x_1, x_2, \ldots, x_s) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{1.1}$$

и поставим задачу об отыскании всех непрерывных решений

$$y_j = \varphi_j(x_1, x_2, \ldots, x_s), \quad j = 1, 2, \ldots, q,$$

данной системы, удовлетворяющих условию

$$\varphi_j(0, 0, \ldots, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, q, \tag{1.2}$$

и определенных в некоторой окрестности начала координат $x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0$ или в некоторой области, для которой начало координат $x_1 = \ldots = x_s = 0$ является предельной точкой. Такие решения мы будем называть малыми.

Если данная задача (1.1) — (1.2) имеет единственное (хотя бы локальное) решение, то мы скажем, что нулевое (при $x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0$) решение системы (1.1) продолжается. В противном случае, т. е. если система (1.1) не имеет малых решений или имеет более одного малого решения, мы будем говорить о ветвлении нулевого решения (или о ветвлении малых решений).

Перейдем к общему исследованию [1]) задачи (1.1) — (1.2).

Учитывая гладкость функций F_i, мы для краткости запишем систему (1.1) в матричной форме:

$$By = Ax + L(x, y), \tag{1.3}$$

где

$$B = \|b_{ij}\| = -\left\| \frac{\partial F_i(0, 0, \ldots, 0; 0, 0, \ldots, 0)}{\partial y_j} \right\| \tag{1.4}$$

— прямоугольная матрица с размерами $p \times q$;

$$A = \|a_{ik}\| = \left\| \frac{\partial F_i(0, 0, \ldots, 0; 0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_k} \right\|$$

— прямоугольная матрица с размерами $p \times s$;

$$y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{Vmatrix}, \qquad x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{Vmatrix}, \qquad L(x, y) = \begin{Vmatrix} l_2(x, y) \\ l_2(x, y) \\ \vdots \\ l_p(x, y) \end{Vmatrix}$$

суть столбцевые матрицы, причем $L(x, y) = 0\,(|x| + |y|)$ при $x \to 0$, $y \to 0$, где $|\cdot|$ — какая-нибудь норма конечномерного пространства.

Пусть r — ранг матрицы B. Мы будем предполагать, что $r \geqslant 1$, если $p > 1$. Ясно, что $r \leqslant \min(p, q)$.

Без ограничения общности можно считать, что отличный от нуля минор порядка r матрицы B расположен

---

[1]) Отметим, что в ином плане задача о неявных функциях изучалась в работах Н. П. Еругина [1, 2].

в ее левом верхнем углу, что мы и будем всюду предполагать.

Возможны три случая.

Первый случай. $r = p < q$.

В этом случае система (1.1) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{q} b_{ij} y_j = \sum_{k=1}^{s} a_{ik} x_k + l_i(x, y), \qquad i = 1, 2, \ldots, p. \quad (1.5)$$

Перенеся члены с $y_{p+1}, \ldots, y_q$ в правую часть, получим

$$\sum_{j=1}^{p} b_{ij} y_j = -\sum_{j=p+1}^{q} b_{ij} y_j + \sum_{k=1}^{s} a_{ik} x_k + l_i(x, y), \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

По предположению квадратная матрица $\|b_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, p$, обратима, а потому, считая $y_{p+1}, \ldots, y_q$ малыми параметрами и учитывая малость x, мы по теореме 1.1 о неявных функциях находим

$$y_\nu = \psi_\nu (y_{p+1}, \ldots, y_q;\ x_1, \ldots, x_s), \quad \nu = 1, 2, \ldots, p.$$

Здесь в качестве $y_{p+1}, \ldots, y_q$ можно выбрать любые непрерывные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_s$, обращающиеся в нуль при $x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0$. Этим доказана следующая

Теорема 1.3. *Если ранг матрицы B равен p ($p < q$), то задача* (1.1) — (1.2) *имеет решение, зависящее от $q - p$ произвольных непрерывных функций аргументов x_k* ($k = 1, 2, \ldots, s$), *обращающихся в нуль при $x_k = 0$.*

Второй случай. $r = q < p$.

В этом случае система (1.1) также имеет вид (1.5). Возьмем первые q уравнений системы (1.5).

Так как по предположению квадратная матрица $\|b_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2, \ldots, q$) обратима, то по теореме 1.1 о неявных функциях из первых q уравнений системы (1.5) найдем

$$y_\nu = \psi_\nu (x_1, x_2, \ldots, x_s),$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, q,$$

Найденные значения y_ν должны удовлетворять также последним $p-q$ уравнениям системы (1.5), т. е.

$$\sum_{j=1}^{q} b_{ij}\psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}x_k + \\ + l_i(x_1, x_2, \ldots, x_s; \psi_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, \psi_q(x_1, \ldots, x_s)) \quad (1.6)$$
$$(i = q+1, \ldots, p).$$

Полученные соотношения (1.6) определяют то множество значений $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, на котором определено локальное решение $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$. Это множество может состоять лишь из точки $(0, 0, \ldots, 0)$. Мы пришли к следующему предложению.

Теорема 1.4. *Если ранг матрицы B равен q $(q < p)$, то локальное решение задачи* (1.1) — (1.2) *единственно. Область его существования определяется соотношениями* (1.6).

Третий случай. $r < \min(p, q)$. В этом случае система (1.1) также имеет вид (1.5). Так как по предположению матрица $B_{rr} = \|b_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$, обратима, то, считая $y_{r+1}, \ldots, y_q$ малыми параметрами и учитывая малость x, мы путем применения к первым r уравнениям системы (1.5) теоремы 1.1 о неявных функциях находим

$$y_\nu = \psi_\nu(y_{r+1}, \ldots, y_q;\ x_1, \ldots, x_s), \quad \nu = 1, 2, \ldots, r.$$

Подставляя эти решения в последние $p-r$ уравнений системы (1.5), получим для определения $y_{r+1}, \ldots, y_q$ следующую систему $p-r$ уравнений:

$$\sum_{j=1}^{r} b_{ij}\psi_j(y_{r+1}, \ldots, y_q; x_1, x_2, \ldots, x_s) + \sum_{j=r+1}^{q} b_{ij}y_j - \\ - \sum_{k=1}^{s} a_{ik}x_k - l_i(x_1, x_2, \ldots, x_s; \psi_1(y_{r+1}, \ldots, y_q; x_1, \ldots, x_s), \ldots \\ \ldots, \psi_r(y_{r+1}, \ldots, y_q; x_1, \ldots, x_s), y_{r+1}, \ldots, y_q) = 0 \quad (1.7)$$
$$(i = r+1, \ldots, p).$$

Назовем систему (1.7) уравнением разветвления по причинам, которые будут выяснены ниже. Относительно системы (1.7) справедлива следующая

Лемма 1.1. *В системе* (1.7) *отсутствуют члены первого порядка, содержащие* $y_{r+1}, \ldots, y_q$, *и нулевого порядка, т. е. матрица Якоби системы* (1.7) *при* $y_{r+1} = \ldots = y_q = x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0$ *равна нулю.*

Доказательство. Введем обозначения:

$$B_{11} = \|b_{ij}\|_{i,\, j=1,2,\ldots,r}, \qquad B_{12} = \|b_{ij}\|_{i=1,\ldots,r;\; j=r+1,\ldots,q},$$

$$B_{21} = \|b_{ij}\|_{\substack{i=r+1,\ldots,p,\\ j=1,2,\ldots,r}}, \qquad B_{22} = \|b_{ij}\|_{\substack{i=r+1,\ldots,p,\\ j=r+1,\ldots,q}}$$

$$\eta_1 = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{matrix} \right\|, \quad \eta_2 = \left\| \begin{matrix} y_{r+1} \\ \vdots \\ y_q \end{matrix} \right\|, \quad L_1 = \left\| \begin{matrix} l_1 \\ \vdots \\ l_r \end{matrix} \right\|, \quad L_2 = \left\| \begin{matrix} l_{r+1} \\ \vdots \\ l_p \end{matrix} \right\|,$$

$$A_1x = \left\| \begin{matrix} \sum\limits_{k=1}^{s} a_{1k}x_k \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \sum\limits_{k=1}^{s} a_{rk}x_k \end{matrix} \right\|, \qquad A_2x = \left\| \begin{matrix} \sum\limits_{k=1}^{s} a_{(r+1)k}x_k \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \sum\limits_{k=1}^{s} a_{pk}x_k \end{matrix} \right\|.$$

С помощью этих обозначений система (1.5) примет вид

$$B_{11}\eta_1 + B_{12}\eta_2 = A_1x + L_1(x, y), \tag{1.8}$$

$$B_{21}\eta_1 + B_{22}\eta_2 = A_2x + L_2(x, y). \tag{1.9}$$

Из (1.8) находим

$$\eta_1 = -B_{11}^{-1}B_{12}\eta_2 + B_{11}^{-1}A_1x + o(|x| + |y|).$$

Подставляя η_1 в (1.9), имеем

$$[-B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} + B_{22}]\,\eta_2 = O(|x|) + o(|x| + |y|).$$

Представим теперь матрицу B в блочном виде:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

По условию

$$\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} B_{11} = r.$$

Помножим слева первую блочную строку матрицы B на $B_{21}B_{11}^{-1}$ и вычтем ее из второй блочной строки. При этом ранг не изменится, и мы получим

$$\operatorname{rang} B = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} \end{pmatrix}.$$

Применяя элементарные преобразования к последней матрице, получим

$$\operatorname{rang} B = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} \end{pmatrix} = r,$$

где E_r — единичная матрица порядка r. Отсюда следует, что $B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}\ B_{12} = 0$, и система (1.5) принимает вид

$$O(|x|) + o(|x| + |y|) = 0,$$

т. е. в левой части системы (1.7) нет свободных членов, а среди линейных слагаемых нет членов с $y_{r+1}, \ldots, y_q$. Лемма доказана.

Из данной леммы вытекает, что система (1.7), вообще говоря, имеет неединственное решение относительно $y_{r+1}, \ldots, y_q$. Вот почему система (1.7) названа уравнением разветвления. Мы приходим к предложению.

Теорема 1.5. *Если* $1 \leqslant r < \min(p, q)$, *то число малых решений задачи* (1.1) — (1.2) *равно числу малых решений уравнения разветвления* (1.7), *а область определения этих решений также определяется системой* (1.7).

1.3. Аналитический случай. Пусть в дополнение к условиям предыдущего пункта функции

$$F_i(y_1, y_2, \ldots, y_q; x_1, x_2, \ldots, x_s), \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

являются аналитическими по совокупности всех аргументов в начале координат и ранг матрицы B удовлетворяет условию $1 \leqslant r < \min(p, q)$.

Введем обозначения: $m = q - r, \quad n = p - r$,

$$y_{r+1} = \xi_1, \; y_{r+2} = \xi_2, \ldots, \; y_q = \xi_m.$$

Так как функции F_i являются аналитическими, то и функции $l_i(x, y)$, входящие в систему (1,5), также являются аналитическими. Далее, согласно теореме 1.2 функции

$$\psi_\nu(y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_q; x_1, x_2, \ldots, x_s), \quad \nu = 1, 2, \ldots, r,$$

введенные при доказательстве теоремы 1.5, являются аналитическими. Ввиду этого система (1.7) (т. е. уравнение разветвления) может быть записана в виде

$$\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; x_1, x_2, \ldots, x_s) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.10}$$

где Φ_i — аналитические в начале координат функции $m+s$ переменных, удовлетворяющие условиям: $\Phi_i(0, 0, \ldots, 0; 0, 0, \ldots, 0) = 0$, и среди линейных слагаемых нет таких, которые содержали бы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$. В частности, если речь идет о системе неявных функций одного аргумента x_1, то при $p = q$ уравнение разветвления, если положить $x_1 = \lambda$, принимает вид

$$\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.11}$$

Для полного решения общей задачи о неявных функциях в аналитическом случае нужно из уравнения разветвления, т. е. из системы (1.10), определить $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ как непрерывные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_s$, обращающиеся в нуле в нуль. Этим будут найдены $y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_q$ и при помощи формул

$$y_\nu = \psi_\nu(y_{r+1}, \ldots, y_q; x_1, \ldots, x_s), \quad \nu = 1, 2, \ldots, r,$$

остальные функции $y_1, y_2, \ldots, y_r$.

Поэтому исследование уравнения разветвления представляет большой интерес для теории неявных функций. Это исследование представляет также интерес для теории малых решений нелинейных уравнений в различных функциональных пространствах. В работах М. А. Ляпунова [1—3] и Э. Шмидта [1], опубликованных в начале нашего столетия, было показано, что задача о малых решениях (см. пункты 8.4 и 8.5) нелинейных интегральных уравнений сводится к исследованию выведенного ими уравнения разветвления этой задачи. Вот почему система (1.10) (а также система (1.11)) называется уравнением разветвления Ляпунова — Шмидта. Исследованию уравнения разветвления будут посвящены остальные параграфы настоящей и следующей главы. Сначала (§ 2) мы рассмотрим одномерный случай ветвления, т. е. когда в уравнении разветвления $n = 1$, затем (в § 5) двумерный, т. е. когда $n = 2$, и, наконец (§ 6), многомерный. Для изучения многомерного случая мы предварительно в §§ 3 и 4 рассмотрим некоторые вопросы как теории функций многих комплексных переменных, так и теории делимости.

§ 2. Одномерный случай ветвления и диаграмма Ньютона

Здесь мы исследуем уравнение разветвления (1.11) когда $n = 1$. В этом случае оно принимает вид

$$\sum_{k=2}^{\infty} L_{k0}\xi^k + \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \sum_{\nu=1}^{\infty} L_{k\nu}\lambda^\nu = 0. \tag{2.1}$$

Числа $L_{k\nu}$ называются коэффициентами уравнения разветвления. К такому уравнению разветвления мы приходим, когда в задаче о неявных функциях (1.1) — (1.2) с аналитическими F_i выполняются условия: $p = q \geqslant 1$, $r = p - 1$, $s = 1$.

Для исследования уравнения (2.1) мы воспользуемся диаграммой Ньютона.

Ньютон, по-видимому, впервые исследовал вопрос об отыскании неявных функций, когда частная производная может обращаться в нуль. В одной из своих работ (Ньютон [1], стр. 33—44) он рассматривает уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{2.2}$$

между вещественными переменными x и y, предполагая, что $F(x_0, y_0) = 0$ и что $F(x, y)$ разлагается в ряд по целым положительным степеням $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$ без требования того, что $F_y'(x_0, y_0) \neq 0$. Решение уравнения (2.2) он ищет в виде ряда

$$y = y_0 + \alpha (x - x_0)^\varepsilon + \alpha' (x - x_0)^{\varepsilon'} + \ldots,$$

где $\varepsilon, \varepsilon', \ldots$ — возрастающая последовательность рациональных чисел. Для нахождения возможных значений $\varepsilon, \alpha, \varepsilon', \alpha', \ldots$ Ньютон дал геометрический прием, получивший название диаграммы Ньютона (или многоугольника Ньютона, или параллелограмма Ньютона). Развитие метода Ньютона и его роль в современном развитии математики прекрасно освещены в статье Н. Г. Чеботарева [1]. Результаты Ньютона были получены для уравнения (2.2) и в случае комплексных x, y и $F(x, y)$. При этом было установлено, что никаких других решений, кроме тех, которые были указаны Ньютоном, нет (А. И. Маркушевич [1]).

Нас, однако, будут интересовать лишь малые решения уравнения (2.1), т. е. непрерывные решения $\xi = \xi(\lambda)$, удовлетворяющие условию $\xi(0) = 0$.

2.1. Диаграмма Ньютона [1]. Рассмотрим сначала случай, когда $F(\xi, \lambda)$ является псевдомногочленом относительно ξ, т. е.

$$F(\xi, \lambda) = \sum_{s=0}^{n} F_s(\lambda)\,\xi^s, \qquad \text{где} \quad F_s(\lambda) = \lambda^{\rho_s} \sum_{r=0}^{\infty} F_{rs}\lambda^{\frac{r}{q}},$$

F_{rs} — комплексные числа, ξ и λ — комплексные переменные, ρ_s — неотрицательные рациональные числа, q — любое натуральное число, $F_n(\lambda) \not\equiv 0$ и $F_0(\lambda) \not\equiv 0$. Из нашего допущения о представлении функции $F_s(\lambda)$ вытекает, что если $F_s(\lambda) \not\equiv 0$, то можно считать $F_{0s} \neq 0$. Следовательно, без ограничения общности можно считать $F_{00} \neq 0$ и $F_{0n} \neq 0$.

Будем рассматривать уравнение

$$F(\xi, \lambda) = 0, \tag{2.3}$$

решение которого относительно ξ будем искать в виде ряда

$$\xi = \xi_\varepsilon\lambda^\varepsilon + \xi_{\varepsilon'}\lambda^{\varepsilon'} + \xi_{\varepsilon''}\lambda^{\varepsilon''} + \ldots, \tag{2.4}$$

где $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < \ldots$, $\xi_\varepsilon \neq 0$, или, кратко,

$$\xi = \xi_\varepsilon\lambda^\varepsilon + V, \tag{2.5}$$

где $V = o(\lambda^\varepsilon)$ при $\lambda \to 0$.

Для нахождения возможных значений ε и ξ_ε мы подставим (2.5) в (2.3), соберем члены с одинаковымы степенями λ и приравняем нулю коэффициенты при этих степенях. Начнем с члена наинизшей степени. Пока ε не

---

[1]) С диаграммой Ньютона можно также познакомиться по книгам Н. Г. Чеботарева [2], Б. А. Фукса и В. И. Левина [1].

определено, мы не знаем, какие из полученных членов имеют наинизший порядок по λ. Можно лишь утверждать, что низшие члены находятся среди следующих:

$$F_{00}\lambda^{\rho_0},\ F_{01}\xi_\varepsilon\lambda^{\rho_1+\varepsilon},\quad F_{02}\xi_\varepsilon^2\lambda^{\rho_2+2\varepsilon},\ldots,\ F_{0n}\xi_\varepsilon^n\lambda^{\rho_n+n\varepsilon},$$

если все $F_{0i}\neq 0$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$, или среди членов

$$F_{00}\lambda^{\rho_0},\quad F_{0k}\xi_\varepsilon^k\lambda^{\rho_k+k\varepsilon},\quad F_{0n}\xi_\varepsilon^n\lambda^{\rho_n+n\varepsilon}, \tag{2.6}$$

где k принимает те из значений $1,\ 2,\ldots,\ n-1$, для которых $F_k(\lambda)\not\equiv 0$. Так как в (2.6) все коэффициенты $F_{0s}\neq 0$, то для сокращения членов низшего порядка необходимо, чтобы по крайней мере два из показателей

$$\rho_0,\ \rho_k+k\varepsilon,\ \rho_n+n\varepsilon \tag{2.7}$$

совпали, а остальные были бы не меньше их. Приравнивая показатели, мы определим все возможные значения ε, а затем подберем значения ξ_ε так, чтобы сумма коэффициентов членов (2.6), имеющих равные показатели, была равна нулю. Таким образом, ε должен быть корнем одного из линейных уравнений

$$\rho_s+s\varepsilon=\rho_i+i\varepsilon\ \ (s\neq i,\ \ F_s(\lambda)\not\equiv 0,\ \ F_i\ (\lambda)\not\equiv 0),$$

причем из всех корней только те дают решение задачи, подстановка которых в остальные выражения (2.7) дает не меньшее значение, чем $\rho_s+s\varepsilon$.

Для нахождения этих значений используется следующий геометрический прием, принадлежащий Ньютону и носящий название диаграммы Ньютона.

Выберем в плоскости прямоугольную систему координат и построим точки $(0,\ \rho_0)$, $(k,\ \rho_k)$, $(n,\ \rho_n)$, где k принимает те же значения, что и в (2.6).

Проведем через точку $(0,\ \rho_0)$ прямую, совпадающую с осью ординат, и станем ее вращать вокруг точки $(0,\ \rho_0)$ против часовой стрелки до тех пор, пока она не заденет какую-нибудь из других построенных точек, например $(l,\ \rho_l)$. Тангенс угла, составляемого прямой L, проходящей через точки $(0,\ \rho_0)$ и $(l,\ \rho_l)$, с отрицательным направлением оси абсцисс, равен одному из возможных значений ε, так как, во-первых, для этого ε имеем $\rho_0-\rho_l=l\varepsilon$, т. е. $\rho_0=\rho_l+l\varepsilon$, и, во-вторых, если через точки $(k,\ \rho_k)$, которые не оказались на этой прямой (по построению эти точки лежат выше), провести прямые параллельно L, то они пересекут ось oy выше — в точке с ординатой $k\varepsilon + \rho_k$, а потому

$$\rho_k + k\varepsilon > \rho_l + l\varepsilon = \rho_0.$$

При этом может оказаться, что на прямую L попало несколько из нанесенных точек. Пусть (s, ρ_s) — точка на L с наибольшей абсциссой. Будем теперь вращать прямую L против часовой стрелки вокруг точки (s, ρ_s), пока она

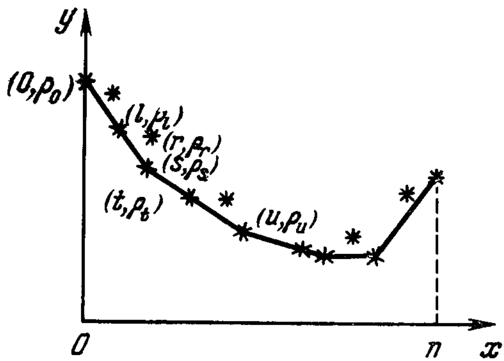

Рис. 1.

не попадет на другую из нанесенных точек, скажем (t, ρ_t), у которой абсцисса $t > s$. Обозначим через L' прямую, проходящую через точки (s, ρ_s) и (t, ρ_t). Рассуждая так же, как раньше, мы придем к выводу, что тангенс угла, составляемого L' с отрицательным направлением оси абсцисс, дает еще одно из возможных значений ε. Пусть (u, ρ_u) — точка на L' с наибольшей абсциссой. Вращая L' вокруг (u, ρ_u) и продолжая предыдущий процесс, мы получим выпуклую ломаную, соединяющую точки $(0, \rho_0)$, (s, ρ_s), (u, ρ_u), ..., называемую диаграммой Ньютона (рис. 1).

Перейдем к нахождению значений коэффициента ξ_ε. Пусть (i, ρ_i) и (j, ρ_j) — концы какого-нибудь отрезка диаграммы, определяющего одно из возможных значений ε. Для точек (k, ρ_k), лежащих на этом отрезке, $\rho_k + k\varepsilon = \sigma = \text{const}$. Для того чтобы после подстановки (2.5) в (2.3) сократились низшие члены, нужно, чтобы сумма коэффициентов при λ^σ равнялась нулю, т. е. чтобы

$$\sum_{k=i}^{j}{}' F_{0k}\xi_\varepsilon^k = 0, \qquad (*)$$

где ($'$) означает, что суммирование проводится лишь по тем k, для которых $\rho_k + k\varepsilon = \sigma$. Это уравнение имеет $j - i$ отличных от нуля корней (различных или частично совпадающих), т. е. столько корней, какова длина проекции взятого отрезка диаграммы. Отсюда видно, что этим методом мы получим все n значений главного члена $\xi_\varepsilon\lambda_\varepsilon$ в разложении (2.5).

Для нахождения следующего члена разложения ξ нужно подставить (2.5) в (2.3) и тем же приемом найти низший член разложения для V. Продолжая данный процесс вычисления, мы придем к разложению (2.4) для каждого из n решений уравнения (2.3).

2.2. О свойствах решений. Займемся выяснением некоторых свойств решений, получающихся методом диаграммы Ньютона.

Теорема 2.1. *Получаемое методом диаграммы Ньютона разложение* (2.4) *расположено по возрастающим степеням* λ, *т. е.* $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon'' < \ldots$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\varepsilon < \varepsilon'$, так как другие неравенства устанавливаются аналогично. Возьмем то решение (2.4), для которого ε является наибольшим.

В этом случае

$$\varepsilon = \max_{(i)} \frac{\rho_0 - \rho_i}{i},$$

где $\rho_i = \operatorname{ord} F_i(\lambda)$ — порядок нуля функции $F_i(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$, т. е. показатель наименьшей степени членов ряда для $F_i(\lambda)$, и $\rho_0 = \operatorname{ord} F_0(\lambda)$.

Исходя из (2.5) и считая t переменным, напишем

$$F(\xi_\varepsilon\lambda^\varepsilon + V, \lambda) = A_0(\lambda) + A_1(\lambda)V + \ldots + A_n(\lambda)V^n, \qquad (2.8)$$

где

$$A_\nu(\lambda) = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\partial^\nu F(t\lambda^\varepsilon, \lambda)}{\partial\xi^\nu}\right)_{t=\xi_\varepsilon} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n)$$

или

$$A_\nu(\lambda) = \lambda^{-\nu\varepsilon} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\partial^\nu F(t\lambda^\varepsilon, \lambda)}{\partial t^\nu} \right)_{t=\xi_\varepsilon} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{2.9}$$

и

$$F(t\lambda^\varepsilon, \quad \lambda) = \varphi(t)\lambda^\sigma + \varphi_1(t)\lambda^{\sigma_1} + \ldots, \tag{2.10}$$

где $\sigma < \sigma_1 < \ldots$

Согласно предыдущему $t = \xi_\varepsilon$ является корнем многочлена $\varphi(t)$. Пусть k — кратность этого корня. Положим

$$R_i = \operatorname{ord} A_i(\lambda) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Так как $\varphi(\xi_\varepsilon) = 0$, то из (2.8) и (2.10) следует

$$R_0 \geqslant \sigma_1 > \sigma.$$

Далее, из равенства

$$\frac{\partial^k F(t\lambda^\varepsilon, \lambda)}{\partial t^k} = \varphi^{(k)}(t)\lambda^\sigma + \varphi_1^{(k)}(t)\lambda^{\sigma_1} + \ldots$$

в силу (2.9) и условия $\varphi^k(\xi_\varepsilon) \neq 0$ находим

$$R_k = \sigma - k\varepsilon. \tag{2.11}$$

Заметим, что если $u \neq k$, то возможно равенство $\varphi^{(u)}(\xi_\varepsilon) = 0$, так что

$$\operatorname{ord}\left(\frac{\partial^u F(t\lambda^\varepsilon, \lambda)}{\partial t^u} \right)_{t=\xi_\varepsilon} \geqslant \sigma,$$

а потому при $u \neq k$

$$R_u \geqslant \sigma - u\varepsilon. \tag{2.12}$$

При нахождении главного члена разложения для V, т. е. при нахождении ε', числа R_i будут играть ту же роль, что ρ_i при нахождении ε. Ввиду этого

$$\varepsilon' = \max_{(i)} \frac{R_0 - R_i}{i} \geqslant \frac{R_0 - R_k}{k}.$$

Но из (2.11) и неравенства $R_0 \geqslant \sigma_i > \sigma$ имеем

$$\frac{R_0 - R_k}{k} \geqslant \frac{\sigma_1 - \sigma + k\varepsilon}{k} = \varepsilon + \frac{\sigma_1 - \sigma}{k} > \varepsilon,$$

т. е.

$$\varepsilon' > \varepsilon.$$

Замечание 2.1. Пусть $\xi_{\varepsilon'}$ — корень многочлена $\varphi_1(t)$. Тогда степень этого многочлена не выше кратности k корня ξ_ε многочлена $\varphi(t)$. Действительно, степень многочлена $\varphi_1(t)$ равна наибольшему значению u, при котором

$$\frac{R_0 - R_u}{u} = \varepsilon'.$$

Если теперь допустить, что $u > k$, то в силу (2.12) и (2.11) получим

$$\frac{R_0 - R_u}{u} \leqslant \frac{R_0 - s + u\varepsilon}{u} = \frac{R_0 - s}{u} + \varepsilon < \\ < \frac{R_0 - s}{k} + \varepsilon = \frac{R_0 - (s - k\varepsilon)}{k} = \frac{R_0 - R_k}{k} \leqslant \varepsilon',$$

т. е. $\varepsilon < \varepsilon'$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Данная теорема показывает, что поведение решения (2.4) при $\lambda \to 0$ определяется первым (главным) членом $\xi_\varepsilon \lambda^\varepsilon$. Нас будут лишь интересовать такие решения, для которых $\varepsilon > 0$, так как у таких решений главный член стремится к нулю при $\lambda \to 0$.

Диаграмма Ньютона может состоять из трех участков: убывающего, горизонтального и возрастающего.

Убывающий участок дает малые решения, т. е. такие, которые стремятся к нулю при $\lambda \to 0$. Только они и будут нас интересовать в дальнейшем. Горизонтальный участок дает решения $\xi = \xi(\lambda)$, для которых $\xi(0) = \xi_\varepsilon$. Возрастающий участок дает решения $\xi = \xi(\lambda)$, для которых $\lim\limits_{\lambda \to 0} \xi(\lambda) = \infty$.

Дальнейшее исследование свойств решений, получающихся методом диаграммы Ньютона, приводит к следующим предложениям (см., например, Н. Г. Чеботарев [2], теоремы 64 и 65).

Теорема 2.2. *В разложении*

$$\xi = \xi_\varepsilon \lambda^\varepsilon + \xi_{\varepsilon'} \lambda^{\varepsilon'} + \xi_{\varepsilon''} \lambda^{\varepsilon''} + \ldots \tag{2.4}$$

показатели $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ *являются дробями с конечным общим знаменателем* [1]).

---

[1]) Под λ^ε мы будем понимать главное значение этой многозначной функции, а под окрестностью точки $\lambda = 0$ — окрестность с соответствующим разрезом.

Теорема 2.3 (Пюизе [1]). *Получаемые методом диаграммы Ньютона ряды* (2.4) *сходятся в некоторой окрестности точки* $\lambda = 0$, *за исключением самой точки* $\lambda = 0$, *если* $\varepsilon < 0$.

Эти предложения мы докажем в пп. 2.4 и 2.5 для интересующего нас случая уравнения разветвления.

Отметим еще, что диаграмма Ньютона может быть применена к нахождению решений вида (2.4) уравнения (2.3) и тогда, когда

$$F(\xi, \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s(\lambda)\, \xi^s.$$

В этом случае диаграмма может состоять из счетного числа отрезков. Однако если интересоваться лишь малыми решениями, то мы должны рассмотреть только убывающий участок диаграммы, определяющий положительные ε для (2.4). Ясно, что убывающий участок диаграммы всегда состоит из конечного числа отрезков.

2.3. Примеры. Пример 2.1. Пусть

$$F(\xi, \lambda) \equiv \lambda^3 - 3\lambda\xi + \xi^3 \equiv F_0(\lambda) + F_1(\lambda)\,\xi + F_3(\lambda)\xi^3 = 0.$$

Здесь имеем

$$F_0(\lambda) = \lambda^3 \ (\rho_0 = 3),$$
$$F_1(\lambda) = -3\lambda \ (\rho_1 = 1),$$
$$F_2(\lambda) \equiv 0,$$
$$F_3(\lambda) = 1 \quad (\rho_3 = 0).$$

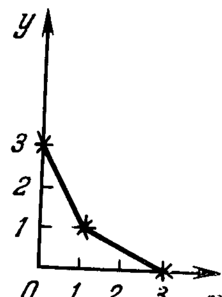

Рис. 2.

Для построения диаграммы мы наносим (см. рис. 2) точки (0.3), (1.1) и (3.0).

Непосредственно из диаграммы находим

$$\varepsilon_1 = 2, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}.$$

Для определения ξ_{ε_1} и ξ_{ε_2} (см. равенство (*) в п. 2.1) имеем уравнения

$$1 - 3\xi_2 = 0 \quad \text{и} \quad -3\xi_{1/2} + \xi_{1/2}^3 = 0.$$

Из этих уравнений мы находим, что

$$\xi_2 = \frac{1}{3}, \ \xi_{1/2} = \pm\sqrt{3}.$$

Отсюда согласно равенству (2.5) имеем главные члены решений

$$\xi = \frac{1}{3}\lambda^2 + o(\lambda^2) \ \text{и} \ \xi = \pm\sqrt{3}\lambda^{1/2} + o(\lambda^{1/2}).$$

Для нахождения второго члена ряда (2.4) мы подставляем каждое из найденных решений в исходное уравнение. Начнем с первого решения. Напишем $\xi = {}^1/_3\,\lambda^2 + V$. Подставляя это выражение в исходное уравнение, получим

$$\frac{1}{27}\lambda^6 + \left(-3\lambda + \frac{1}{3}\lambda^4\right)V + \lambda^2V^2 + V^3 = 0.$$

К данному уравнению опять применяем диаграмму Ньютона. Наносим точки (0,6), (1,1), (2,2), (3,0) и строим диаграмму (см. рис. 3).

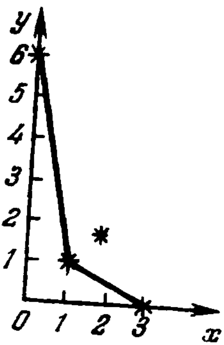

Рис. 3.

Из диаграммы находим

$$\varepsilon_1' = 5, \quad \varepsilon_2' = \frac{1}{2}.$$

Так как для ряда (2.4) должно выполняться условие $\varepsilon' > \varepsilon$, то найденное выражение для ε_2' не подходит. Так же, как раньше, находим V_5 из уравнения $\frac{1}{27} - 3V_5 = 0$, откуда

$$\xi = \frac{1}{3}\lambda^2 + \frac{1}{81}\lambda^5 + o(\lambda^5).$$

Аналогично находятся вторые члены ряда (2.4) для других решений. Подставляя в исходное уравнение $\xi = \pm\sqrt{3}\lambda^{\frac{1}{2}} + V$, находим

$$\lambda^3 + 6\lambda V \pm 3\sqrt{3}\,\lambda^{\frac{1}{2}}V^2 + V^3 = 0.$$

По точкам (0, 3), (1, 1), (2, $^1/_2$) и (3, 0) строим диаграмму (рис. 4) и находим $\varepsilon_1' = 2$ и $\varepsilon_2' = {}^1/_2$. Второе значение ε_2' не подходит, так как нужно, чтобы $\varepsilon' > \varepsilon$. Определяем V_2 из уравнения $1 + 6V_2 = 0$ и пишем

$$\xi = \pm\sqrt{3}\lambda^{1/2} - \frac{1}{6}\lambda^2 + o(\lambda^2).$$

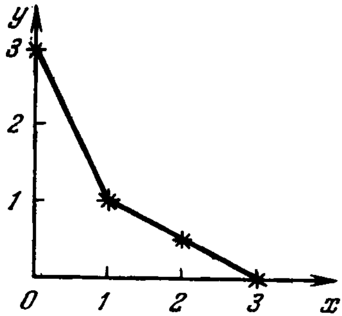

Рис. 4.

Так же находятся следующие приближения, т. е. следующие члены ряда (2.4).

Пример 2.2. Рассмотрим уравнение

$$-\lambda + \xi - \xi^2 - \lambda^3\xi^3 + 2\lambda^2\xi^7 - \lambda^4\xi^{12} = 0.$$

При помощи диаграммы Ньютона (рис. 5) получаем следующие значения ε: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = -{}^2/_5$. Уравнения для нахождения ξ_1, ξ_0 и $\xi_{-2/5}$ будут $\xi_1 - 1 = 0$, $\xi_0 - \xi_0^2 = 0$ и $-\xi_{\varepsilon_3}^2 + 2\xi_{\varepsilon_3}^7 - \xi_{\varepsilon_3}^{12} = 0$, откуда $\xi_1 = 1$,

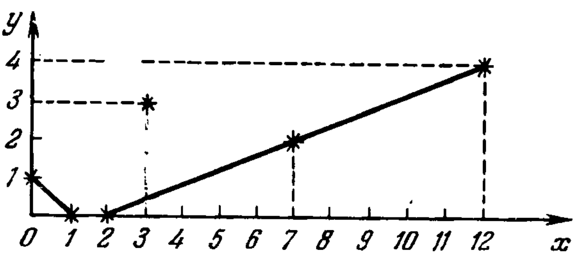

Рис. 5.

$\xi_0 = 1$ и $\xi_{\varepsilon_3}^5 = 1$ — двукратный корень, так что

$$\xi_{\varepsilon_3}^{(1)} = 1, \quad \xi_{\varepsilon_3}^{(2)} = e^{\frac{2\pi i}{5}}, \quad \xi_{\varepsilon_3}^{(3)} = e^{\frac{4\pi i}{5}},$$

$$\xi_{\varepsilon_3}^{(4)} = e^{\frac{6\pi i}{5}}, \quad \xi_{\varepsilon_3}^{(5)} = e^{\frac{8\pi i}{5}}.$$

Таким образом, для вещественных решений имеем

$$\xi = \lambda + o(\lambda),\ \xi = 1 + o(1),\ \xi = \lambda^{-\frac{2}{5}} + o(\lambda^{-\frac{2}{5}}).$$

2.4. Исследование уравнения разветвления. Случай простых корней определяющего уравнения. В данном и следующем пунктах мы покажем, как с помощью диаграммы Ньютона находятся все малые решения уравнения разветвления

$$\Phi(\xi, \lambda) \equiv \sum_{k=2}^{\infty} L_{k0}\xi^k + \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \sum_{\nu=1}^{\infty} L_{k\nu}\lambda^\nu = 0, \qquad (2.1)$$

т. е. непрерывные решения этого уравнения $\xi = \xi(\lambda)$, обращающиеся в нуль при $\lambda = 0$ или равные нулю тождественно. При этом мы исключим тривиальный случай[1]),

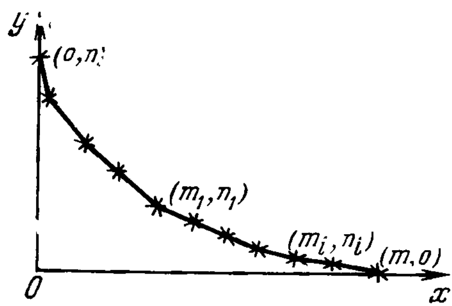

Рис. 6.

когда все коэффициенты $L_{k\nu} = 0$. В этом случае уравнение (2.1) имеет бесчисленное множество малых решений, так как ему удовлетворяет произвольная функция $\xi(\lambda)$ и, в частности, непрерывные функции, удовлетворяющие условию $\xi(0) = 0$.

Как было отмечено, малые решения уравнения (2.1) определяются убывающим участком диаграммы Ньютона. Если

$$\operatorname{ord} \Phi(\xi, 0) = m \text{ и } \operatorname{ord} \Phi(0, \lambda) = n,$$

[1]) Нетривиальный случай мы будем называть *квазирегулярным*.

то точка (o, n) служит началом, а точка $(m, 0)$ — концом убывающего участка диаграммы (см. рис. 6).

Так как нас интересуют малые решения, определенные в некоторой окрестности или полуокрестности точки $\lambda = 0$, то левую часть уравнения (2.1), т. е. $\Phi(\xi, \lambda)$, можно предварительно сократить на допустимую степень λ. В дальнейшем мы будем предполагать, что такое сокращение произведено и что после этого сокращения $\Phi(0, 0) = 0$, так как, если $\Phi(0, 0) \neq 0$, то уравнение $\Phi(\xi, \lambda) = 0$ не имеет малых решений.

Пусть $\operatorname{ord} \Phi(\xi, 0) = m \geqslant 1$. Тогда согласно подготовительной теореме Вейерштрасса (Бохнер и Мартин [1], стр. 259, см. также теорему 3.3) в некоторой окрестности начала координат

$$\Phi(\xi, \lambda) = G(\xi, \lambda) Q(\xi, \lambda), \tag{2.13}$$

где $Q(\xi, \lambda)$ — аналитическая функция в начале координат, причем $Q(0, 0) \neq 0$, а $G(\xi, \lambda)$ — отмеченный многочлен степени m, т. е.

$$G(\xi, \lambda) = \xi^m + H_{m-1}(\lambda)\, \xi^{m-1} + \ldots + H_1(\lambda)\, \xi + H_0(\lambda),$$

где $H_i(\lambda)$ — аналитические функции в точке $\lambda = 0$, удовлетворяющие условию

$$H_i(0) = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Так как $Q(0, 0) \neq 0$, то, как видно из (2.13), малые решения уравнения (2.1) совпадают с малыми решениями уравнения

$$G(\xi, \lambda) \equiv \xi^m + H_{m-1}(\lambda)\, \xi^{m-1} + \ldots + H_0(\lambda) = 0. \tag{2.14}$$

Если $H_0(\lambda) \not\equiv 0$, то диаграмма Ньютона, построенная для $G(\xi, \lambda)$, будет иметь вид, указанный на рис. 6, и при ее помощи мы построим все малые решения уравнения (2.14), число которых равно m. Эти решения либо различны, либо частично совпадают. Хотя многочлен $G(\xi, \lambda)$ однозначно определяется подготовительной теоремой Вейерштрасса, его можно не знать, так как для определения малых решений уравнения (2.14) мы можем воспользоваться убывающей частью диаграммы, построенной для уравнения (2.1), ибо малые решения уравнений (2.1) и

(2.14) совпадают. Для определения членов ряда (2.4) мы построим убывающий участок диаграммы Ньютона, соответствующий положительным ε (см. рис. 6). Пусть ε найдено при помощи отрезка (m_1, n_1) (m_i, n_i). Для определения коэффициента ξ_ε и построения ряда (2.4) мы перепишем (2.1) в виде

$$L_{m_1n_1}\xi^{m_1}\lambda^{n_1} + L_{m_2n_2}\xi^{m_2}\lambda^{n_2} + \ldots$$
$$\ldots + L_{m_in_i}\xi^{m_i}\lambda^{n_i} + \sum_\nu\sum_\mu L_{\mu\nu}\xi^\mu\lambda^\nu = 0, \qquad (2.15)$$

где (m_2, n_2), (m_3, n_3), ... — другие из построенных точек, оказавшиеся на рассматриваемом отрезке диаграммы Ньютона. По построению имеем $n_1 - n_i = (m_i - m_1)\,\varepsilon$. Пусть q — наибольший общий делитель натуральных чисел $n_1 - n_i$ и $m_i - m_1$. Тогда $m_i - m_1 = sq$, $n_1 - n_i = rq$ и $\varepsilon = rs^{-1}$. Из определения ε (см. п. 2.1) непосредственно имеем

$$m_1r + n_1s = m_2r + n_2s = \ldots = m_ir + n_is < \mu r + \nu s. \qquad (2.16)$$

Ввиду этого, если положим в (2.15)

$$\xi = x^r\eta, \qquad \lambda = x^s, \qquad (2.5')$$

то получим

$$(L_{m_1n_1}\eta^{m_1} + L_{m_2n_2}\eta^{m_2} + \ldots + L_{m_in_i}\eta^{m_i})\,x^{m_1r+n_1s} +$$
$$+ \sum_\nu\sum_\mu L_{\mu\nu}x^{\mu r+\nu s}\eta^\mu = 0,$$

или

$$\Psi(\eta, x) \equiv L_{m_1n_1}\eta^{m_1} + L_{m_2n_2}\eta^{m_2} + \ldots + L_{m_in_i}\eta^{m_i} +$$
$$+ \sum_\nu\sum_\mu L_{\mu\nu}\eta^\mu x^p = 0, \qquad (2.17)$$

где в силу соотношений (2.16) $p = (\mu r + \nu s) - (m_1r + n_1s) > 0$. Отсюда при $x = 0$ имеем, после сокращения на η^{m_1},

$$L_{m_1n_1} + L_{m_2n_2}\eta^{m_2-m_1} + \ldots + L_{m_in_i}\eta^{m_i-m_1} = 0. \qquad (2.18)$$

Допустим, что данное уравнение имеет простые корни $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\sigma, \ldots, \eta_{sq}$. Тогда уравнение (2.17) принимает вид

$$\Psi(\eta, x) \equiv L_{m_i n_i} \eta^{m_1} (\eta - \eta_1) \ldots (\eta - \eta_\sigma) \ldots (\eta - \eta_{sq}) + \\ + \sum_\nu \sum_\mu L_{\mu\nu} \eta^\mu x^p = 0,$$

а значит, $\Psi(\eta_\sigma, 0) = 0$ и $\Psi'_\eta(\eta_\sigma, 0) \neq 0$. Следовательно, по теореме 1.2 о неявных функциях

$$\eta = \eta_\sigma + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma i} x^i, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, sq,$$

а значит,

$$\xi = \eta_\sigma x^r + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma i} x^{r+i},$$

или

$$\xi = \eta_\sigma \lambda^{\frac{r}{s}} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma i} \lambda^{\frac{r+i}{s}} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, sq). \tag{2.19}$$

Таким образом, если уравнение (2.18), которое назовем определяющим для данного отрезка, имеет простые корни, то по формуле (2.19) мы получим $m_i - m_1$ различных решений, т. е. столько различных малых решений, какова длина проекции на оси абсцисс соответствующего отрезка диаграммы. Все эти решения расположены по положительным возрастающим дробным степеням λ (с общим знаменателем s), и каждое из этих решений сходится в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$.

В этом случае, следовательно, нами доказаны теоремы 2.2 и 2.3.

Если определяющие уравнения, соответствующие всем отрезкам убывающей части диаграммы Ньютона, имеют простые корни, то задача будет решена. Мы найдем все m малых решений уравнения (2.1).

Отметим еще, что для вычисления $a_{\sigma i}$, входящих в ряды (2.19), можно воспользоваться способом неопределенных коэффициентов, т. е. подставить (2.19) в (2.1), собрать члены с одинаковыми степенями λ и приравнять нулю коэффициенты при них. При этом каждый коэффициент $a_{\sigma i}$ выразится через η_σ, коэффициенты $L_{k\nu}$, где

$k+\nu \leqslant i$, и через предыдущие коэффициенты a_{σ_1}, $a_{\sigma 2}, \ldots, a_{\sigma(i-1)}$ путем применения лишь четырех арифметических действий (см., например, Гурса [2], стр. 81).

2.5. Случай кратных корней определяющего уравнения[1]. Пусть η_σ — кратный корень определяющего уравнения (2.18), так что $\Psi'(\eta_\sigma, 0)=0$ и теорема 1.2 неприменима. В этом случае соответствующие ряды (2.4) имеют одинаковые первые члены, а потому для определения следующих членов разложения (2.4) нужно будет последовательно пользоваться представлениями вида (2.5). Для того чтобы иметь дело с целыми показателями, мы преобразуем уравнение (2.1) не при помощи (2.5′), а следующей подстановкой:

$$\xi = \eta_\sigma x^r + \eta, \qquad \lambda = x^s,$$

и при помощи диаграммы Ньютона определим разложение $\eta = \eta(x)$ в окрестности точки $x=0$, как это было сделано в п. 2.3. при определении V.

Повторяя рассуждения предыдущего пункта, получим

$$\xi(\lambda) = \eta_\sigma \lambda^{\frac{r}{s}} + \eta_{\sigma_1}\lambda^{\frac{r_1}{s_1}} + \ldots + \eta_{\sigma_i}\lambda^{\frac{r_i}{s_i}} + o\left(\lambda^{\frac{r_i}{s_i}}\right). \tag{2.20}$$

При этом согласно замечанию 2.1 п. 2.2 кратности корней η_σ, $\eta_{\sigma_1}, \ldots$ соответствующих определяющих уравнений не возрастают. Ввиду этого либо при некотором i окажется, что η_{σ_i} — простой корень соответствующего определяющего уравнения, либо $\eta_{\sigma_i}, \eta_{\sigma_{i+1}}, \eta_{\sigma_{i+2}}, \ldots$ будут корнями одной и той же кратности q соответствующих определяющих уравнений, а $\eta_{\sigma_1}, \eta_{\sigma_2}, \ldots, \eta_{\sigma_{i-1}}$ будут корнями соответствующих уравнений, кратности которых не меньше q.

В первом случае мы из (2.20) получим

$$\xi(\lambda) = \eta_\sigma \lambda^{\frac{r}{s}} + \eta_{\sigma_1}\lambda^{\frac{r_1}{s_1}} + \ldots + \eta_{\sigma_i}\lambda^{\frac{r_i}{s_i}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma_{ik}} \lambda^{\frac{r_i+k}{s_i}}, \tag{2.21}$$

[1] Здесь используются соображения, указанные П. Г. Айзенгендлером. Подробное обоснование следует из § 4.

а во втором случае $\xi(\lambda)$ будет q-кратным малым решением как уравнения (2.1), так и уравнения (2.14). В данном случае мы представим левую часть уравнения (2.14), т. е. отмеченный многочлен $G(\xi, \lambda)$, в виде произведения степеней неприводимых отмеченных многочленов (см. определение 3.2 и теорему 3.2).

Именно, напишем, что

$$G(\xi, \lambda) \equiv g_1^{\nu_1}(\xi, \lambda)\, g_2^{\nu_2}(\xi, \lambda) \ldots g_e^{\nu_e}(\xi, \lambda), \tag{2.22}$$

где $g_1(\xi, \lambda)$, $g_2(\xi, \lambda)$, ..., $g_e(\xi, \lambda)$ — неприводимые отмеченные многочлены.

Рассмотрим теперь все те многочлены $g_k(\xi, \lambda)$, которые входят в правую часть равенства (2.22) с одинаковыми степенями. Пусть, например, $\nu_i = \nu_j = \ldots = \nu_\tau = \mu$. Положим тогда

$$G_\mu(\xi, \lambda) = g_i(\xi, \lambda)\, g_j(\xi, \lambda) \ldots g_\tau(\xi, \lambda).$$

Разумеется, μ принимает какие-то значения из ряда натуральных чисел. При помощи многочленов $G_\mu(\xi, \lambda)$ равенство (2.22) принимает вид

$$G(\xi, \lambda) = G_1(\xi, \lambda)\, G_2^2(\xi, \lambda) \ldots G_r^r(\xi, \lambda) \ldots G_p^p(\xi, \lambda). \tag{2.23}$$

Эту запись нужно понимать так, что если среди чисел ν_i нет числа r, то $G_r(\xi, \lambda) = 1$, т. е. в правой части (2.23) нет тогда сомножителя $G_r^r(\xi, \lambda)$. Равенство (2.23) показывает, что если $\xi(\lambda)$ является q-кратным решением уравнения $G(\xi, \lambda) = 0$, то $\xi(\lambda)$ — простое решение уравнения

$$G_q(\xi, \lambda) = 0. \tag{2.23$'$}$$

Применяя к данному уравнению (2.23′) предыдущие рассуждения, мы при помощи диаграммы Ньютона получим для $\xi(\lambda)$ представление в виде сходящегося ряда (2.21).

Таким образом, и в случае кратных корней определяющего уравнения нами доказаны утверждения 2.2 и 2.3.

Отметим еще, что многочлены, входящие в равенство (2.22), а значит и многочлены $G_1(\xi, \lambda)$, $G_2(\xi, \lambda)$, ..., $G_p(\xi, \lambda)$, входящие в равенство (2.23), могут быть найдены при помощи алгоритма, изложенного в § 4.

Замечание 2.2. Отметим, что рассуждения, содержащиеся в данном и предыдущем пунктах, приводят к другому доказательству утверждения теоремы 2.1 для уравнения (2.1).

Пусть η_σ — корень уравнения (2.18), кратность которого $k \geqslant 1$, так что первый член разложения (2.4) будет $\eta_\sigma x^r$ и (2.5) примет вид

$$\xi = \eta_\sigma x^r + V.$$

Учитывая замену $\xi = x^r \eta$, $\lambda = x^s$, получим

$$\eta \equiv \xi x^{-r} = \eta_\sigma + V x^{-r}$$

и, полагая $\gamma = V x^{-r}$, будем иметь

$$\eta = \eta_\sigma + \gamma.$$

Подставляя данное выражение η в (2.17), точнее, в выражение для $\Psi(\eta, x)$, получим

$$L_{m_i n_i}(\eta_\sigma + \gamma)^{m_1}(\eta_\sigma - \eta_1 + \gamma) \ldots \gamma^k \ldots (\eta_\sigma - \eta_{sq}) + \\ + \sum_\nu \sum_\mu L_{\mu\nu}(\eta_\sigma + \gamma)^\mu x^p = 0,$$

или

$$L_{m_i n_i}[A_0 \gamma^k + A_1 \gamma^{k+1} + \ldots] + \sum_\nu \sum_\mu B_{\mu\nu} \gamma^\mu x^p = 0. \qquad (2.17')$$

Применяя к данному уравнению диаграмму Ньютона, получим

$$\gamma = V_1 x^{\frac{r_1}{s_1}} + P \qquad \left(\frac{r_1}{s_1} > 0\right).$$

Отсюда и из предыдущего имеем

$$\eta = \eta_\sigma + V_1 x^{\frac{r_1}{s_1}} + P,$$

так что

$$\xi = x^r \eta = \eta_\sigma x^r + V_1 x^{r + \frac{r_1}{s_1}} + P x^r.$$

Продолжая данный процесс, мы и получим разложение по возрастающим степеням λ (ибо $x = \lambda^{\frac{1}{s}}$).

2.6. О вещественных решениях. Если интересоваться вещественными решениями уравнения разветвления (2.1), когда коэффициенты $L_{k\nu}$ и аргумент λ вещественны, то возникают дополнительные трудности при определении малых решений, связанные как с определением вещественных решений определяющего уравнения (2.18), так и с выяснением областей определения решений уравнения (2.1).

Если η_σ — простой вещественный корень уравнения (2.18), то коэффициенты ряда (2.19) вещественны, ибо, как было указано, коэффициенты a_{σ_i} выражаются через η_σ и $L_{k\nu}$ путем применения лишь четырех арифметических действий. Так же обстоит дело с коэффициентами $a_{\sigma_i k}$ ряда (2.21), если $\eta_\sigma, \eta_{\sigma_1}, \ldots, \eta_{\sigma_i}$ вещественны.

Пусть коэффициенты ряда (2.21) вещественны. Тогда, если $s, s_1, s_2, \ldots, s_i$ — нечетные числа, то решение (2.21) определено (и сходится) в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$. Если среди чисел $s, s_1, s_2, \ldots, s_i$ имеются четные, то вещественное решение (2.21) определено для $\lambda \geqslant 0$.

Для нахождения вещественных решений уравнения (2.1) при $\lambda < 0$ мы в этом уравнении заменим λ на $-\lambda$, после чего уравнение разветвления (2.1) примет вид

$$\sum_{k=2}^{\infty} L'_{k0}\xi^k + \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \sum_{\nu=1}^{\infty} L'_{k\nu}\lambda^\nu = 0, \tag{2.1'}$$

где

$$L'_{k\nu} = (-1)^\nu L_{k\nu}, \tag{2.24}$$

и повторим предыдущие рассуждения, приводящие к уравнению вида (2.21). Это обстоятельство мы всюду в дальнейшем будем иметь в виду при исследовании вещественных решений уравнения разветвления.

В качестве примера рассмотрим уравнение (2.1) с вещественными $L_{k\nu}$ в предположении, что

$$L_{01} = 0,\ L_{02} \neq 0,\ L_{11} \neq 0,\ L_{20} = 0,\ L_{30} \neq 0.$$

Для этого примера убывающая часть диаграммы изображена на рис. 7. Отрезок AB порождает одно вещественное малое решение

$$\xi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\lambda^i,$$

определенное в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$.

Отрезок BC имеет наклон $\varepsilon = 1/2$. Составим для него определяющее уравнение

$$L_{30}\eta^2 + L_{11} = 0. \tag{2.25}$$

Так как здесь $s = 2$, то, пользуясь формулой (2.24), мы составляем и другое определяющее уравнение

$$L_{30}\eta^2 - L_{11} = 0, \tag{2.25'}$$

которое будет использовано для построения решений при $\lambda < 0$. Корни уравнений (2.25) и (2.25′) простые, а потому решения имеют вид

$$\xi(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda^{\frac{i}{2}}.$$

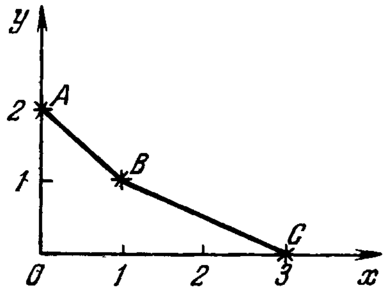

Рис. 7.

Если $\operatorname{sign} L_{30} = -\operatorname{sign} L_{11}$, то корни уравнения (2.25) вещественные, а корни уравнения (2.25′) мнимые. Если $\operatorname{sign} L_{30} = \operatorname{sign} L_{11}$, то имеет место обратное утверждение.

В первом случае уравнение (2.1) имеет два малых вещественных решения, соответствующие отрезку BC и определенные для $\lambda \geqslant 0$, а во втором случае — два малых вещественных решения, определенные лишь для $\lambda \leqslant 0$.

2.7. Некоторые частные случаи расположения диаграммы Ньютона. Здесь мы рассмотрим простейшие частные случаи уравнения разветвления. Так как нас интересуют лишь малые решения уравнения разветвления, то мы будем рассматривать только убывающую часть диаграммы, определяющую положительные ε. Ввиду этого в данном пункте мы всюду в дальнейшем под диаграммой Ньютона будем понимать убывающий участок диаграммы, а под решениями уравнения разветвления — малые решения, т. е. непрерывные решения $\xi(\lambda)$, удовлетворяющие условию $\xi(0) = 0$, а также решения, равные нулю тождественно.

Переходим к разбору частных случаев.

I. Пусть $L_{20} \neq 0$, так что уравнение (2.1) имеет не более двух малых решений. В этом случае убывающая часть диаграммы Ньютона может состоять не более чем из двух отрезков, так что возможны лишь следующие пять случаев (рис. 8). Этим пяти случаям отвечают всевозможные предположения относительно коэффициентов $L_{k\nu}$ уравнения (2.1).

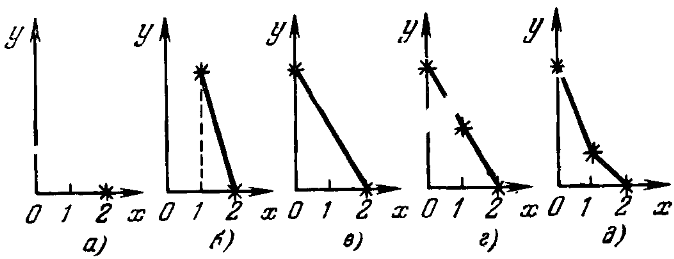

Рис. 8.

Перейдем к изучению каждого из этих пяти случаев.

I, 1. В случае *а*) имеем $L_{0i} = L_{1i} = 0$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$, так что интересующая нас часть диаграммы отсутствует, а потому уравнение (2.1) не имеет относительно ξ малых решений, отличных от тождественного нуля. $\xi = 0$ является двухкратным корнем уравнения (2.1).

I, 2. В случае *б*) $L_{0i} = 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, $L_{11} = L_{12} = \ldots = L_{1(n-1)} = 0$, $L_{1n} \neq 0$, так что единственному отрезку интересующей нас части диаграммы отвечает значение $\varepsilon = n$, а потому уравнение (2.1) имеет решение вида

$$\xi = \xi_n \lambda^n + o(\lambda^n),$$

а также решение $\xi = 0$.

Для определения ξ_n имеем уравнение

$$L_{1n}\xi_n + L_{20}\xi_n^2 = 0,$$

у которого два простых корня: нулевой, которому соответствует решение $\xi = 0$, и ненулевой

$$\xi_n = -L_{1n}L_{20}^{-1}.$$

В данном случае, следовательно, уравнение (2.1) имеет единственное малое нетривиальное решение, которое в силу (2.19) разлагается в ряд

$$\xi = -L_{1n}L_{20}^{-1}\lambda^n + \sum_{i=1}^{\infty} a_i\lambda^{n+i},$$

причем a_i можно определить методом неопределенных коэффициентов.

I, 3. В случае *в*) $L_{0i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $L_{0n} \neq 0$, $L_{1\nu} = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, E(\frac{n}{2}))$, где E — целая часть числа $n/2$, так что единственному отрезку рассматриваемой части диаграммы отвечает значение $\varepsilon = n/2$, а потому уравнение разветвления имеет решения вида

$$\xi = \xi_0\lambda^{\frac{n}{2}} + o\left(\lambda^{\frac{n}{2}}\right),$$

где ξ_0 — решение уравнения

$$L_{20}\xi_0^2 + L_{0n} = 0,$$

т. е.

$$\xi_0 = \pm\sqrt{-L_{0n}L_{20}^{-1}}.$$

Так как корни квадратного уравнения простые, то в силу (2.19) имеем

$$\xi = \pm\sqrt{-L_{0n}L_{20}^{-1}}\lambda^{\frac{n}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma i}\lambda^{\frac{n+i}{2}} \qquad (\sigma = 1, 2)$$

при нечетном n и

$$\xi = \pm\sqrt{-L_{0n}L_{20}^{-1}}\lambda^{\frac{n}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma i}\lambda^{\frac{n}{2}+i} \qquad (\sigma = 1, 2)$$

при четном n, причем $a_{\sigma i}$ можно определить методом неопределенных коэффициентов. Если интересоваться вещественными решениями уравнения разветвления, когда коэффициенты $L_{k\nu}$ уравнения (2.1) вещественны, то нужно еще выяснить вопрос о вещественности корней ξ_0.

В данном случае (см. п. 2.6) имеем следующее. Если n четно, то при $\operatorname{sign} L_{0n} = \operatorname{sign} L_{20}$ уравнение разветвления не имеет вещественных решений, а при $\operatorname{sign} L_{0n} = -\operatorname{sign} L_{20}$ оно имеет в некоторой окрестности $\lambda = 0$ два нетривиальных решения. Если n нечетно, то в силу (2.24) уравнение разветвления имеет два нетривиальных решения для $\lambda \leqslant 0$ при $\operatorname{sign} L_{0n} = \operatorname{sign} L_{20}$ и два нетривиальных решения, определенные для $\lambda \geqslant 0$, при $\operatorname{sign} L_{0n} = -\operatorname{sign} L_{20}$.

I, 4. В случае *г*) $L_{0i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 2n-1)$, $L_{02n} \neq 0$, $L_{1k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, $L_{1n} \neq 0$, так что

$$\varepsilon = n; \qquad \xi = \xi_n \lambda^n + o(\lambda^n),$$

где ξ_n — решение уравнения

$$L_{02n} + L_{1n}\xi_n + L_{20}\xi_n^2 = 0,$$

т. е.

$$\xi_n = \left(-L_{1n} \pm \sqrt{L_{1n}^2 - 4L_{02n}L_{20}}\right)(2L_{20})^{-1}.$$

Если $\Delta = L_{1n}^2 - 4L_{02n}L_{20} \neq 0$, то уравнение разветвления имеет в комплексном случае два решения

$$\xi = \xi_n^{(\sigma)}\lambda^n + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma i}\lambda^{n+i} \qquad (\sigma = 1, 2). \tag{2.26}$$

Если $\Delta = 0$, то, как мы видели раньше, нужно положить в уравнении (2.1)

$$\xi = -L_{1n}(2L_{20})^{-1}\lambda^n + \eta \tag{2.27}$$

и продолжить исследование для η.

Если $L_{k\nu}$ вещественны, то для существования вещественных решений нужно, чтобы $\Delta \geqslant 0$, причем если $\Delta > 0$, то в силу (2.24) имеется два решения вида (2.26), определенные в некоторой окрестности $\lambda = 0$, а при $\Delta = 0$ нужно воспользоваться подстановкой (2.27) и продолжить исследования, ибо первые члены двух решений совпадают.

I, 5. В случае *д*) $L_{0i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, $L_{0n} \neq 0$, $L_{1k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$, $L_{1\nu} \neq 0$ $(2\nu < n)$, причем для ε имеем два значения $\varepsilon_1 = \nu$ и $\varepsilon_2 = n - \nu$. Следовательно,

$$\xi = \xi_{\varepsilon_i}\lambda^{\varepsilon_i} + o(\lambda^{\varepsilon_i}) \qquad (i = 1, 2),$$

где ξ_{ε_i} соответственно определяются из уравнений

$$L_{0n}+L_{1\nu}\xi_{\varepsilon_2}=0 \quad \text{и} \quad L_{1\nu}\xi_{\varepsilon_1}+L_{20}\xi_{\varepsilon_1}^2=0.$$

Так как данные уравнения имеют простые корни, то в силу (2.19) имеем следующие решения:

$$\xi=-L_{0n}L_{1\nu}^{-1}\lambda^{n-\nu}+\lambda^{n-\nu}\sum_{i=1}^{\infty} a_i\lambda^i,$$

$$\xi=-L_{1\nu}L_{20}^{-1}\lambda^{\nu}+\lambda^{\nu}\sum_{i=1}^{\infty} b_i\lambda^i.$$

Подобные исследования можно провести и в случае $L_{k0}=0$ $(k=2, \ldots, m-1)$, $L_{m0}\neq 0$. Следует, однако, отметить, что уже в случае $L_{20}=0$, $L_{30}\neq 0$ получается 12 различных расположений интересующей нас части диаграммы Ньютона. Ввиду этого, когда $L_{k0}=0$ $(2\leqslant k<m)$ и $L_{m0}\neq 0$, мы рассмотрим лишь случаи, когда $L_{01}\neq 0$ и $L_{02}\neq 0$, причем во втором случае мы сделаем различные предположения о L_{i1}.

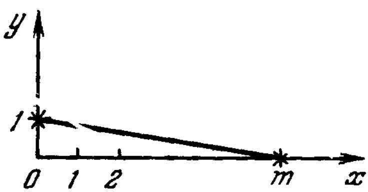

Рис. 9.

II. Пусть $L_{01}\neq 0$, $L_{k0}=0$ $(k=2, 3, \ldots, m-1)$ и $L_{m0}\neq 0$ (см. А. Э. Стапан [1]).

В данном случае, как видно из диаграммы (рис. 9), $\varepsilon=1/m$, и так как проекция диаграммы на ось OX равна m, то в комплексном случае имеем m решений вида

$$\xi=\xi_\sigma\lambda^{\frac{1}{m}}+o\left(\lambda^{\frac{1}{m}}\right), \qquad \sigma=1, 2, \ldots, m,$$

где ξ_σ суть корни уравнения

$$L_{01}+L_{m0}\xi_\sigma^m=0.$$

Так как данное уравнение имеет простые корни, то согласно (2.19) уравнение разветвления имеет решения

$$\xi=\xi_\sigma\lambda^{\frac{1}{m}}+\sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma i}\lambda^{\frac{1+i}{m}} \qquad (\sigma=1, 2, \ldots, m).$$

В вещественном случае (см. предыдущий пункт), если m — четное число, имеем два вещественных решения, определенных при $\operatorname{sign} L_{01} = -\operatorname{sign} L_{m0}$ для $\lambda \geqslant 0$ и при $\operatorname{sign} L_{01} = \operatorname{sign} L_{m0}$ для $\lambda \leqslant 0$. Если m — нечетное число, то уравнение разветвления имеет лишь одно вещественное решение, определенное в некоторой окрестности нуля.

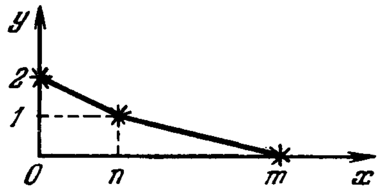

Рис. 10.

III. Пусть $L_{i0} = 0$ $(2 \leqslant i < m)$, $L_{m0} \neq 0$, $L_{01} = 0$, $L_{02} \neq 0$, $L_{k1} = 0$ $(1 \leqslant k < n)$ и $L_{n1} \neq 0$, где $n < E\,(m/2)$, $E\,(l)$ — целая часть числа l. В данном случае (рис. 10) мы из диаграммы находим два положительных значения для ε:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{n}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{m-n},$$

так что

$$\xi = \xi_{\varepsilon_i}\lambda^{\varepsilon_i} + o\,(\lambda^{\varepsilon_i}), \qquad i = 1, 2,$$

где ξ_{ε_i} соответственно определяются из уравнений

$$L_{02} + L_{n1}\xi_{\varepsilon_1}^n = 0 \quad \text{и} \quad L_{n1}\xi_{\varepsilon_2}^n + L_{m0}\xi_{\varepsilon_2}^m = 0,$$

причем второе уравнение можно записать так:

$$L_{n1} + L_{m0}\xi_{\varepsilon_2}^{m-n} = 0.$$

Так как оба эти уравнения имеют простые корни, то согласно (2.19) в комплексном случае уравнения разветвления имеют решения

$$\xi = \xi_\sigma\lambda^{\frac{1}{n}} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma i}\lambda^{\frac{1+i}{n}} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n)$$

и

$$\xi = \xi_\nu\lambda^{\frac{1}{m-n}} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\nu i}\lambda^{\frac{1+i}{m-n}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m-n),$$

т. е. m решений. В вещественном случае, рассуждая, как в случае II, мы приходим к следующему выводу. Если

m и n — четные числа, то уравнение разветвления имеет четыре вещественных решения, каждое из которых определено в некоторой полуокрестности нуля. Если m и n — нечетные числа или n четно и m нечетно, то имеется три вещественных решения, из которых одно определено в некоторой окрестности нуля, а два — в полуокрестностях нуля. Если n — нечетное число, а m — четное число, то имеется два вещественных решения, каждое из которых определено в некоторой окрестности нуля. Отсюда, если $n = 1$, мы получаем случай, рассмотренный в работе Бартла [1].

IV. Пусть $L_{i0} = 0$ $(2 \leqslant i < m)$, $L_{m0} \neq 0$, $L_{01} = 0$, $L_{02} \neq 0$ и $L_{k1} = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, E(m/2)$. В данном случае убывающая часть диаграммы состоит из отрезка с концами $(0, 2)$ и $(m, 0)$, на котором нет других нанесенных точек. Отсюда следует, что

$$\varepsilon = \frac{2}{m}, \quad \xi = \xi_\sigma \lambda^{\frac{2}{m}} + o\left(\lambda^{\frac{2}{m}}\right), \qquad \sigma = 1, 2, \ldots, m,$$

где ξ_σ — корни уравнения

$$L_{02} + L_{m0}\xi^m = 0.$$

Так как данное уравнение имеет простые корни, то согласно (2.19) уравнение разветвления имеет при нечетном m решения

$$\xi = \xi_\sigma \lambda^{\frac{2}{m}} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma_i} \lambda^{\frac{2+i}{m}} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, m),$$

а при четном m оно имеет решения вида

$$\xi = \xi_\sigma \lambda^{\frac{2}{m}} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma i} \lambda^{\frac{2(1+i)}{m}} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, m).$$

В вещественном случае (см. п. 2.6) при четном m имеем два вещественных решения, определенных при $\operatorname{sign} L_{02}L_{m0} = -1$ для $\lambda \geqslant 0$ при $\operatorname{sign} L_{02}L_{m0} = +1$ для $\lambda \leqslant 0$. При нечетном m уравнение разветвления имеет лишь одно вещественное решение, определенное в некоторой окрестности нуля.

V. Пусть $L_{i0} = 0$ $(2 \leqslant i < m = 2k)$, $L_{m0} \neq 0$, $L_{01} = 0$, $L_{02} \neq 0$, $L_{i1} = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, k-1$; $L_{k1} \neq 0$ $(k = m/2)$. В данном случае убывающая часть диаграммы состоит лишь из отрезка с концами (0, 2) и $(m, 0)$, причем $(k, 1)$ — нанесенная точка этого отрезка. Отсюда следует, что

$$\varepsilon = \frac{2}{m} = \frac{1}{k}, \quad \xi = \xi_\sigma \lambda^{\frac{1}{k}} + o(\lambda^{\frac{1}{k}}), \quad \sigma = 1, 2, \ldots, m,$$

где ξ_σ — корни уравнения

$$L_{02} + L_{k1}\xi^k + L_{m0}\xi^{2k} = 0,$$

т. е.

$$\xi^k_{\frac{1}{k}} = (-L_{k1} \pm \sqrt{L^2_{k1} - 4L_{02}L_{m0}})\,(2L_{m0})^{-1} = d_\pm.$$

Если

$$\Delta = L^2_{k1} - 4L_{02}L_{m0} \neq 0,$$

то уравнение разветвления имеет в комплексном случае решения

$$\xi = \xi^{(\sigma)}_{\frac{1}{k}} \lambda^{\frac{1}{k}} + \sum_{i=2}^{\infty} a_{\sigma i} \lambda^{\frac{i}{k}} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, m = 2k).$$

При $\Delta = 0$ нужны дополнительные исследования (ср. преобразование (2.27)), которые мы приведем в п. 12.2, случай 12.2.5.

В вещественном случае при $\Delta > 0$ и нечетном k имеется два вещественных решения, и они определены в некоторой окрестности $\lambda = 0$. При четном k имеется два вещественных решения, если только одно из чисел d_+, d_- положительно; четыре решения, если оба числа d_+, d_- положительны; ни одного решения, если $d_+ < 0$ и $d_- < 0$. При $\Delta < 0$ вещественных решений нет. Вопрос о вещественных решениях при $\Delta = 0$ также требует дополнительного исследования. В соответствии с тем, что было указано в начале п. 2.4, мы в заключение данного пункта отметим следующее. Если для всех k коэффициенты $L_{k0} = 0$, то уравнение (2.1) после сокращения на

λ принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \sum_{\nu=1}^{\infty} L_{k\nu}\lambda^{\nu-1} = 0.$$

Следовательно, если в данном случае $L_{01} \neq 0$, то уравнение (2.1) не имеет малых решений. Если $L_{01} = 0$ и $L_{11} \neq 0$, то по теореме 1.2 о неявных функциях (2.1) имеет единственное малое решение $\xi(\lambda)$, представимое в виде ряда по целым степеням λ. Далее, если $L_{k0} = 0$ $(k = 2, 3, \ldots)$, $L_{01} = L_{11} = 0$ и не все $L_{k1} = 0$ $(k = 2, 3, \ldots)$, то мы снова получаем уравнение, подобное уравнению (2.1), к которому применимы предыдущие рассуждения.

ГЛАВА II

Исследование уравнения разветвления в многомерном случае

§ 3. Преобразование уравнения разветвления[1])

Для изучения многомерного случая ветвления, т. е. когда в системе (1.11) $n > 1$, мы здесь заменим уравнение разветвления более простым (эквивалентным относительно малых решений) уравнением.

3.1. Приведение к регулярному виду. Рассмотрим систему комплексных функций, аналитических в начале координат:

$$\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda) \equiv$$
$$\equiv \sum_{j=s_i}^{\infty} \Phi_j^{(i)}(\xi_1, \ldots, \xi_n) + \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n, \lambda), \qquad (3.1)$$

где $\Phi_j^{(i)}$ — формы степени j ($j \geqslant s_i \geqslant 1$), причем

$$\Phi_{s_i}^{(i)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \not\equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

и

$$\varphi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Запишем формы в обычном виде:

$$\Phi_j^{(i)} = \sum_{\nu_{1i}+\ldots+\nu_{ni}=j} a^{(i)}_{\nu_{1i},\ldots,\nu_{ni}} \xi_1^{\nu_{1i}} \xi_2^{\nu_{2i}} \ldots \xi_n^{\nu_{ni}},$$

где $j \geqslant s_i$.

Определение 3.1. Система (3.1) называется правильной (или регулярной) относительно ξ_1, если для всякого $i = 1, 2, \ldots, m$ выполняется неравенство

$$a_{s_i, 0, \ldots, 0} \neq 0.$$

---

[1]) В §§ 3, 4 излагаются результаты П. Г. Айзенгендлера [4].

Аналогично вводится понятие правильной системы относительно других ξ. Если система (3.1) не является правильной относительно некоторого ξ_j, то путем неособого линейного преобразования ее можно привести к правильной относительно ξ_j.

Докажем это. Рассмотрим линейное преобразование переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$:

$$\xi_k = \sum_{\mu=1}^{n} b_{k\mu} u_\mu \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.2}$$

Подставляя ξ_k из (3.2) в (3.1) и учитывая выражения для $\Phi_j^{(i)}$, получим

$$f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, \lambda) = L_{si}^{(i)} u_1^{s_i} + \psi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, \lambda)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m),$$

где

$$L_{s_i}^{(i)} = \sum_{\nu_{1i}+\ldots+\nu_{ni}=s_i} a_{\nu_{1i},\ldots,\nu_{ni}}^{(i)} b_{11}^{\nu_{1i}} b_{21}^{\nu_{2i}} \ldots b_{n1}^{\nu_{ni}}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим в n-мерном комплексном пространстве E_n систему гиперповерхностей

$$\sum_{\nu_{1i}+\ldots+\nu_{ni}=s_i} a_{\nu_{1i},\ldots,\nu_{ni}}^{(i)} z_1^{\nu_{1i}} z_2^{\nu_{2i}} \ldots z_n^{\nu_{ni}} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Так как согласно условию $\Phi_{s_i}^{(i)} \not\equiv 0$, то при всяком $i = 1, 2, \ldots, m$ не все коэффициенты $a_{\nu_{1i}}^{(i)}, \ldots, \nu_{ni}$ равны нулю, т. е. ни одна из гиперповерхностей не заполняет все пространство E_n, а потому найдется точка с ненулевыми координатами $(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0)$, которая не лежит ни на одной из рассматриваемых гиперповерхностей. Если теперь положим

$$b_{k1} = z_k^0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то, как видно из (3.3), для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ будет

$$L_{s_i}^{(i)} \neq 0,$$

т. е. преобразованная система $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, \lambda)$ является регулярной (правильной).

Полагая, далее, $b_{1k}=0$ при $k=2, 3, \ldots, n$ и

$$b_{k\mu}=\begin{cases}1 & \text{при}\quad k=\mu,\\ 0 & \text{при}\quad k\neq\mu\end{cases}\qquad (k, \mu=2, 3, \ldots, n),$$

мы находим, что определитель матрицы преобразования (3.2) отличен от нуля. Этим доказана

Теорема 3.1. *Существует неособое линейное преобразование переменных* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, *приводящее систему функций* (3.1) *к регулярному виду.*

В дальнейшем мы воспользуемся этой теоремой для приведения системы (1.11) к регулярному виду. При этом мы будем предполагать, что

$$\Phi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n, \lambda)\not\equiv 0\qquad (i=1, \ldots, k;\ 1\leqslant k\leqslant n).$$

Для простоты допустим, что $k=n$. Без ограничения общности можно считать, что $s_i<\infty$, где $s_i=\operatorname{ord}\Phi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n, 0)$, так как в противном случае в системе (1.11) мы произведем сокращение на наивысшую допустимую степень параметра λ.

Рассмотрим пример. Пусть

$$\Phi_1(\xi_1, \xi_2, \lambda)\equiv 2\xi_1^2+\xi_2^2+\frac{8}{3\sqrt{2\pi}}(4\xi_1^2\xi_2-\xi_2^3)+o_3(\xi_1, \xi_2)+\\ +\lambda\left[\pi\lambda+2\sqrt{2\pi}\,\xi_1+o_2(\xi_1, \xi_2, \lambda)\right]=0,$$

$$\Phi_2(\xi_1, \xi_2, \lambda)\equiv -2\xi_1\xi_2+\frac{16}{3\sqrt{2\pi}}(\xi_1^3-\xi_1\xi_2^2)+o_3(\xi_1, \xi_2)+\\ +\lambda\left[-\frac{3}{4}\pi-\sqrt{2\pi}\,\xi_2+o_2(\xi_1, \xi_2, \lambda)\right]=0,$$

где $\operatorname{ord} o_3(\xi_1, \xi_2)>3$ и $\operatorname{ord} o_2(\xi_1, \xi_2, \lambda)>2$. Данная система не является правильной. Приведем ее к регулярному виду.

Преобразование (3.2) принимает вид

$$\xi_1=b_{11}u_1+b_{12}u_2;\qquad \xi_2=b_{21}u_1+b_{22}u_2.$$

Так как в этом примере $s_1=s_2=2$, то для нахождения $b_{k\mu}$ достаточно подставить ξ_1 и ξ_2 в члены второй степени относительно ξ_1 и ξ_2.

Получим

$$2\xi_1^2+\xi_2^2=(2b_{11}^2+b_{21}^2)\,u_1^2+\ldots,\quad -2\xi_1\xi_2=-2b_{11}b_{21}u_1^2+\ldots$$

Отсюда видно, что если мы положим $b_{11} = b_{21} = 1$, то преобразованная система будет правильной. Полагая еще $b_{12} = 0$, $b_{22} = 1$, мы получим, что

$$\xi_1 = u_1, \quad \xi_2 = u_1 + u_2.$$

Подставляя эти значения и сокращая затем первое уравнение на 3, а второе на -2, получим

$$f_1(u_1, u_2, \lambda) \equiv u_1^2 + \frac{2}{3} u_1 u_2 + \frac{1}{3} u_2^2 + \\ + \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\left(\frac{23}{3} u_1^3 + \frac{8}{3} u_1^2 u_2 - 8u_1 u_2^2 - \frac{8}{3} u_2^3\right) + \\ + o_3(u_1, u_2) + \lambda\left[\frac{\pi}{3}\lambda + \frac{2}{3}\sqrt{2\pi}\, u_1 + o_2(u_1, u_2, \lambda)\right] = 0,$$

$$f_2(u_1, u_2, \lambda) \equiv u_1^2 + u_1 u_2 + \frac{8}{3\sqrt{2\pi}}(2u_1^2 u_2 + u_1 u_2^2) + o_3(u_1, u_2) + \\ + \lambda\left[\frac{3}{8}\pi + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, u_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, u_2 + o_2(u_1, u_2, \lambda)\right] = 0,$$

где $\operatorname{ord} o_3(u_1, u_2) > 3$, $\operatorname{ord} o_2(u_1, u_2, \lambda) > 2$. Данный пример мы используем при изучении нелинейных интегральных уравнений[1]).

3.2. Приведение к нормальному виду. Рассмотрим псевдомногочлен относительно ξ_1:

$$G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda) = \xi_1^s + H_{s-1}\xi_1^{s-1} + \ldots + H_1\xi_1 + H_0,$$

где

$$s \geqslant 1, \quad H_i = H_i(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \lambda), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, s-1$$

являются аналитическими функциями в начале координат.

Определение 3.2 (см. Бохнер и Мартин [1], стр. 264—265). Если

$$H_i(0, 0, \ldots, 0) = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, s-1,$$

то псевдомногочлен $G(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda)$ называется отмеченным многочленом степени s относительно ξ_1.

---

[1]) Данный пример и вычисления предоставил в наше распоряжение П. Г. Айзенгендлер.

Аналогично вводится понятие отмеченного многочлена относительно ξ_j. Имеет место следующее предложение.

Теорема 3.2. *Если произведение псевдомногочленов*

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda) = \xi_1^p + a_{p-1}\xi_1^{p-1} + \ldots + a_1\xi_1 + a_0$$

и

$$g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda) = \xi_1^q + b_{q-1}\xi_1^{q-1} + \ldots + b_1\xi_1 + b_0$$

является отмеченным многочленом (относительно ξ_1), то f и g — отмеченные многочлены относительно ξ_1.

Доказательство. По условию

$$a_k = a_k(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \lambda) \text{ и } b_m = b_m(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \lambda)$$

являются аналитическими функциями в начале координат. Пусть a_i и b_j — первые коэффициенты, для которых

$$a_i(0, 0, \ldots, 0, 0) \neq 0, \qquad b_j(0, 0, \ldots, 0, 0) \neq 0.$$

Напишем выражение для коэффициента c_{i+j} при ξ_1^{i+j} в произведении fg:

$$c_{i+j} = \ldots a_{i-1}b_{j+1} + a_ib_j + a_{i+1}b_{j-1} + \ldots$$

Отсюда имеем

$$c_{i+j}(0, 0, \ldots, 0, 0) = a_i(0, 0, \ldots, 0, 0)\, b_j(0, 0, \ldots, 0, 0) \neq 0,$$

что противоречит условию. Следовательно, f и g — отмеченные многочлены.

Пусть $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda)$, $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda)$ и $g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda)$ — аналитические функции в начале координат.

Определение 3.3 (см. Бохнер и Мартин [1], стр. 264). Если $F = fg$, где

$$F(0, 0, \ldots, 0, 0) = 0,\ f(0, 0, \ldots, 0, 0) = \\ = 0,\ g(0, 0, \ldots 0, 0) \neq 0,$$

то функции F и f называются эквивалентными.

Пусть уравнение разветвления (1.11) приведено к регулярному виду

$$f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, \lambda) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.4}$$

Определение 3.4. Мы скажем, что система

$$G_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, \lambda) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.5}$$

эквивалентна системе (3.4), если для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$ функция f_i эквивалентна функции G_i.

Ясно, что всякое малое решение системы (3.4) или системы (1.11) является малым решением системы (3.5), и наоборот, т. е. эквивалентные системы эквивалентны и относительно малых решений.

Определение 3.5. Если в системе (3.5) все функции G_i являются отмеченными многочленами относительно одного и того же ξ_j, то мы скажем, что уравнение разветвления (3.4) (или (1.11)) приведено к нормальному виду (3.5), т. е. систему (3.5) мы будем называть уравнением разветвления в нормальном виде, если все G_i — отмеченные многочлены.

Для приведения системы (3.4) к нормальному виду мы воспользуемся подготовительной теоремой Вейерштрасса (см. Бохнер и Мартин [1], стр. 259).

Теорема 3.3 (подготовительная теорема Вейерштрасса). *Пусть* $F(z_1, z_2, \ldots, z_n, \lambda)$ — *аналитическая функция в начале координат, причем*

$$F(0, 0, \ldots, 0, 0) = 0, \qquad F(z_1, 0, \ldots, 0, 0) \neq 0.$$

Тогда в некоторой окрестности начала координат

$$F \equiv (z_1^s + H_{s-1}z_1^{s-1} + \ldots + H_1 z_1 + H_0)\,\Omega(z_1, z_2, \ldots, z_n, \lambda)$$

где $G(z_1, z_2, \ldots, z_n, \lambda) = z_1^s + H_{s-1}z_1^{s-1} + \ldots + H_1 z_1 + H_0$ *является отмеченным многочленом и* Ω*-аналитическая функция в начале координат, удовлетворяющая условию*

$$\Omega(0, 0, \ldots, 0, 0) \neq 0.$$

Функции $\Omega, H_0, H_1, \ldots, H_{s-1}$ определяются однозначно условиями теоремы (Бохнер и Мартин [1]). Укажем рекуррентный процесс для их нахождения.

Пусть

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(z_2, z_3, \ldots, z_n, \lambda)\, z_1^m.$$

Так как $\Omega(0, 0, \ldots, 0, 0) \neq 0$, то функция $Q = \dfrac{1}{\Omega}$

является аналитической в начале координат. Напишем

$$Q=\sum_{m=0}^{\infty} Q_m(z_2, z_3, \ldots, z_n, \lambda)\, z_1^m,$$

$$F_m=\sum_{\nu=0}^{\infty} F_{m\nu},\quad Q_m=\sum_{\nu=0}^{\infty} q_{m\nu},\qquad H_i=\sum_{\nu=1}^{\infty} h_{i\nu},$$

где $F_{m\nu}$, $q_{m\nu}$, $h_{i\nu}$ — однородные многочлены степени ν относительно переменных $z_2, \ldots, z_n, \lambda$, причем согласно условию $F_{k0}=0$ при $k<s$, так как

$$\operatorname{ord} F(z_1, 0, \ldots, 0, 0)=s \geqslant 1$$

и

$$F_{s0}=\Omega(0, 0, \ldots, 0, 0)=L_s \neq 0.$$

Сначала определим формы $q_{m\nu}$; они находятся с помощью рекуррентных соотношений (см. Бохнер и Мартин [1], формула (15), стр. 256), которые в данном случае принимают вид

$$q_{00}=L_s;\quad q_{m0}\equiv\sum_{\mu=0}^{m-1} q_{\mu 0}F_{m+s-\mu,0},\ m\geqslant 1, \tag{3.6}$$

$$q_{m\nu}\equiv-\sum_{\mu=0}^{m+s}\sum_{i=0}^{\nu-1} q_{\mu i}F_{m+s-\mu,\nu-i}+\sum_{\mu=0}^{m-1} q_{\mu\nu}F_{m+s-\mu,0}. \tag{3.7}$$

Действительно, из (3.6) последовательно определяются все q_{m0}, а затем используются соотношения (3.7).

Полагая в (3.7) $\nu=1$, получим

$$\left.\begin{array}{l} q_{01}=-\sum\limits_{\mu=0}^{s} q_{\mu 0}F_{s-\mu,1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{m1}=-\sum\limits_{\mu=0}^{m+s} q_{\mu 0}F_{m+s-\mu,1}+\sum\limits_{\mu=0}^{m-1} q_{\mu,1}F_{m+s-\mu,0}. \end{array}\right\} \tag{3.8}$$

Отсюда видно, что формы q_{m1} последовательно выражаются через

$$q_{00}, q_{10}, \ldots \text{ и } q_{01}, q_{11}, \ldots, q_{m-1,1}.$$

Далее, из (3.7) при $\nu = k$ $(k > 1)$ имеем

$$\left.\begin{array}{l} q_{0k} = -\sum\limits_{\mu=0}^{s}\sum\limits_{i=0}^{k-1} q_{\mu i}F_{s-\mu,k-i}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_{mk} = -\sum\limits_{\mu=0}^{m+s}\sum\limits_{i=0}^{k-1} q_{\mu i}F_{m+s-\mu,k-i} + \sum\limits_{\mu=0}^{m-1} q_{\mu k}F_{m+s-\mu,0}. \end{array}\right\} \tag{3.9}$$

Таким образом, все формы $q_{m\nu}$ определяются однозначно и последовательно.

Переходим к определению форм $h_{i\nu}$. Используя выражения для G, F, Q, F_m, Q_m, H_i и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z_1 в равенстве $G = QF$, получим

$$H_i = \sum_{k=1}^{\infty} h_{ik} = \sum_{\alpha+\beta=i} F_\alpha Q_\beta = \sum_{\alpha+\beta=i}\left(\sum_{\mu=1}^{\infty} F_{\alpha\mu}\sum_{\nu=0}^{\infty} q_{\beta\nu}\right) =$$

$$= \sum_{\alpha+\beta=i}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\mu+\nu=k} F_{\alpha\mu}q_{\beta\nu}. \tag{3.10}$$

Отсюда следует, что

$$h_{ik} = \sum_{\alpha+\beta=i}\sum_{\mu+\nu=k} F_{\alpha\mu}q_{\beta\nu}. \tag{3.11}$$

§ 4. Некоторые вопросы теории делимости

Для изучения многомерного случая ветвления мы в данном параграфе рассмотрим кольцо многочленов над произвольной областью с однозначным разложением на множители и построим алгоритм для нахождения общего наибольшего делителя многочленов из упомянутого кольца. При этом мы будем придерживаться терминологии монографий Зарисского, Самюэля [1, 2] и Бохнера и Мартина [1].

4.1. **Кольцо степенных рядов.** Пусть $z_1, z_2, \dots, z_n$ — комплексные переменные, $a_{m_1,m_2,\dots,m_n}$ — комплексные числа и $m_1, m_2, \dots, m_n$ — неотрицательные целые числа.

Рассмотрим семейство функций

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{m_1+\ldots+m_n\geqslant 0} a_{m_1, m_2, \ldots, m_n} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \ldots z_n^{m_n},$$

аналитических в начале координат. Будем предполагать, что каждая функция этого семейства имеет свою окрестность сходимости.

Относительно обычных действий сложения и умножения рассматриваемое семейство функций образует коммутативное кольцо над полем комплексных чисел K, которое обозначается так: $I_n = K[[z_1, z_2, \ldots, z_n]]$. Нуль и единица этого кольца совпадают с обычными 0 [1]) и 1. Пусть f и g — два элемента кольца I_n.

Так как равенство $fg = 0$ возможно лишь тогда, когда хотя бы один из сомножителей f или g равен нулю, то рассматриваемое кольцо не имеет собственных делителей нуля. Легко видеть, что делителями единицы, т. е. обратимыми элементами при умножении, будут лишь такие функции $f \in I_n$, для которых $f(0, 0, \ldots, 0) \neq 0$, т. е. для которых $\operatorname{ord} f = 0$.

Таким образом, кольцо I_n коммутативно, содержит единицу и не содержит собственных делителей нуля, т. е. является областью целостности.

Любой элемент кольца I_n можно разложить в ряд по степеням любого переменного z_i, причем коэффициенты будут аналитическими функциями в начале координат от других переменных. В частности, если положить $z_n = z$, то для всякой функции $f \in I_n$ имеем

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

где $a_i \in I_{n-1}$. В этом случае говорят о кольце степенных рядов от одного переменного z над кольцом $I_{n-1} = K[[z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}]]$ и пишут $I_{n-1}[[z]]$ или $K[[z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}]][[z]]$. Ясно, что $K[[z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, z]]$ изоморфно $K[[z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}]][[z]]$.

Псевдомногочлены от z, т. е. многочлены от z с коэффициентами из кольца I_{n-1}, образуют подкольцо кольца

---

[1]) То есть с функцией, равной нулю тождественно.

$I_{n-1}[[z]]$. Это подкольцо многочленов обозначается через $I_{n-1}[z]$ или $K[[z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}]][z]$.

Для дальнейшего мы приведем некоторые понятия. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей.

Определение 4.1. Отличные от нуля элементы $a, b \in R$ называют ассоциированными (и пишут кратко $a \sim b$), если $a = bc$, где c — обратимый элемент из R.

Согласно этому определению, если $f \in I_n$, то запись $f \sim 1$ означает, что $\operatorname{ord} f = 0$, т. е. $f(0, 0, \ldots, 0) \neq 0$.

Запись $b|a$ означает, что b делит a (a делится на b), т.е.существует элемент $c \in R$ такой, что $a = bc$.

Если ε — обратимый элемент кольца R, то он делит любой элемент $a \in R$, так как $a = \varepsilon \cdot \varepsilon^{-1} a$. В связи с этим элемент b называется несобственным делителем элемента a, если он обратим и ассоциирован с a.

Определение 4.2. Если $a = bc$, где $a, b, c \in R$, причем b и c — необратимые элементы, то элемент a называется разложимым (приводимым) в кольце R. Если элемент a нельзя представить указанным образом, то он называется неразложимым (неприводимым) в R.

Определение 4.3. Область целостности R называется областью с однозначным разложением на множители (или кратко ООР), если она удовлетворяет условиям: 1) каждый необратимый элемент a кольца R является произведением конечного числа неразложимых делителей; 2) если $a = p_1 p_2 \ldots p_m = q_1 q_2 \ldots q_m$, где p_i и q_i неразложимы, то $m = n$ и после надлежащей перенумерации выполняются соотношения $p_i \sim q_i$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$.

Простейшим примером областей с однозначным разложением может служить кольцо целых чисел.

Имеют место следующие предложения (см. Зарисский, Самюэль [2], стр. 177, теорема 6 и [1], стр. 45, теорема 10).

Теорема 4.1. *Кольцо степенных рядов* $I_n = [[z_1, z_2, \ldots, z_n]]$ *и кольцо псевдомногочленов* $I_{n-1}[z]$ *являются областями с однозначным разложением.*

В области с однозначным разложением любая пара элементов a, b имеет общий наибольший делитель (кратко ОНД), т. е. элемент d, который делит a и b, причем если элемент c делит a и b, то c делит d. Если d является

ОНД элементов a, b, то будем писать

$$d = (a,\ b).$$

ОНД определяется однозначно с точностью до произвольного обратимого множителя. Если $(a,\ b) = 1$, то элементы a и b называются взаимно простыми. Для отмеченных многочленов справедливо предложение.

Теорема 4.1′. *ОНД двух отмеченных многочленов $f(z)$ и $g(z)$ есть отмеченный многочлен.*

Доказательство. Пусть

$$d(z) = c_s z^s + c_{s-1} z^{s-1} + \ldots + c_0$$

является ОНД многочленов

$$f(z) = z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_0$$

и

$$g(z) = z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_0.$$

Так как $d(z)$ — делитель многочлена $f(z)$, то в кольце $I_{n-1}[z]$ найдется многочлен

$$q(z) = e_{m-s} z^{m-s} + \ldots + e_1 z + e_0$$

такой, что

$$f(z) = d(z)\, q(z).$$

Отсюда путем сравнения коэффициентов находим

$$c_s e_{m-s} = 1,$$

т. е. что c_s и e_{m-s} — обратимые элементы кольца I_{n-1}.

Так как ОНД определяется с точностью до обратимых сомножителей, то можно считать, что

$$d(z) = z^s + c'_{s-1} z^{s-1} + \ldots + c'_0$$

и

$$q(z) = z^{m-s} + e'_{m-s-1} z^{m-s-1} + \ldots + e'_0,$$

где

$$c'_i = \frac{c_i}{c_s},\quad e'_j = \frac{e_j}{e_{m-s}}\ (i = 0, 1, \ldots, s-1;\ j = 0, 1, \ldots, m-s-1)$$

Отсюда согласно теореме 3.2 мы приходим к утверждению теоремы.

4.2. Общий делитель и аналог алгоритма Евклида. Пусть кольцо R является ООР и $R[z]$ — кольцо многочленов над R от переменного z. Как известно (Зарисский, Самюэль [1], стр. 45, теорема 10), $R[z]$ также является ООР.

Определение 4.4. Многочлен $f(z) \in R[z]$ называется примитивным, если его коэффициенты не имеют общих делителей (отличных от обратимых элементов).

Всякий ненулевой многочлен $f(z) \in R[z]$ можно записать в виде

$$f(x) = cf_1(x),$$

где c является ОНД коэффициентов $f(x)$, а $f_1(x)$ — примитивный многочлен. Множитель c, который определен с точностью до обратимого множителя, называется содер жанием многочлена $f(x)$ и обозначается через $c(f)$.

Лемма 4.1 (Зарисский, Самюэль [1], стр. 47, лемма 2). *Если $g(x)$ делит $bf(x)$, где $b \in R$ и $g(x)$ — примитивный многочлен, то $g(x)$ делит многочлен $f(x)$.*

Лемма 4.2 (лемма Гаусса, см. Зарисский, Самюэль [1], стр. 46, лемма 1). *Если $f(x), g(x) \in R[z]$, то $c(fg) = c(f)\,c(g)$. В частности, произведение двух примитивных многочленов примитивно.*

Лемма 4.3. *Пусть (ненулевой) многочлен $d(z)$ является общим делителем многочленов $f(z)$, $g(z) \in R[z]$ и $f(z)$ — примитивный многочлен. Тогда $d(z)$ — примитивный многочлен.*

Доказательство следует из сравнения коэффициентов в равенстве $f(z) = d(z)\,q(z)$.

Теорема 4.2 (алгоритм деления, см. Зарисский, Самюэль [1], стр. 43, теорема 9). *Пусть многочлены $f(z)$, $g(z) \in R[z]$, причем степень f не меньше степени g и степень g не меньше 1. Тогда существуют многочлены $q(z)$, $r(z) \in R[z]$ и элемент $\rho \in R$, удовлетворяющие равенству*

$$\rho f(z) = q(z)\,g(z) + r(z), \qquad (4.1)$$

где $r(z)$ либо является нулевым многочленом, либо имеет степень меньшую, чем степень $g(z)$.

Мы приведем здесь доказательство, позволяющее находить многочлены $q(z)$, $r(z)$ и элемент ρ.

Пусть

$$f(z) = a_0z^n + \ldots + a_n, \quad g(z) = b_0z^m + \ldots + b_m,$$

где
$$a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0 \quad \text{и} \quad n \geqslant m > 0.$$
Положим
$$b_0^n f - a_0 b_0^{n-1} g z^{n-m} = b_0^{n-1} f_1 \tag{4.2$_1$}$$

и обозначим через n_1 степень многочлена $f_1(z)$, а через a_{10} — коэффициент при старшей степени f_1. Ясно, что $n_1 < n$. Если $n_1 < m$, то теорема доказана, и тогда
$$\rho = b_0, \quad q(z) = a_0 z^{n-m}, \quad r(z) = f_1(z).$$
Если $n_1 \geqslant m$, то положим
$$b_0^{n-1} f_1 - a_{10} b_0^{n-2} g z^{n_1-m} = b_0^{n-2} f_2 \tag{4.2$_2$}$$

и обозначим соответственно через n_2 и a_{20} степень и старший коэффициент многочлена $f_2(z)$. Повторяя предыдущие рассуждения и учитывая, что степень f_2 меньше степени f_1, мы придем к равенству
$$b_0^{n-(s-1)} f_{s-1} - a_{s-1,0} b_0^{n-s} z^{n_{s-1}-m} g = b_0^{n-s} f_s, \tag{4.2$_s$}$$

в котором многочлен f_s имеет степень $n_s < m$.

Складывая соотношения (4.2_1) — (4.2_s), получим
$$b_0^n f - (a_0 b_0^{n-1} z^{n-m} + a_{10} b_0^{n-2} z^{n_1-m} + \ldots + a_{s-1,0} b_0^{n-s} z^{n_{s-1}-m})\, g = \\ = b_0^{n-s} f_s.$$

Так как при переходе от f_i к f_{i+1} ($i = 0, 1, 2, \ldots; f_0 = f$) степень f_i уменьшается не менее чем на единицу, то $s \leqslant n - m + 1$, а потому $n - s \geqslant m - 1$. Ввиду этого мы можем в последнем равенстве отбросить множитель b_0^{m-1}, и тогда полученное равенство совпадет с (4.1), где
$$\rho = b_0^{n-m+1} \tag{4.3}$$
и
$$\left.\begin{aligned} q(z) &= a_0 b_0^{n-m} z^{n-m} + \ldots + a_{s-1,0} b_0^{n-m-s+1} z^{n_{s-1}-m}, \\ r(z) &= b_0^{n-m-s+1} f_s(z). \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Случай $r(z) = 0$ получается, когда $g(z)$ делит $f(z)$. Теорема доказана.

Замечание 4.1. Если ρ выбрать по формуле (4.3), то многочлены $q(z)$ и $r(z)$ определятся по формулам (4.4) однозначно. Ввиду этого мы в дальнейшем будем считать, что ρ подобрано по формуле (4.3).

Используя доказанную теорему, напишем

$$\rho f(z) = q(z)\, g(z) + r_1(z),\ \deg(r_1) < m, \tag{4.5$_1$}$$

где $\deg(r_1)$ означает степень многочлена $r_1(z)$. Применяя, далее, этот алгоритм к многочленам $g(z)$ и $r_1(z)$, к многочленам $r_1(z)$ и $r_2(z)$ и т. д., учитывая, что степени многочленов $r_i(z)$ убывают, получим

$$\rho_1 g(z) = q_1(z)\, r_1(z) + r_2(z), \tag{4.5$_2$}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\rho_{k-1} r_{k-2}(z) = q_{k-1}(z)\, r_{k-1}(z) + r_k(z), \tag{4.5$_k$}$$

$$\rho_k r_{k-1}(z) = q_k(z)\, r_k(z) + r_{k+1}, \tag{4.5$_{k+1}$}$$

где $r_{k+1} \in R$.

Т е о р е м а 4.3. *Для того чтобы общий делитель $d(z)$ многочленов $f(z)$, $g(z) \in R[z]$ имел положительную степень, необходимо и достаточно, чтобы $r_{k+1} = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о н е о б х о д и м о с т и. Пусть $\deg(d) > 0$. Тогда из (4.5$_1$) следует, что $d(z)|r_1(z)$; из (4.5$_2$) следует, что $d(z)|r_2(z)$ и т. д.; из (4.5$_{k+1}$) следует, что $d(z)|r_{k+1}$. Но $\deg(r_{k+1}) = 0$, следовательно, $r_{k+1} = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о д о с т а т о ч н о с т и. Пусть $r_{k+1} = 0$. Так как в системе равенств (4.5$_i$) r_{k+1} есть первый остаток, принадлежащий кольцу R, а степени остатков $r_1(z)$, $r_2(z)$, $r_3(z)$,... строго убывают, то $\deg(r_k) > 0$. Напишем, что

$$r_k(z) = c(r_k)\, u(z),\ \deg(u) \geqslant 1, \tag{4.6}$$

где $c(r_k)$ — содержание многочлена $r_k(z)$ и $u(z)$ — примитивный многочлен. Покажем, что $u(z) = d(z)$, т. е. $u(z)$ — общий делитель многочленов $f(z)$ и $g(z)$. Из (4.6) и (4.5$_{k+1}$) следует, что

$$\rho_k r_{k-1}(z) = q_k(z)\, r_k(z) = \bar{q}_k(z)\, u(z).$$

Отсюда в силу леммы 4.1 имеем, что $u(z)|r_{k-1}(z)$, так что

$$r_{k-1}(z) = \varphi(z)\, u(z), \tag{4.7}$$

где $\varphi(z) \in R[z]$. Из (4.6), (4.7) и (4.5$_k$) имеем

$$\rho_{k-1} r_{k-2}(z) = (q_{k-1}(z)\, \varphi(z) + c(r_k))\, u(z).$$

Отсюда в силу леммы 4.1 следует, что $u(z)|r_{k-2}(z)$. Продолжая эти рассуждения и используя соотношения (4.5_i), мы найдем, что $u(z)$ делит все остатки $r_{k-3}(z), \ldots, r_1(z)$, а значит, и $g(z)$, $f(z)$. Следовательно, $u(z) = d(z)$. Теорема доказана.

Отметим, что вместо условия $r_{k+1} = 0$ теоремы 4.3 можно пользоваться следующим равенством:

$$R(f, g) = 0, \tag{4.8}$$

где $R(f, g)$ — результант многочленов $f(z)$ и $g(z)$, т. е.

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_n \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_0 & b_1 \ldots & b_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b_0 & b_1 & \ldots b_m & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_0 & b_1 & \ldots & \ldots & b_m & \ldots & \ldots & 0 \end{vmatrix}, \tag{4.9}$$

так как (см., например, Ван-дер-Варден [1], стр. 115—117) имеет место

Т е о р е м а 4.4. *Для того чтобы общий делитель многочленов $f(z)$, $g(z) \in R[z]$, у которых*[1] $a_0 \neq 0$ *и* $b_0 \neq 0$, *имел положительную степень, необходимо и достаточно равенство нулю результанта* $R(f, g)$, *определенного формулой* (4.9).

При доказательстве теоремы 4.3 было установлено, что общий делитель $d(z)$ является примитивным многочленом. В связи с этим мы введем следующее

О п р е д е л е н и е 4.5. Общий делитель $f(z)$ и $g(z)$, являющийся примитивным многочленом, назовем примитивным общим делителем, а примитивный общий делитель, который делится на любой другой примитивный общий делитель, мы назовем примитивным ОНД.

---

[1]) Теорема сохраняется, если один из старших коэффициентов равен нулю.

Теорема 4.5. *Общий делитель* $d(z)$, *найденный при доказательстве теоремы* 4.3, *является примитивным ОНД.*

Доказательство. Из теоремы 4.3 следует, что $d(z)$ — примитивный общий делитель. Пусть $\delta(z)$ — другой примитивный общий делитель многочленов $f(z)$ и $g(z)$. Тогда из доказательства теоремы 4.3 следует, что $\delta(z)$ делит все r_i. Отсюда согласно равенству (4.6) и лемме 4.1 мы заключаем, что $\delta(z)|d(z)$. Теорема доказана.

4.3. Примитивный ОНД. Здесь мы покажем, как находится степень и вид примитивного ОНД.

Пусть $f(z)$, $g(z) \in R(z)$, $\deg(f) = n$, $\deg(g) = m$, $n \geqslant m > 0$ и примитивный ОНД

$$d(z) = \alpha_0 z^\sigma + \alpha_1 z^{\sigma-1} + \ldots + \alpha_\sigma, \qquad \alpha_0 \neq 0. \tag{4.10}$$

Разумеется, $\sigma \leqslant m$. Если $\sigma = m$, то, очевидно,

$$g(z) = c(g)\, d(z),$$

где $c(g)$ — содержание многочлена $g(z)$. Ввиду этого мы будем предполагать, что $\sigma < m$.

Так как $d(z)$ — примитивный ОНД, то в кольце $R[z]$ найдутся многочлены $f_\sigma(z)$ и $g_\sigma(z)$ такие, что

$$f(z) = d(z) f_\sigma(z), \qquad g(z) = d(z) g_\sigma(z), \tag{4.11}$$

причем согласно теореме 4.4 результант

$$R(f_\sigma, g_\sigma) \neq 0. \tag{4.12}$$

Из теоремы 4.4 следует и обратное утверждение. Если многочлены $f_\sigma(z) \in R[z]$ и $g_\sigma(z) \in R[z]$ ($c(f_\sigma) = c(f)$, $\deg f_\sigma = n - \sigma$; $c(g_\sigma) = c(g)$, $\deg g_\sigma = m - \sigma$) удовлетворяют соотношениям (4.11) и (4.12), то $d(z)$ — примитивный ОНД многочленов $f(z)$ и $g(z)$ степени σ.

Для нахождения степени σ многочлена $d(z)$ мы воспользуемся понятием субрезультанта.

Определение 4.6. i-м субрезультантом $R_i = R_i(f, g)$ двух многочленов $f(z)$, $g(z) \in R[z]$ называется определитель, получаемый вычеркиванием из результанта $R(f, g)$ этих многочленов первых i и последних i строк, а также первых i и последних i столбцов.

Например, если $\deg f = 5$ и $\deg g = 4$, то имеем $R_0 = R(f, g)$ — определитель девятого порядка, R_1 — определитель седьмого порядка и т. д. (см. рис. 11).

$$R = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Рис. 11.

Л е м м а 4.4. *Имеет место равенство*

$$R_\sigma(f, g) = \alpha_0^{n+m-2\sigma} R(f_\sigma, g_\sigma). \tag{4.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\left.\begin{aligned} f_\sigma(z) &= A_0 z^{n-\sigma} + \ldots + A_{n-\sigma}, \\ g_\sigma(z) &= B_0 z^{m-\sigma} + \ldots + B_{m-\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

Сравнивая коэффициенты в (4.11) с учетом (4.10) и (4.14), находим

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0 A_0, \\ a_1 &= \alpha_0 A_1 + \alpha_1 A_0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= \alpha_\sigma A_{n-\sigma} \end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

$$\left.\begin{aligned} b_0 &= \alpha_0 B_0, \\ b_1 &= \alpha_0 B_1 + \alpha_1 B_0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ b_m &= \alpha_\sigma B_{m-\sigma}. \end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

Эти значения a_i и b_i мы подставим в определитель $R_\sigma(f, g)$ и преобразуем его следующим образом. Вынесем α_0 из первого столбца, а затем вычтем из второго столбца первый, предварительно умноженный на α_1. После этого мы выносим из второго столбца α_0, а затем вычитаем из третьего столбца сумму произведений первого столбца на α_2 и второго — на α_1. После этой операции мы выносим из третьего столбца множитель α_0 и продолжаем процесс. Таким образом мы придем к равенству (4.13).

Из леммы 4.4 следует, что условие (4.12) может быть заменено требованием, чтобы субрезультант $R_\sigma(f, g) \neq 0$. Ввиду этого мы составим всевозможные субрезультанты:

$$R_0 = R(f, g), \quad R_1, R_2, \ldots, R_s, \tag{4.17}$$

где $s = \frac{1}{2}(m+n) - 1$ при четном $(m+n)$ и $s = E\left[\frac{1}{2}(m+n)\right]$ при нечетном $(m+n)$ ($E[\gamma]$ — целая часть γ), и сформулируем полученный результат.

Теорема 4.6. *Степень примитивного ОНД многочленов $f(z)$ и $g(z)$ равна номеру первого отличного от нуля субрезультанта в строке* (4.17).

Замечание 4.2. Пусть все субрезультанты в строке (4.17) равны нулю. Это возможно лишь при $n = m$, ибо при $n > m$ справедлива формула

$$R_j = (-1)^{n+m-2j} b_0^{n+m-2j} \neq 0 \qquad (j = m, m+1, \ldots, s).$$

В этом случае $s = \frac{m+n}{2} - 1 = m - 1$ и по предположению $R_s = R_{m-1} = 0$. Отсюда по теореме 4.6 имеем $\deg(d(z)) > s = m - 1$. Но $\deg(d(z)) \leqslant m$, ибо $\deg(g(z)) = m$. Следовательно, $\deg(d(z)) = m$.

Покажем теперь, что примитивный ОНД может быть получен из субрезультанта R_σ следующим образом. Последний элемент последней строки, образованной из коэффициентов многочлена $f(z)$, заменим многочленом $f(z)$, непосредственно стоящий над ним элемент — многочленом $zf(z)$, стоящий над этим последним — многочленом $z^2 f(z)$ и т. д. Аналогично последний элемент первой строки, образованной из коэффициентов многочлена $g(z)$, заменим многочленом $g(z)$, а нижестоящие элементы последнего столбца определителя R_σ — многочленами

$zg(z)$, $z^2g(z)$, ... Полученный таким образом новый определитель обозначим через $D(z)$. Разумеется, $D(z) \in R[z]$.

Отметим, что для примера, приведенного в этом пункте, при $\sigma = 2$ определитель $D(z)$ имеет вид

$$D(z) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & zf(z) \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & f(z) \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & g(z) \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & zg(z) \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & z^2g(z) \end{vmatrix}.$$

Теорема 4.7. *Имеет место соотношение*

$$\alpha_0 D(z) = R_\sigma d(z). \tag{4.18}$$

Доказательство. Подставим в определитель $D(z)$ значения a_i и b_i из (4.15) и (4.16) и поступим со всеми столбцами определителя, кроме последнего столбца, так же, как при доказательстве леммы 4.4. Вынесем затем из последнего столбца $d(z)$, учитывая, что $d(z) | f(z)$ и $d(z) | g(z)$. Полученный при этом новый определитель преобразуем следующим образом. Из последнего столбца вычитаем сумму произведений первого столбца на $z^{n+m-2\sigma-1}$, второго — на $z^{n+m-2\sigma-2}$ и т. д., предпоследнего — на z. Таким образом, получим

$$D(z) = \alpha_0^{n+m-2\sigma-1} R(f_\sigma, g_\sigma) d(z).$$

Помножив это равенство на α_0, мы в силу (4.13) получаем (4.18). Теорема доказана.

Отметим, что если $a_0 \sim b_0 \sim 1$, то примитивный ОНД совпадает с ОНД и (4.18) принимает вид

$$D(z) = R_\sigma d(z). \tag{4.19}$$

4.4. Применение к отмеченным многочленам. Так как кольцо $I_n = K[[z_1, z_2, \ldots, z_n]]$ является ООР, то все утверждения пп. 4.2 и 4.3 справедливы для многочленов кольца $I_n[\lambda]$. В этом случае результант $R(f, g)$ и все субрезультанты являются степенными рядами от $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и представляют собою аналитические функции в начале координат. Ввиду этого запись $R(f, g) = 0$ (или $R_i = 0$) означает

$$R(f(z_1, z_2, \ldots, z_n), g(z_1, z_2, \ldots, z_n)) \equiv 0 \quad \text{или} \quad R_i \equiv 0.$$

Ометим еще, что теорема 4.6 формулируется в данном случае так: степень примитивного ОНД многочленов $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$ из $I_n[\lambda]$ равна номеру первого отличного от тождественного нуля субрезультанта в строке (4.17).

Для отмеченных многочленов старшие коэффициенты ассоциированы с единицей, а потому для них примитивный ОНД совпадает с ОНД и определяется по формуле (4.19), а если $\sigma = m$, то

$$d(\lambda) = g(\lambda). \tag{4.20}$$

§ 5. Двумерный случай ветвления[1])

Здесь мы исследуем задачу о малых решениях системы (1.11), предполагая $n = 2$. В этом случае уравнение разветвления имеет вид

$$\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{5.1}$$

где Φ_i — аналитические функции в начале координат, удовлетворяющие условию $\operatorname{ord} \Phi_i(\xi_1, \xi_2, 0) \geqslant 2$. При этом мы исключаем из рассмотрения случай, когда $\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \lambda) \equiv 0$ для $i = 1, 2$, ибо в таком случае системе (5.1) удовлетворяют произвольные функции $\xi_1(\lambda)$ и $\xi_2(\lambda)$.

Как мы видели в § 3, при помощи неособого линейного преобразования переменных

$$(\xi_1, \xi_2) = T(z_1, z_2)$$

и подготовительной теоремы Вейерштрасса система (5.1) приводится к нормальному виду, т. е. к эквивалентной системе (см. определение 3.3)

$$G_i(z_1, z_2, \lambda) \equiv L_{s_i}^{(i)} z_1^{s_i} + \sum_{j=1}^{s_i} z_1^{s_i-j} H_{s_i-j}^{(i)}(z_2, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{5.2}$$

Здесь $s_i = \operatorname{ord} \Phi_i(\xi_1, \xi_2, 0) \geqslant 2$, $L_{si}^{(i)} \neq 0$ и G_i — отмеченные многочлены относительно z_1, т. е. $H_{s_i-j}^{(i)}$ — аналитические функции в начале координат такие, что

[1]) Здесь излагаются исследования П. Г. Айзенгендлера [1].

$H^{(i)}_{i-j}(\bar{0}, 0) = 0$. Как было отмечено в § 3, системы (5.1) и (5.2) эквивалентны относительно малых решений.

5.1. Общее исследование задачи. $G_i(z_1, z_2, \lambda)$ представляют собою многочлены относительно z_1 над кольцом $I_2 = K[[z_2, \lambda]]$. В § 4 мы видели, что это кольцо является ООР. Составим результант многочленов G_1 и G_2:

$$R(G_1, G_2) = \begin{vmatrix} L^{(1)}_{s_1} & H^{(1)}_{s_1-1} & \ldots & H^{(1)}_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & L^{(1)}_{s_1} & H^{(1)}_{s_1-1} & \ldots & H^{(1)}_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & L^{(1)}_{s_1} & H^{(1)}_{s_1-1} \ldots & H^{(1)}_0 \\ 0 & 0 & 0 & L^{(2)}_{s_2} & H^{(2)}_{s_2-1} & \ldots & \ldots & H^{(2)}_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L^{(2)}_{s_2} & H^{(2)}_{s_2-1} & \ldots & H^{(2)}_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Он представляет собою аналитическую в начале координат функцию $\Psi(z_2, \lambda)$, удовлетворяющую условию $\Psi(0, 0) = 0$, ибо последний столбец определителя $R(G_1, G_2)$ равен нулю при $z_2 = \lambda = 0$.

Сначала мы исследуем тот случай, когда $\Psi(z_2, \lambda) \not\equiv 0$. В этом случае, согласно теореме 4.4, многочлены G_1 и G_2 не имеют общего делителя с положительной степенью, т. е. их ОНД ассоциирован с единицей. Однако, если мы рассмотрим уравнение

$$\Psi(z_2, \lambda) = 0 \tag{5.3}$$

и найдем его малые решения z_2 (они представляются в виде сходящихся рядов по степеням $\lambda^{1/p}$ (p — натуральное число), обращающихся в нуль при $\lambda = 0$), то после подстановки каждого такого решения z_2 в (5.2) и замены $\lambda^{1/p} = t$ получим систему двух многочленов $\widetilde{G}_i$ над кольцом $I_1 = K[[t]]$, результант которых обращается в нуль тождественно. Согласно теореме 4.4 $\widetilde{G}_i$ имеют тогда ОНД положительной степени $\widetilde{d}(z_1, t)$, и из равенства $\widetilde{d}(z_1, t) = 0$ найдем и z_1 как функцию $t = \lambda^{1/p}$.

Имея это в виду, напишем

$$\Psi(z_2, \lambda) = \widetilde{\lambda}^{\sigma} R(z_2, \lambda), \quad \sigma \geqslant 0,$$

$$\widetilde{R}(z_2, \lambda) = \sum_{m=m_0}^{\infty} B_{m0} z_2^m + \sum_{m=0}^{\infty} z_2^m \sum_{k=1}^{\infty} B_{mk} \lambda^k,$$

где σ — максимальный допустимый показатель.

Пусть $\widetilde{R}(0, 0) = 0$. Так как нас интересуют малые решения $z_2 = \varphi(\lambda)$, то для них уравнение (5.3) эквивалентно уравнению

$$\widetilde{R}(z_2, \lambda) = 0. \tag{5.4}$$

Для нахождения всех малых решений данного уравнения мы воспользуемся диаграммой Ньютона (см. § 2). В данном случае число малых решений уравнения (5.4) конечно и каждое из них представимо в виде ряда, сходящегося в некоторой окрестности нуля:

$$z_2^{(\mu)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\mu i} t^i, \tag{5.5}$$

где $t = \lambda^{\frac{1}{p_\mu}}$, p_μ — натуральные числа, $\mu = 1, 2, \ldots, q$. Каждое из этих решений подставим в систему (5.2). Получим

$$g_{i\mu}(z_1, t) = G_i(z_1, z_2^{(\mu)}, t^{p_\mu}) = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{5.6}$$

Так как результант данной системы является нулем кольца I_1, то согласно теореме 4.4 система (5.6) имеет ОНД с положительной степенью относительно z_1:

$$d_\mu = (g_{1\mu}, g_{2\mu}).$$

Согласно теореме 3.2 многочлен d_μ является отмеченным многочленом относительно z_1, ибо $g_{1\mu}$ и $g_{2\mu}$ — отмеченные многочлены относительно z_1. Для нахождения многочлена d_μ мы воспользуемся теоремами 4.6, 4.7 и алгоритмом п. 4.3. Применяя затем диаграмму Ньютона к уравнению

$$d_\mu(z_1, t) = 0,$$

найдем все его решения

$$z_{1\mu}^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{\infty} b_{\nu i}^{(\mu)} t^{\frac{i}{r_\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \gamma_\mu), \tag{5.7}$$

где r_ν — натуральные числа.

Соотношения (5.5) и (5.7) показывают, что в рассматриваемом случае система (5.2) имеет конечное число малых решений $(z_{1\mu}^{(\nu)},\ z_2^{(\mu)})$.

Мы предполагали, что $\Psi(z_2, \lambda) \not\equiv 0$ и $\widetilde{R}(0, 0) = 0$. Выясним, что произойдет, если эти условия нарушаются.

Если $\Psi(z_2, \lambda) \not\equiv 0$ и $\widetilde{R}(0, 0) \neq 0$, то, как мы видели в § 2, уравнение (5.4) не имеет малых решений, а потому и система (5.2) не имеет малых решений.

Если $\Psi(z_2, \lambda) \equiv 0$, т. е. $\Psi(z_2, \lambda)$ является нулем кольца $K[[z_2, \lambda]]$, то согласно теореме 4.4 ОНД

$$d(z_1, z_2, \lambda) = (G_1, G_2)$$

имеет положительную степень относительно z_1 и (см. теорему 3.2) относительно z_1 он является отмеченным многочленом. Мы можем написать

$$G_1 = d\overline{G}_1, \qquad G_2 = d\overline{G}_2.$$

В этом случае система (5.2) распадается на уравнение

$$d(z_1, z_2, \lambda) = 0 \tag{5.8}$$

и систему

$$\overline{G}_i(z_1, z_2, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{5.9}$$

для которой результант $R(\overline{G}_1, \overline{G}_2) \not\equiv 0$, где $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$ — отмеченные многочлены.

Исследуем сначала уравнение (5.8). Полагая в нем $z_2 = \zeta\lambda$, где ζ — параметр, получим

$$d(z_1, \zeta\lambda, \lambda) = 0.$$

Применяя к нему диаграмму Ньютона, мы получим одно или несколько семейств малых решений $z_1 = \varphi(\zeta, \lambda)$, расположенных по целым или дробным степеням λ и зависящих от параметра ζ. Таким образом, уравнение (5.8) имеет бесчисленное множество малых решений

$$z_1 = \zeta\lambda, \quad z_2 = \varphi_i(\zeta, \lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Разумеется, возможны различные специализации параметра ζ, т. е. можно положить $\zeta = f(\lambda)$, где $f(0) = 0$, и, в частности, такие, при которых $f(\lambda)$ — ряды по целым или дробным степеням λ.

Переходим к рассмотрению системы (5.9). Так как для нее $R(\bar{G}_1, \bar{G}_2) \not\equiv 0$, то с ней мы поступаем так же, как мы поступили с системой (5.2), в предположении, что $R(G_1, G_2) \not\equiv 0$ (т. е. $\Psi(z_2, \lambda) \not\equiv 0$). Ввиду этого мы можем утверждать, что система (5.9) имеет конечное число (не равное нулю, если выполнено соответствующее условие $\tilde{R}(0, 0) = 0$) малых решений и каждое из них представимо в виде сходящегося (в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$) ряда по целым или дробным степеням λ. Этим доказана

Теорема 5.1. *Для того чтобы в двумерном случае ветвления существовало конечное число l малых решений, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\tilde{R}(z_2, \lambda) \not\equiv 0.$$

При этом, если $\tilde{R}(0, 0) = 0$, то $l > 0$ и компоненты $z_1(\lambda)$ и $z_2(\lambda)$ всех малых решений представимы в виде сходящихся рядов (5.5) *и* (5.7). *Если $R_2(z, \lambda) \equiv 0$, то система* (5.2) *имеет одно или несколько однопараметрических семейств малых решений, определяемых уравнением* (5.8), *а также конечное число малых решений, определяемых системой* (5.9), *компоненты которых представимы в виде сходящихся рядов по целым или дробным степеням λ.*

5.2. Указатели двумерного случая ветвления. Нахождение малых решений уравнения (5.4) связано с построением для него убывающего участка диаграммы Ньютона. Иногда достаточно знать вершины $(0, n_0)$ и $(m_0, 0)$, где $m_0 = \operatorname{ord} R(z_2, 0)$ и $n_0 = \operatorname{ord} R(0, \lambda)$, этого убывающего участка, так как они позволяют делать выводы о всех возможных расположениях убывающего участка диаграммы. В связи с этим числа m_0 и n_0 называются указателями двумерного уравнения разветвления.

Покажем, что указатели m_0 и n_0 могут быть найдены без построения результанта $R(G_1, G_2)$.

Так как кольцо $K[[z_2, \lambda]]$ является ООР, то с точностью до знака результант $R(G_1, G_2)$ представим

(Вандер-Варден [1], стр. 119) и в следующем виде:

$$L_{s_1}^{(1)s_2} \prod_{j=1}^{s_1} G_2(x_j), \tag{5.10}$$

где x_j — корни отмеченного многочлена $G_1(z_1, z_2, \lambda)$. Разумеется, формула (5.10) сохраняется, если предварительно в системе (5.2) положить $\lambda = 0$ или $z_2 = 0$. Это замечание мы учтем при вычислении $m_0 = \operatorname{ord} R(z_2, 0)$ и $n_0 = \operatorname{ord} R(0, \lambda)$.

Полагая в (5.2) $\lambda = 0$, получим

$$G_i(z_1, z_2, 0) = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{5.11}$$

Применяя к первому уравнению данной системы метод диаграммы Ньютона, мы найдем все его малые решения

$$x_j = \alpha_j z_2^{\varepsilon_j} + o(z_2^{\varepsilon_j}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, s_1). \tag{5.12}$$

Подставляя эти значения в результант системы (5.11), записанный в форме (5.10), получим

$$R(z_2, 0) = L_{s_1}^{(1)s_2} \prod_{j=1}^{s_1} G_2(\alpha_j z_2^{\varepsilon_j} + o(z_2^{\varepsilon_j}),\ z_2, 0). \tag{5.13}$$

Обозначим через μ_j наименьшую степень, с которой z_2 входит в разложение функции $G_2(\alpha_j z_2^{\varepsilon_j} + o(z_2^{\varepsilon_j}), z_2, 0)$. Тогда

$$m_0 = \operatorname{ord} R(z_2, 0) = \sum_{j=1}^{s_1} \mu_j. \tag{5.14}$$

Аналогично определяется $n_0 = \operatorname{ord} R(0, \lambda)$.

Отметим, что если $x_j \equiv 0$, то полагаем $\varepsilon_j = \infty$.

Замечание 5.1. Отметим еще, что если в двумерном случае задано регулярное уравнение разветвления, то указанный прием вычисления указателей m_0 и n_0 сохраняется без приведения уравнения разветвления к нормальному виду. Действительно, малые решения (5.12) одинаковы у регулярного и соответствующего нормального уравнения, а формулы для подсчета μ_j также совпадают. Все это следует из подготовительной теоремы Вейерштрасса.

Рассмотрим следующий

Пример 5.1. Определим m_0 и n_0 для примера, рассмотренного в конце п. 3.1. Полагая там $\lambda = 0$, получим

$$\left.\begin{aligned} f_1(u_1, u_2, 0) &= u_1^2 + \frac{2}{3} u_1 u_2 + \frac{1}{3} u_2^2 + o(u_1, u_2) = 0, \\ f_2(u_1, u_2, 0) &= u_1^2 + u_1 u_2 + 0\cdot u_2^2 + o(u_1, u_2) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

где $o(u_1, u_2)$ — члены более высокого порядка.

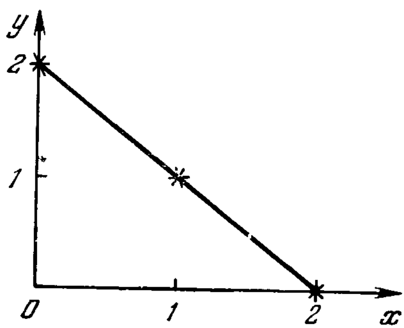

Рис. 12.

При помощи диаграммы Ньютона (рис. 12) мы для первого уравнения находим $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, так что

$$u_1 = \alpha_i u_2 + o(u_2),$$

где $\alpha_1 = -\frac{1}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{3}$,

$$\alpha_2 = -\frac{1}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{3}.$$

Подставляя каждое из этих решений во второе уравнение системы (5.15), находим

$$\mu_1 = \operatorname{ord} f_2(\alpha_1 u_2 + o(u_2),\ u_2,\ 0) = 2,$$
$$\mu_2 = \operatorname{ord} f_2(\alpha_2 u_2 + o(u_2),\ u_2,\ 0) = 2.$$

Отсюда согласно формуле (5.14) имеем $m_0 = 4$. Для определения n_0 мы полагаем $u_2 = 0$, так что

$$\left.\begin{aligned} f_1(u_1, 0, \lambda) &= u_1^2 + \frac{2}{3}\sqrt{2\pi}\, u_1\lambda + \frac{\pi}{3}\lambda^2 + o(u_1, \lambda), \\ f_2(u_1, 0, \lambda) &= u_1^2 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, u_1\lambda + \frac{3}{8}\pi\lambda + o(u_1, \lambda), \end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

где $o(u_1, \lambda)$ — члены более высокого порядка.

Из первого уравнения данной системы мы при помощи диаграммы Ньютона находим, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, так что

$$u_1^{(i)} = \beta_i \lambda + o(\lambda), \qquad i = 1, 2,$$

где $\beta_1 = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i\sqrt{\pi}}{3}, \qquad \beta_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{i\sqrt{\pi}}{3}.$

Подставляя каждое из этих решений во второе уравнение системы (5.16), находим

$$\mu_1 = \operatorname{ord} f_2(\beta_1\lambda + o(\lambda),\ 0,\ \lambda) = 1,$$
$$\mu_2 = \operatorname{ord} f_2(\beta_2\lambda + o(\lambda),\ 0,\ \lambda) = 1,$$

так что $n_0 = 2$.

5.3. Частные случаи. Пусть двумерное уравнение разветвления, заданное в регулярном виде

$$f_i(z_1, z_2, \lambda) \equiv \sum_{m+k\geqslant 2} L_{mk0}^{(i)} z_1^m z_2^k + \sum_{m+k\geqslant 0} z_1^m z_2^k \sum_{n=1}^{\infty} L_{mkn}^{(i)}\lambda^n = 0$$
$$(L_{200}^{(i)} = 1;\ i = 1,\ 2)$$

приведено к нормальному виду

$$G_i(z_1,\ z_2,\ \lambda) = z_1^2 + H_1^{(i)}(z_2,\ \lambda)\,z_1 + H_0^{(i)}(z_2,\lambda) = 0 \quad (i = 1,\ 2). \tag{5.17}$$

Исключив из данной системы z_1, получим

$$R(z_2,\ \lambda) \equiv [H_0^{(2)} - H_0^{(1)}]^2 + [H_1^{(2)} - H_1^{(1)}]\,[H_1^2 H_0^{(1)} - H_1^{(1)} H_0^{(2)}], \tag{5.18}$$

или

$$R(z_2, \lambda) \equiv \sum_{m=m_0}^{\infty} B_{m0} z_2^m + \sum_{m=0}^{\infty} z_2^m \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\lambda^n = 0. \tag{5.19}$$

Будем предполагать, что $m_0 = 4$ и $n_0 < \infty$ Так как функции $H_0^{(i)}$ и $H_1^{(i)}$ обращаются в нуле в нуль и являются аналитическими в начале координат, то, как видно из (5.18), коэффициенты $B_{01} = 0$ и $B_{11} = 0$. Отсюда следует, что $n_0 \geqslant 2$.

Исследуем уравнение (5.19) в следующих двух предположениях: $n_0 = 2$ и $n_0 = 3$.

Концы убывающей части диаграммы Ньютона будут в первом случае (0, 2) и (4, 0), а во втором случае (0, 3) и (4, 0). Так как убывающая часть диаграммы не может быть расположена выше отрезка, соединяющего ее концы, то в данном случае для построения убывающей части диаграммы и нахождения малых решений достаточно знать коэффициенты

$$B_{40},\ B_{21},\ B_{12},\ B_{11},\ B_{02},\ B_{03}.$$

Во-первых, $B_{11}=0$. Далее, так как $L^{(i)}_{mkn}$ — коэффициенты уравнения разветвления, заданного в регулярном виде, то в силу формул (3.11) и (5.18) мы будем иметь

$$B_{40}=(L^{(2)}_{020}-L^{(1)}_{020})^2+(L^{(2)}_{110}-L^{(1)}_{110})(L^{(1)}_{020}L^{(2)}_{110}-L^{(2)}_{020}L^{(1)}_{110}), \tag{5.20}$$

$$B_{02}=(L^{(2)}_{001}-L^{(1)}_{001})^2, \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}B_{03}=2\,(L^{(2)}_{001}-L^{(1)}_{001})\{(L^{(2)}_{002}-L^{(1)}_{002})-(L^{(2)}_{001}L^{(2)}_{201}-L^{(1)}_{001}L^{(1)}_{201})-\\-(L^{(2)}_{001}L^{(2)}_{300}L^{(2)}_{101}-L^{(1)}_{001}L^{(1)}_{300}L^{(1)}_{101})-(L^{(2)^2}_{001}L^{(2)}_{400}-L^{(1)^2}_{001}L^{(1)}_{400})-\\-[(L^{(2)}_{001}L^{(2)}_{300})^2-(L^{(1)}_{001}L^{(1)}_{300})^2]\}+[L^{(2)}_{101}+L^{(2)}_{300}L^{(2)}_{001}-L^{(1)}_{101}-\\-L^{(1)}_{300}L^{(1)}_{001}]\,[L^{(1)}_{001}(L^{(2)}_{101}+L^{(2)}_{300}L^{(2)}_{001})-L^{(2)}_{001}(L^{(1)}_{101}+L^{(1)}_{300}L^{(1)}_{001})],\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}B_{12}=2\,(L^{(2)}_{001}-L^{(1)}_{001})\,[(L^{(2)}_{011}-L^{(1)}_{011})-(L^{(2)}_{001}L^{(2)}_{210}-L^{(1)}_{001}L^{(1)}_{210})-\\-(L^{(2)}_{001}L^{(2)}_{300}L^{(2)}_{110}-L^{(1)}_{001}L^{(1)}_{300}L^{(1)}_{110})]+(L^{(2)}_{110}-L^{(1)}_{110})\,[L^{(1)}_{001}(L^{(2)}_{101}+\\+L^{(2)}_{300}L^{(2)}_{001})-L^{(2)}_{001}(L^{(1)}_{101}+L^{(1)}_{300}L^{(1)}_{001})]+(L^{(2)}_{101}+L^{(2)}_{300}L^{(2)}_{001}-\\-L^{(1)}_{101}-L^{(1)}_{300}L^{(1)}_{001})(L^{(2)}_{110}L^{(1)}_{001}-L^{(1)}_{110}L^{(2)}_{001}),\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}B_{21}=2\,(L^{(2)}_{001}-L^{(1)}_{001})(L^{(2)}_{020}-L^{(1)}_{020})+\\+(L^{(2)}_{110}-L^{(1)}_{110})(L^{(2)}_{110}L^{(1)}_{001}-L^{(1)}_{110}L^{(2)}_{001}).\end{aligned} \tag{5.24}$$

Если интересоваться вещественными решениями, то, как мы видели в п. 2.6, иногда приходится заменять в уравнении разветвления λ на $-\lambda$. При такой замене

$$L'^{(i)}_{mkn}=(-1)^n L^{(i)}_{mkn}.$$

Ввиду этого уравнение (5.19) примет в этом случае вид

$$R'(z_2,\lambda)\equiv\sum_{m=4}^{\infty}B'_{m0}z_2^m+\sum_{m=0}^{\infty}z_2^m\sum_{n=1}^{\infty}B'_{mn}\lambda^n=0, \tag{5.25}$$

где

$$B'_{mn}=(-1)^nB_{mn}. \tag{5.26}$$

Для коэффициентов B_{11}, B_{40}, B_{02}, B_{03}, B_{12}, B_{22} последняя формула непосредственно следует из формул (5.20)—(5.24).

Пусть $n_0 = 2$. Так как согласно допущению $m_0 = 4$, то возможны следующие расположения убывающей части диаграммы Ньютона (рис. 13 и рис. 14).

В случае, указанном на рис. 13, имеем $B_{21} \neq 0$ и $\varepsilon = 1/2$, так что в комплексном случае уравнение (5.19)

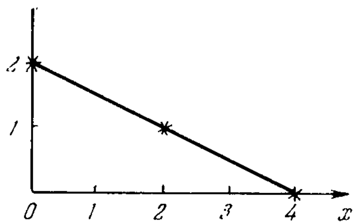

Рис. 13.

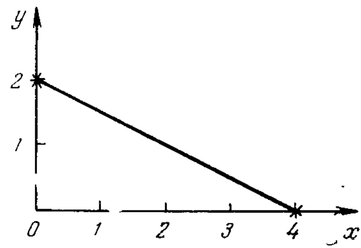

Рис. 14.

имеет четыре малых решения, и они имеют вид

$$z_2 = \eta_\sigma \lambda^{1/2} + o(\lambda^{1/2}), \tag{5.27}$$

где η_σ — корни уравнения

$$B_{40}\eta^4 + B_{21}\eta^2 + B_{02} = 0. \tag{5.28}$$

Если $\Delta = B^2_{21} - 4B_{40}B_{02} \neq 0$, то корни последнего уравнения простые и, согласно формуле (2.19), решения (5.27) принимают вид

$$z_2 = \eta_\sigma \lambda^{1/2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma i} \lambda^{\frac{1+i}{2}}. \tag{5.29}$$

При $\Delta = 0$ корни уравнения (5.28) кратные, так что для получения следующих членов разложения (5.27) нужно в уравнении (5.19) положить $z_2 = \eta_\sigma \gamma + \eta$ $(\gamma = \lambda^{1/2})$ и продолжить иследование для η (см. п. 2.5).

Перейдем к исследованию вещественного случая, т. е. когда коэффициенты $L^{(i)}_{mkn}$ и λ вещественны. В этом случае (см. п. 2.6) при отыскании вещественных решений для $\lambda \geqslant 0$ определяющее уравнение имеет вид

$$B_{40}\eta^4 + B_{21}\eta^2 + B_{02} = 0, \tag{5.28}$$

а для решений, определенных для $\lambda \leqslant 0$ (см. формулу (5.26)), определяющее уравнение имеет вид

$$B_{40}\eta^4 - B_{21}\eta^2 + B_{02} = 0. \tag{5.28'}$$

При $\Delta > 0$ уравнение (5.19) имеет столько малых вещественных решений в некотором полуинтервале справа от точки $\lambda = 0$, сколько вещественных корней у уравнения (5.28). Равным образом число малых вещественных решений уравнения (5.19), определенных для $\lambda \leqslant 0$, совпадает с числом вещественных корней уравнения (5.28'). При $\Delta < 0$ уравнения (5.28) и (5.28') не имеют вещественных решений, так что уравнение (5.19) не имеет малых вещественных решений. Наконец, случай $\Delta = 0$ требует дополнительного исследования, так как уравнения (5.28) и (5.28') имеют кратные корни.

В случае, указанном на рис. 14, $B_{21} = 0$ и $\varepsilon = 1/2$. Отсюда следует, что уравнение (5.19) имеет четыре малых решения вида (5.27), где η_σ — корни уравнения

$$B_{40}\eta^4 + B_{02} = 0. \tag{5.30}$$

Данное уравнение имеет лишь простые корни, а потому см. формулу (2.19)) каждое из четырех решений имеет вид (5.29).

Выделим теперь вещественные решения. Пусть $L^{(i)}_{mkn}$ и λ вещественны. Так как $B_{21} = 0$, то уравнения (5.28) и (528') совпадают. Ввиду этого каждое вещественное решение будет определено в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$. Далее, как видно из формулы (5.12), $B_{02} \geqslant 0$, а так как по допущению $n_0 = 2$, то $B_{02} > 0$. Отсюда следует, что если $B_{40} < 0$, то уравнение (5.19) имеет два малых вещественных решения, определенных в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$, а если $B_{40} > 0$, то уравнение (5.19) не имеет малых вещественных решений. Заметим, что в данном случае $B_{40} \neq 0$, так как мы допустили, что $m_0 = 4$.

Пусть $n_0 = 3$. Тогда $B_{02} = 0$, т. е. (см. формулу (5.21)) $(L^{(2)}_{001} - L^{(1)}_{001})^2 = 0$ или $L^{(1)}_{001} = L^{(2)}_{001} = L_{001}$. Ввиду этого формулы для вычисления коэффициентов B_{03}, B_{12} и B_{21}

упрощаются:

$$B_{03} = L_{001}\, I^2, \tag{5.22'}$$

$$B_{12} = 2\,(L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)})\, L_{001}\, I, \tag{5.23'}$$

где

$$I = L_{101}^{(2)} - L_{101}^{(1)} + L_{001}\,(L_{300}^{(2)} - L_{300}^{(1)}),$$

$$B_{21} = (L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)})^2\, L_{001}. \tag{5.24'}$$

Заметим, что из допущения $n_0 = 3$ следует, что $B_{03} \neq 0$, откуда имеем, что $L_{001} \neq 0$ и $I \neq 0$. Отсюда вытекает, что B_{12} и B_{21} отличны от нуля, если $L_{110}^{(1)} \neq L_{110}^{(2)}$, а если $L_{110}^{(1)} = L_{110}^{(2)}$, то $B_{12} = B_{21} = 0$.

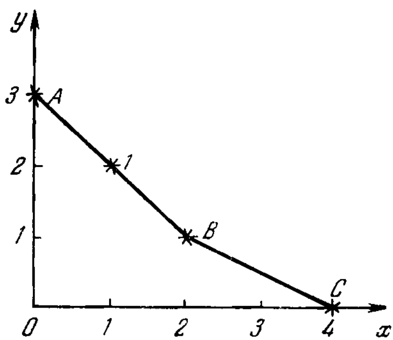

Рис. 15.

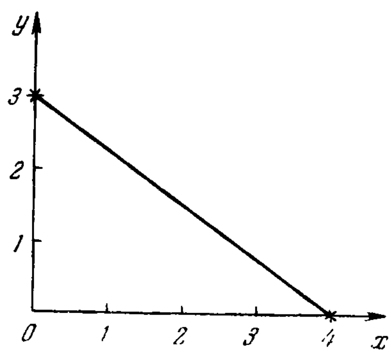

Рис. 16.

Следовательно, для убывающей части диаграммы Ньютона возможны лишь следующие случаи. Либо $B_{12} \neq 0$ и $B_{21} \neq 0$, так что убывающая часть диаграммы имеет вид, указанный на рис. 15, либо $B_{12} = B_{21} = 0$, и тогда убывающая часть диаграммы состоит из одного отрезка (рис. 16). В первом случае (когда $B_{12}B_{21} \neq 0$) мы из диаграммы находим, что $\varepsilon_1 = 1$ (для звена AB) и $\varepsilon_2 = 1/2$ (для звена BC). Каждое из звеньев AB и BC порождает два малых решения.

Именно, звено AB порождает два решения уравнения (5.19):

$$z_2 = \eta_\sigma \lambda + o(\lambda), \quad \sigma = 1,\ 2, \tag{5.31}$$

где η_σ — корни порождающего уравнения

$$B_{21}\eta^2 + B_{12}\eta + B_{03} = 0.$$

При $\Delta = B_{12}^2 - 4B_{21}B_{03} \neq 0$ корни последнего уравнения простые и решения (5.31) принимают вид

$$z_2 = \eta_\sigma\lambda + \sum_{i=2}^{\infty} a_{\sigma i}\lambda^i. \tag{5.32}$$

Каждое из этих решений вещественно и определено в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ при $\Delta > 0$ и вещественных $L_{mkn}^{(i)}$. При $\Delta < 0$ уравнение (5.19) не имеет малых вещественных решений, порождаемых звеном AB. Если $\Delta = 0$, то нужны дополнительные исследования.

Звено BC порождает следующие решения уравнения (5.19):

$$z_2 = \eta_\sigma\lambda^{1/2} + o(\lambda^{1/2}), \quad \sigma = 1, 2, \tag{5.33}$$

где η_σ — корни определяющего уравнения

$$B_{40}\eta^2 + B_{21} = 0.$$

Так как оба корня этого уравнения простые, то решения (5.33) принимают вид

$$z_2 = \eta_\sigma\lambda^{1/2} + \sum_{i=2}^{\infty} a_{\sigma i}\lambda^{i/2}. \tag{5.34}$$

Если коэффициенты $L_{mkn}^{(i)}$ вещественны, то эти два решения вещественны и определены в некоторой правой (левой) полуокрестности точки $\lambda = 0$ при

$$\operatorname{sign} B_{40}B_{21} = -1 \qquad (\operatorname{sign} B_{40}B_{21} = +1).$$

В том случае, когда $B_{12} = B_{21} = 0$, мы из диаграммы (см. рис. 16) находим, что $\varepsilon = 3/4$, и уравнение (5.19) имеет четыре малых решения

$$z_2 = \eta_\sigma\lambda^{3/4} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma i}\lambda^{\frac{i+3}{4}}, \qquad \sigma = 1, 2, 3, 4, \tag{5.35}$$

где η_σ — простые корни определяющего уравнения

$$B_{40}\eta^4 + B_{03} = 0.$$

Из данного уравнения следует, что в случае вещественности коэффициентов $L_{mkn}^{(i)}$ два из решений (5.35) вещественны и определены для $\lambda \geqslant 0$, когда $\operatorname{sign} B_{40}B_{03} = -1$, а когда $\operatorname{sign} B_{40}B_{03} = +1$, то они определены для $\lambda \leqslant 0$ (в силу равенства (5.25) и формулы (5.26)).

Займемся теперь нахождением компонент z_1 малых решений системы (5.17).

Мы видели, что все малые решения $z_2 = z_2(\lambda)$ уравнения (5.19) представляются в виде сходящихся рядов по целым или дробным степеням λ. Пусть p — общий знаменатель показателей этих степеней. Положим $\lambda = t^p$ и подставим в систему (5.17) выражения $\lambda = t^p$ и $z_2 = z_2(\lambda) = z_2(t^p)$. Получим

$$\widetilde{G}_i(z_1, t) = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Составим ОНД этих псевдомногочленов:

$$\widetilde{d}(z_1, t) = (\widetilde{G}_1(z_1, t), \widetilde{G}_2(z_1, t)),$$

используя теоремы 4.6 и 4.7. Тогда наша задача об отыскании компоненты $z_1 = z_1(t)$ сведется к нахождению всех малых решений уравнения

$$\widetilde{d}(z_1, t) = 0. \tag{5.36}$$

Для нахождения $\widetilde{d}(z_1, t)$ можно воспользоваться формулой (4.19). Здесь результант

$$R = \begin{vmatrix} 1 & H_1^{(1)} & H_0^{(1)} & 0 \\ 0 & 1 & H_1^{(1)} & H_0^{(1)} \\ 0 & 1 & H_1^{(2)} & H_0^{(2)} \\ 1 & H_1^{(2)} & H_0^{(2)} & 0 \end{vmatrix}.$$

Согласно теореме 4.4 он должен равняться нулю, чтобы многочлен $\widetilde{d}(z_1, t)$ имел положительную степень. Рассмотрим первый субрезультант

$$R_1 = \begin{vmatrix} 1 & H_1^{(1)}(z_2(t^p), t^p) \\ 1 & H_1^{(2)}(z_2(t^p), t^p) \end{vmatrix}.$$

Разумеется, других субрезультантов здесь нет. Возможны два случая: либо $R_1 \not\equiv 0$, либо $R_1 \equiv 0$.

Изучим сначала первый случай. Пусть

$$R_1 \equiv H_1^{(2)}(z_2(t^p),\ t^p) - H_1^{(1)}(z_2(t^p),\ t^p) \not\equiv 0. \qquad (5.3$$

В этом случае формула (4.19) принимает вид

$$\widetilde{D}(z_1,\ t) = R_1\,\widetilde{d}(z_1,\ t),$$

где определитель

$$\widetilde{D}(z_1,\,t) = \begin{vmatrix} 1 & \widetilde{G}_1(z_1,\,t). \\ 1 & \widetilde{G}_2(z_1,\,t). \end{vmatrix}.$$

Так как $R_1 \not\equiv 0$, то уравнение (5.36) эквивалентно уравнению

$$\widetilde{D}(z_1,\ t) = 0,$$

т. е. уравнению

$$[H_1^{(2)}(z_2(t^p),\ t^p) - H_1^{(1)}(z_2(t^p),\ t^p)]\,z_1 + \\ + [H_0^{(2)}(z_2(t^p),\ t^p) - H_0^{(1)}(z_2(t^p),\ t^p)] = 0. \qquad (5.38)$$

Используя теперь формулы (3.10) и (3.11), мы преобразуем выражение (5.37) и уравнение (5.38). Именно:

$$R_1 \equiv [L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)}]\,z_2(t^p) + [L_{101}^{(2)} + L_{300}^{(2)}L_{001}^{(2)} - L_{101}^{(1)} - \\ - L_{300}^{(1)}L_{001}^{(1)}]\,t^p + r_1(z_2(t^p),\,t^p) \qquad (5.37')$$

и

$$R_1 z_1 + \theta = 0, \qquad (5.38')$$

где

$$\theta = (L_{001}^{(2)} - L_{001}^{(1)})\,t^p + (L_{020}^{(2)} - L_{020}^{(1)})\,z_2^2(t^p) + \\ + C_1 z_2(t^p)\,t^p + C_2 t^{2p} + r_2(z_2(t^p),\,t^p)$$

$$C_1 = (L_{011}^{(2)} - L_{011}^{(1)}) - (L_{001}^{(2)}L_{210}^{(2)} - L_{001}^{(1)}L_{210}^{(1)}) - \\ - (L_{001}^{(2)}L_{200}^{(2)}L_{110}^{(2)} - L_{001}^{(1)}L_{300}^{(1)}L_{110}^{(1)}),$$

$$C_2 = (L_{002}^{(2)} - L_{002}^{(1)}) - (L_{001}^{(2)}L_{201}^{(2)} - L_{001}^{(1)}L_{201}^{(1)}) - (L_{001}^{(2)}L_{300}^{(2)}L_{101}^{(2)} - \\ - L_{001}^{(1)}L_{300}^{(1)}L_{101}^{(1)}) - (L_{001}^{(2)^2}L_{400}^{(2)} - L_{001}^{(1)^2}L_{400}^{(1)}) - (L_{001}^{(2)^2}L_{300}^{(2)^2} - L_{001}^{(1)^2}L_{300}^{(1)^2}),$$

$$\operatorname{ord} r_1(\xi,\ \eta) \geqslant 2, \quad \operatorname{ord} r_2(\xi,\ \eta) \geqslant 3.$$

Подставляя в (5.37) и (5.38′) ранее найденные значения для $z_2(t^p)$, мы сможем сделать выводы о компонентах

z_1 малых решений системы (5.17). Если $R_1 \equiv 0$, то согласно замечанию 4.2 $\deg(\widetilde{d}(z_1, t)) = 2$, а так как степени псевдомногочленов $\widetilde{G}_1(z_1, t)$ и $\widetilde{G}_2(z_1, t)$ равны двум, то уравнение (5.36) принимает вид $\widetilde{G}_1(z_1, t) = 0$. Исследуем теперь четыре частных случая, которые соответствуют рис. 13—16. Начнем с рассмотрения случая, указанного на рис. 13, предполагая, что $\Delta \neq 0$. В этом случае $L_{110}^{(2)} \neq L_{110}^{(1)}$. Действительно, если мы допустим, что $L_{110}^{(2)} = L_{110}^{(1)}$, то из формул (5.20), (5.21), (5.24) будет следовать, что

$$\Delta = B_{21}^2 - 4B_{40}B_{02} = 0,$$

а это противоречит нашему предположению, что $\Delta \neq 0$.

Полагая в (5.29) $\lambda = t^2$ и подставляя затем $z_2(t^2)$ в выражение (5.37′), получим

$$R_1 = [L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)}]\,\eta_\sigma t + o(t) \not\equiv 0.$$

Отсюда и из (5.38′) имеем

$$[(L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)})\,\eta_\sigma t + o(t)]\,z_1 = [L_{001}^{(1)} - L_{001}^{(2)} + (L_{020}^{(1)} - L_{020}^{(2)})\,\eta_\sigma^2]\,t^2 + o(t^2),$$

так что

$$z_1 = z_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k t^k$$

или, после подстановки значения $t = \lambda^{1/2}$,

$$z_1(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \lambda^{k/2}. \tag{5.39}$$

Таким образом, каждому решению $z_2(\lambda)$ из (5.29) соответствует одно и только одно решение вида (5.39). При этом вещественным $z_2(\lambda)$ соответствуют вещественные $z_1(\lambda)$, определенные для тех же λ.

Рассмотрим случай, указанный на рис. 14, т. е. случай, когда $B_{21} = 0$. В этом случае $L_{110}^{(2)} \neq L_{110}^{(1)}$, так как если мы допустим, что $L_{110}^{(2)} = L_{110}^{(1)}$, то так же, как раньше, найдем, что $B_{21}^2 - 4B_{40}B_{02} = 0$, откуда $B_{21} = 2\sqrt{B_{40}B_{02}} \neq 0$, а это противоречит условию. Раз $L_{110}^{(2)} \neq L_{110}^{(1)}$, то мы приходим к таким же выводам, как и в предыдущем случае.

Переходим к рассмотрению случая, указанного на рис. 15. Допустим, что $\Delta \neq 0$, и рассмотрим решения (5.32), соответствующие звену AB. Подставляя эти решения в (5.37′), получим

$$R_1 = [(L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)})\,\eta_\sigma + I]\,\lambda + o(\lambda) \not\equiv 0,$$

где η_σ — корни определяющего уравнения, т. е.

$$\eta_\sigma = \frac{-B_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{2B_{21}}.$$

Отсюда и из формул (5.23′) и (5.24′) имеем

$$\eta_\sigma = \frac{-2\,(L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)})\,I \pm \sqrt{\Delta}}{2\,(L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)})^2\,L_{001}}.$$

Следовательно,

$$(L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)})\,\eta_\sigma + I = \frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2\,(L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)})\,L_{001}} \neq 0$$

и из (5.38′) мы для определения z_1 получаем линейное уравнение

$$[((L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)})\,\eta_\sigma + I)\,\lambda + o(\lambda)]\,z_1 = c\lambda^2 + o(\lambda^2), \quad (5.40)$$

где

$$\begin{aligned} c = {} & (L_{020}^{(1)} - L_{020}^{(2)})\,\eta_\sigma^2 + [L_{011}^{(1)} - L_{011}^{(2)} - L_{001}\,(L_{210}^{(1)} - L_{210}^{(2)}) - \\ & - L_{001}\,(L_{300}^{(1)}L_{110}^{(1)} - L_{300}^{(2)}L_{110}^{(2)})]\,\eta_\sigma + L_{002}^{(1)} - L_{002}^{(2)} - \\ & - L_{001}\,(L_{201}^{(1)} - L_{201}^{(2)}) - L_{001}\,(L_{300}^{(1)}L_{101}^{(1)} - L_{300}^{(2)}L_{101}^{(2)}) - \\ & - L_{001}^2\,(L_{400}^{(1)} - L_{400}^{(2)}) - L_{001}^2\,(L_{300}^{(1)^2} - L_{300}^{(2)^2}). \end{aligned}$$

Из (5.40) следует, что

$$z_1(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \lambda^k,$$

т. е. каждому решению (5.32) соответствует лишь одно решение $z_1(\lambda)$. При этом вещественным $z_2(\lambda)$ отвечают вещественные $z_1(\lambda)$. Далее мы рассмотрим решения (5.34), соответствующие звену BC рис. 15. Путем замены $\lambda = t^2$ и подстановки решений $z_2(t^2)$ из (5.34) в (5.37′), получим

$$R_1 = (L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)})\,\eta_\sigma t + o(t) \not\equiv 0,$$

так как в рассматриваемом случае $L_{110}^{(2)} \neq L_{110}^{(1)}$. Отсюда (учитывая, что $L_{001}^{(2)} = L_{001}^{(1)}$) следует, что уравнение (5.38′) принимает вид

$$[(L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)})\,\eta_\sigma t + o(t)]\,z_1 = (L_{020}^{(1)} - L_{020}^{(2)})\,\eta_\sigma^2 t^2 + o(t^2),$$

так что

$$z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \lambda^{k/2}.$$

Таким образом, каждому решению $z_2(\lambda)$ из (5.34) соответствует лишь одна компонента $z_1(\lambda)$, причем если $z_2(\lambda)$ вещественно, то и $z_1(\lambda)$ вещественно.

Рассмотрим, наконец, случай, указанный на рис. 16, т. е. когда $B_{12} = B_{21} = 0$, $B_{02} = 0$, но $B_{03} \neq 0$ и $B_{40} \neq 0$. Мы видели, что в этом случае $L_{110}^{(1)} = L_{110}^{(2)}$, $L_{001}^{(1)} = L_{001}^{(2)}$, но $L_{020}^{(1)} \neq L_{020}^{(2)}$ (см. формулу (5.20)) и (см. формулу (5.22′)) $I \neq 0$. Сделав в (5.35) замену $\lambda = t^4$ и подставляя затем $z_2(t^4)$ в выражение (5.37′), получим

$$R_1 = It^4 + o(t^4) \not\equiv 0.$$

Отсюда и из (5.38′) имеем

$$[It^4 + o(t^4)]\,z_1 = (L_{020}^{(1)} - L_{020}^{(2)})\,\eta_\sigma^2\, t^6 + o(t^6).$$

Следовательно,

$$z_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k t^k = \sum_{k=2}^{\infty} \gamma_k \lambda^{k/4},$$

причем вещественным $z_2(\lambda)$ из (5.35) соответствуют и вещественные компоненты $z_1(\lambda)$.

Найдем все малые решения для примера 5.1. Мы видели, что для этого примера $m_0 = 4$ и $n_0 = 2$. При помощи формул (5.20), (5.24) и (5.21) находим, что

$$B_{40} = \frac{2}{9}, \quad B_{21} = -\frac{\pi}{3}, \quad B_{02} = \frac{9}{64}\pi^2,$$

откуда

$$\Delta = B_{21}^2 - 4B_{40}B_{02} = -\frac{\pi^2}{72} < 0,$$

т. е. имеет место случай, соответствующий рис. 13, причем система (5.15) имеет четыре малых решения и все они комплексные. Так как к системе (5.15) мы пришли после преобразования примера, рассмотренного в конце п. 3.1, то мы приходим к выводу, что число малых решений этого примера равно четырем и они имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \xi_1^{(j)} &= \alpha_j\lambda^{1/2} + \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_{kj}\lambda^{k/2}, \\ \xi_2^{(j)} &= \beta_j\lambda^{1/2} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_{kj}\lambda^{k/2}, \end{aligned}\right\} \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{5.41}$$

где

$$\alpha_j = \frac{\sqrt{3\pi\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}(\mp i \pm 1), \quad \beta_j = \frac{\sqrt{3\pi\sqrt{2}}}{4}(\mp i \mp 1), \quad i = \sqrt{-1}.$$

§ 6. Многомерный случай ветвления

Многомерный случай ветвления изучался в ряде работ (см., например, Лобачев [1], Грэйвс [1], Лефшец [1], Вайнберг и Треногин [1, 3], а также обзорную работу Вайнберга и Айзенгендлера [1], Иглиш [1]).

Здесь мы будем придерживаться работы Айзенгендлера и Вайнберга [1], а также работы Айзенгендлера [4].

6.1. Кронекеровский метод исключения. Рассмотрим систему отмеченных многочленов

$$G_i(z_1, z_2, \ldots, z_n, \lambda), \qquad i = 1, 2, \ldots, n_1; \; n \geqslant 2, \; n_1 \geqslant 2,$$

над кольцом $I_n = K[[z_2, z_3, \ldots, z_n, \lambda]]$. Для нахождения всех малых решений системы

$$G_i(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \lambda) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n_1, \tag{6.1}$$

мы воспользуемся кронекеровским методом исключения (см., например, Ван-дер-Варден [2], §§ 77, 78) и составим линейную комбинацию многочленов

$$G_v = \sum_{i=2}^{n_1} v_i G_i (z_1, z_2, \ldots, z_n, \lambda),$$

где v_i — произвольные комплексные числа.

Общий делитель многочленов G_1 и G_v не может зависеть от $v = (v_2, v_3, \ldots, v_{n_1})$, ибо G_1 не содержит v. Ввиду этого общий делитель многочленов G_1 и G_v должен быть общим делителем всех многочленов $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_{n_1}$. Разумеется, справедливо обратное утверждение: общий делитель многочленов $G_1, G_2, \ldots, G_{n_1}$ будет делителем многочленов G_1 и G_v.

Пусть $d(z_1, z_2, \ldots, z_n, \lambda)$ является ОНД многочленов G_1 и G_v. Для того чтобы $d(z_1, z_2, \ldots, z_n, \lambda)$, как многочлен относительно z_1, имел положительную степень, необходимо и достаточно (см. теорему 4.4), чтобы

$$R(G_1, G_v) \equiv 0,$$

где $R(G_1, G_v)$ — результант многочленов G_1 и G_v. Разлагая результант (см. (4.9)), получим

$$R(G_1, G_v) = \sum_{i=1}^{n_2} W_i(v) F_i(z_2, z_3, \ldots, z_n, \lambda), \tag{6.2}$$

где $W_i(v) \equiv W_i(v_2, v_3, \ldots, v_{n_1})$ — одночлены вида $v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_k}$ и F_i — произведение коэффициентов многочленов $G_1, G_2, \ldots, G_{n_1}$, т. е. аналитические функции в начале координат такие, что $F_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$, так как последний столбец в опеределителе для R (см. (4.9)) обращается в нуле в нуль.

Отсюда видно, что равенство результанта нулю при произвольных значениях вектора $v = (v_2, v_3, \ldots, v_{n_1})$ возможно лишь тогда, когда

$$F_i(z_2, z_3, \ldots, z_n, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_2). \tag{6.3}$$

Теперь мы будем рассуждать примерно так же, как в п. 5.1. Если $R(G_1, G_v) \equiv 0$, то равенства (6.3) выполняются тождественно и, согласно теореме 4.4, ОНД

$$d(z_1, z_2, \ldots, z_n, \lambda) = (G_1, G_v) = (G_1, G_2, \ldots, G_{n_1})$$

имеет положительную степень относительно z_1. Мы можем написать, что

$$G_i = d\overline{G}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_1),$$

и система (6.1) распадается на уравнение

$$d(z_1, z_2, \ldots, z_n, \lambda) = 0 \tag{6.4}$$

и систему

$$\overline{G}_i(z_1, z_2, \ldots, z_n, \lambda) = 0. \tag{6.1'}$$

При этом согласно теореме 3.2 $d(z_1, \ldots, z_n, \lambda)$ — отмеченный многочлен относительно z_1. Полагая в равенстве (6.4)

$$z_i = \zeta_i\lambda \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

где ζ_i — параметры, получим

$$d(z_1, \zeta_2\lambda, \zeta_3\lambda, \ldots, \zeta_n\lambda, \lambda) = 0.$$

Применяя к данному уравнению диаграмму Ньютона, мы получим одно или несколько семейств малых решений

$$z_1 = \varphi(\lambda, \zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n),$$

расположенных по целым или дробным степеням и зависящих от произвольных параметров $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_n$. Система (6.1′) исследуется так же, как система (6.1), когда результант (6.2) не равен нулю тождественно. Исследуем этот случай. Пусть

$$R(G_1, G_v) \not\equiv 0.$$

Тогда (см. теорему 4.4) ОНД многочленов G_1 и G_v, а значит ОНД всех многочленов $G_1, G_2, \ldots, G_{n1}$, ассоциирован с единицей. Допустим, что в этом случае система (6.3) имеет решения

$$z_i = \varphi_i(\lambda) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Подставляя эти решения в систему отмеченных многочленов G_i, получим систему

$$\widetilde{G}_i \equiv G_i(z_1, \varphi_2(\lambda), \ldots, \varphi_n(\lambda), \lambda) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_1),$$

для которой результант $R(\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_v) \equiv 0$, ибо $\varphi_i(\lambda)$ удовлетворяют системе (6.3). Отсюда согласно теореме 4.4

многочлены $\widetilde{G}_1$ и $\widetilde{G}_v$, а значит и многочлены $\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_{n_1}$, имеют ОНД

$$d(z_1, \lambda)$$

с положительной степенью относительно z_1.

Так как

$$\widetilde{G}_i = d(z_1, \lambda)\, g_i(z_1, \lambda),$$

то, найдя из уравнения

$$d(z_1, \lambda) = 0$$

решения $z_1 = \varphi_1(\lambda)$, мы получим, что функции $z_i = \varphi_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) удовлетворяют системе (6.1). Разумеется, если $\varphi_i(\lambda)$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$ представляются в некоторой окрестности $\lambda = 0$ в виде сходящихся рядов по целым или дробным степеням λ, обращающихся в нуль при $\lambda = 0$, то и $\varphi_1(\lambda)$ будет представляться в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ в виде сходящегося ряда по целым или дробным степеням λ. Полученный результат мы сформулируем в виде следующего предложения.

Лемма 6.1. *Для того чтобы система* (6.1) *была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы система* (6.3) *была разрешима, где F_i — аналитические функции в начале координат, удовлетворяющие условию*

$$F_i(0, 0, \ldots, 0, 0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_2).$$

Система функций $F_i(z_2, z_3, \ldots, z_n, \lambda)$ не содержит неизвестного z_1. Ее мы приведем к нормальному виду и продолжим процесс исключения, имея в виду утверждение леммы 6.1.

Отметим, что кронекеровский метод исключения применим и тогда, когда система многочленов не приведена к нормальному виду.

Приведем такой пример. Пусть

$$\Phi_1(z_1, z_2, z_3, \lambda) \equiv z_1^2 - 4\lambda^2 z_2^2 = 0,$$

$$\Phi_2(z_1, z_2, z_3, \lambda) \equiv (z_1 - 2\lambda z_2)(z_3 - \lambda z_2) = 0,$$

$$\Phi_3(z_1, z_2, z_3, \lambda) \equiv z_3^2 - \lambda^2 z_2^2 = 0.$$

Применим к данной системе метод исключения Кронекера. Составим линейную комбинацию многочленов Φ_2

и Φ_3:

$$\Phi_v = v_2\Phi_2 + v_3\Phi_3 = v_2 z_1 (z_3 - \lambda z_2) + [v_3 (z_3 + \lambda z_2) - 2v_2\lambda z_2] (z_3 - \lambda z_2).$$

Тогда результант относительно z_1 многочленов Φ_1 и Φ_v

$$R(\Phi_1, \Phi_v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4\lambda^2 z_2^2 \\ v_2 b & (v_3 a - 2v_2\lambda z_2) b & 0 \\ 0 & v_2 b & (v_3 a - 2v_2\lambda z_2) b \end{vmatrix} =$$

$$= b^2 a (v_3^2 a - 4 v_2 v_3 \lambda z_2),$$

где $a = z_3 + \lambda z_2$, $b = z_3 - \lambda z_2$.

Отсюда согласно лемме 6.1 имеем

$$F_1 \equiv (z_3 - \lambda z_2)^2 (z_3 + \lambda z_2)^2 = 0,$$
$$F_2 \equiv \lambda z_2 (z_3 - \lambda z_2)^2 (z_3 + \lambda z_2) = 0.$$

Данная система имеет общий множитель. Приравнивая его нулю, находим, что $z_3 = \pm \lambda z_2$. Отсюда и из равенства $\Phi_1 = 0$ следует, что исходная система имеет четыре однопараметрических семейства решений

$$z = (2\lambda z_2, z_2, \lambda z_2),$$
$$z = (-2\lambda z_2, z_2, \lambda z_2),$$
$$z = (2\lambda z_2, z_2, -\lambda z_2),$$
$$z = (-2\lambda z_2, z_2, -\lambda z_2).$$

Параметром здесь служит z_2.

6.2. Малые решения уравнения разветвления и метод исключения неизвестных. Переходя к исследованию системы (1.11) при $n \geqslant 2$, мы исключим из рассмотрения тривиальный случай, когда $\Phi_i (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda) \equiv 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, так как в таком случае система (1.11) имеет бесчисленное множество малых решений, ибо ей удовлетворяют произвольные функции $\xi_i (\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и, в частности, непрерывные функции $\xi_i (\lambda)$ такие, что $\xi_i (0) = 0$. Ввиду этого мы допустим, что

$$\Phi_i (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda) \not\equiv 0,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n_1 \leqslant n$ и $n_1 > 2$. Рассмотрим систему

$$\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_1). \quad (6.5)$$

Так как (6.5) представляет собою уравнение разветвления, то для $i = 1, 2, \ldots, n_1$ имеем

$$\operatorname{ord} \Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0) > 2, \quad \operatorname{ord} \Phi_i(0, 0, \ldots, 0, \lambda) > 1.$$

Путем неособого линейного преобразования (см. п. 3.1)

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (T)(\xi_1^{(1)}, \xi^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}) \quad (6.6)$$

и подготовительной теоремы Вейерштрасса мы приведем систему (6.5) к нормальному виду относительно $\xi_1^{(1)}$ (см. п. 3.2):

$$G_i^{(1)}(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n_1). \quad (6.5_1)$$

При этом системы (6.5) и (6.5_1) эквивалентны относительно малых решений, т. е. каждое малое решение системы (6.5_1) приводит при помощи преобразования (6.6) к малому решению системы (6.5), и наоборот.

Для нахождения малых решений системы (6.5_1) мы воспользуемся методом исключения неизвестных. Обозначим через d_1 ОНД многочленов $G_i^{(1)}(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}, \lambda)$, так что

$$G_i^{(1)} = d_1 g_i^{(1)}.$$

Методом Кронекера мы исключим из системы

$$g_i^{(1)}(\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n_1)$$

неизвестное $\xi_1^{(1)}$. При этом, как мы видели в предыдущем пункте, получим систему

$$\Phi_i^{(1)}(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n_2),$$

где $\Phi_i^{(1)}$ — аналитические функции в начале координат, обращающиеся в нуль в начале координат. Так как нас интересуют малые решения последней системы, то каждое уравнение этой системы мы сократим на максимальную допустимую степень λ. Получим тогда систему

$$\Phi_i^{(2)}(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n_2). \quad (6.7)$$

Допустим что все функции $\Phi_i^{(2)}$ обращаются в нуль в начале координат. Тогда к функциям $\Phi_i^{(2)}$ мы вновь применим неособое линейное преобразование неизвестных

$$(\xi_2^{(1)}, \xi_3^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(1)}) = (T_1)(\xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(2)})$$

и подготовительную теорему Вейерштрасса. При этом относительно малых решений система (6.7) будет эквивалентна системе

$$G_i^{(2)}(\xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, \ldots, \xi_n^2, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n_2), \qquad (6.5_2)$$

где $G_i^{(2)}$ — отмеченные многочлены относительно $\xi_2^{(2)}$. Обозначим через d_2 ОНД многочленов $G_i^{(2)}$ $(\xi_2^{(2)}, \xi_3^{(2)}, \ldots, \xi_n^{(2)}, \lambda)$ и продолжим указанный процесс.

Замечание 6.1. Если хоть одна из функций $\Phi_i^{(2)}$ отлична от нуля в начале координат, то система (6.7) не будет иметь малых решений, а потому, согласно лемме 6.1, при выполнении условия

$$d_1 \sim 1$$

и система (6.5) не будет иметь малых решений. Для того чтобы в этом случае можно было продолжить описываемый процесс, мы введем отмеченные многочлены нулевой степени. При таком условии, если многочлен $G_{i_0}^{(2)}$ не обращается в нуль в начале координат, то система (6.5_2) не имеет малых решений (ибо $G_{i_0}^{(2)} \sim 1$) и наибольший общий делитель многочленов $G_i^{(2)}$ (т. е. d_2) также ассоциирован с единицей. Таким образом, если система (6.7) не имеет малых решений, то система (6.5_2) также не имеет малых решений и $d_2 \sim 1$. Более того, при продолжении описываемого нами процесса исключения [1]), который, в отличие от кронекеровского процесса исключения, на каждом шаге связан с переходом к новым неизвестным при помощи неособого линейного преобразования и применением затем подготовительной теоремы Вейерштрасса, мы в этом случае будем получать новые системы вида (6.5_i), которые не будут иметь малых решений и $d_i \sim 1$ для всех $i \geqslant 2$. Ввиду этого, как увидим, для окон-

[1]) См. С. Лефшец [1].

чательных выводов нет надобности рассматривать отдельно два случая: когда все $\Phi_i^{(2)}$ обращаются в нуль в начале координат или когда хотя бы одна из этих функций не обращается в нуль в начале координат.

Учитывая данное замечание и продолжая процесс, мы получим системы уравнений вида

$$G_i^{(r)}(\xi_r^{(r)}, \xi_{r+1}^{(r)}, \ldots, \xi_n^{(r)}, \lambda) = 0 \tag{6.5$_r$}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n_r; \quad r = 3, \ldots, n-1),$$

$$G_i^{(n)}(\xi_n^{(n-1)}, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_n), \tag{6.5$_n$}$$

где $G_i^{(r)}$ — отмеченные многочлены относительно первого аргумента (положительной или нулевой степени), и многочлены d_1, d_2, ..., d_k $(k \leqslant n)$, каждый из которых либо является отмеченным многочленом, либо ассоциирован с единицей (~ 1). При этом неизвестные ξ связаны соотношением

$$(\xi_r^{(r-1)}, \xi_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, \xi_n^{(r-1)}) = (T_{r-1})(\xi_r^{(r)}, \xi_{r+1}^{(r)}, \ldots, \xi_n^{(r)}), \tag{6.8}$$

где (T_{r-1}) — неособое линейное преобразование. Отметим еще, что для нахождения многочленов d_i используется алгоритм, изложенный в п. 4.3.

6.3. Квазирегулярный случай ветвления.

О п р е д е л е н и е 6.1. Если выполнено условие

$$d_i \sim 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{6.9}$$

то мы скажем, что имеет место квазирегулярный (или невырожденный) случай ветвления.

В квазирегулярном случае имеет место следующее предложение.

Т е о р е м а 6.1. *Пусть имеет место квазирегулярный случай, т. е. $d_i \sim 1$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда, если d_n не ассоциирован с единицей, то число малых решений уравнения разветвления* (6.5) *конечно и отлично от нуля, причем компоненты каждого малого решения представляются в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ в виде сходящихся степенных рядов по целым или дробным степеням λ. Если $d_n \sim 1$, то уравнение разветвления* (6.5) *не имеет малых решений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть отмеченный многочлен $d_n = d_n(\xi_n^{(n-1)}, \lambda)$ не ассоциирован с единицей.

Тогда все малые решения системы (6.5_n) определяются из уравнения

$$d_n(\xi_n^{(n-1)}, \lambda) = 0 \tag{6.10}$$

и число их (с учетом кратности) равно $\deg d_n(\xi_n^{(n-1)}, 0) \geqslant 1$, т. е. отлично от нуля.

При помощи диаграммы Ньютона мы найдем, что каждое малое решение уравнения (6.10) представляется в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ в виде сходящегося ряда

$$\xi_n^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k t^k, \quad t = \lambda^{1/p}. \tag{6.11}$$

При этом p и коэффициенты α_k найдутся методом, указанным в § 2. Каждое решение (6.11) мы подставим в систему (6.5_{n-1}), которая после замены $\lambda = t^p$ примет вид

$$\widetilde{G}_i(\xi_{n-1}^{(n-1)}, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n_{n-1}), \tag{$6.5'_{n-1}$}$$

где $\widetilde{G}_i$ — отмеченные многочлены относительно $\xi_{n-1}^{(n-1)}$, степени которых в силу замечания 6.1 не меньше единицы. В силу леммы 6.1 система ($6.5'_{n-1}$) имеет малые решения и (см. п. 6.1 и теорему 4.4) все они найдутся из уравнения

$$\widetilde{d}_{n-1}(\xi_{n-1}^{(n-1)}, t) = 0, \tag{6.12}$$

где $\widetilde{d}_{n-1}(\xi_{n-1}^{(n-1)}, t) = (\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2, \ldots, \widetilde{G}_{n_{n-1}})$ — общий наибольший делитель многочленов $\widetilde{G}_i$.

При помощи диаграммы Ньютона мы найдем все малые решения уравнения (6.12). Поступая так с каждым решением (6.11), мы определим все малые решения $(\xi_{n-1}^{(n-1)}(\lambda), \xi_n^{(n-1)}(\lambda))$ системы (6.5_{n-1}) и, используя преобразование (6.8), найдем $(\xi_{n-1}^{(n-2)}(\lambda), \xi_n^{(n-2)}(\lambda))$. Разумеется, $\xi_{n-1}^{(n-2)}(\lambda)$ и $\xi_n^{(n-2)}(\lambda)$ представляют собою в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ сходящиеся степенные ряды, расположенные по степеням $\lambda^{1/q}$, где q — натуральное число. Каждое решение $(\xi_{n-1}^{(n-2)}(\lambda), \xi_n^{(n-2)}(\lambda))$ мы подставим в систему (6.5_{n-2}), которая после замены $\lambda^{1/q} = t$ примет вид

$$\widetilde{G}_i'(\xi_{n-2}^{(n-2)}, t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_{n-2}). \tag{$6.5'_{n-2}$}$$

С данной системой мы поступим так же, как с системой $(6.5'_{n-1})$, и продолжим процесс восстановления неизвестных. Таким путем мы получим все малые решения системы (6.5). Ясно, что число их будет конечным, отличным от нуля и компоненты каждого из них будут представлены в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ в виде сходящихся рядов по целым или дробным степеням λ. Этим доказано первое утверждение теоремы. Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что если $d_n \sim 1$, то система (6.5_n) не имеет малых решений, и тогда, согласно лемме 6.1 (см. также замечание 6.1), предыдущие системы (6.5_r) также не имеют малых решений. Теорема доказана.

6.4. Вырожденный случай ветвления.

Определение 6.2. Многомерный случай ветвления называется вырожденным, если d_i не ассоциирован с единицей при некотором $i \leqslant n-1$.

Теорема 6.2. *В вырожденном случае число малых решений уравнения разветвления бесконечно.*

Доказательство. Пусть имеет место вырожденный случай, т. е. хотя бы для одного i_0 $(1 \leqslant i_0 \leqslant n-1)$ d_{i_0} не ассоциирован с единицей. Тогда система (6.5_{i_0}) имеет решения, определяющиеся уравнением

$$d_{i_0}(\xi_{i_0}^{(i_0)}, \ldots, \xi_n^{(i_0)}, \lambda) = 0, \qquad (6.13)$$

где d_{i_0} — отмеченный многочлен относительно $\xi_{i_0}^{(i_0)}$. Полагая

$$\xi_i^{(i_0)} = \zeta_{i-i_0} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(i)} \lambda^k \qquad (i = i_0+1, \ldots, n)$$

(где ζ_{i-i_0} — произвольные параметры и коэффициенты рядов $\alpha_k^{(i)}$ подобраны так, чтобы эти ряды сходились в некотором круге с центром в точке $\lambda = 0$), мы после подстановки этих $\xi_i^{(i_0)}$ в уравнение (6.13) получим

$$\widetilde{d}_{i_0}(\xi_{i_0}^{(i_0)}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-i_0}, \lambda) = 0, \qquad (6.14)$$

где $\widetilde{d}_{i_0}$ — отмеченный многочлен относительно $\xi_{i_0}^{(i_0)}$. Применяя к уравнению (6.14) диаграмму Ньютона и считая $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-i_0}$ фиксированными, мы получим семейства малых решений уравнения разветвления (6.5), зависящие от параметров $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-i_0})$ и представимые в виде сходящихся рядов по целым или дробным степеням λ. Ясно, что число этих решений бесконечно. Теорема доказана.

Из теорем 6.1 и 6.2 вытекает

Следствие 6.1. *Для того чтобы число малых решений уравнения разветвления* (6.5) *было конечным и отличным от нуля, необходимо и достаточно выполнение условия:*

$$d_i \sim 1 \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, n-1, \text{ но } d_n \text{ не} \sim 1. \tag{6.15}$$

Отметим еще, что совокупность всех малых решений уравнения разветвления (6.5)

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i,$$

где M_i — совокупность всех малых решений, порождаемых уравнением $d_i = 0$.

6.5. Об изолированности нулевого решения. Наряду с системой (6.5) рассмотрим систему

$$\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n_1 \leqslant n). \tag{6.16}$$

Так как $\operatorname{ord} \Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, 0) \geqslant 2$ для всякого i, то данная система имеет нулевое решение. Как увидим в дальнейшем (см. п. 12.6), иногда важно выяснить вопрос об изолированности нуля системы (6.16). Для решения этого вопроса воспользуемся методом, изложенным в предыдущих пунктах. Повторяя для системы (6.16) те же операции, что и для системы (6,5), мы выделим многочлены

$$d_1', \ d_2', \ \ldots, \ d_k' \qquad (k \leqslant n-1).$$

Предыдущие рассуждения приводят к следующему предложению.

Теорема 6.3. *Для того чтобы нулевое решение системы* (6.16) *было изолированным, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$d_i' \sim 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

ГЛАВА III

Уравнение разветвления для нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений

§ 7. Интегральные уравнения Ляпунова — Шмидта

7.1. Интегро-степенные ряды от одного функционального аргумента. Пусть B — ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства и $K(s, t_1, t_2, \ldots, t_\rho)$ — вещественная или комплекснозначная функция, непрерывная по совокупности аргументов $s, t_1, t_2, \ldots, t_\rho \in B$. Выражение

$$u^{\alpha_0}(s)\int\limits_B\int\limits_B\ldots\int\limits_B K(s, t_1, \ldots, t_i)\, u^{\alpha_1}(t_1)\ldots u^{\alpha_i}(t_i)\, dt_1\ldots dt_i,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_i$ — неотрицательные целые числа и $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_i = m$, называется интегро-степенным членом степени m относительно u. Без ограничения общности можно считать, что

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_i.$$

Для простоты мы в дальнейшем будем предполагать, что $\operatorname{mes} B = 1$. Говорят, что два интегро-степенных члена принадлежат к одному типу, если они отличаются лишь своими ядрами $K(s, t_1, \ldots, t_i)$.

Число различных типов интегро-степенных членов степени m совпадает с числом решений диофантова уравнения

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_i = m \qquad (\alpha_k \geqslant 0,\ k = 0, 1, \ldots, i).$$

Для интегро-степенных членов степени m введем обозначения

$$W_m[s, u], \text{ или } V_m[s, u], \text{ или } P_m[s, u].$$

Из определения интегро-степенного члена следует, что

$$W_m[s, u]\, V_n[s, u] = P_{m+n}[s, u], \tag{7.1}$$

$$V_m[s, W_n[s, v]] = P_{mn}[s, v]. \tag{7.2}$$

Сумма конечного числа интегро-степенных членов степени m, принадлежащих различным типам, называется интегро-степенной формой степени m относительно функции u и обозначается через

$$W_m\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad V_m\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad P_m\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}.$$

Для интегро-степенных форм имеют место равенства (7.1) и (7.2). Отметим некоторые простые свойства интегро-степенных форм. Если $p = \text{const}$, то

$$W_m\begin{pmatrix} s \\ pu \end{pmatrix} = p^m W_m\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}.$$

Пусть $|W|_m\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}$ — интегро-степенная форма, в которой все ядра K заменены на $|K|$, $\widetilde{u} = \sup |u(t)|$ и $\widetilde{W}_m = \sup |W|_m \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда справедливы соотношения

$$\left|W_m\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix}\right| \leqslant |W|_m\begin{pmatrix} s \\ |u| \end{pmatrix} \leqslant |W|_m\begin{pmatrix} s \\ \widetilde{u} \end{pmatrix} = \\ = |W|_m\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}\widetilde{u}^m \leqslant |\widetilde{W}|_m \widetilde{u}^m.$$

Выражение

$$W_0\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} + W_1\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} + W_2\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} + \ldots \tag{7.3}$$

называется интегро-степенным рядом.

Интегро-степенной ряд (7.3) называется регулярно сходящимся, если сходится ряд

$$\widetilde{W}_0 + \widetilde{W}_1\widetilde{u} + \widetilde{W}_2\widetilde{u}^2 + \widetilde{W}_3\widetilde{u}^3 + \ldots \tag{7.4}$$

Разумеется, если для некоторой функции $u(t)$ ряд (7.3) сходится регулярно, то он будет сходиться абсолютно и равномерно, а потому, если $u(t)$ — непрерывная функция, то и сумма ряда (7.3) будет непрерывной функцией от $s \in B$.

7.2. Интегро-степенные ряды от многих функциональных аргументов. Интегро-степенные члены и формы от двух и большего числа функциональных аргументов вводятся так же, как в случае одного функционального аргумента. Например,

$$u^{\alpha_0}(s)\, v^{\beta_0}(s) \int\limits_B \ldots \int\limits_B K(s, t_1, t_2, \ldots, t_i)\, u^{\alpha_1}(t_1)\, v^{\beta_1}(t_1) \ldots$$

$$\ldots u^{\alpha_i}(t_i)\, v^{\beta_i}(t_i)\, dt_1 \ldots dt_i$$

представляет собою интегро-степенной член степени m ($m = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_i$) по u и степени n ($n = \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_i$) по v, где α_k и β_k ($k = 0, 1, \ldots, i$) — неотрицательные целые числа. Путем изменения нумерации можно добиться того, чтобы либо $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_i$, либо $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \ldots \geqslant \beta_i$. Для простоты, как и раньше, мы будем предполагать, что

$$\operatorname{mes} B = 1.$$

Понятия типа и формы вводятся, как и в предыдущем пункте. Через $U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix}$ обозначается интегро-степенная форма степени m по u и степени n по v. Выражение

$$\sum_{m+n=0}^{\infty} U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

называется интегро-степенным рядом от двух функциональных аргументов. Разумеется, если $p = \text{const}$ и $q = \text{const}$, то

$$U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ pu, qv \end{pmatrix} = p^m q^n U \begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix}.$$

Так же, как в п. 7.1, вводятся выражения $|U|_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix}$. Если положить $\tilde{u} = \sup |u(t)|$, $\tilde{v} = \sup |v(t)|$ и $\tilde{U}_{mn} = \sup |U|_{mn}\begin{pmatrix} s \\ 1, 1 \end{pmatrix}$, то получим

$$\left| U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix} \right| \leqslant |U|_{mn}\begin{pmatrix} s \\ |u|, |v| \end{pmatrix} \leqslant |U|_{mn}\begin{pmatrix} s \\ \tilde{u}, \tilde{v} \end{pmatrix} =$$

$$= |U|_{mn}\begin{pmatrix} s \\ 1, 1 \end{pmatrix} \tilde{u}^m \tilde{v}^n \leqslant \tilde{U}_{mn} \tilde{u}^m \tilde{v}^n.$$

Ряд (7.5) называется регулярно сходящимся для некоторых функций $u(t)$ и $v(t)$, если сходится ряд

$$\sum_{m+n>0}^{\infty} \widetilde{U}_{mn}\widetilde{u}^m\widetilde{v}^n. \tag{7.6}$$

Разумеется, если ряд (7.5) сходится регулярно, то он сходится абсолютно и равномерно, а следовательно, если $u(t)$ и $v(t)$ непрерывны, его сумма является непрерывной функцией. Отметим еще, что если ряд (7.5) сходится регулярно для данных функций $u_0(t)$ и $v_0(t)$, то он будет сходиться регулярно и для всяких других функций $u(x)$ и $v(x)$, для которых $|u(t)| \leqslant |u_0(t)|$ и $|v(t)| \leqslant |v_0(t)|$.

7.3. Интегро-степенные ряды от интегро-степенных рядов. Пусть ряд

$$W(s) = W_0(s) + W_1\binom{s}{u} + W_2\binom{s}{u} + \ldots + W_m\binom{s}{u} + \ldots$$

сходится регулярно, когда $\widetilde{u} \leqslant h$. Подставляя в него вместо u сумму ряда

$$u(s) = V_1\binom{s}{v} + V_2\binom{s}{v} + \ldots + V_n\binom{s}{v} + \ldots,$$

мы получим новый интегро-степенной ряд, который сходится регулярно для всех v, для которых

$$\widetilde{V}_1\widetilde{v} + \widetilde{V}_2\widetilde{v}^2 + \ldots + \widetilde{V}_n\widetilde{v}^n + \ldots \leqslant h.$$

Это предложение, вытекающее непосредственно из предыдущего, переносится на более общий случай. В частности, имеет место следующее предложение (Э. Шмидт [1]).

Теорема 7.1. *Пусть ряд* (7.5) *сходится регулярно, когда* $\widetilde{u} \leqslant h$ *и* $\widetilde{v} \leqslant k$. *Подставляя в него вместо* u *и* v *суммы следующих рядов*:

$$u(s) = \sum_{m+n+p=1}^{\infty} W_{mnp}\begin{pmatrix} s \\ w_1, w_2, w_3 \end{pmatrix},$$

$$v(s) = \sum_{m+n+p=1}^{\infty} V_{mnp}\begin{pmatrix} s \\ w_1, w_2, w_3 \end{pmatrix},$$

мы получим новый интегро-степенной ряд от функциональных аргументов w_1, w_2, w_3, *сходящийся регулярно, если*

$$\sum_{m+n+p=1}^{\infty} \widetilde{W}_{mnp} \widetilde{w}_1^m \widetilde{w}_2^n \widetilde{w}_3^p \leqslant h,$$

$$\sum_{m+n+p=1}^{\infty} \widetilde{V}_{mnp} \widetilde{w}_1^m \widetilde{w}_2^n \widetilde{w}_3^p \leqslant k.$$

7.4. Сжатость оператора Ляпунова—Шмидта. Рассмотрим оператор Ляпунова — Шмидта

$$F(u, v) = \sum_{m+n\geqslant 2} U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix}$$

в предположении, что ряд, стоящий справа, сходится регулярно, когда $\tilde{u} \leqslant d$, $\tilde{v} \leqslant d_1$.

Пусть $|u(t)| \leqslant \omega \leqslant h < d$ и $|v(t)| \leqslant \omega_1 \leqslant h_1 < d_1$. Тогда

$$|F(u, v)| \leqslant \sum_{m+n\geqslant 2} \left| U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix} \right| \leqslant \sum_{m+n\geqslant 2} \widetilde{U}_{mn} \omega^m \omega_1^n = \\ = \Phi(\omega, \omega_1)$$

причем функция $\Phi(\omega, \omega_1)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные для $\omega \in [0, h]$ и $\omega_1 \in [0, h_1]$. Далее,

$$\Phi(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \omega}\Phi(0, 0) = \frac{\partial}{\partial \omega_1}\Phi(0, 0) = 0,$$

откуда по формуле Тейлора имеем

$$\Phi(\omega, \omega_1) = \frac{1}{2}\omega^2 \Phi_{\omega\omega}(\theta\omega, \theta\omega_1) + \omega\omega_1 \Phi_{\omega\omega_1}(\theta\omega, \theta\omega_1) + \\ + \frac{1}{2}\omega_1^2 \Phi_{\omega_1\omega_1}(\theta\omega, \theta\omega_1),$$

где $0 < \theta < 1$, или

$$|F(u, v)| \leqslant \Phi(\omega, \omega_1) \leqslant A(\omega^2 + \omega\omega_1 + \omega_1^2) \\ (A = \text{const}). \tag{7.7}$$

Аналогично, если $|u_1(t)| \leqslant \omega \leqslant h < d$, то получим

$$|F(u_1, v)| \leqslant \Phi(\omega, \omega_1) \leqslant A(\omega^2 + \omega\omega_1 + \omega_1^2). \tag{7.7'}$$

Напишем теперь, что

$$|U_{mn}(u, v) - U_{mn}(u_1, v)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu} \int_B \ldots \int_B |K_{mn}^{(\nu)}(s, t_1, t_2, \ldots, t_i)| \, |u^{\alpha_0}(s) u^{\alpha_1}(t_1) \ldots u^{\alpha_i}(t_i) -$$
$$- u_1^{\alpha_0}(s) u_1^{\alpha_1}(t_1) \ldots u_1^{\alpha_i}(t_i)| \, |v^{\beta_0}(s) v^{\beta_1}(t_1) \ldots v^{\beta_i}(t_i)| \, dt_1 \ldots dt_i,$$

где ν пробегает конечное число значений (можно считать, что это число не больше числа различных типов интегро-степенных членов степени m по u и степени n по v) и

$$\sum_{\nu} \sup \int_B \ldots \int_B |K^{(\nu)}(s, t_1, \ldots, t_i)| \, dt_1 \ldots dt_i = \widetilde{U}_{mn}.$$

Так как

$$u^{\alpha_0}(s) u^{\alpha_1}(t_1) \ldots u^{\alpha_i}(t_i) - u_1^{\alpha_0}(s) u_1^{\alpha_1}(t_1) \ldots u_1^{\alpha_i}(t_i) =$$
$$= (u^{\alpha_0}(s) - u_1^{\alpha_0}(s)) u^{\alpha_1}(t_1) \ldots u^{\alpha_i}(t_i) +$$
$$+ u_1^{\alpha_0}(s) (u^{\alpha_1}(t_1) - u_1^{\alpha_1}(t_1)) u^{\alpha_2}(t_2) \ldots u^{\alpha_i}(t_i) + \ldots$$
$$\ldots + u_1^{\alpha_0}(s) u_1^{\alpha_1}(t_1) \ldots u_1^{\alpha_{i-1}}(t_{i-1}) (u^{\alpha_i}(t_i) - u_1^{\alpha_i}(t_i))$$

и

$$u^{\alpha} - u_1^{\alpha} = (u - u_1)(u^{\alpha-1} + u^{\alpha-2} u_1 + \ldots + u_1^{\alpha-1}),$$

то

$$|u^{\alpha_0}(s) u^{\alpha_1}(t_1) \ldots u^{\alpha_i}(t_i) - u_1^{\alpha_0}(s) u_1^{\alpha_1}(t_1) \ldots u_1^{\alpha_i}(t_i)| \leqslant$$
$$\leqslant m\omega^{m-1} \sup |u(s) - u_1(s)|.$$

Отсюда и из предыдущего имеем

$$|U_{mn}(u, v) - U_{mn}(u_1, v)| \leqslant$$
$$\leqslant m \widetilde{U}_{mn} \omega^{m-1} \omega_1^n \sup |u(s) - u_1(s)|,$$

а значит,

$$|F(u, v) - F(u_1, v)| \leqslant \left(\sum_{m+n \geqslant 2} m \widetilde{U}_{mn} \omega^{m-1} \omega_1^n \right) \sup |u(s) - u_1(s)|$$

или

$$|F(u, v) - F(u_1, v)| \leqslant \Phi_{\omega}(\omega, \omega_1) \sup |u(s) - u_1(s)|.$$

Так как $\Phi_\omega(0, 0) = 0$, то по формуле Лагранжа имеем $\Phi_\omega(\omega, \omega_1) = \omega\Phi_{\omega\omega}(\theta\omega, \theta\omega_1) + \omega_1\Phi_{\omega\omega_1}(\theta\omega, \theta\omega_1) \leqslant \leqslant M(\omega + \omega_1)$ $(0 < \theta < 1,\ 0 < M = \text{const})$. Отсюда и из предыдущего следует, что

$$|F(u, v) - F(u_1, v)| \leqslant M(\omega + \omega_1) \sup |u(s) - u_1(s)|. \quad (7.8)$$

Из неравенств (7.7) и (7.8) вытекает следующее предложение.

Теорема 7.2. *Существует положительное число*

$$\delta \leqslant \min(h, h_1)$$

такое, что если $|u(t)| \leqslant \omega \leqslant \delta$ *и* $|v(t)| \leqslant \omega_1 \leqslant \delta$, *то оператор Ляпунова — Шмидта удовлетворяет неравенствам*

$$|F(u, v)| \leqslant a\delta;$$

$$|F(u, v) - F(u_1, v)| \leqslant q \sup |u(s) - u_1(s)|, \quad (7.9)$$

где $0 < a \leqslant 1$ *и число* $q < 1$, *т. е. оператор* $F(u, v)$ *при достаточно малых* $|v|$ *преобразует шар* $D = \{u(s) : \|u\| \leqslant \delta\}$ *пространства ограниченных измеримых функций (или пространства непрерывных функций) в себя, и в этом шаре он является сжимающим.*

Для дальнейшего мы приведем принцип сжатых отображений.

Теорема 7.3 [1]). *Пусть в шаре* $D = \{x : \|x - x_0\| \leqslant \leqslant r\}$ *банахова пространства задан оператор* $F(x)$, *преобразующий* D *в* D *и удовлетворяющий условию*

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant q\|x - y\| \qquad (x, y \in D,\ q < 1).$$

Тогда уравнение

$$x = F(x)$$

имеет в D *единственное решение* x^*, *которое может быть найдено методом последовательных приближений*

$$x_{n+1} = F(x_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

исходя из любого начального приближения $x_1 \in D$, *причем*

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{q^n}{1-q}\|x_2 - x_1\|.$$

---

[1]) Доказательство см., например, В. В. Немыцкий ([1], стр. 146) или Г. Е. Шилов ([1], стр. 49).

7.5. Простейшее уравнение. Изучение интегральных уравнений Ляпунова — Шмидта мы начнем с простейшего случая. Пусть $K_0(s)$, $K_{01}(s, t)$ и $v(t)$ — заданные непрерывные функции. Рассмотрим в пространстве непрерывных функций уравнение относительно неизвестной функции $u(x)$:

$$u(x) = U_{01}\binom{s}{v} + \sum_{m+n\geqslant 2} U_{mn}\binom{s}{u, v} \equiv U_{01}\binom{s}{v} + F(u, v), \tag{7.10}$$

где

$$U_{01}\binom{s}{v} = K_0(s)\, v(s) + \int_B K_{01}(s, t)\, v(t)\, dt.$$

При этом мы будем предполагать, что в неравенствах (7.9) $a = 1/2$ и ω_1 выбрано так, что при $|v(t)| \leqslant \omega_1$ выполняется неравенство $\left|U_{01}\binom{s}{v}\right| \leqslant \frac{1}{2}\delta$. В этом случае, согласно теореме 7.2, правая часть уравнения (7.10) удовлетворяет условиям теоремы 7.3, а потому уравнение (7.10) имеет единственное непрерывное решение $u_0(x)$, причем $|u_0(x)| \leqslant \delta \leqslant h < d$.

Покажем, что это решение $u_0(x)$ представимо в виде

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k\binom{s}{v}, \quad V_1\binom{s}{v} = U_{01}\binom{s}{v}. \tag{7.11}$$

Пусть число $\alpha > 1$ (при этом разность $\alpha - 1$ может быть достаточно малым числом) и λ — произвольное комплексное число, удовлетворяющее условию $|\lambda| < \alpha$. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$u_\lambda(s) = U_{01}\binom{s}{\lambda v} + F(u_\lambda, \lambda v) \equiv \lambda U_{01}\binom{s}{v} + \sum_{m+n\geqslant 2} \lambda^n U_{mn}\binom{s}{u_\lambda, v}. \tag{7.12}$$

Согласно предыдущему, если $|\lambda v(t)| \leqslant h_2 \leqslant \omega_1$ и $|u_\lambda| \leqslant \omega$, то данное уравнение имеет единственное непрерывное решение $u_\lambda(s)$, которое может быть найдено методом последовательных приближений

$$u_\lambda^{(1)} = \lambda U_{01}\binom{s}{v}, \quad u_\lambda^{(k)} = \lambda U_{01}\binom{s}{v} + \sum_{m+n\geqslant 2} U_{mn}(u_\lambda^{(k-1)}, \lambda v)$$
$$(k = 2, 3, \ldots),$$

так что

$$\lim_{k\to\infty} u_\lambda^{(k)} = u_\lambda$$

равномерно по λ для всех значений λ, удовлетворяющих условию $|\lambda| \leqslant \alpha$. Так как каждое приближение $u_\lambda^{(k)}$ является голоморфной функцией от λ в круге $|\lambda| \leqslant \alpha$ и последовательность $\{u_\lambda^{(k)}\}$ сходится равномерно к u_λ, то по известной теореме Вейерштрасса (см., например, А. И. Маркушевич [1]) решение u_λ является голоморфной функцией λ в круге $|\lambda| < \alpha$, а потому

$$u_\lambda = u_1\lambda + u_2\lambda^2 + \ldots + u_k\lambda^k + \ldots \tag{7.13}$$

Отсюда при $\lambda = 1$ имеем, в частности,

$$u_0(s) = u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots \tag{7.14}$$

Отметим, что отсутствие свободного члена в (7.13) объясняется тем, что $u_\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$, ибо при $v = 0$ уравнение (7.10) имеет решение $u \equiv 0$ и оно единственное.

Коэффициенты ряда (7.13), т. е. u_1, u_2, u_3, ..., могут быть найдены путем подстановки этого ряда в (7.12) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях λ. Таким путем находим, что

$$u_1 = U_{01}\binom{s}{v},$$

u_2 определяется при помощи U_{01}, U_{20}, U_{11}, U_{02}, а для определения u_3 еще нужны U_{30}, U_{21}, U_{12}, U_{03}. Методом полной математической индукции устанавливается, что u_k определяется при помощи U_{01} и всех тех U_{mn}, для которых $2 \leqslant m + n \leqslant k$. Отсюда и из (7.14) следует представление (7.11), где

$$V_k\binom{s}{v} = \sum_\nu \int_B \ldots \int_B N_k^{(\nu)}(s, t_1, t_2, \ldots, t_i)\, v^{\beta_0}(s)\, v^{\beta_1}(t_1) \ldots$$
$$\ldots v^{\beta_i}(t_i)\, dt_1 \ldots dt_i,$$

ν пробегает конечное число значений и $\beta_0 + \beta_1 + \ldots$ $\ldots + \beta_i = k$.

7.6. Последовательные приближения Лихтенштейна. В предыдущем пункте при доказательстве существования решения уравнения (7.10) мы в пространстве непрерывных функций C выделили шар D (δ) радиуса δ с центром в нуле этого пространства и показали, что в этом шаре существует единственное решение уравнения (7.10) и оно представимо в виде (7.11). Таким образом, доказательство использовало ограничения малости не только функционального аргумента $v(s)$, но и радиуса шара, в котором ищется решение. С другой стороны, Л. Лихтенштейн [1] при доказательстве существования решения уравнения (7.10) построил последовательные приближения, использующие лишь малость $|v(s)|$. В связи с этим возникает вопрос о связи между решениями, найденными методом сжатых отображений и последовательными приближениями. Для решения этого вопроса мы сначала изложим последовательные приближения Лихтенштейна, представляющие и самостоятельный интерес. Эти приближения $z_1(s)$, $z_2(s)$, $z_3(s)$, ... строятся следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} z_1(s) = U_{01}\binom{s}{v}, \\ z_2(s) = U_{01}\binom{s}{v} + \sum\limits_{m+n\geqslant 2} U_{mn}\binom{s}{z_1,\ v}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_k(s) = U_{01}\binom{s}{v} + \sum\limits_{m+n\geqslant 2} U_{mn}\binom{s}{z_{k-1},\ v} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{7.15}$$

Для сходимости встречающихся здесь рядов нужно (согласно условию), чтобы не только $|v(s)| \leqslant h_1$, но $|z_k(s)| \leqslant h$. Покажем, что эти неравенства выполняются. Положим

$$\max(|v|,\ |U_{01}|) = U_* \tag{7.16}$$

и рассмотрим квадратное уравнение

$$x = U_* + A\,(x^2 + xU_* + U_*^2), \tag{7.17}$$

корни которого положительны при достаточно малом U_*.

Наименьший из этих корней

$$x=\frac{1}{2A}-\frac{U_*}{2}-\sqrt{\left(\frac{1}{2A}-\frac{U_*}{2}\right)^2-U_*\left(\frac{1}{A}+U_*\right)}=$$
$$=U_*(A^{-1}+U_*)\left[\frac{1}{2A}-\frac{U_*}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2A}-\frac{U_*}{2}\right)^2-U_*\left(\frac{1}{A}+U_*\right)}\right]^{-1}$$

стремится к нулю вместе с U_*. Отсюда следует существование положительного числа h_2 такого, что как только $|v(s)|\leqslant h_2\leqslant h$, то $x\leqslant h$. Имея в виду, что $x\leqslant h$, мы из (7.7), (7.15) — (7.17) приходим к неравенствам

$$|z_1(s)|\leqslant U_*<x,$$
$$|z_2(s)|<U_*+A(x^2+xU_*+U_*^2)=x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|z_k(s)|<U_*+A(x^2+xU_*+U_*^2)=x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

так что

$$|z_k(s)|<x\leqslant h\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots).\tag{7.18}$$

Из неравенств (7.18) и (7.8) следует, что при $k>2$

$$|z_k(s)-z_{k-1}(s)|=\left|\sum_{m+n\geqslant 2}U_{mn}\begin{pmatrix}s\\ z_{k-1},v\end{pmatrix}-\sum_{m+n\geqslant 2}U_{mn}\begin{pmatrix}s\\ z_{k-2},v\end{pmatrix}\right|\leqslant$$
$$\leqslant M(x+U_*)\max|z_{k-1}(s)-z_{k-2}(s)|.$$

Ввиду этого, если потребовать, чтобы

$$M(x+U_*)\leqslant q<1,\tag{7.19}$$

то

$$\max|z_k(s)-z_{k-1}(s)|\leqslant q\max|z_{k-1}(s)-z_{k-2}(s)|,$$

а потому ряд

$$z_1(s)+(z_2(s)-z_1(s))+(z_3(s)-z_2(s))+\ldots$$

сходится абсолютно и равномерно, и его сумма

$$z(s)=\lim_{k\to\infty}z_k(s),$$

в силу непрерывности оператора $F(u,\ v)$ дает решение уравнения (7.10). Из (7.18) видно, что

$$|z(s)|\leqslant x\leqslant h,$$

Более того, из равенства (7.16) и неравенства (7.19) следует, что решение $z(s)$ принадлежит шару $D(\delta)$, а потому, согласно предыдущему, оно является единственным в $D(\delta)$.

Таким образом, решения, найденные методом сжатых отображений и последовательными приближениями Лихтенштейна, совпадают.

7.7. Применение метода мажорант. Приведем еще другое доказательство существования решения уравнения (7.10) и представимости его в виде интегро-степенного ряда функционального аргумента $v(s)$ (см. Э. Шмидт [1]), использующее метод мажорант [1]). Положим

$$V_1\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix}.$$

Подставляя $V_1\binom{s}{v}$ в (7.10) вместо $u(s)$ и собирая затем интегро-степенные члены второй степени, получим $V_2\binom{s}{v}$. Пусть найдены $V_i\binom{s}{v}$ для $i = 1, 2, \ldots, m-1$. Для определения $V_m\binom{s}{v}$ мы подставим в правую часть равенства (7.10) вместо $u(s)$ сумму

$$\sum_{i=1}^{m-1} V_i\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix}$$

и соберем интегро-степенные члены степени m относительно v. Их сумма даст нам $V_m\binom{s}{v}$. Определенный таким образом интегро-степенной ряд (7.11) формально удовлетворяет уравнению (7.10). Отметим, что этот прием напоминает прием отыскания неявной функции одного переменного (см. Э. Гурса [2], § 184) из уравнения

$$y = a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots$$

---

[1]) Мы решили изложить и метод мажорант, так как он часто используется в приложениях и при его помощи могут быть легко получены оценки области сходимости решений, представимых в виде рядов.

Покажем теперь, что существует положительное число k_1 такое, что если $|v(s)| \leqslant k_1$, то ряд (7.11) сходится регулярно. С этой целью рассмотрим уравнение

$$\varphi(s) = |U|_{01}\binom{s}{v} + \sum_{m+n\geqslant 2} |U|_{mn}\binom{s}{\varphi,\ |v|} \qquad (7.20)$$

и применим к нему предыдущий прием. Получим тогда формальное решение

$$\varphi(s) = \sum_{m=1}^{\infty} V'_m\binom{s}{v}, \qquad (7.21)$$

в котором все ядра, определяющие интегро-степенные члены $V'_m\binom{s}{v}$, вещественны, неотрицательны и мажорируют соответствующие ядра, входящие в (7.11), так что

$$\tilde{V}'_m \geqslant \tilde{V}_m \qquad (m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \qquad (7.22)$$

Заменяя в (7.21) функцию $|v(s)|$ положительной константой q, мы получим для $\varphi(s)$ ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} V'_m\binom{s}{1} q^m, \qquad (7.23)$$

формально удовлетворяющий уравнению

$$\varphi(s) = |U|_{01}\binom{s}{1} q + \sum_{m+n\geqslant 2} |U|_{mn}\binom{s}{\varphi,\ 1} q^n. \qquad (7.24)$$

При этом так же, как раньше, мы будем иметь

$$V'_1\binom{s}{1} = |U|_{01}\binom{s}{1},$$

и если в правую часть равенства (7.24) подставить вместо $\varphi(s)$ сумму

$$\sum_{i=1}^{m-1} V'_i\binom{s}{1} q^i, \qquad (7.25)$$

то за $V'_m\binom{s}{1}$ следует взять коэффициент при q^m.

рассмотрим теперь уравнение

$$p = \widetilde{U} q + \sum_{m+n \geqslant 2} \widetilde{U}_{mn} p^m q^n, \tag{7.26}$$

правая часть которого сходится при $p < d$ и $q < d_1$ согласно допущению о регулярной сходимости оператора $F(u, v)$ (см. начало п. 7.4). Согласно известной теореме о существовании неявной функции (Э. Гурса [2], § 184) уравнение (7.26) имеет решение вида

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} A_m q^m, \tag{7.27}$$

причем ряд (7.27) сходится при $q \leqslant k_1$, где k_1 — некоторое положительное число.

Для доказательства регулярной сходимости ряда (7.11) в силу неравенств (7.22) остается показать, что

$$\widetilde{V}'_m \leqslant A_m \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Так как $V'_1\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix} = |U|\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$, то из (7.26) и (7.27) следует

$$A_1 = \widetilde{U}(1) = \widetilde{V}'_1.$$

Остается показать, что из неравенств

$$\widetilde{V}'_i \leqslant A_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1) \tag{7.28}$$

следует неравенство

$$\widetilde{V}'_m \leqslant A_m.$$

Из ранее указанного способа получения $V'_m\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix}$ из равенства (7.24) следует, если учесть неравенства (7.28), что для любого значения s интегро-степенной член $V'_m\begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$ не превосходит коэффициента при q^m, получаемого при подстановке в (7.24) вместо $\varphi(s)$ не суммы (7.25), а суммы

$$\sum_{i=1}^{m-1} A_i q^i = S_{m-1}. \tag{7.29}$$

Далее, в силу соотношений

$$|U|_{\mu\nu}\begin{pmatrix} s \\ S_{m-1},\ 1\end{pmatrix} q^{\nu} = |U|_{\mu\nu}\begin{pmatrix} s \\ 1,\ 1\end{pmatrix} S^{\mu}_{m-1} q^{\nu},$$

$$|U|_{\mu\nu}\begin{pmatrix} s \\ 1,\ 1\end{pmatrix} \leqslant \widetilde{U}_{\mu\nu},$$

следует, что коэффициент при q^m не уменьшится, если сумму (7.29) мы подставим не вместо $\varphi(s)$ в правую часть (7.24), а вместо p в правую часть (7.26). Но при таком определении коэффициента при q^m мы получим A_m. Следовательно,

$$\widetilde{V}'_m \leqslant A_m,$$

т. е. ряд (7.27) мажорирует ряд (7.11), так что ряд (7.11) сходится регулярно, когда $|v| \leqslant k_1$, и формально удовлетворяет уравнению (7.10), правая часть которого сходится регулярно при $\widetilde{u} \leqslant d$, $\widetilde{v} \leqslant d_1$. Ввиду этого, если мы выберем положительное число k_2 так, чтобы

$$k_2 \leqslant k_1, \quad k_2 \leqslant d_1$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{V}_m k_2^m \leqslant d,$$

то ряд (7.11) нам даст настоящее решение уравнения (7.10).

Покажем, что методом мажорант легко устанавливается существование положительного числа $d' \leqslant d$ такого, что если

$$\widetilde{u} \leqslant d', \quad \widetilde{v} \leqslant d,$$

то уравнение (7.10) имеет единственное решение, представимое в виде (7.11).

Допустим, что помимо решения (7.11) имеется решение $u_0(s) + w(s)$, так что

$$u_0(s) = U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v\end{pmatrix} + \sum_{m+n\geqslant 2} U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u_0,\ v\end{pmatrix},$$

$$u_0(s) + w(s) = U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v\end{pmatrix} + \sum_{m+n\geqslant 2} U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u_0 + w,\ v\end{pmatrix}.$$

Тогда путем вычитания и оценок непосредственно получается

$$|w(s)| \leqslant \widetilde{w} \sum_{m+n\geqslant 2} \widetilde{U}_{mn} m (\widetilde{u}_0 + \widetilde{w})^{m-1} \widetilde{v}^n, \tag{7.30}$$

причем правая часть этого неравенства сходится при $\widetilde{u} + \widetilde{w} \leqslant d$, $\widetilde{v} \leqslant d_1$ в силу регулярной сходимости правой части (7.10). Из (7.30) имеем

$$\widetilde{w} \leqslant \widetilde{w} \sum_{m+n\geqslant 2} \widetilde{U}_{mn} m (\widetilde{u}_0 + \widetilde{w})^{m-1} \widetilde{v}^n,$$

откуда, если $\widetilde{w} \neq 0$, то

$$1 \leqslant \sum_{m+n\geqslant 2} \widetilde{U}_{mn} m (\widetilde{u}_0 + \widetilde{w})^{m-1} \widetilde{v}^n. \tag{7.31}$$

Так как правая часть (7.31) обращается в нуль при $\widetilde{u}_0 + \widetilde{w} = 0$, $\widetilde{v} = 0$, то существует постоянная $d' \leqslant d$ такая, что при $\widetilde{u}_0 + \widetilde{w} \leqslant d'$, $\widetilde{u}_0 \leqslant d'$, $\widetilde{v} \leqslant d'$ неравенство (7.31) становится невозможным. Этим завершается доказательство единственности.

Отметим, однако, что методом мажорант мы установили единственность решения уравнения (7.10) в классе функций, представимых в виде интегро-степенных рядов, а методом сжатых отображений мы получили единственность решения уравнения (7.10) в классе непрерывных функций. Таким образом, установлена

Т е о р е м а 7.4. *Существует положительное число* δ *такое, что если*

$$|u(s)| \leqslant \omega \leqslant \delta, \qquad |v(s)| \leqslant \omega_1 \leqslant \delta,$$

то уравнение (7.10) *имеет единственное решение в классе непрерывных функций и это решение представимо в виде интегро-степенного ряда* (7.11).

Отметим, что данная теорема сохраняется и для уравнения вида

$$u(s) = U(v_1, v_2, \ldots, v_k) + \sum_{m+n_1+\ldots+n_k\geqslant 2} U_{mn_1\ldots n_k}\begin{pmatrix} s \\ u, v_1, v_2, \ldots, v_k \end{pmatrix}, \tag{7.32}$$

где $U(v_1, \ldots, v_k)$— интегро-степенной член первой степени относительно $v_1, v_2, \ldots, v_k$. При этом единственное решение этого уравнения (в классе непрерывных функций), когда $|v_i|$ достаточно малы, представимо в виде

$$u(s) = \sum_{n_1+\ldots+n_k \geqslant 1} V_{n_1 n_2 \ldots n_k}(v_1, v_2, \ldots, v_k), \tag{7.33}$$

где

$$\sum_{n_1+\ldots+n_k=1} V_{n_1 n_2 \ldots n_k}(v_1, \ldots, v_k) = U(v_1, v_2, \ldots, v_k).$$

В частности, некоторые из аргументов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ или все могут быть числовыми параметрами. В последнем случае решение представляется в виде степенного ряда по параметрам, порядок которого не ниже единицы.

7.8. Простейшее уравнение в случае равномерной сходимости. При изучении простейшего уравнения (7.10) мы в п. 7.5 предполагали, что его правая часть сходится регулярно. Оказывается, если правая часть уравнения (7.10) сходится равномерно, то при достаточно малых $|v(s)|$ оно имеет в классе непрерывных функций единственное малое решение и оно представимо в виде интегро-степенного ряда (7.11). Правда, в этом случае можно лишь гарантировать равномерную сходимость ряда (7.11).

Рассмотрим вновь оператор Ляпунова — Шмидта

$$F(u, v) = \sum_{m+n \geqslant 2} U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix}$$

и допустим, что ряд, стоящий справа, сходится равномерно для всяких непрерывных вещественных или комплексных $u(s)$ и $v(s)$, удовлетворяющих условиям

$$|u(s)| \leqslant \omega \leqslant h \leqslant d, \quad |v(s)| \leqslant \omega_1 \leqslant h_1 \leqslant d_1.$$

Из равномерной сходимости следует равномерная ограниченность $F(u, v)$ при $|u| \leqslant d$, $|v| \leqslant d_1$, т. е. $|F(u, v)| \leqslant M_1$. Далее, при фиксированных $u(s)$ и $v(s)$ функция

$$f(\varepsilon, \lambda) = \sum_{m+n \geqslant 2} \varepsilon^m \lambda^n U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix}$$

голоморфна по (ε, λ) в бицилиндре $|\varepsilon| < d/\omega$, $|\lambda| < d_1/\omega_1$ и непрерывна при $|\varepsilon| \leqslant d/\omega$, $|\lambda| \leqslant d_1/\omega_1$. Так как

$$\max |f(\varepsilon, \lambda)| \leqslant M_1 \quad \left(|\varepsilon| = \frac{d}{\omega}, \quad |\lambda| = \frac{d_1}{\omega_1}\right),$$

то согласно неравенствам Коши для коэффициентов (см., например, Б. А. Фукс [1], стр. 62) имеем

$$\left| U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix} \right| \leqslant M_1 : \left(\frac{d}{\omega}\right)^m \left(\frac{d_1}{\omega_1}\right)^n = \frac{M_1}{d^m d_1^n}\,\omega^m \omega_1^n = \\ = C_{mn}\omega^m\omega_1^n.$$

Таким образом,

$$\sum_{m+n \geqslant 2} \left| U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix} \right| \leqslant \sum_{m+n\geqslant 2} C_{mn}\omega^m\omega_1^n = \Psi(\omega, \omega_1),$$

где $\Psi(\omega, \omega_1)$ — сумма двойного степенного ряда, сходящегося при $\omega \leqslant d$, $\omega_1 \leqslant d_1$, причем

$$\Psi(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\omega}\Psi(0, 0) = \frac{\partial}{\partial\omega_1}\Psi(0, 0) = 0.$$

Следовательно, функция $\Psi(\omega, \omega_1)$ обладает такими же свойствами, как функция $\Phi(\omega, \omega_1)$ в п. 7.4, а потому и в данном случае справедливо неравенство (7.7).

Покажем справедливость неравенства вида (7.8). С этой целью мы предварительно покажем, что оператор $F(u, v)$ имеет по u линейный дифференциал Гато[1]). Пусть C — пространство непрерывных функций на B, $u(s)$ — произвольный фиксированный вектор из C, удовлетворяющий условию $|u(s)| < h \leqslant d$, $\varphi(s)$ — произвольный единичный вектор из C, т. е. $\max|\varphi(s)| = 1$, и τ — произвольное вещественное число, удовлетворяющее условию $|u(s) + \tau\varphi(s)| \leqslant h$. В силу равномерной сходимости ряда, определяющего $F(u, v)$, имеем

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{F(u+\tau\varphi, v) - F(u, v)}{\tau} = \\ = \sum_{m+n\geqslant 2}\lim_{\tau\to 0}\frac{U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u+\tau\varphi, v\end{pmatrix} - U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v\end{pmatrix}}{\tau} = \sum_{m+n\geqslant 2} U'_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v\end{pmatrix}\varphi,$$

[1]) О дифференциале Гато см., например, М. М. Вайнберг [1].

где

$$U'_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u,v\end{pmatrix}\varphi = \sum_{\nu}\int_{B}\ldots\int_{B} K^{(\nu)}(s,t_1,\ \ldots,\ t_i)\left(\sum_{k=0}^{i} u^{\alpha_0}(s)u^{\alpha_1}(t_1)\ldots\right.$$
$$\ldots\alpha_k u^{\alpha_k-1}(t_k)\,\varphi(t_k)\,u^{\alpha_{k+1}}(t_{k+1})\ldots u^{\alpha_i}(t_i)\Big)\,v^{\beta_0}(s)\,v^{\beta_1}(t_1)\ldots$$
$$\ldots v^{\beta_i}(t_i)\,dt_1\ldots dt_i$$

$$(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_i=m,\ \ \beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_i=n)$$

является линейным (относительно φ) ограниченным оператором как сумма конечного числа ограниченных линейных операторов, причем норма $U'_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u,v\end{pmatrix}$ равномерно ограничена относительно $u(s)$ и $v(s)$, если $|u(s)|<h$, $|v(s)|\leqslant h_1$. Используя теперь известные теоремы о сходимости последовательности линейных операторов (см., например, Л. В. Канторович и Г. П. Акилов [1], стр. 229—233), мы находим, что

$$\sum_{m+n\geqslant 2} U'_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u,\,v\end{pmatrix}\varphi = F'_u(u,v)\,\varphi,$$

где $F'_u(u,\ v)$ — линейный ограниченный оператор, и если $|u(s)|\leqslant\omega\leqslant h<d$, $|v(s)|\leqslant\omega_1\leqslant h_1<d_1$, то

$$\sup\|F'_u(u,\ v)\| = A(\omega,\ \omega_1)<+\infty.$$

При этом $A(0,\ 0)=0$ и можно показать, что функция $A(\omega,\ \omega_1)$ непрерывна в нуле. Отсюда согласно известному предложению (М. М. Вайнберг [1], лемма 3.3) имеем

$$\|F(u,\ v)-F(u_1,\ v)\|\leqslant A(\omega,\ \omega_1)\,\|u-u_1\|. \tag{7.8$'$}$$

Отсюда (так же как в п. 7.4) мы приходим к выводу, что теорема 7.2 сохраняется и в данном случае. Отметим, что другое доказательство неравенства (7.8′) фактически содержится в книге Л. Лихтенштейна [1]. Поступая теперь, как и в п. 7.5, мы придем к выводу, что теорема 7.4 сохраняется, если потребовать лишь равномерной сходимости правой части (7.10). При этом единственное решение уравнения (7.10) представимо в виде равномерно сходящегося ряда (7.11).

§ 8. Общее интегральное уравнение Ляпунова—Шмидта

В данном параграфе исследуется нелинейное интегральное уравнение Ляпунова — Шмидта

$$u(s)-\int\limits_B K(s,t)\,u(t)\,dt = U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + F(u,v), \tag{8.1}$$

где

$$U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = K_0(s)\,v(s) + \int\limits_B K_1(s,t)\,v(t)\,dt; \qquad s,t\in B.$$

$$F(u,v) = \sum_{m+n\geqslant 2} U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u,v \end{pmatrix}, \tag{8.2}$$

$$U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u,v \end{pmatrix} = \sum_\nu \int\limits_B \cdots \int\limits_B K^{(\nu)}(s,t_1,\ldots,t_i)\,u^{\alpha_0}(s)\,u^{\alpha_1}(t_1)\ldots$$
$$\ldots u^{\alpha_i}(t_i)\,v^{\beta_0}(s)\ldots v^{\beta_i}(t_i)\,dt_1\ldots dt_i$$

$$(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_i=m,\ \beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_i=n,$$
$$\nu=1,2,\ldots,n_i).$$

Функции $u(s)$, $v(s)$ и ядра K предполагаются непрерывными (комплексозначными или вещественными). Отметим, что более общий случай, когда в левой части равенства (8.1) содержится $\gamma(s)u(s)$ вместо $u(s)$, где $\gamma(s)$ — непрерывная и отличная от нуля функция (а значит, ее модуль ограничен снизу положительным числом), сводится к уравнению (8.1) путем деления на $\gamma(s)$.

Рассмотрим в пространстве непрерывных функций $C(B)=C$ линейный ограниченный оператор A:

$$Au = \int\limits_B K(s,t)\,u(t)\,dt. \tag{8.3}$$

Будут изучены следующие два случая:

1. Регулярный случай, когда единица не является собственным значением оператора A. В этом случае уравнение (8.1) сводится к уравнению вида (7.10), а значит (см. п. 7.6), при достаточно малом $|\,v(s)\,|$ оно имеет в клас-

се непрерывных функций единственное малое решение и это решение представимо в виде регулярно (или равномерно) сходящегося интегро-степенного ряда.

2. Случай ветвления (когда единица является собственным значением оператора A). Как увидим, в этом случае возможно ветвление нулевого решения уравнения (8.1).

Мы будем говорить об одномерном случае ветвления, если 1 — простое собственное значение оператора A, и о многомерном случае ветвления, если 1 — собственное значение кратности n ($n > 1$). Как увидим, в первом случае мы получим одномерное уравнение разветвления (см. конец § 1), а во втором случае уравнение разветвления будет состоять из системы n уравнений.

8.1. **Регулярный случай.** Пусть 1 не является собственным значением оператора A (см. (8.3)).

Тогда для любой непрерывной функции $f(s)$ интегральное уравнение [1])

$$u(s) = \int_B K(s, t)\, u(t)\, dt + f(s)$$

имеет единственное непрерывное решение и оно определяется по формуле

$$u(s) = f(s) + \int_B \Gamma(s, t) f(t)\, dt, \tag{8.4}$$

где $\Gamma(s, t)$ — резольвента Фредгольма ядра $K(s, t)$. Подставляя сюда вместо $f(s)$ правую часть уравнения (8.1), мы получим

$$u(s) = U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \int_B \Gamma(s, t)\, U_{01}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} dt + \\ + \sum_{m+n\geqslant 2}\left[U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix} + \int_B \Gamma(s, t)\, U_{mn}\begin{pmatrix} t \\ u, v \end{pmatrix} dt\right].$$

[1]) Теория линейных интегральных уравнений изложена, например, в книгах: Э. Гурса [4], С. Г. Михлин [1], И. Г. Петровский [1], Ф. Рисс и Б. Секефальви—Надь [1].

Полагая здесь

$$U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \int_B \Gamma(s, t)\, U_{01}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} dt = P_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix},$$

$$U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix} + \int_B \Gamma(s, t)\, U_{mn}\begin{pmatrix} t \\ u, v \end{pmatrix} dt = P_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix},$$

мы получим, что уравнение (8.1) приводится к виду

$$u(s) = P_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \sum_{m+n\geqslant 2} P_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix}. \tag{8.5}$$

Данное уравнение принципиально не отличается от уравнения (7.10), а потому оно, а значит и уравнение (8.1), имеет единственное непрерывное малое решение при достаточно малом $|v(s)|$ (см. пп. 7.5 и 7.6). Это решение представимо в виде равномерно (регулярно) сходящегося интегро-степенного ряда вида (7.11), если правая часть уравнения (8.1) сходится равномерно (регулярно).

Отметим, что для числа δ, о котором упоминается в теореме 7.4, может быть получена оценка.

8.2. Регулярный случай при наличии многих аргументов. Для изучения случая ветвления, т. е. когда единица является собственным значением интегрального оператора (8.3), мы предварительно рассмотрим здесь нелинейное интегральное уравнение

$$u(s) - Au = U\begin{pmatrix} s \\ v_1, v_2, \ldots, v_k \end{pmatrix} + \\ + \sum_{m+n_1+\ldots+n_k\geqslant 2} U_{mn_1\ldots n_k}\begin{pmatrix} s \\ u, v_1, \ldots, v_k \end{pmatrix}, \tag{8.6}$$

где A — линейный интегральный оператор с ядром $K(s, t)$ и

$$U\begin{pmatrix} s \\ v_1, \ldots, v_k \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \left[K_i(s)\, v_i(s) + \int_B K_{1i}(s, t_i)\, v(t_i)\, dt_i \right],$$

в предположении, что K, K_i, K_{1i} и все ядра, определяющие интегро-степенные формы, являются комплекснозначными или вещественными, а ряд, стоящий справа в (8.6), сходится равномерно или регулярно.

Пусть единица не является собственным значением оператора A. Тогда, так же как в предыдущем пункте, найдем, что уравнение (8.6) эквивалентно уравнению

$$u(s) = P\begin{pmatrix} s \\ v_1, v_2, \ldots, v_n \end{pmatrix} + \\ + \sum_{m+n_1+\ldots+n_k \geqslant 2} P_{mn_1\ldots n_k}\begin{pmatrix} s \\ u, v_1, \ldots, v_k \end{pmatrix}, \qquad (8.7)$$

где

$$P\begin{pmatrix} s \\ v_1, \ldots, v_k \end{pmatrix} = U\begin{pmatrix} s \\ v_1, \ldots, v_k \end{pmatrix} + \\ + \int_B \Gamma(s, t) U\begin{pmatrix} t \\ v_1, \ldots, v_k \end{pmatrix} dt,$$

$$P_{mn_1\ldots n_k}\begin{pmatrix} s \\ u, v_1, \ldots, v_k \end{pmatrix} = U_{mn_1\ldots n_k}\begin{pmatrix} s \\ u, v_1, \ldots, v_k \end{pmatrix} + \\ + \int_B \Gamma(s, t) U_{mn_1\ldots n_k}\begin{pmatrix} t \\ u, v_1, \ldots, v_k \end{pmatrix} dt,$$

$\Gamma(s, t)$ — резольвента Фредгольма ядра $K(s, t)$. Так как уравнение (8.7) принципиально не отличается от уравнения (7.32), имеющего единственное решение вида (7.33), то справедлива

Теорема 8.1. *При достаточно малых значениях* $|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_k|$ *уравнение* (8.6) *имеет в классе непрерывных функций единственное решение, и оно представимо в виде*

$$u(s) = P\begin{pmatrix} s \\ v_1, v_2, \ldots, v_n \end{pmatrix} + \\ + \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k \geqslant 2} V_{n_1n_2\ldots n_k}\begin{pmatrix} s \\ v_1, v_1, \ldots, v_k \end{pmatrix},$$

причем этот ряд сходится равномерно, если правая часть равенства (8.6) *сходится равномерно, или регулярно, когда правая часть* (8.6) *сходится регулярно.*

Замечание 8.1. Разумеется, теорема 8.1 сохраняется, когда некоторые из v_i или все v_i — числовые параметры. В последнем случае правая часть последнего равенства представляет собою степенной ряд, порядок которого не ниже единицы.

8.3. Лемма Шмидта. Пусть 1 является n-кратным собственным значением оператора A (см. формулу (8.3)) и $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, ..., $\varphi_n(s)$ — ортонормированные собственные функции оператора A, принадлежащие числу 1. Согласно теории линейных интегральных уравнений 1 будет собственным значением сопряженного оператора A^*:

$$A^*v = \int_B \overline{K(t, s)}\, v(t)\, dt, \tag{8.3'}$$

той же кратности, так как ядро $K(s, t)$ непрерывно. Пусть $\psi_1(s)$, $\psi_2(s)$, ..., $\psi_n(s)$ — ортонормированные собственные функции оператора A^*, принадлежащие числу 1. Рассмотрим теперь оператор $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}u = \int_B E(s, t)\, u(t)\, dt,$$

где

$$E(s, t) = K(s, t) - \sum_{i=1}^{n} \psi_i(s)\, \overline{\varphi}_i(t) \tag{8.8}$$

($\overline{\alpha}$ — сопряженное с α комплексное число).

Для нового оператора $\widetilde{A}$ справедлива

Лемма Шмидта. *Единица не является собственным значением оператора* $\widetilde{A}$.

Доказательство легко проводится от противного. Допустим, что $\alpha(s)$ — собственная функция оператора $\widetilde{A}$, принадлежащая числу 1, т. е.

$$\alpha(s) = \int_B E(s, t)\, \alpha(t)\, dt.$$

Подставляя сюда $E(s, t)$, получим

$$\alpha(s) - \int_B K(s, t)\, \alpha(t)\, dt = -\sum_{i=1}^{n} \psi_i(s) \int_B \overline{\varphi}_i(t)\, \alpha(t)\, dt. \tag{8.9}$$

Так как 1 является n-кратным собственным значением оператора A, то правая часть последнего равенства должна быть ортогональна всем функциям $\psi_k(s)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n}\int_B \psi_i(s)\overline{\psi}_k(s)\,ds\int_B \overline{\varphi}_i(t)\,\alpha(t)\,dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда в силу ортогональности функций $\psi_i(s)$ имеем

$$\int_B \overline{\varphi}_i(t)\,\alpha(t)\,dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{8.10}$$

и равенство (8.9) принимает вид

$$\alpha(s) = \int_B K(s, t)\,\alpha(t)\,dt.$$

Данное равенство показывает, что $\alpha(s)$ — собственная функция оператора A, а потому

$$\alpha(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(s) \qquad (c_i = \mathrm{const}).$$

Умножив обе части этого равенства на $\overline{\varphi}_k(s)$, мы в силу (8.10) получим, что $c_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, т. е. $\alpha(s) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

8.4. Одномерный случай ветвления. Пусть 1 является простым собственным значением оператора (8.3). Рассмотрим тогда ядро $E(s, t) = K(s, t) - \psi_1(s)\overline{\varphi}_1(t)$, где $\varphi_1(s)$ и $\psi_1(s)$ — соответствующие нормированные собственные функции операторов A и A^* (см. формулы (8.3) и (8.3′)). Подставляя значение $K(s, t)$ из последнего равенства в уравнение (8.1), получим

$$u(s) - \int_B E(s, t)\,u(t)\,dt = \\ = \psi_1(s)\int_B \overline{\varphi}_1(t)\,u(t)\,dt + U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + F(u, v).$$

Полагая

$$\int_B \overline{\varphi}_1(t)\,u(t)\,dt = \xi, \tag{8.11}$$

получим

$$u(s) - \int_B E(s, t)\,u(t)\,dt = \xi\psi_1(s) + U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + F(u, v), \tag{8.12}$$

где согласно лемме Шмидта 1 не является собственным значением оператора $\tilde{A}$:

$$\tilde{A}v = \int_B E(s, t)\, v(t)\, dt.$$

Ввиду этого, если $\Gamma(s, t)$ — резольвента Фредгольма ядра $E(s, t)$, то из уравнения (8.12) мы находим

$$u(s) = \xi\psi_1(s) + U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + F(u, v) + \\ + \int_B \left[\xi\psi_1(t) + U_{01}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} + F(u, v)\right]\Gamma(s,t)\, dt,$$

или

$$u(s) = P\begin{pmatrix} s \\ \xi, v \end{pmatrix} + \sum_{m+n\geqslant 2} P_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix}, \tag{8.13}$$

где (учитывая (8.2))

$$P\begin{pmatrix} s \\ \xi, v \end{pmatrix} = \left[\psi_1(s) + \int_B \Gamma(s, t)\, \psi_1(t)\, dt\right]\xi + U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \\ + \int_B \Gamma(s, t)\, U_{01}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} dt.$$

$$P_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix} = U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u, v \end{pmatrix} + \int_B \Gamma(s, t)\, U_{mn}\begin{pmatrix} t \\ u, v \end{pmatrix} dt.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение (8.1) сводится к эквивалентному уравнению (8.13), которое является простейшим. Так как при достаточно малом $|u(s)|$ параметр ξ, заданный формулой (8.11), имеет достаточно малый модуль, то, используя результаты п. 7.7 (см. конец этого пункта и теорему 7.4), мы приходим к следующему выводу. При достаточно малых $|v|$ и $|\xi|$ уравнение (8.13) имеет в классе непрерывных функций единственное решение, и оно представимо в виде

$$u(s) = P\begin{pmatrix} s \\ \xi, v \end{pmatrix} + \sum_{m+n\geqslant 2} V_{mn}\begin{pmatrix} s \\ \xi, v \end{pmatrix},$$

или

$$u(s) = P\begin{pmatrix} & s & \\ \xi, & & v\end{pmatrix} + \sum_{m+n\geqslant 2} \xi^m V_n^m \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix}. \tag{8.14}$$

Для определения возможных значений ξ нужно подставить данное значение $u(s)$ в формулу (8.11), и тогда получим

$$\xi = \int_B P\begin{pmatrix} & t & \\ \xi, & & v\end{pmatrix} \overline{\varphi}_1(t)\,dt + \sum_{m+n\geqslant 2} \xi^m \int_B V_n^m \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \overline{\varphi}_1(t)\,dt. \tag{8.15}$$

Полагая

$$L_{m0} = \int_B V_0^m \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \overline{\varphi}_1(t)\,dt \qquad (m = 2, 3, 4, \ldots) \tag{8.16}$$

и учитывая выражение для $P\begin{pmatrix} & s & \\ \xi, & & v\end{pmatrix}$, получим

$$\xi = \left[\int_B \psi_1(t)\,\overline{\varphi}_1(t)\,dt + \int_B\int_B \Gamma(s, t)\,\psi_1(t)\,\overline{\varphi}_1(s)\,ds\,dt\right]\xi +$$
$$+ \sum_{m\geqslant 2} L_{m0}\xi^m + \int_B \left[U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \int_B \Gamma(s, t)\,U_{01}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} dt\right] \overline{\varphi}_1(s)\,ds +$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \sum_{n=1}^{\infty} \int_B V_n^m \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \overline{\varphi}_1(t)\,dt,$$

причем в последней сумме $m + n \geqslant 2$.

Преобразуем первое слагаемое правой части последнего равенства:

$$J = \int_B \psi_1(t)\,\overline{\varphi}_1(t)\,dt + \int_B\int_B \Gamma(s, t)\,\psi_1(t)\,\overline{\varphi}_1(s)\,ds\,dt =$$
$$= \int_B \left[\psi_1(s) + \int_B \Gamma(s, t)\,\psi_1(t)\,dt\right] \overline{\varphi}_1(s)\,ds. \tag{8.17}$$

Но

$$\varphi_1(s) = \int_B K(s, t)\,\varphi_1(t)\,dt.$$

Подставляя сюда значение $K(s, t)$, получим

$$\varphi_1(s) = \int_B [E(s, t) + \psi_1(s)\,\overline{\varphi}_1(t)]\,\varphi_1(t)\,dt,$$

или

$$\varphi_1(s) = \int_B E(s, t)\,\varphi_1(t)\,dt + \psi_1(s), \tag{8.18}$$

так как

$$\int_B \overline{\varphi}_1(t)\,\varphi_1(t)\,dt = 1.$$

Из (8.4) и (8.18) следует, что

$$\varphi_1(s) = \psi_1(s) + \int_B \Gamma(s, t)\,\psi_1(t)\,dt.$$

Отсюда и из (8.17) имеем, что $J = 1$, так что равенство (8.15) принимает вид

$$\sum_{m=2}^{\infty} L_{m0}\xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \sum_{n=1}^{\infty} \int_B V_n^m \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \overline{\varphi}_1(t)\,dt = 0, \tag{8.19}$$

где

$$V_1^0 \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = U_{01} \begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \int_B \Gamma(s, t)\, U_{01} \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} dt.$$

Таким образом, возможные значения ξ, определяющие решение (8.14) рассматриваемого уравнения (8.1), должны быть найдены из уравнения (8.19), в котором отсутствует слагаемое первой степени относительно ξ. Уравнение (8.19) называется уравнением разветвления Ляпунова — Шмидта.

Если в уравнении (8.1) положить

$$v(s) = \lambda v_0(s),$$

где $v_0(s)$ — заданная фиксированная функция, то уравнение разветвления Ляпунова — Шмидта примет вид

$$\sum_{m=2}^{\infty} L_{m0}\xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \sum_{n=1}^{\infty} L_{mn}\lambda^n = 0, \tag{8.20}$$

где

$$L_{mn} = \int_B V_n^m \begin{pmatrix} t \\ v_0 \end{pmatrix} \overline{\varphi}_1(t)\,dt. \tag{8.21}$$

Методы исследования уравнения (8.20) изложены в § 2.

8.5. Многомерный случай ветвления. Пусть 1 является n-кратным собственным значением оператора A (см. (8.3)), $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_n(s)$ — ортонормированные собственные функции оператора A, принадлежащие числу 1, $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_n(s)$ — ортонормированные собственные функции оператора A^* (см. (8.3')), принадлежащие 1. Подставляя значение $K(s, t)$ из (8.8) в (8.1), получим

$$u(s) - \int_B E(s, t)\, u(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(s) \int_B u(t)\, \overline{\varphi}_i(t)\, dt + U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + F(u, v).$$

Полагая здесь

$$\xi_i = \int_B u(t)\, \overline{\varphi}_i(t)\, dt, \tag{8.22}$$

получим

$$u(s) - \int_B E(s, t)\, u(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(s) + U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + F(u, v). \tag{8.23}$$

Так как по лемме Шмидта 1 не является собственным значением оператора $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}v = \int_B E(s, t)\, v(t)\, dt,$$

то существует резольвента Фредгольма $\Gamma(s, t)$ ядра $E(s, t)$ и уравнение (8.23) преобразуется к виду

$$u(s) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(s) + U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + F(u, v) + \int_B \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(t) + U_{01}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} + F(u, v)\right] \Gamma(s, t)\, dt.$$

Данное уравнение, если учесть вид $F(u, v)$ (см. (8.2)), является простейшим, а потому при достаточно малых $|v|$, $|\xi_1|$, $\ldots$, $|\xi_n|$ (см. теорему 7.4 и конец п. 7.7) оно имеет в классе непрерывных функций единственное решение, и это решение представимо в виде

$$u(s) = \sum_{i=1}^{n} \left[\psi_i(s) + \int_B \Gamma(s, t)\, \psi_i(t)\, dt\right] \xi_i +$$
$$+ U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \int_B \Gamma(s, t)\, U_{01}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} dt +$$
$$+ \sum_{m_1+\ldots+m_n+m\geqslant 2} \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}\ldots\xi_n^{m_n} V_m^{m_1\ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix}, \quad (8.24)$$

где положено, что интегро-степенная форма

$$V_{mm_1m_2\ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_n \end{pmatrix} \equiv$$
$$\equiv \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}\ldots\xi_n^{m_n} V_{m\ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}\ldots\xi_n^{m_n} V_m^{m_1\ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix}.$$

Так же как в предыдущем пункте, возможные значения ξ_i, входящие в (8.24), определяются путем подстановки $u(s)$ из (8.24) в формулы (8.22). После такой подстановки получим

$$\xi_i = \int_B \left\{\sum_{k=1}^{n} \left[\psi_k(s) + \int_B \Gamma(s, t)\, \psi_k(t)\, dt\right] \xi_k\right\} \overline{\varphi}_i(s)\, ds +$$
$$+ \int_B \left[U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \int_B \Gamma(s, t)\, U_{01}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} dt\right] \overline{\varphi}_i(s)\, ds +$$
$$+ \sum_{m+m_1+\ldots+m_n\geqslant 2} \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}\ldots\xi_n^{m_n} \int_B V_m^{m_1m_2\ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} \overline{\varphi}_i(s)\, ds \quad (8.25)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Преобразуем эту систему уравнений. Во-первых, так как $\varphi_k(s)$ — собственные функции оператора A, то

$$\varphi_k(s) = \int_B K(s, t)\, \varphi_k(t)\, dt,$$

Подставляя сюда $K(s, t)$ из (8,8) получим

$$\varphi_k(s) = \int_B E(s, t)\,\varphi_k(t)\,dt + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(s) \int_B \overline{\varphi}_i(t)\,\varphi_k(t)\,dt.$$

Но в силу ортонормальности $\varphi_i(s)$ имеем

$$\int_B \varphi_k(t)\,\overline{\varphi}_i(t)\,dt = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases} \tag{8.26}$$

Отсюда и из предыдущего следует, что

$$\varphi_k(s) = \int_B E(s, t)\,\varphi_k(t)\,dt + \psi_k(s).$$

Так как $\Gamma(s, t)$ — резольвента Фредгольма ядра $K(s, t)$, то из последнего равенства и формулы (8.4) имеем

$$\varphi_k(s) = \psi_k(s) + \int_B \Gamma(s, t)\,\psi_k(t)\,dt. \tag{8.27}$$

Во-вторых, введем следующие обозначения:

$$L^{(i)}_{m_1 \ldots m_n 0} = \int_B V_0^{m_1 m_2 \ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} \overline{\varphi}_i(s)\,ds, \tag{8.28}$$

$$U_{01}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \int_B \Gamma(s, t)\,U_{01}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} dt = V_1^{00\ldots 0}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \tag{8.29}$$

$$L^{(i)}_{m_1 m_2 \ldots m_n m} = \int_B V_m^{m_1 \ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v_0 \end{pmatrix} \overline{\varphi}_i(s)\,ds, \tag{8.30}$$

где $v_0(s)$ — фиксированная непрерывная функция. Тогда система уравнений (8.25) в силу формул (8.26) — (8.29) примет вид

$$\sum_{m_1+m_2+\ldots+m_n \geqslant 2} L^{(i)}_{m_1 m_2 \ldots m_n 0}\, \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \ldots \xi_n^{m_n} + \\ + \sum_{m_1+m_2+\ldots+m_n \geqslant 0} \xi_1^{m_1} \ldots \xi_n^{m_n} \sum_{m \geqslant 1} \int_B V_m^{m_1 \ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} \overline{\varphi}_i(s)\,ds = 0 \tag{8.31}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Данная система уравнений также называется уравнением разветвления Ляпунова — Шмидта.

Если в уравнении (8.1) положить

$$v(s) = \lambda v_0(s),$$

где $v_0(s)$ — фиксированная непрерывная функция, то система (8.31) в силу (8.30) примет вид

$$\sum_{m_1+\ldots+m_n\geqslant 2} L^{(i)}_{m_1\ldots m_n 0}\, \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}\ldots\xi_n^{m_n} + \sum_{m_1+\ldots+m_n\geqslant 0} \xi_1^{m_1}\ldots\xi_n^{m_n} \sum_{m\geqslant 1} L^{(i)}_{m_1\ldots m_n m}\lambda^m = 0 \qquad (8.32)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Методы исследования системы (8.32) изложены в §§ 5 и 6.

8.6. Возможные обобщения. В предыдущих пунктах данного параграфа, а также в § 7 мы предполагали, что ядро $K(s, t)$ и ядра, определяющие интегро-степенные формы $U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u,v \end{pmatrix}$ или $U_{mn_1n_2\ldots n_k}\begin{pmatrix} & s, & & & \\ u, & v_1 & v_2, & \ldots, & v_k \end{pmatrix}$, непрерывны. От этого требования можно отказаться, заменив его требованием, чтобы интегральные операторы, порождаемые этими ядрами, были непрерывны в пространстве непрерывных функций $C(B)$. В частности, упомянутые ядра могут иметь допустимые разрывы (в смысле теории линейных интегральных уравнений). При этом все предложения о существовании и представимости решений уравнений (7.10) и (8.1) сохраняются. Если правые части уравнений (7.10) и (8.1) представляют собою равномерно (регулярно) сходящиеся интегро-степенные ряды, то в регулярном случае решения представляются в виде равномерно (регулярно) сходящихся интегро-степенных рядов. В случае ветвления интегро-степенные ряды, определяющие решения, также содержат параметры ξ_i, возможные значения которых определяются уравнением разветвления Ляпунова — Шмидта.

Далее, мы для простоты предполагали, что $\operatorname{mes} B = 1$. Это требование может быть заменено как требованием конечности $\operatorname{mes} B$, так и требованием бесконечности $\operatorname{mes} B$.

Например, если в уравнении (7.10)

$$U_{mn}\begin{pmatrix} s \\ u,\ v\end{pmatrix} = \\ = \sum_{\nu}\int_B \ldots \int_B K^{(\nu)}(s, t_1, \ldots, t_i)\, u^{\alpha_0}(s)\ldots u^{\alpha_i}(t_i)\times \\ \times v^{\beta_0}(s)\ldots v^{\beta_i}(t_i)\, dt_1 \ldots dt_i,$$

где $\operatorname{mes} B = \infty$, $|u(s)| \leqslant h < d$, $|v(s)| \leqslant h_1 < d_1$, то достаточно потребовать, чтобы

$$\sup \sum_{\nu}\int_B \ldots \int_B |K^{(\nu)}(s, t_1, \ldots, t_i)|\, dt_1 \ldots dt_i = C_{mn} < +\infty$$

и

$$\sum_{m+n\geqslant 1} C_{mn} d^m d_1^n < +\infty.$$

Наконец, вся изложенная теория распространяется на пространства ограниченных измеримых функций.

§ 9. Системы уравнений Ляпунова—Шмидта и некоторые интегро-дифференциальные уравнения

Здесь мы только исследуем системы двух уравнений, так как переход к системам большего числа уравнений не связан с дополнительными трудностями и приводит лишь к громоздким записям.

9.1. Системы двух уравнений Ляпунова—Шмидта[1]. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} u(s) - \int_B K_{11}(s, t)\, u(t)\, dt - \int_B K_{12}(s, t)\, w(t)\, dt = \\ = U_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \sum_{m+n+p\geqslant 2} U_{mnp}^{(1)}\begin{pmatrix} s \\ u,\ w,\ v\end{pmatrix}, \\ w(s) - \int_B K_{21}(s, t)\, u(t)\, dt - \int_B K_{22}(s, t)\, w(t)\, dt = \\ = U_{01}^{(2)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \sum_{m+n+p\geqslant 2} U_{mnp}^{(2)}\begin{pmatrix} s \\ u,\ w,\ v\end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \quad (9.1)$$

[1]) Такие системы были изучены Л. Лихтенштейном [1]. В данном параграфе мы придерживаемся этой работы Лихтенштейна.

где B — ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства,

$$U_{mnp}^{(k)}\begin{pmatrix} & s & \\ u, & w, & v\end{pmatrix} = \sum_{\nu}\int_B \ldots \int_B K_\nu^{(k)}(s, t_1, t_2, \ldots, t_i) \times$$
$$\times u^{\alpha_0}(s)\, u^{\alpha_1}(t_1) \ldots u^{\alpha_i}(t_i)\, w^{\beta_0}(s) \times$$
$$\times w^{\beta_1}(t_1) \ldots w^{\beta_i}(t_i)\, v^{\gamma_0}(s) \ldots v^{\gamma_i}(t_i)\, dt_1 \ldots dt_i$$
$$(k = 1,\ 2;\ \ \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_i = m;\ \ \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_i = n;\ \ \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_i = p;\ \ \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_i),$$

причем ядра, определяющие линейные интегральные операторы и формы $U_{mnp}^{(k)}$, $U_{01}^{(k)}$, непрерывны по совокупности аргументов и вещественны или комплекснозначны. Предполагается, что $v(s)$ — заданная функция, $u(s)$ и $w(s)$ — неизвестные функции, причем

$$|u(s)| \leqslant h < d, \quad |w(s)| \leqslant h < d, \quad |v(s)| \leqslant h_1 < d_1.$$

Мы исследуем систему (9.1) в предположении регулярной сходимости правых частей этой системы и в связи с этим допустим, что

$$\sum_{m+n+p\geqslant 2} C_{mnp} d^{m+n} d_1^p < +\infty,$$

где (см. п. 7.1)

$$C_{mnp} = \max(\widetilde{U}_{mnp}^{(1)},\ \widetilde{U}_{mnp}^{(2)}).$$

В случае равномерной сходимости правых частей мы ограничимся лишь общим замечанием. Предварительно рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} u(s) &= \int_B K_{11}(s, t)\, u(t)\, dt + \int_B K_{12}(s, t)\, w(t)\, dt + f(s),\\ w(s) &= \int_B K_{21}(s, t)\, u(t)\, dt + \int_B K_{22}(s, t)\, w(t)\, dt + g(s),\end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

которая обычным приемом сводится к одному линейному интегральному уравнению. Именно, обозначим через B_1 множество, которое получается путем сдвига B на вектор r

так, чтобы пересечение $B \cap B_1$ было пустым, и положим

$$G = B \cup B_1.$$

Ясно, что G — замкнутое множество (как соединение замкнутых множеств B и B_1). Далее, положим

$$z(s) = \begin{cases} u(s), & s \in B, \\ w(s-r), & s \in B_1, \end{cases}$$

$$F(s) = \begin{cases} f(s), & s \in B, \\ g(s-r), & s \in B_1, \end{cases}$$

$$M(s, t) = \begin{cases} K_{11}(s, t), & \text{если} \quad s \in B, \quad t \in B, \\ K_{12}(s, t), & \text{если} \quad s \in B, \quad t \in B_1, \\ K_{21}(s, t), & \text{если} \quad s \in B_1, \quad t \in B, \\ K_{22}(s, t), & \text{если} \quad s \in B_1, \quad t \in B_1. \end{cases}$$

При помощи этих обозначений система (9.2) записывается в виде одного уравнения:

$$z(s) - \int_G M(s, t) z(t)\, dt = F(s), \qquad s \in G, \tag{9.3}$$

исследование которого приводит к различным выводам о решениях системы (9.1). И здесь приходится различать регулярный случай, когда 1 не является собственным значением оператора T:

$$Tx = \int_G M(s, t)\, x(t)\, dt, \tag{9.3$'$}$$

и случай ветвления, когда 1 является собственным значением оператора T. Эти два случая мы рассмотрим отдельно, но предварительно сделаем следующее замечание.

Отметим, что более общая система

$$a_{11}(s) u(s) + a_{12}(s) w(s) - \int_B K_{11}(s, t) u(t)\, dt -$$
$$- \int_B K_{12}(s, t) w(t)\, dt = U_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \sum_{m+n+p \geqslant 2} U_{mnp}^{(1)}\begin{pmatrix} s \\ u, w, v \end{pmatrix},$$
$$a_{21}(s) u(s) + a_{22}(s) w(s) - \int_B K_{21}(s, t) u(t)\, dt -$$
$$- \int_B K_{22}(s, t) w(t)\, dt = U_{01}^{(2)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \sum_{m+n+p \geqslant 2} U_{mnp}^{(2)}\begin{pmatrix} s \\ u, w, v \end{pmatrix},$$

которую мы запишем кратко:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}(s)\,u(s)+a_{12}(s)\,w(s)&=b_1(s),\\ a_{21}(s)\,u(s)+a_{22}(s)\,w(s)&=b_2(s),\end{aligned}\right\}\tag{9.4}$$

приводится к системе (9.1), если для всех $s \in B$

$$a_{11}(s)a_{22}(s)-a_{12}(s)a_{21}(s)\neq 0,$$

так как в этом случае система (9.4) разрешима относительно $u(s)$ и $w(s)$.

9.2. Регулярный случай. Пусть 1 не является собственным значением оператора T. Тогда существует резольвента Фредгольма $H(s, t)$ ядра $M(s, t)$ и уравнение (9.3) имеет единственное решение, представимое согласно формуле (8.4) в виде

$$z(s)=F(s)+\int_G H(s, t)\,F(t)\,dt \qquad (s\in G).$$

Это уравнение, учитывая значения G, $z(s)$ и $F(t)$, может быть записано в виде системы

$$u(s)=f(s)+\int_B H(s, t)\,f(t)\,dt+\int_B H(s, t+r)\,g(t)\,dt,$$

$$w(s)=g(s)+\int_B H(s+r, t)\,f(t)\,dt+$$

$$+\int_B H(s+r, t+r)\,g(t)\,dt \quad (s\in B).$$

Подставляя сюда вместо $f(s)$ и $g(s)$ правые части равенств системы (9.1), мы сведем систему (9.1) к следующему простейшему виду:

$$\left.\begin{aligned} u(s)&=P_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} s\\ v\end{pmatrix}+\sum_{m+n+p\geqslant 2}P_{mnp}^{(1)}\begin{pmatrix} s\\ u,\ w,\ v\end{pmatrix},\\ w(s)&=P_{01}^{(2)}\begin{pmatrix} s\\ v\end{pmatrix}+\sum_{m+n+p\geqslant 2}P_{mnp}^{(2)}\begin{pmatrix} s\\ u,\ w,\ v\end{pmatrix},\end{aligned}\right\}\tag{9.5}$$

где $P_{mnp}^{(i)}\begin{pmatrix} s\\ u,\ w,\ v\end{pmatrix}$ — интегро-степенные формы такого же вида, что и $U_{mnp}^{(i)}\begin{pmatrix} s\\ u,\ w,\ v\end{pmatrix}$, а $P_{01}^{(i)}\begin{pmatrix} s\\ v\end{pmatrix}$ линейны относительно v. Так же, как в п. 7.4, положим

$$|u|,\ |w| \leqslant \omega \leqslant h < d, \qquad |v| \leqslant \omega_1 \leqslant h_1 < d_1,$$

$$F_k(u, w, v) = \sum_{m+n+p\geqslant 2} P_{mnp}^{(k)}\binom{s}{u,\ w,\ v} \qquad (k = 1, 2)$$

и тогда получим

$$|F_k(u, w, v)| \leqslant \sum_{m+n+p\geqslant 2} \left| P_{mnp}^{(k)}\binom{s}{u,\ w,\ v} \right| \leqslant$$
$$\leqslant a(\omega^2 + \omega\omega_1 + \omega_1^2) \qquad (9.6)$$
$$(a = \text{const}, \quad k = 1, 2),$$

$$F_k(u, w, v) - F_k(u_0, w_0, v)| \leqslant$$
$$\leqslant b(\omega + \omega_1)(\sup|u(s) - u_0(s)| + \sup|w(s) - w_0(s)|) \qquad (9.7)$$
$$(b = \text{const}, \quad k = 1, 2).$$

При помощи этих неравенств так же, как в п. 7.6, составляются последовательные приближения Лихтенштейна [1]

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = P_{01}^{(1)}\binom{s}{v}, \quad w_1 = P_{01}^{(2)}\binom{s}{v}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_k = P_{01}^{(1)}\binom{s}{v} + \sum\limits_{m+n+p\geqslant 2} P_{mnp}^{(1)}\binom{s}{u_{k-1},\ w_{k-1},\ v}, \\ w_k = P_{01}^{(2)}\binom{s}{v} + \sum\limits_{m+n+p\geqslant 2} P_{mnp}^{(2)}\binom{s}{u_{k-1},\ w_{k-1},\ v}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (9.8)$$

вводится обозначение

$$\max(|v|,\ |P_{01}^{(1)}|,\ |P_{01}^{(2)}|) = U_*$$

и из квадратного уравнения

$$x = U_* + a(x^2 + xU_* + U_*^2)$$

выбирается тот корень x, который стремится к нулю вместе с U_*. Тогда при достаточно малом значении $|v(s)|$ выполняется неравенство $x \leqslant h$, откуда для всех

$k = 1, 2, 3, \ldots$ будет

$$|u_k| \leqslant x \leqslant h, \quad |w_k| \leqslant x \leqslant h.$$

Наконец, при достаточно малом $|v|$ будет

$$2b(x + U_*) \leqslant q < 1, \tag{9.9}$$

откуда следует сходимость последовательных приближений (9.8) к непрерывному решению системы (9.5), а значит, и к непрерывному решению $u(s)$ и $w(s)$ системы (9.1), причем

$$|u(s)| \leqslant x \leqslant h, \quad |w(s)| \leqslant x \leqslant h.$$

Повторяя теперь рассуждения п. 7.5, мы найдем, что

$$u(s) = \sum_{k \geqslant 1} V_k^{(1)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix}, \quad w(s) = \sum_{k \geqslant 1} V_k^{(2)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix},$$

где

$$V_1^{(i)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = P_{01}^{(i)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2).$$

Использование неравенств (9.6), (9.7) и (9.9) приводит к выводу о единственности этого решения, когда $|v(s)|$ удовлетворяет вышеупомянутым требованиям малости.

Отметим, что если в прямой сумме двух одинаковых пространств непрерывных функций $C(B)$ с нормой $\max |u(s)| + \max |w(s)|$ рассмотреть операторы $F_1(u, w, v)$ и $F_2(u, w, v)$ как один оператор, то при помощи неравенств (9.6) и (9.7) устанавливается сжатость этого оператора в новом пространстве.

Отсюда так же, как в п. 7.5, мы приходим к выводу, что при достаточно малом $|v(s)|$ система (9.5), а значит и (9.1), имеет в классе непрерывных функций единственное решение. Это решение стремится к нулю при $v(s) \to 0$ и представимо в виде регулярно сходящегося интегро-степенного ряда. Если вместо регулярной сходимости правых частей системы (9.1) требовать лишь их равномерной сходимости (см. п. 7.8), то единственное решение представимо в виде равномерно сходящегося интегро-спепенного ряда.

9.3. Случай ветвления. Пусть 1 является n-кратным собственным значением оператора T (см. (9.3')), $\varphi_1(s)$,

$\varphi_2(s), \ldots, \varphi_n(s)$ — его ортонормированные собственные функции, принадлежащие числу 1, и $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots$ $\ldots, \psi_n(s)$ — ортонормированные собственные функции сопряженного оператора T^*:

$$T^*x = \int_G \overline{M(t, s)}\, x(t)\, dt, \tag{9.3''}$$

принадлежащие тому же собственному числу 1.

Рассмотрим новый оператор $\widetilde{T}$:

$$\widetilde{T}(x) = \int_G E(s, t)\, x(t)\, dt, \tag{9.10}$$

где

$$E(s, t) = M(s, t) - \sum_{i=1}^{n} \psi_i(s)\, \overline{\varphi}_i(t). \tag{9.11}$$

По лемме Шмидта 1 не будет собственным значением оператора $\widetilde{T}$, а потому, пользуясь соотношением (9.11), мы можем переписать уравнение (9.3) в виде

$$z(s) = \int_G E(s, t)\, z(t)\, dt + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(s) \int_G z(t)\, \overline{\varphi}_i(t)\, dt + F(s).$$

Полагая

$$\xi_i = \int_G z(t)\, \overline{\varphi_i(t)}\, dt, \tag{9.12}$$

получим

$$z(s) - \int_G E(s, t)\, z(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(s) + F(s) \qquad (s \in G)$$

или, если обозначить через $H(s,t)$ резольвенту Фредгольма ядра $E(s, t)$,

$$z(s) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(s) + F(s) + \int_G \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(t) + F(t)\right] H(s, t)\, dt,$$
$$(s \in G).$$

Данное уравнение, учитывая значения G, $z(s)$ и $F(s)$, мы запишем в виде системы

$$u(s) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(s) + f(s) + \int_B \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(t) + f(t)\right] H(s, t)\,dt + \int_B \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(t+r) + g(t)\right] H(s, t+r)\,dt,$$

$$w(s) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(s+r) + g(s) + \int_B \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(t) + f(t)\right] H(s+r, t)\,dt + \int_B \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(t+r) + g(t)\right] H(s+r, t+r)\,dt,$$

где $s \in B$. Подставляя сюда вместо $f(s)$ и $g(s)$ правые части системы (9.1), получим

$$u(s) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(s) + U_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \sum_{m+n+p\geqslant 2} U_{mnp}^{(1)}\begin{pmatrix} s \\ u,\ w,\ v \end{pmatrix} + \int_B \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(t) + U_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} + \sum_{m+n+p\geqslant 2} U_{mnp}^{(1)}\begin{pmatrix} t \\ u,\ w,\ v \end{pmatrix}\right] H(s,t)\,dt + \int_B \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(t+r) + U_{01}^{(2)}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} + \sum_{m+n+p\geqslant 2} U_{mnp}^{(2)}\begin{pmatrix} t \\ u,\ w,\ v \end{pmatrix}\right] H(s, t+r)\,dt,$$

$$w(s) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(s+r) + U_{01}^{(2)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \sum_{m+n+p\geqslant 2} U_{mnp}^{(2)}\begin{pmatrix} s \\ u,\ w,\ v \end{pmatrix} + \int_B \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(t) + U_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} + \sum_{m+n+p\geqslant 2} U_{mnp}^{(1)}\begin{pmatrix} t \\ u,\ w,\ v \end{pmatrix}\right] H(s+r, t)\,dt + \int_B \left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \psi_i(t+r) + U_{01}^{(2)}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} + \sum_{m+n+p\geqslant 2} U_{mnp}^{(2)}\begin{pmatrix} t \\ u,\ w,\ v \end{pmatrix}\right] H(s+r, t+r)\,dt.$$

Данная система имеет тот же вид, что и система (9.5), и отличается от нее лишь тем, что помимо функционального аргумента здесь имеются еще параметры $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Ввиду этого так же, как в предыдущем пункте, мы находим, что последняя система при достаточно малых $|v(s)|, |\xi_1|, |\xi_2|, \ldots, |\xi_n|$ имеет в классе непрерывных функций единственное решение и это решение имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
u(s) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\psi_i(s) + \int_G \psi_i(t) H(s, t)\, dt\right]\xi_i + U_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \\
&\quad + \int_B \left[U_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} H(s, t) + U_{01}^{(2)}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} H(s, t+r)\right] dt + \\
&\qquad + \sum_{m+m_1+\ldots+m_n\geqslant 2} \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}\ldots\xi_n^{m_n} V_m^{(1),\, m_1\ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix}, \\
w(s) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\psi_i(s+r) + \int_G \psi_i(t) H(s+r, t)\, dt\right]\xi_i + \\
&\quad U_{01}^{(2)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \int_B \left[U_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} H(s+r, t) + \right. \\
&\qquad \left. + U_{01}^{(2)}\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} H(s+r, t+r)\right] dt + \\
&\qquad + \sum_{m+m_1+\ldots+m_n\geqslant 2} \xi_1^{m_1}\xi_2^{m_2}\ldots\xi_n^{m_n} V_m^{(2),\, m_1\ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix},
\end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

где $s \in B$. При этом использованы обозначения

$$V_{mm_1\ldots m_n}^{(i)}\begin{pmatrix} & s & \\ v, & 1, 1, \ldots, & 1 \end{pmatrix} = V_m^{(i),\, m_1\ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} \qquad (i = 1,\ 2),$$

так что для интегро-степенных форм имеем

$$\begin{aligned}
V_{mm_1\ldots m_n}^{(i)}&\begin{pmatrix} & s & \\ v, & \xi_1, \ldots, & \xi_n \end{pmatrix} = \\
&= \xi_1^{m_1}\ldots\xi_n^{m_n} V_{mm_1\ldots m_n}^{(i)}\begin{pmatrix} & s & \\ v, & 1, \ldots, & 1 \end{pmatrix} = \\
&\qquad = \xi_1^{m_1}\ldots\xi_n^{m_n} V_m^{(i),\, m_1\ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} \qquad (i = 1,\ 2).
\end{aligned}$$

Возможные значения параметров $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, входящих в формулы (9.13), получаются после подстановки $u(s)$ и $w(s)$ из (9.13) в (9.12).

Исходя из (9.12), напишем, что

$$\xi_i = \int_G z(s)\,\overline{\varphi_i(s)}\,ds = \int_B u(s)\,\overline{\varphi_i(s)}\,ds + \int_B w(s)\,\varphi_i(s+r)\,ds.$$

Подставляя сюда $u(s)$ и $w(s)$ из (9.13), мы после преобразования получим

$$\begin{aligned}\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \left\{\int_G \left[\psi_k(s) + \int_G \psi_k(t)\,H(s,t)\,dt\right]\overline{\varphi_i(s)}\,ds\right\}\xi_k + \\ + \int_G \overline{\varphi_i(s)}\,ds \int_B \left[U_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} t \\ v\end{pmatrix} H(s,t) + \right. \\ \left. + U_{01}^{(2)}\begin{pmatrix} t \\ v\end{pmatrix} H(s, t+r)\right] dt + \\ + \sum_{m+m_1+\ldots+m_n \geqslant 2} \xi_1^{m_1}\ldots\xi_n^{m_n} \int_B \left[V_m^{(1),\, m_1\ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v\end{pmatrix}\overline{\varphi_i(s)} + \right. \\ \left. + V_m^{(2),\, m_1\ldots m_n}\begin{pmatrix} s \\ v\end{pmatrix}\overline{\varphi_i(s+r)}\right] ds \qquad (9.14) \\ (i = 1, 2, \ldots, n).\end{aligned}$$

Преобразуем это выражение. Так же, как в п. 8.5, мы находим

$$\psi_k(s) + \int_G \psi_k(t)\,H(s,t)\,dt = \varphi_k(s) \qquad (s \in G).$$

Полагая затем

$$\int_B \left[U_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} t \\ v\end{pmatrix} H(s,t) + U_{01}^{(2)}\begin{pmatrix} t \\ v\end{pmatrix} H(s, t+r)\right] dt = \\ = V_1^{(1),\,0\ldots0}\begin{pmatrix} s \\ v\end{pmatrix},$$

$$\int_B \left[U_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} t \\ v\end{pmatrix} H(s+r,t) + U_{01}^{(2)}\begin{pmatrix} t \\ v\end{pmatrix} H(s+r, t+r)\right] dt = \\ = V_1^{(2),\,0\ldots0}\begin{pmatrix} s \\ v\end{pmatrix}$$

и учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n} \int_G \varphi_k(s)\,\overline{\varphi_i(s)}\,ds = 1,$$

мы из (9.14) получим

$$\sum_{m+m_1+\ldots+m_n \geqslant 1} \xi_1^{m_1} \ldots \xi_n^{m_n} \int_B \left[V_m^{(1),\, m_1 \ldots m_n} \binom{s}{v} \overline{\varphi_i(s)} + \right.$$

$$\left. + V_m^{(2),\, m_1 \ldots m_n} \binom{s}{v} \overline{\varphi_i(s+r)} \right] ds = 0 \qquad (9.15)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

В данной системе среди членов первой степени нет таких, которые содержат первые степени параметров $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Система (9.15) представляет собою поэтому уравнение разветвления Ляпунова — Шмидта рассматриваемой задачи.

Если положить в системе (9.1) $v(s) = \lambda v_0(s)$, где $v_0(s)$ — фиксированная функция, а λ — параметр, то путем введения обозначений

$$L^{(i)}_{m_1 \ldots m_n,\, m} = \int_B \left[V_m^{(1),\, m_1 \ldots m_n} \binom{s}{v_0} \overline{\varphi_i(s)} + \right.$$

$$\left. + V_m^{(2),\, m_1 \ldots m_n} \binom{s}{v_0} \overline{\varphi_i(s+r)} \right] ds$$

уравнение разветвления рассматриваемой задачи примет вид

$$\sum_{m_1+\ldots+m_n \geqslant 2} L^{(i)}_{m_1 \ldots m_n 0} \xi_1^{m_1} \ldots \xi_n^{m_n} +$$

$$+ \sum_{m_1+\ldots+m_n \geqslant 0} \xi_1^{m_1} \ldots \xi_n^{m_n} \sum_{m \geqslant 1} L^{(i)}_{m_1 \ldots m_n,\, m} \lambda^m = 0 \qquad (9.16)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Данная система исследована в §§ 2, 5, 6.

9.4. Некоторые нелинейные интегро-дифференциальные уравнения первого порядка. Здесь мы рассмотрим интегро-дифференциальные уравнения, которые сводятся к системам нелинейных интегральных уравнений Ляпунова — Шмидта, Пусть $C^1 = C^1[0, 1]$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций, $v(s)$ — заданная функция этого пространства и $u(s)$ — неизвестная функция этого пространства. Положим

$$Du(s) = \frac{du(s)}{ds} \tag{9.17}$$

и рассмотрим уравнение

$$u(s) - \int_0^1 K_{11}(s, t)\, u(t)\, dt - \int_0^1 K_{12}(s, t)\, Du(t)\, dt = \\ = U_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} + \sum_{m+n+p\geqslant 2} U_{mnp}^{(1)}\begin{pmatrix} s \\ u,\ Du,\ v \end{pmatrix}, \tag{9.18}$$

где

$$U_{01}^{(1)}\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} = K_0(s)\, v(s) + \int_0^1 K_{01}(s, t)\, v(t)\, dt,$$

$$U_{mnp}^{(1)}\begin{pmatrix} s \\ u,\ Du,\ v \end{pmatrix} = \sum_\nu \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_\nu^{(1)}(s, t_1, \ldots, t_i) \times \\ \times u^{\alpha_0}(s)\, u^{\alpha_1}(t_1) \ldots u^{\alpha_i}(t_i)\, (Du(t_1))^{\beta_1} \ldots (Du(t_i))^{\beta_i} \times \\ \times v^{\gamma_0}(s)\, v^{\gamma_1}(t_1) \ldots v^{\gamma_i}(t_i)\, dt_1 dt_2 \ldots dt_i$$

$(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_i = m,\ \ \beta_1 + \ldots + \beta_i = n,$

$\gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_i = p,\ \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_i).$

Мы будем предполагать, что выполнены условия:

1. Правая часть равенства (9.18) сходится регулярно, когда

$$|u(s)| \leqslant h < d, \quad |Du(s)| \leqslant h < d, \quad |v(s)| \leqslant h_1 < d_1,$$

причем

$$\sum_{m+n+p\geqslant 2} B_{mnp} d^{m+n} d_1^p < +\infty, \tag{9.19}$$

где (см. п. 7.1) $B_{mnp} = \tilde{U}_{mnp}^{(1)}$.

2. Все ядра непрерывны по совокупности аргументов и имеют по s производные первого порядка

$$\frac{\partial}{\partial s} K_{1j}(s, t) = K_{2j}(s, t) \qquad (j = 1, 2),$$

$$\frac{\partial}{\partial s} U_{01}^{(1)}\binom{s}{v} = U_{01}^{(2)}\binom{s}{v},$$

$$\frac{\partial}{\partial s} K_{\nu}^{(1)}(s, t_1, \ldots, t_i) = K_{\nu}^{(2)}(s, t_1, \ldots, t_i),$$

непрерывные по совокупности аргументов.

3. Имеет место неравенство

$$\sum_{m+n+p\geqslant 2} C_{mnp}\, d^{m+n} d_1^p < +\infty, \tag{9.20}$$

где

$$C_{mnp} = \max \sum_{\nu} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{\nu}^{(2)}(s, t_1, \ldots, t_i)\, dt_1 \ldots dt_i.$$

В силу условия (9.19) правую часть (9.18) можно почленно дифференцировать, так что из (9.18) мы находим, что

$$Du(s) - \int_0^1 K_{21}(s, t)\, u(t)\, dt - \int_0^1 K_{22}(s, t)\, Du(t)\, dt =$$
$$= U_{01}^{(2)}\binom{s}{v} + \sum_{m+n+p\geqslant 2} U_{mnp}^{(2)}\binom{s}{u, Du, v}, \tag{9.21}$$

где

$$U_{mnp}^{(2)}\binom{s}{u, Du, v} = \sum_{\nu} \int_0^1 \ldots \int_0^1 [K_{\nu}^{(2)}(s, t_1, \ldots, t_i)\, u^{\alpha_0}(s)\, v^{\gamma_0}(s) +$$
$$+ K_{\nu}^{(1)}(s, t_1, \ldots, t_i)\,(\alpha_0 u^{\alpha_0 - 1}(s)\, Du(s)\, v^{\gamma_0}(s) +$$
$$+ \gamma_0 u^{\alpha_0}(s)\, v^{\gamma_0 - 1}(s)\, Dv(s))]\, u^{\alpha_1}(t_1) \ldots u^{\alpha_i}(t_i) \times$$
$$\times (Du(t_1))^{\beta_1} \ldots (Du(t_i))^{\beta_i}\, v^{\gamma_1}(t_1) \ldots v^{\gamma_i}(t_i)\, dt_1 \ldots dt_i.$$

Из (9.19) и (9.20) следует регулярная сходимость правой части равенства (9.21), ибо из (9.19) мы находим, что если $h < r < d$, $h_1 < r_1 < d_1$, то сходится ряд

$$\sum_{m+n+p\geqslant 2} (m+p) B_{mnp} r^{m+n} r_1^p.$$

Рассмотрим теперь систему

$$\left.\begin{aligned} u(s) - \int_0^1 K_{11}(s, t) u(t)\, dt - \int_0^1 K_{12}(s, t) w(t)\, dt = \\ = U_{01}^{(1)}\binom{s}{v} + \sum_{m+n+p\geqslant 2} U_{mnp}^{(1)}\binom{s}{u, w, v}, \\ w(s) - \int_0^1 K_{21}(s, t) u(t)\, dt - \int_0^1 K_{22}(s, t) w(t)\, dt = \\ = U_{01}^{(2)}\binom{s}{v} + \sum_{m+n+p\geqslant 2} U_{mnp}^{(2)}\binom{s}{u, w, v}, \end{aligned}\right\} \tag{9.22}$$

отличающуюся от системы равенств (9.18) и (9.21) лишь тем, что Du заменено на w. Данная система (9.22) удовлетворяет тем же условиям, что и система (9.1). Ввиду этого все предложения, установленные для системы (9.1) в предыдущих пунктах данного параграфа, сохраняются и для системы (9.22).

Пусть $u(s)$ и $w(s)$ — какое-нибудь решение системы (9.22), полученное при достаточно малых $|v(s)|$ и $|Dv(s)|$. Покажем, что

$$w(s) = \frac{d}{ds} u(s),$$

откуда будет следовать, что $u(s)$ — решение уравнения (9.18) при достаточно малых $|v(s)|$ и $|Dv(s)|$.

Действительно, дифференцируя по s первое равенство системы (9.22) и учитывая выражения для

$$U_{01}^{(2)}\binom{s}{v}, \quad U_{mnp}^{(2)}\binom{s}{u, w, s}$$

и

$$K_{i2}(s, t) \qquad (i = 1, 2),$$

мы получим выражение, вычитание из которого второго равенства системы (9.22) даст

$$\frac{du(s)}{ds} - w(s) =$$

$$= \left(\frac{du(s)}{ds} - w(s)\right) \sum_{m+n+p\geqslant 2} \left[\sum_{\nu} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_{\nu}^{(1)}(s, t_1, \ldots, t_i)\, \alpha_0 \times \right.$$

$$\times u^{\alpha_0 - 1}(s)\, u^{\alpha_1}(t_1) \ldots u^{\alpha_i}(t_i)\, w^{\beta_1}(t_1) \ldots w^{\beta_i}(t_i) \times$$

$$\times v^{\gamma_0}(s)\, v^{\gamma_1}(t_1) \ldots v^{\gamma_i}(t_i)\, dt_1 \ldots dt_i.$$

Так как при достаточно малых $|v|$ и $|Dv|$ малы $|u|$ и $|w|$, то абсолютное значение суммы, стоящей в правой части последнего равенства, можно считать меньше единицы. Ввиду этого последнее равенство возможно лишь тогда, когда $\frac{du(s)}{ds} - w(s) \equiv 0$. Этим доказано наше утверждение. Из данного утверждения вытекает, что регулярный случай и случай ветвления для интегро-дифференциального уравнения (9.18) сводятся к соответствующим случаям, изученным для системы (9.1) в пп. 9.2 и 9.3.

Отметим, что если в уравнении (9.18) $K_{12}(s, t) \equiv 0$, то в системе (9.22) будут отсутствовать последние слагаемые в левых частях равенств этой системы. Вопрос о том, имеем ли мы в этом частном виде уравнения (9.18) регулярный случай или случай ветвления, решается проще: если 1 не является собственным значением оператора T_1

$$T_1 u = \int_0^1 K_{11}(s, t)\, u(t)\, dt,$$

то имеем регулярный случай, а если 1 — собственное значение оператора T_1, то имеем случай ветвления.

9.5. Другие виды интегро-дифференциальных уравнений. Здесь мы рассмотрим некоторые интегро-дифференциальные уравнения, отличные от уравнения (9.18). Сначала заметим, что интегро-дифференциальное уравнение второго порядка следующего вида:

$$u(s) - \int_0^1 K_{11}(s, t)\, u(t)\, dt - \int_0^1 K_{12}(s, t)\, Du(t)\, dt -$$

$$- \int_0^1 K_{13}(s,t)\, D^2 u(t)\, dt = U_{01}\binom{s}{v} + \sum_{m+n+p+q\geqslant 2} U_{mnpq}\binom{s}{u, Du, D^2u, v},$$

где

$$Du(s) = \frac{du(s)}{ds}, \qquad D^2u(s) = \frac{d^2u(s)}{ds^2},$$

ядра $K_{1i}(s, t)$ и ядра, входящие в $U_{mnpq}\binom{s}{u,\ Du,\ D^2u,\ v}$, дважды непрерывно дифференцируемы по s, исследуется так же, как уравнение (9.18), если интегро-степенной ряд, стоящий в правой части уравнения, не содержит $Du(s)$ и $D^2u(s)$ (он может содержать лишь $Du(t_k)$ и $D^2u(t_k)$, где t_k — переменные интегрирования). Именно, если выполнены соответствующие условия сходимости правой части, то уравнение дважды дифференцируется по s и задача отыскания его решений сводится к нахождению решений системы трех уравнений вида (9.1).

Далее, уравнение вида

$$Du(s) = U_{01}\binom{s}{v} + \sum_{m+n\geqslant 2} U_{mn}\binom{s}{u,\ v},\ u(0) = u_0,$$

где

$$U_{01}(s) = K_0(s)\,v(s) + \int_0^1 K_{01}(s, t)\,v(t)\,dt,$$

$$U_{mn}\binom{s}{u,\ v} = \sum_{\nu}\int_0^1 \ldots \int_0^1 K_\nu(s, t_1, \ldots, t_i)\,u^{\alpha_0}(s)\times$$

$$\times u^{\alpha_1}\ldots u^{\alpha_i}(t_i)\,v^{\beta_0}(s)\,v^{\beta_1}(t_1)\ldots v^{\beta_i}(t_i)\,dt_1\ldots dt_i,$$

путем интегрирования сводится к эквивалентному уравнению

$$u(s) = u(0) + \int_0^s U_{01}\binom{z}{v}dz + \sum_{m+n\geqslant 2}\int_0^s U_{mn}\binom{z}{u,\ v}dz,$$

которое имеет единственное решение при достаточно малых $|u(0)|$ и $|v(s)|$.

Перейдем к более общему уравнению

$$Du(s) = a(s)\,u(s) + \int_0^1 K_{11}(s, t)\,u(t)\,dt +$$

$$+ U_{01}\binom{s}{v} + \sum_{m+n\geqslant 2} U_{mn}\binom{s}{u,\ v}, \qquad (9.23)$$

где

$$U_{mn}\binom{s}{u,v} = \sum_{\nu} \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_\nu(s, t_1, \ldots, t_i)\, u^{\alpha_0}(s) \ldots u^{\alpha_i}(t_i) \times \\ \times v^{\beta_0}(s) \ldots v^{\beta_i}(t_i)\, dt_1 \ldots dt_i$$

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_i = m, \quad \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_i = n, \\ \nu = 1, 2, \ldots, n_i).$$

Путем интегрирования обеих частей находим, что

$$u(s) = u(0) + \int_0^s a(z)\, u(z)\, dz + \int_0^1 \left[\int_0^s K_{11}(z, t)\, dz\right] u(t)\, dt + \\ + \int_0^s U_{01}\binom{z}{v} dz + \sum_{m+n\geqslant 2} \sum_{\nu} \int_0^s \int_0^1 \ldots \int_0^1 K_\nu(z, t_1, \ldots, t_i)\, u^{\alpha_0}(z) \times \\ \times u^{\alpha_1}(t_1) \ldots u^{\alpha_i}(t_i)\, v^{\beta_0}(z)\, v^{\beta_1}(t_1) \ldots v^{\beta_i}(t_i)\, dz\, dt_1 \ldots dt_i. \quad (9.24)$$

Покажем, что 1 не является собственным значением оператора T_1:

$$T_1 u = \int_0^s a(z)\, u(z)\, dz + \int_0^1 \left[\int_0^s K_{11}(z, t)\, dz\right] u(t)\, dt.$$

Действительно, пусть $u_0(s)$ — решение уравнения

$$u_0(s) = T_1 u_0. \quad (9.25)$$

Полагая тогда

$$M = \max |u_0(s)|, \quad N = \max\left(|a(s)| + \int_0^1 |K_{11}(z, t)|\, dt\right),$$

получим из (9.25) последовательно

$$|u_0(s)| \leqslant NMs,$$

$$|u_0(s)| \leqslant N^2 M \frac{s^2}{2}, \ldots, |u_0(s)| \leqslant N^k M \frac{s^k}{k!}, \ldots,$$

т. е. $u_0(s) \equiv 0$, а значит, 1 не является собственным значением оператора T_1. Отсюда следует, что уравнение

(9.24), а значит и уравнение (9.23), имеет при достаточно малых фиксированных $|u(0)|$ и $|v(s)|$ единственное решение и оно представимо в виде интегро-степенного ряда. Это решение, разумеется, зависит не только от $v(s)$, но и от параметра $u(0)$.

Аналогичный вывод имеет место и для уравнения

$$D^2u(s) = a(s)Du(s) + b(s)u(s) + \\ + \int_0^1 K_{11}(s, t)u(t)\,dt + U_{01}\binom{s}{v} + \sum_{m+n\geq 2} U_{mn}\binom{s}{u, v}. \tag{9.26}$$

Здесь придется дважды интегрировать обе части равенства. Поступая так же, как и при рассмотрении уравнения (9.23), мы придем к выводу, что при достаточно малых фиксированных $|u(0)|$, $|Du(0)|$ и $|v(s)|$ уравнение (9.26) имеет единственное решение и оно представимо в виде интегро-степенного ряда от $v(s)$, $u(0)$ и $Du(0)$.

В заключение этого пункта мы рассмотрим уравнение

$$Du(s) = \int_0^1 K_{11}(s, t)Du(t)\,dt + a(s)u(s) + \\ + \int_0^1 K_{12}(s, t)u(t)\,dt + U_{01}\binom{s}{v} + \sum_{m+n+p\geq 2} U_{mnp}\binom{s}{u, Du, v}, \tag{9.27}$$

причем, в отличие от уравнения (9.18), интегро-степенные формы U_{mnp} могут содержать степени $(Du(s))^{\beta_0}$. В том случае, когда 1 не является собственным значением оператора T:

$$Tw = \int_0^1 K_{11}(s, t)w(t)\,dt,$$

уравнение (9.27) можно записать в виде

$$Du(s) = \int_0^1 K_{11}(s, t)Du(t)\,dt + f(s).$$

Обозначив через $\Gamma(s, t)$ резольвенту Фредгольма ядра $K_{11}(s, t)$, мы согласно формуле (8.4) получим

$$Du(s) = f(s) + \int_0^1 \Gamma(s, t) f(t)\, dt.$$

Подставляя сюда значение $f(s)$, получим простейшее уравнение (см. п. 7.5) относительно $Du(s)$, которое при достаточно малых $|v(s)|$ и $|u(s)|$ имеет единственное решение, и оно представимо в виде (9.23). Итак, в данном случае уравнение (9.27) сводится к уравнению (9.23).

Если 1 является n-кратным собственным значением оператора T, то при помощи леммы Шмидта мы так же, как в предыдущем случае, сведем уравнение (9.27) к уравнению вида (9.23), правая часть которого будет зависеть от параметров $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, допустимые значения которых найдутся из уравнения разветвления (ср. пп. 8.4 и 8.5).

9.6. Другой способ построения уравнения разветвления [1]). Рассмотрим в пространстве n раз непрерывно дифференцируемых функций $C^n[a, b]$ уравнение

$$z(x) = \mu \int_a^b K(x, y) f(y, z(y), z'(y), \ldots, z^{(n)}(y))\, dy + g(x) \tag{9.28}$$

и допустим, что при $\mu = \lambda_0$ оно имеет решение $z(x) = z_0(x)$, причем

$$f(y, z_0(y) + v_0, z_0'(y) + v_1, \ldots, z_0^{(n)}(y) + v_n) =$$
$$= A_0(y) + \sum_{\alpha_0 + \ldots + \alpha_n \geqslant 1} a_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}(y)\, v_0^{\alpha_0} v_1^{\alpha_1} \ldots v_n^{\alpha_n},$$

где $a_{\alpha_0 \ldots \alpha_n}(y)$, и $K_x^{(i)}(x, y) = \dfrac{\partial^i}{\partial x^i} K(x, y)$, $\quad i = 0, 1, \ldots, n$, непрерывны. Полагая

$$\mu = \lambda_0 + \lambda, \qquad z(x) = z_0(x) + u(x)$$

и учитывая, что

$$A_0(y) = f(y, z_0(y), z_0'(y), \ldots, z_0^{(n)}(y)),$$

[1]) См. М. М. Вайнберг [2].

получим

$$u(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, y)\, v(y)\, dy = \Phi(\lambda, u \mid x), \tag{9.29}$$

где

$$\left.\begin{aligned} v(y) &= L_y[u] = \sum_{i=0}^{n} a_i(y)\, u^{(i)}(y), \\ \Phi(\lambda, u \mid x) &= \int_a^b K(x, y) \Big\{ \lambda [A_0(y) + v(y)] + \\ &+ (\lambda + \lambda_0) \sum_{\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \geq 2} a_{\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n}(y)\, (u(y))^{\alpha_0} \times \\ &\qquad \times (u'(y))^{\alpha_1} \ldots (u^{(n)}(y))^{\alpha_n} \Big\}\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{9.30}$$

Применяя к обеим частям равенства (9.29) операцию L_x (см. (9.30)) и полагая

$$\lambda_0 L_x [K(x, y)] = M(x, y), \quad L_x [\Phi(\lambda, u \mid x)] = F(\lambda, u|x),$$

получим

$$v(x) - \int_a^b M(x, y)\, v(y)\, dy = F(\lambda, u \mid x). \tag{9.31}$$

Из самого перехода от системы (9.29) — (9.30) к уравнению (9.31) следует, что всякое решение системы (9.29) — (9.30) удовлетворяет уравнению (9.31). Пусть $u_0(x)$ и $v_0(x)$ — пара функций, удовлетворяющая уравнению (9.31). Тогда функция

$$u_0(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, y)\, v_0(y)\, dy + \Phi(\lambda, u_0 \mid x) \tag{9.32}$$

удовлетворяет системе (9.29) — (9.30).

Действительно,

$$u_0(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x,y) L_y[u_0(y)]\, dy =$$

$$= \Phi(\lambda, u_0 \mid x) + \lambda_0 \int_a^b K(x, y) v_0(y)\, dy -$$

$$- \lambda_0 \int_a^b K(x, y) \Big\{ L_y[\Phi(\lambda, u_0 \mid y)] +$$

$$+ \lambda_0 \int_a^b L_y[K(y, t)] v_0(t)\, dt \Big\} dy = \Phi(\lambda, u_0 \mid x) +$$

$$+ \lambda_0 \int_a^b K(x, y) \Big\{ v_0(y) - \int_a^b M(y, t) v_0(t)\, dt - F(\lambda, u_0 \mid y) \Big\} dy =$$

$$= \Phi(\lambda, u_0 \mid x).$$

Ввиду этого достаточно исследовать интегральное уравнение (9.31). Пусть 1 — собственное значение кратности p интегрального оператора A:

$$Av = \int_a^b M(x, y) v(y)\, dy,$$

$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_p(x)$ — нормированные собственные функции оператора A; $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ..., $\psi_p(x)$ — нормированные собственные функции сопряженного оператора A^*.

Так же, как в п. 8.3, составим ядро

$$E(x, y) = M(x, y) - \sum_{i=1}^{p} \psi_i(x) \overline{\varphi_i}(y),$$

положим

$$\xi_i = \int_a^b v(y) \overline{\varphi_i(y)}\, dy \qquad (i = 1, 2, \ldots, p) \qquad (9.33)$$

и обозначим через $R(x, y)$ резольвенту Фредгольма ядра $E(x, y)$. Тогда (ср. (10.19)) получим

$$v(x) = \sum_{i=1}^{p} \xi_i \varphi_i(x) + F(\lambda, u \mid x) + \int_a^b R(x, y) F(\lambda, u \mid y)\, dy. \quad (9.34)$$

Отсюда и из (9.32), следует, что

$$u(x)=\lambda_0\sum_{i=1}^{p}\xi_i\int_a^b K(x,y)\varphi_i(y)\,dy+\lambda_0\int_a^b K(x,y)F(\lambda,u|y)\,dy+$$
$$+\int_a^b\int_a^b K(x,y)R(y,t)F(\lambda,u\,|\,t)\,dt\,dy+\Phi(\lambda,u\,|\,x). \qquad (9.35)$$

Данное уравнение (см. п. 8.5) при достаточно малых фиксированных $|\lambda|$ и $|\xi_i|$ имеет единственное непрерывное решение, и оно представимо в виде равномерно сходящегося ряда

$$u(x)=\sum_{n_1+\ldots+n_p+k\geqslant 1} a_{n_1\ldots n_p k}(x)\,\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\ldots\xi_p^{n_p}\lambda^k \qquad (9.36)$$

с непрерывными коэффициентами $a_{n_1n_2\ldots n_pk}(x)$.

Подставляя (9.34) в (9.33), мы получим уравнение разветвления вида (10.24) для определения возможных значений ξ_i. Коэффициенты решения (9.36) и коэффициенты уравнения разветвления рассматриваемой задачи вычисляются так же, как в §§ 10 и 11.

Общее интегральное уравнение и коэффициенты уравнения разветвления

ГЛАВА IV

§ 10. Общее интегральное уравнение

10.1. Постановка задачи и предварительные замечания. Пусть B — ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства, I и I_1 — промежутки вещественной оси или выпуклые области комплексной плоскости и $G(s, t, u, \mu)$ — вещественная или комплекснозначная функция, заданная на $B \times B \times I \times I_1$ и непрерывная по совокупности аргументов. Дальнейшие ограничения на функцию $G(s, t, u, \mu)$ будут указаны ниже.

Рассмотрим общее нелинейное интегральное уравнение [1])

$$x(s) = \int_B G(s,t,x(t),\mu)\,dt. \tag{10.1}$$

Если функция $G'_u(s, t, u, \mu)$ является монотонной по u, то (10.1) называется уравнением Урысона. Мы не будем предполагать, что функция G'_u монотонна по u.

Если

$$G(s, t, u, \mu) = C(s, t) f(t, u, \mu),$$

то (10.1) называется уравнением Гаммерштейна.

Пусть при некотором значении $\mu = \mu_0$ уравнение (10.1) имеет непрерывное решение $x_0(s)$, т. е.

$$x_0(s) = \int_B G(s,t,x_0(s),\mu_0)\,dt. \tag{10.2}$$

Ставится задача о нахождении всех непрерывных решений $x_\mu(s)$ уравнения (10.1) для значений μ, близких к μ_0 и

---

[1]) Задача о ветвлении решений такого уравнения исследована в работе П. Г. Айзенгендлера [3].

удовлетворяющих условию

$$\max | x_\mu(s) - x_0(s) | \to 0 \quad \text{при} \quad \mu \to \mu_0.$$

Мы изучим данную задачу при следующем дополнительном условии [1]). Мы будем предполагать, что функция $G(s, t, x_0(t) + u, \mu_0 + \lambda)$ представима в виде

$$G(s, t, x_0(t) + u, \mu_0 + \lambda) = \sum_{m+n\geqslant 0} A_{mn}(s, t, \mu_0)\, u^m \lambda^n, \tag{10.3}$$

где $A_{mn}(s, t, \mu_0) = B_{mn}(s, t)$ непрерывны по совокупности аргументов (s, t), и ряд (10.3) либо сходится равномерно (когда $| u | \leqslant d$, $| \lambda | \leqslant d_1$), либо сходится регулярно, т. е. сходится ряд

$$\sum_{m+n\geqslant 0} b_{mn} u^m \lambda^n,$$

где $b_{mn} = \max | B_{mn}(s, t) |$. Впрочем, из равномерной сходимости (см. п. 7.8) следует и регулярная сходимость.

Подставляя в равенство (10.1) выражения

$$x(s) = x_0(s) + u(s), \quad \mu = \mu_0 + \lambda$$

и учитывая (10.2) и (10.3), получим

$$u(s) = \sum_{m+n\geqslant 1} \lambda^n \int_B B_{mn}(s, t)\, u^m(t)\, dt,$$

ибо $B_{00}(s, t) = G(s, t, x_0(s), \mu_0)$. Полагая

$$B_{10}(s,t) = K(s, t), \qquad \int_B B_{01}(s, t)\, dt = f(s),$$

получим

$$u(s) - \int_B K(s, t)\, u(t)\, dt = \\ = \lambda f(s) + \sum_{m+n\geqslant 2} \lambda^n \int_B B_{mn}(s, t)\, u^m(t)\, dt. \tag{10.4}$$

---

[1]) В седьмой главе будет указано, что в ряде случаев условие (10.3) может быть заменено требованием, чтобы правая часть равенства (10.3) имела вид

$$\sum_{m+n=0}^{r} A_{mn}(s, t, \mu_0)\, u^m \lambda^n + \sum_{i+j=r} b_{ij}, \quad b_{ij} = o(| u |^i | \lambda |^j)$$

при $u, \lambda \to 0$, $r \geqslant 2$.

Таким образом, поставленная задача сводится к нахождению всех непрерывных решений $u(s)$ уравнения (10.4), стремящихся к нулю (в смысле метрики пространства непрерывных функций $C(B)$) при $\lambda \to 0$.

При нахождении всех малых непрерывных решений уравнения (10.4) мы так же, как при изучении уравнения Ляпунова — Шмидта, рассмотрим отдельно регулярный случай и случай ветвления. Правда, уравнение (10.4) представляет собою частный случай уравнения (8.1). Отметим еще, что если

$$G(s, t, u, \mu) = \mu G(s, t, u), \tag{10.5}$$

то в уравнении (10.4) $B_{mn}(s, t) \equiv 0$ при $n \geqslant 2$, т. е. n будет принимать лишь значения 0 и 1.

10.2. **Регулярный случай.** Пусть 1 не является собственным значением линейного интегрального оператора T:

$$Tu = \int_B K(s, t)\, u(t)\, dt, \tag{10.6}$$

и $\Gamma(s, t)$ — резольвента Фредгольма ядра $K(s, t)$. Тогда согласно формуле (8.4) мы из (10.4) найдем

$$u(s) = \lambda \left[f(s) + \int_B \Gamma(s, \tau) f(\tau)\, d\tau \right] + \\ + \sum_{m+n \geqslant 2} \lambda^n \int_B \left[B_{mn}(s, t) + \int_B \Gamma(s, \tau) B_{mn}(\tau, t)\, d\tau \right] u^m(t)\, dt.$$

Полагая здесь

$$\left.\begin{aligned} g(s) &= f(s) + \int_B \Gamma(s, \tau) f(\tau)\, d\tau, \\ g_{mn}(s, t) &= B_{mn}(s, t) + \int_B \Gamma(s, \tau) B_{mn}(\tau, t)\, d\tau, \end{aligned}\right\} \tag{10.7}$$

получим

$$u(s) = \lambda g(s) + \sum_{m+n \geqslant 2} \lambda^n \int_B g_{mn}(s, t)\, u^m(t)\, d\tau. \tag{10.8}$$

Данное уравнение является простейшим (см. § 7 и теорему 7.4), так что при достаточно малых $|\lambda|$ оно имеет единственное непрерывное решение, и это решение представимо в виде равномерно сходящегося ряда

$$u(s) = \lambda g(s) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(s)\lambda^i. \tag{10.9}$$

Для нахождения $a_i(s)$ можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Именно, подставляя (10.9) в (10.8), получим

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i(s)\lambda^i = \sum_{m+n\geqslant 2} \lambda^n \int_B g_{mn}(s,t)\left[\lambda g(t) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(t)\lambda^i\right]^m dt.$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях λ приводит к рекуррентным формулам для вычисления $a_i(s)$, например:

$$\left.\begin{aligned}
a_2(s) &= \int_B g_{02}(s,t)\,dt + \int_B g_{11}(s,t)g(t)\,dt + \\
&\qquad + \int_B g_{20}(s,t)g^2(t)\,dt,\\
a_3(s) &= \int_B g_{03}(s,t)\,dt + \int_B g_{11}(s,t)a_2(t)\,dt + \\
&\quad + \int_B g_{12}(s,t)g(t)\,dt + 2\int_B g_{20}(s,t)g(t)a_2(t)\,dt + \\
&\qquad + \int_B g_{21}(s,t)g^2(t)\,dt + \int_B g_{30}(s,t)g^3(t)\,dt,\\
a_4(s) &= \int_B g_{04}(s,t)\,dt + \int_B g_{11}(s,t)a_3(t)\,dt + \\
&\quad + \int_B g_{12}(s,t)a_2(t)\,dt + \int_B g_{13}(s,t)g(t)\,dt + \\
&\quad + \int_B g_{20}(s,t)\left[a_2^2(t) + 2g(t)a_3(t)\right]dt + \\
&\quad + 2\int_B g_{21}(s,t)g(t)a_2(t)\,dt + \int_B g_{22}(s,t)g^2(t)\,dt + \\
&\quad + 3\int_B g_{30}(s,t)g^2(t)a_2(t)\,dt + \int_B g_{31}(s,t)g^3(t)\,dt + \\
&\qquad + \int_B g_{40}(s,t)g^4(t)\,dt,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{10.10}$$

В частности, если выполнено условие (10.5), то в этих формулах будут отсутствовать слагаемые, содержащие

$$g_{mn}(s,\ t) \quad \text{при } n \geqslant 2.$$

Действительно, пусть выполнено (10.5) и

$$G(s, t, x_0(s) + u) = G(s, t, x_0(s)) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(s, t)\, u^m,$$

где последний ряд сходится равномерно. Тогда из (10.2) и (10.3) получим

$$u(s) = \lambda \int_B G(s, t, x_0(t))\, dt + \mu_0 \sum_{m=1}^{\infty} \int_B A_m(s, t)\, u^m(t)\, dt + \\ + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \int_B A_m(s, t)\, u^m(t)\, dt.$$

Полагая

$$\mu_0 A_m(s,\ t) = B_{m0}(s,\ t), \quad A_m(s,\ t) = B_{m1}(s,\ t),$$

$$f(s) = \int_B G(s, t, x_0(t))\, dt, \quad \mu_0 A_1(s, t) \equiv B_{10}(s, t) = K(s, t),$$

мы так же, как раньше, получим (10.4), но $B_{mn}(s,\ t) \equiv 0$ при $n \geqslant 2$. Отсюда согласно (10.7) следует, что

$$g_{mn}(s,\ t) \equiv 0 \quad \text{при } n \geqslant 2.$$

10.3. Одномерный случай ветвления. Пусть 1 является простым собственным значением оператора (10.6), $\varphi_1(s)$ — нормированная собственная функция этого оператора T и $\psi_1(s)$ — нормированная собственная функция сопряженного оператора T^*:

$$T^* u = \int_B \overline{K(t, s)}\, u(t)\, dt. \tag{10.6'}$$

Так же, как в п. 8.4, рассмотрим ядро

$$E(s,\ t) = K(s,\ t) - \psi_1(s)\overline{\varphi_1(t)},$$

положим

$$\xi = \int_B \overline{\varphi_1}(t)\, u(t)\, dt, \tag{10.11}$$

и тогда уравнение (10.4) примет вид

$$u(s) - \int_B E(s,t)\,u(t)\,dt = \xi\psi_1(s) + \lambda f(s) + \\ + \sum_{m+n\geqslant 2} \lambda^n \int_B B_{mn}(s,t)\,u^m(t)\,dt.$$

По лемме Шмидта существует резольвента Фредгольма $R(s, t)$ ядра $E(s, t)$, и последнее уравнение преобразуется к виду (см. формулу (8.4))

$$u(s) = \left[\psi_1(s) + \int_B R(s,t)\,\psi_1(t)\,dt\right]\xi + \\ + \lambda\left[f(s) + \int_B R(s,t)\,f(t)\,dt\right] + \\ + \sum_{m+n\geqslant 2} \lambda^n \int_B \left[B_{mn}(s,t) + \int_B R(s,\tau)\,B_{mn}(\tau,t)\,d\tau\right] u^m(t)\,dt,$$

или, так как $\varphi_1(s) = \psi_1(s) + \int_B R(s,t)\,\psi_1(t)\,dt$ (см. п. 8.4),

$$u(s) = \xi\varphi_1(s) + \lambda g(s) + \sum_{m+n\geqslant 2} \lambda^n \int_B g_{mn}(s,t)\,u^m(t)\,dt, \tag{10.12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} g(s) &= f(s) + \int_B R(s,t)\,f(t)\,dt, \\ g_{mn}(s,t) &= B_{mn}(s,t) + \int_B R(s,\tau)\,B_{mn}(\tau,t)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

При достаточно малых фиксированных $|\lambda|$ и $|\xi|$, как мы видели раньше (см. п. 8.4 и формулу (8.14)), уравнение (10.12) имеет единственное непрерывное решение, и оно представимо в виде равномерно сходящегося ряда

$$u(s) = \xi\varphi_1(s) + \lambda g(s) + \sum_{i+k\geqslant 2} a_{ik}(s)\,\xi^i\lambda^k \tag{10.14}$$

с непрерывными коэффициентами $a_{ik}(s)$.

Для нахождения a_{ik} можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов. Именно, подставляя

(10.14) в (10.12), имеем

$$\sum_{i+k\geqslant 2} a_{ik}(s)\,\xi^i\lambda^k = \sum_{m+n\geqslant 2} \lambda^n \int_B g_{mn}(s,t)\Bigl[\xi\varphi_1(t) + \lambda g(t) + \sum_{p+q\geqslant 2} a_{pq}(t)\,\xi^p\lambda^q\Bigr]^m dt. \tag{10.15}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых одночленах относительно ξ и λ, мы из (10.15) получаем рекуррентную систему для a_{ik}:

$$\left.\begin{aligned}
a_{02}(s) &= \int_B g_{02}(s,t)\,dt + \int_B g_{11}(s,t)\,g(t)\,dt + \int_B g_{20}(s,t)\,g^2(t)\,dt,\\
a_{11}(s) &= \int_B g_{11}(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt + 2\int_B g_{20}(s,t)\,g(t)\,\varphi_1(t)\,dt,\\
a_{20}(s) &= \int_B g_{20}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,dt,\\
a_{03}(s) &= \int_B g_{03}(s,t)\,dt + \int_B g_{11}(s,t)\,a_{02}(t)\,dt + \int_B g_{12}(s,t)\,g(t)\,dt + 2\int_B g_{20}(s,t)\,g(t)\,a_{02}(t)\,dt + \\
&\quad + \int_B g_{21}(s,t)\,g^2(t)\,dt + \int_B g_{30}(s,t)\,g^3(t)\,dt,\\
a_{12}(s) &= \int_B g_{11}(s,t)\,a_{11}(t)\,dt + \int_B g_{12}(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt + 2\int_B g_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{02}(t) + g(t)\,a_{11}(t)]\,dt + \\
&\quad + 2\int_B g_{21}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g(t)\,dt + 3\int_B g_{30}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t)\,dt,
\end{aligned}\right\} \tag{10.16}$$

$$
\left.\begin{aligned}
a_{21}(s) &= \int_B g_{11}(s,t)\,a_{20}(t)\,dt + \\
&\quad + 2\int_B g_{20}(s,t)\,[g(t)\,a_{20}(t) + \varphi_1(t)\,a_{11}(t)]\,dt + \\
&\quad + \int_B g_{21}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,dt + 3\int_B g_{30}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t)\,dt, \\
a_{30}(s) &= 2\int_B g_{20}(s,t)\,\varphi_1(t)\,a_{20}(t)\,dt + \\
&\qquad + \int_B g_{30}(s,t)\,\varphi_1^3(t)\,dt, \\
a_{04}(s) &= \int_B g_{04}(s,t)\,dt + \int_B g_{11}(s,t)\,a_{03}(t)\,dt + \\
&\quad + \int_B g_{12}(s,t)\,a_{02}(t)\,dt + \int_B g_{13}(s,t)\,g(t)\,dt + \\
&\quad + \int_B g_{20}(s,t)\,[a_{02}^2(t) + 2g(t)\,a_{03}(t)]\,dt + \\
&\quad + 2\int_B g_{21}(s,t)\,g(t)\,a_{02}(t)\,dt + \int_B g_{22}(s,t)\,g^2(t)\,dt + \\
&\quad + 3\int_B g_{30}(s,t)\,g^2(t)\,a_{02}(t)\,dt + \\
&\quad + \int_B g_{31}(s,t)\,g^3(t)\,dt + \int_B g_{40}(s,t)\,g^4(t)\,dt, \\
a_{13}(s) &= \int_B g_{11}(s,t)\,a_{12}(t)\,dt + \int_B g_{12}(s,t)\,a_{11}(t)\,dt + \\
&\quad + \int_B g_{13}(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt + \\
&\quad + 2\int_B g_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{03}(t) + g(t)\,a_{12}(t) + \\
&\qquad + a_{11}(t)\,a_{02}(t)]\,dt + \\
&\quad + 2\int_B g_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{02}(t) + g(t)\,a_{11}(t)]\,dt + \\
&\quad + 2\int_B g_{22}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g(t)\,dt + \\
&\quad + 3\int_B g_{30}(s,t)[g^2(t)\,a_{11}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{02}(t)]\,dt +
\end{aligned}\right\}\qquad (10.16)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+3\int_B g_{31}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t)\,dt+\\
&\qquad\qquad\qquad+4\int_B g_{40}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^3(t)\,dt,\\
&a_{31}(s)=\int_B g_{11}(s,t)\,a_{30}(t)\,dt+\\
&\qquad+2\int_B g_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{21}(t)+g(t)\,a_{30}(t)+\\
&+a_{20}(t)\,a_{11}(t)]\,dt+2\int_B g_{21}(s,t)\,\varphi_1(t)\,a_{20}(t)\,dt+\\
&+3\int_B g_{30}(s,t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{11}(t)+2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{20}(t)]\,dt+\\
&\quad+\int_B g_{31}(s,t)\,\varphi_1^3(t)\,dt+4\int_B g_{40}(s,t)\,\varphi_1^3(t)\,g(t)\,dt,\\
&a_{22}(s)=\int_B g_{11}(s,t)\,a_{21}(t)\,dt+\int_B g_{12}(s,t)\,a_{20}(t)\,dt+\\
&+\int_B g_{20}(s,t)[a_{11}^2(t)+2\,\varphi_1(t)\,a_{12}(t)+2g(t)\,a_{21}(t)+\\
&\quad+2a_{20}(t)\,a_{02}(t)]\,dt+2\int_B g_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{11}(t)+\\
&\qquad+g(t)\,a_{20}(t)]\,dt+\int_B g_{22}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,dt+\\
&\qquad+3\int_B g_{30}(s,t)\,[g^2(t)\,a_{20}(t)+\varphi_1^2(t)\,a_{02}(t)+\\
&+2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{11}(t)]\,dt+3\int_B g_{31}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t)\,dt+\\
&\qquad\qquad\qquad+6\int_B g_{40}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g^2(t)\,dt,\\
&a_{40}(s)=\int_B g_{20}(s,t)\,[a_{20}^2(t)+2\varphi_1(t)\,a_{30}(t)]\,dt+\\
&+3\int_B g_{30}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,a_{20}(t)\,dt+\int_B g_{40}(s,t)\,\varphi_1^4(t)\,dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{ik}(s)=\Phi(g_{\mu\nu},\varphi_1,g,a_{20},a_{11},a_{02},\ldots,a_{i-1,k},a_{i,k-1}),
\end{aligned}
\right\}\quad(10.16)
$$

где Ф — некоторый функционал указанных функциональных аргументов.

Для определения возможных значений ξ, входящих в решение (10.14) уравнения (10.4), мы подставим (10.14) в (10.11). Получим тогда

$$\xi = \xi \int_B \overline{\varphi_1(t)}\, \varphi_1(t)\, dt + \lambda \int_B g(t)\, \overline{\varphi_1(t)}\, dt + \sum_{i+k \geqslant 2} \xi^i \lambda^k \int_B a_{ik}(t)\, \overline{\varphi_1(t)}\, dt.$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} L_{mn} &= \int_B a_{mn}(t)\, \overline{\varphi_1(t)}\, dt \quad (m+n \geqslant 2), \\ L_{01} &= \int_B g(t)\, \overline{\varphi_1(t)}\, dt \end{aligned}\right\} \tag{10.17}$$

и учитывая, что

$$\int_B \varphi_1(t)\, \overline{\varphi_1(t)}\, dt = 1,$$

мы приходим к уравнению разветвления в одномерном случае

$$\sum_{m=2}^{\infty} L_{m0} \xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \sum_{n=1}^{\infty} L_{mn} \lambda^n = 0. \tag{10.18}$$

10.4. Многомерный случай ветвления. Рассмотрим теперь случай, когда 1 является p-кратным собственным значением оператора T (см. (10.6)). Пусть $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s), \ldots$ $\ldots, \varphi_p(s)$ — ортонормированные собственные функции оператора T, принадлежащие собственному числу 1, и $\psi_1(s)$, $\psi_2(s), \ldots, \psi_p(s)$ — ортонормированные собственные функции оператора T^* (см. (10.6′)), принадлежащие тому же числу 1. Так же, как в п. 8.3, рассмотрим ядро

$$E(s, t) = K(s, t) - \sum_{i=1}^{p} \psi_i(s)\, \overline{\varphi_i(t)} \tag{8.8}$$

и положим (см. п. 8.5)

$$\xi_i = \int_B u(t)\, \overline{\varphi_i(t)}\, dt. \tag{8.22}$$

Тогда уравнение (10.4) примет вид

$$u(s)-\int_B E(s,t)\,u(t)\,dt=\sum_{i=1}^{p}\xi_i\psi_i(s)+\lambda f(s)+\\+\sum_{m+n\geqslant 2}\lambda^n\int_B B_{mn}(s,t)\,u^m(t)\,dt.$$

По лемме Шмидта существует резольвента Фредгольма $R(s,t)$ ядра $E(s,t)$, так что согласно формуле (8.4) последнее уравнение преобразуется к виду

$$u(s)=\sum_{i=1}^{p}\Big[\psi_i(s)+\int_B R(s,t)\,\psi_i(t)\,dt\Big]\xi_i+\\+\lambda\Big[f(s)+\int_B R(s,t)\,f(t)\,dt\Big]+\sum_{m+n\geqslant 2}\lambda^n\int_B\Big[B_{mn}(s,t)+\\+\int_B R(s,\tau)\,B_{mn}(\tau,t)\,d\tau\Big]u^m(t)\,dt.$$

Используя теперь формулу (8.27) и обозначения (10.13), мы приходим к уравнению

$$u(s)=\sum_{i=1}^{p}\xi_i\varphi_i(s)+\lambda g(s)+\sum_{m+n\geqslant 2}\lambda^n\int_B g_{mn}(s,t)\,u^m(t)\,dt, \tag{10.19}$$

которое, как мы видели в п. 8.5, имеет при достаточно малых фиксированных $|\lambda|$ и $|\xi_i|$ единственное непрерывное решение, и оно представимо в виде равномерно сходящегося ряда

$$u(s)=\sum_{\nu=1}^{p}\xi_\nu\varphi_\nu(s)+\lambda g(s)+\sum_{n_1+\ldots+n_p+k\geqslant 2}a_{n_1n_2\ldots n_pk}(s)\,\xi_1^{n_1}\ldots\xi_p^{n_p}\lambda^k \tag{10.20}$$

с непрерывными коэффициентами $a_{n_1\cdots n_pk}(s)$.

Для нахождения $a_{n_1\cdots n_pk}(s)$ можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов, т. е. подставить (10.20) в (10.19) и сравнить коэффициенты при одинаковых одночленах относительно $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, \lambda$.

В качестве примера мы вычислим первые коэффициенты решения (10.20) в предположении, что $p = 2$. В этом случае (10.20) принимает вид

$$u(s)=\xi_1\varphi_1(s)+\xi_2\varphi_2(s)+\lambda g(s)+\sum_{i+k+l\geqslant 2} a_{ikl}(s)\,\xi_1^i\xi_2^k\lambda^l. \tag{10.20'}$$

Подставляя данное выражение в (10.19) и отбрасывая линейные члены, получим

$$\sum_{i+k+l\geqslant 2} a_{ikl}(s)\,\xi_1^i\xi_2^k\lambda^l = \sum_{m+n\geqslant 2}\lambda^n\int_B g_{mn}(s,t)\,[\xi_1\varphi_1(t)+\xi_2\varphi_2(t)+ + \lambda g(t)+\sum_{p+q+r\geqslant 2} a_{pqr}(t)\,\xi_1^p\xi_2^q\lambda^r]^m dt. \tag{10.21}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых одночленах относительно ξ_1, ξ_2 и λ, мы находим следующую рекуррентную систему для $a_{ikl}(s)$:

$$\left.\begin{aligned}
a_{011}(s) &= \int\{g_{11}(s,t)\,\varphi_2(t)+2g_{20}(s,t)\,\varphi_2(t)\,g(t)\}\,dt,\\
a_{101}(s) &= \int_B\{g_{11}(s,t)\,\varphi_1(t)+\\
&\qquad\qquad +2g_{20}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g(t)\}\,dt,\\
a_{110}(s) &= 2\int_B g_{20}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,dt,\\
a_{200}(s) &= \int_B g_{20}(s,t)\varphi_1^2(t)\,dt,\\
a_{020}(s) &= \int_B g_{20}(s,t)\varphi_2^2(t)\,dt,\\
a_{002}(s) &= \int_B\{g_{02}(s,t)+g_{11}(s,t)\,g(t)+\\
&\qquad\qquad +g_{20}(s,t)\,g^2(t)\}\,dt,\\
a_{111}(s) &= \int_B\{g_{11}(s,t)\,a_{110}(t)+\\
&+2g_{12}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)+2g_{20}(s,t)\,\varphi_1(t)\,a_{011}(t)+\\
&+2g_{20}(s,t)\,\varphi_2(t)\,a_{101}(t)+2g_{20}(s,t)\,g(t)\,a_{110}(t)+\\
&\qquad +2g_{21}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)+\\
&\qquad\qquad +6g_{30}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g(t)\}\,dt,
\end{aligned}\right\} \tag{10.22}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{120}(s) &= \int_B \{2g_{20}(s,t)\,\varphi_1(t)\,a_{020}(t) + \\
&\qquad + 2g_{20}(s,t)\,\varphi_2(t)\,a_{110}(t) + \\
&\qquad\qquad + 3g_{30}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t)\}\,dt, \\
a_{102}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t)\,a_{101}(t) + g_{12}(s,t)\,\varphi_1(t) + \\
&\quad + 2g_{20}(s,t)\,\varphi_1(t)\,a_{002}(t) + 2g_{20}(s,t)\,g(t)\,a_{101}(t) + \\
&\quad + 2g_{21}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g(t) + 3g_{30}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t)\}\,dt, \\
a_{012}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t)\,a_{011}(t) + g_{12}(s,t)\,\varphi_2(t) + \\
&\quad + 2g_{20}(s,t)\,[\varphi_2(t)\,a_{002}(t) + g(t)\,a_{011}(t)] + \\
&\quad + 2g_{21}(s,t)\,\varphi_2(t)\,g(t) + 3g_{30}(s,t)\,\varphi_2(t)\,g^2(t)\}\,dt, \\
a_{021}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t)\,a_{020}(t) + \\
&\quad + 2g_{20}(s,t)\,[\varphi_2(t)\,a_{011}(t) + g(t)\,a_{020}(t)] + \\
&\quad + g_{21}(s,t)\,\varphi_2^2(t) + 3g_{30}(s,t)\,\varphi_2^2(t)\,g(t)\}\,dt, \\
a_{201}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t)\,a_{200}(t) + \\
&\quad + 2g_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{101}(t) + g(t)\,a_{200}(t)] + \\
&\quad + g_{21}(s,t)\,\varphi_1^2(t) + 3g_{30}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t)\}\,dt, \\
a_{210}(s) &= \int_B \{2g_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{110}(t) + \\
&\quad + \varphi_2(t)\,a_{200}(t)] + 3g_{30}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t)\}\,dt, \\
a_{300}(s) &= \int_B \{2g_{20}(s,t)\,\varphi_1(t)\,a_{200}(t) + \\
&\qquad\qquad + g_{30}(s,t)\,\varphi_1^3(t)\}\,dt, \\
a_{030}(s) &= \int_B \{2g_{20}(s,t)\,\varphi_2(t)\,a_{020}(t) + \\
&\qquad\qquad + g_{30}(s,t)\,\varphi_2^3(t)\}\,dt, \\
a_{003}(s) &= \int_B \{g_{03}(s,t) + g_{11}(s,t)\,a_{002}(t) + \\
&\quad + g_{12}(s,t)\,g(t) + 2g_{20}(s,t)\,g(t)\,a_{002}(t) + \\
&\quad + g_{21}(s,t)\,g^2(t) + g_{30}(s,t)\,g^3(t)\}\,dt,
\end{aligned}\right\} \tag{10.22}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{004}(s) &= \int\limits_B \{g_{04}(s,t) + g_{11}(s,t)\,a_{003}(t) + \\
&+ g_{12}(s,t)\,a_{002}(t) + g_{13}(s,t)\,g(t) + g_{20}(s,t)\,[a_{002}^2(t) + \\
&+ 2g(t)\,a_{003}(t)] + 2g_{21}(s,t)\,g(t)\,a_{002}(t) + \\
&+ g_{22}(s,t)\,g^2(t) + 3g_{30}(s,t)\,g^2(t)\,a_{002}(t) + \\
&+ g_{31}(s,t)\,g^3(t) + g_{40}(s,t)\,g^4(t)\}\,dt, \\
a_{040}(s) &= \int\limits_B \{g_{20}(s,t)\,[a_{020}^2(t) + 2\varphi_2(t)\,a_{030}(t)] + \\
&+ 3g_{30}(s,t)\,\varphi_2^2(t)\,a_{020}(t) + g_{40}(s,t)\,\varphi_2^4(t)\}\,dt, \\
a_{400}(s) &= \int\limits_B \{g_{20}(s,t)\,[a_{200}^2(t) + 2\varphi_1(t)\,a_{300}(t)] + \\
&+ 3g_{30}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,a_{200}(t) + g_{40}(s,t)\,\varphi_1^4(t)\}\,dt, \\
a_{022}(s) &= \int\limits_B \{g_{11}(s,t)\,a_{021}(t) + g_{12}(s,t)\,a_{020}(t) + \\
&+ g_{20}(s,t)\,[a_{011}^2(t) + 2g(t)\,a_{021}(t) + 2\varphi_2(t)\,a_{012}(t) + \\
&+ 2a_{020}(t)\,a_{002}(t)] + 2g_{21}(s,t)\,[\varphi_2(t)\,a_{011}(t) + \\
&+ g(t)\,a_{020}(t)] + g_{22}(s,t)\,\varphi_2^2(t) + \\
&+ 3g_{30}(s,t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{002}(t) + g^2(t)\,a_{020}(t) + \\
&+ 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{011}(t)] + 3g_{31}(s,t)\,\varphi_2^2(t)\,g(t) + \\
&+ 6g_{40}(s,t)\,\varphi_2^2(t)\,g^2(t)\}\,dt, \\
a_{202}(s) &= \int\limits_B \{g_{11}(s,t)\,a_{201}(t) + g_{12}(s,t)\,a_{200}(t) + \\
&+ g_{20}(s,t)\,[a_{101}^2(t) + 2g(t)\,a_{201}(t) + \\
&+ 2\varphi_1(t)\,a_{102}(t) + 2a_{200}(t)\,a_{002}(t)] + \\
&+ 2g_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{101}(t) + g(t)\,a_{200}(t)] + \\
&+ g_{22}(s,t)\,\varphi_1^2(t) + 3g_{30}(s,t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{002}(t) + \\
&+ g^2(t)\,a_{200}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{101}(t)] + \\
&+ 3g_{31}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t) + \\
&+ 6g_{40}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g^2(t)\}\,dt, \\
a_{220}(s) &= \int\limits_B \{2g_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{120}(t) + \varphi_2(t)\,a_{210}(t) + \\
&+ a_{200}(t)\,a_{020}(t)] + g_{20}(s,t)\,a_{110}^2(t) +
\end{aligned}\right\} \quad (10.22)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+3g_{30}(s,t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{020}(t)+\varphi_2^2(t)\,a_{200}(t)+\\
&+2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{110}(t)]+6g_{40}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2^2(t)\}\,dt,\\
a_{112}(s)=\int_B&\{g_{11}(s,t)\,a_{111}(t)+g_{12}(s,t)\,a_{110}(t)+\\
&+2g_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{012}(t)+\varphi_2(t)\,a_{102}(t)+\\
&+g(t)\,a_{111}(t)+a_{101}(t)\,a_{011}(t)+a_{110}(t)\,a_{002}(t)]+\\
&+2g_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{011}(t)+\varphi_2(t)\,a_{101}(t)+\\
&+g(t)\,a_{110}(t)]+2g_{22}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)+\\
&+3g_{30}(s,t)\,[g^2(t)\,a_{110}(t)+2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{002}(t)+\\
&+2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{011}(t)+2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{101}(t)]+\\
&+6g_{31}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g(t)+\\
&+12g_{40}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g^2(t)\}\,dt,\\
a_{121}(s)=\int_B&\{g_{11}(s,t)\,a_{120}(t)+2g_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\times\\
&\times a_{021}(t)+\varphi_2(t)\,a_{111}(t)+g(t)\,a_{120}(t)+\\
&+a_{110}(t)\,a_{011}(t)+a_{101}(t)\,a_{020}(t)]+\\
&+2g_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{020}(t)+\varphi_2(t)\,a_{110}(t)]+\\
&+3g_{30}(s,t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{101}(t)+\\
&+2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{011}(t)+2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{110}(t)+\\
&+2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{020}(t)]+3g_{31}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t)+\\
&+12g_{40}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t)\,g(t)\}\,dt,\\
a_{211}(s)=\int_B&\{g_{11}(s,t)\,a_{210}(t)+2g_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\times\\
&\times a_{111}(t)+\varphi_2(t)\,a_{201}(t)+g(t)\,a_{210}(t)+\\
&+a_{110}(t)\,a_{101}(t)+a_{200}(t)\,a_{011}(t)]+\\
&+2g_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{110}(t)+\varphi_2(t)\,a_{200}(t)]+\\
&+3g_{30}(s,t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{011}(t)+\\
&+2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{101}(t)+2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{110}(t)+\\
&+2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{200}(t)]+3g_{31}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t)+\\
&+12g_{40}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t)\,g(t)\}\,dt,
\end{aligned}
\right\}
\qquad (10.22)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{013}(s) = \int\limits_B \{ & g_{11}(s,t)\, a_{012}(t) + g_{12}(s,t)\, a_{011}(t) + \\
& + g_{13}(s,t)\, \varphi_2(t) + 2g_{20}(s,t)\, [\varphi_2(t)\, a_{003}(t) + \\
& + g(t)\, a_{012}(t) + a_{011}(t)\, a_{002}(t)] + 2g_{21}(s,t) \times \\
& \times [\varphi_2(t)\, a_{002}(t) + g(t)\, a_{011}(t)] + 2g_{22}(s,t) \times \\
& \times \varphi_2(t)\, g(t) + 3g_{30}(s,t)\, [g^2(t)\, a_{011}(t) + \\
& + 2\varphi_2(t)\, g(t)\, a_{002}(t)] + 3g_{31}(s,t)\, \varphi_2(t)\, g^2(t) + \\
& + 4g_{40}(s,t)\, \varphi_2(t)\, g^3(t) \}\, dt, \\
a_{031}(s) = \int\limits_B \{ & g_{11}(s,t)\, a_{030}(t) + 2g_{20}(s,t)\, [\varphi_2(t) \times \\
& \times a_{021}(t) + g(t)\, a_{030}(t) + a_{011}(t)\, a_{020}(t)] + \\
& + 2g_{21}(s,t)\, \varphi_2(t)\, a_{020}(t) + 3g_{30}(s,t) \times \\
& \times [\varphi_2^2(t)\, a_{011}(t) + 2\varphi_2(t)\, g(t)\, a_{020}(t)] + \\
& + g_{31}(s,t)\, \varphi_2^3(t) + 4g_{40}(s,t)\, \varphi_2^3(t)\, g(t) \}\, dt, \\
a_{103}(s) = \int\limits_B \{ & g_{11}(s,t)\, a_{102}(t) + g_{12}(s,t)\, a_{101}(t) + \\
& + g_{13}(s,t)\, \varphi_1(t) + 2g_{20}(s,t)\, [\varphi_1(t)\, a_{003}(t) + \\
& + g(t)\, a_{102}(t) + a_{101}(t)\, a_{002}(t)] + 2g_{21}(s,t) \times \\
& \times [\varphi_1(t)\, a_{002}(t) + g(t)\, a_{101}(t)] + 2g_{22}(s,t) \times \\
& \times \varphi_1(t)\, g(t) + 3g_{30}(s,t)\, [g^2(t)\, a_{101}(t) + \\
& + 2\varphi_1(t)\, g(t)\, a_{002}(t)] + 3g_{31}(s,t)\, \varphi_1(t)\, g^2(t) + \\
& + 4g_{40}(s,t)\, \varphi_1(t)\, g^3(t) \}\, dt, \\
a_{301}(s) = \int\limits_B \{ & g_{11}(s,t)\, a_{300}(t) + 2g_{20}(s,t)\, [\varphi_1(t) \times \\
& \times a_{201}(t) + g(t)\, a_{300}(t) + a_{101}(t)\, a_{200}(t)] + \\
& + 2g_{21}(s,t)\, \varphi_1(t)\, a_{200}(t) + 3g_{30}(s,t)\, [\varphi_1^2(t) \times \\
& \times a_{101}(t) + 2\varphi_1(t)\, g(t)\, a_{200}(t)] + g_{31}(s,t) \times \\
& \times \varphi_1^3(t) + 4g_{40}(s,t)\, \varphi_1^3(t)\, g(t) \}\, dt, \\
a_{130}(s) = \int\limits_B \{ & 2g_{20}(s,t)\, [\varphi_1(t)\, a_{030}(t) + \varphi_2(t) \times \\
& \times a_{120}(t) + a_{110}(t)\, a_{020}(t)] + 3g_{30}(s,t) \times \\
& \times [\varphi_2^2(t)\, a_{110}(t) + 2\varphi_1(t)\, \varphi_2(t)\, a_{020}(t)] + \\
& + 4g_{40}(s,t)\, \varphi_1(t)\, \varphi_2^3(t) \}\, dt,
\end{aligned}
\right\} \qquad (10.22)
$$

$$\left.\begin{aligned} a_{310}(s) = \int\limits_B \{2g_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{210}(t) + {} \\ + \varphi_2(t)a_{300}(t) + a_{110}(t)\,a_{200}(t)] + 3g_{30}(s,t)\times \\ \times[\varphi_1^2(t)\,a_{110}(t) + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{200}(t)] + {} \\ + 4g_{40}(s,t)\,\varphi_1^3(t)\,\varphi_2(t)\}\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{10.22}$$

Для определения возможных значений ξ_ν, входящих в формулу (10.20), мы подставим (10.20) в (8.22). Учитывая, что функции $\varphi_i(s)$ ортонормальны, получаем

$$0 = \lambda\int\limits_B g(t)\overline{\varphi_i(t)}\,dt + \sum_{n_1+\ldots+n_p+k\geqslant 2} \xi_1^{n_1}\ldots\xi_p^{n_p}\lambda^k \int\limits_B a_{n_1\ldots n_pk}(t)\,\overline{\varphi_i(t)}\,dt$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p).$$

Эти равенства после введения обозначений

$$L^{(i)}_{n_1n_2\ldots n_pk} = \int\limits_B a_{n_1\ldots n_pk}(t)\,\overline{\varphi_i(t)}\,dt, \tag{10.23}$$

$$L^{(i)}_{00\ldots 01} = \int\limits_B g(t)\,\overline{\varphi_i(t)}\,dt$$

принимают вид

$$\sum_{n_1+\ldots+n_p\geqslant 2} L^{(i)}_{n_1\ldots n_p0}\,\xi_1^{n_1}\ldots\xi_p^{n_p} + \sum_{n_1+\ldots+n_p\geqslant 0}\xi_1^{n_1}\ldots\xi_p^{n_p}\sum_{k\geqslant 1} L^{(i)}_{n_1\ldots n_pk}\lambda^k = 0 \tag{10.24}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p).$$

Данная система, как было отмечено раньше, называется уравнением разветвления Ляпунова — Шмидта. Таким образом, возможные значения ξ_i, для которых формула (10.20) определяет решения уравнения (10.19), представляют собою малые решения системы (10.24), если эта система совместна относительно малых решений. Для решения вопроса о совместности системы (10.24) и о нахождении ее малых решений мы в дальнейшем воспользуемся результатами § 6. Таким путем может быть решен вопрос о числе и виде всех малых решений уравнения (10.19), когда 1 является p-кратным собственным значением оператора T. Прибавляя к каждому такому решению решение $x_0(s)$ (см. уравнение (10.2)), мы получим семейство всех решений уравнения (10.1), стремящихся к $x_0(s)$ при $\mu\to\mu_0$. Эти вопросы мы изучим в следующем параграфе, а пока займемся вычислением коэффициентов $a_{n_1 \ldots n_p k}(s)$ для наиболее важных частных случаев уравнения (10.1).

10.5 Частный случай. Здесь мы приведем коэффициенты, входящие в формулы (10.14), и (10.20)′, для частного случая (10.5) уравнения (10.1), т. е. когда

$$G(s, t, u, \mu) = \mu G(s, t, u). \tag{10.5}$$

В этом случае равенство (10.3) принимает вид

$$(\mu_0 + \lambda) G(s, t, x_0(t) + u) = (\mu_0 + \lambda) \sum_{m=0}^{\infty} A_m(s, t) u^m =$$
$$= \sum_{m+n \geqslant 0} \mu_0^{1-n} \lambda^n A_m(s, t) u^m = \sum_{m+n \geqslant 0} B_{mn}(s, t) u^m \lambda^n$$
$$(n = 0, 1).$$

Следовательно,

$$\left.\begin{array}{l} B_{mn}(s, t) = \mu_0^{1-n} A_m(s, t) \\ (n = 0, 1;\ m = 0, 1, 2, \ldots), \quad A_0(s, t) = G(s, t, x_0(t)), \\ K(s, t) = B_{10}(s, t) = \mu_0 A_1(s, t), \\ f(s) = \int\limits_B G(s, t, x_0(t))\, dt = \int\limits_B A_0(s, t)\, dt, \\ B_{mn}(s, t) \equiv 0 \text{ при } n \geqslant 2, \end{array}\right\} \tag{10.25}$$

и формулы (10.13) принимают вид

$$\left.\begin{array}{l} g(s) = f(s) + \int\limits_B R(s, t) f(t)\, dt, \\ g_{mn}(s, t) = \mu_0^{1-n} \left[A_m(s, t) + \int\limits_B R(s, \tau) A_m(\tau, t)\, d\tau \right] \\ \qquad (n = 0, 1;\ m + n = 2, 3, \ldots), \end{array}\right\} \tag{10.26}$$

причем $g_{mn}(s, t) \equiv 0$ при $n \geqslant 2$.

Отсюда и из (10.16) следует

$$\left.\begin{array}{l} a_{02}(s) = \int\limits_B \{g_{11}(s, t) + g_{20}(s, t) g(t)\} g(t)\, dt, \\ a_{11}(s) = \int\limits_B \{g_{11}(s, t) + 2 g_{20}(s, t) g(t)\} \varphi_1(t)\, dt, \\ a_{20}(s) = \int\limits_B g_{20}(s, t) \varphi_1^2(t)\, dt, \end{array}\right\} \tag{10.27}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{03}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t)\,a_{02}(t) + 2g_{20}(s,t)\,g(t)\,a_{02}(t) + \\
&\qquad + g_{21}(s,t)\,g^2(t) + g_{30}(s,t)\,g^3(t)\}\,dt,\\
a_{12}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t)\,a_{11}(t) + 2g_{20}(s,t)\times\\
&\quad \times[\varphi_1(t)\,a_{02}(t) + g(t)\,a_{11}(t)] + \\
&\quad + 2g_{21}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g(t) + 3g_{30}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t)\}\,dt,\\
a_{21}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t)\,a_{20}(t) + 2g_{20}(s,t)\,[g(t)\,a_{20}(t) + \\
&\quad + \varphi_1(t)\,a_{11}(t)] + g_{21}(s,t)\,\varphi_1^2(t) + \\
&\qquad + 3g_{30}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t)\}\,dt,\\
a_{30}(s) &= \int_B \{2g_{20}(s,t)\,a_{20}(t) + \\
&\qquad + g_{30}(s,t)\varphi_1^2(t)\}\,\varphi_1(t)\,dt,\\
a_{04}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t)a_{03}(t) + g_{20}(s,t)\,[a_{02}^2(t) + \\
&\quad + 2g(t)\,a_{03}(t)] + 2g_{21}(s,t)\,g(t)\,a_{02}(t) + \\
&\quad + 3g_{30}(s,t)\,g^2(t)\,a_{02}(t) + g_{31}(s,t)\,g^3(t) + \\
&\qquad + g_{40}(s,t)\,g^4(t)\}\,dt,\\
a_{13}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t)\,a_{12}(t) + 2g_{20}(s,t)\times\\
&\quad \times[\varphi_1(t)\,a_{03}(t) + g(t)\,a_{12}(t) + a_{11}(t)\,a_{02}(t)] + \\
&\quad + 2g_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{02}(t) + g(t)\,a_{11}(t)] + \\
&\quad + 3g_{30}(s,t)\,[g^2(t)\,a_{11}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{02}(t)] + \\
&\quad + 3g_{31}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t) + 4g_{40}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^3(t)\}\,dt,\\
a_{22}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t)\,a_{21}(t) + g_{20}(s,t)\,[a_{11}^2(t) + \\
&\quad + 2\varphi_1(t)\,a_{12}(t) + 2g(t)\,a_{21}(t) + 2a_{20}(t)\,a_{02}(t)] + \\
&\quad + 2g_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{11}(t) + g(t)\,a_{20}(t)] + \\
&\quad + 3g_{30}(s,t)\,[g^2(t)\,a_{20}(t) + \varphi_1^2(t)\,a_{02}(t) + \\
&\quad + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{11}(t)] + 3g_{31}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t) + \\
&\qquad + 6g_{40}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g^2(t)\}\,dt,
\end{aligned}\right\}\qquad (10.27)$$

$$
\left.\begin{aligned}
a_{31}(s) = \int_B \{ & g_{11}(s,t)\,a_{30}(t) + 2g_{20}(s,t)\times \\
& \times[\varphi_1(t)\,a_{21}(t) + g(t)\,a_{30}(t) + a_{20}(t)\,a_{11}(t)] + \\
& + 2g_{21}(s,t)\,\varphi_1(t)\,a_{20}(t) + 3g_{30}(s,t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{11}(t) + \\
& + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{20}(t)] + g_{31}(s,t)\,\varphi_1^3(t) + \\
& + 4g_{40}(s,t)\,\varphi_1^3(t)\,g(t)\}\,dt, \\
a_{40}(s) = \int_B \{ & g_{20}(s,t)[a_{20}^2(t) + 2\varphi_1(t)\,a_{30}(t)] + \\
& + 3g_{30}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,a_{20}(t) + g_{40}(s,t)\,\varphi_1^4(t)\}\,dt.
\end{aligned}\right\} \qquad (10.27)
$$

Далее, формулы (10.22) принимают в данном частном случае вид

$$
\left.\begin{aligned}
a_{011}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t)\,\varphi_2(t) + \\
&\qquad + 2g_{20}(s,t)\,\varphi_2(t)\,g(t)\}\,dt, \\
a_{101}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t) + 2g_{20}(s,t)\,g(t)\}\,\varphi_1(t)\,dt, \\
a_{110}(s) &= 2\int_B g_{20}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,dt, \\
a_{200}(s) &= \int_B g_{20}(s,t)\varphi_1^2(t)\,dt, \\
a_{020}(s) &= \int_B g_{20}(s,t)\,\varphi_2^2(t)\,dt, \\
a_{002}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t) + g_{20}(s,t)\,g(t)\}\,g(t)\,dt, \\
a_{111}(s) &= \int_B \{g_{11}(s,t)\,a_{110}(t) + 2g_{20}(s,t)\times \\
&\qquad \times[\varphi_1(t)\,a_{011}(t) + \varphi_2(t)\,a_{101}(t) + g(t)\,a_{110}(t)] + \\
&\qquad + 2g_{21}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t) + 6g_{30}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\times \\
&\qquad \times g(t)\}\,dt, \\
a_{120}(s) &= \int_B \{2g_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{020}(t) + \\
&\qquad + \varphi_2(t)\,a_{110}(t)] + 3g_{30}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t)\}\,dt,
\end{aligned}\right\} \qquad (10.28)
$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{102}(s) = \int_B \{ & g_{11}(s,\ t)\, a_{101}(t) + 2g_{20}(s,\ t) \times \\
& \times [g(t)\, a_{101}(t) + \varphi_1(t)\, a_{002}(t)] + \\
& + 2g_{21}(t)\, \varphi_1(t)\, g(t) + 3g_{30}(s,\ t)\, \varphi_1(t)\, g^2(t)\}\, dt, \\
a_{012}(s) = \int_B \{ & g_{11}(s,\ t)\, a_{011}(t) + 2g_{20}(s,\ t) \times \\
& \times [\varphi_2(t)\, a_{002}(t) + g(t)\, a_{011}(t)] + \\
& + 2g_{21}(s,\ t)\, \varphi_2(t)\, g(t) + 3g_{30}(s,\ t)\, \varphi_2(t)\, g^2(t)\}\, dt, \\
a_{021}(s) = \int_B \{ & g_{11}(s,\ t)\, a_{020}(t) + 2g_{20}(s,\ t) \times \\
& \times [\varphi_2(t)\, a_{011}(t) + g(t)\, a_{020}(t)] + \\
& + g_{21}(s,\ t)\, \varphi_2^2(t) + 3g_{30}(s,\ t)\, \varphi_2^2(t)\, g(t)\}\, dt, \\
a_{201}(s) = \int_B \{ & g_{11}(s,\ t)\, a_{200}(t) + 2g_{20}(s,\ t) \times \\
& \times [\varphi_1(t) a_{101}(t) + g(t)\, a_{200}(t)] + \\
& + g_{21}(s,\ t)\, \varphi_1^2(t) + 3g_{30}(s,\ t)\, \varphi_1^2(t)\, g(t)\}\, dt, \\
a_{210}(s) = \int_B \{ & 2g_{20}(s,\ t)\, [\varphi_1(t)\, a_{110}(t) + \\
& + \varphi_2(t)\, a_{200}(t)] + 3g_{30}(s,\ t)\, \varphi_1^2(t)\, \varphi_2(t)\}\, dt, \\
a_{300}(s) = \int_B \{ & 2g_{20}(s,\ t)\, \varphi_1(t)\, a_{200}(t) + \\
& + g_{30}(s,\ t)\, \varphi_1^3(t)\}\, dt, \\
a_{030}(s) = \int_B \{ & 2g_{20}(s,\ t)\, \varphi_2(t)\, a_{020}(t) + \\
& + g_{30}(s,\ t)\, \varphi_2^3(t)\}\, dt, \\
a_{003}(s) = \int_B \{ & g_{11}(s,t)\, a_{002}(t) + \\
& + 2g_{20}(s,\ t)\, g(t)\, a_{002}(t) + g_{21}(s,\ t)\, g^2(t) + \\
& + g_{30}(s,t)\, g^3(t)\}\, dt, \\
a_{004}(s) = \int_B \{ & g_{11}(s,\ t)\, a_{003}(t) + \\
& + g_{20}(s,\ t)\, [a_{002}^2(t) + 2g(t)\, a_{003}(t)] + \\
& + 2g_{21}(s,t)\, g(t)\, a_{002}(t) + 3g_{30}(s,\ t)\, g^2(t)\, a_{002}(t) + \\
& + g_{31}(s,\ t)\, g^3(t) + g_{40}(s,\ t)\, g^4(t)\}\, dt,
\end{aligned}\right\} \tag{10.28}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{040}(s) = \int\limits_B \{ &g_{20}(s,\ t)\,[a_{020}^2(t) + 2\varphi_2(t)\,a_{030}(t)] + \\
&+ 3g_{30}(s,\ t)\,\varphi_2^2(t)\,a_{020}(t) + g_{40}(s,\ t)\,\varphi_2^4(t)\}\,dt, \\
a_{400}(s) = \int\limits_B \{ &g_{20}(s,\ t)\,[a_{200}^2(t) + 2\varphi_1(t)\,a_{300}(t)] + \\
&+ 3g_{30}(s,\ t)\,\varphi_1^2(t)\,a_{200}(t) + g_{40}(s,\ t)\,\varphi_1^4(t)\}\,dt, \\
a_{022}(s) = \int\limits_B \{ &g_{11}(s,\ t)\,a_{021}(t) + g_{20}(s,\ t)\,[a_{011}^2(t) + \\
&+ 2\varphi_2(t)\,a_{012}(t) + 2g(t)\,a_{021}(t) + 2a_{020}(t)a_{202}(t)] + \\
&+ 2g_{21}(s,\ t)\,[\varphi_2(t)\,a_{011}(t) + g(t)\,a_{020}(t)] + \\
&+ 3g_{30}(s,\ t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{002}(t) + g^2(t)\,a_{020}(t) + \\
&+ 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{011}(t)] + 3g_{31}(s,\ t)\,\varphi_2^2(t)\,g(t) + \\
&+ 6g_{40}(s,t)\,\varphi_2^2(t)\,g^2(t)\}\,dt, \\
a_{202}(s) = \int\limits_B \{ &g_{11}(s,\ t)\,a_{201}(t) + g_{20}(s,\ t)\,[a_{101}^2(t) + \\
&+ 2\varphi_1(t)\,a_{102}(t) + 2g(t)\,a_{201}(t) + \\
&+ 2a_{200}(t)\,a_{002}(t)] + 2g_{21}(s,\ t)\,[\varphi_1(t)\,a_{101}(t) + \\
&+ g(t)\,a_{200}(t)] + 3g_{30}(s,\ t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{002}(t) + \\
&+ g^2(t)\,a_{200}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{101}(t)] + \\
&+ 3g_{31}(s,\ t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t) + 6g_{40}(s,\ t)\,\varphi_1^2(t)\,g^2(t)\}\,dt, \\
a_{220}(s) = \int\limits_B \{ &g_{20}(s,\ t)\,[a_{110}^2 + 2\varphi_1(t)\,a_{120}(t) + \\
&+ 2\varphi_2(t)\,a_{210}(t) + 2a_{200}(t)\,a_{020}(t)] + \\
&+ 3g_{30}(s,\ t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{020}(t) + \varphi_2^2(t)\,a_{200}(t) + \\
&+ 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{110}(t)] + 6g_{40}(s,\ t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2^2(t)\}\,dt, \\
a_{112}(s) = \int\limits_B \{ &g_{11}(s,\ t)\,a_{111}(t) + 2g_{20}(s,t) \times \\
&\times [\varphi_1(t)a_{012}(t) + \varphi_2(t)\,a_{102}(t) + g(t)\,a_{111}(t) + \\
&+ a_{101}(t)\,a_{011}(t) + a_{110}(t)\,a_{002}(t)] + 2g_{21}(s,\ t) \times \\
&\times [\varphi_1(t)\,a_{011}(t) + \varphi_2(t)\,a_{101}(t) + g(t)\,a_{110}(t)] + \\
&\times 3g_{30}(s,\ t)[g^2(t)\,a_{110}(t) + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{002}(t) + \\
&+ 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{011}(t) + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{101}(t)] +
\end{aligned}\right\} \quad (10.28)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+6g_{31}(s,\ t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g(t)+\\
&\qquad+12g_{40}(s,\ t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g^2(t)\}\,dt,\\
&a_{121}(s)=\int_B\{g_{11}(s,\ t)\,a_{120}(t)+2g_{20}(s,\ t)\times\\
&\times[\varphi_1(t)a_{021}(t)+\varphi_2(t)\,a_{111}(t)+g(t)\,a_{120}(t)+\\
&\qquad+a_{110}(t)\,a_{011}(t)+a_{101}(t)\,a_{020}(t)]+\\
&\quad+2g_{21}(s,\ t)\,[\varphi_1(t)\,a_{020}(t)+\varphi_2(t)\,a_{110}(t)]+\\
&+3g_{30}(s,t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{101}(t)+2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{011}(t)+\\
&\quad+2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{110}(t)+2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{020}(t)]+\\
&+3g_{31}(s,\ t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t)+12g_{40}(s,\ t)\,\varphi_1(t)\times\\
&\qquad\qquad\times\varphi_2^2(t)\,g(t)\}\,dt,\\
&a_{211}(s)=\int_B\{g_{11}(s,\ t)\,a_{210}(t)+2g_{20}(s,\ t)\times\\
&\quad\times[\varphi_1(t)a_{111}(t)+\varphi_2(t)\,a_{201}(t)+g(t)\,a_{210}(t)+\\
&+a_{110}(t)\,a_{101}(t)+a_{200}(t)\,a_{011}(t)]+2g_{21}(s,t)\times\\
&\quad\times[\varphi_1(t)\,a_{110}(t)+\varphi_2(t)\,a_{200}(t)]+3g_{30}(s,t)\times\\
&\quad\times[\varphi_1^2(t)+a_{011}(t)+2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{101}(t)+\\
&\quad+2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{110}(t)+2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{200}(t)]+\\
&\quad+3g_{31}(s,\ t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t)+12g_{40}(s,\ t)\,\varphi_1^2(t)\times\\
&\qquad\qquad\times\varphi_2(t)\,g(t)\}\,dt,\\
&a_{013}(s)=\int_B\{g_{11}(s,\ t)\,a_{012}(t)+2g_{20}(s,\ t)\times\\
&\times[\varphi_2(t)\,a_{003}(t)+g(t)\,a_{012}(t)+a_{011}(t)\,a_{002}(t)]+\\
&\quad+2g_{21}(s,\ t)\,[\varphi_2(t)\,a_{002}(t)+g(t)\,a_{011}(t)]+\\
&+3g_{30}(s,t)\,[g^2(t)\,a_{011}(t)+2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{002}(t)]+\\
&+3g_{31}(s,\ t)\,\varphi_2(t)\,g^2(t)+4g_{40}(s,\ t)\,\varphi_2(t)\,g^3(t)\}\,dt,\\
&a_{031}(s)=\int_B\{g_{11}(s,\ t)\,a_{030}(t)+2g_{20}(s,t)\times\\
&\times[\varphi_2(t)\,a_{021}(t)+g(t)\,a_{030}(t)+a_{011}(t)\,a_{020}(t)]+\\
&\quad+2g_{21}(s,\ t)\,\varphi_2(t)\,a_{020}(t)+3g_{30}(s,\ t)\times\\
&\quad\times[\varphi_2^2(t)\,a_{011}(t)+2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{020}(t)]+\\
&\qquad+g_{31}(s,\ t)\,\varphi_2^3(t)+4g_{40}(s,\ t)\,\varphi_2^3(t)\,g(t)\}\,dt,
\end{aligned}
\right\}
\qquad (10.28)
$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{103}(s) &= \int_B \{g_{11}(s, t)\, a_{102}(t) + 2g_{20}(s, t)\times\\
&\times[\varphi_1(t)\, a_{003}(t) + g(t)\, a_{102}(t) + a_{101}(t)\, a_{002}(t)] +\\
&+ 2g_{21}(s, t)[\varphi_1(t)\, a_{002}(t) + g(t)\, a_{101}(t)] +\\
&+ 3g_{30}(s,t)[g^2(t)\, a_{101}(t) + 2\varphi_1(t)\, g(t)\, a_{002}(t)] +\\
&+ 3g_{31}(s, t)\,\varphi_1(t)\, g^2(t) + 4g_{40}(s, t)\,\varphi_1(t)\, g^3(t)\}\, dt,\\
a_{301}(s) &= \int_B \{g_{11}(s, t)\, a_{300}(t) + 2g_{20}(s,t)\times\\
&\times[\varphi_1(t)\, a_{201}(t) + g(t)\, a_{300}(t) + a_{101}(t)\, a_{200}(t)] +\\
&+ 2g_{21}(s, t)\,\varphi_1(t)\, a_{200}(t) + 3g_{30}(s, t)\times\\
&\times[\varphi_1^2(t)\, a_{101}(t) + 2\varphi_1(t)\, g(t)\, a_{200}(t)] +\\
&+ g_{31}(s, t)\,\varphi_1^3(t) + 4g_{30}(s, t)\,\varphi_1^3(t)\, g(t)\}\, dt,\\
a_{130}(s) &= \int_B \{2g_{20}(s, t)[\varphi_1(t)\, a_{030}(t) + \varphi_2(t)\, a_{120}(t)\\
&+ a_{110}(t)\, a_{020}(t)] + 3g_{30}(s, t)[\varphi_2^2(t)\, a_{110}(t)\\
&+ 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\, a_{020}(t)] + 4g_{40}(s, t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^3(t)\}\, dt,\\
a_{310}(s) &= \int_B \{2g_{20}(s, t)[\varphi_1(t)\, a_{210}(t) + \varphi_2(t)\, a_{300}(t) +\\
&+ a_{110}(t)\, a_{200}(t)] + 3g_{30}(s, t)[\varphi_1^2(t)\, a_{110}(t) +\\
&2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\, a_{200}(t)] + 4g_{40}(s, t)\,\varphi_1^3(t)\,\varphi_2(t)\}\, dt.
\end{aligned}\right\} \tag{10.28}$$

10.6. Уравнение Гаммерштейна. Здесь мы приведем коэффициенты, входящие в формулы (10.14) и (10.20′), для нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна.

Наиболее важным частным случаем уравнения (10.1) является уравнение Гаммерштейна

$$x(s) = \mu \int_B C(s, t)\, f(x(t), t)\, dt. \tag{10.1′}$$

Равенства (10.2) и (10.3) принимают в данном случае вид

$$x_0(s) = \mu_0 \int_B C(s, t)\, f(x_0(t), t)\, dt, \tag{10.2′}$$

$$f(x_0(t) + u, t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t)\, u^m. \tag{10.3′}$$

Полагая здесь, как раньше,

$$x(s) = x_0(s) + u(s), \qquad \mu = \mu_0 + \lambda,$$

получим

$$u(s) - \int_B K(s, t)\, u(t)\, dt = \lambda f(s) + \\ + \mu_0 \sum_{m=2}^{\infty} \int_B C(s, t)\, A_m(t)\, u^m(t)\, dt + \\ + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \int_B C(s, t)\, A_m(t)\, u^m(t)\, dt, \tag{10.4'}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &K(s, t) = \mu_0 C(s, t) A_1(t), \ \mu_0 \int_B C(s, t) A_0(t)\, dt = x_0(s), \\ &f(s) = \int_B C(s, t) A_0(t)\, dt = \frac{1}{\mu_0} x_0(s) \ \text{при} \ \mu_0 \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.29}$$

Далее, формулы (10.13) принимают здесь вид

$$\left.\begin{aligned} g(s) &= f(s) + \int_B R(s, t)\, f(t)\, dt, \\ g_{mn}(s, t) &= \mu_0^{1-n} g(s, t)\, A_m(t) \ (n = 0, 1), \\ g(s, t) &= C(s, t) + \int_B R(s, \tau)\, C(\tau, t)\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{10.30}$$

Ввиду этого формулы (10.16) для вычисления коэффициентов $a_{ik}(s)$ принимают вид

$$\left.\begin{aligned} a_{02}(s) &= \int_B g(s, t) \{A_1(t) + \mu_0 A_2(t)\, g(t)\}\, g(t)\, dt, \\ a_{11}(s) &= \int_B g(s, t) \{A_1(t) + 2\mu_0 A_2(t)\, g(t)\}\, \varphi_1(t)\, dt, \\ a_{20}(s) &= \mu_0 \int_B g(s, t)\, A_2(t)\, \varphi_1^2(t)\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{10.31}$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{03}(s) &= \int_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{02}(t) + 2\mu_0 A_2(t)\,g(t)\times \\
&\qquad \times a_{02}(t) + A_2(t)\,g^2(t) + \mu_0 A_3(t)\,g^3(t)\}\,dt,\\
a_{12}(s) &= \int_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{11}(t) + \\
&\quad + 2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{02}(t) + g(t)\,a_{11}(t)] + \\
&\quad + 2A_2(t)\,\varphi_1(t)\,g(t) + 3\mu_0 A_3(t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t)\}\,dt,\\
a_{21}(s) &= \int_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{20}(t) + \\
&\quad + 2\mu_0 A_2(t)\,[g(t)\,a_{20}(t) + \varphi_1(t)\,a_{11}(t)] + \\
&\qquad + A_2(t)\,\varphi_1^2(t) + 3\mu_0 A_3(t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t)\}\,dt,\\
a_{30}(s) &= \mu_0 \int_B g(s,t)\{2A_2(t)\,a_{20}(t) + \\
&\qquad + A_3(t)\,\varphi_1^2(t)\}\,\varphi_1(t)\,dt,\\
a_{04}(s) &= \int_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{03}(t) + \mu_0 A_2(t)\times \\
&\quad \times [a_{02}^2(t) + 2g(t)\,a_{03}(t)] + 2A_2(t)\,g(t)\,a_{02}(t) + \\
&\quad + 3\mu_0 A_3(t)\,g^2(t)\,a_{02}(t) + A_3(t)\,g^3(t) + \\
&\qquad + \mu_0 A_4(t)\,g^4(t)\}\,dt,\\
a_{13}(s) &= \int_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{12}(t) + \\
&\quad + 2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{03}(t) + g(t)\,a_{12}(t) + \\
&\quad + a_{11}(t)\,a_{02}(t)] + 2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{02}(t) + \\
&\quad + g(t)\,a_{11}(t)] + 3\mu_0 A_3(t)\,[g^2(t)\,a_{11}(t) + \\
&\quad + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{02}(t)] + 3A_3(t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t) + \\
&\qquad + 4\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1(t)\,g^3(t)\}\,dt,\\
a_{22}(s) &= \int_B g(s,t)\{A_1(t)a_{21}(t) + \mu_0 A_2(t)\,[a_{11}^2(t) + \\
&\quad + 2\varphi_1(t)\,a_{12}(t) + 2g(t)\,a_{21}(t) + 2a_{20}(t)\,a_{02}(t)] + \\
&\quad + 2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{11}(t) + g(t)\,a_{20}(t)] + \\
&\quad + 3\mu_0 A_3(t)\,[g^2(t)\,a_{20}(t) + \varphi_1^2(t)\,a_{02}(t) + \\
&\quad + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{11}(t)] + 3A_3(t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t) + \\
&\qquad + 6\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1^2(t)\,g^2(t)\}\,dt,
\end{aligned}\right\} \qquad (10.31)$$

$$\left.\begin{aligned}
a_{31}(s) = \int_B g(s, t)\{A_1(t)\,a_{30}(t) + 2\mu_0 A_2(t)\times \\
\times[\varphi_1(t)\,a_{21}(t) + g(t)\,a_{30}(t) + a_{20}(t)\,a_{11}(t)] + \\
+ 2A_2(t)\,\varphi_1(t)\,a_{20}(t) + 3\mu_0 A_3(t)\times \\
\times[\varphi_1^2(t)\,a_{11}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{20}(t)] + \\
+ A_3(t)\,\varphi_1^3(t) + 4\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1^3(t)\,g(t)\}\,dt, \\
a_{40}(s) = \mu_0\int_B g(s,t)\{A_2(t)\,[a_{20}^2(t) + \\
+ 2\varphi_1(t)\,a_{30}(t)] + 3A_3(s, t)\,\varphi_1^2(t)\,a_{20}(t) + \\
+ A_4(t)\,\varphi_1^4(t)\}\,dt.
\end{aligned}\right\} \quad (10.31)$$

Далее, формулы (10.22) принимают в данном случае вид (см. формулы (10.30)):

$$\left.\begin{aligned}
a_{011}(s) = \int_B g(s, t)\{A_1(t) + 2\mu_0 A_2(t)\,g(t)\}\,\varphi_2(t)\,dt, \\
a_{101}(s) = \int_B g(s, t)\{A_1(t) + 2\mu_0 A_2(t)\,g(t)\}\,\varphi_1(t)\,dt \\
a_{110}(s) = 2\int_B \mu_0 g(s, t)\,A_2(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,dt, \\
a_{200}(s) = \mu_0\int_B g(s, t)\,A_2(t)\,\varphi_1^2(t)\,dt, \\
a_{020}(s) = \mu_0\int_B g(s, t)\,A_2(t)\,\varphi_2^2(t)\,dt, \\
a_{002}(s) = \int_B g(s, t)\{A_1(t) + \mu_0 A_2(t)\,g(t)\}\,g(t)\,dt, \\
a_{111}(s) = \int_B g(s, t)\{A_1(t)\,a_{110}(t) + \\
+ 2\mu_0 A_2(t)[\varphi_1(t)\,a_{011}(t) + \varphi_2(t)\,a_{101}(t) + \\
+ g(t)\,a_{110}(t)] + 2A_2(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t) + \\
+ 6\mu_0 A_3(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g(t)\}\,dt, \\
a_{120}(s) = \int_B g(s, t)\{2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{020}(t) + \\
+ \varphi_2(t)\,a_{110}(t)] + 3\mu_0 A_3(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t)\}\,dt,
\end{aligned}\right\} \quad (10.32)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{102}(s) &= \int\limits_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{101}(t) + {} \\
&\qquad + 2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{002}(t) + g(t)\,a_{101}(t)] + {} \\
&\qquad + 2A_2(t)\,\varphi_1(t)\,g(t) + 3\mu_0 A_3(t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t)\}\,dt, \\
a_{012}(s) &= \int\limits_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{011}(t) + {} \\
&\qquad + 2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_2(t)\,a_{002}(t) + g(t)\,a_{011}(t)] + {} \\
&\qquad + 2A_2(t)\,\varphi_2(t)\,g(t) + 3\mu_0 A_3(t)\,\varphi_2(t)\,g^2(t)\}\,dt, \\
a_{021}(s) &= \int\limits_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{020}(t) + {} \\
&\qquad + 2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_2(t)\,a_{011}(t) + g(t)\,a_{020}(t)] + {} \\
&\qquad\qquad + A_2(t)\,\varphi_2^2(t) + 3\mu_0 A_3(t)\,\varphi_2^2(t)\,g(t)\}\,dt, \\
a_{201}(s) &= \int\limits_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{200}(t) + {} \\
&\qquad + 2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{101}(t) + g(t)\,a_{200}(t)] + {} \\
&\qquad\qquad + A_2(t)\,\varphi_1^2(t) + 3\mu_0 A_3(t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t)\}\,dt, \\
a_{210}(s) &= \int\limits_B g(s,t)\{2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{110}(t) + {} \\
&\qquad\qquad + \varphi_2(t)\,a_{200}(t)] + 3\mu_0 A_3(t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t)\}\,dt, \\
a_{300}(s) &= \mu_0 \int\limits_B g(s,t)\{2A_2(t)\,a_{200}(t) + {} \\
&\qquad\qquad\qquad + A_3(t)\,\varphi_1^2(t)\}\,\varphi_1(t)\,dt, \\
a_{030}(s) &= \mu_0 \int\limits_B g(s,t)\{2A_2(t)\,\varphi_2(t)\,a_{020}(t) + {} \\
&\qquad\qquad\qquad + A_3(t)\,\varphi_2^3(t)\}\,dt, \\
a_{003}(s) &= \int\limits_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{002}(t) + {} \\
&\qquad + 2\mu_0 A_2(t)\,g(t)\,a_{002}(t) + A_2(t)\,g^2(t) + {} \\
&\qquad\qquad\qquad + \mu_0 A_3(t)\,g^3(t)\}\,dt, \\
a_{004}(s) &= \int\limits_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{003}(t) + \mu_0 A_2(t) \times {} \\
&\times [a_{002}^2(t) + 2g(t)a_{003}(t)] + 2A_2(t)\,g(t)\,a_{002}(t) + {} \\
&\qquad + 3\mu_0 A_3(t)\,g^2(t)\,a_{002}(t) + A_3(t)\,g^3(t) + {} \\
&\qquad\qquad\qquad + \mu_0 A_4(t)\,g^4(t)\}\,dt,
\end{aligned}
\right\}
\qquad (10.32)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{040}(s) = \mu_0 \int_B g(s,t)\{A_2(t)[a_{020}^2(t)+2\varphi_2(t)\,a_{030}(t)]+\\
+3A_3(t)\,\varphi_2^2(t)\,a_{020}(t)+A_4(t)\,\varphi_2^4(t)\}\,dt,\\
a_{400}(s) = \mu_0 \int_B g(s,t)\{A_2(t)\,[a_{200}^2(t)+\\
+2\varphi_1(t)\,a_{300}(t)]+\\
+3A_3(t)\,\varphi_1^2(t)\,a_{200}(t)+A_4(t)\,\varphi_1^4(t)\}\,dt,\\
a_{022}(s) = \int_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{021}(t)+\mu_0 A_2(t)\,[a_{011}^2(t)+\\
+2\varphi_2(t)\,a_{012}(t)+2g(t)\,a_{021}(t)+2a_{020}(t)\,a_{002}(t)]+\\
+2A_2(t)\,[\varphi_2(t)\,a_{011}(t)+g(t)\,a_{020}(t)]+3\mu_0 A_3(t)\times\\
\times[\varphi_2^2(t)\,a_{002}(t)+g^2(t)\,a_{020}(t)+2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{011}(t)]+\\
+3A_3(t)\,\varphi_2^2(t)\,g(t)+6\mu_0 A_4(t)\,\varphi_2^2(t)\,g^2(t)\}\,dt,\\
a_{202}(s) = \int_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{201}(t)+\mu_0 A_2(t)[a_{101}^2(t)+\\
+2\varphi_1(t)\,a_{102}(t)+2g(t)\,a_{201}(t)+2a_{200}(t)\,a_{002}(t)]+\\
+2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{101}(t)+g(t)\,a_{200}(t)]+\\
+3\mu_0 A_3(t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{002}(t)+g^2(t)\,a_{200}(t)+\\
+2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{101}(t)]+3A_3(t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t)+\\
+6\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1^2(t)\,g^2(t)\}\,dt,\\
a_{220}(s) = \mu_0 \int_B g(s,t)\{A_2(t)\,[a_{110}^2(t)+2\varphi_1(t)\,a_{120}(t)+\\
+2\varphi_2(t)\,a_{210}(t)+2a_{200}(t)\,a_{020}(t)]+\\
+3A_3(t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{020}(t)+\varphi_2^2(t)\,a_{200}(t)+\\
+2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{110}(t)]+6A_4(t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2^2(t)\}\,dt,\\
a_{112}(s) = \int_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{111}(t)+\\
+2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{012}(t)+\varphi_2(t)\,a_{102}(t)+\\
+g(t)\,a_{111}(t)+a_{101}(t)\,a_{011}(t)+a_{110}(t)\,a_{002}(t)]+\\
+2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{011}(t)+\varphi_2(t)\,a_{101}(t)+\\
+g(t)\,a_{110}(t)]+3\mu_0 A_3(t)\,[g^2(t)\,a_{110}(t)+\\
+2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{002}(t)+2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{011}(t)+\\
+2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{101}(t)]+6A_3(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g(t)+\\
+12\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g^2(t)\}\,dt,
\end{aligned}
\right\}
\qquad (10.32)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
a_{121}(s) = \int_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{120}(t) &+ \\
+ 2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{021}(t) + \varphi_2(t)\,a_{111}(t) &+ \\
+ g(t)\,a_{120}(t) + a_{110}(t)\,a_{011}(t) + a_{101}(t)\,a_{020}(t)] &+ \\
+ 2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{020}(t) + \varphi_2(t)\,a_{110}(t)] &+ \\
+ 3\mu_0 A_3(t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{101}(t) + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{011}(t) &+ \\
+ 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{110}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{020}(t)] &+ \\
+ 3A_3(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t) + 12\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t)g(t)\}\,dt& \\
{}_{211}(s) = {}^{a}\int_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{210}(t) &+ \\
+ 2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{111}(t) + \varphi_2(t)\,a_{201}(t) &+ \\
+ g(t)\,a_{210}(t) + a_{110}(t)\,a_{101}(t) + a_{200}(t)a_{011}(t)] &+ \\
+ 2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{110}(t) + \varphi_2(t)\,a_{200}(t)] &+ \\
+ 3\mu_0 A_3(t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{011}(t) + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{101}(t) &+ \\
+ 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{110}(t) + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{200}(t)] &+ \\
+ 3A_3(t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t) + 12\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t)\,g(t)\}dt&, \\
a_{013}(s) = \int_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{012}(t) &+ \\
+ 2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_2(t)\,a_{003}(t) + g(t)\,a_{012}(t) &+ \\
+ a_{011}(t)\,a_{002}(t)] + 2A_2(t)\,[\varphi_2(t)a_{002}(t) + g(t)a_{011}(t)] &+ \\
+ 3\mu_0 A_3(t)\,[g^2(t)\,a_{011}(t) + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{002}(t)] &+ \\
+ 3A_3(t)\,\varphi_2(t)\,g^2(t) + 4\mu_0 A_4(t)\,\varphi_2(t)\,g^3(t)\}\,dt&, \\
a_{031}(s) = \int_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{030}(t) &+ \\
+ 2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_2(t)\,a_{021}(t) + g(t)\,a_{030}(t) &+ \\
+ a_{011}(t)\,a_{020}(t)] + 2A_2(t)\,\varphi_2(t)\,a_{020}(t) &+ \\
+ 3\mu_0 A_3(t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{011}(t) + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{020}(t)] &+ \\
+ A_3(t)\,\varphi_2^3(t) + 4\mu_0 A_4(t)\,\varphi_2^3(t)\,g(t)\}\,dt&, \\
a_{103}(s) = \int_B g(s,t)\{A_1(t)\,a_{102}(t) &+ \\
+ 2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{003}(t) + g(t)\,a_{102}(t) &+
\end{aligned}\right\} \qquad (10.32)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+a_{101}(t)\,a_{002}(t)]+2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{002}(t)+\\
&+g(t)\,a_{101}(t)]+3\mu_0 A_3(t)\,[g^2(t)\,a_{101}(t)+\\
&+2\,\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{002}(t)]+3A_3(t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t)+\\
&\qquad+4\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1(t)\,g^3(t)\}\,dt,\\
&a_{301}(s)=\int_B g(s,t)\,\{A_1(t)\,a_{300}(t)+\\
&+2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{201}(t)+g(t)\,a_{300}(t)+\\
&+a_{101}(t)\,a_{200}(t)]+2A_2(t)\,\varphi_1(t)\,a_{200}(t)+\\
&+3\mu_0 A_3(t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{101}(t)+2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{200}(t)]+\\
&\qquad+A_3(t)\,\varphi_1^3(t)+4\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1^3(t)\,g(t)\}\,dt,\\
&a_{130}(s)=\mu_0\int_B g(s,t)\,\{2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{030}(t)+\\
&+\varphi_2(t)\,a_{120}(t)+a_{110}(t)\,a_{020}(t)]+\\
&+3A_3(t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{110}(t)+2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{020}(t)]+\\
&\qquad+4A_4(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^3(t)\}\,dt,\\
&a_{310}(s)=\mu_0\int_B g(s,t)\,\{2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{210}(t)+\\
&+\varphi_2(t)\,a_{300}(t)+a_{110}(t)\,a_{200}(t)]+\\
&+3A_3(t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{110}(t)+2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{200}(t)]+\\
&\qquad+4A_4(t)\,\varphi_1^3(t)\,\varphi_2(t)\}\,dt.
\end{aligned}\right\}\qquad(10.32)
$$

§ 11. Коэффициенты уравнения разветвления

В предыдущем параграфе мы видели, что задача о нахождении всех непрерывных решений уравнения (10.1), стремящихся при $\mu \to \mu_0$ к известному решению $x_0(s)$ (см. (10.2)), сводится как к отысканию коэффициентов, входящих в формулы (10.14) и (10.20), так и к нахождению всех малых решений уравнений разветвления (10.18) и (10.24). Ввиду этого мы сначала займемся здесь вычислением первых коэффициентов уравнений разветвления (10.18) и (10.24) при $p = 2$. Знание этих коэффициентов позволит нам построить и самые решения как уравнения (10.1), так и частных его видов.

11.1. Коэффициенты одномерного уравнения разветвления общего нелинейного интегрального уравнения. Здесь мы вычислим первые коэффициенты уравнения разветвления (10.18), исходя из формул (10.17) и (10.16).

Для упрощения формул, определяющих L_{mn}, мы предварительно выведем некоторые соотношения.

Из равенств (10.13) имеем

$$g_{mn}(s, t) = B_{mn}(s, t) + \int_B R(s, \tau) B_{mn}(\tau, t)\, d\tau, \qquad (11.1)$$

где $R(s, t)$ — резольвента Фредгольма ядра

$$E(s, t) = K(s, t) - \psi_1(s)\overline{\varphi_1(t)}.$$

Используя теперь формулу (8.4), мы из (11.1) находим (считая t фиксированным)

$$g_{mn}(s, t) - \int_B E(s, \tau) g_{mn}(\tau, t)\, d\tau = B_{mn}(s, t),$$

или, учитывая выражение для $E(s, \tau)$,

$$g_{mn}(s, t) - \int_B [K(s, \tau) - \psi_1(s)\overline{\varphi_1(\tau)}]\, g_{mn}(\tau, t)\, d\tau = B_{mn}(s, t),$$

или

$$g_{mn}(s, t) - \int_B K(s, \tau) g_{mn}(\tau, t)\, d\tau =$$
$$= B_{mn}(s, t) - \psi_1(s) \int_B g_{mn}(\tau, t)\overline{\varphi_1(\tau)}\, d\tau.$$

Так как данное уравнение имеет решение относительно $g_{mn}(s, t)$, то правая часть его по теореме Фредгольма должна быть ортогональна $\psi_1(s)$ — собственной функции оператора T^* (см. (10.6′)), т. е.

$$\int_B \Big[B_{mn}(s, t) - \psi_1(s) \int_B g_{mn}(\tau, t)\overline{\varphi_1(\tau)}\, d\tau\Big]\overline{\psi_1(s)}\, ds = 0.$$

Отсюда имеем

$$\int_B g_{mn}(\tau, t)\overline{\varphi_1(\tau)}\, d\tau = \int_B B_{mn}(\tau, t)\overline{\psi_1(\tau)}\, d\tau. \qquad (11.2)$$

Таким образом, исходя из формул (10.13), получаем

$$\int_B g(s)\overline{\varphi_1(s)}\,ds = \int_B f(s)\overline{\psi_1(s)}\,ds. \tag{11.3}$$

Используя формулы (11.2) и (11.3), мы из (10.17) и (10.16) находим

$$L_{01} = \int_B g(t)\overline{\varphi_1(t)}\,dt = \int_B f(t)\overline{\psi_1(t)}\,dt,$$

$$L_{20} = \int_B \overline{\varphi_1(s)}\,ds \int_B g_{20}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,dt = \int_B\int_B B_{20}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt.$$

Таким же образом находим, что

$$\left.\begin{aligned}
L_{30} &= 2\int_B\int_B B_{20}(s,t)\,\varphi_1(t)\,a_{20}(t)\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt + \\
&\qquad + \int_B\int_B B_{30}(s,t)\,\varphi_1^3(t)\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{40} &= \int_B\int_B \{B_{20}(s,t)\,[a_{20}^2(t) + 2\varphi_1(t)\,a_{30}(t)] + \\
&\quad + 3B_{30}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,a_{20}(t) + B_{40}(s,t)\,\varphi_1^4(t)\}\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{11} &= \int_B\int_B [B_{11}(s,t) + 2B_{20}(s,t)\,g(t)]\,\varphi_1(t)\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{02} &= \int_B\int_B [B_{02}(s,t) + B_{11}(s,t)\,g(t) + \\
&\qquad + B_{20}(s,t)\,g^2(t)]\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{03} &= \int_B\int_B [B_{03}(s,t) + B_{11}(s,t)\,a_{02}(t) + \\
&\quad + B_{12}(s,t)\,g(t) + 2B_{20}(s,t)\,g(t)\,a_{02}(t) + \\
&\quad + B_{21}(s,t)\,g^2(t) + B_{30}(s,t)\,g^3(t)]\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{12} &= \int_B\int_B \{B_{11}(s,t)\,a_{11}(t) + B_{12}(s,t)\,\varphi_1(t) + \\
&\quad + 2B_{20}(s,t)\,[g(t)\,a_{11}(t) + \varphi_1(t)\,a_{02}(t)] + \\
&\quad + 2B_{21}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g(t) + 3B_{30}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t)\} \times \\
&\qquad \times \overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,
\end{aligned}\right\} \tag{11.4}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
L_{21} = \int\limits_B \int\limits_B \{ & B_{11}(s,t)\,a_{20}(t) + 2B_{20}(s,t)[g(t)\,a_{20}(t) + \\
& + \varphi_1(t)\,a_{11}(t)] + B_{21}(s,t)\,\varphi_1^2(t) + \\
& + 2B_{30}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t)\}\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{04} = \int\limits_B \int\limits_B \{ & B_{04}(s,t) + B_{11}(s,t)\,a_{03}(t) + \\
& + B_{12}(s,t)\,a_{02}(t) + B_{13}(s,t)\,g(t) + B_{20}(s,t) \times \\
& \times [a_{02}^2(t) + 2g(t)\,a_{03}(t)] + 2B_{21}(s,t)\,g(t)\,a_{02}(t) + \\
& + B_{22}(s,t)\,g^2(t) + 3B_{30}(s,t)\,g^2(t)\,a_{02}(t) + \\
& + B_{31}(s,t)\,g^3(t) + B_{40}(s,t)\,g^4(t)\}\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{13} = \int\limits_B \int\limits_B \{ & B_{11}(s,t)\,a_{12}(t) + B_{12}(s,t)\,a_{11}(t) + \\
& + B_{13}(s,t)\,\varphi_1(t) + 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{03}(t) + \\
& + g(t)\,a_{12}(t) + a_{11}(t)\,a_{02}(t)] + \\
& + 2B_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{02}(t) + g(t)\,a_{11}(t)] + \\
& + 2B_{22}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g(t) + 3B_{30}(s,t)\,[g^2(t)\,a_{11}(t) + \\
& + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{02}(t)] + 3B_{31}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t) + \\
& + 4B_{40}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^3(t)\}\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{22} = \int\limits_B \int\limits_B \{ & B_{11}(s,t)\,a_{21}(t) + B_{12}(s,t)\,a_{20}(t) + \\
& + B_{20}(s,t)\,[a_{11}^2(t) + 2\varphi_1(t)\,a_{12}(t) + \\
& + 2g(t)\,a_{21}(t) + 2a_{20}(t)\,a_{02}(t)] + \\
& + 2B_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{11}(t) + g(t)\,a_{20}(t)] + \\
& + B_{22}(s,t)\,\varphi_1^2(t) + 3B_{30}(s,t)\,[g^2(t)\,a_{20}(t) + \\
& + 2\varphi_1(t)g(t)a_{11}(t) + \varphi_1^2(t)a_{02}(t)] + 3B_{31}(s,t)\varphi_1^2(t)\,g(t) + \\
& + 6B_{40}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g^2(t)\}\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{31} = \int\limits_B \int\limits_B \{ & B_{11}(s,t)\,a_{30}(t) + 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{21}(t) + \\
& + g(t)\,a_{30}(t) + a_{20}(t)\,a_{11}(t)] + 2B_{21}\,\varphi_1(t)\,a_{20}(t) + \\
& + 3B_{30}(s,t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{11}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{20}(t)] + \\
& + B_{31}(s,t)\,\varphi_1^3(t) + 4B_{40}(s,t)\,\varphi_1^3(t)\,g(t)\}\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt.
\end{aligned}
\right\}
\quad (11.4)
$$

Для дальнейшего нам потребуется следующее предложение.

Лемма 11.1[1]). *Пусть* $B_{m0}(s, t) \equiv 0$ *для* $m = 2, 3, \ldots, k-1$. *Тогда*

$$L_{20} = L_{30} = \ldots = L_{k-1,0} = 0,$$

$$L_{m0} = \int_B \int_B B_{m0}(s, t)\, \varphi_1^m(t)\, \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt$$

для

$$m = k,\ k+1,\ \ldots,\ 2k-2$$

и

$$L_{2k-1,0} = \int_B \int_B \{B_{2k-1,0}(s, t)\, \varphi_1^{2k-1}(t) + \\ + kB_{k0}(s, t)\, \varphi_1^{k-1}(t)\, a_{k0}(t)\}\, \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt.$$

Доказательство. Из (10.13) следует, что в условиях леммы

$$g_{m0}(s, t) \equiv 0 \quad (m = 2, 3, \ldots, k-1).$$

Учитывая данные равенства и полагая $\lambda = 0$ в равенстве (10.15), получим

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_{i0}(s)\, \xi^i = \sum_{m=k}^{\infty} \int_B g_{m0}(s, t)\, \xi^m\, [\varphi_1(t) + a_{20}(t)\, \xi + \\ + a_{30}(t) \xi^2 + \ldots]^m\, dt.$$

Так как порядок правой части данного равенства относительно ξ не меньше k, то в левой части этого равенства должно быть $a_{20}(s) = a_{30}(s) = \ldots = a_{k-1,0}(s) \equiv 0$. Ввиду этого предыдущее равенство принимает вид

$$\sum_{i=k}^{\infty} a_{i0}(s)\, \xi^i = \sum_{m=k}^{\infty} \int_B g_{m0}(s, t)\, \xi^m\, [\varphi_1(t) + a_{k0}(t)\, \xi^{k-1} + \\ + a_{k+1,0}(t)\, \xi^k + \ldots]^m\, dt.$$

Отсюда следует, что для $i = k, k+1, \ldots, 2k-2$

$$a_{i0}(s) = \int_B g_{i0}(s, t)\, \varphi_1^i(t)\, dt$$

[1]) Ср. А. Э. Стапан [1].

и

$$a_{2k-1,0}(s)=\int_B[g_{2k-1,0}(s,t)\,\varphi_1^{2k-1}(t)+\\ +kg_{k0}(s,t)\,\varphi_1^{k-1}(t)\,a_{k0}(t)]\,dt.$$

Применяя теперь формулы (10.17) и (11.2), мы придем к утверждению леммы.

Отметим, что в условиях леммы упрощаются и другие формулы для коэффициентов L_{mn} и $a_{mn}(s)$. Например, если $B_{20}(s,t)=B_{30}(s,t)=B_{40}(s,t)\equiv 0$, то $a_{20}(s)=a_{30}(s)=a_{40}(s)\equiv 0$ и мы получаем

$$\left.\begin{aligned}
L_{11}&=\iint_{BB}B_{11}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{02}&=\iint_{BB}[B_{02}(s,t)+B_{11}(s,t)\,g(t)]\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{03}&=\iint_{BB}[B_{03}(s,t)+B_{11}(s,t)\,a_{02}(t)+\\
&\qquad+B_{12}(s,t)\,g(t)+B_{21}(s,t)\,g^2(t)]\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{12}&=\iint_{BB}[B_{11}(s,t)\,a_{11}(t)+B_{12}(s,t)\,\varphi_1(t)+\\
&\qquad+2B_{21}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g(t)]\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{21}&=\iint_{BB}[B_{21}(s,t)\,\varphi_1^2(t)]\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{04}&=\iint_{BB}[B_{04}(s,t)+B_{11}(s,t)\,a_{03}(t)+\\
&\qquad+B_{12}(s,t)\,a_{02}(t)+B_{13}(s,t)\,g(t)+\\
&\qquad+2B_{21}(s,t)\,g(t)\,a_{02}(t)+B_{22}(s,t)\,g^2(t)+\\
&\qquad+B_{31}(s,t)\,g^3(t)]\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{13}&=\iint_{BB}\{B_{11}(s,t)\,a_{12}(t)+B_{12}(s,t)\,a_{11}(t)+\\
&\qquad+B_{13}(s,t)\varphi_1(t)+2B_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{02}(t)+\\
&\qquad+g(t)\,a_{11}(t)]+2B_{22}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g(t)+\\
&\qquad+3B_{31}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t)\}\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,
\end{aligned}\right\}\qquad(11.5)$$

$$\left.\begin{aligned} L_{22} &= \iint\limits_{BB} \{B_{11}(s, t)\, a_{21}(t) + 2B_{21}(s, t)\, \varphi_1(t)\, a_{11}(t) + \\ &\quad + B_{22}(s, t)\, \varphi_1^2(t) + 3B_{31}(s, t)\, \varphi_1^2(t)\, g(t)\} \times \\ &\qquad\qquad \times \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt, \\ L_{31} &= \iint\limits_{BB} B_{31}(s, t)\, \varphi_1^3(t)\, \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{11.5}$$

Рассмотрим теперь частный случай уравнения (10.1).

Пусть выполнено условие (10.5). Используя тогда формулы (10.17), (11.2), (11.3), (10.25) и (10.27), мы в рассматриваемом частном случае (10.5) приходим к следующим формулам для первых коэффициентов уравнения разветвления (10.18):

$$\left.\begin{aligned} L_{20} &= \mu_0 \iint\limits_{BB} A_2(s, t)\, \varphi_1^2(t)\, \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt, \\ L_{30} &= \mu_0 \iint\limits_{BB} \{2A_2(s, t)\, a_{20}(t) + A_3(s, t)\, \varphi_1^2(t)\} \times \\ &\qquad\qquad \times \varphi_1(t)\, \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt, \\ L_{40} &= \mu_0 \iint\limits_{BB} \{A_2(s, t)\, [a_{20}^2(t) + 2\varphi_1(t)\, a_{30}(t)] + \\ &\quad + 3A_3(s, t)\, \varphi_1^2(t)\, a_{20}(t) + A_4(s, t)\, \varphi_1^4(t)\} \times \\ &\qquad\qquad \times \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt, \\ L_{01} &= \int\limits_{B} f(t)\, \overline{\psi_1(t)}\, dt, \\ L_{02} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s, t) + \mu_0 A_2(s, t)\, g(t)\}\, g(t) \times \\ &\qquad\qquad \times \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt, \\ L_{11} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s, t) + 2\mu_0 A_2(s, t)\, g(t)\}\, \varphi_1(t) \times \\ &\qquad\qquad \times \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt, \\ L_{03} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s, t)\, a_{02}(t) + 2\mu_0 A_2(s, t)\, g(t)\, a_{02}(t) + \\ &\quad + A_2(s, t)\, g^2(t) + \mu_0 A_3(s, t)\, g^3(t)\}\, \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt, \end{aligned}\right\} \tag{11.6}$$

$$\left.\begin{aligned}
L_{12} = \iint\limits_{BB} \{ A_1(s,t)\, a_{11}(t) + 2\mu_0 A_2(s,t) \times \\
\times [\varphi_1(t)\, a_{02}(t) + g(t)\, a_{11}(t)] + 2A_2(s,t)\, \varphi_1(t)\, g(t) + \\
+ 3\mu_0 A_3(s,t)\, \varphi_1(t)\, g^2(t) \} \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt, \\
L_{21} = \iint\limits_{BB} \{ A_1(s,t)\, a_{20}(t) + 2\mu_0 A_2(s,t) \times \\
\times [g(t)\, a_{20}(t) + \varphi_1(t)\, a_{11}(t)] + A_2(s,t)\, \varphi_1^2(t) + \\
+ 3\mu_0 A_3(s,t)\, \varphi_1^2(t)\, g(t) \} \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt, \\
L_{04} = \iint\limits_{BB} \{ A_1(s,t)\, a_{03}(t) + \mu_0 A_2(s,t) [a_{02}^2(t) + \\
+ 2g(t)\, a_{03}(t)] + 2A_2(s,t)\, g(t)\, a_{02}(t) + \\
+ 3\mu_0 A_3(s,t)\, g^2(t)\, a_{02}(t) + A_3(s,t)\, g^3(t) + \\
+ \mu_0 A_4(s,t)\, g^4(t) \} \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt, \\
L_{13} = \iint\limits_{BB} \{ A_1(s,t)\, a_{12}(t) + 2\mu_0 A_2(s,t) \times \\
\times [\varphi_1(t)\, a_{03}(t) + g(t)\, a_{12}(t) + a_{11}(t)\, a_{02}(t)] + \\
+ 2A_2(s,t) [\varphi_1(t)\, a_{02}(t) + g(t)\, a_{11}(t)] + \\
+ 3\mu_0 A_3(s,t) [g^2(t)\, a_{11}(t) + 2\varphi_1(t)\, g(t)\, a_{02}(t)] + \\
+ 3A_3(s,t)\, \varphi_1(t)\, g^2(t) + 4\mu_0 A_4(s,t)\, \varphi_1(t)\, g^3(t) \} \times \\
\times \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt, \\
L_{22} = \iint\limits_{BB} \{ A_1(s,t)\, a_{21}(t) + \mu_0 A_2(s,t) [a_{11}^2(t) + \\
+ 2\varphi_1(t)\, a_{12}(t) + 2g(t)\, a_{21}(t) + 2a_{20}(t)\, a_{02}(t)] + \\
+ 2A_2(s,t) [\varphi_1(t)\, a_{11}(t) + g(t)\, a_{20}(t)] + \\
+ 3\mu_0 A_3(s,t) [g^2(t)\, a_{20}(t) + \varphi_1^2(t)\, a_{02}(t) + \\
+ 2\varphi_1(t)\, g(t)\, a_{11}(t)] + 3A_3(s,t)\, \varphi_1^2(t)\, g(t) + \\
+ 6\mu_0 A_4(s,t)\, \varphi_1^2(t)\, g^2(t) \} \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt, \\
L_{31} = \iint\limits_{BB} \{ A_1(s,t)\, a_{30}(t) + 2\mu_0 A_2(s,t) \times \\
\times [\varphi_1(t)\, a_{21}(t) + g(t)\, a_{30}(t) + a_{20}(t)\, a_{11}(t)] + \\
+ 2A_2(s,t)\, \varphi_1(t)\, a_{20}(t) + 3\mu_0 A_3(s,t) \times \\
\times [\varphi_1^2(t)\, a_{11}(t) + 2\varphi_1(t)\, g(t)\, a_{20}(t)] + \\
+ A_3(s,t)\, \varphi_1^3(t) + 4\mu_0 A_4(s,t)\, \varphi_1^3(t)\, g(t) \} \overline{\psi_1(s)}\, ds\, dt.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.6)$$

Для дальнейшего мы приведем следующее предложение[1]).

Лемма 11.2. *Пусть выполнено условие*

$$G(s, t, u, \mu) = \mu G(s, t, u) \tag{10.5}$$

и $B_{01}(s, t) \equiv 0$ *или* $f(s) \equiv 0$. *Тогда*

$$a_{0n}(s) \equiv 0 \quad и \quad L_{0n} = 0$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$ $(a_{01}(s) = g(s))$.

Доказательство. Сначала заметим, что если $B_{01}(s, t) \equiv 0$, то $f(s) \equiv 0$, а потому согласно (10.7) и $g(s) \equiv 0$. Полагая теперь в равенстве (10.15) $\xi = 0$ и учитывая как равенство $g(t) \equiv 0$, так и то, что в рассматриваемом случае (10.5) $g_{mn}(s, t) \equiv 0$ при $n \geqslant 2$, получим

$$\sum_{=2}^{\infty} a_{0k}(s)\lambda^k = \sum_{m=2}^{\infty} \int_B g_{m0}(s, t)\lambda^{2m}[a_{02}(t) + a_{03}(t)\lambda + \ldots]^m dt +$$
$$+ \sum_{m+1\geqslant 2} \int_B g_{m1}(s, t)\lambda^{2m+1}[a_{02}(t) + a_{03}(t)\lambda + \ldots]^m dt.$$

Правая часть этого равенства представляет собою ряд, порядок которого относительно λ не ниже 3, а потому из левой части равенства находим, что $a_{02}(s) \equiv 0$. Ввиду этого предыдущее равенство принимает вид

$$\sum_{=3}^{\infty} a_{0k}(s)\lambda^k = \sum_{m=2}^{\infty} \int_B g_{m0}(s, t)\lambda^{3m}[a_{03}(t) + a_{04}(t)\lambda + \ldots]^m dt +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \int_B g_{m1}(s, t)\lambda^{3m+1}[a_{03}(t) + a_{04}(t)\lambda + \ldots]^m dt.$$

Отсюда так же, как раньше, находим, что $a_{03}(s) \equiv 0$. Продолжая этот процесс, мы найдем, что $a_{0n}(s) \equiv 0$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$, где $a_{01}(s) = g(s)$. Используя теперь формулы (10.17), получим $L_{0n} = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Лемма доказана.

Из данной леммы вытекает, что при $g(t) \equiv 0$ упрощаются и другие из формул (11.6) для коэффициентов L_{mn}.

---

[1]) См. А. Э. Стапан [1].

Именно, при $g(t) \equiv 0$ имеем

$$\left.\begin{aligned}
L_{11} &= \int\limits_B\int\limits_B A_1(s,t)\,\varphi_1(t)\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt = \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{\mu_0}\int\limits_B \varphi_1(s)\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\ ^{1)},\\
L_{12} &= \int\limits_B\int\limits_B A_1(s,t)\,a_{11}(t)\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{21} &= \int\limits_B\int\limits_B [A_1(s,t)a_{20}(t)+2\mu_0 A_2(s,t)\,\varphi_1(t)a_{11}(t)+\\
&\qquad + A_2(s,t)\,\varphi_1^2(t)]\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{13} &= \int\limits_B\int\limits_B A_1(s,t)\,a_{12}(t)\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{22} &= \int\limits_B\int\limits_B \{A_1(s,t)\,a_{21}(t)+A_2(s,t)\,[\mu_0 a_{11}^2(t)+\\
&\qquad + 2\mu_0\varphi_1(t)\,a_{12}(t)+2\varphi_1(t)\,a_{11}(t)]\}\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
L_{31} &= \int\limits_B\int\limits_B \{A_1(s,t)\,a_{30}(t)+2\mu_0 A_2(s,t)[\varphi_1(t)\,a_{21}(t)+\\
&\qquad + a_{20}(t)\,a_{11}(t)]+2A_2(s,t)\varphi_1(t)\,a_{20}(t)+\\
&\qquad + 3\mu_0 A_3(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,a_{11}(t)+\\
&\qquad + A_3(s,t)\,\varphi_1^3(t)\}\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt,\\
&L_{01} = L_{02} = L_{03} = L_{04} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{11.7}$$

Коэффициенты L_{20}, L_{30}, L_{40} вычисляются по формулам (11.6) без изменения. Отметим еще, что формулы (11.6) упрощаются и в условиях леммы 11.1.

Лемма 11.3. *Если коэффициенты, входящие в уравнение* (10.4), *удовлетворяют условию*

$$f(s) \equiv 0 \ \textit{и}\ B_{0n}(s,t) \equiv 0 \quad \textit{для}\ n = 2, 3, 4, \ldots,$$

то

$$a_{0n}(s) \equiv 0\ \textit{и}\ L_{0n} = 0\ \textit{для}\ n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$(a_{01}(s) = g(s)).$$

---

[1]) Так как $A_1(s,t) = \dfrac{1}{\mu_0}K(s,t)$ и $\varphi_1(s) = \int\limits_B K(s,t)\,\varphi_1(t)\,dt$.

Доказательство. Из условия согласно (10.7) следует, что $g(s) \equiv 0$ и $g_{0n}(s) \equiv 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Полагая теперь в равенстве (10.15) $\xi = 0$, отсюда получим

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_{0k}(s)\lambda^k = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\int_B g_{mn}(s, t)\,[a_{02}(t) + a_{03}(t)\lambda + a_{04}(t)\lambda^2 + \ldots]^m \lambda^{2m+n}\,dt.$$

Порядок ряда, стоящего справа, относительно λ не ниже трех, а потому из левой части равенства следует, что $a_{02}(s) \equiv 0$. Предыдущее равенство принимает вид

$$\sum_{k=3}^{\infty} a_{0k}(s)\lambda^k = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\int_B g_{mn}(s, t)\,[a_{03}(s) + \lambda a_{04}(s) + \lambda^2 a_{05}(s) + \ldots]^m \lambda^{3m+n}\,dt.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, мы из данного равенства находим, что $a_{03}(s) \equiv 0$. Продолжая этот процесс, мы получим, что $a_{0n}(s) \equiv 0$ для $n = 2, 3, \ldots$ Полагая $a_{01}(s) = g(s)$, придем к первому утверждению леммы. Отсюда и из (10.17) следует второе утверждение леммы.

Отметим, что в условиях данной леммы упрощаются и другие из формул (11.6) для коэффициентов L_{mn}.

11.2. Коэффициенты одномерного уравнения разветвления нелинейного интегрального уравнения Гаммерштейна. В п. 10.6 мы рассмотрели уравнение Гаммерштейна (10.1') и вывели формулы (10.30). При помощи этих формул и равенства (11.2) мы находим, что

$$\int_B g(\tau, t)\,\overline{\varphi_1(\tau)}\,d\tau = \int_B C(\tau, t)\,\overline{\psi_1(\tau)}\,d\tau.$$

Отсюда и из формул (10.31), (10.17) получаются следующие выражения для первых коэффициентов L_{mn} уравнения разветвления:

$$\left.\begin{aligned} L_{20} &= \mu_0 \int_B\int_B C(s, t)\,A_2(t)\,\varphi_1^2(t)\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\ L_{30} &= \mu_0 \int_B\int_B C(s, t)\,\{2A_2(t)\,a_{20}(t) + A_3(t)\varphi_1^2(t)\}\times \\ &\qquad\times \varphi_1(t)\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \end{aligned}\right\} \quad (11.8)$$

$$
\left.\begin{aligned}
L_{40} &= \mu_0 \int\limits_B \int\limits_B C(s,t)\{A_2(t)[a_{20}^2(t) + 2\varphi_1(t)a_{30}(t)] + \\
&\qquad + 3A_3(t)\varphi_1^2(t)a_{20}(t) + \\
&\qquad\qquad + A_4(t)\varphi_1^4(t)\}\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{01} &= \int\limits_B f(t)\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{02} &= \int\limits_B \int\limits_B C(s,t)\{A_1(t) + \mu_0 A_2(t)g(t)\}\times \\
&\qquad\qquad \times g(t)\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{11} &= \int\limits_B \int\limits_B C(s,t)\{A_1(t) + 2\mu_0 A_2(t)g(t)\}\times \\
&\qquad\qquad \times \varphi_1(t)\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{03} &= \int\limits_B \int\limits_B C(s,t)\{A_1(t)a_{02}(t) + 2\mu_0 A_2(t)g(t)\times \\
&\quad \times a_{02}(t) + A_2(t)g^2(t) + \\
&\qquad\qquad + \mu_0 A_3(t)g^3(t)\}\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{12} &= \int\limits_B \int\limits_B C(s,t)\{A_1(t)a_{11}(t) + 2\mu_0 A_2(t)\times \\
&\times[\varphi_1(t)a_{02}(t) + g(t)a_{11}(t)] + 2A_2(t)\varphi_1(t)g(t) + \\
&\qquad\qquad + 3\mu_0 A_3(t)\varphi_1(t)g^2(t)\}\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{21} &= \int\limits_B \int\limits_B C(s,t)\{A_1(t)a_{20}(t) + 2\mu_0 A_2(t)\times \\
&\quad \times[g(t)a_{20}(t) + \varphi_1(t)a_{11}(t)] + A_2(t)\varphi_1^2(t) + \\
&\qquad\qquad + 3\mu_0 A_3(t)\varphi_1^2(t)g(t)\}\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{04} &= \int\limits_B \int\limits_B C(s,t)\{A_1(t)a_{03}(t) + \\
&\qquad + \mu_0 A_2(t)[a_{02}^2(t) + 2g(t)a_{03}(t)] + \\
&\quad + 2A_2(t)g(t)a_{02}(t) + 3\mu_0 A_3(t)g^2(t)a_{02}(t) + \\
&\qquad + A_3(t)g^3(t) + \mu_0 A_4(t)g^4(t)\}\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{13} &= \int\limits_B \int\limits_B C(s,t)\{A_1(t)a_{12}(t) + \\
&\quad + 2\mu_0 A_2(t)[\varphi_1(t)a_{03}(t) + g(t)a_{12}(t) +
\end{aligned}\right\} \quad (11.8)
$$

$$\left.\begin{aligned}
&+a_{11}(t)\,a_{02}(t)] + 2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{02}(t) + \\
&+g(t)\,a_{11}(t)] + 3\mu_0 A_3(t)\,[g^2(t)\,a_{11}(t) + \\
&+2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{02}(t)] + 3A_3(t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t) + \\
&\qquad + 4\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1(t)\,g^3(t)\}\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{22} &= \int_B\int_B C(s,t)\,\{A_1(t)\,a_{21}(t) + \\
&+\mu_0 A_2(t)\,[a_{11}^2(t) + 2\varphi_1(t)\,a_{12}(t) + 2g(t)\,a_{21}(t) + \\
&+2a_{20}(t)\,a_{02}(t)] + 2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{11}(t) + \\
&+g(t)\,a_{20}(t)] + 3\mu_0 A_3(t)\,[g^2(t)\,a_{20}(t) + \\
&+\varphi_1^2(t)\,a_{02}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{11}(t)] + \\
&\qquad + 3A_3(t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t) + \\
&\qquad + 6\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1^2(t)\,g^2(t)\}\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt, \\
L_{31} &= \int_B\int_B C(s,t)\,\{A_1(t)\,a_{30}(t) + \\
&+2\mu_0 A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{21}(t) + g(t)\,a_{30}(t) + \\
&+a_{20}(t)\,a_{11}(t)] + 2A_2(t)\,\varphi_1(t)\,a_{20}(t) + \\
&+3\mu_0 A_3(t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{11}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{20}(t)] + \\
&+A_3(t)\,\varphi_1^3(t) + 4\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1^3(t)\,g(t)\}\,\overline{\psi_1(s)}\,ds\,dt.
\end{aligned}\right\} \tag{11.8}$$

Упрощаются и формулы (11.7), если $g(t) \equiv 0$. Отметим еще, что формулы (11.8) упрощаются в условиях леммы 11.1.

Дальнейшие упрощения формул для коэффициентов получаются в случае симметрии ядра $C(s, t)$, т. е. когда

$$\overline{C(t, s)} = C(s, t).$$

11.3. Коэффициенты двумерного уравнения разветвления общего нелинейного интегрального уравнения. Для вычисления коэффициентов двумерного уравнения разветвления

$$L_{mnp}^{(i)} \qquad (i = 1,\ 2)$$

мы предварительно преобразуем формулы (10.23). Как и в одномерном случае, мы рассмотрим равенства (11.1), где

$R\ (s,\ t)$ — резольвента Фредгольма ядра

$$E(s,t)=K(s,t)-\sum_{\nu=1}^{p}\psi_\nu(s)\overline{\varphi_\nu(t)}.$$

Из (11.1) при помощи формулы (8.4) мы находим

$$g_{mn}(s,\ t)-\int_B E(s,\tau)\,g_{mn}(\tau,t)\,d\tau=B_{mn}(s,t),$$

или, подставляя выражение для $E\ (s,\ t)$,

$$g_{mn}(s,t)-\int_B[K(s,\tau)-\sum_{\nu=1}^{p}\psi_\nu(s)\overline{\varphi_\nu(\tau)}]\,g_{mn}(\tau,t)\,d\tau=$$
$$=B_{mn}(s.\ t),$$

или

$$g_{mn}(s,t)-\int_B K(s,\tau)\,g_{mn}(\tau,t)\,d\tau=$$
$$=B_{mn}(s,t)-\sum_{\nu=1}^{p}\psi_\nu(s)\int_B g_{mn}(\tau,t)\overline{\varphi_\nu(\tau)}\,d\tau.$$

Так как $g_{mn}\ (s,\ t)$ — решение данного уравнения, то по теореме Фредгольма правая часть этого равенства ортогональна всем собственным функциям $\psi_i\ (s)$ оператора T^* (см. (10.6′)), т. е. выполняются равенства

$$\int_B[B_{mn}(s,t)-\sum_{\nu=1}^{p}\psi_\nu(s)\int_B g_{mn}(\tau,t)\overline{\varphi_\nu(\tau)}\,d\tau]\,\overline{\psi_i(s)}\,ds=0$$
$$(i=1,2,\ldots,p).$$

Отсюда в силу ортонормальности функций $\psi_i\ (s)$ находим

$$\int_B g_{mn}(\tau,t)\overline{\varphi_i(\tau)}\,d\tau=\int_B B_{mn}(\tau,t)\overline{\psi_i(\tau)}\,d\tau \qquad (11.9)$$
$$(i=1,2,3,\ldots,p).$$

Аналогично выводятся и следующие формулы:

$$\int_B g(\tau)\,\overline{\varphi_i(\tau)}\,d\tau=\int_B f(\tau)\,\overline{\psi_i(\tau)}\,d\tau \quad (i=1,2,\ldots,p). \ (11.10)$$

Используя данные формулы, мы из (10.23) и (10.22) находим $(i = 1, 2)$

$$
\left.
\begin{aligned}
L_{011}^{(i)} &= \int_B\int_B [B_{11}(s,t) + 2B_{20}(s,t)\,g(t)]\times\\
&\qquad\qquad\times \varphi_2(t)\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L_{101}^{(i)} &= \int_B\int_B [B_{11}(s,t) + 2B_{20}(s,t)\,g(t)]\times\\
&\qquad\qquad\times \varphi_1(t)\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L_{110}^{(i)} &= 2\int_B\int_B B_{20}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L_{200}^{(i)} &= \int_B\int_B B_{20}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L_{020}^{(i)} &= \int_B\int_B B_{20}(s,t)\,\varphi_2^2(t)\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L_{002}^{(i)} &= \int_B\int_B [B_{02}(s,t) + B_{11}(s,t)\,g(t) +\\
&\qquad\qquad + B_{20}(s,t)\,g^2(t)]\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L_{111}^{(i)} &= \int_B\int_B \{B_{11}(s,t)\,a_{110}(t) +\\
&+ 2B_{12}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t) + 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{011}(t) +\\
&\quad + \varphi_2(t)\,a_{101}(t) + g(t)\,a_{110}(t)] +\\
&+ 2B_{21}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t) +\\
&\qquad + 6B_{30}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g(t)\}\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L_{120}^{(i)} &= \int_B\int_B \{2B_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{020}(t) +\\
&\quad + \varphi_2(t)\,a_{110}(t)] + 3B_{30}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t)\}\times\\
&\qquad\qquad\times\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L_{102}^{(i)} &= \int_B\int_B \{B_{11}(s,t)\,a_{101}(t) + B_{12}(s,t)\,\varphi_1(t) +\\
&\quad + 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{002}(t) + g(t)\,a_{101}(t)] +\\
&\quad + 2B_{21}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g(t) +\\
&\qquad + 3B_{30}(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t)\}\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,
\end{aligned}
\right\}
\quad (11.11)
$$

$$\left.\begin{aligned}
L_{012}^{(i)} = \int\limits_B\int\limits_B \{ & B_{11}(s,t)\,a_{011}(t) + B_{12}(s,t)\,\varphi_2(t) + \\
& + 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_2(t)\,a_{002}(t) + g(t)\,a_{011}(t)] + \\
& + 2B_{21}(s,t)\,\varphi_2(t)\,g(t) + \\
& + 3B_{30}(s,t)\,\varphi_2(t)g^2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{021}^{(i)} = \int\limits_B\int\limits_B \{ & B_{11}(s,t)\,a_{020}(t) + \\
& + 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_2(t)\,a_{011}(t) + g(t)\,a_{020}(t)] + \\
& + B_{21}(s,t)\,\varphi_2^2(t) + \\
& + 3B_{30}(s,t)\,\varphi_2^2(t)\,g(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{201}^{(i)} = \int\limits_B\int\limits_B \{ & B_{11}(s,t)\,a_{200}(t) + \\
& + 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{101}(t) + g(t)\,a_{200}(t)] + \\
& + B_{21}(s,t)\,\varphi_1^2(t) + \\
& + 3B_{30}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{210}^{(i)} = \int\limits_B\int\limits_B \{ & 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{110}(t) + \varphi_2(t)\,a_{200}(t)] + \\
& + 3B_{30}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{300}^{(i)} = \int\limits_B\int\limits_B [& 2B_{20}(s,t)\,\varphi_1(t)\,a_{200}(t) + \\
& + B_{30}(s,t)\,\varphi_1^3(t)]\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{030}^{(i)} = \int\limits_B\int\limits_B [& 2B_{20}(s,t)\,\varphi_2(t)\,a_{020}(t) + \\
& + B_{30}(s,t)\,\varphi_2^3(t)]\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{003}^{(i)} = \int\limits_B\int\limits_B \{ & B_{03}(s,t) + B_{11}(s,t)\,a_{002}(t) + \\
& + B_{12}(s,t)\,g(t) + 2B_{20}(s,t)\,g(t)\,a_{002}(t) + \\
& + B_{21}(s,t)\,g^2(t) + B_{30}(s,t)\,g^3(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{004}^{(i)} = \int\limits_B\int\limits_B \{ & B_{04}(s,t) + B_{11}(s,t)\,a_{003}(t) + \\
& + B_{12}(s,t)\,a_{002}(t) + B_{13}(s,t)\,g(t) + \\
& + B_{20}(s,t)\,[a_{002}^2(t) + 2g(t)\,a_{003}(t)] + \\
& + 2B_{21}(s,t)\,g(t)\,a_{002}(t) + B_{22}(s,t)\,g^2(t) +
\end{aligned}\right\} \quad (11.11)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+3B_{30}(s,t)\,g^2(t)\,a_{002}(t)+B_{31}(s,t)\,g^3(t)+\\
&\qquad\qquad+B_{40}(s,t)\,g^4(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
&L_{040}^{(i)}=\int_B\int_B\{B_{20}(s,t)\,[a_{020}^2(t)+2\varphi_2(t)\,a_{030}(t)]+\\
&\qquad+3B_{30}(s,t)\,\varphi_2^2(t)\,a_{020}(t)+\\
&\qquad\qquad+B_{40}(s,t)\,\varphi_2^4(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
&L_{400}^{(i)}=\int_B\int_B\{B_{20}(s,t)\,[a_{200}^2(t)+2\varphi_1(t)\,a_{300}(t)]+\\
&\qquad+3B_{30}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,a_{200}(t)+\\
&\qquad\qquad+B_{40}(s,t)\,\varphi_1^4(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
&L_{022}^{(i)}=\int_B\int_B\{B_{11}(s,t)\,a_{021}(t)+B_{12}(s,t)\,a_{020}(t)+\\
&\qquad+B_{20}(s,t)\,[a_{011}^2(t)+2g(t)\,a_{021}(t)+\\
&\qquad+2\varphi_2(t)\,a_{012}(t)+2a_{002}(t)\,a_{020}(t)]+\\
&\quad+2B_{21}(s,t)\,[\varphi_2(t)\,a_{011}(t)+g(t)\,a_{020}(t)]+\\
&\quad+B_{22}(s,t)\,\varphi_2^2(t)+3B_{30}(s,t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{002}(t)+\\
&\qquad+g^2(t)\,a_{020}(t)+2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{011}(t)]+\\
&\qquad\qquad+3B_{31}(s,t)\,\varphi_2^2(t)\,g(t)+\\
&\qquad\qquad+6B_{40}(s,t)\,\varphi_2^2(t)\,g^2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
&L_{202}^{(i)}=\int_B\int_B\{B_{11}(s,t)\,a_{201}(t)+B_{12}(s,t)\,a_{200}(t)+\\
&\qquad+B_{20}(s,t)\,[a_{101}^2(t)+2g(t)\,a_{201}(t)+\\
&\qquad\qquad+2\varphi_1(t)\,a_{102}(t)+\\
&\quad+2a_{002}(t)a_{200}(t)]+2B_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{101}(t)+\\
&\qquad+g(t)\,a_{200}(t)]+B_{22}(s,t)\,\varphi_1^2(t)+\\
&\quad+3B_{30}(s,t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{002}(t)+g^2(t)\,a_{200}(t)+\\
&\quad+2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{101}(t)]+3B_{31}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t)+\\
&\qquad\qquad+6B_{40}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,g^2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,
\end{aligned}
\right\}\quad(11.11)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
L^{(i)}_{220} = \int_B\int_B \{ & B_{20}(s,t)\,[a^2_{110}(t) + 2\varphi_1(t)\,a_{120}(t) + {} \\
& + 2\varphi_2(t)\,a_{210}(t) + 2a_{200}(t)\,a_{020}(t)] + 3B_{30}(s,t)\times \\
& \times[\varphi_1^2(t)\,a_{020}(t) + \varphi_2^2(t)\,a_{200}(t) + 2\varphi_1(t)\varphi_2(t)\,a_{110}(t)] + {} \\
& + 6B_{40}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2^2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L^{(i)}_{112} = \int_B\int_B \{ & B_{11}(s,t)\,a_{111}(t) + B_{12}(s,t)\,a_{110}(t) + {} \\
& + 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{012}(t) + \varphi_2(t)\,a_{102}(t) + {} \\
& + g(t)\,a_{111}(t) + a_{101}(t)\,a_{011}(t) + a_{110}(t)\,a_{002}(t)] + {} \\
& + 2B_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{011}(t) + \varphi_2(t)\,a_{101}(t) + {} \\
& + g(t)\,a_{110}(t)] + 2B_{22}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t) + {} \\
& + 3B_{30}(s,t)\,[g^2(t)\,a_{110}(t) + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{002}(t) + {} \\
& + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{011}(t) + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{101}(t)] + {} \\
& + 6B_{31}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g(t) + {} \\
& + 12B_{40}(s,t)\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g^2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L^{(i)}_{121} = \int_B\int_B \{ & B_{11}(s,t)\,a_{120}(t) + 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\times \\
& \times a_{021}(t) + \varphi_2(t)\,a_{111}(t) + g(t)\,a_{120}(t) + {} \\
& + a_{110}(t)\,a_{011}(t) + a_{101}(t)\,a_{020}(t)] + {} \\
& + 2B_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{020}(t) + \varphi_2(t)\,a_{110}(t)] + {} \\
& + 3B_{30}(s,t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{101}(t) + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{011}(t) + {} \\
& + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{020}(t) + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{110}(t)] + {} \\
& + 3B_{31}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t) + {} \\
& + 12B_{40}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2\times(t)\,g(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L^{(i)}_{211} = \int_B\int_B \{ & B_{11}(s,t)\,a_{210}(t) + 2B_{20}(s,t)\times \\
& \times[\varphi_1(t)\,a_{111}(t) + \varphi_2(t)\,a_{201}(t) + g(t)\,a_{210}(t) + {} \\
& + a_{110}(t)\,a_{101}(t) + a_{200}(t)\,a_{011}(t)] + {} \\
& + 2B_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{110}(t) + {} \\
& + \varphi_2(t)\,a_{200}(t)] + 3B_{30}(s,t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{011}(t) + {} \\
& + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{101}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{110}(t) + {} \\
& + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{200}(t)] + 3B_{31}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t) + {} \\
& + 12B_{40}(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t)\,g(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,
\end{aligned}
\right\}\quad (11.11)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
L_{013}^{(i)} &= \int\limits_B\int\limits_B \{ B_{11}(s,t)\, a_{012}(t) + B_{12}(s,t)\, a_{011}(t) + \\
&\quad + B_{13}(s,t)\,\varphi_2(t) + 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_2(t)\, a_{003}(t) + \\
&\quad + g(t)\, a_{012}(t) + a_{011}(t)\, a_{002}(t)] + \\
&\quad + 2B_{21}(s,t)\,[\varphi_2(t)\, a_{002}(t) + g(t)\, a_{011}(t)] + \\
&\quad + 2B_{22}(s,t)\,\varphi_2(t)\, g(t) + 3B_{30}(s,t)\,[g^2(t)\, a_{011}(t) + \\
&\quad + 2\varphi_2(t)\, g(t)\, a_{002}(t)] + 3B_{31}(s,t)\,\varphi_2(t)\, g^2(t) + \\
&\quad + 4B_{40}(s,t)\,\varphi_2(t)\, g^3(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{031}^{(i)} &= \int\limits_B\int\limits_B \{ B_{11}(s,t)\, a_{030}(t) + 2B_{20}(s,t) \times \\
&\quad \times [\varphi_2^2(t)\, a_{011}(t) + 2\varphi_2(t)\, g(t)\, a_{020}(t)] + \\
&\quad + 2B_{21}(s,t)\,\varphi_2(t)\, a_{020}(t) + 3B_{30}(s,t) \times \\
&\quad \times [\varphi_2^2(t)\, a_{011}(t) + 2\varphi_2(t)\, g(t)\, a_{020}(t)] + B_{31}(s,t) \times \\
&\quad \times \varphi_2^3(t) + 4B_{40}(s,t)\,\varphi_2^3(t)\, g(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{103}^{(i)} &= \int\limits_B\int\limits_B \{ B_{11}(s,t)\, a_{102}(t) + B_{12}(s,t)\, a_{101}(t) + \\
&\quad + B_{13}(s,t)\,\varphi_1(t) + 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\, a_{003}(t) + \\
&\quad + g(t)\, a_{102}(t) + a_{101}(t)\, a_{002}(t)] + \\
&\quad + 2B_{21}(s,t)\,[\varphi_1(t)\, a_{002}(t) + g(t)\, a_{101}(t)] + \\
&\quad + 2B_{22}(s,t)\,\varphi_1(t)\, g(t) + 3B_{30}(s,t)\,[g^2(t)\, a_{101}(t) + \\
&\quad + 2\varphi_1(t)\, g(t)\, a_{002}(t)] + 3B_{31}(s,t)\,\varphi_1(t)\, g^2(t) + \\
&\quad + 4B_{40}(s,t)\,\varphi_1(t)\, g^3(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{301}^{(i)} &= \int\limits_B\int\limits_B \{ B_{11}(s,t)\, a_{300}(t) + \\
&\quad + 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\, a_{201}(t) + g(t)\, a_{300}(t) + \\
&\quad + a_{101}(t)\, a_{200}(t)] + 2B_{21}(s,t)\,\varphi_1(t)\, a_{200}(t) + \\
&\quad + 3B_{30}(s,t)\,[\varphi_1^2(t)\, a_{101}(t) + 2\varphi_1(t)\, g(t)\, a_{200}(t)] + \\
&\quad + B_{31}(s,t)\,\varphi_1^3(t) + 4B_{40}(s,t)\,\varphi_1^3(t)\, g(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{130}^{(i)} &= \int\limits_B\int\limits_B \{ 2B_{20}(s,t)\,[\varphi_1(t)\, a_{030}(t) + \varphi_2(t)\, a_{120}(t) + \\
&\quad + a_{110}(t)\, a_{020}(t)] + 3B_{30}(s,t)\,[\varphi_2^2(t)\, a_{110}(t) + \\
&\quad + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\, a_{020}(t)] + \\
&\quad + 4B_{40}(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^3(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt,
\end{aligned}
\right\}
\tag{11.11}
$$

$$\left.\begin{aligned} L_{310}^{(i)} = \iint\limits_{B\,B} \{2B_{20}(s, t)[\varphi_1(t)\,a_{210}(t) + \varphi_2(t)\,a_{300}(t) + \\ + a_{110}(t)\,a_{200}(t)] + 3B_{30}(s, t)[\varphi_1^2(t)\,a_{110}(t) + \\ + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{200}(t)] + 4B_{40}(s, t)\varphi_1^3(t)\,\varphi_2(t)\}\times \\ \times\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (11.11)$$

11.4. Коэффициенты двумерного уравнения разветвления для частных случаев. Сначала мы рассмотрим частный случай уравнения (10.1), когда выполняется условие (10.5). В этом случае, как мы видели, имеют место равенства (10.25) и (10.26), причем $g_{mn}(s, t) \equiv 0$ при $n \geqslant 0$. Используя эти равенства, а также равенства (11.9) и (11.10), мы для двумерного случая ($i = 1, 2$) из (10.23) и (10.28) получаем

$$\left.\begin{aligned} L_{011}^{(i)} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s, t) + 2\mu_0 A_2(s, t)\,g(t)\}\,\varphi_2(t)\times \\ &\qquad\times\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\ L_{101}^{(i)} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s, t) + 2\mu_0 A_2(s, t)\,g(t)\}\,\varphi_1(t)\times \\ &\qquad\times\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\ L_{110}^{(i)} &= 2\mu_0 \iint\limits_{BB} A_2(s, t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\ L_{200}^{(i)} &= \mu_0 \iint\limits_{BB} A_2(s, t)\,\varphi_1^2(t)\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\ L_{020}^{(i)} &= \mu_0 \iint\limits_{BB} A_2(s, t)\,\varphi_2^2(t)\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\ L_{002}^{(i)} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s,t) + \mu_0 A_2(s,t)g(t)\}g(t)\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\ L_{111}^{(i)} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s, t)\,a_{110}(t) + \\ &+ 2\mu_0 A_2(s, t)[\varphi_1(t)\,a_{011}(t) + \varphi_2(t)\,a_{101}(t) + \\ &+ g(t)\,a_{110}(t)] + 2A_2(s, t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t) + \\ &+ 6\mu_0 A_3(s, t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \end{aligned}\right\} \qquad (11.12)$$

$$
\left.\begin{aligned}
L^{(i)}_{120} &= \mu_0 \iint\limits_{BB} \{2A_2(s, t)\,[\varphi_1(t)\,a_{020}(t) + {}\\
&\qquad + \varphi_2(t)\,a_{110}(t)] + 3A_3(s, t)\,\varphi_1(t)\varphi_2^2(t)\} \times {}\\
&\qquad\qquad \times \overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L^{(i)}_{102} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s, t)\,a_{101}(t) + 2\mu_0 A_2(s, t) \times {}\\
&\qquad \times [g(t)\,a_{101}(t) + \varphi_1(t)\,a_{002}(t)] + {}\\
&\qquad + 2A_2(s, t)\,\varphi_1(t)\,g(t) + {}\\
&\qquad + 3\mu_0 A_3(s, t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L^{(i)}_{012} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s, t)\,a_{011}(t) + 2\mu_0 A_2(s, t) \times {}\\
&\qquad \times [\varphi_2(t)\,a_{002}(t) + g(t)\,a_{011}(t)] + {}\\
&+ 2A_2(s, t)\,\varphi_2(t)\,g(t) + 3\mu_0 A_3(s, t)\,\varphi_2(t)\,g^2(t)\} \times {}\\
&\qquad\qquad \times \overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L^{(i)}_{021} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s, t)\,a_{020}(t) + {}\\
&\qquad + 2\mu_0 A_2(s, t)\,[\varphi_2(t)\,a_{011}(t) + g(t)\,a_{020}(t)] + {}\\
&+ A_2(s, t)\,\varphi_2^2(t) + 3\mu_0 A_3(s, t)\,\varphi_2^2(t)\,g(t)\} \times {}\\
&\qquad\qquad \times \overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L^{(i)}_{201} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s, t)\,a_{200}(t) + {}\\
&\qquad + 2\mu_0 A_2(s, t)\,[\varphi_1(t)\,a_{101}(t) + g(t)\,a_{200}(t)] + {}\\
&+ A_2(s, t)\,\varphi_1^2(t) + 3\mu_0 A_3(s, t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t)\} \times {}\\
&\qquad\qquad \times \overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L^{(i)}_{210} &= \mu_0 \iint\limits_{BB} \{2A_2(s, t)\,[\varphi_1(t)\,a_{110}(t) + {}\\
&\qquad + \varphi_2(t)\,a_{200}(t)] + 3A_3(s, t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t)\} \times {}\\
&\qquad\qquad \times \overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
L^{(i)}_{300} &= \mu_0 \iint\limits_{BB} \{2A_2(s, t)\,a_{200}(t) + {}\\
&\qquad + A_3(s, t)\,\varphi_1^2(t)\}\,\varphi_1(t)\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,
\end{aligned}\right\} \quad (11.12)
$$

$$\left.\begin{aligned}
L_{030}^{(i)} &= \mu_0 \iint\limits_{BB} \{2A_2(s,\ t)\, a_{020}(t) + \\
&\qquad + A_3(s,\ t)\, \varphi_2^2(t)\}\, \varphi_2(t)\, \overline{\psi_i}(s)\, ds\, dt, \\
L_{003}^{(i)} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s,\ t)\, a_{002}(t) + \\
&\quad + 2\mu_0 A_2(s,\ t)\, g(t)\, a_{002}(t) + A_2(s,\ t)\, g^2(t) + \\
&\qquad + \mu_0 A_3(s,\ t)\, g^3(t)\}\, \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{040}^{(i)} &= \mu_0 \iint\limits_{BB} \{A_2(s,\ t)\, [a_{020}^2(t) + 2\varphi_2(t)\, a_{030}(t)] + \\
&\quad + 3A_3(s,\ t)\, \varphi_2^2(t)\, a_{020}(t) + \\
&\qquad + A_4(s,\ t)\, \varphi_2^4(t)\}\, \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{004}^{(i)} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s,\ t)\, a_{003}(t) + \mu_0 A_2(s,\ t)\, [a_{002}^2(t) + \\
&\quad + 2g(t)\, a_{003}(t)] + 2A_2(s,\ t)\, g(t)\, a_{002}(t) + \\
&\quad + 3\mu_0 A_3(s,\ t)\, g^2(t)\, a_{002}(t) + A_3(s,\ t)\, g^3(t) + \\
&\qquad + \mu_0 A_4(s,\ t)\, g^4(t)\}\, \overline{\varphi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{400}^{(i)} &= \mu_0 \iint\limits_{BB} \{A_2(s,\ t)\, [a_{200}^2(t) + 2\varphi_1(t)\, a_{300}(t)] + \\
&\quad + 3A_3(s,\ t)\, \varphi_1^2(t)\, a_{200}(t) + \\
&\qquad + A_4(s,\ t)\, \varphi_1^4(t)\}\, \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{022}^{(i)} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s,\ t)\, a_{021}(t) + \mu_0 A_2(s,\ t)\, [a_{011}^2(t) + \\
&\quad + 2\varphi_2(t)\, a_{012}(t) + 2g(t)\, a_{021}(t) + \\
&\quad + 2a_{020}(t)\, a_{002}(t)] + 2A_2(s,\ t)\, [\varphi_2(t)\, a_{011}(t) + \\
&\quad + g(t)\, a_{020}(t)] + 3\mu_0 A_3(s,\ t)\, [\varphi_2^2(t)\, a_{002}(t) + \\
&\quad + g^2(t)\, a_{020}(t) + 2\varphi_2(t)\, g(t)\, a_{011}(t)] + \\
&\quad + 3A_3(s,\ t)\, \varphi_2^2(t)\, g(t) + \\
&\quad + 6\mu_0 A_4(s,\ t)\, \varphi_2^2(t)\, g^2(t)\}\, \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{202}^{(i)} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s,\ t)\, a_{201}(t) + \mu_0 A_2(s,\ t)\, [a_{101}^2(t) + \\
&\quad + 2\varphi_1(t)\, a_{102}(t) + 2g(t)\, a_{201}(t) +
\end{aligned}\right\} \quad (11.12)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+ 2a_{002}(t)\,a_{200}(t)] + 2A_2(s,\,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{101}(t) + \\
&\quad + g(t)\,a_{200}(t)] + 3\mu_0 A_3(s,\,t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{002}(t) + \\
&\qquad + g^2(t)\,a_{200}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{101}(t)] + \\
&\qquad\qquad + 3A_3(s,\,t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t) + \\
&\qquad\qquad + 6\mu_0 A_4(s,\,t)\,\varphi_1^2(t)\,g^2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{220}^{(i)} &= \mu_0 \iint\limits_{BB} \{A_2(s,\,t)\,[a_{110}^2(t) + 2\varphi_1(t)\,a_{120}(t) + \\
&\qquad + 2\varphi_2(t)\,a_{210}(t) + 2a_{020}(t)\,a_{200}(t)] + \\
&\qquad\qquad + 3A_3(s,\,t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{020}(t) + \\
&\qquad + \varphi_2^2(t)\,a_{200}(t) + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{110}(t)] + \\
&\qquad\qquad + 6A_4(s,\,t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2^2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{112}^{(i)} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s,\,t)\,a_{111}(t) + 2\mu_0 A_2(s,\,t)\,\times \\
&\times [\varphi_1(t)\,a_{012}(t) + \varphi_2(t)\,a_{102}(t) + g(t)\,a_{111}(t) + \\
&\qquad + a_{011}(t)\,a_{101}(t) + a_{110}(t)\,a_{002}(t)] + \\
&\quad + 2A_2(s,\,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{011}(t) + \varphi_2(t)\,a_{101}(t) + \\
&\quad + g(t)\,a_{110}(t)] + 3\mu_0 A_3(s,\,t)\,[g^2(t)\,a_{110}(t) + \\
&\quad + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{002}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{011}(t) + \\
&+ 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{101}(t)] + 6A_3(s,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g(t) + \\
&\qquad + 12\mu_0 A_4(s,\,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g^2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{121}^{(i)} &= \iint\limits_{BB} \{A_1(s,\,t)\,a_{120}(t) + 2\mu_0 A_2(s,\,t)\,\times \\
&\times [\varphi_1(t)\,a_{021}(t) + \varphi_2(t)\,a_{111}(t) + g(t)\,a_{120}(t) + \\
&\qquad + a_{110}(t)\,a_{011}(t) + a_{101}(t)\,a_{020}(t)] + \\
&\quad + 2A_2(s,\,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{020}(t) + \varphi_2(t)\,a_{110}(t)] + \\
&\quad + 3\mu_0 A_3(s,\,t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{101}(t) + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,\times \\
&\qquad \times a_{011}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{020}(t) + \\
&+ 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{110}(t)] + 3A_3(s,\,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t) + \\
&\qquad + 12\mu_0 A_4(s,\,t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t)\,g(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,
\end{aligned}
\right\} \tag{11.12}
$$

$$\left.\begin{aligned}
L_{211}^{(i)} = \iint_{BB} \{ & A_1(s,t)\,a_{210}(t) + 2\mu_0 A_2(s,t) \times \\
& \times [\varphi_1(t)\,a_{111}(t) + \varphi_2(t)\,a_{201}(t) + g(t)\,a_{210}(t) + \\
& \quad + a_{110}(t)\,a_{101}(t) + a_{011}(t)\,a_{200}(t)] + \\
& + 2A_2(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{110}(t) + \varphi_2(t)\,a_{200}(t)] + \\
& + 3\mu_0 A_3(s,t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{011}(t) + \\
& + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{101}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{110}(t) + \\
& + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{200}(t)] + 3A_3(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t) + \\
& + 12\mu_0 A_4(s,t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t)\,g(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{013}^{(i)} = \iint_{BB} \{ & A_1(s,t)\,a_{012}(t) + \\
& + 2\mu_0 A_2(s,t)\,[\varphi_2(t)\,a_{003}(t) + g(t)\,a_{012}(t) + \\
& + a_{011}(t)\,a_{002}(t)] + 2A_2(s,t)\,[\varphi_2(t)\,a_{002}(t) + \\
& + g(t)\,a_{011}(t)] + 3\mu_0 A_3(s,t)\,[g^2(t)\,a_{011}(t) + \\
& + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{002}(t)] + 3A_3(s,t)\,\varphi_2(t)\,g^2(t) + \\
& + 4\mu_0 A_4(s,t)\,\varphi_2(t)\,g^3(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{031}^{(i)} = \iint_{BB} \{ & A_1(s,t)\,a_{030}(t) + \\
& + 2\mu_0 A_2(s,t)\,[\varphi_2(t)\,a_{021}(t) + g(t)\,a_{030}(t) + \\
& + a_{011}(t)\,a_{020}(t)] + 2A_2(s,t)\,\varphi_2(t)\,a_{020}(t) + \\
& + 3\mu_0 A_3(s,t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{011}(t) + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{020}(t)] + \\
& + A_3(s,t)\,\varphi_2^3(t) + 4\mu_0 A_4(s,t)\,\varphi_2^3(t)\,g(t)\} \times \\
& \times \overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{103}^{(i)} = \iint_{BB} \{ & A_1(s,t)\,a_{102}(t) + \\
& + 2\mu_0 A_2(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{003}(t) + g(t)\,a_{102}(t) + \\
& + a_{101}(t)\,a_{002}(t)] + 2A_2(s,t)\,[\varphi_1(t)\,a_{002}(t) + \\
& + g(t)\,a_{101}(t)] + 3\mu_0 A_3(s,t)\,[g^2(t)\,a_{101}(t) + \\
& + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{002}(t)] + 3A_3(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t) + \\
& + 4\mu_0 A_4(s,t)\,\varphi_1(t)\,g^3(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,
\end{aligned}\right\} \quad (11.12)$$

$$\left.\begin{aligned}
L_{301}^{(i)} &= \iint_{BB} \{ A_1(s, t)\, a_{300}(t) + 2\bar{\mu}_0 A_2(s, t) \times \\
&\quad \times [\varphi_1(t)\, a_{201}(t) + g(t)\, a_{300}(t) + a_{101}(t)\, a_{200}(t)] + \\
&\quad + 2A_2(s, t)\, \varphi_1(t)\, a_{200}(t) + 3\bar{\mu}_0 A_3(s, t) \times \\
&\quad \times [\varphi_1^2(t)\, a_{101}(t) + 2\varphi_1(t)\, g(t)\, a_{200}(t)] + \\
&\quad + A_3(s, t)\, \varphi_1^3(t) + 4\bar{\mu}_0 A_4(s, t)\, \varphi_1^3(t)\, g(t)\} \times \\
&\qquad\qquad \times \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{130}^{(i)} &= \mu_0 \iint_{BB} \{2A_2(s, t)\, [\varphi_1(t)\, a_{030}(t) + \\
&\quad + \varphi_2(t)\, a_{120}(t) + a_{110}(t)\, a_{020}(t)] + \\
&\quad + 3A_3(s, t)\, [\varphi_2^2(t)\, a_{110}(t) + 2\varphi_1(t)\, \varphi_2(t)\, a_{020}(t)] + \\
&\qquad + 4A_4(s, t)\, \varphi_1(t)\, \varphi_2^3(t)\}\, \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{310}^{(i)} &= \mu_0 \iint_{BB} \{2A_2(s, t)\, [\varphi_1(t)\, a_{210}(t) + \\
&\quad + \varphi_2(t)\, a_{300}(t) + a_{110}(t)\, a_{200}(t)] + \\
&\quad + 3A_3(s, t)\, [\varphi_1^2(t)\, a_{110}(t) + 2\varphi_1(t)\, \varphi_2(t)\, a_{200}(t)] + \\
&\qquad + 4A_2(s, t)\, \varphi_1^3(t)\, \varphi_2(t)\}\, \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt.
\end{aligned}\right\} \quad (11.12)$$

Перейдем теперь к вычислению первых коэффициентов двумерного уравнения разветвления в случае уравнения Гаммерштейна (10.1′). В этом случае имеют место формулы (10.30), и так же, как при выводе (11.9), находим

$$\int_B g(\tau, t)\, \overline{\varphi_i(\tau)}\, d\tau = \int_B C(\tau, t)\, \overline{\psi_i(\tau)}\, d\tau \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Отсюда и из формул (10.23) и (10.32), получаем (при $i = 1, 2$)

$$\left.\begin{aligned}
L_{011}^{(i)} &= \int_B \int_B C(s, t)\, \{A_1(t) + 2\mu_0 A_2(t)\, g(t)\} \times \\
&\qquad \times \varphi_2(t)\, \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{101}^{(i)} &= \int_B \int_B C(s, t)\, \{A_1(t) + 2\bar{\mu}_0 A_2(t)\, g(t)\} \times \\
&\qquad \times \varphi_1(t)\, \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{110}^{(i)} &= 2\mu_0 \int_B \int_B C(s, t)\, A_2(t)\, \varphi_1(t)\, \varphi_2(t)\, \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt,
\end{aligned}\right\} \quad (11.13)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&L_{200}^{(i)} = \mu_0 \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) A_2(t) \varphi_1^2(t) \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt,\\
&L_{020}^{(i)} = \mu_0 \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) A_2(t) \varphi_2^2(t) \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt,\\
&L_{002}^{(i)} = \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{A_1(t) + \mu_0 A_2(t) g(t)\} \times\\
&\qquad\qquad\qquad \times g(t) \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt,\\
&L_{111}^{(i)} = \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{A_1(t) a_{110}(t) + 2\mu_0 A_2(t) \times\\
&\quad \times [\varphi_1(t) a_{011}(t) + \varphi_2(t) a_{101}(t) + g(t) a_{110}(t)] +\\
&+ 2A_2(t) \varphi_1(t) \varphi_2(t) + 6\mu_0 A_3(t) \varphi_1(t) \varphi_2(t) g(t)\} \times\\
&\qquad\qquad\qquad \times \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt,\\
&L_{120}^{(i)} = \mu_0 \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{2A_2(t) [\varphi_1(t) a_{020}(t) +\\
&+ \varphi_2(t) a_{110}(t)] + 3\mu_0 A_3(t) \varphi_1(t) \varphi_2^2(t)\} \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt,\\
&L_{102}^{(i)} = \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{A_1(t) a_{101}(t) + 2\mu_0 A_2(t) \times\\
&\times [\varphi_1(t) a_{002}(t) + g(t) a_{101}(t)] + 2A_2(t) \varphi_1(t) g(t) +\\
&\qquad + 3\mu_0 A_3(t) \varphi_1(t) g^2(t)\} \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt,\\
&L_{012}^{(i)} = \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{A_1(t) a_{011}(t) + 2\mu_0 A_2(t) \times\\
&\times [\varphi_2(t) a_{002}(t) + g(t) a_{011}(t)] + 2A_2(t) \varphi_2(t) g(t) +\\
&\qquad + 3\mu_0 A_3(t) \varphi_2(t) g^2(t)\} \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt,\\
&L_{021}^{(i)} = \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{A_1(t) a_{020}(t) + 2\mu_0 A_2(t) \times\\
&\times [\varphi_2(t) a_{011}(t) + g(t) a_{020}(t)] + 2A_2(t) \varphi_2^2(t) +\\
&\qquad + 3\mu_0 A_3(t) \varphi_2^2(t) g(t)\} \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt,\\
&L_{201}^{(i)} = \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{A_1(t) a_{200}(t) + 2\mu_0 A_2(t) \times\\
&\quad \times [\varphi_1(t) a_{101}(t) + g(t) a_{200}(t)] + A_2(t) \varphi_1^2(t) +\\
&\qquad + 3\mu_0 A_3(t) \varphi_1^2(t) g(t)\} \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt,
\end{aligned}
\right\}
\tag{11.13}
$$

$$\left.\begin{aligned}
L_{210}^{(i)} &= \mu_0 \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{ 2A_2(t) [\varphi_1(t) a_{110}(t) + \\
&\qquad + \varphi_2(t) a_{200}(t)] + 3A_3(t) \varphi_1^2(t) \varphi_2(t) \} \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{300}^{(i)} &= \mu_0 \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{ 2A_2(t) a_{200}(t) + A_3(t) \varphi_1^2(t) \} \times \\
&\qquad\qquad \times \varphi_1(t) \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{030}^{(i)} &= \mu_0 \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{ 2A_2(t) a_{020}(t) + \\
&\qquad\qquad + A_3(t) \varphi_2^2(t) \} \varphi_2(t) \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{003}^{(i)} &= \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{ A_1(t) a_{002}(t) + \\
&\qquad + 2\mu_0 A_2(t) g(t) a_{002}(t) + A_2(t) g^2(t) + \\
&\qquad\qquad + \mu_0 A_3(t) g^3(t) \} \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{004}^{(i)} &= \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{ A_1(t) a_{003}(t) + \mu_0 A_2(t) \times \\
&\times [a_{002}^2(t) + 2g(t) a_{003}(t)] + 2A_2(t) g(t) a_{002}(t) + \\
&\qquad + 3\mu_0 A_3(t) g^2(t) a_{002}(t) + A_3(t) g^3(t) + \\
&\qquad\qquad + \mu_0 A_4(t) g^4(t) \} \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{040}^{(i)} &= \mu_0 \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{ A_2(t) [a_{020}^2(t) + 2\varphi_2(t) a_{030}(t)] + \\
&+ 3A_3(t) \varphi_2^2(t) a_{020}(t) + A_4(t) \varphi_2^4(t) \} \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{400}^{(i)} &= \mu_0 \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{ A_2(t) [a_{200}^2(t) + \\
&\qquad + 2\varphi_1(t) a_{300}(t)] + 3A_3(t) \varphi_1^2(t) a_{200}(t) + \\
&\qquad\qquad + A_4(t) \varphi_1^4(t) \} \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt, \\
L_{022}^{(i)} &= \int\limits_B \int\limits_B C(s,t) \{ A_1(t) a_{021}(t) + \mu_0 A_2(t) [a_{011}^2(t) + \\
&+ 2\varphi_2(t) a_{012}(t) + 2g(t) a_{021}(t) + 2a_{020}(t) a_{002}(t)] + \\
&+ 2A_2(t) [\varphi_2(t) a_{011}(t) + g(t) a_{020}(t)] + 3\mu_0 A_3(t) \times \\
&\times [\varphi_2^2(t) a_{002}(t) + g^2(t) a_{020}(t) + 2\varphi_2(t) g(t) a_{011}(t)] + \\
&\quad + 3A_3(t) \varphi_2^2(t) g(t) + 6\mu_0 A_4(t) \varphi_2^2(t) g^2(t) \} \times \\
&\qquad\qquad \times \overline{\psi_i(s)}\, ds\, dt,
\end{aligned}\right\} \tag{11.13}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
L_{202}^{(i)} = \int\limits_B\int\limits_B C(s,t)\{ & A_1(t)\,a_{201}(t) + \mu_0 A_2(t)\,[a_{101}^2(t) + \\
& + 2\varphi_1(t)\,a_{102}(t) + 2g(t)\,a_{201}(t) + 2a_{200}(t)\,a_{002}(t)] + \\
& + 2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{101}(t) + g(t)\,a_{200}(t)] + 3\mu_0 A_3(t)\times \\
& \times[\varphi_1^2(t)\,a_{002}(t) + g^2(t)\,a_{200}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{101}(t)] + \\
& + 3A_3(t)\,\varphi_1^2(t)\,g(t) + 6\mu_0\,\varphi_1^2(t)\,g^2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{220}^{(i)} = \mu_0\int\limits_B\int\limits_B C(s,t)\{ & A_2(t)\,[a_{110}^2(t) + 2\varphi_1(t)\,a_{120}(t) + \\
& + 2\varphi_2(t)\,a_{210}(t) + 2a_{200}(t)\,a_{020}(t)] + 3A_3(t)\times \\
& \times[\varphi_1^2(t)\,a_{020}(t) + \varphi_2^2(t)\,a_{200}(t) + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\times \\
& \times a_{110}(t)] + 6A_4(t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2^2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{112}^{(i)} = \int\limits_B\int\limits_B C(s,t)\{ & A_1(t)\,a_{111}(t) + 2\mu_0 A_2(t)\times \\
& \times[\varphi_1(t)\,a_{012}(t) + \varphi_2(t)\,a_{102}(t) + g(t)\,a_{111}(t) + \\
& + a_{101}(t)\,a_{011}(t) + a_{110}(t)\,a_{002}(t)] + \\
& + 2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{011}(t) + \varphi_2(t)\,a_{101}(t) + \\
& + g(t)\,a_{110}(t)] + 3\mu_0 A_3(t)\,[g^2(t)\,a_{110}(t) + \\
& + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{002}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{011}(t) + \\
& + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{101}(t)] + 6A_3(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g(t) + \\
& + 12\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,g^2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{121}^{(i)} = \int\limits_B\int\limits_B C(s,t)\{ & A_1(t)\,a_{120}(t) + 2\mu_0 A_2(t)\times \\
& \times[\varphi_1(t)\,a_{021}(t) + \varphi_2(t)\,a_{111}(t) + g(t)\,a_{120}(t) + \\
& + a_{110}(t)\,a_{011}(t) + a_{101}(t)\,a_{020}(t)] + \\
& + 2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{020}(t) + \varphi_2(t)\,a_{110}(t)] + \\
& + 3\mu_0 A_3(t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{101}(t) + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{011}(t) + \\
& + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{020}(t) + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{110}(t)] + \\
& + 3A_3(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t) + 12\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^2(t)\,g(t)\}\times \\
& \times\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,
\end{aligned}
\right\}
\qquad (11.13)
$$

$$\left.\begin{aligned}
L_{211}^{(i)} = \int_B\int_B C(s,t)\{&A_1(t)\,a_{210}(t) + 2\mu_0 A_2(t)\times \\
&\times[\varphi_1(t)\,a_{111}(t) + \varphi_2(t)\,a_{201}(t) + g(t)\,a_{210}(t) + \\
&+ a_{110}(t)\,a_{101}(t) + a_{200}(t)\,a_{011}(t)] + \\
&+ 2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{110}(t)] + \varphi_2(t)\,a_{200}(t)] + \\
&+ 3\mu_0 A_3(t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{011}(t) + 2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{101}(t) + \\
&+ 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{110}(t) + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{200}(t)] + \\
&+ 3A_3(t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t) + 12\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1^2(t)\,\varphi_2(t)\,g(t)\}\times \\
&\times\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{013}^{(i)} = \int_B\int_B C(s,t)\{&A_1(t)\,a_{012}(t) + 2\mu_0 A_2(t)\times \\
&\times[\varphi_2(t)\,a_{003}(t) + g(t)\,a_{012}(t) + a_{011}(t)\,a_{002}(t)] + \\
&+ 2A_2(t)\,[\varphi_2(t)\,a_{002}(t) + g(t)\,a_{011}(t)] + \\
&+ 3\mu_0 A_3(t)\,[g^2(t)\,a_{011}(t) + 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{002}(t)] + \\
&+ 3A_3(t)\,\varphi_2(t)\,g^2(t) + 4\mu_0 A_4(t)\,\varphi_2(t)\,g^3(t)\}\times \\
&\times\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{031}^{(i)} = \int_B\int_B C(s,t)\{&A_1(t)\,a_{030}(t) + 2\mu_0 A_2(t)\times \\
&\times[\varphi_2(t)\,a_{021}(t) + g(t)\,a_{030}(t) + a_{011}(t)\,a_{020}(t)] + \\
&+ 2A_2(t)\,\varphi_2(t)\,a_{020}(t) + 3\mu_0 A_3(t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{011}(t) + \\
&+ 2\varphi_2(t)\,g(t)\,a_{020}(t)] + A_3(t)\,\varphi_2^3(t) + \\
&+ 4\mu_0 A_4(t)\,\varphi_2^3(t)\,g(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{103}^{(i)} = \int_B\int_B C(s,t)\{&A_1(t)\,a_{102}(t) + 2\mu_0 A_2(t)\times \\
&\times[\varphi_1(t)\,a_{003}(t) + g(t)\,a_{102}(t) + a_{101}(t)\,a_{002}(t)] + \\
&+ 2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{002}(t) + g(t)\,a_{101}(t)] + \\
&+ 3\mu_0 A_3(t)\,[g^2(t)\,a_{101}(t) + 2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{002}(t)] + \\
&+ 3A_3(t)\,\varphi_1(t)\,g^2(t) + 4\mu_0 A_4(t)\,\varphi_1(t)\,g^3(t)\}\times \\
&\times\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt, \\
L_{301}^{(i)} = \int_B\int_B C(s,t)\{&A_1(t)\,a_{300}(t) + 2\mu_0 A_2(t)\times \\
&\times[\varphi_1(t)\,a_{201}(t) + g(t)\,a_{300}(t)\,a_{101}(t)\,a_{200}(t)] +
\end{aligned}\right\} \quad (11.13)$$

$$\left.\begin{aligned}
&+2A_2(t)\,\varphi_1(t)\,a_{200}(t)+3\mu_0A_3(t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{101}(t)+\\
&\qquad+2\varphi_1(t)\,g(t)\,a_{200}(t)]+A_3(t)\,\varphi_1^3(t)+\\
&\qquad\qquad+4\mu_0A_4(t)\,\varphi_1^3(t)\,g(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
&L_{130}^{(i)}=\mu_0\int_B\int_B C(s,t)\,\{2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{300}(t)+\\
&\qquad+\varphi_2(t)\,a_{120}(t)+a_{110}(t)\,a_{020}(t)]+\\
&\quad+3A_3(t)\,[\varphi_2^2(t)\,a_{110}(t)+2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{020}(t)]+\\
&\qquad\qquad+4A_4(t)\,\varphi_1(t)\,\varphi_2^3(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,\\
&L_{310}^{(i)}=\mu_0\int_B\int_B C(s,t)\,\{2A_2(t)\,[\varphi_1(t)\,a_{210}(t)+\\
&\qquad+\varphi_2(t)\,a_{300}(t)+a_{110}(t)\,a_{200}(t)]+\\
&\quad+3A_3(t)\,[\varphi_1^2(t)\,a_{110}(t)+2\varphi_1(t)\,\varphi_2(t)\,a_{200}(t)]+\\
&\qquad\qquad+4A_4(t)\,\varphi_1^3(t)\,\varphi_2(t)\}\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt.
\end{aligned}\right\}\qquad(11.13)$$

11.5. Некоторые свойства коэффициентов уравнения разветвления. Предложения, аналогичные леммам 11.1, 11.2 и 11.3, имеют место и для коэффициентов многомерного уравнения разветвления. Для простоты мы рассмотрим двумерный случай ($p = 2$).

Лемма 11.4. *Пусть*

$$B_{m0}(s,t)\equiv 0 \quad \textit{для} \quad m=2,3,\ldots,k-1.$$

Тогда

$$L_{mn0}^{(i)}=0 \quad \textit{для} \quad m+n=2,3,\ldots,k-1,$$

$$L_{mn0}^{(i)}=C_{m+n}^{m}\int_B\int_B B_{(m+n)0}(s,t)\,\varphi_1^m(t)\,\varphi_2^n(t)\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt$$

для $m+n=k,\ k+1,\ \ldots,\ 2k-2,$

$$L_{mn0}^{(i)}=C_{m+n}^{n}\int_B B_{(m+n)0}(s,t)\,\varphi_1^m(t)\,\varphi_2^n(t)\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt+$$

$$+\sum_{\substack{\alpha+\beta=k-1\\ p+q=k}} kC_{\alpha+\beta}^{\alpha}\int_B B_{k0}(s,t)\,\varphi_1^{\alpha+p}(t)\,\varphi_2^{\beta+q}(t)\,a_{pq0}(t)\,\overline{\psi_i(s)}\,ds\,dt,$$

для $m+n=2k-1$ (C_{m+n}^{m} — *биномиальные коэффициенты*).

Доказательство. Из формул (10.13) следует, что в условиях леммы $g_{m0}(s, t) \equiv 0$ $(m = 2, 3, \ldots, k-1)$. Учитывая данные равенства и полагая $\lambda = 0$, мы из равенства (10.21) получим

$$\sum_{\mu+\nu=2}^{\infty} a_{\mu\nu 0}(s)\,\xi_1^{\mu}\xi_2^{\nu} = \sum_{m=k}^{\infty}\int_B g_{m0}(s, t)\,[\xi_1\varphi_1(t) + \xi_2\varphi_2(t) + \\ + \sum_{i+j=2} a_{ij0}(s)\,\xi_1^i\xi_2^j + \sum_{i+j=3} a_{ij0}(s)\,\xi_1^i\xi_2^j + \ldots]^m\,dt.$$

Так как порядок правой части данного равенства относительно ξ_1, ξ_2 не ниже k, то в левой части этого равенства должно быть

$$a_{\mu\nu 0}(s) \equiv 0$$

при

$$\mu + \nu \leqslant k - 1.$$

Ввиду этого предыдущее равенство принимает вид

$$\sum_{\mu+\nu=k}^{\infty} a_{\mu\nu 0}(s)\,\xi_1^{\mu}\xi_2^{\nu} = \sum_{m=k}^{\infty}\int_B g_{m0}(s, t)\,[\xi_1\varphi_1(t) + \xi_2\varphi_2(t) + \\ + \sum_{i+j=k}^{\infty} a_{ij0}(s)\,\xi_1^i\xi_2^j]^m\,dt. \quad (11.14)$$

Из данного равенства видно, что одночлены, входящие в его правую часть, порядок которых относительно ξ_1 и ξ_2 меньше чем $2k - 1$, получатся лишь из выражения

$$\sum_{m=k}^{2k-2}\int_B g_{m0}(s, t)\,[\xi_1\varphi_1(t) + \xi_2\varphi_2(t)]^m\,dt.$$

Ввиду этого путем сравнения одинаковых одночленов (относительно ξ_1, ξ_2) в обеих частях последнего равенства получаем

$$a_{\mu\nu 0}(s) = C_{\mu+\nu}^{\mu}\int_B g_{m0}(s, t)\,\varphi_1^{\mu}(t)\,\varphi_2^{\nu}(t)\,dt, \quad (11.15)$$

где

$$m \equiv \mu + \nu = k,$$

$$k + 1, \ldots, 2k - 2.$$

Далее, из (11.14) получаем, что при $\mu+\nu=2k-1$

$$a_{\mu\nu0}(s)=C_{\mu+\nu}^{\mu}\int_B g_{(2k-1)0}(s,t)\,\varphi_1^{\mu}(t)\,\varphi_2^{\nu}(t)\,dt+$$

$$+k\sum_{\substack{\alpha+\beta=k-1\\ p+q=k}}\int_B g_{k0}(s,t)\,\varphi_1^{\alpha+p}(t)\,\varphi_2^{\beta+q}(t)\,a_{pq0}(t)\,dt. \qquad (11.16)$$

Из равенств (11.15) и (11.16) согласно формулам (10.23) и (11.9) вытекают утверждения леммы.

Отметим, что аналогичное предложение имеет место и в случае $p>2$, где p — размерность уравнения разветвления (10.24).

Отметим еще, что лемма 11.2 сохраняется и для коэффициентов многомерного уравнения разветвления. Именно, если выполнено условие (10.5), то при $g(s)\equiv 0$ имеют место равенства

$$a_{j0\cdots 0n}(s)\equiv 0,\quad L_{00\ldots 0n}^{(i)}=0 \qquad (n=2,3,4,\ldots). \qquad (11.17)$$

ГЛАВА V

Описание и построение решений нелинейных интегральных уравнений

§ 12. Описание решений нелинейных интегральных уравнений

12.1. Предварительные замечания. В предыдущих параграфах были рассмотрены различные нелинейные интегральные уравнения, которые либо непосредственно, либо после некоторых преобразований представлялись в виде

$$Bx = F_{01}\lambda + \sum_{i+k\geqslant 2} F_{ik} x^i \lambda^k, \tag{12.1}$$

где B — линейный оператор, x — неизвестная функция и F_{ik} — однородные операторы [1]) степени i по x и степени k по числовому или функциональному параметру λ. Для этих нелинейных интегральных уравнений вида (12.1) ставилась задача о нахождении всех малых решений, т. е. всех непрерывных (в рассматриваемой метрике) решений x, стремящихся к нулю при $\lambda \to 0$, и о выяснении как числа их, так и вида каждого из них. При этом были разобраны регулярный случай и случай ветвления (одномерный и многомерный).

Мы видели, что в регулярном случае, т. е. когда линейный оператор B имеет ограниченный обратный, уравнение (12.1) имеет единственное малое решение и это решение является аналитической в начале координат функцией от λ, т. е.

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^k, \tag{12.2}$$

[1]) Об однородных операторах см. п. 22.1.

где a_k — некоторые непрерывные функции, если λ — числовой параметр, или a_k — k-линейные операторы, если λ — функциональный параметр. При этом a_k могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов, т. е. путем подстановки (12.2) в (12.1) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях λ в обеих частях равенства.

Отметим, что в предыдущих параграфах главы IV оператор B имел вид

$$B = I - A,$$

где I — единичный (тождественный) оператор, а A — линейный интегральный оператор.

Трудным для исследования оказался тот случай, когда подпространство нулей оператора B имело размерность $r \geqslant 1$, т. е. когда 1 являлась собственным значением кратности r оператора A. В этом случае нельзя было гарантировать существование единственного малого решения уравнения (12.1), так как возможно, что при малых $|\lambda|$ уравнение (12.1) не имеет решения или имеет более одного решения, т. е. возможно явление ветвления нулевого решения уравнения (12.1). Вот почему, если $r \geqslant 1$, то говорят о случае ветвления. При $r = 1$ говорят об одномерном случае ветвления, а при $r > 1$ — о многомерном случае ветвления.

В одномерном случае ветвления было показано, что в нетривиальном случае (не все коэффициенты уравнения разветвления равны нулю) все малые решения уравнения (12.1) представимы в виде сходящихся рядов

$$x = \xi\varphi + a_{01}\lambda + \sum_{i+k\geqslant 2} a_{ik}\xi^i\lambda^k, \tag{12.3}$$

где φ — собственная функция оператора A, соответствующая собственному числу 1, ξ — вспомогательный параметр, возможные значения которого определяются из уравнения разветвления

$$\sum_{m=2}^{\infty} L_{m0}\xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \sum_{n=1}^{\infty} L_{mn}\lambda^n = 0. \tag{12.4}$$

В многомерном случае ветвления малые решения уравнения (12.1) представимы в виде

$$x = \sum_{i=1}^{r} \xi_i \varphi_i + a_{00\ldots01}\lambda + \sum_{n_1+\ldots+n_r+k\geqslant 2} a_{n_1n_2\ldots n_rk}\xi_1^{n_1}\xi_2^{n_2}\ldots\xi_r^{n_r}\lambda^k, \tag{12.5}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ — вспомогательные параметры, возможные значения которых определяются из уравнения разветвления

$$\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_r\geqslant 2} L^{(i)}_{n_1\ldots n_r0}\xi_1^{n_1}\ldots\xi_r^{n_r} + \sum_{n_1+\ldots+n_r\geqslant 0} \xi_1^{n_1}\ldots\xi_r^{n_r}\sum_{k\geqslant 1} L^{(i)}_{n_1\ldots n_rk}\lambda^k = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r), \tag{12.6}$$

а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ — ортонормированные собственные функции оператора A, принадлежащие его собственному числу 1.

Вопрос о малых решениях уравнения (12.4) и системы (12.6) был изучен в первых двух главах.

Использование полученных там результатов приводит в случае ветвления к описанию всех малых решений уравнения (12.1), как вида (12.3), так и вида (12.5). Это объясняется тем, что между малыми решениями уравнения (12.1) и малыми решениями уравнения разветвления существует взаимно однозначное соответствие. Перейдем к доказательству предложений о взаимно однозначном соответствии между малыми решениями уравнения (12.1) и соответствующего ему уравнения разветвления. При этом мы ограничимся случаем, когда λ — числовой параметр, хотя эти предложения могут быть распространены и на случай функционального параметра λ.

Лемма 12.1. *Между малыми решениями уравнения* (12.1) *и уравнения разветвления* (12.6) *существует взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. Пусть x_λ — малое решение уравнения (12.1). Тогда оно удовлетворяет не только уравнению (12.1), но и следующему уравнению (см., например, (10.19)):

$$x = \sum_{i=1}^{r} \xi_i \varphi_i + G_{01}\lambda + \sum_{i+k\geqslant 2} G_{ik} x^i \lambda^k, \tag{12.7}$$

где (см., например, (8.22))

$$\xi_i = (x, \varphi_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{12.8}$$

(x, φ) — скалярное произведение в пространстве L^2, G_{ik} — однородные операторы степени i по x и степени k по λ, а φ_i — собственные функции оператора $A = I - B$, принадлежащие его собственному числу 1. Так как x_λ — малое решение, то при малых $|\lambda|$ малы и $|\xi_i| = |(x_\lambda, \varphi_i)|$. Но при малых $|\lambda|$ и $|\xi_i|$, как это было установлено в предыдущих параграфах, (12.5) является единственным малым решением уравнения (12.7). Следовательно, решение (12.7), если в него вместо ξ_i подставить выражения

$$\xi_i(\lambda) = (x_\lambda, \varphi_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{12.9}$$

совпадет с решением x_λ, а так как уравнение разветвления (12.6) было получено из системы (12.8) после подстановки в эту систему вместо x его выражения (12.5), то мы приходим к следующему выводу: всякое малое решение x_λ уравнения (12.1) определяет малое решение (12.9) уравнения разветвления (12.6).

Обратно, пусть $\xi_i(\lambda)$ — произвольное малое решение уравнения разветвления (12.6). Тогда при достаточно малых $|\lambda|$ малы и $|\xi_i(\lambda)|$. Но при достаточно малых $|\lambda|$ и $|\xi_i|$ выражение (12.5) определяет единственное малое решение уравнения (12.7). Если теперь в формулу (12.5) вместо ξ_i подставить выражения $\xi_i(\lambda)$, то получим

$$x = x_\lambda,$$

причем эти x_λ и $\xi_i(\lambda)$ удовлетворяют равенствам (12.9), ибо уравнение разветвления (12.6) было получено из (12.8) после подстановки в (12.8) выражения x из (12.5). Отсюда следует, что если в (12.5) вместо ξ_i подставить малое решение $\xi_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ уравнения разветвления (12.6), то получим малое решение x_λ уравнения (12.1), ибо x_λ удовлетворяет как уравнению (12.7), так и условиям (12.9) или (12.8).

Раз каждое малое решение $\xi_i(\lambda)$ системы (12.6) и соответствующее ему по формуле (12.5) (если подставить туда $\xi_i(\lambda)$ вместо ξ_i) малое решение x_λ уравнения (12.1) удовлетворяют соотношениям (12.9), то различным $\xi(\lambda) = (\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \ldots, \xi_r(\lambda))$ соответствуют различные x_λ. Лемма доказана.

Во второй главе мы видели, что в квазирегулярном случае число малых решений

$$\xi(\lambda) = (\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \ldots, \xi_r(\lambda))$$

уравнения разветвления (12.6) конечно и каждое из них представимо в виде сходящегося ряда по целым или дробным степеням λ. Разумеется, такие решения могут быть и в вырожденном случае. Каждое малое решение системы (12.6), представимое в виде сходящегося ряда по целым или дробным степеням λ, приводит по формуле (12.5) к малому решению x_λ уравнения (12.1), которое также представимо в виде сходящегося (в рассматриваемой метрике) ряда по целым или дробным степеням λ. Имеет место и обратное предложение.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ совокупность всех малых решений уравнения (12.1), представимых в виде рядов по целым или дробным степеням λ, и через $\mathfrak{B}$ — совокупность всех малых решений уравнения разветвления (12.6), представимых в виде рядов по целым или дробным степеням λ. Из леммы 12.1 вытекает

Следствие 12.1. *Существует взаимно однозначное соответствие между $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.*

В предыдущих параграфах при вычислении коэффициентов уравнения разветвления (см., например, (10.23)) мы видели, что если $a_{00\ldots0k}(s) \equiv 0$, то $L^{(i)}_{00\ldots0k} = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, r$. Используя лемму 12.1 и учитывая, что при $x_\lambda = 0$ имеем $\xi(\lambda) \equiv 0$, а значит, из равенства $\xi(\lambda) \equiv 0$ следует $x_\lambda = 0$, мы приходим к предложению.

Лемма 12.2. *Если $L^{(i)}_{0\ldots0k} = 0$ для всех i и k, то $a_{00\ldots0k}(s) \equiv 0$ для всех k.*

Доказательство. Если $L^{(i)}_{0\ldots0k}=0$ для всех i и k, то $\xi(\lambda) \equiv 0$ является решением уравнения разветвления. Согласно (12.5) имеем тогда

$$0=\sum_{k=1}^{\infty}a_{0\ldots 0k}\lambda^k.$$

Следовательно, $a_{0\ldots 0k}\equiv 0$ для всех k. Лемма доказана.

12.2. Описание решений в одномерном случае ветвления. Здесь мы дадим описание малых решений нелинейных интегральных уравнений вида (12.1) с числовым параметром λ, когда уравнение разветвления одномерно, т. е. имеет вид (12.4).

Если все коэффициенты уравнения разветвления $L_{mn}=0$ (такой случай мы назовем тривиальным), то решение уравнения (12.1) задается формулой (12.3), в которой ξ — произвольный параметр и $a_{0k}\equiv 0$ для всех k. Таким образом, в тривиальном случае уравнение (12.1) имеет однопараметрическое семейство малых решений, задаваемое формулой (12.3). Ввиду этого в дальнейшем мы исключим из рассмотрения тривиальный случай.

Описание решений в одномерном случае ветвления может быть дано либо в терминах коэффициентов уравнения разветвления, либо в терминах коэффициентов правой части уравнения (12.1). Мы будем придерживаться первого способа и при этом воспользуемся результатами § 2.

В вещественном случае, т. е. когда функции и параметр λ, входящие в уравнение (12.1), вещественны, мы постараемся выделить вещественные решения.

Начнем с рассмотрения того случая, когда $L_{20}\neq 0$ (см. п. 2.7 и рис. 8). В этом случае уравнение разветвления (12.4), а значит и уравнение (12.1), имеет не более двух малых решений, описание которых приводит к следующим предположениям о других коэффициентах.

12.2.1. Если для всех i ($i=1, 2, \ldots$) выполняются равенства $L_{0i}=L_{1i}=0$, то (см. п. 2.7, случай I, 1) $\xi(\lambda)\equiv 0$ является двухкратным решением уравнения (12.4) и по лемме 12.1 $x_\lambda\equiv 0$ является решением уравнения (12.1). Малых решений, отличных от тождественного нуля, уравнение (12.1) не имеет.

12.2.2. Если $L_{0i}=0$ ($i=1, 2, \ldots$) и $L_{1k}=0$ для $k=1, 2, \ldots, m-1$, но $L_{1m}\neq 0$ (см. п. 2.7, случай I, 2), то уравнение (12.4) имеет тривиальное решение $\xi(\lambda)\equiv 0$

и одно малое ненулевое решение

$$\xi(\lambda) = -L_{1m}L_{20}^{-1}\lambda^m + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda^{m+i},$$

так что уравнение (12.1) имеет одно тривиальное решение $x_\lambda = 0$ и лишь одно нетривиальное малое решение вида (см. (10.14) и лемму 12.2)

$$x_\lambda = -L_{1m}L_{20}^{-1}\varphi_1(s)\lambda^m + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(s)\lambda^{m+i}.$$

12.2.3. Если $L_{0i} = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, m-1$, но $L_{0m} \neq 0$, $L_{1k} = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, E(m/2)$, где $E(\alpha)$ — целая часть числа α (см. п. 2.7, случай I, 3), то уравнение (12.4) имеет два нетривиальных малых решения

$$\xi(\lambda) = \pm\sqrt{-L_{0m}L_{20}^{-1}}\,\lambda^{\frac{m}{2}} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{\sigma i}\lambda^{\frac{m+ik}{2}} \qquad (\sigma = 1, 2),$$

где $k = 2$ при четном m и $k = 1$ при нечетном m. Отсюда и из (12.3) вытекает, что в рассматриваемом случае уравнение (12.1) имеет два (различных в силу леммы 12.1) малых решения

$$x_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} b_{\sigma i}\lambda^{\frac{ik}{2}} \qquad (\sigma = 1, 2),$$

где $k = 2$ при четном m и $k = 1$ при нечетном m. В вещественном случае (см. п. 2.6 и формулу (2.24)), если m четно, то при $\operatorname{sign} L_{0m}L_{20}^{-1} = +1$ уравнение (12.4) не имеет малых вещественных решений, а при $\operatorname{sign} L_{1m}L_{20}^{-1} = -1$ оно имеет в некоторой окрестности $\lambda = 0$ два вещественных нетривиальных решения. Следовательно, в этом случае уравнение (12.1) имеет два нетривиальных решения указанного вида в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$. При нечетном m уравнение (12.1) имеет два вещественных малых решения указанного вида, но эти решения определены лишь для $\lambda \geqslant 0$ при $\operatorname{sign} L_{0m}L_{20}^{-1} = -1$ и для $\lambda \leqslant 0$ при $\operatorname{sign} L_{0m}L_{20}^{-1} = +1$.

12.2.4. Если $L_{0k} = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, 2m - 1$, но $L_{0,2m} \neq 0$, $L_{1k} = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, m - 1$, а $L_{1m} \neq 0$ и $\Delta = L_{1m}^2 - 4L_{0,2m}L_{20} \neq 0$, то (см. п. 2.7, случай I, 4) в силу (2.26) в комплексном случае уравнение (12.1) имеет два различных малых решения вида

$$x_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} b_{\sigma i}\lambda^i \qquad (\sigma = 1, 2),$$

определенных в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$. В вещественном случае эти два решения вещественны при $\Delta > 0$, а при $\Delta < 0$ уравнение (12.1) не имеет вещественных решений.

12.2.5. Пусть $L_{0k} = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, 2m - 1$, $L_{0,2m} \neq 0$, $L_{1k} = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, m - 1$, но $L_{1m} \neq 0$ и $\Delta = L_{1m}^2 - 4L_{0,2m}L_{20} = 0$. В этом случае $\varepsilon = m$ и определяющее уравнение принимает вид

$$L_{20}\xi_m^2 + L_{1m}\xi_m + L_{0,2m} = 0,$$

так что

$$\xi_m = -\frac{L_{1m}}{2L_{20}},$$

и мы получаем для главного члена разложения (2.4) лишь одно значение. Ввиду этого в данном случае согласно равенству (2.27) мы пишем

$$\xi = \xi_m\lambda^m + \eta$$

и, подставляя данное выражение в уравнение разветвления (12.4), находим

$$L_{20}\eta^2 + L'_{0,2m+1}\lambda^{2m+1} + \ldots = 0, \tag{12.10}$$

где при $m = 1$

$$L'_{03} = (L_{03} + \xi_m L_{12} + L_{21}\xi_m^2 + L_{30}\xi_m^3),$$

а при $m > 1$

$$L'_{0,2m+1} = L_{0,2m+1} + \xi_m L_{1,m+1} + \xi_m^2 L_{21}.$$

Допустим, что $L'_{0,2m+1} \neq 0$. Тогда убывающая часть диаграммы для уравнения (12.10) будет состоять из одного отрезка с концами $(0,\ 2m+1)$, $(2,\ 0)$, а потому

$$\eta = \pm\sqrt{\frac{-L'_{0,\,2m+1}}{L_{20}}\lambda^{\frac{2m+1}{2}} + \sum_{i=2}^{\infty} a_{\sigma i}\lambda^{\frac{2m+i}{2}}} \quad (\sigma = 1,\ 2).$$

Отсюда и из предыдущего следует, что в комплексном случае уравнение (12.1) имеет два малых решения вида

$$x_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} b_{\sigma i}\lambda^{\frac{2m+i}{2}}.$$

В вещественном случае (см. п. 2.6) решения вещественны и определены для $\lambda \geqslant 0$, если $\operatorname{sign} L_{20}L_{0,2m+1} = -1$. Для исследования вещественных решений при $\lambda < 0$ нужно воспользоваться соображениями п. 2.6.

12.2.6. Если $L_{0k} = 0$ для $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$, но $L_{0m} \neq 0$, $L_{1k} = 0$ для $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu - 1$, а $L_{1\nu} \neq 0$, то (см. п. 2.7, случай I, 4) уравнение (12.1) имеет два малых решения x_λ и они представимы в виде рядов по целым степеням λ в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$. В вещественном случае эти решения вещественны.

Перейдем теперь к рассмотрению некоторых случаев, когда $L_{20} = 0$.

12.2.7. Если $L_{01} = 0$, $L_{02} \neq 0$, $L_{11} \neq 0$, $L_{20} = 0$, $L_{30} \neq 0$, то (см. пример п. 2.6 и рис. 7) уравнение (12.1) имеет три малых решения: одно $x_\lambda^{(1)}$ расположено по целым степеням λ и два ($x_\lambda^{(2)}$, $x_\lambda^{(3)}$) — по степеням $\lambda^{1/2}$. В вещественном случае $x_\lambda^{(1)}$ определено в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$, а $x_\lambda^{(2)}$ и $x_\lambda^{(3)}$ определены лишь для $\lambda \geqslant 0$ при $\operatorname{sign} L_{11}L_{30} = -1$ и для $\lambda \leqslant 0$ при $\operatorname{sign} L_{11}L_{30} = +1$.

12.2.8. Если $L_{01} \neq 0$, $L_{k0} = 0$ для $k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$, но $L_{n0} \neq 0$, то (см. п. 2.7, случай II) уравнение (12.1) имеет n малых решений, и каждое из них расположено по степеням $\lambda^{1/n}$. Из них в вещественном случае при нечетном n лишь одно является вещественным и оно определено в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$, а при четном n имеется два вещественных решения и они определены либо для $\lambda \geqslant 0$ при $\operatorname{sign} L_{01}L_{n0} = -1$, либо для $\lambda \leqslant 0$ при $\operatorname{sign} L_{01}L_{n0} = +1$.

12.2.9. Если $L_{01} = 0$, $L_{02} \neq 0$, $L_{k1} = 0$ для $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m-1$, но $L_{m1} \neq 0$, $L_{k0} = 0$ для $k = 2, 3, \ldots, n-1$, но $L_{n0} \neq 0$, где $1 < m < E(n/2)$, то (см. п. 2.7, случай III) уравнение (12.1) имеет m решений, представимых по степеням $\lambda^{1/m}$, и $n - m$ решений, представимых по степеням $\lambda^{1/(n-m)}$. В вещественном случае мы приходим к следующим выводам. Если n и m — четные числа, то имеется четыре вещественных решения (два представимы по степеням $\lambda^{1/m}$ и два — по степеням $\lambda^{1/(n-m)}$), каждое из которых определено в некоторой полуокрестности нуля. Если m и n — нечетные числа или m четно и n нечетно (ср. случай 12.2.8), то имеется три вещественных решения, из которых одно определено в некоторой окрестности нуля, а два — в полуокрестностях нуля. Если m — нечетное число, а n — четное число, то имеется лишь два вещественных решения (одно расположено по степеням $\lambda^{1/m}$, а другое — по степеням $\lambda^{1/(n-m)}$) и каждое из них определено в некоторой окрестности нуля.

Аналогично описываются малые решения и в других случаях одномерного ветвления.

12.3. О точках бифуркации в одномерном случае ветвления[1]. Пусть $G(u, v)$ — оператор, действующий из топологического произведения линейных пространств E и E_2 в линейное пространство E_1, и $G(u_0, v_0) = 0$. Если в некоторой окрестности точки (u_0, v_0) уравнение

$$G(u, v) = 0 \tag{12.11}$$

имеет единственное непрерывное решение $u = \Phi(v)$, $u_0 = \Phi(v_0)$, то говорят, что (u_0, v_0) — регулярная точка уравнения (12.11). В противном случае точка (u_0, v_0) называется точкой ветвления уравнения (12.11). Разумеется, если (u_0, v_0) — регулярная точка, то решение u_0 уравнения (12.11) при $v = v_0$ имеет единственное непрерывное продолжение $u = \Phi(v)$ в некоторой окрестности точки v_0.

Если при любом $v \in E_2$ имеет место равенство

$$G(0, v) = 0, \tag{12.12}$$

то точка ветвления $(0, v_0)$ (или, кратко, точка v_0) называ-

---

[1]) См. М. М. Вайнберг [3].

ется точкой бифуркации уравнения (12.11), если существует хотя бы одно нетривиальное малое решение.

Рассмотрим вопрос о точках бифуркации уравнения (12.1). Разумеется, для того чтобы уравнение (12.1) имело решение $x = 0$ при любом λ, необходимо и достаточно, чтобы $F_{0k} = 0$ для всех k. При выполнении этого условия точка $\lambda = 0$ может служить точкой бифуркации. Выясним этот вопрос в предположении, что для уравнения (12.1) имеет место одномерный случай ветвления.

Если $F_{0k} = 0$ для всех k, то согласно лемме 11.3 имеют место равенства $L_{0n} = 0$ для всех n. В частности, если для общего интегрального уравнения выполнено условие (10.5), то по лемме 11.2 $L_{0n} = 0$ для всех n, если в уравнении (10.4) $f(s) \equiv 0$. Обратно. Пусть $L_{0n} = 0$ для всех n. Тогда при всех значениях λ уравнение разветвления (12.4) имеет решение $\xi(\lambda) \equiv 0$. Отсюда и из (12.3) согласно лемме 12.2 следует, что при всех λ уравнение (12.1) имеет решение $x_\lambda \equiv 0$.

Ввиду этого результат, полученный при рассмотрении случая 12.2.2, может быть сформулирован в виде предложения.

Теорема 12.1. *Пусть в одномерном случае ветвления выполнены условия*: $L_{20} \neq 0$, $L_{0k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $L_{1k} = 0$ *для* $k = 1, 2, \ldots, m-1$, $L_{1m} \neq 0$. *Тогда* $\lambda = 0$ *является точкой бифуркации уравнения* (12.1). *Помимо тривиального решения уравнение* (12.1) *имеет одно малое решение*

$$x_\lambda = -L_{1m}L_{20}^{-1}\varphi_1(s)\lambda^m + \sum_{i=1}^{\infty} b_i(s)\lambda^{m+i},$$

которое в вещественном случае вещественно.

Отметим, что если $L_{20} \neq 0$ и $L_{0k} = L_{1k} = 0$ для всех k (см. случай 12.2.1), то $\lambda = 0$ не является точкой бифуркации уравнения (12.1), хотя при всех λ это уравнение имеет решение $x_\lambda \equiv 0$.

Предыдущие соображения приводят к ряду предложений о точках бифуркации, о числе соответствующих этим точкам малых нетривиальных решений и о виде каждого малого решения. Если, например, $L_{0k} = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, $L_{20} = 0$ и $L_{30} \neq 0$, то мы приходим к шести различным предложениям о точке бифуркации $\lambda = 0$ уравнения (12.1) (они соответствуют случаям 12.2.1—12.2.6).

Приведем одно такое предложение (ср. 12.2.3).

Теорема 12.2. *Пусть в одномерном случае ветвления выполнены условия:* $L_{0k} = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, $L_{1i} = 0$ *для* $i = 1, 2, \ldots, m-1$, $L_{1m} \neq 0$, $L_{2n} = 0$ *для* $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots, E\left(\frac{m}{2}\right)$, $L_{30} \neq 0$. *Тогда* $\lambda = 0$ *является точкой бифуркации уравнения* (12.1). *Этой точке бифуркации соответствуют два малых нетривиальных решения уравнения* (12.1), *и они представимы в виде*

$$x_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} b_{\sigma i} \lambda^{\frac{ir}{2}} \qquad (\sigma = 1, 2),$$

где $r = 2$ *при четном* m *и* $r = 1$ *при нечетном* m. *В вещественном случае эти два решения вещественны и определены в некоторой окрестности точки* $\lambda = 0$, *если* m *четно и* $\operatorname{sign} L_{1m}L_{30}^{-1} = +1$, *а при нечетном* m *они определены лишь для* $\lambda \geqslant 0$ *при* $\operatorname{sign} L_{1m}L_{30}^{-1} = -1$ *и для* $\lambda \leqslant 0$ *при* $\operatorname{sign} L_{1m}L_{30}^{-1} = +1$.

При выполнении в одномерном случае ветвления условий $L_{0k} = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, $L_{20} = L_{30} = 0$, $L_{40} \neq 0$ получается 12 различных предложений (если корни соответствующих определяющих уравнений (2.18) простые) о точке бифуркации $\lambda = 0$ уравнения (12.1), и это число растет вместе с n, если $L_{0k} = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ и $L_{i0} = 0$ $(2 \leqslant i < n)$, $L_{n0} \neq 0$. Ввиду этого мы приведем лишь следующие два предложения.

Теорема 12.3. *Пусть в одномерном случае ветвления выполнены условия:* $L_{0k} = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, $L_{11} \neq 0$, $L_{i0} = 0$ *для* $i = 2, 3, \ldots, n-1$, $L_{n0} \neq 0$ $(n > 3)$. *Тогда* $\lambda = 0$ *является точкой бифуркации уравнения* (12.1). *Этой точке бифуркации соответствует* $n-1$ *малых нетривиальных решений уравнения* (12.1), *и они представимы в виде*

$$x_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} b_{\sigma i} \lambda^{\frac{i}{n-1}} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Из них в вещественном случае при четном n *лишь одно яв-*

ляется вещественным и оно определено в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$, *а при нечетном* n *имеется два вещественных решения и они определены либо для* $\lambda \geqslant 0$ *при* $\operatorname{sign} L_{11}L_{n0} = -1$, *либо для* $\lambda \leqslant 0$ *при* $\operatorname{sign} L_{11}L_{n0} = +1$.

Доказательство проводится так же, как и в случае 12.2.8. Используя результат, установленный при рассмотрении случая 12.2.9, мы приходим к предложению.

Теорема 12.4. *Пусть в одномерном случае ветвления выполнены условия:* $L_{0k} = 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, $L_{11} = 0$, $L_{12} \neq 0$, $L_{k1} = 0$ *для* $k = 2, 3, \ldots, m-1$, $L_{m1} \neq 0$, $L_{i0} = 0$ *для* $i = 2, 3, \ldots, n-1$, $L_{n0} \neq 0$, *где* $2 < m < (1+n)/2$. *Тогда* $\lambda = 0$ *является точкой бифуркации уравнения* (12.1). *Этой точке бифуркации соответствует* $(n-1)$ *решений:*

$$x_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} b_{\sigma i}\lambda^{\frac{i}{m-1}} \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, m-1),$$

$$x_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} c_{ri}\lambda^{\frac{i}{n-m}} \qquad (r = 1, \ldots, n-m).$$

В вещественном случае из этих малых нетривиальных решений выделяются вещественные так же, как и в случае 12.2.9.

12.4. Описание решений в двумерном случае ветвления[1]. В § 5 было исследовано уравнение разветвления (12.6) при $r = 2$. Это исследование приводит к следующим выводам о малых решениях уравнения (12.1).

Пусть $\Psi(z_2, \lambda)$ — результант многочленов G_1 и G_2 (см. (5.2)) и $\Psi(z_2, \lambda) = \lambda^\sigma \widetilde{R}(z_2, \lambda)$, где λ^σ $(\sigma \geqslant 0)$ — максимальная допустимая степень λ. Используя тогда теорему 5.1, мы приходим к предложению.

Теорема 12.5. *Имеют место утверждения:*

I. *Если* $\widetilde{R}(0, 0) \neq 0$, *то уравнение* (12.1) *не имеет малых решений.*

II. *Для того чтобы в двумерном случае ветвления уравнение* (12.1) *имело конечное число* l *малых решений,*

[1]) См. П. Г. Айзенгендлер [1, 3].

необходимо и достаточно, чтобы

$$\widetilde{R}\,(z_2,\ \lambda) \not\equiv 0.$$

При этом, если $\widetilde{R}\,(0,\ 0) = 0$, *то* $l > 0$ *и каждое малое решение представимо в виде сходящегося ряда по целым или дробным степеням* λ.

III. *Если* $\widetilde{R}\,(z_2,\lambda) \equiv 0$ *или все коэффициенты уравнения разветвления* (12.6) *при* $r = 2$ *равны нулю, то уравнение* (12.1) *имеет семейство решений, соответственно зависящее от одного или двух параметров.*

Заметим, что в условиях III теоремы возможны решения уравнения (12.1) в виде расходящихся степенных рядов, т. е. формальные решения. Приведем такой пример.

Пример 12.1.

$$u(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(s-t)\,u(t)\,dt + 3\lambda\int_0^{2\pi}\sin s\sin t u^2(t)\,dt.$$

Собственными функциями данного симметричного ядра

$$K(s,\ t) = \frac{1}{\pi}\cos(s-t)$$

будут

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin s,\ \varphi_2(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos s.$$

Полагая

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}u(t)\sin t\,dt,\ \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}u(t)\cos t\,dt,$$

получим

$$u(s) = \xi_1\varphi_1(s) + \xi_2\varphi_2(s) + 3\lambda\int_0^{2\pi}\sin s\sin t u^2(t)\,dt.$$

Отсюда и из (10.19) следует, что $g(s) \equiv 0$ и $g_{mn}(s,\ t)$ отлично от тождественного нуля лишь при $m = 2$, $n = 1$, причем $g_{21}(s,\ t) = 3\sin s\sin t$. Используя теперь формулы (10.22), находим, что $a_{ikl}(s) \equiv 0$ при $i + k + l \geqslant 2$, $a_{00l} \equiv 0$, $l \geqslant 1$, так что согласно равенству (10.20′) имеем

$$u(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\xi_1\sin s + \xi_2\cos s).$$

Так как согласно (10.23) из равенства $a_{ikl}(s) \equiv 0$ при $i + k + l \geqslant 0$ следует, что все коэффициенты двумерного уравнения разветвления равны нулю, то ξ_1 и ξ_2 могут принимать произвольные значения. Полагая

$$\xi_1 = \xi_2 = \sum_{n=1}^{m} n!\,\lambda^n,$$

где m — произвольное число, получим решение вида

$$u(s) = \sum_{n=1}^{m} n!\,\lambda^n (\sin s + \cos s).$$

Устремляя m к бесконечности, мы получим формальное решение приведенного примера.

12.5. Описание решений в многомерном случае ветвления [1]**.** В § 6 было исследовано уравнение разветвления (12.6) в общем виде, т. е. при $r \geqslant 2$. Здесь мы используем обозначения, определения и предложения § 6.

Теорема 12.6. *Пусть для уравнения разветвления имеет место квазирегулярный случай (т. е. $d_i \sim 1$ для $i = 1, 2, \ldots, r-1$). Тогда, если d_r не ассоциирован с единицей, то число малых решений уравнения* (12.1) *конечно* (*отлично от нуля*) *и каждое из них представимо в виде сходящегося* (*в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$*) *ряда по целым или дробным степеням λ. Если и $d_r \sim 1$, то уравнение* (12.1) *не имеет малых решений.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 6.1 и следствия 12.1

При помощи теоремы 6.2 и леммы 12.1 устанавливается

Теорема 12.7. *В вырожденном случае* (см. определение 6.2) *число малых решений уравнения* (12.1) *бесконечно.*

Из теорем 12.6 и 12.7 вытекает

Следствие 12.2. *Для того чтобы число малых решений уравнения* (12.1) *было конечным и отличным от нуля, необходимо и достаточно, чтобы $d_i \sim 1$ для $i=1, 2, \ldots, r-1$, но d_r не ~ 1.*

Отметим еще, что если в условиях теоремы 12.6 какимто способом получено решение (формальное) в виде ряда

---

[1]) См. П. Г. Айзенгендлер и М. М. Вайнберг [1] и П. Г. Айзенгендлер [3].

по целым или дробным степеням λ, то этот ряд в комплексном случае сходится в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$.

12.6. О ветвлении изолированного решения. Обозначим через $F(x, \lambda)$ правую часть уравнения (12.1). Тогда, если в уравнении (12.1) мы положим $\lambda = 0$, то получим

$$Bx = F(x, 0). \tag{12.13}$$

Данное уравнение имеет решение $x = 0$, ибо $F(0, 0) = 0$. Пусть U — окрестность нуля того линейного пространства, в котором исследуется вопрос о решениях уравнения (12.1). Если в некоторой окрестности U уравнение (12.13) имеет лишь нулевое решение, то говорят, что нуль является изолированным решением уравнения (12.13). Здесь мы выясним условия изолированности нулевого решения уравнения (12.13) и вопрос о ветвлении нулевого решения уравнения (12.1), когда нуль — изолированное решение уравнения (12.13).

Обозначим через $\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \lambda)$ левые части уравнения (12.6). Тогда, если в (12.6) положить $\lambda = 0$, то получим

$$\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{12.14}$$

Пусть, наконец, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$.

Если B — обратимый оператор, то ясно, что нуль — изолированное решение уравнения (12.13). Если подпространство нулей оператора B имеет конечную размерность r ($r \geqslant 1$), то, как мы видели, получается уравнение разветвления (12.4) или (12.6), и в этом случае справедливо предложение.

Лемма 12.3. *Для того чтобы нулевое решение уравнения* (12.13) *было изолированным, необходимо и достаточно, чтобы* $\xi = 0$ *было изолированным решением системы* (12.14).

Доказательство следует из леммы 12.1, которая сохраняется, если в уравнениях (12.1) и (12.6) положить $\lambda = 0$.

Таким образом, задача об изолированности нулевого решения уравнения (12.13) в случае ветвления сводится к задаче об изолированности нулевого решения уравнения разветвления. В одномерном случае ветвления нулевое решение изолировано тогда и только тогда, когда не все коэффициенты L_{k0} равны нулю, а в многомерном случае ветвления вопрос решается теоремой 6.3.

Из леммы 12.3 и теоремы 6.3 следует (см. п. 6.5, в котором введены обозначения d_i')

Теорема 12.8. *Для того чтобы нулевое решение уравнения* (12.13) *было изолированным, необходимо и достаточно, чтобы* $d_i' \sim 1$ *для* $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Отметим, что если условие данной теоремы нарушается, т. е. при некоторых $k < r$ имеет место d_k' не ~ 1, то из нулевого решения уравнения (12.13) выходят ветви (ветви-решения), зависящие от одного или более параметров. Перейдем теперь к выяснению вопроса о ветвлении нулевого решения уравнения (12.1), когда нуль является изолированным решением[1]) уравнения (12.13). Здесь имеет место предложение.

Теорема 12.9. *Пусть* $x = 0$ — *изолированное решение уравнения* (12.13). *Тогда уравнение* (12.1) *имеет конечное число малых решений и каждое из них представимо в виде сходящегося* (*в некоторой окрестности* $\lambda = 0$) *ряда по целым или дробным степеням* λ.

Доказательство проведем от противного. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда либо $\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \lambda) \equiv 0$ для всех i, либо согласно следствию 12.2 найдется такое k $(1 \leqslant k < r)$, что d_k не ~ 1. В первом случае, если положить $\lambda = 0$ в (12.5), получим решение уравнения (12.13)

$$x = \sum_{i=1}^{r} \xi_i \varphi_i + \sum_{n_1+\ldots+n_r \geqslant 2} a_{n_1 n_2 \ldots n_r 0} \xi_1^{n_1} \xi_2^{n_2} \ldots \xi_r^{n_r},$$

где ξ_i — произвольные параметры. Первое слагаемое в силу линейной независимости φ_i отлично от тождественного нуля. Так как второе слагаемое может содержать лишь члены второго и высших порядков, то при достаточно малых $|\xi_i|$ имеем $x \not\equiv 0$, причем $x \to 0$ при $\xi \to 0$. Это противоречит условию теоремы, что $x = 0$ — изоли-

[1]) Данный вопрос был изучен в ряде работ; см., например, Кронин [1], П. Г. Айзенгендлер и М. М. Вайнберг [1, 2], П. Г. Айзенгендлер [3, 4], В. Б. Меламед [1, 2]. Мы здесь придерживаемся упомянутых работ П. Г. Айзенгендлера и М. М. Вайнберга.

рованное решение уравнения (12.13). Во втором случае, если учесть, как образуются d_i' из (12.14), следует, что d_i' не ~ 1 при некотором i $(1 \leqslant i < r)$. Согласно теореме 12.8 это противоречит условию, что $x = 0$ — изолированное решение уравнения (12.13). Теорема доказана.

Данная теорема необратима. Это видно из следующих примеров.

Пример 12.2. Пусть для уравнения (12.1) имеет место одномерный случай ветвления, т. е. 1 является простым собственным значением оператора A, причем коэффициенты уравнения разветвления (12.4) удовлетворяют условиям: $L_{m0} = 0$ $(m = 2, 3, \ldots)$, $L_{0n} = 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $L_{11} = 0$, $L_{21} = 0$, $L_{31} \neq 0$, $L_{22} = 0$, $L_{12} = 0$, $L_{13} \neq 0$. Так как $L_{m0} = 0$ для всех m, то нулевое решение уравнения (12.14) (при $r = 1$) не изолировано.

Покажем, что уравнение разветвления, а значит (в силу леммы 12.1) и уравнение (12.1), имеет конечное число решений. Действительно, в силу условий уравнение (12.4) принимает вид

$$\lambda\xi \left[\sum_{m=3}^{\infty} L_{m1}\xi^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} \xi^{m-1} \sum_{i=1}^{\infty} L_{m(i+1)}\lambda^i \right] = 0.$$

Полагая здесь

$$k = m - 1, \quad L_{m1} = L_{k0}^*, \quad L_{(k+1)(i+1)} = L_{ki}^*,$$

получим

$$\lambda\xi \left[\sum_{k=2}^{\infty} L_{k0}^*\xi^k + \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \sum_{i=1}^{\infty} L_{ki}^*\lambda^i \right] = 0,$$

где

$$L_{20}^* \neq 0, \quad L_{11}^* = 0, \quad L_{01}^* = 0, \quad L_{02}^* \neq 0.$$

Таким образом, если приравнять нулю квадратную скобку, то мы будем находиться в условиях 12.2.3 (см. п. 12.2). Следовательно, уравнение разветвления (12.4) имеет в данном случае три малых решения — одно тривиальное и два нетривиальных. В силу леммы 12.1 и уравнение (12.1) имеет три малых решения. Данный пример показывает, что из наличия у уравнения (12.1) конечного числа малых решений еще не следует изолированность нулевого решения уравнения (12.13).

Приведем еще пример двумерного случая ветвления, показывающий, что теорема 12.9 необратима.

Пример 12.3. Рассмотрим уравнение

$$u(s) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(s-t)\,u(t)\,dt + \lambda^2\int_0^\pi \frac{1}{\pi}(\sin s - \cos s)\,dt + 3\lambda\int_0^\pi \sin(s-t)\,u^2(t)\,dt.$$

Собственными функциями данного симметричного ядра $K(s,t) = \frac{2}{\pi}\cos(s-t)$ будут

$$\varphi_1(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin s, \quad \varphi_2(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos s.$$

Полагая

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi u(t)\sin t\,dt, \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi u(t)\cos t\,dt,$$

мы сведем рассматриваемое уравнение к виду

$$u(s) = \xi_1\varphi_1(s) + \xi_2\varphi_2(s) + \lambda^2\frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\sin s - \cos s)\,dt + 3\lambda\int_0^\pi \sin(s-t)\,u^2(t)\,dt.$$

Сравнивая данное уравнение с уравнением (10.19), мы находим

$$g(s) \equiv 0, \quad g_{02}(s,t) = \frac{1}{\pi}(\sin s - \cos s), \quad g_{21}(s,t) = 3\sin(s-t),$$

$$g_{11}(s,t) \equiv 0, \quad g_{20}(s,t) \equiv 0, \quad g_{12}(s,t) \equiv 0$$

и

$$g_{mn}(s,t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad m+n > 3.$$

Используя формулу (10.20′), напишем

$$u(s)=\xi_1\varphi_1(s)+\xi_2\varphi_2(s)+\sum_{i+k+l\geqslant 2} a_{ikl}(s)\,\xi_1^i\xi_2^k\lambda^l.$$

При помощи формул (10.22) находим

$a_{011}(s)\equiv 0,\ a_{101}(s)\equiv 0,\ a_{110}(s)\equiv 0,\ a_{200}(s)\equiv 0,\ a_{020}(s)\equiv 0,$

$a_{002}(s)=\sin s-\cos s,\ \ a_{111}(s)=\dfrac{8}{\pi}\sin s,$

$a_{120}(s)\equiv 0,\ a_{102}(s)\equiv 0,\ a_{012}(s)\equiv 0,\ a_{021}(s)=-\dfrac{4}{\pi}\cos s,$

$a_{201}(s)=-\dfrac{8}{\pi}\cos s,\ a_{210}(s)\equiv 0,\ a_{030}(s)\equiv 0,\ a_{300}(s)\equiv 0,$

$a_{003}(s)\equiv 0,\ a_{004}(s)\equiv 0,\ a_{040}(s)\equiv 0,\ a_{400}(s)\equiv 0,$

$a_{022}(s)\equiv 0,\ a_{202}(s)\equiv 0,\ a_{220}(s)\equiv 0,\ a_{121}(s)\equiv 0,\ a_{112}(s)\equiv 0,$

$a_{211}(s)\equiv 0,\ a_{013}(s)=4\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(\sin s+\cos s),$

$a_{031}(s)\equiv 0, a_{103}(s)=-4\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(\sin s+2\cos s),$

$a_{301}(s)\equiv 0,\ a_{130}(s)\equiv 0,\ a_{310}(s)\equiv 0.$

Отсюда и из (10.23) мы для данного примера получаем:

1. $L^{(i)}_{mn0}=0\ \ (m+n\geqslant 2,\ i=1,\ 2).$

Эти равенства, впрочем, следуют из (11.11), если учесть, что для данного примера

$$B_{m0}(s,\ t)=g_{m0}(s,\ t)\equiv 0\qquad (m=1,\ 2,\ \ldots).$$

2. $L^{(i)}_{011}=0,\ L^{(i)}_{101}=0,\ L^{(i)}_{001}=0\qquad (i=1,2),$

$$L^{(1)}_{002}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ L^{(2)}_{002}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

3. $L^{(1)}_{201}=0,\ L^{(2)}_{201}=-4\sqrt{\dfrac{2}{\pi}},\ L^{(1)}_{111}=4\sqrt{\dfrac{2}{\pi}},$

$$L^{(2)}_{111}=0,\ L^{(1)}_{021}=0,\ L^{(2)}_{021}=-2\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ L^{(i)}_{003}=0.$$

4. $L^{(i)}_{004}=0,\ L^{(i)}_{022}=0,\ L^{(i)}_{202}=0,\ L^{(i)}_{121}=0,\ L^{(i)}_{112}=0,$

$$L^{(i)}_{211}=0,\ L^{(i)}_{031}=0,\ L^{(i)}_{013}=4,\ L^{(1)}_{103}=-4,$$

$$L^{(2)}_{103}=-8,\ L^{(i)}_{301}=0\ \ (i=1,2).$$

Уравнение разветвления (после сокращения первого уравнения на $\sqrt{2/\pi}\,\lambda$, а второго уравнения на $-\sqrt{2/\pi}\,\lambda$) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &0\cdot\xi_1^2+4\xi_1\xi_2+0\cdot\xi_2^2+\frac{\pi}{2}\lambda-4\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\xi_1\lambda^2+\\ &\qquad\qquad+4\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\xi_2\lambda^2+\ldots=0,\\ &4\xi_1^2+0\cdot\xi_1\xi_2+2\xi_2^2+\frac{\pi}{2}\lambda+8\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\xi_1\lambda^2-\\ &\qquad\qquad-4\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\xi_2\lambda^2+\ldots=0.\end{aligned}\right\}$$

Приведем данную систему к регулярному виду (см. п. 3.1). При помощи неособого линейного преобразования

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$$

последняя система преобразуется к виду

$$\left.\begin{aligned} u_1^2+u_1u_2+0\cdot u_2^2+\frac{\pi}{2}\lambda+\ldots&=0,\\ \frac{3}{2}u_1^2+u_1u_2+\frac{1}{2}u_2^2+\frac{\pi}{2}\lambda+\ldots&=0,\end{aligned}\right\}$$

и после умножения второго равенства на 2/3 имеем

$$\left.\begin{aligned} f_1(u_1,u_2,\lambda)\equiv u_1^2+\frac{2}{3}u_1u_2+\frac{1}{3}u_2^2+\frac{\pi}{3}\lambda+\ldots&=0,\\ f_2(u_1,u_2,\lambda)\equiv u_1^2+u_1u_2+\frac{\pi}{2}\lambda+\ldots&=0.\end{aligned}\right\}$$

Полагая в этой системе $\lambda=0$, мы придем к примеру 5.1, для которого было найдено, что $m_0=4$. Отсюда (см. п. 5.2. и замечание 5.1) следует, что результант $R_{u_1}(f_1,f_2)\not\equiv 0$. Подсчет показывает, что если мы запишем уравнение $R_{u_1}(f_1,f_2)=0$ в виде

$$\sum_{k=4}^{\infty}M_{k0}u^k+\sum_{m=0}^{\infty}\xi^m\sum_{n=1}^{\infty}M_{mn}\lambda^n=0,$$

то получим, что $M_{40}=2/9$.

Раз результант не равен нулю тождественно, то согласно теореме 5.1 уравнение разветвления, а значит, и рассматриваемый пример имеют конечное число малых решений. Однако если в исходном примере мы положим $\lambda = 0$, то получим уравнение, у которого нуль не является изолированным решением.

12.7. Точки бифуркации в многомерном случае ветвления [1]). Предварительно заметим, что лемма 11.3 распространяется и на многомерный случай (ср. с замечанием в конце § 11). Так как условие

$$F_{0k} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы $x = 0$ было решением уравнения (12.1) при любом λ, то из предыдущего замечания и леммы 12.2 вытекает

Лемма 12.4. *Каждое из следующих условий:*

1) $F_{0k} \equiv 0$ *для* $k = 1, 2, 3, \ldots,$

2) $a_{00\cdots0k} \equiv 0$ *для* $k = 1, 2, 3, \ldots,$

3) $L^{(i)}_{00\cdots0k} = 0$ *для* $i = 1, 2, \ldots, r$ *и* $k = 1, 2, 3, \ldots,$ *необходимо и достаточно, чтобы* $x = 0$ *было решением уравнения* (12.1) *при любом* λ.

Пусть вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$. Далее, из лемм 12.1 и 12.4 вытекает

Лемма 12.5. *Каждое из условий леммы* 12.4 *необходимо и достаточно для того, чтобы* $\xi = 0$ *было решением уравнения* (12.6) *при любом* λ.

Пусть $x = 0$ является решением уравнения (12.1) при любом λ. Тогда, если все коэффициенты уравнения разветвления (12.6) равны нулю, то это уравнение, а в силу леммы 12.1 и уравнение (12.1), имеет бесчисленное множество нетривиальных малых решений. Ввиду этого $\lambda = 0$ является точкой бифуркации уравнения (12.1).

Если не все коэффициенты системы (12.6) равны нулю, то мы можем систему (12.6) записать в виде

$$\xi_1^{\sigma_{1i}} \xi_2^{\sigma_{2i}} \ldots \xi_r^{\sigma_{ri}} \Phi_i^* (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \lambda) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, r_1 \leqslant r), \tag{12.15}$$

где $\xi_k^{\sigma_{ki}}$ — максимальные возможные степени.

---

[1]) См. М. М. Вайнберг [3].

Определение 12.1. *Уравнение* (12.6) *мы назовем бифуркационным, если выполнены условия:* 1) *нулевой вектор* $\xi = 0$ *является решением системы* (12.6) *при любом* λ; 2) *сама система* (12.6) *или она же, приведенная к регулярному виду, может быть записана в виде* (12.15), *где* $\Phi_i^*\ (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \lambda) \not\equiv 0$ *хотя бы для одного значения* i.

Применим теперь к системе

$$\Phi_i^*\ (\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_r,\ \lambda) = 0$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_1 \leqslant r)$$

прием, изложенный в п. 6.2, и выделим многочлены

$$d_1^*,\ d_2^*,\ \ldots,\ d_k^* \qquad (k \leqslant r).$$

Предыдущие соображения и теоремы 6.1 и 6.2 приводят к предложению.

Теорема 12.10. *Пусть в многомерном случае ветвления уравнение* (12.6) *является бифуркационным. Тогда, если* d_i^* *не* ~ 1 *при некотором* i, *уравнение* (12.1) *имеет точку бифуркации* $\lambda = 0$. *При этом, если* $d_i^* \sim 1$ *для всех* $i < r$ *и* d_r^* *не* ~ 1, *то точке бифуркации* $\lambda = 0$ *заведомо* [1]) *соответствует конечное число* q $(q \geqslant 1)$ *нетривиальных малых решений уравнения* (12.1) *и каждое из них представляется в виде сходящегося ряда по целым или дробным степеням* λ.

§ 13. Построение решений нелинейных интегральных уравнений

13.1. О способах построения решений. Рассмотрим вновь нелинейное интегральное уравнение вида (12.1), где $B = I - A$, I — тождественный оператор, A — линейный интегральный оператор.

Если оператор B имеет ограниченный обратный (регулярный случай), то уравнение (12.1) имеет единственное малое решение и оно представимо в некоторой окрестности

---

[1]) Отметим еще, что точке бифуркации могут принадлежать нетривиальные решения, соответствующие малым решениям системы

$$\xi_1^{\sigma_{1i}}\xi_2^{\sigma_{2i}}\ldots\xi_r^{\sigma_{ri}} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r_1).$$

точки $\lambda = 0$ в виде степенного ряда по целым степеням λ. В этом случае наиболее простым является способ неопределенных коэффициентов, т. е. способ построения решения в виде ряда по степеням λ с неизвестными коэффициентами:

$$x_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^k. \tag{13.1}$$

Для определения неизвестных коэффициентов a_k решение (13.1) подставляется в уравнение (12.1), и путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях λ получается рекуррентная система для неизвестных a_k. Этот способ построения решения в виде ряда по степеням λ известен давно [1]), и обычно этот способ применяется без информации о существовании и единственности малых решений уравнения (12.1). Именно, после подстановки (13.1) в уравнение (12.1) получается рекуррентная система для определения неизвестных a_k. Однако если оператор B необратим, то эта система может и не иметь решения (хотя при ее помощи может быть найдено конечное число первых коэффициентов a_k) или иметь более одного решения. Если рекуррентная система имеет решения, то для доказательства сходимости ряда (13.1) строятся мажоранты.

Если для мажорантного ряда найден радиус сходимости, то этот радиус дает оценку радиуса сходимости ряда (13.1).

Если оператор B необратим, т. е. 1 является собственным значением оператора A, то, как мы видели, возможно явление ветвления. В этом случае уравнение разветвления (12.4) или (12.6) может и не иметь малых решений или может иметь решения, расположенные по дробным степеням λ. В последнем случае уравнение (12.1) может иметь малые решения вида

$$x_\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^{\frac{p+k}{s}}, \tag{13.2}$$

где p и s — натуральные числа. Таким образом, если опе-

---

[1]) Им пользовался еще Лагранж [1, 2].

ратор B необратим, то применение метода неопределенных коэффициентов без предварительной информации о числе и виде малых решений уравнения (12.1) может привести к непреодолимым трудностям.

Второй способ заключается в том, что мы находим все малые решения уравнения (12.4) или системы (12.6), если число их конечно (соответствующие условия конечности числа малых решений были найдены в главах I и II). В этом случае, как мы видели, каждое малое решение уравнения разветвления представимо в виде сходящегося ряда по целым или дробным степеням λ. Коэффициенты этих рядов для ξ_i могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов (см., например, замечание в конце п. 2.4). Далее, каждое найденное малое решение уравнения разветвления подставляется соответственно в (12.3) или (12.5), что приводит к малому решению уравнения (12.1). При этом нужно предварительно вычислить a_{ik} или $a_{n_1 \ldots n_r k}$, как это было сделано, например, в § 10.

Третий способ заключается в следующем. Сначала методами, указанными в главах I и II, получается информация о числе всех малых решений уравнения разветвления и о виде каждого решения (в квазирегулярном случае), т. е. по каким дробным степеням оно представляется. Тем самым мы получаем информацию о числе малых решений уравнения (12.1) и о том, по каким дробным (или целым) степеням λ представляется каждое малое решение уравнения (12.1). Мы записываем тогда решение в виде ряда (13.2), который имеет некоторый интервал сходимости, и для определения неизвестных a_k мы пользуемся методом неопределенных коэффициентов, т. е. подставляем (13.2) в (12.1) и сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях λ. При этом рекуррентный процесс для определения a_k разрешим и ряды будут сходящимися. Так получаются локальные решения уравнения (12.1). Разумеется, если решение (13.2) построено, то можно поставить вопрос о нахождении или об оценке радиуса сходимости.

13.2. Одномерный случай ветвления. Для простоты мы рассмотрим уравнение Гаммерштейна (10.1′) в предположении, что функции $C(s, t)$, $f(x, t)$ и параметр μ вещественны. Пусть уравнение (10.1′) приведено к виду (10.4′)

и 1 — простое собственное значение оператора A:

$$Au = \int_B K(s, t)\, u(t)\, dt \equiv \mu_0 \int_B C(s, t)\, A_1(t)\, u(t)\, dt.$$

Пусть $\varphi_1(s) \equiv \varphi(s)$ — нормированная собственная функция оператора A, припадлежащая 1, и $\psi_1(s)$ — нормированная собственная функция сопряженного оператора A^*, принадлежащая тому же собственному числу 1.

Допустим, что для уравнения разветвления имеет место случай 12.2.8, т. е. $L_{01} \neq 0$, $L_{k0} = 0$ для $k = 2, 3, \ldots, n-1$, но $L_{n0} \neq 0$. В этом случае уравнение (10.4′) имеет n малых решений и каждое из них представимо в виде

$$u(s) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(s)\, \lambda^{\frac{k}{n}}. \tag{13.3}$$

Для вычисления $b_k(s)$ мы воспользуемся методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим два примера. Пусть $n = 2$. Подставляя ряд (13.3) в (10.4′) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим систему

$$\begin{aligned}
&b_1(s) - Ab_1 = 0,\\
&b_2(s) - Ab_2 = \int_B C(s, t)[A_0(t) + \mu_0 A_2(t)\, b_1^2(t)]\, dt,\\
&b_3(s) - Ab_3 = \int_B C(s, t)[2\mu_0 A_2(t)\, b_1(t)\, b_2(t) + B_1(b_1(t))]\, dt,\\
&b_4(s) - Ab_4 = \int_B C(s, t)[2\mu_0 A_2(t)\, b_1(t)\, b_3(t) + B_2(b_1(t), b_2(t))]\, dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&b_n(s) - Ab_n = \int_B C(s, t)[2\mu_0 A_2(t)\, b_1(t)\, b_{n-1}(t) +\\
&\qquad\qquad\qquad + B_{n-2}(b_1(t), \ldots, b_{n-2}(t))]\, dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

где $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ — многочлены.

Первое уравнение системы имеет решение

$$b_1(s) = C_1 \varphi(s),$$

где C_1 — пока произвольная постоянная. Используя формулы для коэффициентов L_{kl} (см. формулы (11.8)), мы из условий разрешимости второго уравнения системы найдем, что

$$L_{20}C_1^2 + L_{01} = 0,$$

а значит, для $b_1(s)$ мы получаем два вещественных решения (либо для $\lambda \geqslant 0$, либо для $\lambda \leqslant 0$ — см. 12.2.8). Все остальные $b_k(s)$ определяются однозначно через $b_1(s)$, а значит, при $n = 2$ мы из (13.3) получим два решения. Действительно, для второго уравнения системы имеем решение

$$b_2(x) = P_2(x) + C_2\varphi(x),$$

где $P_2(x)$ — вполне определенная функция, а C_2 — произвольная пока постоянная. Из условия разрешимости третьего уравнения системы имеем

$$2C_1C_2L_{20} + D_1 = 0 \qquad (D_1 = \text{const}),$$

откуда находим C_2. Продолжая данный процесс, мы для $(n-1)$-го уравнения системы найдем решение

$$b_{n-1}(x) = P_{n-1}(x) + C_{n-1}\varphi(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ — вполне определенная функция, а C_{n-1} — постоянная, определяющаяся из следующего условия разрешимости n-го уравнения системы:

$$2C_1C_{n-1}L_{20} + D_{n-2} = 0 \qquad (D_{n-2} = \text{const}).$$

Пусть $n = 3$. Так же, как раньше, получаем систему

$$b_1(s) - Ab_1 = 0,$$

$$b_2(s) - Ab_2 = \int_B C(s,t)[\mu_0 A_2 b_1^2]\,dt,$$

$$b_3(s) - Ab_3 = \int_B C(s,t)[A_0 + 2\mu_0 A_2 b_1 b_2 + A_3 b_1^3]\,dt,$$

$$b_4(s) - Ab_4 = \mu_0 \int_B C(s,t)[2A_2 b_1 b_3 + A_2 b_2^2 + 3A_3 b_1^2 b_2 + B_1(b_1)]\,dt,$$

$$b_5(s) - Ab_5 = \mu_0 \int_B C(s,t)[2A_2b_1b_4 + 2A_2b_2b_3 + 3A_3b_1^2b_3 + $$
$$+ B_2(b_1,b_3)]\,dt,$$

. . . .

$$b_n(s) - Ab_n = \mu_0 \int_B C(s,t)[2A_2b_1b_{n-1} + 2A_2b_2b_{n-1} + $$
$$+ 3A_3b_1^2b_{n-2} + B_{n-3}(b_1, \ldots, b_{n-3})]\,dt,$$

. . . .

Первое уравнение системы имеет решение

$$b_1(s) = C_1\varphi(s).$$

Условие разрешимости второго уравнения дает

$$C_1^2 L_{20} = 0,$$

а так как $L_{20} = 0$, то отсюда C_1 нельзя определить. Решение второго уравнения имеет вид

$$b_2(s) = P_2(s) + C_2\varphi(s),$$

где $P_2(s)$ зависит от $b_1(s)$, а потому содержит C_1. Подсчет показывает, что (ср. (10.7))

$$P_2(s) = C_1^2\mu_0 \int_B g(s,t)\,A_2(t)\,\varphi^2(t)\,dt,$$

где

$$g(s,t) = C(s,t) + \int_B \Gamma(s,z)\,C(z,t)\,dz.$$

Условие разрешимости третьего уравнения системы дает

$$L_{01} + C_1^3L_{30} + 2C_1C_2L_{20} = 0$$

или, так как $L_{20} = 0$, $L_{01} + C_1^3L_{30} = 0$.

Отсюда следует, что для C_1, а значит и для $b_1(s)$, получается три значения, из которых одно вещественно. Другие коэффициенты $b_k(s)$ ряда (13.3) определяются однозначно по выбранному коэффициенту $b_1(s)$. Для третьего уравнения находим решение

$$b_3(s) = \int_B g(s,t)\, A_0(t)\, dt + \mu_0 \int_B g(s,t)[2A_2 b_1 b_2 + A_3 b_1^3]\, dt + C_3\varphi(s).$$

Из условия разрешимости четвертого уравнения находим

$$3C_1^2 L_{30} C_2 + D_1 = 0 \qquad (D_1 = \text{const}),$$

откуда определим C_2, а значит, и $b_2(s)$. Продолжая данный процесс, определим, что C_{n-2} найдется из условия разрешимости n-го уравнения:

$$3C_1^2 L_{30} C_{n-2} + D_{n-3} = 0 \qquad (D_{n-3} = \text{const}).$$

Если для простоты в общем случае положить $A_2(t) = A_3(t) = \ldots = A_{n-1}(t) \equiv 0$, то подстановка ряда (13.3) в (10.4′) приводит к системе

$$b_1(s) - Ab_1 = 0,\ Av = \mu_0 \int_B C(s,t)\, A_1(t)\, v(t)\, dt,$$

$$b_2(s) - Ab_2 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$b_{n-1}(s) - Ab_{n-1} = 0,$$

$$b_n(s) - Ab_n = \int_B C(s,t)[A_0 + \mu_0 A_n b_1^n]\, dt,$$

$$b_{n+1}(s) - Ab_{n+1} = \int_B C(s,t)[n\mu_0 A_n b_1^{n-1} b_2 + B_1(b_1)]\, dt,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_{n+k}(s) - Ab_{n+k} = \int_B C(s,t)[n\mu_0 A_n b_1^{n-1} b_{k+1} + B_k(b_1, b_2, \ldots, b_k)]\, dt,$$

где B_k — многочлены.

Первые $n - 1$ уравнений системы имеют решения

$$b_\nu(s) = C_\nu \varphi(s) \qquad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Условие разрешимости n-го уравнения дает

$$L_{n0} C_1^n + L_{01} = 0,$$

откуда для C_1, а значит и для $b_1(s)$, имеем n значений. Остальные коэффициенты $b_{1+k}(s)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ находятся однозначно по выбранному $b_1(s)$, так что для уравнения (10.1′) мы в данном случае имеем n решений. Действительно, из условия разрешимости $(n+1)$-го уравнения имеем

$$nC_1^{n-1}L_{n0}C_2+D_1=0 \qquad (D_1=\mathrm{const}),$$

откуда C_2, а значит, и $b_2(s)$ определяются однозначно. Таким же образом устанавливается, что условие разрешимости $(n+m)$-го уравнения $(m=2, 3, \ldots)$ дает

$$nC_1^{n-1}L_{n0}C_{m+1}+D_m=0 \qquad (D_m=\mathrm{const}),$$

откуда однозначно находится C_{m+1}, а значит, и $b_{m+1}(s)$.

13.3. Двумерный случай ветвления.

Пример 13.1. Рассмотрим уравнение [1])

$$u(s)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(s-t)\,u(t)\,dt+\lambda\sin s+\int_0^\pi \sin(s-t)\,u^2(t)\,dt+ \\ +\lambda\int_0^\pi \theta(s,t)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}u^k(t)\,dt,$$

где $\theta(s, t)$ — непрерывная функция при $s, t\in[0, \pi]$. Как и в примере 12.3, единица является двукратным собственным значением вещественного симметричного ядра $K(s, t)=2/\pi\cos(s-t)$, и этому собственному значению отвечают нормированные собственные функции

$$\varphi_1(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin s, \qquad \varphi_2(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos s.$$

Полагая

$$\xi_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi u(t)\sin t\,dt, \quad \xi_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi u(t)\cos t\,dt,$$

мы сведем рассматриваемое уравнение к виду

$$u(s)=\xi_1\varphi_1(s)+\xi_2\varphi_2(s)+ \\ +\lambda\sin s\int_0^\pi \sin(s-t)\,u^2(t)\,dt+\lambda\int_0^\pi \theta(s,t)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}u^k(t)\,dt.$$

[1]) Данный пример предоставил в наше распоряжение П. Г. Айзенгендлер.

Сравнивая данное уравнение с уравнением (10.19), находим $g(s) = \sin s$, $g_{20}(s, t) = \sin(s - t)$, $g_{k0}(s, t) \equiv 0$ при $k \neq 2$,

$$g_{m1}(s, t) = \frac{1}{m!}\theta(s, t) \quad \text{при } m \geqslant 2,$$

$$g_{11}(s, t) \equiv 0, \; g_{mk}(s, t) \equiv 0 \text{ при } k > 1.$$

Используя формулу (10.20′), напишем

$$u(s) = \xi_1\varphi_1(s) + \xi_2\varphi_2(s) + \lambda \sin s + \sum_{i+k+l \geqslant 2} a_{ikl}(s)\, \xi_1^i \xi_2^k \lambda^l, \tag{13.4}$$

причем согласно формулам (10.22) имеем

$$a_{011}(s) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin s, \qquad a_{110}(s) = \frac{8}{3\pi}\sin s,$$

$$a_{101}(s) = -\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos s, \qquad a_{200}(s) = -\frac{8}{3\pi}\cos s,$$

$$a_{020}(s) = -\frac{4}{3\pi}\cos s, \qquad a_{002}(s) = -\frac{4}{3}\cos s.$$

Вычисляя при помощи этих коэффициентов коэффициенты уравнения разветвления, мы после сокращения на $-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}$ приходим к уравнению разветвления

$$\Phi_1(\xi_1, \xi_2, \lambda) \equiv 2\xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{8}{3\sqrt{2\pi}}(4\xi_1^2\xi_2 - \xi_2^3) + \\ + o_3(\xi_1, \xi_2) + \lambda\left[\pi\lambda + 2\sqrt{2\pi}\,\xi_1 + o_2(\xi_1, \xi_2, \lambda)\right] = 0,$$

$$\Phi_2(\xi_1, \xi_2, \lambda) \equiv -2\xi_1\xi_2 + \frac{16}{3\sqrt{2\pi}}(\xi_1^3 - \xi_1\xi_2^2) + \\ + o_3(\xi_1, \xi_2) + \lambda\left[-\frac{3}{4}\pi - \sqrt{2\pi}\,\xi_2 + o_2(\xi_1, \xi_2, \lambda)\right] = 0,$$

где $\operatorname{ord} o_3(\xi_1, \xi_2) > 3$, $\operatorname{ord} o_2(\xi_1, \xi_2, \lambda) > 2$. Данное уравнение разветвления было рассмотрено в конце п. 3.1, где оно было приведено к регулярному (правильному) виду, а затем оно было подвергнуто дальнейшему изучению (см. пример 5.1 и формулы (5.41)). Было показано (см. формулы (5.41)), что рассматриваемое здесь уравнение разветвления имеет четыре малых решения, они комплексны и расположены по степеням $\lambda^{1/2}$. Следовательно, рассматриваемое интегральное уравнение имеет четыре малых решения и они представимы в виде

$$u_i(s) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ki}(s)\,\lambda^{\frac{k}{2}} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Числа $b_{ki}(s)$ могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов, т. е. путем подстановки $u_i(s)$ в исходное интегральное уравнение и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях λ. Разумеется, возможен и другой путь. Именно, коэффициенты α_{hj}, входящие в (5.41), могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов. Это даст нам $\xi_1^{(j)}$ и $\xi_2^{(j)}$, подстановка которых в (13.4) приведет ко всем четырем малым решениям исходного уравнения.

Пример 13.2. В качестве другого примера мы рассмотрим краевую задачу для следующего дифференциального уравнения эллиптического типа [1]):

$$\Delta u + \omega u + A_1\lambda + B_1\lambda^2 + C_1\lambda u + D_1 u^2 + R(u, \lambda) = 0, \tag{13.5}$$

где A_1, B_1, C_1 и D_1 — непрерывные функции от (s, t) на единичном квадрате Q; λ — малый вещественный параметр, ω — вещественный параметр, Δ — оператор Лапласа. Ищется в Q классическое решение $u(s, t)$ уравнения (13.5), обращающееся в нуль на границе Q. Будем предполагать, что $R(u, \lambda)$ — аналитическая функция от u и λ в начале координат, не содержащая членов ниже третьего порядка по u и λ.

Так как функция Грина здесь имеет вид

$$G(s, t; \sigma, \tau) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\pi is\sin\pi jt\sin\pi i\sigma\sin\pi j\tau}{i^2+j^2},$$

то данная задача эквивалентна интегральному урав-

[1]) Данный пример был исследован другими способами в работах Л. Грэйвса [1], М. М. Вайнберга и В. А. Треногина [1]. Приводимые ниже вычисления принадлежат П. Г. Айзенгендлеру.

нению

$$u-\omega\Gamma u=\Gamma A_1\lambda+\Gamma B_1\lambda^2+\Gamma(C_1u)\lambda+\Gamma\,(D_1u^2)+\Gamma(R)=0, \quad (13.6)$$

где

$$\Gamma v=\iint\limits_Q G\,(s,t;\sigma,\tau)\,v\,(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau.$$

Характеристическими значениями интегрального оператора Γ являются числа $\omega=\pi^2k$, где $k=i^2+j^2$, причем i и j — натуральные числа. Ввиду этого, если диофантово уравнение

$$i^2+j^2=k \quad (13.7)$$

имеет r решений, то π^2k — характеристическое число кратности r оператора Γ с симметричным ядром $G\,(s,\ t;\ \sigma,\ \tau)$. Этому характеристическому числу π^2k принадлежат нормированные собственные функции Γ:

$$\varphi_{ij}\,(s,\ t)=2\sin\pi is\sin\pi jt,$$

где $(i,\ j)$ суть решения диофантова уравнения (13.7). Возможны следующие случаи.

1. При данном k диофантово уравнение не имеет решения, т. е. $r=0$. Имеем регулярный случай, а потому уравнение (13.6) имеет единственное малое решение и оно представимо в виде

$$u\,(s,t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\,(s,t)\,\lambda^k,$$

причем $b_k\,(s,\ t)$ легко находятся методом неопределенных коэффициентов.

2. При данном k уравнение (13.7) допускает единственное решение ($r=1$) (например, при $k=2;\ 8$). При таком k мы имеем одномерный случай ветвления, так что предварительно нужно воспользоваться диаграммой Ньютона, а затем воспользоваться ранее указанными методами (см. § 2, а также п. 12.2 и п. 13.2).

3. При данном k уравнение (13.7) имеет два решения (например, когда $k=5;\ 10$). Тогда имеем двумерный случай ветвления. Если при данном k уравнение (13.7) имеет

более двух решений, то имеет место многомерный случай ветвления.

Рассмотрим следующий частный случай.

Пусть $k = 10$, A_1 и D_1 — постоянные, причем $A_1 D_1 \neq 0$. В этом случае $r = 2$ и оператор Γ имеет две собственные функции

$$\varphi_{13}(s, t) = 2 \sin \pi s \sin 3\pi t, \quad \varphi_{31}(s, t) = 2 \sin 3\pi s \sin \pi t,$$

отвечающие характеристическому числу $\omega = 10\pi^2$. Используя теперь формулы (11.11), мы после сокращения первого уравнения на $4{,}74 D_1$, а второго уравнения на $-2{,}19 D_1$, приходим к следующему уравнению разветвления:

$$\left.\begin{aligned} 0{,}56\alpha\lambda + \xi_1^2 - 0{,}92\xi_1\xi_2 - 0{,}46\xi_2^2 + \ldots = 0, \\ -1{,}23\alpha\lambda + \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - 2{,}18\xi_2^2 + \ldots = 0, \end{aligned}\right\} \quad (13.8)$$

где $\alpha = \dfrac{A_1}{D_1}$.

Вычисления показывают, что (см. пп. 5.2 и 5.3)

$$m_0 = 4, \quad n_0 = 2, \quad B_{40} = -5{,}57, \quad B_{21} = 5{,}96\alpha,$$
$$B_{02} = 3{,}20\alpha^2, \quad \Delta = B_{21}^2 - 4B_{40}B_{02} = 106{,}82\alpha^2$$

Ввиду этого имеет место случай, указанный на рис. 13. Так как в данном случае каждое из уравнений (5.28) и (5.28′) имеет по два вещественных корня, то система (13.8) имеет два малых вещественных решения и они представимы в виде

$$\xi_i^{(n)} = \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{im}^n \lambda^{\frac{m}{2}} \qquad (i = 1, 2;\ n = 1, 2)$$

для $\lambda \geqslant 0$, а также два малых вещественных решения такого же вида при $\lambda \leqslant 0$.

Отсюда вытекает, что исходное уравнение (13.5) или уравнение (13.6) имеет при $\lambda \geqslant 0$ лишь два вещественных малых решения и они представимы в виде сходящихся рядов

$$u_n(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(n)}(s, t)\, \lambda^{\frac{k}{2}} \qquad (n = 1, 2). \qquad (13.9)$$

При $\lambda \leqslant 0$ также имеется лишь два малых вещественных решения и они представимы (при предварительной замене в (13.6) λ на $-\lambda$) в виде (13.9). Для нахождения $b_k^{(n)}(s, t)$ можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

13.4. Уравнение Некрасова. Рассмотрим установившееся движение тяжелой жидкости, при котором на бесконечной глубине жидкость движется прямолинейно и равномерно с постоянной скоростью c, направленной вдоль прямой, параллельной горизонтали, которую мы примем за ось Ox, а на свободной поверхности граничная линия тока образует волны с неподвижными вершинами, причем жидкость течет вдоль этой линии тока в направлении оси Ox. Предположим, что положительное направление оси Ox совпадает с направлением вектора c, а ось Oy направлена вертикально вверх. Если всей жидкости придать скорость $-c$, то на бесконечной глубине она сделается неподвижной, а на свободной поверхности жидкости побегут волны со скоростью $-c$. Отсюда следует, что волновое движение жидкости с волнами установившегося вида приводится к установившемуся движению самой жидкости. Ввиду этого вместо волнового движения можно изучать указанное выше установившееся движение жидкости.

Пусть $\varphi(x, y)$ — потенциал скоростей и $\psi(x, y)$ — функция тока этого установившегося движения жидкости. Эти функции удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \qquad \Delta\psi = 0.$$

Так как на бесконечной глубине скорость равна $+c$, то

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{y=-\infty} = +c, -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{y=\infty} = 0. \qquad (13.10)$$

Из интеграла Лагранжа

$$\frac{p}{\rho} = C_1 - gy - \frac{1}{2}q^2,$$

где p — давление (постоянное на свободной поверхности), ρ — плотность жидкости, $C_1 = \text{const}$, g — ускорение силы тяжести, и $\bar{q}$ — вектор скорости жидкости, мы для свободной поверхности жидкости получаем

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = q^2 = 2C - 2gy. \qquad (13.11)$$

Таким образом, решения уравнения $\Delta\varphi = 0$ должны удовлетворять граничным условиям (13.10) и (13.11), причем условие (13.11) должно выполняться вдоль линии тока, расположенной на свободной поверхности, т. е. на линии, форма которой ищется. Для нахождения формы этой линии А. И. Некрасов [1, 2] сначала использует конформное отображение бесконечной полуполосы, занятой одной волной, на единичный круг плоскости $u=\xi+i\eta$ так, чтобы профиль волны соответствовал окружности этого круга, а точка $y = -\infty$ рассматриваемой полуполосы — центру единичного круга. При этом предполагается, что длина волны равна λ, что волны имеют вертикальную ось симметрии и что точка $u = 1$ соответствует значению $x = 0$. Отображения принимают вид

$$w = \frac{\lambda c}{2\pi i} \ln u \qquad (w = \varphi + i\psi),$$

$$z = \frac{\lambda i}{2\pi}\left[\ln u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} u^k\right] \qquad (z = x + iy),$$

где в силу симметрии волны a_k — вещественные числа. Полагая $u = re^{i\theta}$, мы из формулы для z при $r = 1$ получаем уравнение профиля волны

$$x = -\frac{\lambda}{2\pi}\left[\theta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \sin k\theta\right],$$

$$y = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \cos k\theta,$$

так что угол Φ, составляемый касательной к профилю волны, примет вид

$$\Phi(\theta) = \operatorname{arctg} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\theta}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta}.$$

Знание функции $\Phi(\theta)$ приводит к полному решению задачи о профиле волны установившегося вида.

А. И. Некрасов [1, 2] показал, что функция $\Phi(\theta)$ является решением нелинейного интегрального уравнения

$$\Phi(\theta)=\mu\int_0^{2\pi} K(\tau,\theta)\,\frac{\sin\Phi(\tau)}{1+\mu\int\limits_0^{\tau}\sin\Phi(\omega)\,d\omega}\,d\tau, \tag{13.12}$$

где $K(\tau,\theta)=\frac{1}{3\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta\sin n\tau}{n}$ и μ (постоянное интегрирования) принимает лишь неотрицательные значения.

13.5. Уравнение разветвления для уравнения Некрасова. Исследуем вопрос о малых решениях уравнения (13.12). При малых $|\Phi(\theta)|$ имеет место равенство

$$\frac{1}{1+\mu\int\limits_0^{\tau}\sin\Phi(\omega)\,d\omega}=1-\mu\int_0^{\tau}\sin\Phi(\omega)\,d\omega+ \\ +\mu^2\left(\int_0^{\tau}\sin\Phi(\omega)\,d\omega\right)^2-+\ldots$$

Ввиду этого уравнение (13.12) принимает вид

$$\Phi(\theta)=\mu\int_0^{2\pi} K(\tau,\theta)\left\{1-\mu\int_0^{\tau}\left[\Phi(\omega)-\frac{1}{3!}\Phi^3(\omega)+\right.\right. \\ \left.+\frac{1}{5!}\Phi^5(\omega)-+\ldots\right]d\omega+ \\ \left.+\mu^2\left(\int_0^{\tau}\left[\Phi(\omega)-\frac{1}{3!}\Phi^3(\omega)+\ldots\right]d\omega\right)^2-+\ldots\right\}\times \\ \times\left[\Phi(\tau)-\frac{1}{3!}\Phi^3(\tau)+-\ldots\right]d\tau$$

или

$$\Phi(\theta)-\mu\int_0^{2\pi} K(\theta,\tau)\,\Phi(\tau)\,d\tau= \\ =\mu\int_0^{2\pi} K(\theta,\tau)\left[-\frac{1}{3!}\Phi^3(\tau)+\frac{1}{5!}\Phi^5(\tau)-+\ldots\right]d\tau-$$

$$-\mu^2\int_0^{2\pi} K(\theta,\tau)\left[\Phi(\tau)-\frac{1}{3!}\Phi^3(\tau)+\ldots\right]\times$$

$$\times\left\{\int_0^{\tau}\left[\Phi(\omega)-\frac{1}{3!}\Phi^3(\omega)+\ldots\right]d\omega-\right.$$

$$\left.-\mu\left(\int_0^{\tau}\left[\Phi(\omega)-\frac{1}{3!}\Phi^3(\omega)+\ldots\right]d\omega\right)^2+\ldots\right\}d\tau. \qquad (13.13)$$

Данное уравнение имеет тривиальное (нулевое) решение при любом значении параметра μ. Так как характеристическими числами ядра $K(\theta, \tau)$ являются

$$\mu_n = 3n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то точками ветвления (точнее, точками бифуркации — см. п. 12.3) нулевого решения могут лишь служить [1]) значения параметра $\mu = 3n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Покажем, что в каждой точке $\mu = 3n$ от тривиального решения ответвляется единственное нетривиальное решение уравнения (13.13), а значит, и уравнения (13.12). Доказательство мы проведем для случая $\mu = 3$, аналогично оно проводится и для случая $\mu = 3n$ при $n > 1$.

Полагая $\mu = 3 + \lambda$, мы из (13.13) получим

$$\Phi(\theta)-3\int_0^{2\pi} K(\theta,\tau)\,\Phi(\tau)\,d\tau=$$

$$=\int_0^{2\pi} K(\theta,\tau)\left[\lambda\Phi(\tau)-9\,\Phi(\tau)\int_0^{\tau}\Phi(\omega)\,d\omega-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\Phi^3(\tau)-6\,\lambda\Phi(\tau)\int_0^{\tau}\Phi(\omega)\,d\omega+$$

$$\left.+27\,\Phi(\tau)\left(\int_0^{\tau}\Phi(\omega)\,d\omega\right)^2+o_3\right]d\tau, \qquad (13.14)$$

где o_3 содержит члены выше третьего порядка. Так как 1

[1]) См., например, М. М. Вайнберг [1], теорема 17.2.

является собственным значением первой кратности ядра

$$3K(\theta, \tau) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta \sin n\tau}{n},$$

то мы имеем одномерный случай ветвления. Собственному значению 1 отвечают нормированные собственные функции

$$\varphi_1(\theta) = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\pi}}, \ \psi_1(\tau) \equiv \varphi_1(\tau) = \frac{\sin\theta}{\sqrt{\pi}}.$$

Полагая

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \Phi(\theta) \sin(\theta)\, d\theta,$$

мы сведем уравнение (13.14) к виду

$$\Phi(\theta) - \int_0^{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta \sin n\tau}{\pi n} \Phi(\tau)\, d\tau =$$

$$= \xi_1\varphi_1(\theta) + \int_0^{2\pi} K(\theta, \tau) \Big\{ \lambda\Phi(\tau) - 9\Phi(\tau) \int_0^{\tau} \Phi(\omega)\, d\omega -$$

$$- \frac{1}{2}\Phi^3(\tau) - 6\lambda\Phi(\tau) \int_0^{\tau} \Phi(\omega)\, d\omega +$$

$$+ 27\Phi(\tau) \Big(\int_0^{\tau} \Phi(\omega)\, d\omega \Big)^2 + o_3 \Big\} d\tau. \quad (13.15)$$

Так как 1 не является собственным значением линейного интегрального оператора, стоящего в левой части равенства (13.15), то к уравнению (13.15) применимы рассуждения и выкладки п. 10.3. Однако так как уравнение (13.15) отличается по виду от уравнения (10.4), то здесь придется повторить выкладки п. 10.3.

Так как в уравнении (13.15) ядро

$$E(\theta, \tau) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta \sin n\tau}{\pi n},$$

то резольвента Фредгольма этого ядра (см., например, Э. Гурса [4], стр. 121) принимает вид

$$R(\theta, \tau) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta \sin n\tau}{\pi (n-1)}.$$

Отсюда и из (13.15) согласно формуле (8.4) следует

$$\Phi(\theta) = \xi_1 \left[\varphi_1(\theta) + \int_0^{2\pi} R(\theta, \tau)\, \varphi_1(\tau)\, d\tau\right] + \int_0^{2\pi} [K(\theta, \tau) + G(\theta, \tau)] \left\{\lambda\Phi(\tau) - 9\Phi(\tau) \int_0^{\tau} \Phi(\omega)\, d\omega - \frac{1}{2}\Phi^3(\tau) - 6\lambda\Phi(\tau) \int_0^{\tau} \Phi(\omega)\, d\omega + 27\Phi(\tau) \left(\int_0^{\tau} \Phi(\omega)\, d\omega\right)^2 + o_3\right\} d\tau,$$

где

$$G(\theta, \tau) = \int_0^{2\pi} R(\theta, t)\, K(t, \tau)\, dt = \frac{1}{3\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta \sin n\tau}{n(n-1)},$$

или

$$\Phi(\theta) = \xi_1\varphi_1(\theta) + \frac{1}{3\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sin\theta \sin\tau + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\theta \sin n\tau}{n-1}\right] \times \left\{\lambda\Phi(\tau) - 9\Phi(\tau) \int_0^{\tau} \Phi(\omega)\, d\omega - \frac{1}{2}\Phi^3(\tau) - 6\lambda\Phi(\tau) \int_0^{\tau} \Phi(\omega)\, d\omega + 27\,\Phi(\tau) \left(\int_0^{\tau} \Phi(\omega)\, d\omega\right)^2 + o_3\right\} d\tau. \quad (13.16)$$

Данное уравнение (см. п. 8.4 и формулу (8.4)) при достаточно малых $|\lambda|$ и $|\xi_1|$ имеет единственное малое решение, и оно представимо в виде

$$\Phi(\theta) = \xi_1\varphi_1(\theta) + \sum_{i+k\geqslant 2} a_{ik}(\theta)\, \xi_1^i \lambda^k \qquad (13.17)$$

с непрерывными коэффициентами $a_{ik}(\theta)$. Подставляя (13.17) в (13.16), мы получим рекуррентную систему вида (10.16) для коэффициентов $a_{ik}(\theta)$.

Выпишем первые коэффициенты. Предварительно заметим, что $a_{0k}(\theta) \equiv 0$ для всех k. Данное утверждение доказывается так же, как лемма 11.3. Далее, находим, что

$$a_{11}(\theta) = \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} [\sin\theta\sin\tau + \pi R(\theta, \tau)]\, \varphi_1(\tau)\, d\tau = \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\sin\theta,$$

$$a_{20}(\theta) = \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} [\sin\theta\sin\tau + \pi R(\theta, \tau)] \times$$

$$\times\left\{-9\varphi_1(\tau)\int_0^{\tau}\varphi_1(\omega)\, d\omega\right\} d\tau = \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} [\sin\theta\sin\tau + \pi R(\theta, \tau)] \times$$

$$\times\left\{\frac{9\sin\tau}{\pi}(\cos\tau - 1)\right\} d\tau = -\frac{3}{\pi}\sin\theta + \frac{3}{2\pi}\sin 2\theta.$$

Аналогично находим, что

$$a_{21}(\theta) = -\frac{5}{\pi}\sin\theta + \frac{5}{2\pi}\sin 2\theta, \quad a_{12}(\theta) = \frac{1}{9\sqrt{\pi}}\sin\theta,$$

$$a_{30}(\theta) = \frac{28}{\pi\sqrt{\pi}}\sin\theta - \frac{45}{2\pi\sqrt{\pi}}\sin 2\theta + \frac{17}{6\pi\sqrt{\pi}}\sin 3\theta.$$

Подставляя (13.17) в формулу для ξ_1, мы придем к уравнению разветвления (12.4), причем коэффициенты L_{mn} будут вычисляться по формулам (10.17). В частности, мы находим, что

$$L_{0k} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$L_{11} = \int_0^{2\pi} a_{11}(\theta)\,\varphi_1(\theta)\, d\theta = \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{3},$$

$$L_{20} = \int_0^{2\pi} a_{20}(\theta)\,\varphi_1(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2\pi}\sin 2\theta - \frac{3}{\pi}\sin\theta\right)\frac{\sin\theta}{\sqrt{\pi}}\, d\theta =$$

$$= -\frac{3}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = -\frac{3}{\sqrt{\pi}},$$

$$L_{12} = \frac{1}{9}, \quad L_{21} = -\frac{5}{\sqrt{\pi}}, \quad L_{30} = \frac{28}{\pi}.$$

Так как $L_{0k} = 0$ для всех k, $L_{11} \neq 0$, $L_{20} \neq 0$, то убывающая часть диаграммы Ньютона имеет вид, указанный на рис. 17. Данная диаграмма показывает, что уравнение разветвления имеет единственное нетривиальное малое решение. Так как уравнение

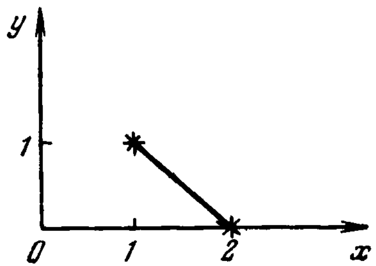

Рис. 17.

$$L_{11}\xi + L_{20}\xi^2 = 0$$

принимает вид

$$\frac{1}{3}\xi - \frac{3}{\sqrt{\pi}}\xi^2 = 0,$$

то малое нетривиальное решение уравнения разветвления принимает вид

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{9}\lambda + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \lambda^k, \qquad (13.18)$$

причем a_k могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов. Решение уравнения Некрасова можно построить при помощи (13.17) и (13.18). Мы, однако, поступим иначе. При помощи диаграммы Ньютона мы получили информацию, что уравнение разветвления имеет единственное малое нетривиальное решение и что оно представимо в виде сходящегося ряда по целым степеням λ, т. е. в виде (13.18). Отсюда и из (13.17) следует, что уравнение Некрасова имеет единственное малое нетривиальное решение и оно представимо в виде сходящегося ряда по целым степеням λ, т. е.

$$\Phi(\theta, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(\theta)\lambda^k, \qquad (13.19)$$

причем $\Phi_k(\theta)$ могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов. Подставляя ряд (13.19) в уравнение (13.14) и полагая

$$Au = \int_0^{2\pi} K(\theta, \tau) u(\tau)\, d\tau,$$

получим после сравнения коэффициентов при одинаковых степенях λ

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(\theta) = 3A\Phi_1,\\
&\Phi_2(\theta) = 3A\Phi_2 + A_2(\Phi_1),\\
&\Phi_3(\theta) = 3A\Phi_3 + A_3(\Phi_1, \Phi_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\Phi_n(\theta) = 3A\Phi_n + A_n(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \tag{13.20}$$

где A_k — нелинейные операторы от Φ_1, Φ_2, ..., Φ_{k-1}, но при $k = 3, 4, \dots$ операторы A_k являются линейными относительно Φ_{k-1}.

Из первого уравнения рекуррентной системы (13.20) следует, что

$$\Phi_1(\theta) = C_1 \sin\theta,$$

а затем из условия разрешимости второго уравнения системы (13.20), т. е. из ортогональности $A_2(\Phi_1)$ и $\sin\theta$, получается квадратное уравнение для определения C_1, но у этого квадратного уравнения коэффициент при C_1^2 равен нулю, так что $C_1 = 1/9$. Из второго уравнения системы 13.20) следует, что

$$\Phi_2(\theta) = C_2 \sin\theta + \frac{1}{54}\sin 2\theta,$$

причем из условия разрешимости третьего уравнения получается, что $C_2 = -\frac{8}{243}$.

Так же находим, что

$$\Phi_3(\theta) = \frac{185}{52488}\sin\theta - \frac{8}{729}\sin 2\theta + \frac{17}{4374}\sin 3\theta.$$

Как видно из (13.20),

$$\Phi_n(\theta) = C_n \sin\theta + f_n(\theta),$$

причем C_n находится из условия разрешимости линейного относительно C_n $(n \geqslant 3)$ $(n+1)$-го уравнения.

Таким образом, получаем решение уравнения Некрасова (13.12):

$$\Phi(\theta, \lambda) = \left(\frac{1}{9}\lambda - \frac{8}{242}\lambda^2 + \frac{115}{13122}\lambda^3 + \ldots\right)\sin\theta + \\ + \left(\frac{1}{54}\lambda^2 - \frac{8}{729}\lambda^3 + \ldots\right)\sin 2\theta + \frac{17}{4374}\lambda^3 \sin 3\theta + \ldots$$

§ 14. Особые решения нелинейных интегральных уравнений

Здесь мы дадим описание особых решений и укажем, как их построить [1]).

14.1. Постановка задачи. Пусть B — ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства, s и t — точки множества B. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$x(s) - \int_B K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s) + \mu \sum_{m=0}^{k} B_m(s, t)\, x^m(t)\, dt, \tag{14.1}$$

в котором $f(s)$, $K(s, t)$ и $B_m(s, t)$ — непрерывные функции (вещественные или комплекснозначные), μ — параметр (вещественный или комплексный), $k \geqslant 2$. Если уравнение (14.1) имеет решение, то оно зависит и от параметра μ. В предыдущих параграфах мы интересовались непрерывными решениями подобных уравнений, стремящимися к заданному непрерывному решению при $\mu \to 0$.

Здесь мы будем интересоваться такими непрерывными (в смысле метрики рассматриваемого пространства) решениями уравнения (14.1), которые стремятся к бесконечности при $\mu \to 0$. Такие решения называются *особыми.*

Мы будем лишь интересоваться особыми решениями, стремящимися к бесконечности при $\mu \to 0$, как μ^{-p}, где p — положительное рациональное число.

14.2. Сведение к малым решениям. Для исследования вопроса об особых решениях уравнения (14.1), стремя-

---

[1]) История этого вопроса освещена в статье М. М. Вайнберга и П. Г. Айзенгендлера [1]; там приведена и библиография.

щихся при $\mu \to 0$ к бесконечности, как μ^{-p}, можно воспользоваться следующей заменой [1]):

$$\lambda x(s) = u(s), \qquad \mu = \lambda^{k-1}. \tag{14.2}$$

При помощи этой замены уравнение (14.1) принимает вид

$$u(s) - \int_B K(s,t)\,u(t)\,dt = \lambda f(s) + \sum_{m=0}^{k} \lambda^{k-m} \int_B B_m(s,t)\,u^m(t)\,dt. \tag{14.3}$$

Данное уравнение, которое мы назовем основным, исследуется так же, как уравнение (10.4). При $\lambda = 0$ оно имеет решение $u(s) \equiv 0$.

Выясним вопрос о малых решениях уравнения (14.3). В регулярном случае, т. е. если 1 не является собственным значением оператора A:

$$Au = \int_B K(s,t)\,u(t)\,dt,$$

при достаточно малых $|\lambda|$ уравнение (14.3) имеет единственное малое решение и оно представимо в виде (10.9). Отсюда и из (14.2) следует, что в регулярном случае уравнение (14.1) имеет при достаточно малых $|\mu|$ единственное решение и оно представимо в виде сходящегося ряда

$$x(s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(s)\,\mu^{\frac{i-1}{k-1}},$$

где $a_i(s)$ — непрерывные функции.

Следовательно, в регулярном случае уравнение (14.1) не имеет особых решений [2]) рассматриваемого вида, если при $\lambda = 0$ уравнение (14.3) имеет лишь нулевое решение.

14.3. Особые решения в регулярном случае. В предыдущем пункте мы видели, что если 1 не является собственным значением оператора A, то уравнение (14.1) не имеет особых решений, если при $\lambda = 0$ уравнение (14.3) имеет лишь нулевое решение. Однако если при $\lambda = 0$ уравнение (14.3)

---

[1]) См. В. А. Треногин [4].

[2]) Имеющих порядок роста меньше чем $\mu^{-\frac{1}{k-1}}$.

имеет ненулевые решения, то уравнение (14.1) может иметь особые решения и в регулярном случае. Покажем это. Пусть 1 не является собственным значением оператора A и $R(s, t)$ — резольвента Фредгольма ядра $K(s, t)$. Тогда из уравнения (14.3) мы находим

$$u(s)=\lambda g(s)+\sum_{m=0}^{k}\lambda^{k-m}\int_B A_m(s,t)\,u^m(t)\,dt, \qquad (14.4)$$

где

$$g(s)=\int_B R(s,t)\,f(t)\,dt, \quad A_m(s,t)=\int_B R(s,\tau)\,B_m(\tau,t)\,d\tau.$$

Впрочем, к уравнению (14.4) можно прийти, если положить в уравнении (14.1) $K(s, t)\equiv 0$, $f(s)=g(s)$, $B_m(s, t)=A_m(s, t)$, а затем воспользоваться заменой (14.2). Таким образом, уравнение (14.4) можно рассматривать и как частный случай уравнения (14.3).

Полагая в уравнении (14.4) $\lambda=0$, получим

$$u(s)=\int_B A_k(s,t)\,u^k(t)\,dt. \qquad (14.5)$$

Для нахождения ненулевых решений данного уравнения мы воспользуемся заменой

$$u(s)=\lambda_0^{-\frac{1}{k-1}}v(s), \qquad (14.6)$$

где $\lambda_0>0$ при нечетном k и $\lambda_0\neq 0$ при четном k. При помощи данного преобразования уравнение (14.5) примет вид

$$\lambda_0 v(s)=\int_B A_k(s,t)\,v^k(t)\,dt. \qquad (14.7)$$

Известны различные достаточные условия существования ненулевых решений данного уравнения. Например, если ядро $A_k(s, t)$ положительно (т. е. все его собственные значения положительны) или квазиотрицательно (т. е. спектр линейного интегрального оператора с ядром $A_k(s, t)$ имеет положительную и отрицательную части, но положительная часть состоит из конечного числа собственных значений, имеющих конечную кратность) и k — нечетное число, то (см. М. М. Вайнберг [1], теоремы 25.1 и 25.5) уравнение (14.7) имеет континуум ненулевых решений $v(s) = v_0(s)$, соответствующих положительным значениям параметра λ_0. При четном k можно воспользоваться другими предложениями. Именно, если $A_k(s, t)$ — положительно определенное ядро, то (см. М. Голомб [1], теорема 7 и М. М. Вайнберг [1], теорема 25.7) уравнение (14.7) имеет континуум ненулевых решений. Эти решения соответствуют отличным от нуля значениям параметра λ_0, так как в силу положительной определенности ядра $A_k(s, t)$ имеет место соотношение

$$\lambda_0 \int_B v^{k+1}(s)\, ds = \int_B \int_B A_k(s, t)\, v^k(s)\, v^k(t)\, ds\, dt > 0.$$

Пусть $v_0(s)$ — какое-нибудь ненулевое решение уравнения (14.7), соответствующее отличному от нуля значению λ_0 (положительному значению λ_0, если k — нечетное число). Тогда при помощи (14.6) мы получаем ненулевое решение $u_0(s)$ уравнения (14.5). Положим

$$u(s) = u_0(s) + y(s). \tag{14.8}$$

Тогда уравнение (14.4), если учесть, что $u_0(s)$ — решение уравнения (14.5), примет вид

$$\begin{gathered} y(s) - k \int_B A_k(s, t)\, u_0^{k-1}(t)\, y(t)\, dt = \lambda g(s) + \\ + \int_B A_k(s, t)\, [C_k^2 u_0^{k-2}(t)\, y^2(t) + C_k^3 u_0^{k-3}(t)\, y^3(t) + \ldots + y^k(t)]\, dt + \\ + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda^{k-m} \int_B A_m(s, t)\, [u_0(t) + y(t)]^m\, dt. \end{gathered} \tag{14.9}$$

Данное уравнение мы назовем вспомогательным. Оно имеет тот же вид, что и уравнение (10.4), так что к нему применимы методы исследования, изложенные в предыдущих параграфах. Именно, в невырожденном случае каждое малое решение вспомогательного уравнения (14.9) представимо в виде сходящегося ряда по целым или дробным степеням λ. Каждое такое малое решение, в силу (14.8), приводит к решению вида

$$u(s) = u_0(s) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i(s)\lambda^{\varepsilon_i}, \quad u_0(s) \not\equiv 0,$$

уравнения (14.4), где ε_i — положительные рациональные числа с общим знаменателем. Отсюда согласно преобразованию (14.2) мы в регулярном случае приходим к особым решениям вида

$$x(s) = \mu^{-\frac{1}{k-1}} u_0(s) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{\frac{\varepsilon_i - 1}{k-1}}$$

уравнения (14.1). Ввиду этого задача сводится к исследованию вспомогательного уравнения (14.9).

14.4. Исследование вспомогательного уравнения. Исследование вспомогательного уравнения мы начнем с рассмотрения регулярного случая. Пусть 1 не является собственным значением оператора T:

$$Ty = k \int_B A_k(s, t)\, u_0^{k-1}(t)\, y(t)\, dt. \tag{14.10}$$

Тогда (см. п. 10.2) уравнение (14.9) имеет (при фиксированных малых значениях $|\lambda|$) единственное малое решение, и оно представимо в виде сходящегося ряда по целым степеням λ, т. е. в виде (10.9). Отсюда согласно предыдущему уравнению (14.1) имеет особое решение вида

$$x(s) = \mu^{-\frac{1}{k-1}} u_0(s) + \sum_{i=0}^{\infty} a_i(s)\, \mu^{\frac{i}{k-1}}. \tag{14.11}$$

Нами, следовательно, установлено предложение.

Т е о р е м а 14.1. *Пусть выполнены условия:*

1. 1 *не является собственным значением ядра* $K(s, t)$.

2. *Либо ядро* $A_k(s, t)$, *входящее в уравнение* (14.4), *положительно или квазиотрицательно и* k — *нечетное число, либо* $A_k(s, t)$ — *положительно определенное ядро.*

3. $u_0(s)$ — *какое-нибудь ненулевое решение*[1]) *уравнения* (14.5).

---

[1]) Таких решений, как мы видели, будет континуум.

4. 1 *не является собственным значением оператора* T, *заданного равенством* (14.10).

Тогда уравнение (14.1) *имеет особое решение вида* (14.11), *где* $a_i(s)$ — *непрерывные функции.*

Отметим, что в условиях данной теоремы уравнение (14.1) может иметь бесчисленное множество особых решений вида (14.11), так как уравнение (14.7) имеет континуум ненулевых решений $v_0(s)$, отвечающих значениям $\lambda_0 \neq 0$.

Пусть 1 — простое собственное значение оператора T. Тогда, как и в § 10, мы для уравнения (14.9) составляем уравнение разветвления, совпадающее по виду с уравнением (12.4), и при его помощи получаем описание малых решений $y_\lambda(s)$ уравнения (14.9).

В тривиальном случае, т. е. когда все коэффициенты уравнения (12.4) равны нулю, уравнение (14.9) имеет бесчисленное множество малых решений $y(\lambda, s)$ (однопараметрическое семейство решений). Каждое такое решение, в силу соотношений (14.8) и (14.2), приводит к особому решению вида

$$x(s) = \mu^{-\frac{1}{k-1}} u_0(s) + \mu^{-\frac{1}{k-1}} y\left(\mu^{\frac{1}{k-1}}, s\right)$$

уравнения (14.1).

Если в уравнении разветвления (12.4) $L_{20} \neq 0$ (см. примеры 12.2.1 — 12.2.6), то в комплексном случае каждое малое решение, в том числе и решения уравнения (14.9), равные нулю тождественно, приводит к особому решению уравнения (14.1), главный член которого имеет вид $\mu^{-\frac{1}{k-1}} u_0(s)$. К таким же выводам нас приводят примеры 12.2.7 — 12.2.9. Нас, однако, здесь интересует лишь вещественный случай. В вещественном случае (см. пример 12.2.3) уравнение (14.9) может и не иметь малых решений, тогда при данном $u_0(s) \not\equiv 0$ уравнение (14.1) может не иметь особых решений рассматриваемого вида.

Пусть, наконец, 1 — собственное значение кратности r ($r \geqslant 2$) оператора T. Тогда уравнение разветвления, составленное для уравнения (14.9), примет вид (12.6). В этом случае теоремы 12.6 и 12.7 приводят к различным утверждениям о малых решениях уравнения (14.9). Но, как мы видели, если $y(\lambda, s)$ — малое решение уравнения (14.9), то

$$x(s) = \mu^{-\frac{1}{k-1}} \left[u_0(s) + y\left(\mu^{\frac{1}{k-1}}, s\right)\right]$$

является особым решением уравнения (14.1).

Отметим еще, что построение особых решений рассматриваемого здесь вида фактически сводится к построению малых решений уравнения (14.9), т. е. к использованию приемов, изложенных в § 13. Правда, в отличие от приемов построения малых решений, рассмотренных в § 13, здесь возникает дополнительная трудность, связанная с построением ненулевого решения уравнения (14.5), аналитический вид которого зависит от аналитического вида ядра $A_k(s, t)$.

14.5. Ветвление решений основного уравнения. Вернемся к исследованию основного уравнения (14.3). Пусть 1 — простое собственное значение ядра $K(s, t)$. Тогда так же, как в п. 10.3, мы приходим к уравнению разветвления (10.18) малых решений уравнения (14.3), которое исследуется методами § 2 (см. п. 2.7, в котором разобраны простейшие частные случаи). Пусть не все коэффициенты уравнения разветвления равны нулю. Запишем малые решения уравнения (10.18) в виде (2.5):

$$\xi = \xi_\varepsilon \lambda^\varepsilon + V, \qquad V = o(\lambda^\varepsilon) \quad \text{при} \quad \lambda \to 0,$$

и допустим, что для некоторого решения $0 < \varepsilon < 1$ (разумеется, $\xi_\varepsilon \neq 0$), т. е. соответствующее этому решению звено убывающей части диаграммы Ньютона составляет с отрицательным направлением оси абсцисс угол $\alpha < \frac{\pi}{4}$. Тогда в силу формулы (10.14) мы получим малое решение уравнения (14.3), имеющее вид

$$u(s) = b(s)\lambda^\varepsilon + o(\lambda^\varepsilon)$$

при $\lambda \to 0$. Отсюда и из (14.2) следует, что уравнение (14.1) будет иметь особое решение вида

$$x(s) = b(s)\mu^{\frac{\varepsilon-1}{k-1}} + o\left(\mu^{\frac{\varepsilon-1}{k-1}}\right) \tag{14.12}$$

при $\mu \to 0$, где $b(s) \not\equiv 0$. Мы, следовательно, приходим к предложению.

Теорема 14.2. *Пусть выполнены условия:*

1. 1 — *простое собственное значение ядра* $K(s, t)$.

2. *Уравнение разветвления* (10.18), *выведенное для уравнения* (14.3), *имеет вещественные решения вида*

$$\xi = \xi_\varepsilon \lambda^\varepsilon + o(\lambda^\varepsilon) \tag{14.13}$$

при $\lambda \to 0$, *где* $0 < \varepsilon < 1$ *и* $\xi_\varepsilon \neq 0$.

Тогда каждому такому решению уравнения разветвления соответствует особое решение вида (14.12) *уравнения* (14.1).

Отметим, что решения вида (14.12) могут быть построены приемами, указанными в § 13.

Отметим еще, что если все малые решения уравнения разветвления, составленного для уравнения (14.3), имеют при $\lambda \to 0$ вид (14.13), где $\varepsilon > 1$, то малые решения уравнения (14.3) не порождают особых решений рассматриваемого вида уравнения (14.1).

Аналогично обстоит дело и в том случае, когда 1 — собственное значение кратности r ($r \geqslant 2$) ядра $K(s, t)$. В этом случае мы приходим к уравнению разветвления вида (10.24), которое исследуется методами § 6 (см. Айзенгендлер [2]).

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r)$ — малые решения уравнения (10.24), причем координаты вектора ξ имеют при $\lambda \to 0$ вид

$$\xi_i = \eta_{\varepsilon_i} \lambda^{\varepsilon_i} + o(\lambda^{\varepsilon_i}), \quad i = 1, 2, \ldots, r. \tag{14.13$'$}$$

Тогда, если $\eta_{\varepsilon_i} \neq 0$ и $0 < \varepsilon_i < 1$ для некоторого i, то такое малое решение уравнения разветвления (в силу формулы (10.20)) приводит к особому решению вида (14.12) уравнения (14.1).

Если все малые решения уравнения разветвления (10.24), выведенного для уравнения (14.3), имеют вид (14.13$'$) и для них $\varepsilon_i > 1$ ($i = 1, 2, \ldots, r$), то малые решения уравнения (14.3) не порождают особых решений рассматриваемого вида уравнения (14.1).

Основное уравнение (14.3) может иметь и другие (не малые) решения. Полагая в уравнении (14.3) $\lambda = 0$, мы получим вспомогательное для него уравнение

$$u(s) = \int_B K(s, t)\, u(t)\, dt + \int_B B_k(s, t)\, u^k(t)\, dt. \tag{14.14}$$

Данное вспомогательное уравнение может иметь ненулевые решения. Пусть $u_0(s)$ — ненулевое решение уравнения (14.14). Тогда при помощи замены (14.8) уравнение (14.3) принимает вид

$$y(s)-\int\limits_B [K(s,t)+kB_k(s,t)\,u_0^{k-1}(t)]\,y(t)\,dt=\lambda f(s)+$$
$$+\int\limits_B B_k(s,t)\,[C_k^2u_0^{k-2}(t)\,y^2(t)+C_k^3u_0^{k-3}(t)\,y^3(t)+\ldots+$$
$$+y^k(t)]\,dt+\sum_{m=0}^{k-1}\lambda^{k-m}\int\limits_B B_m(s,t)\,[u_0(t)+y(t)]^m\,dt. \qquad (14.15)$$

Данное уравнение исследуется так же, как уравнение (14.9), и всякое его малое вещественное решение $y(\lambda, s)$ приводит к особому решению уравнения (14.1):

$$x(s)=\mu^{-\frac{1}{k-1}}\left[u_0(s)+y\left(\mu^{\frac{1}{k-1}}, s\right)\right].$$

14.6 Особые решения в пространствах Лебега. В предыдущих пунктах был изучен вопрос об особых решениях уравнения (14.1), принадлежащих пространству непрерывных функций при $\mu\neq 0$. Полученные результаты распространяются на пространства Лебега L^p при $p=1+k$.

Пусть B — измеримое по Лебегу множество конечномерного евклидова пространства и $\operatorname{mes} B<\infty$. Мы будем предполагать, что $K(s, t)$ порождает линейный интегральный оператор A:

$$Au=\int\limits_B K(s,t)\,u(t)\,dt,$$

действующий вполне непрерывно из $L^p(B)$ в $L^p(B)$, где $p=1+k$. Данное требование, в частности, выполняется, если $K(s, t)\in L^q(B\times B)$, где $q=(1+k)/k$, что непосредственно следует из неравенства Гёльдера. Пусть, далее, $f(s)\in L^p(B)$, $\int\limits_B B_0(s,t)\,dt\in L^p(B)$ и каждое ядро

$B_m(s, t)$ порождает оператор A_m:

$$A_m u = \int_B B_m(s, t)\, u(t)\, dt \qquad (m = 1, 2, \ldots, k),$$

действующий из $L^{q_m}(B)$ в $L^{p_m}(B)$, где $p_m = 1 + m$, $q_m = (1 + m)/m$, причем A_k — вполне непрерывный оператор.

Из этих требований непосредственно следует, что линейные и нелинейные интегральные операторы, входящие в уравнение (14.1), действуют из пространства $L^p(B)$ в пространство $L^p(B)$, где $p = 1 + k$. Покажем это для последнего слагаемого, входящего в правую часть равенства (14.1). Пусть $x(t) \in L^{k+1}$.

Тогда $x^k(t) \in L^{\frac{k+1}{k}}(B) = L^q$, а оператор A_k по условию действует вполне непрерывно из $L^q(B)$ в $L^p(B)$, где $p = 1 + k$ и $q = (1 + k)/k$.

Ввиду этого все предложения, установленные в предыдущих пунктах для пространств непрерывных функций, сохраняются и для пространств Лебега L^p $(p = 1 + k)$. При этом под малым решением $y(\lambda, s)$ понимается функция, которая принадлежит пространству L^{k+1} и норма которой в этом пространстве стремится к нулю при $\lambda \to 0$. Под ненулевым решением уравнения (14.5) понимается решение, норма которого в пространстве L^{k+1} отлична от нуля. Заметим еще, что теоремы о ненулевых решениях уравнения (14.7), на которые мы ссылались (М. М. Вайнберг [1], теоремы 25.1, 25.5 и 25.7), справедливы для пространств Лебега L^{k+1}.

В заключение отметим, что более общее уравнение

$$x(s) - \int_B K(s, t)\, x(t)\, dt = f(s) + \mu \sum_{i+m=0}^{k} \mu^i \int_B B_{im}(s, t)\, x^m(t)\, dt$$

исследуется так же, как уравнение (14.1). При этом, если $B_{0k}(s, t)$ обладает теми же свойствами, что и $B_k(s, t)$, то сохраняются и ранее установленные предложения.

ГЛАВА VI

Ветвление периодических решений дифференциальных уравнений

Основное содержание данной главы связано с решением задачи Пуанкаре о периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 15. Периодические решения неавтономных систем

15.1. Постановка задачи. Пусть E_n — евклидово пространство (вещественное или комплексное) размерности n, G — некоторая область пространства E_n, λ — параметр (вещественный или комплексный), Λ — окрестность нуля комплексной плоскости, а в вещественном случае Λ — окрестность или полуокрестность нуля и $t \in (-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, записанную в векторной форме:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \lambda g(t, x, \lambda), \tag{15.1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — искомый вектор пространства E_n, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ и $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ — заданные вектор-функции со значениями в E_n, непрерывные по совокупности аргументов $(t, x, \lambda) \in (-\infty, +\infty) \times G \times \Lambda$ и ω-периодические по t. Мы будем предполагать, что $f(t, x)$ — голоморфная по x функция в области G, а $g(t, x, \lambda)$ — голоморфная функция по $(x, \lambda) \in G \times \Lambda$, т. е. что компоненты этих функций разлагаются в сходящиеся ряды

$$f_i(t, x) = \\ = \sum_{k_1 + \ldots + k_n \geqslant 0} a^{(i)}_{k_1 k_2 \ldots k_n}(t)\,(x_1 - x_1^0)^{k_1}(x_2 - x_2^0)^{k_2} \ldots (x_n - x_n^0)^{k_n},$$

$$g_i(t, x, \lambda) = \\ = \sum_{k_1+\ldots+k_n+k\geqslant 0} b^{(i)}_{k_1\ldots k_n k}(t)(x_1 - x_1^0)^{k_1}\ldots(x_n - x_n^0)^{k_n}(\lambda - \lambda_0)^k$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

в некоторой окрестности произвольной точки $x^0 \in G$ и $(x^0, \lambda_0) \in G \times \Lambda$. Пусть $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \subset G$ — какое-нибудь ω-периодическое решение [1]) порождающей системы

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \tag{15.2}$$

Ставится задача о нахождении при достаточно малых $|\lambda|$ всех непрерывных и ω-периодических решений $\psi(t,\lambda)$ системы (15.1), удовлетворяющих условию

$$\psi(t, 0) = \varphi(t).$$

Данная задача восходит к Пуанкаре [1], предложившему общий подход для ее решения. Сам Пуанкаре и многие другие авторы ограничились в своих исследованиях рассмотрением различных частных случаев сформулированной задачи (см. И. Г. Малкин [1], а также Чезари [1], где указана библиография). Сравнительно недавно Лефшец [1, 2] предложил воспользоваться некоторым видоизменением кронекеровского метода исключения для решения сформулированной задачи в общей постановке. Эта идея Лефшеца была развита для решения поставленной задачи в работах П. Г. Айзенгендлера и М. М. Вайнберга [2—4], в которых существенно использовался алгебраический аппарат, изложенный в §§ 2—6.

15.2. Метод Пуанкаре. Пусть $x(t, \alpha, \lambda)$ — решение следующей начальной задачи:

$$x(0, \alpha, \lambda) = \varphi(0) + \alpha \tag{15.3}$$

для уравнения (15.1). Как известно (см., например, Лефшец [2], стр. 56), это решение можно представить в виде

$$x(t, \alpha, \lambda) = \varphi(t) + \chi(t, \alpha, \lambda), \tag{15.4}$$

где при всяком фиксированном $t \in [0, \omega]$ компоненты

[1]) О существовании таких решений см., В. А. Плисс [1].

вектора $\chi(t, \alpha, \lambda)$ разлагаются в ряды

$$\chi_i(t, \alpha, \lambda) = \sum_{k_1+\ldots+k_n+k\geqslant 1} c^{(i)}_{k_1\ldots k_n k}(t)\,\alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_n^{k_n}\lambda^k, \tag{15.5}$$

сходящиеся в некотором цилиндре $\|\alpha\| \leqslant \rho$, $|\lambda| \leqslant \rho_1$ при произвольном $t \in [0, \omega]$. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\|\cdot\|$ — норма, заданная в пространстве E_n.

Коэффициенты этих рядов определяются следующим образом. Решение (15.4) с учетом (15.5) подставляется в уравнение (15.1), а затем сравниваются коэффициенты при одинаковых одночленах $\alpha_1^{k_1}, \ldots \alpha_n^{k_n}\lambda^k$. При этом получается рекуррентная система дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов $c^{(i)}_{k_1,\ldots k_n k}(t)$, которая решается при начальных условиях (согласованных с (15.3))

$$c^{(i)}_{k_1\ldots k_n k}(0) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k_i = 1 \text{ и } k_j = 0 \ (j \neq i), \quad k = 0, \\ 0 & \text{при всех других значениях } k_i \text{ и } k. \end{cases}$$

15.3. Условия периодичности и уравнение разветвления. Как известно (см., например, Лефшец [2], стр. 168), для того чтобы решение (15.4) было ω-периодическим, необходимо и достаточно, чтобы

$$\chi(\omega, \alpha, \lambda) - \chi(0, \alpha, \lambda) = 0,$$

или, согласно равенству (15.3),

$$\chi_i(\omega, \alpha, \lambda) - \varphi_i(0) - \alpha_i = 0. \tag{15.6}$$

В силу (15.5) левые части данной системы представляют собою аналитические функции в точке $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \lambda = 0$.

Левые части системы (15.6) мы сократим на максимальную допустимую степень λ. Получим тогда

$$\Psi_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15.7}$$

Решение $\alpha = \alpha(\lambda)$ данной системы мы по-прежнему назовем малым, если $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(\lambda)$ непрерывно в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ или (в вещественном случае) в некоторой полуокрестности точки $\lambda = 0$, содержащей $\lambda = 0$.

Лемма 15.1. *Между множеством всех малых решений уравнения* (15.7) *и множеством всех решений поставленной в п.* 15.1 *задачи существует взаимно однозначное соответствие.*

Данная лемма доказывается примерно так же, как лемма 12.1. В силу данной леммы поставленная задача об отыскании всех ω-периодических решений уравнения (15.1), ответвляющихся при $\lambda = 0$ от фиксированного ω-периодического решения порождающей системы (15.2), сводится к нахождению всех малых решений уравнения (15.7).

Если хотя бы для одного i $\Psi_i(0, \ldots, 0, 0) \neq 0$, то система (15.7) не имеет малых решений. Ввиду этого мы будем предполагать, что

$$\Psi_i(0, 0, \ldots, 0, 0) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (15.8)$$

Обозначим через J матрицу Якоби в нуле от $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ по $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, и пусть r — дефект этой матрицы. Исключая $n - r$ неизвестных из системы (15.7), мы получим

$$\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \qquad (15.9)$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ — оставшиеся после исключения неизвестные из совокупности $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, причем функции Φ_i являются аналитическими в начале координат. Далее, в силу леммы 1.1 имеем

$$\operatorname{ord} \Phi_i(\xi_1, \ldots, \xi_r, 0) \geqslant 2, \qquad \operatorname{ord} \Phi_i(0, \ldots, 0, \lambda) \geqslant 1,$$

так что система (15.9) представляет собою уравнение разветвления рассматриваемой задачи.

Так как системы (15.7) и (15.9) эквивалентны, то в силу леммы 15.1 рассматриваемая задача о ветвлении периодических решений уравнения (15.1) сводится к нахождению всех малых решений уравнения разветвления (15.9).

Прежде чем перейти к описанию возможных решений рассматриваемой задачи, мы сделаем следующее

Замечание 15.1. К уравнению разветвления (15.9) мы приходим как в вещественном случае (когда пространство E_n и параметр λ вещественны), так и в комплексном случае. Однако методы исследования уравнения разветвления (см. § 2 и § 6) используют предположение о том, что неизвестные $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ и λ комплексны. Ввиду этого в вещественном случае (когда ξ_i и λ вещественны) мы в уравнении (15.9) будем рассматривать $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \lambda$ как комплексные переменные, т. е. распространим область определения функций Φ_i на комплексное $(r+1)$-мерное пространство, найдем все малые решения уравнения (15.9), а затем выделим малые вещественные решения.

15.4. Описание решений в регулярном случае. При $r = 0$ определитель матрицы J отличен от нуля и мы имеем регулярный случай. Так как $|J| \neq 0$, то по теореме 1.2 система (15.7) имеет единственное малое решение относительно $\alpha = \alpha(\lambda)$ и компоненты этого решения представимы в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ в виде сходящихся рядов по целым степеням λ:

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} \lambda^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15.10}$$

Числа $a_k^{(i)}$ могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов, т. е. путем подстановки (15.10) в (15.7) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях λ. Подставляя затем найденные α_i в (15.5), мы получим решение (15.4) задачи (15.3) для уравнения (15.1).

Отметим, что в данном случае решение (15.4) — (15.5) может быть найдено и непосредственно методом неопределенных коэффициентов. Именно, из (15.10) и (15.5) следует, что в рассматриваемом случае единственное решение (15.4) представимо в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ в виде сходящегося ряда по целым степеням λ:

$$x_i(t, \alpha, \lambda) = \varphi_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(i)}(t) \lambda^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15.11}$$

Подставляя (15.11) в (15.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, мы получим рекуррентную систему дифференциальных уравнений относительно последовательности векторов

$$b_k(t) = (b_k^{(1)}(t), b_k^{(2)}(t), \ldots, b_k^{(n)}(t)), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

При интегрировании k-го дифференциального уравнения рекуррентной системы для определения вектора $b_k(t)$ появятся произвольные постоянные, которые найдутся из условия ω-периодичности вектора $b_{k+\nu}(t)$, где $\nu > 0$. Эта рекуррентная система для определения векторов $b_k(t)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ разрешима, ибо по доказанному в регулярном случае рассматриваемая нами задача имеет единственное непрерывное решение и оно представимо в некоторой окрестности $\lambda = 0$ в виде сходящегося ряда (15.11).

Отметим, что часто метод неопределенных коэффициентов применяется к решению поставленной задачи об ω-периодических решениях уравнения (15.1) без предварительной информации о сходимости рядов (15.11). В этом случае ряды (15.11) являются формальными. Процедура определения коэффициентов $b_k(t)$ та же. Правда, при таком подходе заранее нельзя гарантировать разрешимость рекуррентной системы дифференциальных уравнений относительно неизвестных вектор-функций $b_k(t)$ (в нерегулярном случае, т. е. в случае ветвления, рекуррентная система может оказаться и неразрешимой). Но если рекуррентная система разрешима и коэффициенты $b_k(t)$ найдены, то для доказательства сходимости рядов (15.11), т. е. что формальное решение является и настоящим, строятся мажоранты.

Разумеется, в регулярном случае рекуррентная система разрешима и ряды (15.11) сходятся в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$. Мы, следовательно, приходим к предложению.

Теорема 15.1. *В регулярном случае всякое формальное решение поставленной задачи о периодических решениях уравнения* (15.1) *является и настоящим.*

Позже мы покажем, что в нерегулярном случае возможны формальные решения, которые не являются настоящими (см. пример в п. 16.4).

15.5. Описание решений в одномерном случае ветвления. При $r = 1$ уравнение (15.9) принимает вид

$$\Phi(\xi, \lambda) = 0, \tag{15.12}$$

и его можно записать в виде (12.4), т. е. имеем одномерный случай ветвления. Так же, как в п. 12,2, если не все коэффициенты уравнения разветвления равны нулю, при помощи диаграммы Ньютона мы находим все малые решения уравнения (15.12):

$$\xi^{(k)} = \sum_{\nu=\nu_k}^{\infty} \eta_\nu^{(k)} \lambda^{\frac{\nu}{p_k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m;\ \nu_k \geqslant 1). \tag{15.13}$$

По найденным значениям $\xi^{(k)}$ мы находим все решения $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ системы (15.7); они также будут представимы в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ в виде сходящихся рядов по целым степеням $\mu = \lambda^{1/p_k}$, где p_k — натуральные числа. Подставляя эти значения α в (15.5), мы по формуле (15.4) получим все ω-периодические решения поставленной задачи:

$$x_i^{(k)}(t, \lambda) = \varphi_i(t) + \sum_{\nu=\nu_k}^{\infty} b_{k\nu}^{(i)}(t)\, \lambda^{\frac{\nu}{p_k}} \tag{15.14}$$

($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$; $\nu_k \geqslant 1$, p_k — натуральные числа). Эти ряды сходятся в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$. Мы приходим к следующим предложениям.

Теорема 15.2. *Если не все коэффициенты уравнения разветвления* (15.12) *равны нулю, то от заданного ω-периодического решения* $\varphi(t)$ *порождающего уравнения* (15.2) *ответвляется конечное число непрерывных ω-периодических решений уравнения* (15.1). *При этом компоненты каждой ветви представимы в некоторой окрестности точки* $\lambda = 0$ *в виде сходящихся рядов* (15.14).

Теорема 15.3. *Если все коэффициенты уравнения разветвления* (15.12) *равны нулю, то от заданного ω-периодического решения* $\varphi(t)$ *порождающего уравнения* (15.2) *ответвляется однопараметрическое семейство ω-периодических решений*

$$x(t, \lambda) = \varphi(t) + \chi(t, \lambda, \xi),$$

где ξ — произвольный параметр и $\chi(t, 0, \xi) \equiv 0$.

В условиях теоремы 15.2 числа m, p_k и ν_k находятся при помощи диаграммы Ньютона.

Заметим, что частные случаи, рассмотренные в п. 2.7, приводят, как в п. 12.2, к различным выводам о числе всех ω-периодических решений рассматриваемой задачи, о виде каждого решения, а в вещественном случае, т. е. когда пространство E_n и параметр λ вещественны, о числе вещественных решений и о виде каждого из них.

Как и в предыдущем пункте, вектор-функции $b_{k\nu}(t) = (b_{k\nu}^{(1)}(t), \ldots, b_{k\nu}^{(n)}(t))$, входящие в ряды (15.14), могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов.

Рассуждая, как в предыдущем пункте, мы приходим к предложению.

Теорема 15.4. *Если не все коэффициенты одномерного уравнения разветвления* (15.12) *равны нулю, то всякое формальное* ω*-периодическое решение поставленной для уравнения* (15.1) *задачи является и настоящим.*

В дальнейшем будет показано (см. пример в п. 16.4), что в условиях теоремы 15.3 возможны формальные решения, которые не являются настоящими.

15.6. Описание решений в многомерном случае ветвления. Пусть $r > 1$. Используя обозначения § 6, мы для системы (15.9) составим псевдомногочлены d_k ($k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, p$; $p \leqslant r$).

При помощи теорем 6.1 и 6.2 мы приходим к следующим предложениям.

Теорема 15.5. *Пусть* $d_k \sim 1$ *для* $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, r-1$ *и* d_r *не ассоциирован с единицей. Тогда от заданного* ω*-периодического решения* $\varphi(t)$ *порождающего уравнения* (15.2) *ответвляется конечное число непрерывных* ω*-периодических решений уравнения* (15.1), *причем компоненты этих решений представимы в некоторой окрестности точки* $\lambda = 0$ *в виде сходящихся рядов* (15.14).

Теорема 15.6. *Если* $d_k \sim 1$ *для* $k = 1, 2, \ldots, r$, *то поставленная задача не имеет решений, т. е.* ω*-периодическое решение* $\varphi(t)$ *уравнения* (15.2) *не имеет непрерывных* ω*-периодических продолжений по* λ.

Теорема 15.7. *Если при некотором* m ($m < r$) d_m *не ассоциирован с единицей, то от заданного* ω*-периодического решения* $\varphi(t)$ *порождающего уравнения* (15.2) *ответвляется конечное число* $(r-m)$*-параметрических семейств* ω*-периодических решений уравнения* (15.1).

Теорема 15.8. *Если все коэффициенты уравнения разветвления* (15.9) *равны нулю, то от заданного* ω*-периодического решения* $\varphi(t)$ *уравнения* (15.2) *ответвляется лишь одно* r*-параметрическое семейство* ω*-периодических решений* (15.1).

Отметим, что в условиях теоремы 15.5, т. е. в квазирегулярном случае (см. определение 6.1), функции $b_{k\nu}^{(i)}(t)$, входящие в ряды (15.4), могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов. Если ряды (15.14) рассматривать как компоненты формальных решений, то так же, как в п. 15.4, мы приходим к предложению.

Теорема 15.9. *В квазирегулярном случае каждое ω-периодическое формальное решение поставленной задачи (для уравнения* (15.1)) *является и настоящим решением.*

§ 16. Периодические решения квазилинейных систем

Для квазилинейных неавтономных систем задача Пуанкаре о периодических решениях достаточно изучена, когда для порождающего уравнения имеет место нерезонансный случай (см., например, И. Г. Малкин [1]). Мы покажем, что методы теории ветвления позволяют изучить эту задачу и в резонансном случае.

В отличие от предыдущего параграфа, в котором предполагалось, что задано ω-периодическое решение $\varphi(t)$ порождающего уравнения (15.2), здесь решение $\varphi(t)$ легко находится. Другое отличие от предыдущего параграфа заключается в том, что здесь становятся более прозрачными как вывод уравнения разветвления, так и вид этого уравнения.

16.1. Постановка задачи. Пусть в уравнении (15.1) вектор-функция $f(t, x) = Ax + F(t)$, где A—постоянная вещественная матрица и $F(t)$ — периодическая вектор-функция периода ω. Тогда уравнение (15.1) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + F(t) + \lambda g(t, x, \lambda), \qquad (16.1)$$

где по-прежнему вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_n$.

Пусть $\varphi(t)$ — ω-периодическое решение порождающей системы

$$\frac{y}{dt} = Ay + F(t). \qquad (16.2)$$

Решение $\varphi(t)$ находится следующим образом.

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$|A - \mu I| = 0, \qquad (16.3)$$

где I — единичная матрица, и обозначим через k_0 число групп решений (см. И. Г. Малкин [1], гл. II, § 1) уравнения

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \qquad (16.4)$$

порождаемых нулевым корнем уравнения (16.3).

Пусть k_ν — число групп решений уравнения (16.4), порождаемых корнями

$$\pm i\frac{2\pi}{\omega}q_\nu \quad (q_\nu \text{ — натуральные числа, } \nu = 1, 2, \ldots, \gamma)$$

характеристического уравнения (16.3), и

$$p = k_0 + 2\sum_{\nu=1}^{\gamma} k_\nu.$$

Тогда (см. И. Г. Малкин [1], гл. II, § 4) система (16.4) допускает p и только p линейно независимых ω-периодических решений

$$\varphi_k(t) = (\varphi_{1k}(t),\ \varphi_{2k}(t),\ \ldots,\ \varphi_{nk}(t)), \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p;$$

и сопряженная с (16.4) система также допускает p линейно независимых ω-периодических решений

$$\psi_k(t) = (\psi_{1k}(t), \psi_{2k}(t), \ldots, \psi_{nk}(t)),\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p.$$

Для того чтобы система (16.2) допускала ω-периодические решения, необходимо и достаточно (см. И. Г. Малкин [1], стр. 109), чтобы вектор-функция $F(t)$ удовлетворяла условиям

$$\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\omega} F_i(t)\,\psi_{ij}(t)\,dt = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Мы будем предполагать, что это условие выполнено. Тогда (см. И. Г. Малкин [1], гл. II, § 4) уравнение (16.2) имеет p-параметрическое семейство

$$y = \varphi(t,\ h_1,\ h_2,\ \ \ldots,\ h_p)$$

ω-периодических решений.

Выберем в качестве $\varphi(t)$ одно из решений этого семейства и сформулируем следующую задачу.

З а д а ч а (A). Найти при достаточно малых $|\lambda|$ все непрерывные и ω-периодические решения $\psi(t,\ \lambda)$ системы (16.1), удовлетворяющие условию

$$\psi(t,\ 0) = \varphi(t).$$

16.2. Условия периодичности. Пусть $\| y_{ij}(t) \|$ — фундаментальная матрица системы (16.4), причем

$$y_{ii}(0) = 1, \quad y_{ij}(0) = 0 \quad (i \neq j).$$

Так как согласно предположению о корнях характеристического уравнения (16.3) система (16.4) имеет p и только p линейно независимых ω-периодических решений, то (см. И. Г. Малкин [1], стр. 118) нумерацию функций $y_{ij}(t)$ можно так изменить, чтобы

$$\begin{vmatrix} y_{11}(\omega) - 1 & \ldots & & y_{1,n-p}(\omega) \\ y_{21}(\omega) & y_{22}(\omega) - 1 & \ldots & y_{2,n-p}(\omega) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n-p,1}(\omega) & & \ldots & y_{n-p,n-p}(\omega) - 1 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (16.5)$$

Используя теперь метод Пуанкаре (см. п. 15.2), получим (см. И. Г. Малкин [1], стр. 119), что условие периодичности (15.6) примет в данном случае вид

$$\lambda \int_0^\omega \sum_{\nu=1}^n g_\nu(\tau, x(\tau, \alpha, \lambda), \lambda)\, \psi_{\nu i}(\tau)\, d\tau = 0 \qquad (16.6)$$

и

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k y_{jk}(\omega) - \alpha_j + \lambda \int_0^\omega \sum_{\nu=1}^n g_\nu(\tau, x(\tau, \alpha, \lambda), \lambda)\, y_{j\nu}(\omega - \tau)\, d\tau = 0 \qquad (16.7)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, p; \; j = 1, 2, \ldots, n-p).$$

При этом согласно неравенству (16.5) ранг матрицы Якоби системы (16.7) относительно координат вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ в точке $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ равен $n - p$. Ввиду этого из системы (16.7) можно выразить $n - p$ неизвестных α_k через остальные p неизвестных, которые мы обозначим через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$. Так как по условию (см. п. 15.1) $g(t, x, \lambda)$ — голоморфная функция по $(x, \lambda) \in G \times \Lambda$, то согласно теореме 1.2 о неявных функциях $n - p$ неизвестных α_k будут голоморфными функциями от $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$. Подставляя их в систему (16.6) и учитывая, что $g_\nu(t, x, \lambda)$ — голоморфные функции по (x, λ), получим систему

$$Q_i(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{16.8}$$

где Q_i — голоморфные функции в некоторой окрестности нуля.

Как и в п. 15.3, нас будут интересовать лишь малые решения системы (16.8), так как между ними и всеми решениями задачи (A) существует взаимно однозначное соответствие (см. лемму 15.1). Ввиду этого, для того чтобы решение $\varphi(t)$ можно было продолжить по λ как ω-периодическое решение уравнения (16.1), необходимо выполнение условий

$$Q_i(0, 0, \ldots, 0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что эти условия выполнены.

16.3. Вывод уравнения разветвления. Пусть J — матрица Якоби в нуле от $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ по $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$. Обозначим через r дефект этой матрицы. При $r = 0$ порождающее решение $\varphi(t)$ имеет (см. И. Г. Малкин [1], гл. II, § 6) единственное ω-периодическое продолжение по λ в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$. В силу голоморфности Q_i и $g(t, x, \lambda)$ это решение будет голоморфной функцией от λ.

Мы будем предполагать, что $r \geqslant 1$. Исключая из системы (16.8) $p - r$ неизвестных β_i и обозначив оставшиеся неизвестные через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$, мы получим систему

$$\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{16.9}$$

В силу теоремы 1.2 о неявных функциях Φ_i — аналитические функции в начале координат, причем согласно лемме 1.1 имеем

$$\operatorname{ord} \Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, 0) \geqslant 2, \quad \operatorname{ord} \Phi_i(0, \ldots, 0, \lambda) \geqslant 1.$$

Отсюда следует, что система (16.9) представляет собою уравнение разветвления. Так как согласно теореме 1.5 число малых решений системы (16.8) совпадает с числом малых решений системы (16.9), то согласно предыдущему между числом решений задачи (A) и числом малых решений уравнения разветвления (16.9) существует взаимно однозначное соответствие. Ввиду этого задача (A) сводится к нахождению всех малых решений уравнения разветвления (16.9) этой задачи.

16.4. Описание решений и дополнительные замечания. Так как уравнение разветвления (16.9) представляет собою частный случай системы (15.9), то решения задачи (A) описываются так же, как в § 15. Именно, теоремы 15.2, 15.3, 15.5, 15.6, 15.7 и 15.8 сохраняются для рассматриваемой в данном параграфе задачи (A). Справедливы и все замечания предыдущего параграфа о применении метода неопределенных коэффициентов для вычисления функций $b_{k\nu}^{(i)}(t)$, входящих в ряды (15.14).

В § 6 при изучении многомерного случая ветвления было введено понятие квазирегулярного случая (см. определение 6.1). Если условиться считать одномерный случай ветвления квазирегулярным, когда не все коэффициенты уравнения разветвления равны нулю, то мы приходим к следующему предложению.

Теорема 16.1. *В регулярном и квазирегулярном случаях всякое формальное решение задачи* (A) *является и настоящим.*

Данная теорема следует из теорем 15.1, 15.4 и 15.9. В других случаях, называемых вырожденными (см. определение 6.2), не всякое формальное решение задачи (A) является и настоящим. Например, система

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 + \lambda\,[(1 - \sin 2t)x_1^2 - (1 + \sin 2t)\,x_2^2],$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \lambda\,[(1 - \sin 2t)\,x_1^2 - (1 + \sin 2t)\,x_2^2],$$

для которой имеет место вырожденный случай, обладает семейством 2π-периодических решений вида

$$x_1 = B(\lambda)(\cos t + \sin t),\ x_2 = B(\lambda)(\cos t - \sin t),$$

где $B(\lambda)$ — произвольная функция от λ. Если за $B(\lambda)$ выбрать степенной ряд, который сходится лишь при $\lambda = 0$, то мы получим формальное решение рассматриваемой системы, не являющееся настоящим решением.

Сделаем в заключение следующие замечания.

Замечание 16.1. Если в уравнении (16.1) заменить постоянную матрицу A ω-периодической по t матрицей

$A(t)$, то мы придем к аналогичным выводам. Действительно, в этом случае по теореме Ляпунова (см. А. М. Ляпунов [2], § 47, а также Ф. Р. Гантмахер [1], гл. 14, § 3) мы при помощи преобразования Ляпунова придем к уравнению вида (16.1) с постоянной матрицей.

Замечание 16.2. Отметим еще, что путем перехода к уравнению в вариациях (см., например, С. Лефшец [2], стр. 168) уравнение (15.1) можно свести к уравнению вида (16.1).

§ 17. Периодические решения автономных систем

17.1. Задача Пуанкаре для автономных систем. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \lambda g(x, \lambda), \tag{17.1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор из вещественного пространства E_n, λ — малый вещественный параметр, $f(x)$ и $g(x, \lambda)$ — голоморфные функции от x и λ со значениями в E_n.

Пусть $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ является ω-периодическим решением порождающей системы

$$\frac{dy}{dx} = f(y). \tag{17.2}$$

Ставится следующая

Задача (B). Найти все $T(\lambda)$-периодические решения $\psi(t, \lambda)$ системы (17.1), удовлетворяющие условиям

$$\psi(t, 0) = \varphi(t), \qquad T(0) = \omega.$$

При этом предполагается непрерывность $\psi(t, \lambda)$ и $T(\lambda)$.

Данная задача является более трудной по сравнению с аналогичной задачей, рассмотренной в § 15, для неавтономных систем, так как здесь и период $T(\lambda)$ является неизвестной функцией параметра λ.

Замечание 17.1. Заметим, что без ограничения общности можно считать, что

$$\varphi(0) = (0, \varphi_2(0), \ldots, \varphi_n(0)) \tag{17.3}$$

и

$$\dot\varphi(0) = (\dot\varphi_1(0),\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0). \tag{17.4}$$

Действительно, полагая

$$z(t) = \frac{1}{2}(\varphi(t), \varphi(t)),$$

где (a, b) — скалярное произведение в пространстве E_n, мы будем иметь, что $z(0) = z(\omega)$. Отсюда по теореме Ролля имеем

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=t_1} = 0 \qquad (0 < t_1 < \omega),$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t_1)\dot\varphi_i(t_1) = 0.$$

Так как система (17.2) является автономной, то путем сдвига $t = t_1 + \tau$ получим

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(0)\dot\varphi_i(0) = 0,$$

т. е. что векторы $\varphi(0)$ и $\dot\varphi(0)$ ортогональны. Выберем теперь систему координат в E_n так, чтобы выполнялось равенство (17.4). Тогда в силу ортогональности будет выполняться и (17.3). В дальнейшем мы будем предполагать, что равенства (17.3) и (17.4) выполнены.

17.2. Уравнение разветвления. Обозначим через $x(t, \alpha, \lambda)$ решение начальной задачи

$$x(0, \alpha, \lambda) = \varphi(0) + \alpha,\ \alpha = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \tag{17.5}$$

для уравнения (17.1). Для того чтобы это решение было периодическим с периодом $T = \omega + \tau(\lambda)$ (см., например, Коддингтон и Левинсон [1], гл. 14, § 2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$x(0, \alpha, \lambda) = x(\omega + \tau(\lambda), \alpha, \lambda),$$

которое в силу (17.5) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &x_1(\omega + \tau, \alpha, \lambda) = 0, \\ &x_i(\omega + \tau, \alpha, \lambda) - \varphi_i(0) - \alpha_i = 0 \\ &\qquad (i = 2, 3, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{17.6}$$

Так как $f(x)$ и $g(x, \lambda)$ — голоморфные функции, то согласно теореме Пуанкаре (см., например, Лефшец [2], стр. 56 или Коддингтон и Левинсон [1], стр. 399, теорема 4.2) решение $x(t, \alpha, \lambda)$ представимо в виде

$$x(t, \alpha, \lambda) = \varphi(t) + \chi(t, \alpha, \lambda), \tag{17.7}$$

где

$$\chi_i(t, \alpha, \lambda) = \sum_{k_2+\ldots+k_n+k\geqslant 1} c^{(i)}_{k_2\ldots k_n k}(t)\, \alpha_2^{k_2}\ldots\alpha_n^{k_n}\lambda^k \tag{17.8}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

и $c^{(i)}_{k_2\ldots k_n k}(t)$ — голоморфные функции от t, причем ряды (17.8) сходятся в некотором цилиндре $\|\alpha\| \leqslant \rho$, $|\lambda| \leqslant \rho_1$ при произвольном $t \geqslant 0$.

Отсюда следует, что левые части системы (17.6) представляют собою аналитические функции в начале координат ($\tau = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, $\lambda = 0$). Сокращая каждое уравнение системы (17.6) на максимальную допустимую степень λ, мы получим

$$\Psi_i(\tau, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{17.9}$$

Непрерывное решение $\tau = \tau(\lambda)$, $\alpha_i = \alpha_i(\lambda)$ данной системы называется малым, если $\tau(0) = 0$ и $\alpha_i(0) = 0$ при $i = 2, 3, \ldots, n$. Данная система (17.9) отличается по виду от системы (15.7) лишь тем, что здесь вместо α_1 стоит τ, так что для нее справедливо предложение, аналогичное лемме 15.1. Отсюда, в частности, следует, что если система (17.9) не имеет малых решений, то рассматриваемая нами задача (B) (о $T(\lambda)$-периодических продолжениях решения $\varphi(t)$) не имеет решений. Поэтому мы будем в дальнейшем предполагать, что

$$\Psi_i(0, 0, \ldots, 0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{17.10}$$

Пусть J — матрица Якоби в нуле от $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ по $\tau, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и r — дефект этой матрицы. Тогда из системы (17.9) можно исключить $n - r$ неизвестных. Исключив их, мы согласно теореме 1.5 получим систему

$$\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{17.11}$$

эквивалентную системе (17.9). Здесь $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ — оставшиеся неизвестные из совокупности τ, α_2, ..., α_n, а функции Φ_i (по теореме 1.2 о неявных функциях) являются аналитическими в начале координат. Отметим еще, что согласно лемме 1.1 имеем

$$\operatorname{ord} \Phi_i (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, 0) \geqslant 2, \ \operatorname{ord} \Phi_i (0, \ldots, 0, \lambda) \geqslant 1,$$

так что система (17.11) представляет собою уравнение разветвления рассматриваемой задачи (B).

Так как между множеством малых вещественных решений системы (17.11) и множеством всех решений задачи (B) существует (согласно предыдущему) взаимно однозначное соответствие, то задача (B) сводится к отысканию всех вещественных решений системы (17.11).

17.3. Основные выводы. При $r = 0$ (регулярный случай) система (17.11) отсутствует, и по теореме 1.2 о неявных функциях система (17.9) имеет единственное решение

$$\tau = \tau (\lambda), \ \alpha_i = \alpha_i (\lambda) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Это решение является малым, и в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ оно разлагается в сходящийся степенной ряд

$$\tau (\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \lambda^k, \qquad \alpha_i (\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \lambda^k \qquad (i = 2, \ldots, n).$$

Числа τ_k и a_{ik} находятся методом неопределенных коэффициентов, т. е. путем подстановки $\tau (\lambda)$ и $\alpha_i (\lambda)$ в (17.9). Таким образом, в регулярном случае (при $r = 0$) задача (B) имеет единственное решение, являющееся аналитическим.

Отметим, что регулярный случай достаточно изучен (см., например, Коддингтон и Левинсон [1], гл. 14, § 2). При $r \geqslant 1$ задача (B) мало изучена [1]).

---

[1]) Имеются лишь некоторые общие замечания в книге Лефшеца [2] и отдельные журнальные статьи (см., например, статьи А. П. Проскурякова [1—3], в которых разобраны отдельные частные случаи задачи (B), и статью П. Г. Айзенгендлера и М. М. Вайнберга [4], в которой задача (B) изучается в общем виде).

При $r = 1$ система (17.11) представляет собою одно уравнение, имеющее вид (12.4), и мы имеем одномерный случай ветвления, для которого справедливы аналоги теорем 15.2 и 15.3.

Теорема 17.1. *Если все коэффициенты одномерного уравнения разветвления равны нулю, то задача* (*B*) *имеет однопараметрическое семейство решений.*

В квазирегулярном случае (когда не все коэффициенты одномерного уравнения разветвления равны нулю) нужно воспользоваться диаграммой Ньютона для определения всех малых вещественных решений уравнения (17.11), как это было сделано в п. 2.7. И здесь справедлива

Теорема 17.2. *В одномерном квазирегулярном случае задача* (*B*) *имеет конечное число решений, причем компоненты каждого решения представимы в виде сходящихся рядов по целым или дробным* (*с конечным общим знаменателем*) *степеням* λ.

Разумеется, если уравнение (17.11) при $r = 1$ не имеет малых вещественных решений, то задача (*B*) не имеет решений.

При $r > 1$ мы, как и в § 6, составляем для системы (17.11) псевдомногочлены d_k ($k = 1, 2, \ldots, p \leqslant r$) и при их помощи приходим к предложениям, аналогичным теоремам 15.5 — 15.8 Приведем одно такое предложение.

Теорема 17.3 [1]). *Пусть* $r > 1$. *Тогда, если* $d_k \sim 1$ ($k = 1, 2, \ldots, r-1$) *и* d_r *не ассоциирован с единицей, то задача* (*B*) *имеет конечное число решений, причем компоненты каждого решения представимы для малых* $|\lambda|$ *в виде сходящихся рядов по степеням* $\lambda^{1/q}$, *где* q — *некоторое натуральное число для данного решения. Все эти решения являются периодическими с периодом*

$$T = \omega + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda^{\frac{k}{q}}.$$

Данный ряд также сходится для малых $|\lambda|$.

Отметим, что при четном q соответствующее решение определено лишь для $\lambda \geqslant 0$. Для нахождения в этом случае

[1]) См. П. Г. Айзенгендлер и М. М. Вайнберг [4].

решения при $\lambda \leqslant 0$ (ср. п. 2.6) нужно в системе (17.1) заменить λ на $(-\lambda)$ и повторить все вычисления.

17.4. Метод неопределенных коэффициентов. В §§ 15 и 16 было обращено внимание на то, что излагаемые нами методы теории ветвления (заключающиеся в построении и исследовании уравнения разветвления) следует сочетать с методом неопределенных коэффициентов. Именно, сначала путем исследования уравнения разветвления мы получаем информацию о числе решений, о виде каждого решения и о сходимости решений вида (15.14), а затем методом неопределенных коэффициентов определяем функции $b_{k\nu}^{(i)}(t)$, входящие в ряды (15.14). Однако в случае автономных систем (17.1) возникают трудности при решении рекуррентных систем дифференциальных уравнений относительно последовательности векторов

$$b_{k\nu}(t) = (b_{k\nu}^{(1)}(t), b_{k\nu}^{(2)}(t), \ldots, b_{k\nu}^{(n)}(t)).$$

Раньше, в случае неавтономных систем, произвольные постоянные, появившиеся при интегрировании ν-го дифференциального уравнения рекуррентной системы для определения вектора $b_{k\nu}(t)$, определялись из условия ω-периодичности вектора $b_{k(\nu+\mu)}(t)$, где $\mu > 0$. Здесь векторы $b_{k\nu}(t)$ не имеют постоянного периода (он зависит от λ). Ввиду этого мы предварительно преобразуем систему (17.1), пользуясь заменой (см., например, И. Г. Малкин [1])

$$t = \theta\left(1 + \frac{1}{\omega}\tau(\lambda)\right),$$

считая известными коэффициенты ряда

$$\tau(\lambda) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{k\mu}\lambda^{\frac{\mu}{q_k}}.$$

Система (17.1) примет вид

$$\frac{dx}{d\theta} = \left(1 + \frac{\tau(\lambda)}{\omega}\right) f(x) + \lambda\left(1 + \frac{\tau(\lambda)}{\omega}\right) g(x, \lambda). \quad (17.1')$$

При изменении θ от 0 до ω аргумент t изменится от 0 до $T = \omega + \tau(\lambda)$. Теперь решения системы (17.1′) мы ищем в виде рядов[1])

$$x_i(\theta, \lambda) = \varphi_i(\theta) + \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} c_{k\nu}^{(i)}(\theta)\, \lambda^{\frac{\nu}{q_k}}$$

($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$; $\nu_k \geqslant 1$, q_k — натуральные числа), где $c_{k\nu}^{(i)}(\theta)$ являются ω-периодическими функциями аргумента θ.

Отметим еще, что и в случае автономных систем справедлива

Теорема 17.4. *В регулярном и квазирегулярном случаях всякое формальное решение задачи* (*B*) *является и настоящим.*

17.5. Автономные системы с одной степенью свободы. Рассмотрим важное в приложениях уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + m^2 x = \lambda f(x, \dot{x}, \lambda), \tag{17.12}$$

где скалярная функция $f(x, \dot{x}, \lambda)$ является голоморфной в некоторой области изменения аргументов.

Решение начальной задачи $y(0) = A$, $\dot{y}(0) = 0$ для порождающего уравнения $\ddot{y} + m^2 y = 0$ будет

$$y = A \cos mt.$$

Поставим следующую задачу.

Задача (С). Найти все $T(\lambda)$-периодические решения $\psi(t, \lambda)$ уравнения (17.12), удовлетворяющие условиям

$$\psi(t, 0) = A \cos mt, \quad T(0) = \omega = \frac{2\pi}{m}.$$

При этом предполагается непрерывность $\psi(t, \lambda)$ и $T(\lambda)$.

При решении этой задачи можно без ограничения общности (см. И. Г. Малкин [1]) принять следующие начальные условия для уравнения (17.12):

$$\psi(0, \lambda) = A + \alpha(\lambda), \qquad \dot{\psi}(0, \lambda) = 0. \tag{17.13}$$

Пусть $x(t, \alpha, \lambda)$ — решение задачи (17.12) — (17.13). Тогда согласно теореме Пуанкаре (см., например, Коддингтон

[1]) Можно считать и $a_{k\mu}$ неизвестными. Тогда получим рекуррентную систему для неизвестных $c_{k\nu}^{(i)}$ и $a_{l,\mu}$ (ср. Коддингтон и Левинсон [1], стр. 400).

тон и Левинсон [1], стр. 399, теорема 4.2)

$$x(t, \alpha, \lambda) = A\cos mt + \sum_{i+k\geqslant 1} a_{ik}(t)\,\alpha^i\lambda^k, \qquad (17.14)$$

причем этот ряд сходится в некоторой окрестности точки $\alpha = 0$, $\lambda = 0$ и $a_{ik}(t)$ — аналитические функции t. Как мы видели (см. п. 17.2), для того чтобы это решение было периодическим с периодом $T(\lambda) = 2\pi/m + \tau(\lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$x\left(\frac{2\pi}{m} + \tau, \alpha, \lambda\right) - x(0, \alpha, \lambda) = 0, \quad \dot{x}\left(\frac{2\pi}{m} + \tau, \alpha, \lambda\right) = 0.$$

Так как $2\pi/m = \omega$, то отсюда и из (17.13) следует, что

$$x(\omega+\tau, \alpha, \lambda) - A - \alpha = 0, \quad \dot{x}(\omega+\tau, \alpha, \lambda) = 0. \qquad (17.15)$$

В силу равенства (17.14) левые части равенств (17.5) являются аналитическими функциями от τ, α, λ в точке $\tau = \alpha = \lambda = 0$. Сокращая левые части равенств (17.15) на максимальные допустимые степени λ, получим систему

$$\Psi_i(\tau, \alpha, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2). \qquad (17.16)$$

Отметим, что лемма 15.1 справедлива и в данном случае, т. е. существует взаимно однозначное соответствие между всеми вещественными малыми решениями системы (17.16) и всеми решениями задачи (C). Мы будем поэтому предполагать, что

$$\Psi_i(0, 0, 0) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

ибо при нарушении этого условия задача (C) не имеет решений.

Пусть J — матрица Якоби в нуле от Ψ_1, Ψ_2 по τ и α. Если J — невырожденная матрица, т. е. имеет место регулярный случай, то по теореме 1.2 о неявных функциях система (17.16) имеет единственное решение

$$\tau = \tau(\lambda), \quad \alpha = \alpha(\lambda).$$

Это решение является малым, и в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ оно разлагается в сходящийся степенной ряд

$$\tau(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k \lambda^k, \qquad \alpha(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \lambda^k.$$

Числа τ_i и α_k могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов.

Таким образом, в регулярном случае задача (C) имеет единственное решение и оно представимо в виде сходящегося ряда

$$x(t, \alpha, \lambda) = A \cos mt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \lambda^k.$$

Пусть rang (J) = 1. Исключая тогда из системы (17.16) одно из неизвестных τ, α, мы согласно лемме 1.1 получим уравнение разветвления

$$\sum_{k=2}^{\infty} L_{k0} \xi^k + \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k \sum_{\nu=1}^{\infty} L_{k\nu} \lambda^\nu = 0 \tag{17.17}$$

задачи (C), где ξ — одно из неизвестных τ или α. Между множеством малых вещественных решений данного урав-(нения и множеством всех решений задачи (C) существует согласно предыдущему) взаимно однозначное соответствие.

В вырожденном случае (когда все коэффициенты уравнения (17.17) равны нулю) одно из неизвестных τ, α является произвольным, так что задача (C) имеет однопараметрическое семейство решений.

В квазирегулярном случае справедливо утверждение теоремы 17.2 о задаче (C). В этом случае для нахождения всех малых вещественных решений уравнения (17.17) нужно воспользоваться диаграммой Ньютона (так, как это было сделано в п. 2.7).

Изучим, наконец, тот случай, когда rang (J) = 0 [1]. Из (17.14) и (17.15) следует, что такая ситуация возможна при $A = 0$. Из равенства rang (J) = 0 следует, что

[1]) См. П. Г. Айзенгендлер и М. М. Вайнберг [4].

система (17.16) представляет собою уравнение разветвления задачи (C).

В тривиальном случае (когда $\Psi_i \equiv 0$ для $i = 1, 2$) параметры τ и α произвольны, так что решение (17.14) зависит от произвольного параметра α, а период T — от произвольного параметра τ.

В нетривиальном случае мы воспользуемся методами, изложенными в §§ 3, 4, 5. Сначала при помощи неособого линейного преобразования переменных

$$(\tau, \ \alpha) = P\,(\xi_1, \ \xi_2),$$

а затем при помощи подготовительной теоремы Вейерштрасса (теорема 3.3) система (17.16) приводится к нормальному виду

$$G_i\,(\xi_1, \xi_2, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2), \tag{17.18}$$

где G_i — отмеченные многочлены относительно ξ_1. Напомним, что системы (17.17) и (17.18) эквивалентны относительно малых решений.

Составим результант относительно ξ_1 многочленов G_1 и G_2, приравняем его нулю и сократим это равенство на максимальную допустимую степень λ. Получим тогда (см. § 5)

$$\widetilde{R}\,(\xi_2, \ \lambda) = 0. \tag{17.19}$$

Применяя диаграмму Ньютона и поступая так же, как в п. 5.1, мы при помощи теоремы 5.1 приходим к слудующему предложению.

Т е о р е м а 17.5. *Если* $\widetilde{R}\,(\xi_2, \lambda) \not\equiv 0$ *и* $\widetilde{R}\,(0, 0) = 0$, *то задача* ($C$) *имеет конечное число решений. Каждое из этих решений, а также соответствующий ему период* $\tau\,(\lambda)$ *представимы для малых* $|\lambda|$ *в виде сходящихся рядов по степеням* $\lambda^{1/p}$, *где* p — *некоторое натуральное число. Если* $\widetilde{R}\,(0, 0) \neq 0$, *то задача* ($C$) *заведомо не имеет решений.*

Отметим, что в условиях теоремы 17.5 задача (C) может и не иметь вещественных решений. Это зависит от расположений убывающих участков диаграмм Ньютона и от того, какие корни имеют соответствующие определяющие уравнения.

§ 18. Примеры

18.1. Неавтономные системы с одной степенью свободы. Пример 18.1. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 + \lambda g_1(t, x_1, x_2, \lambda), \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + \lambda g_2(t, x_1, x_2, \lambda), \end{aligned}\right\} \tag{18.1}$$

где

$$g_i = \sum_{k_1+k_2+k\geqslant 0} A^{(i)}_{k_1k_2k}(t)\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \lambda^k \qquad (i = 1, 2) \tag{18.2}$$

и $A^{(i)}_{k_1k_2k}(t)$ — непрерывные периодические функции с периодом 2π. Порождающая система

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_2, \qquad \frac{dy_2}{dt} = y_1 \tag{18.3}$$

имеет двупараметрическое семейство 2π-периодических решений

$$\varphi_1(t,\ h_1,\ h_2) = h_1 \cos t - h_2 \sin t,$$
$$\varphi_2(t,\ h_1,\ h_2) = h_1 \sin t + h_2 \cos t.$$

Из этого семейства в качестве исходного решения системы (18.3) мы выберем тривиальное решение

$$\varphi_1(t) \equiv 0, \qquad \varphi_2(t) \equiv 0$$

и займемся задачей (A) (см. конец п. 16.1).

Учитывая (15.4) и (15.5), мы напишем решение системы (18.1) в виде

$$x_i(t, \lambda, \alpha_1, \alpha_2) = \sum_{k_1+k_2+k\geqslant 1} a^{(i)}_{k_1k_2k}(t)\, \alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\lambda^k \qquad (i = 1, 2). \tag{18.4}$$

Вычислим первые коэффициенты этих рядов

$$a^{(1)}_{100}(t) = \cos t, \qquad a^{(2)}_{100}(t) = \sin t,$$
$$a^{(1)}_{010}(t) = -\sin t, \qquad a^{(2)}_{010}(t) = \cos t,$$
$$a^{(i)}{}_{k_1k_20}(t) \equiv 0 \text{ при } k_1 + k_2 \geqslant 2, \qquad i = 1,\ 2.$$

Для краткой записи других коэффициентов используем матрицу (оператор)

$$M(t)=\begin{pmatrix} \int\limits_0^t(\cdot)\cos(t-\tau)\,d\tau & -\int\limits_0^t(\cdot)\sin(t-\tau)\,d\tau \\ \int\limits_0^t(\cdot)\sin(t-\tau)\,d\tau & \int\limits_0^t(\cdot)\cos(t-\tau)\,d\tau \end{pmatrix},$$

умножение которой на вектор $\begin{bmatrix}\beta_1(t)\\ \beta_2(t)\end{bmatrix}$ дает вектор по формуле

$$M(t)\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \int\limits_0^t\beta_1(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau-\int\limits_0^t\beta_2(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau \\ \int\limits_0^t\beta_1(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau+\int\limits_0^t\beta_2(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau \end{bmatrix}.$$

Дальнейшие вычисления приводят к формулам

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}a_{001}^{(1)}(t)\\ a_{001}^{(2)}(t)\end{bmatrix}=M(t)\begin{bmatrix}A_{000}^{(1)}\\ A_{000}^{(2)}\end{bmatrix},\\
&\begin{bmatrix}a_{002}^{(1)}(t)\\ a_{002}^{(2)}(t)\end{bmatrix}=M(t)\begin{bmatrix}A_{001}^{(1)}+A_{100}^{(1)}a_{001}^{(1)}+A_{010}^{(1)}a_{001}^{(2)}\\ A_{001}^{(2)}+A_{100}^{(2)}a_{001}^{(1)}+A_{010}^{(2)}a_{001}^{(2)}\end{bmatrix},\\
&\begin{bmatrix}a_{003}^{(1)}(t)\\ a_{003}^{(2)}(t)\end{bmatrix}=M(t)\times\\
&\times\begin{bmatrix}A_{002}^{(1)}+A_{200}^{(1)}a_{001}^{(1)^2}+A_{110}^{(1)}a_{001}^{(1)}a_{001}^{(2)}+A_{020}^{(1)}a_{001}^{(2)^2}+A_{100}^{(1)}a_{002}^{(1)}+A_{010}^{(1)}a_{002}^{(2)}\\ A_{002}^{(2)}+A_{200}^{(2)}a_{001}^{(1)^2}+A_{110}^{(2)}a_{001}^{(1)}a_{001}^{(2)}+A_{020}^{(2)}a_{001}^{(2)^2}+A_{100}^{(2)}a_{002}^{(1)}+A_{010}^{(2)}a_{002}^{(2)}\end{bmatrix},\\
&\begin{bmatrix}a_{101}^{(1)}(t)\\ a_{101}^{(2)}(t)\end{bmatrix}=M(t)\begin{bmatrix}A_{100}^{(1)}a_{100}^{(1)}+A_{010}^{(1)}a_{100}^{(2)}\\ A_{100}^{(2)}a_{100}^{(1)}+A_{010}^{(2)}a_{100}^{(2)}\end{bmatrix},\\
&\begin{bmatrix}a_{011}^{(1)}(t)\\ a_{011}^{(2)}(t)\end{bmatrix}=M(t)\begin{bmatrix}A_{100}^{(1)}a_{010}^{(1)}+A_{010}^{(1)}a_{010}^{(2)}\\ A_{100}^{(2)}a_{010}^{(1)}+A_{010}^{(2)}a_{010}^{(2)}\end{bmatrix},
\end{aligned}\right\}\quad (18.5$$

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} a^{(1)}_{201}(t) \\ a^{(2)}_{201}(t) \end{bmatrix} = M(t)\begin{bmatrix} A^{(1)}_{200}a^{(1)^2}_{100} + A^{(1)}_{110}a^{(1)}_{100}a^{(2)}_{100} + A^{(1)}_{020}a^{(2)^2}_{100} \\ A^{(2)}_{200}a^{(1)^2}_{100} + A^{(2)}_{110}a^{(1)}_{100}a^{(2)}_{100} + A^{(2)}_{020}a^{(2)^2}_{100} \end{bmatrix},\\
&\begin{bmatrix} a^{(1)}_{021}(t) \\ a^{(2)}_{021}(t) \end{bmatrix} = M(t)\begin{bmatrix} A^{(1)}_{200}a^{(1)^2}_{010} + A^{(1)}_{110}a^{(1)}_{010}a^{(2)}_{010} + A^{(1)}_{020}a^{(2)^2}_{010} \\ A^{(2)}_{200}a^{(1)^2}_{010} + A^{(2)}_{110}a^{(1)}_{010}a^{(2)}_{010} + A^{(2)}_{020}a^{(2)^2}_{010} \end{bmatrix},\\
&\begin{bmatrix} a^{(1)}_{111}(t) \\ a^{(2)}_{111}(t) \end{bmatrix} = M(t)\begin{bmatrix} 2A^{(1)}_{200}a^{(1)}_{100}a^{(1)}_{010} + 2A^{(1)}_{020}a^{(2)}_{010}a^{(2)}_{100} + \\ 2A^{(2)}_{200}a^{(1)}_{100}a^{(1)}_{010} + 2A^{(2)}_{020}a^{(2)}_{100}a^{(2)}_{010} + \\ + A^{(1)}_{110}(a^{(1)}_{100}a^{(2)}_{010} + a^{(1)}_{010}a^{(2)}_{100}) \\ + A^{(2)}_{110}(a^{(1)}_{100}a^{(2)}_{010} + a^{(1)}_{010}a^{(2)}_{100}) \end{bmatrix}.
\end{aligned}\right\} \tag{18.5}$$

При помощи коэффициентов $a_{k_1k_2k}(t)$ можно вычислить коэффициенты системы (16.6) и (16.7).

Так как для рассматриваемого примера $p = n = 2$, то система (16.7) отсутствует. Далее, так как система (18.3) является самосопряженной, то (16.6) совпадает с системой (15.6), принимающей (после сокращения на λ) вид

$$\Psi_i(\alpha_1, \alpha_2, \lambda) \equiv$$
$$\equiv \sum_{k_1+k_2\geqslant 1} c^{(i)}_{k_1k_21}\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2} + \sum_{k_1+k_2\geqslant 0} \alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\sum_{k\geqslant 1} c^{(i)}_{k_1k_2\,(k+1)}\lambda^k = 0 \tag{18.6}$$
$$(i = 1, 2),$$

где

$$c^{(i)}_{k_1k_2(k+1)} = a^{(i)}_{k_1k_2(k+1)}\quad(2\pi). \tag{18.7}$$

Мы будем предполагать, что не все $a^{(i)}_{k_1k_2(k+1)}(2\pi) = 0$ при $i = 1, 2$.

Так как (см. (15.8)) $\Psi_i(0, 0, 0) = 0$, то $c^{(i)}_{001} = 0$ при $i = 1, 2$. Учитывая теперь (18.7) и формулы для коэффициентов (18.5), мы отсюда находим

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}(A^{(1)}_{000}(\tau)\cos\tau + A^{(2)}_{000}(\tau)\sin\tau)\,d\tau = 0,\\
&\int_0^{2\pi}(-A^{(1)}_{000}(\tau)\sin\tau + A^{(2)}_{000}(\tau)\cos\tau)\,d\tau = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{18.8}$$

В дальнейшем мы будем предполагать, что эти условия выполнены.

Заметим, что если в качестве исходного решения порождающей системы (18.3) взять

$$\varphi_1(t) = h_{10}\cos t - h_{20}\sin t,$$
$$\varphi_2(t) = h_{10}\sin t + h_{20}\cos t,$$

то, как показывают вычисления, параметры h_{10}, h_{20} должны удовлетворять уравнениям

$$\sum_{k_1+k_2\geqslant 1} c^{(i)}_{k_1k_21} h_{10}^{k_1} h_{20}^{k_2} + c^{(i)}_{001} = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Матрица Якоби в нуле от Ψ_1 и Ψ_2 по α_1 и α_2 принимает в рассматриваемом случае (когда $h_{10} = h_{20} = 0$) вид

$$J = \begin{bmatrix} c^{(1)}_{101} & c^{(1)}_{011} \\ c^{(2)}_{101} & c^{(2)}_{011} \end{bmatrix}. \tag{18.9}$$

Если $\operatorname{rang} J = 2$, то система (18.6) имеет единственное решение. Это решение имеет вид

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{\infty} a^{(i)}_k \lambda^k \qquad (i = 1, 2), \tag{18.10}$$

и ряды сходятся в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$. Подставляя (18.10) в (18.4), мы получим единственное решение задачи (A):

$$x_i(t, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} b^{(i)}_k(t)\lambda^k \qquad (i = 1, 2).$$

Пусть $\operatorname{rang} J = 1$. Тогда хотя бы один элемент матрицы (18.9) отличен от нуля. Допустим, что этим элементом является $c^{(1)}_{101}$. Применяя тогда к первому уравнению системы (18.6) теорему 1.2 о неявных функциях, мы получим единственное локальное решение для α_1:

$$\alpha_1 = \sum_{k+m\geqslant 1} e_{km}\alpha_2^k\lambda^m. \tag{18.11}$$

Методом неопределенных коэффициентов мы находим, что

$$e_{10} = -c_{011}^{(1)}\left(c_{101}^{(1)}\right)^{-1}, \quad e_{01} = -c_{002}^{(1)}\left(c_{101}^{(1)}\right)^{-1},$$
$$e_{20} = \left(c_{021}^{(1)} + c_{111}^{(1)} e_{10} + c_{201}^{(1)} e_{10}^{2}\right)\left(-c_{101}^{(1)}\right)^{-1},$$
$$e_{11} = \left(c_{111}^{(1)} e_{01} + 2c_{201}^{(1)} e_{10} e_{01}\right)\left(-c_{101}^{(1)}\right)^{-1},$$
$$e_{02} = \left(c_{003}^{(1)} + c_{201}^{(1)} e_{01}^{2}\right)\left(-c_{101}^{(1)}\right)^{-1}.$$

Подставляя (18.11) во второе равенство системы (18.6) получим уравнение разветвления

$$\sum_{m=2}^{\infty} L_{m0}\xi^m + \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m \sum_{n=1}^{\infty} L_{mn}\lambda^n = 0, \tag{18.12}$$

где

$$\xi = \alpha_2, \quad L_{20} = c_{101}^{(2)} e_{20} + c_{201}^{(2)} e_{10}^{2} + c_{021}^{(2)} + c_{111}^{(2)} e_{10},$$
$$L_{01} = c_{101}^{(2)} e_{01} + c_{002}^{(2)},$$
$$L_{02} = c_{101}^{(2)} e_{02} + c_{201}^{(2)} e_{01}^{2} + c_{003}^{(2)} + c_{102}^{(2)} e_{01},$$
$$L_{11} = c_{101}^{(2)} e_{11} + 2c_{201}^{(2)} e_{10} e_{01} + c_{111}^{(2)} e_{01} + c_{102}^{(2)} e_{10} + c_{012}^{(2)}.$$

Данное уравнение (18.12) исследуется при помощи диаграммы Ньютона так же, как в п. 2.7.

Например, если $L_{01}L_{20} \neq 0$, то (см. рис. 8, случай *в*)) $\varepsilon = 1/2$, корни определяющего уравнения

$$L_{20}\,\eta^2 + L_{01} = 0 \tag{18.13}$$

простые, так что уравнение (18.2) имеет два малых решения и они представимы в виде сходящихся рядов

$$\xi_\sigma = \eta_\sigma \lambda^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k\sigma} \lambda^{\frac{k}{2}} \qquad (\sigma = 1,2).$$

Отсюда следует, что и задача (A) имеет два решения

$$x_i^{(\sigma)}(t, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ki}^{(\sigma)}(t)\, \lambda^{\frac{k}{2}} \qquad (i, \sigma = 1,2), \tag{18.14}$$

причем функции $b_{ki}^{(\sigma)}$ можно определить и методом неопределенных коэффициентов.

Для выделения вещественных решений уравнения (18.12) мы поступаем (см. п. 2. 6) следующим образом. Пусть $L_{01}L_{02} \neq 0$. Тогда, так как $\varepsilon = 1/2$, то нужно отдельно исследовать уравнение (18.12) как для $\lambda < 0$, так и для $\lambda > 0$, т. е. уравнения

$$L_{20}\eta^2 + L_{01}\operatorname{sign}\lambda = 0.$$

Данные уравнения имеют вещественные корни лишь при условии $\operatorname{sign}\lambda L_{01}L_{02} = -1$. Следовательно, задача (A) для системы (18.1) имеет два вещественных решения. Они представимы в виде (18.14) и определены для $\lambda \geqslant 0$ при $\operatorname{sign} L_{01}L_{20} = -1$ или для $\lambda \leqslant 0$ при $\operatorname{sign} L_{01}L_{20} = 1$.

Если $L_{01} = 0$, $L_{11} = 0$ и $L_{02}L_{20} \neq 0$, то (см. рис. 8, случай *в*)) $\varepsilon = 1$ и определяющее уравнение принимает вид

$$L_{20}\eta^2 + L_{02} = 0.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, мы найдем, что задача (A) для системы (18.1) имеет лишь следующие решения

$$x_i^{(\sigma)}(t, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}^{\sigma}(t)\lambda^k \qquad (\sigma, i = 1, 2). \tag{18.15}$$

Эти решения являются вещественными при $\operatorname{sign} L_{02}L_{20} = -1$ и комплексными при $\operatorname{sign} L_{02}L_{20} = 1$.

Если $L_{01} = 0$ и $L_{11}L_{02}L_{20} \neq 0$, то (см. рис. 8, случай *г*) и п. 2.7, случай I, 4) $\varepsilon = 1$ и задача (A) для системы (18.1) имеет лишь два решения и они представимы в виде (18.15). Эти два решения вещественны при

$$\Delta = L_{11}^2 - 4L_{02}L_{20} > 0$$

и комплексны при $\Delta < 0$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда все элементы матрицы (18.9) равны нулю. Тогда система (18.6) является уравнением разветвления задачи (A) для системы (18.1). Мы будем предполагать, что в данном случае система (18.6) является регулярной (см. определение 3.1) относительно α_1, так как в противном случае ее можно привести к регулярному виду (см. п. 3.1), и воспользуемся некоторыми результатами § 5.

Пусть, например,

$$\operatorname{ord}\Psi_i(\alpha_1,\ \alpha_2,\ 0)=2\quad (i=1,\ 2)$$

$$c_{002}^{(2)}\left(c_{201}^{(2)}\right)^{-1}-c_{002}^{(1)}\left(c_{201}^{(1)}\right)^{-1}\neq 0,$$

$$B_{40}=\left(\frac{c_{021}^{(2)}}{c_{201}^{(2)}}-\frac{c_{021}^{(1)}}{c_{201}^{(1)}}\right)^2+\left(\frac{c_{111}^{(2)}}{c_{201}^{(2)}}-\frac{c_{111}^{(1)}}{c_{201}^{(1)}}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{c_{021}^{(1)}c_{111}^{(2)}}{c_{201}^{(1)}c_{201}^{(2)}}-\frac{c_{021}^{(2)}c_{111}^{(1)}}{c_{201}^{(2)}c_{201}^{(1)}}\right)\neq 0,$$

$$B_{21}=2\left(\frac{c_{002}^{(2)}}{c_{201}^{(2)}}-\frac{c_{002}^{(1)}}{c_{201}^{(1)}}\right)\left(\frac{c_{021}^{(2)}}{c_{201}^{(2)}}-\frac{c_{021}^{(1)}}{c_{201}^{(1)}}\right)+\left(\frac{c_{111}^{(2)}}{c_{201}^{(2)}}-\frac{c_{111}^{(1)}}{c_{201}^{(1)}}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{c_{111}^{(2)}c_{002}^{(1)}}{c_{201}^{(1)}c_{201}^{(2)}}-\frac{c_{111}^{(1)}c_{002}^{(2)}}{c_{201}^{(1)}c_{201}^{(2)}}\right)=0.$$

Тогда (см. п. 5.3) рассматриваемая задача имеет при $B_{40}<0$ два вещественных решения при $\lambda\geqslant 0$ и два вещественных решения при $\lambda\leqslant 0$. Эти решения представимы в виде сходящихся рядов (18.14). При $B_{40}>0$ рассматриваемая задача имеет четыре комплексных решения вида (18.14).

Пример 18.2 [1]). Рассмотрим частный случай системы (18.1):

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=-x_2+\frac{\lambda}{2\pi}[-\lambda\sin t+x_1^2\sin t-\\&\qquad -x_1x_2\cos t+\lambda(x_1^2+x_2^2)\cos t],\\\frac{dx_2}{dt}&=x_1+\frac{\lambda}{2\pi}[\lambda\cos t-x_2^2\cos t+x_1x_2\sin t+\\&\qquad +\lambda(x_1^2+x_2^2)\sin t]\end{aligned}\right\}\qquad(18.16)$$

и за решение порождающего уравнения примем нулевое решение. В данном частном случае матрица (18.9) является нулевой, так что система (18.6) представляет собою уравнение разветвления задачи (A) для системы (18.16). При помощи формул (18.5) и (18.7) мы находим, что система (18.6) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(\xi_1,\xi_2,\lambda)&\equiv\xi_1\xi_2+\lambda f_1(\xi_1,\xi_2,\lambda)=0,\\\Phi_2(\xi_1,\xi_2,\lambda)&\equiv\xi_2^2-\lambda+\lambda f_2(\xi_1,\xi_2,\lambda)=0,\end{aligned}\right\}\qquad(18.17)$$

---

[1]) Примеры 18.1 и 18.2 были предоставлены в наше распоряжение П. Г. Айзенгендлером.

где $\xi_1 = \alpha_1, \xi_2 = \alpha_2$ и аналитические функции f_1, f_2 удовлетворяют условиям $f_1(0, 0, 0) = 0$, $f_2(0, 0, 0) = 0$. При помощи линейного преобразования

$$\xi_1 = u_1 + u_2, \quad \xi_2 = u_1$$

система (18.17) приводится к регулярному виду:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1^*(u_1, u_2, \lambda) \equiv u_1^2 + u_1 u_2 + \lambda f_1^*(u_1, u_2, \lambda) = 0, \\ &\Phi_2^*(u_1, u_2, \lambda) \equiv u_1^2 + \lambda f_2^*(u_1, u_2, \lambda) - \lambda = 0. \end{aligned}\right\} \quad (18.18)$$

Исключая отсюда неизвестное u_1, получим

$$R(u_2, \lambda) \equiv \lambda(\lambda - u_2^2 + \ldots) + \lambda^2\psi(u_2, \lambda) = 0. \quad (18.19)$$

Выясним вопрос о вещественных решениях данного уравнения. Уравнение (18.19) можно сократить на λ, но мы непосредственно воспользуемся результатами п. 5.3. Получаем

$$B_{11} = 0, B_{02} = 1, B_{21} = -1, L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)} = -1 \neq 0.$$

Ввиду этого уравнение разветвления имеет лишь два малых вещественных решения

$$\xi_1^{(\sigma)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma k}\lambda^{\frac{k}{2}}, \quad \xi_2^{(\sigma)} = \sum_{k=1}^{\infty} a'_{\sigma k}\lambda^{\frac{k}{2}} \qquad (\sigma = 1, 2),$$

определенные при $\lambda \geqslant 0$. Следовательно, рассматриваемая задача имеет лишь два малых вещественных решения. Эти решения представимы в виде сходящихся рядов по степеням $\lambda^{1/2}$ в некоторой правой полуокрестности точки $\lambda = 0$. Для построения этих решений можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

Ищем решения в виде рядов

$$x_s(t, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{sk}(t)\lambda^{\frac{k}{2}} \qquad (s = 1, 2). \quad (18.20)$$

Для определения коэффициентов $b_{sk}(t)$ мы подставляем (18.20) в (18.16) и сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях λ. Получаем рекуррентные системы

$$\left.\begin{aligned}\frac{db_{1i}}{dt} &= -b_{2i},\\ \frac{db_{2i}}{dt} &= b_{1i}\end{aligned}\right\}\quad (i=1,2,3), \tag{18.21}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{db_{14}}{dt} &= -b_{24}+\frac{1}{2\pi}(-\sin t+b_{11}^2\sin t-\\ &\qquad -b_{11}b_{21}\cos t),\\ \frac{db_{24}}{dt} &= b_{14}+\frac{1}{2\pi}(\cos t-b_{21}^2\cos t+b_{11}b_{21}\sin t),\end{aligned}\right\} \tag{18.22}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{db_{15}}{dt} &= -b_{25}+\frac{1}{2\pi}[2b_{11}b_{12}\sin t-(b_{11}b_{22}+\\ &\qquad +b_{12}b_{21})\cos t],\\ \frac{db_{25}}{dt} &= b_{15}+\frac{1}{2\pi}[-2b_{21}b_{22}\cos t+(b_{11}b_{22}+\\ &\qquad +b_{12}b_{21})\sin t],\end{aligned}\right\} \tag{18.23}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{db_{16}}{dt} &= -b_{26}+\frac{1}{2\pi}[(2b_{11}b_{13}+b_{12}^2)\sin t-\\ &-(b_{11}b_{23}+b_{12}b_{22}+b_{13}b_{21})\cos t+(b_{11}^2+b_{21}^2)\cos t],\\ \frac{db_{26}}{dt} &= b_{16}+\frac{1}{2\pi}[-(2b_{21}b_{23}+b_{22}^2)\cos t+\\ &+(b_{11}b_{23}+b_{12}b_{22}+b_{13}b_{21})\sin t+(b_{11}^2+b_{21}^2)\sin t],\end{aligned}\right\} \tag{18.24}$$

. . . .

Системы (18.21) имеют общие решения

$$\begin{aligned}b_{1i} &= C_{1i}\cos t - C_{2i}\sin t,\\ b_{2i} &= C_{1i}\sin t + C_{2i}\cos t\end{aligned}\qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

где C_{1i}, C_{2i} — произвольные постоянные, которые затем будут подобраны так, чтобы решения следующих здесь систем были периодическими функциями с периодом 2π.

Так как $M(0)=0$, то из условия 2π-периодичности решений системы (18.22) мы находим

$$M(2\pi)\begin{bmatrix}-\sin t+b_{11}^2\sin t-b_{11}b_{21}\cos t\\ \cos t-b_{21}^2\cos t+b_{11}b_{21}\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Данное равенство может выполняться при одном из следующих условий:

$$\text{либо}\quad C_{11}^{(1)}=0,\qquad C_{21}^{(1)}=1,$$
$$\text{либо}\quad C_{11}^{(2)}=0,\qquad C_{21}^{(1)}=-1.$$

Таким же образом из условий 2π-периодичности решений систем (18.23) и (18.24) мы находим

$$C_{12}^{(1)}=0,\quad C_{22}^{(1)}=0,\quad C_{13}^{(1)}=1,\quad C_{23}^{(1)}=0$$

и

$$C_{12}^{(2)}=0,\quad C_{22}^{(2)}=0,\quad C_{13}^{(2)}=-1,\quad C_{23}^{(2)}=0.$$

Следовательно, с точностью до величин порядка $\lambda^{3/2}$ вещественные решения рассматриваемой задачи имеют вид:

первое решение

$$x_1(t,\lambda)=-\lambda^{\frac{1}{2}}\sin t+\lambda^{\frac{3}{2}}\cos t+\ldots,$$
$$x_2(t,\lambda)=\lambda^{\frac{1}{2}}\cos t+\lambda^{\frac{3}{2}}\sin t+\ldots;$$

второе решение

$$x_1(t,\lambda)=\lambda^{\frac{1}{2}}\sin t-\lambda^{\frac{3}{2}}\cos t+\ldots,$$
$$x_2(t,\lambda)=-\lambda^{\frac{1}{2}}\cos t-\lambda^{\frac{3}{2}}\sin t+\ldots$$

Аналогично определяются члены более высокого порядка (относительно λ) этих решений.

18.2 Автономные системы с одной степенью свободы.

П р и м е р 18.3. Рассмотрим задачу (C) для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=\lambda(x^2+x+1), \tag{18.25}$$

приняв нуль в качестве исходного решения порождающего уравнения. Согласно (17.14) решение этой задачи принимает вид

$$x(t,\alpha,\lambda)=a_{10}(t)\,\alpha+a_{01}(t)\,\lambda+a_{20}(t)\,\alpha^2+ \\ +a_{11}(t)\,\alpha\lambda+a_{02}(t)\,\lambda^2+\ldots \tag{18.26}$$

Отсюда

$$\dot{x}(t, \alpha, \lambda) = \dot{a}_{10}(t)\,\alpha + \dot{a}_{01}(t)\,\lambda + \dot{a}_{20}(t)\,\alpha^2 + \\ + \dot{a}_{11}(t)\,\alpha\lambda + \dot{a}_{02}(t)\,\lambda^2 + \ldots$$

Подставляя (18.26) в уравнение (18.25) и сравнивая коэффициенты при одинаковых одночленах относительно α и λ, мы получим рекуррентную систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных коэффициентов $a_{ik}(t)$. Решая эту систему с учетом начальных условий

$$x(0, \alpha, \lambda) = \alpha, \qquad \dot{x}(0, \alpha, \lambda) = 0,$$

мы находим первые коэффициенты ряда (18.26):

$$a_{10}(t) = \cos t, \quad a_{k0}(t) \equiv 0 \quad \text{при } k \geqslant 2,$$

$$a_{01}(t) = -\cos t + 1, \qquad a_{11}(t) = \frac{1}{2} t \sin t,$$

$$a_{02}(t) = -\cos t + \frac{1}{2} t \sin t + 1.$$

Подставляя в (18.26) найденные значения, получим

$$x(t, \alpha, \lambda) = \alpha \cos t + \lambda (1 - \cos t) + \frac{1}{2} \alpha\lambda t \sin t + \\ + \left(1 - \cos t + \frac{1}{2} t \sin t\right) \lambda^2 + \ldots$$

Отсюда и из (17.15) следует

$$\alpha \cos \tau + \lambda (1 - \cos \tau) + \frac{1}{2} \alpha\lambda (2\pi + \tau) \sin \tau + \\ + \lambda^2 \left(1 - \cos \tau + \frac{1}{2} (2\pi + \tau) \sin \tau\right) + \ldots = \alpha,$$

$$-\alpha \sin \tau + \lambda \sin \tau + \frac{1}{2} \alpha\lambda \sin \tau + \frac{1}{2} \alpha\lambda (2\pi + \tau) \cos \tau + \\ + \lambda^2 \left(\sin \tau + \frac{1}{2} \sin \tau + \frac{1}{2} (2\pi + \tau) \cos \tau\right) + \ldots = 0.$$

Подставляя сюда вместо $\sin \tau$ и $\cos \tau$ их ряды Тейлора, получим окончательно

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\alpha\tau^2+\frac{1}{2}\lambda\tau^2+\pi\alpha\lambda\tau+\frac{1}{2}\alpha\lambda\tau^2+\\ &\qquad\qquad+\pi\lambda^2\tau+\lambda^2\tau^2+\ldots=0,\\ &-\alpha\tau+\lambda\tau+\pi\lambda^2+\pi\alpha\lambda+\alpha\lambda\tau+2\lambda^2\tau-\\ &\qquad-\frac{1}{2}\pi\alpha\lambda\tau^2-\frac{1}{6}\lambda\tau^3-\frac{1}{2}\pi\lambda^2\tau^2+\\ &\qquad\qquad+\frac{1}{6}\alpha\tau^3+\ldots=0. \end{aligned}\right\} \qquad (18.27)$$

Данная система представляет собою уравнение разветвления рассматриваемой задачи. Методами § 5 могут быть найдены все вещественные малые решения системы (18.27). Каждое такое решение приводит к решению рассматриваемой задачи (C).

При ряде дополнительных ограничений результаты §§ 16—18 соответствующим образом распространяются на случай квазилинейных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием (см. П. Г. Айзенгендлер и М. М. Вайнберг [5, 6]).

§ 19. Другие задачи о периодических решениях

19.1. Особые периодические решения неавтономных систем [1]). Рассмотрим неавтономную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t)+\mu g(t, x, \mu) \qquad (19.1)$$

в предположении, что неизвестный вектор $x=(x_1, x_2, \ldots x_n)$ при каждом фиксированном значении t принадлежит вещественному или комплексному n-мерному пространству E_n, $t\in(-\infty, +\infty)$, A — вещественная постоянная матрица, заданный вектор $f=(f_1, \ldots, f_n)\in E_n$ является непрерывным и ω-периодическим по t, а заданная вектор-функция $g=(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ удовлетворяет следующему

---

[1]) Такие решения рассматривались в работах Я. В. Быкова [1] и П. Г. Айзенгендлера [2]. Мы будем придерживаться работы П. Г. Айзенгендлера.

условию:

$$g_i = \sum_{m_1+\ldots+m_n=0}^{k} a^{(i)}_{m_1\ldots m_n}(t,\mu)\, x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n} \qquad (i = 1,2,\ldots,n), \tag{19.2}$$

где $a^{(i)}_{m_1\ldots m_n}(t,\ \mu)$ непрерывны по совокупности аргументов, ω-периодичны по t и голоморфны по μ в некоторой окрестности нуля U комплексной плоскости.

Пусть R — класс ω-периодических по t вектор-функций $x(t,\ \mu)$, каждая из которых представима в виде

$$x(t\ \ \mu) = \frac{\tilde{x}(t,\mu)}{\mu^p}, \tag{19.3}$$

где p — положительное рациональное число и вектор-функция $\tilde{x}\ (t,\ \mu)$ непрерывна по совокупности аргументов $(t,\ \mu) \in (-\infty,\ +\infty) \times U$.

В классе R мы введем норму, полагая, что при $\mu \neq 0$

$$\|x(t,\mu)\| = \sum_{i=1}^{n} \sup_{t\in(-\infty,\ +\infty)} |x_i(t,\mu)|.$$

Решение $x\ (t,\ \mu)$ системы (19.1) называется особым, если

$$\overline{\lim_{\mu\to 0}}\ \|x(t,\mu)\| = \infty.$$

Мы будем искать особые решения, принадлежащие классу R и имеющие при $\mu \to 0$ порядок роста меньший чем $\mu^{-\frac{1}{k-1}}$. Вопрос об особых решениях с другим ростом мы здесь рассматривать не будем [1]).

Сделаем подстановку (см. (14.2))

$$x = y\lambda^{-1},\quad \lambda = \mu^{k-1} \tag{19.4}$$

и рассмотрим случай, когда

$$a^{(i)}_{m_1\ldots m_n}(t,\ 0) \equiv 0 \text{ при } m_1 + \ldots + m_n = k \tag{19.5}$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

---

[1]) В работе П. Г. Айзенгендлера [2] рассмотрен вопрос об особых ω-периодических решениях любого роста. Изучается и многомерный случай.

Тогда система (19.1) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = Ay + \lambda G(t, y, \lambda), \tag{19.6}$$

причем компоненты вектора G будут удовлетворять тем же условиям, что и $g_i(t, x, \mu)$.

Легко устанавливается взаимно однозначное соответствие между совокупностью малых ω-периодических решений системы (19.6) и совокупностью всех ω-периодических решений (указанного вида и роста) системы (19.1). Поэтому для нахождения особых решений (указанного вида и роста) системы (19.1) достаточно найти все малые ω-периодические решения $y(t, \lambda)$ системы (19.6) и выделить те из них, у которых $\operatorname{ord} y(t, \lambda) < 1$.

Замечание 19.1. Если условие (19.5) нарушается, то вместо системы (19.6) получим

$$\frac{dy}{dt} = Ay + F(t, y) + \lambda \widetilde{G}(t, y, \lambda), \tag{19.7}$$

где $\widetilde{G}$ обладает теми же свойствами, что и G, а

$$F_i = \sum_{m_1+\ldots+m_n=k} b^{(i)}_{m_1 \ldots m_n}(t)\, y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n}, \tag{19.8}$$

причем $b^{(i)}_{m_1 \ldots m_n}(t)$ непрерывны и ω-периодичны по t. Так как порождающая система для (19.7) является нелинейной, то путем перехода к уравнению в вариациях можно свести исследование к рассмотренному случаю.

19.2. Ветвление периодических решений в банаховых пространствах [1]. Пусть E — банахово пространство (комплексное или вещественное), U — вещественная ось, Λ — комплексная плоскость (или вещественная ось). Пусть, далее, $f(t, x)$ и $g(t, x, \lambda)$ — функции со значениями в E, определенные в некоторой открытой области D изменения аргументов $t \in U$, $x \in E$, $\lambda \in \Lambda$. Будем предполагать, что функции $f(t, x)$ и $g(t, x, \lambda)$ в их области определения непрерывны по совокупности аргументов, ограничены, ω-периодичны по t и являются аналитическими по совокупности x и λ.

---

[1] См. П. Г. Айзенгендлер и М. М. Вайнберг [4]

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \lambda g(t, x, \lambda). \tag{19.9}$$

Из перечисленных условий вытекает (см., например, Дьедонне [1]), что при всяком фиксированном λ задача Коши

$$x(t_0, \lambda) = x_0$$

имеет единственное непрерывное решение $x(t, \lambda)$ в некоторой окрестности точки t_0 (и оно непрерывно по λ)

Пусть порождающее уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{19.10}$$

имеет ω-периодическое решение $\varphi(t) \subset D$. Ставится задача о нахождении всех ω-периодических решений уравнения (19.9), непрерывных по t и λ и обращающихся в $\varphi(t)$ при $\lambda = 0$.

Следуя идее Пуанкаре, рассмотрим для уравнения (19.9) начальную задачу

$$x(0, \alpha, \lambda) = \varphi(0) + \alpha, \tag{19.11}$$

где $x(t, \alpha, \lambda)$ — решение этой начальной задачи.

Оказывается, что для этого решения справедлива

Теорема 19.1. *Решение $x(t, \alpha, \lambda)$ представимо в виде*

$$\left.\begin{aligned} x(t, \alpha, \lambda) &= \varphi(t) + \chi(t, \alpha, \lambda), \\ \chi(t, \alpha, \lambda) &= \sum_{m+n\geqslant 1} a_{mn}(t)\, \alpha^m \lambda^n, \end{aligned}\right\} \tag{19.12}$$

где $a_{mn}(t)$ суть m-линейные операторы, и (F)-степенной ряд[1] *сходится абсолютно при достаточно малых значениях $\|\alpha\|$ и $|\lambda|$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(t) \equiv 0$, так как путем замены $x = \varphi + X$ рассматриваемая нами задача сводится к такому

---

[1]) Об (F)-степенных рядах см., например, Хилле и Филлипс [1]. См. также п. 22.2.

случаю. Далее, согласно условию и допущению имеем

$$\left.\begin{aligned} f(t, x) &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t)\, x^i, \\ g(t, x, \lambda) &= \sum_{k+l \geqslant 0} c_{kl}(t)\, x^k \lambda^l, \end{aligned}\right\} \tag{19.13}$$

причем (см. Хилле и Филлипс [1], теорема 26.6.6) эти ряды сходятся абсолютно в некоторой окрестности точки $x = 0$, $\lambda = 0$.

Будем искать решение задачи в виде (19.12), рассматривая пока ряд для $\chi(t, \alpha, \lambda)$ как формальный. Подставляя (19.12) в (19.9) с учетом (19.13) и равенства $\varphi(t) \equiv 0$, мы, после сравнения коэффициентов при одинаковых одночленах относительно α и λ, получим рекуррентную систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{da_{01}(t)}{dt} = b_1(t)\, a_{01}(t), \quad \frac{da_{10}(t)}{dt} = b_1(t)\, a_{10}(t), \\ &\frac{da_{11}(t)}{dt} = b_1(t)\, a_{11}(t) + 2b_2(t)\, a_{10}(t)\, a_{01}(t) + \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + c_{10}(t)\, a_{10}(t), \\ &\frac{da_{02}(t)}{dt} = b_1(t)\, a_{02}(t) + b_2(t)\, a_{01}(t) + c_{10}(t)\, a_{01}(t), \\ &\frac{da_{20}(t)}{dt} = b_1(t)\, a_{20}(t) + b_2(t)\, a_{10}(t), \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{da_{mn}(t)}{dt} = b_1(t)\, a_{mn}(t) + F_{mn}(t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{19.14}$$

где $F_{mn}(t)$ представляют собою сумму и произведение конечного числа полилинейных операторов $a_{pq}(t)$ ($p < m$, $q < n$), $b_i(t)$ и $c_{kl}(t)$.

Эту рекуррентную систему линейных дифференциальных уравнений нужно решить с учетом начального условия (19.11), принимающего вид

$$a_{mn}(0) = \begin{cases} I \text{ при } m = 1,\ n = 0, \\ 0 \text{ для всех других значений } m \text{ и } n. \end{cases}$$

Здесь I — единичный оператор из E в E и θ — нуль пространства m-линейных операторов.

Так как операторы $b_i(t)$ и $c_{kl}(t)$ ограничены, то начальная задача для рекуррентной системы линейных дифференциальных уравнений имеет единственное решение. Мы получаем формальное решение вида (19.12).

Для доказательства абсолютной сходимости ряда (19.12), т. е. что найденное формальное решение является настоящим, мы воспользуемся методом мажорант. Как и в классическом случае (Гурса [3]), вещественную функцию вещественного аргумента $Y(t)$ мы назовем преобладающей относительно абстрактной функции $x(t)$ со значениями в некотором банаховом пространстве, если для всех t рассматриваемого промежутка $Y(t) > 0$ и $\| x(t) \| < Y(t)$.

Лемма 19.1. *Пусть выполнены условия:*

1. *$A(t)$ — ограниченный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве, непрерывный по t в равномерной топологии, и $f(t)$ — непрерывный по t вектор этого пространства.*

2. *Непрерывные функции $B(t)$ и $F(t)$ являются соответственно преобладающими для $A(t)$ и $f(t)$.*

3. *$x(t)$ — решение начальной задачи*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

4. *$Y(t)$ — решение начальной задачи*

$$\frac{dY}{dt} = B(t)Y + F(t), \quad Y(t_0) = y_0 > \| x_0 \|.$$

Тогда $Y(t)$ является преобладающей функцией для $x(t)$ при $t \in [t_0, t_0 + T]$, $T > 0$.

Доказательство данной леммы получается методом последовательных приближений, как и в классическом случае (см., например, Гурса [3]). Этой леммой мы и воспользуемся.

В силу абсолютной сходимости рядов (19.13) существуют преобладающие функции $\beta_i(t)$ и $\gamma_{kl}(t)$ соответственно для $b_i(t)$ и $c_{kl}(t)$ такие, что суммы в следующем ниже выражении (19.9′) непрерывны.

Рассмотрим для уравнения

$$\frac{dY}{dt}=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(t)\,Y^i+\lambda\sum_{k+l\geqslant 0}\gamma_{kl}(t)\,Y^k\lambda^l \qquad (19.9')$$

начальную задачу

$$Y(0,\beta,\lambda)=\beta>\|\alpha\|, \qquad (19.11')$$

где $Y(t,\beta,\lambda)$ — решение этой задачи.

Согласно теореме Пуанкаре (см., например, Лефшец [2]) при достаточно малых β и $|\lambda|$ это решение представимо в виде сходящегося ряда

$$Y(t,\beta,\lambda)=\sum_{m+n\geqslant 1}A_{mn}(t)\,\beta^m\lambda^n. \qquad (19.12')$$

Подставляя (19.12′) в (19.19′) и сравнивая коэффициенты при одинаковых одночленах $Y^k\lambda^l$, мы получим рекуррентную систему линейных дифференциальных уравнений, которая отличается от системы (19.14) тем, что x, a_{mn}, b_i, c_{kl} соответственно заменены Y и преобладающими функциями A_{mn}, β_i, γ_{kl}. В силу леммы 19.1 мы тогда получаем, что

$$\|a_{mn}(t)\|<A_{mn}(t).$$

Ввиду этого абсолютная сходимость ряда (19.12) следует из сходимости ряда (19.12′). Отметим, что из леммы 19.1 следует, что и

$$\left\|\frac{da_{mn}(t)}{dt}\right\|<\frac{dA_{mn}(t)}{dt}.$$

Теорема 19.1 доказана.

Для того чтобы решение (19.12) было ω-периодическим, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(\alpha,\lambda)\equiv\chi(\omega,\alpha,\lambda)-\alpha=0. \qquad (19.15)$$

Полагая

$$I-a_{10}(\omega)=B,\quad a_{mn}(\omega)=F_{mn},$$

получим

$$B\alpha=F_{01}\lambda+\sum_{m+n\geqslant 2}F_{mn}\alpha^m\lambda^n. \qquad (19.16)$$

Решение поставленной задачи сводится, следовательно, к нахождению всех малых решений $\alpha = \alpha(\lambda)$ уравнения (19.16). Это уравнение будет исследовано в главе VII в предположении нормальной разрешимости оператора B. Если $a_{10}(\omega)$ — вполне непрерывный оператор, для которого 1 является r-кратным собственным значением, то B — нормально разрешимый оператор нулевого индекса и размерность его подпространства нулей равна r. В этом случае, как будет показано в следующей главе (см. п. 23.5), для нахождения всех малых решений уравнения (19.16) будет выведено уравнение разветвления

$$\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

которое было нами исследовано в §§ 2,6. Использование результатов этих параграфов приводит к различным предложениям о числе и виде всех решений поставленной задачи для уравнения (19.9).

Отметим, что к уравнению (19.9) могут быть сведены различные классы интегро-дифференциальных уравнений, а также счетные системы обыкновенных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

§ 20. Об устойчивости периодических решений, зависящих от малого параметра [1])

Вопрос об устойчивости периодических решений дифференциальных уравнений представляет большой интерес как с теоретической стороны, так и для приложений. Этим объясняется, что указанному вопросу посвящено большое число работ, список которых читатель может найти в известном обзоре Л. Чезари [1].

Следует также назвать появившиеся позже упомянутого обзора Л. Чезари монографию М. А. Красносельского [2], работы А. П. Проскурякова [4], Г. В. Плотниковой [1] и М. Я. Кушуль [1].

Мы не стремились дать исчерпывающее изложение вопроса. Нами руководствовало лишь желание указать на один из возможных подходов к задаче об устойчивости решений

[1]) См. П. Г. Айзенгендлер [5].

дифференциальных уравнений с малым параметром, использующий методы теории ветвления.

20.1. Предварительные сведения из теории устойчивости по Ляпунову. Рассмотрим неавтономное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \tag{20.1}$$

где $t \in [0, +\infty)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $F = (F_1, \ldots, F_n)$ — n-мерные векторы комплексного или вещественного евклидова пространства E_n, причем вектор F таков, что каждому начальному значению (t_0, x_0) из области

$$t \geqslant 0, \ \| x \| \leqslant H \text{ и } (H > 0)$$

отвечает единственное непрерывное решение $x(t_0, x_0, t)$ уравнения (20.1), определенное для всех $t \geqslant t_0$.

Дадим следующие определения.

Решение $\tilde{x}(t) = x(0, \tilde{x}_0, t)$ *уравнения* (20.1) *называется устойчивым по Ляпунову, если каждому* $\varepsilon > 0$ *отвечает число* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любого другого решения* $x(t) = x(0, x_0, t)$ *уравнения, для которого* $\| x_0 - \tilde{x}_0 \| < \delta$, *выполняется неравенство* $\| x(t) - \tilde{x}(t) \| < \varepsilon$ *для всех* $t \geqslant 0$.

Если дополнительно выполняется соотношение $\lim\limits_{t \to \infty} \| x(t) - \tilde{x}(t) \| = 0$ *хотя бы для тех* x_0, *для которых* $\| x_0 - \tilde{x}_0 \| > 0$ *мала, то говорят об асимптотической устойчивости решения* $\tilde{x}(t)$.

Вопрос об устойчивости заданного решения $\tilde{x}(t)$ уравнения (20.1) легко сводится к вопросу об устойчивости тривиального решения $y \equiv 0$ уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \widetilde{\Phi}(t, y), \tag{20.2}$$

где $\widetilde{\Phi}(t, y) = F(t, \tilde{x} + y) - F(t, \tilde{x})$.

Действительно, для этого достаточно положить в (20.1) $x = \tilde{x} + y$ и учесть тождество.

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} \equiv F(t, \tilde{x}).$$

Рассмотрим теперь частный случай.

Предположим, что вектор-функция $\widetilde{\Phi}(t, y)$, непрерывная по совокупности аргументов $(t, y) \in [0, \infty) \times G$, где G — окрестность точки $y = 0$, является ω-периодической по t и аналитической по y. Тогда уравнение (20.2) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y + \Phi(t, y), \tag{20.2'}$$

где $A(t)$ — матрица, непрерывная и ω-периодическая по t, $\Phi(t, y)$ — вектор-функция, непрерывная по совокупности (t, y), ω-периодическая по t, аналитическая по y и не содержащая линейных членов относительно y.

Наряду с уравнением (20.2') рассмотрим соответствующее ему линейное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\,y. \tag{20.3}$$

Введем обозначения:

$Y(t)$ — интегральная матрица уравнения (20.3), удовлетворяющая условию;

$Y(0) = E$ (E — единичная матрица);

$\rho_1, \ldots, \rho_n$ — собственные значения матрицы $Y(\omega)$ (матрицы монодромии уравнения (20.3)) и

$$q = \max_k |\rho_k|.$$

(Величина q и величины $\rho_1, \ldots, \rho_n$ называются соответственно спектральным радиусом и мультипликаторами уравнения (20.3).)

Один из основных методов (который мы в дальнейшем используем) для исследования устойчивости тривиального решения уравнения (20.2') заключается в исследовании по первому приближению, т. е. исходя лишь из линейного уравнения (20.3). В основу такого исследования положены две теоремы А. М. Ляпунова, которые в рассматриваемом здесь частном случае формулируются следующим образом.

Теорема 20.1. *Если $q < 1$, то тривиальное решение уравнения* (20.2') *асимптотически устойчиво.*

Теорема 20.2. *Если $q > 1$, то тривиальное решение уравнения* (20.2') *неустойчиво.*

Сделаем следующее

Замечание 20.1. Если $q = 1$, то задача об устойчивости тривиального решения уравнения (20.2′) не решается по первому приближению.

20.2. Устойчивость решений задачи Пуанкаре. Рассмотрим теперь случай, когда дифференциальное уравнение зависит от малого вещественного числового параметра λ.

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \lambda F(t, x, \lambda) \tag{20.4}$$

есть уравнение, рассмотренное в § 16, причем для удобства предполагается также, что коэффициенты рядов F_i ($i = 1, \ldots, n$) суть вещественные функции аргумента t.

Выберем одно из ω-периодических решений $\tilde{x}(t, \lambda) = (\tilde{x}_1(t, \lambda), \ldots, \tilde{x}_n(t, \lambda))$ задачи Пуанкаре для уравнения (20.4) и для малых значений $\lambda > 0$ исследуем его устойчивость[1]).

Допустим, что компоненты вектора $\tilde{x}(t, \lambda)$ вещественны и имеют вид

$$\tilde{x}_i(t, \lambda) = \tilde{x}_i^0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} x_{ik}(t)\,\mu^k, \tag{20.5}$$

где $\mu = \lambda^{\frac{1}{p}}$ (p — натуральное число), причем имеется в виду арифметическое значение корня $\sqrt[p]{\lambda}$, и $\{\tilde{x}_i^0(t)\}_1^n$ — ω-периодическое решение порождающего уравнения

$$\frac{dx^0}{dt} = Ax^0. \tag{20.6}$$

Отметим, что если для уравнения (20.4) имеет место квазирегулярный случай (см. § 16), то число всех решений задачи Пуанкаре конечно и каждое из них представляется в виде (20.5).

Полагая в (20.4) $x = \tilde{x} + y$, сведем поставленную задачу к задаче об устойчивости тривиального решения $y = 0$ уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \Big(A + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\,\mu^{p+k}\Big)\,y + \mu^p \Phi(t, y, \mu), \tag{20.7}$$

---

[1]) Разумеется, решение $\tilde{x}(t, \lambda)$ определено для $\lambda \geqslant 0$. Случай, когда $\tilde{x}(t, \lambda)$ определено лишь для $\lambda \leqslant 0$, легко сводится к рассматриваемому.

где

$$B_j(t) = \frac{1}{j!}\left(\frac{\partial^{1+j} F(t, \tilde{x} + y, \mu^p)}{\partial y\, \partial \mu^j}\right)_{y=0,\ \mu=0} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

и

$$\Phi(t, y, \mu) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial^n F(t, \tilde{x} + y, \mu^p)}{\partial y^n}\right)_{y=0} y^n.$$

Исследуем по первому приближению устойчивость тривиального решения уравнения (20.7). С этой целью построим сначала матрицу монодромии линейного уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \left(A + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\, \mu^{p+k}\right) y, \tag{20.8}$$

соответствующего уравнению (20.7). Для построения матрицы монодромии $M(\mu) = Y(\omega, \mu)$ уравнения (20.8) достаточно (см., например, И. Г. Малкин [1]) решить начальную задачу (20.9) — (20.10):

$$\frac{dY}{dt} = \left(A + \sum_{k=0}^{\infty} B_k(t)\, \mu^{k+p}\right) Y, \tag{20.9}$$

$$Y(0, \mu) = E \tag{20.10}$$

и в полученном решении $Y(t, \mu)$ (оно будет единственным и аналитическим по μ) положить $t = \omega$.

Решение $Y(t, \mu)$ задачи (20.9) —(20.10) будем искать в виде матричного ряда

$$Y(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(t)\, \mu^k. \tag{20.11}$$

Коэффициенты ряда (20.11) определяются подстановкой (20.11) в (20.9) и решением получающейся [1]) рекуррентной системы уравнений при следующих начальных условиях (согласованных с (20.10)): $Y_0(0) = E$, $Y_i(0) = 0$ (0 — нулевая матрица, $i = 1, 2, \ldots$).

[1]) При сравнении коэффициентов при одинаковых степенях μ.

Имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dY_0}{dt} = AY_0,\\
&\frac{dY_i}{dt} = AY_i \quad (i = 1, \ldots, p-1),\\
&\frac{dY_p}{dt} = AY_p + B_0(t)Y_0(t),\\
&\frac{dY_{p+k}}{dt} = AY_{p+k} + \sum_{i+j=k} B_i(t)\,Y_j(t)\\
&(k = 1, 2, \ldots).
\end{aligned}\right\} \tag{20.12}$$

Решение задачи (20.12) — (20.10) принимает вид

$$\begin{aligned}
&Y_0(t) = e^{At},\\
&Y_i(t) \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, p-1),\\
&Y_p(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B_0(\tau)\,Y_0(\tau)\,d\tau,\\
&Y_{p+k}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \sum_{i+j=k} B_i(\tau)\,Y_j(\tau)\,d\tau\\
&\qquad (k = 1, 2, \ldots).
\end{aligned}$$

Таким образом, матрица монодромии уравнения (20.8) представляется в виде ряда

$$M(\mu) = M_0 + \sum_{k=0}^{\infty} M_{p+k}\mu^{p+k}, \tag{20.13}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&M_0 = e^{A\omega},\\
&M_p = \int_0^\omega e^{A(\omega-\tau)} B_0(\tau)\,Y_0(\tau)\,d\tau,\\
&M_{p+k} = \int_0^\omega e^{A(\omega-\tau)} \sum_{i+j=k} B_i(\tau)\,Y_j(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}\right\} \tag{20.14}$$

Обозначим через $\rho_k(\mu)$ ($k = 1, \ldots, n$) мультипликаторы уравнения (20.8) и отметим следующие их два свойства.

Теорема 20.3. *Все мультипликаторы $\rho_k(\mu)$ уравнения* (20.8) *суть непрерывные функции в некоторой полуокрестности справа* $[0, \mu_0)$ *точки* $\mu = 0$.

Действительно, это утверждение непосредственно следует из того, что все элементы матрицы монодромии $M(\mu)$ уравнения (20.8) являются непрерывными функциями и старший коэффициент характеристического уравнения

$$|M(\mu) - \rho E| = 0$$

не зависит от μ.

Теорема 20.4. *Справедливы соотношения*

$$\rho_k(0) = e^{\gamma_k \omega} \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{20.15}$$

где γ_k ($k=1, \ldots, n$) суть собственные значения[1]) *матрицы A.*

Действительно, так как γ_k — собственные значения матрицы A, то (см., например, Ф. Р. Гантмахер [1]) $e^{\gamma_k \omega}$ — собственные значения матрицы $e^{A\omega}$. Поэтому в силу соотношений (20.13), (20.14) и теоремы 20.3 приходим к (20.15).

Из теорем 20.3 и 20.4 вытекает

Следствие 20.1. *Все мультипликаторы уравнения* (20.8) *представляются в виде*

$$\rho_k(\mu) = \rho_k(0) + \sigma_k(\mu) \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{20.16}$$

где $\rho_k(0)$ определяются по формулам (20.15), *а добавки $\sigma_k(\mu)$ непрерывны в некоторой полуокрестности справа точки $\mu = 0$ и удовлетворяют условиям*

$$\sigma_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{20.17}$$

Учитывая следствие 20.1, приходим к следующему выводу:

Если для некоторого собственного значения γ матрицы A $\operatorname{Re}\gamma > 0$ (соответственно $\operatorname{Re}\gamma < 0$), то отвечающий этому собственному значению мультипликатор $\rho(\mu)$ уравнения (20.8) удовлетворяет (в некоторой полуокрестности справа точки $\mu = 0$) неравенству $|\rho(\mu)| > 1$ (соответственно $|\rho(\mu)| < 1$).

---

[1]) Если среди собственных значений γ имеются кратные, то они повторяются столько раз, какова их кратность.

Отсюда на основании теоремы 20.2, в частности, следует, что если хотя бы одно собственное значение γ_k матрицы A имеет положительную вещественную часть, то для малых $\mu > 0$ тривиальное решение уравнения (20.7) неустойчиво.

Ввиду этого в дальнейшем будем предполагать, что собственные значения γ_k матрицы A удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re}\gamma_k \leqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, причем подлежат исследованию лишь добавки $\sigma(\mu)$ к тем $\rho(0)$, которые отвечают критическим собственным значениям γ_k (т. е. нулевым и чисто мнимым). Для определения указанных добавок составим уравнение (см. также п.п, 32.1 и 32.2)

$$Cz = -\sum_{k=0}^{\infty} M_{p+k}\mu^{p+k} z + \sigma z, \tag{20.18}$$

где

$$C = (M_0 - \rho(0)E) \tag{20.19}$$

и $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — вектор-столбец n-мерного евклидова пространства E_n.

Исследуем сначала добавки σ к тем $\rho(0)$, которые отвечают резонансным критическим собственным значениям γ_k матрицы A, т. е. собственным значениям вида

$$\gamma_k = \pm\frac{2\pi p_k i}{\omega} \quad (k = 1, \ldots, \bar{k}),\ \gamma_0 = 0 \ (i = \sqrt{-1}), \tag{20.20}$$

где p_k — натуральные числа.

В силу (20.15) всей совокупности (20.20) отвечает лишь единственное собственное значение $\rho(0) = 1$ матрицы M_0.

Обозначим через l кратность собственного значения $\rho(0) = 1$ матрицы M_0 и через m — размерность подпространства решений уравнения $Cz = 0$, где $C = M_0 - E$. Как известно (см., например, А. И. Мальцев [1]), число m равно дефекту матрицы C.

Для сравнения чисел l и m приведем следующий подсчет.

Обозначим через m_0 число всех элементарных делителей матрицы A, отвечающих собственному значению $\gamma_0 = 0$, и m_k — число всех элементарных делителей этой матрицы, отвечающих каждому собственному значению из пары $\pm 2\pi p_k i/\omega$. Тогда согласно теоремам 9 и 8 главы VI монографии Ф. Р. Гантмахера [1] имеем [1])

$$m = m_0 + 2 \sum_{k=1}^{\bar{k}} m_k.$$

С другой стороны, согласно указанной теореме 9 и теореме Жордана число l равно сумме показателей всех упомянутых выше элементарных делителей матрицы A. Отсюда следует что

$$l \geqslant m, \tag{20.21}$$

причем соотношение (20.21) переходит в равенство лишь в случае, когда все указанные элементарные делители простые.

Отметим также, что рассматриваемый в настоящем параграфе подход не связан с какими-либо априорными ограничениями на числа m и l.

Обозначим соответственно через

$$\varphi_k = (a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)})$$

и

$$\psi_k = (b_1^{(k)}, \ldots, b_n^{(k)}) \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

ортонормированные базисы подпространств решений уравнений $Cz = 0$ и $C^*z = 0$, где C^* — матрица, сопряженная с C. В рассматриваемом случае C^* — матрица, транспонированная по отношению к C, ибо C — вещественная матрица.

Введем в рассмотрение матрицу

$$N = \sum_{k=1}^{m} [\psi_k a_1^{(k)}, \ldots, \psi_k a_n^{(k)}] = \sum_{k=1}^{m} \begin{bmatrix} b_1^{(k)} a_1^{(k)} \ldots b_1^{(k)} a_n^{(k)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n^{(k)} a_1^{(k)} \ldots b_n^{(k)} a_n^{(k)} \end{bmatrix} \tag{20.22}$$

и обозначим через ξ_j скалярные произведения

$$\xi_j = \langle z, \varphi_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} z_k a_k^{(j)} \qquad (j = 1, \ldots, m). \tag{20.23}$$

---

[1]) Число m совпадает также с размерностью линейного многообразия всех ω-периодических решений порождающего уравнения (20.6) (см. § 16).

Используя обозначения (20.22) и (20.23), перепишем уравнение (20.18) в виде

$$Dz = -\sum_{k=0}^{\infty} M_{p+k}\mu^{p+k}z + \sigma z - \sum_{j=1}^{m} \xi_j\psi_j, \qquad (20.18')$$

где

$$D = C - N. \qquad (20.24)$$

Покажем, что матрица D обратима. Для этого, как известно, достаточно установить, что уравнение

$$Dz = 0$$

имеет единственное нулевое решение $z = 0$.

Пусть z_0 — любое решение этого уравнения. Тогда в силу (20.24) выполняется соотношение

$$Cz_0 = Nz_0,$$

которое после скалярного умножения обеих частей на ψ_k $(k = 1, \ldots, m)$ принимает вид

$$\langle Cz_0, \psi_k\rangle = \langle Nz_0, \psi_k\rangle \quad (k = 1, \ldots, m). \qquad (20.25)$$

Упростим соотношения (20.25).

Так как $C^* \psi_k = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$, то

$$\langle Cz_0, \psi_k\rangle = \langle z_0, C^*\psi_k\rangle = 0 \ (k = 1, \ldots, m). \qquad (20.26)$$

Учитывая, далее, обозначение (20.22) и используя ортонормированность системы векторов $\{\psi_k\}$ $(k = 1, \ldots, m)$, имеем

$$\langle Nz_0, \psi_k\rangle = \sum_{j=1}^{m} \langle \psi_j \langle z_0, \varphi_j\rangle, \psi_k\rangle = \langle z_0, \varphi_k\rangle \ (k = 1, 2, \ldots, m). \qquad (20.27)$$

Таким образом, в силу (20.26) и (20.27) соотношения (20.25) принимают вид

$$\langle z_0, \varphi_k\rangle = 0, \ Nz_0 = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

т. е. вектор z_0 ортогонален ко всем векторам базиса $\{\varphi_k\}$ подпространства решений уравнения $Cz = 0$ и z_0 принадлежит этому подпространству. Поэтому он равен нулю.

Умножая теперь слева обе части уравнения (20.18′) на матрицу D^{-1}, получаем

$$z = -\sum_{k=0}^{\infty} D^{-1}M_{p+k}\mu^{p+k}z + \sigma D^{-1}z - \sum_{j=1}^{m} \xi_j D^{-1}\psi_j. \qquad (20.28)$$

Преобразуем последние m слагаемых уравнения (20.28). Для этого покажем сначала, что

$$D^{-1}\psi_j = -\varphi_j \qquad (j = 1, \ldots, m). \qquad (20.29)$$

Действительно, используя соотношения

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, m)$$

и

$$C\varphi_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, m)$$

и учитывая (20.24) и (20.22), имеем

$$D\varphi_j = C\varphi_j - N\varphi_j = -N\varphi_j = -\sum_{i=1}^{m} \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \psi_i = -\psi_j$$
$$(j = 1, \ldots, m).$$

Умножая теперь слева обе части полученных равенств $D\varphi_j = -\psi_j$ на матрицу D^{-1}, приходим к соотношениям (20.29). Итак, в силу (20.29) уравнение (20.28) принимает вид

$$z = -\sum_{k=0}^{\infty} D^{-1}M_{p+k}\mu^{p+k}z + \sigma D^{-1}z + \sum_{j=1}^{m} \xi_j \varphi_j. \qquad (20.30)$$

Отметим, что матрица Якоби уравнения (20.30) при $z = 0$, $\mu = 0$, $\sigma = 0$, $\xi_k = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$ является единичной матрицей и, следовательно, для этого уравнения применима теорема о неявных функциях. Так как, кроме этого, правая часть (20.30) зависит аналитически от z, μ, σ и ξ_j (причем от ξ_j и z линейно), то уравнение (20.30) имеет единственное локальное решение

$$z = \sum_{j=1}^{m} [c_{00}^{(j)} + c_{0p}^{(j)}\mu^p + c_{0,p+1}^{(j)}\mu^{p+1} + c_{10}^{(j)}\sigma + c_{20}^{(j)}\sigma^2 + c_{1p}^{(j)}\sigma\mu^p + \ldots]\xi_j.$$
$$(20.31)$$

Коэффициенты ряда (20.31) последовательно определяются подстановкой (20.31) в (20.30) и сравнением коэффициентов в обеих частях получаемых тождеств при одинаковых одночленах относительно σ, μ, $\xi_1, \ldots, \xi_m$.

Подставляя ряд (20.31) в условия разрешимости уравнения (20.18):

$$\langle \sigma z - \sum_{k=0}^{\infty} M_{p+k}\mu^{p+k}z, \psi_j\rangle = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m),$$

приходим к однородному линейному уравнению относительно ξ:

$$G(\sigma, \mu)\,\xi = 0, \tag{$*$}$$

где через ξ обозначен вектор-столбец $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$.

Отметим (см. (20.23)), что $\rho = 1 + \sigma$ является собственным значением матрицы монодромии тогда и только тогда, когда уравнение ($*$) допускает ненулевое решение $\xi \neq 0$, т. е. лишь при условии, что

$$\det G(\sigma, \mu) = 0. \tag{20.32}$$

Уравнение (20.32) можно представить в виде

$$\sum_k L_{k0}\sigma^k + \sum_{k+n \geqslant m-1} L_{k,n+p}\sigma^k\mu^{n+p} = 0, \tag{20.32$'$}$$

причем

$$L_{k0} = 0 \quad \text{при} \quad k < l \text{ и } L_{l0} \neq 0, \tag{20.33}$$

где l — кратность собственного значения матрицы [1] M_0.

Для нахождения всех малых решений $\sigma(\mu)$ уравнения (20.32′) применим метод диаграммы Ньютона (см. § 2). Так как $L_{l0} \neq 0$, то все нетривиальные малые решения этого уравнения представляются сходящимися рядами

$$\sigma(\mu) = \zeta\mu^{\frac{r}{s}} + o(\mu^{\frac{r}{s}}), \qquad (r, s) = 1, \tag{20.34}$$

где $\frac{r}{s}$ — тангенс угла между соответствующим звеном диаграммы Ньютона и отрицательным направлением оси

---

[1]) Соотношения (20.33) получены подсчетом. Они также следуют из того элементарного факта, что при $\mu = 0$ $\rho(0) = 1 + \sigma(0) = 1$ является l-кратным собственным значением матрицы $M(0) = M_0$,

абсцисс, ζ — корень определяющего уравнения (см. п. 2.4) для этого звена:

$$L_{k_1n_1}+L_{k_2n_2}\eta^{k_2-k_1}+\ldots+L_{k_jn_j}\eta^{k_j-k_1}=0; \qquad (20.35)$$

при этом (см. § 2) все коэффициенты уравнения (20.35) отличны от нуля и индексы k и n удовлетворяют соотношениям

$$k_1<k_2<\ldots<k_j,\quad n_1>n_2>\ldots>n_j, \qquad (20.36)$$

$$k_1r+n_1s=k_2r+n_2s=\ldots=k_jr+n_js. \qquad (20.37)$$

Для дальнейшего преобразуем определяющее уравнение (20.35). С этой целью предварительно перепишем соотношения (20.37) в виде

$$(k_i-k_1)\,r=(n_1-n_i)\,s \quad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ j),$$

откуда следует

$$s\mid(k_i-k_1)\,r,$$

и, так как $(s,\ r)=1$, имеем

$$s\mid(k_i-k_1),$$

т. е.

$$k_i-k_1=s\tau_i \quad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ j),$$

где τ_i — натуральные числа, удовлетворяющие в силу (20.36) неравенствам $\tau_j>\tau_{j-1}>\ldots>\tau_2$.

Таким образом, определяющее уравнение (20.35) можно записать в виде

$$L_{k_1n_1}+L_{k_2n_2}\eta^{\tau_2s}+\ldots+L_{k_jn_j}\eta^{\tau_js}=0. \qquad (20.35')$$

Запись определяющего уравнения в виде (20.35′) делает совершенно прозрачными следующие два предложения.

Лемма 20.1. *Если ζ — корень определяющего уравнения* (20.35′), *то* $\zeta\varepsilon$, *где* ε — *любой корень степени* s *из* 1, *также является корнем уравнения* (20.35′).

Доказательство очевидно.

Лемма 20.2. *Пусть* $s>1$. *Тогда, если уравнение* (20.35′) *имеет корень с отрицательной вещественной частью, то оно обладает также корнем, у которого вещественная часть неотрицательна.*

Доказательство. Для $s = 2$ лемма очевидна. Действительно, если в этом случае число $c + di$ $(c < 0)$ является корнем уравнения (20.35′), то $(-c - di)$ также является корнем этого уравнения.

Пусть $s > 2$. Тогда существуют по крайней мере два корня степени s из единицы

$$\varepsilon_1 = \alpha + \beta i, \ \varepsilon_2 = \alpha - \beta i$$

такие, что $\alpha \leqslant 0$ и $\beta > 0$.

Допустим, что $\zeta = a + bi$ $(a < 0)$ является корнем уравнения (20.35′). Тогда по лемме 20.1 величины $\zeta\varepsilon_1$ и $\zeta\varepsilon_2$ также служат корнями уравнения (20.35′), причем, очевидно, хотя бы один из этих корней имеет неотрицательную вещественную часть. Лемма доказана.

Наряду с мультипликатором

$$\rho(\mu) = 1 + \sigma(\mu) = 1 + \zeta\mu^{\frac{r}{s}} + o\left(\mu^{\frac{r}{s}}\right), \quad \zeta \neq 0 \qquad (20.38)$$

(см. (20.16) и (20.34), рассмотрим также его приближенное значение

$$\tilde{\rho}(\mu) = 1 + \zeta\mu^{\frac{r}{s}}. \qquad (20.39)$$

Из (20.38) и (20.39) следует

Лемма 20.3. *Для малых μ выражения $|\rho(\mu)|$ и $|\tilde{\rho}(\mu)|$ одновременно больше или меньше единицы.*

Отметим также, что в силу леммы 20.1 при нахождении приближенных значений $\tilde{\rho}(\mu)$ всех мультипликаторов $\rho(\mu)$ достаточно ограничиться лишь арифметическим значением корня $\sqrt[s]{\mu}$.

С помощью лемм 20.1—20.3 и равенства (20.39) мы приходим к различным предложениям об устойчивости тривиального решения, из которых приведем следующие.

Теорема 20.5. *Если в резонансном случае хотя бы один корень определяющего уравнения какого-либо звена диаграммы Ньютона имеет неотрицательную вещественную часть, то для малых $\mu > 0$ тривиальное решение уравнения (20.7) неустойчиво.*

Доказательство. Пусть ζ — корень с неотрицательной вещественной частью одного из определяющих уравнений. Обозначим через $\rho(\mu)$ мультипликатор, отвечающий этому корню:

$$\rho(\mu) = 1 + \zeta\mu^{\frac{r}{s}} + o(\mu^{\frac{r}{s}}),$$

и запишем также его приближенное значение

$$\tilde{\rho}(\mu) = 1 + \zeta\mu^{\frac{r}{s}}.$$

Так как $\zeta \neq 0$, $\mu^{\frac{r}{s}} > 0$ и $\operatorname{Re}\zeta \geqslant 0$, то

$$|\tilde{\rho}(\mu)| = |1 + \zeta\mu^{\frac{r}{s}}| > 1.$$

Отсюда согласно лемме 20.3 для малых μ выполняется неравенство

$$|\rho(\mu)| > 1.$$

Для завершения доказательства остается лишь сослаться на теорему 20.2.

В приложениях удобна также следующая

Теорема 20.6. *Если в резонансном случае хотя бы для одного звена диаграммы Ньютона число $s > 1$, то для малых $\mu > 0$ тривиальное решение уравнения* (20.7) *неустойчиво.*

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 20.2. и теоремы 20.5.

Из теоремы 20.6, в частности, следует, что для асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (20.7) необходимо, чтобы числа s для всех звеньев диаграммы Ньютона равнялись единице.

Приведем также один достаточный признак асимптотической устойчивости.

Выделим класс R дифференциальных уравнений (20.7), для которых собственные значения γ матрицы A обладают неположительными вещественными частями, причем те γ, для которых $\operatorname{Re}\gamma = 0$, являются резонансными и составленное для них уравнение (20.32′) не имеет нулевых решений $\sigma(\mu) \equiv 0$[1]).

Теорема 20.7. *Для асимптотической устойчивости тривиального решения*[2]) *уравнения* (20.7), *принадле-*

---

[1]) Это означает, что по крайней мере один из коэффициентов $L_{0,n+p}$ уравнения (20.32′) отличен от нуля.

[2]) Для малых $\mu > 0$.

жащего к классу R, достаточно, чтобы корни всех определяющих уравнений диаграммы Ньютона, построенной для (20.32′), *имели отрицательные вещественные части.*

Доказательство следует из леммы 20.3 и теоремы 20.1.

Исследование устойчивости тривиального решения уравнения (20.7) в случае, когда матрица A имеет нерезонансные критические собственные значения γ, не приводит к дополнительным трудностям.

Так же, как и в случае резонансных собственных значений, для определения добавок σ приходим к уравнению вида (20.32′), которое исследуется с помощью диаграммы Ньютона. На основании леммы 20.3 при малых μ для оценки модуля мультипликатора

$$\rho(\mu) = \rho(0) + \sigma(\mu) = \rho(0) + \zeta\mu^{\frac{r}{s}} + o\left(\mu^{\frac{r}{s}}\right) \tag{20.38′}$$

($|\rho(0)| = 1$, $\mu^{\frac{r}{s}} > 0$, ζ — корень определяющего уравнения) можно ограничиться его приближенным значением

$$\tilde{\rho}(\mu) = \rho(0) + \zeta\mu^{\frac{r}{s}}. \tag{20.39′}$$

При этом оказывается полезным следующее

Замечание 20.2. *Неравенства* $|\tilde{\rho}(\mu)|^2 > 1$ *и* $|\tilde{\rho}(\mu)|^2 < 1$ *принимают соответственно вид*

$$\frac{\alpha a + \beta b}{\mu^{\frac{r}{s}}} + \frac{a^2 + b^2}{2} > 0 \tag{20.40}$$

и

$$\frac{\alpha a + \beta b}{\mu^{\frac{r}{s}}} + \frac{a^2 + b^2}{2} < 0, \tag{20.41}$$

где

$$\alpha = \operatorname{Re}\rho(0),\ \beta = \operatorname{Im}\rho(0),\ a = \operatorname{Re}\zeta,\ b = \operatorname{Im}\zeta.$$

Так как $\mu^{\frac{r}{s}} > 0$, то для малых μ и при $\alpha a + \beta b \neq 0$ неравенства (20.40) и (20.41) равносильны соответственно неравенствам

$$\alpha a + \beta b > 0 \tag{20.42}$$

и

$$\alpha a + \beta b < 0. \tag{20.43}$$

С помощью неравенств (20.40) и (20.41) или (20.42) и (20.43) устанавливаются различные признаки как неустойчивости, так и асимптотической устойчивости.

В заключение отметим, что изложенный в настоящем параграфе подход к задаче об устойчивости тривиального решения уравнения (20.7) целесообразно применять в случае, когда матрица A имеет резонансные собственные значения с непростыми элементарными делителями. Если $A = A(t)$ — непрерывная и ω-периодическая матрица, то предложенный метод также применим. При этом он легко реализуется, когда уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x$$

интегрируется в замкнутой форме.

Отметим еще, что результаты данного параграфа распространяются на дифференциально-разностные системы, но процедура вывода уравнения (20.32′) иная.

ГЛАВА VII

Нелинейные уравнения в банаховых пространствах

В предыдущих главах теория ветвления решений нелинейных уравнений была построена для некоторых наиболее важных для приложений классов нелинейных задач. Однако круг задач, в которых применяется теория ветвления, все время расширяется, и вместо того, чтобы повторять рассуждения в каждом конкретном случае, несомненно имеет смысл дать изложение такой абстрактной теории, которая охватывала бы возможно широкие классы задач. Такая теория строится в данной главе для фредгольмовского случая, а в главе VIII — для нетеровского случая. При этом мы ограничиваемся банаховыми пространствами, что вполне достаточно (по крайней мере в ближайшем будущем) для приложений, хотя излагаемая теория переносится на локально выпуклые топологические пространства (см., например, М. М. Вайнберг, Я. Л. Энгельсон [1] и Я. Л. Энгельсон [1]).

§ 21. Некоторые вопросы теории линейных операторов в банаховых пространствах

21.1. Фредгольмовские операторы. Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства. Обозначим через $\{E_1 \to E_2\}$ банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_2. Элемент $\varphi \in E_1$ назовем нулем оператора $B \in \{E_1 \to E_2\}$, если он является решением уравнения

$$Bx = 0. \tag{21.1}$$

Множество $N(B)$ всех нулей оператора B линейно и замкнуто, т. е. является подпространством в E_1. Назовем $N(B)$ подпространством нулей оператора B, а размерность $N(B)$ — числом нулей оператора B, Рассмотрим неоднородное уравнение

$$Bx = h. \tag{21.2}$$

Оператор $B \in \{E_1 \to E_2\}$ называется нормально разрешимым, если выполняется одно из следующих двух условий: а) уравнение (21.2) разрешимо при любой правой части $h \in E_2$, б) в пространстве E_2^*, сопряженном к E_2, существует множество $N^*(B) \neq \{0\}$ функционалов ψ такое, что для разрешимости уравнения (21.2) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\psi \in N^*(B)$

$$(h, \psi) = 0. \tag{21.3}$$

Здесь (h, ψ) — значение линейного функционала ψ на векторе h. Множество $N^*(B)$ линейно. Если оно, кроме того, замкнуто, то назовем его дефектным подпространством оператора B. Элементы $N^*(B)$ будем называть дефектными функционалами оператора B, а размерность $N^*(B)$ — дефектным числом оператора B.

Нормально разрешимый оператор B называется фредгольмовским или, короче, Ф-оператором, если число нулей оператора B и его дефектное число конечны и равны, т. е. если

$$n = \dim N(B) = \dim N^*(B) < +\infty. \tag{21.4}$$

Пусть B есть Ф-оператор с $n > 0$, и пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — базис в $N(B)$, а $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — базис в $N^*(B)$.

Общее решение однородного уравнения (21.1) имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i, \tag{21.5}$$

где c_i — произвольные числа.

Условие разрешимости (21.13) неоднородного уравнения (21.2) можно теперь записать так:

$$(h, \psi_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{21.6}$$

21.2. Специальные разложения пространств в прямые суммы подпространств. Пусть B есть Ф-оператор, $n > 0$ (см. (21.4)). Положим $N(B) = E_1^n$, и пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — базис в E_1^n. Согласно следствию из теоремы Хана — Банаха существуют функционалы $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ из E_1^* такие, что

$$(\varphi_i, \gamma_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{21.7}$$

Введем оператор P — проектор E_1 на E_1^n; для $x \in E_1$ положим

$$Px = \sum_{i=1}^{n} (x, \gamma_i) \varphi_i. \tag{21.8}$$

Оператор P порождает следующее разложение пространства E_1 в прямую сумму подпространств:

$$E_1 = E_1^n \dotplus E_1^{\infty-n}, \tag{21.9}$$

где $E_1^{\infty-n}$ — состоит из тех элементов $x \in E_1$, для которых

$$(x, \gamma_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{21.10}$$

Пусть далее $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — базис в $N^*(B)$. По тому же следствию из теоремы Хана — Банаха существуют элементы $z_1, \ldots, z_n$ из E_2 такие, что

$$(z_k, \psi_l) = \delta_{kl}, \qquad k, l = 1, \ldots, n. \tag{21.11}$$

Введем оператор Q — проектор в E_2; для $h \in E_2$ положим

$$Qh = \sum_{k=1}^{n} (h, \psi_k) z_k. \tag{21.12}$$

Оператор Q порождает следующее разложение пространства E_2 в прямую сумму подпространств:

$$E_2 = E_{2,n} \dotplus E_{2,\infty-n}. \tag{21.13}$$

Здесь $E_{2,n}$ — подпространство, натянутое на элементы $z_1, \ldots$ $\ldots, z_n$, а $E_{2,\infty-n}$ состоит из элементов $h \in E_2$, для которых выполнены условия (21.6), откуда следует, что $E_{2,\infty-n}$ совпадает с областью значений оператора B.

Отметим еще, что при $n = 0$ область значений Ф-оператора B равна E_2. Таким образом, область значений Ф-оператора замкнута. Пусть $E_1 = E_2$. Будет ли справедливо равенство $E_1^n = E_{2,n}$? Легко убедиться, что такое равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$\det \| (\varphi_i, \psi_j) \| \neq 0$. В этом случае без ограничения общности можно считать, что

$$(\varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{21.14}$$

Теперь

$$Px = Qx = \sum_{i=1}^{n} (x, \psi_i)\,\varphi_i \tag{21.15}$$

и $E_1^{\infty-n}$ является инвариантным подпространством оператора B.

21.3. Сужение оператора и обобщенная лемма Шмидта. Если $n = 0$, то Ф-оператор B имеет ограниченный обратный оператор $B^{-1} \in \{E_2 \to E_1\}$. В этом случае уравнение (1.2) имеет единственное решение

$$x = B^{-1} h. \tag{21.16}$$

Пусть $n > 0$, тогда B не имеет обратного оператора. Обозначим через $\hat{B}$ сужение оператора B на $E_1^{\infty-n}$. Оператор $\hat{B} \in \{E_1^{\infty-n} \to E_{2,\infty-n}\}$ устанавливает между этими подпространствами взаимно однозначное соответствие. Тогда по теореме Банаха (см., например, Л. А. Люстерник, В. И. Соболев [1], стр. 259) существует ограниченный обратный оператор

$$\hat{B}^{-1} \in \{E_{2,\infty-n} \to E_1^{\infty-n}\}.$$

Рассмотрим уравнение (1.2). Если $h \,\overline{\in}\, E_{2,\infty-n}$, т. е. $\sum_{i=1}^{n} |(h, \psi_i)|^2 \neq 0$, то это уравнение неразрешимо. Пусть $h \in E_{2,\infty-n}$, т. е. выполнены условия (21.6), тогда его общее решение имеет вид

$$x = \hat{B}^{-1}h + \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i, \tag{21.17}$$

где c_i — произвольные числа.

Конструкция Шмидта (см. п. 8.3, лемма Шмидта) легко переносится на банаховы пространства.

Введем оператор

$$\tilde{B}x = Bx + \sum_{i=1}^{n} (x, \gamma_i)\, z_i, \tag{21.18}$$

где γ_i и z_i — соответственно функционалы из E_1^* и элементы из E_2, введенные в п. 21.1.

Лемма 21.1 (обобщенная лемма Шмидта). *Оператор* $\Gamma = \widetilde{B}^{-1}$ *существует и ограничен.*

Доказательство. Очевидно, $\widetilde{B} \in \{E_1 \to E_2\}$. Рассмотрим уравнение $\widetilde{B}x = h$. Оно эквивалентно следующей системе:

$$\left.\begin{aligned} Bx &= h - \sum_{i=1}^{n} \xi_i z_i, \\ \xi_k &= (x, \gamma_k), \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{21.19}$$

Применяя к первому ее уравнению функционалы ψ_l, $l = 1, \ldots, n$, получим с помощью (21.9)

$$0 = (h, \psi_l) - \xi_l, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{21.20}$$

Теперь первое уравнение в (21.19) можно записать так:

$$Bx = (I - Q)\, h.$$

Согласно формуле (21.17) отсюда следует

$$x = \hat{B}^{-1}(I - Q)\, h + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i.$$

Но x должен удовлетворять и остальным уравнениям системы (21.19). Используя их и применяя к последнему равенству функционалы γ_k, $k = 1, \ldots, n$, получим, пользуясь формулами (21.7) и (21.20)

$$(h, \psi_k) = (\hat{B}^{-1}(I - Q)\, h, \gamma_k) + c_k, \qquad k = 1, \ \ldots, \ n.$$

Но $\hat{B}^{-1}(I - Q)\, h \in E_1^{\infty - n}$, поэтому, согласно (21.10), $(\hat{B}^{-1}(I - Q)\, h, \ \gamma_k) = 0$. Следовательно,

$$x = \widetilde{B}^{-1}h = \hat{B}^{-1}(I - Q)\, h + \sum_{i=1}^{n} (h, \psi_i)\, \varphi_i. \tag{21.21}$$

Лемма доказана.

Замечание 21.1. Оператор $\widetilde{B}$ является расширением оператора $\hat{B}$ на E_1. Действительно, на $E_1^{\infty - n}$ операторы $\hat{B}$ и $\widetilde{B}$ совпадают, ибо если $x \in E_1^{\infty-n}$, то выполнены условия (21.10) и из формулы (21.18) следует

$$\widetilde{B}x = Bx = \hat{B}x, \quad x \in E_1^{\infty-n}.$$

Замечание 21.2. Имеют место формулы

$$\widetilde{B}\varphi_i = z_i,\ \Gamma z_i = \varphi_i,\ i = 1, \ldots, n. \qquad (21.22)$$

Эти формулы ($\Gamma = \widetilde{B}^{-1}$) вытекают из (21.18).

Замечание 21.3. Уравнение (21.2), если $h \in E_2^{\infty-n}$ (выполнены условия (21.6)), имеет частное решение $x = \Gamma h \in E_1^{\infty-n}$.

Для доказательства заметим, что вследствие замечания 21.1, отыскание решения в $E_1^{\infty-n}$ эквивалентно решению уравнения $\widetilde{B}\,x = h$.

Отметим, что обобщенная лемма Шмидта вытекает из известной теоремы С. М. Никольского [1], и наоборот. Докажем, например, второе утверждение.

Теорема 21.1 (С. М. Никольский [1]). *Для того чтобы оператор $B \in \{E_1 \to E_2\}$ был Ф-оператором, необходимо и достаточно, чтобы $B = A + V$, где A имеет ограниченный обратный A^{-1}, а V вполне непрерывен.*

Доказательство. По обобщенной лемме Шмидта $B = \widetilde{B} + K$, где K — конечномерный оператор. Но конечномерный оператор вполне непрерывен, и необходимость доказана. Для доказательства достаточности заметим, что уравнения (21.1) и (21.2) эквивалентны уравнениям

$$(I + VA^{-1})\,z = 0 \quad \text{и} \quad (I + VA^{-1})\,z = h,$$

где $z = Ax$, для которых применима известная теория Рисса (см. А. А. Люстерник, В. И. Соболев [1], Л. В. Канторович, Г. П. Акилов [1]).

21.4 Связь с сопряженным оператором. Пока мы нигде не использовали понятия сопряженного оператора. Отметим, что в приложениях дефектные функционалы $\psi_1, \ldots, \psi_n$ обычно фигурируют как решения однородного союзного или формально сопряженного уравнения и не возникает нужды в привлечении понятия сопряженного оператора. Однако привлечение этого понятия делает теорию более симметричной (см. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн [1]).

Пусть B^* — оператор, сопряженный к B. Известно, что $B^* \in \{E_2^* \to E_1^*\}$.

Теорема 21.2. *Дефектные функционалы $\psi_1, \ldots, \psi_n$ являются нулями оператора B^* и составляют базис в $N(B^*)$ — подпространстве нулей оператора B^*; иными словами, $N^*(B) = N(B^*)$.*

Доказательство. Для любого $x \in E_1$ имеем

$$(x, B^*\psi_i) = (Bx, \psi_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Из произвольности x и следует, что $B^*\psi_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, и первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь ψ — произвольный нуль оператора B^*, т. е. $B^*\psi = 0$. Рассмотрим функционал

$$\theta = \psi - \sum_{i=1}^{n} (z_i, \psi)\psi_i,$$

где z_i удовлетворяют условиям (21.11).

Покажем, что $(u, \theta) = 0$ для любого $u \in E_2$, откуда будет следовать, что $\theta = 0$, т. е. равенство $\psi = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \psi_i$ ($\eta_i = (z_i, \psi)$), которое составляет утверждение второй части теоремы.

Но по (21.13) имеем представление

$$u = Bv + \sum_{j=1}^{n} \zeta_j z_j$$

и, пользуясь равенствами $B^*\psi = B^*\psi_i = 0$ и (21.11), получим

$$\begin{aligned}(u, \theta) = \Big(Bv, \psi - \sum_{i=1}^{n} (z_j, \psi)\psi_i\Big) + \\ + \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \Big(z_j, \psi - \sum_{i=1}^{n} (z_i, \psi)\psi_i\Big) = \\ = \Big(v, B^*\psi - \sum_{i=1}^{n} (z_i, \psi) B^*\psi_i\Big) + \sum_{j=1}^{n} [(z_j, \psi) - (z_j, \psi)]\zeta_j = 0.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 21.3. *Если B есть Ф-оператор, то B^* также является Ф-оператором и при $n > 0$ $N^*(B^*) = N(B)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, интересен лишь случай $n > 0$.

Переходя в равенстве (21.8) к сопряженным операторам, получим для любого $\chi \in \overset{*}{E}_2$

$$(\tilde{B})^* \chi = B^*\chi + \sum_{i=1}^{n} (z_i, \chi)\gamma_i. \tag{21.23}$$

Таким образом, $B^* = (\tilde{B})^* + K$, где $(\tilde{B})^*$ имеет ограниченный обратный оператор Γ^*, ибо $[(\tilde{B})^*]^{-1} = (\tilde{B}^{-1})^* = \Gamma^*$, а K — конечномерный (вполне непрерывный) оператор. По теореме 21.1 С. М. Никольского B^* есть Ф-оператор, а из теоремы 21.2 следует, что $\dim N(B^*) = n$.

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$B^*\chi = \omega.$$

Имеем $(\varphi_i, \omega) = (\varphi_i, B^*\chi) = (B\varphi_i, \chi) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. условия $(\varphi_i, \omega) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, необходимы для разрешимости указанного уравнения. Но элементы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы и число их равно n, поэтому они образуют базис в $N^*(B^*)$, и, значит, $N^*(B^*) = N(B)$. Теорема доказана.

Итак, однородное уравнение $B^*\chi = 0$ имеет общее решение

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i,$$

а для разрешимости неоднородного уравнения $B^*\chi = \omega$ необходимо и достаточно, чтобы

$$(\varphi_i, \omega) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

и в этом случае его общее решение имеет вид

$$\chi = \Gamma^*\omega + \sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i.$$

Из формул (21.23) и (21.11), а также из теоремы 21.2 имеем двойственные к (21.22) формулы

$$(\widetilde{B})^*\psi_k = \gamma_k,\ \Gamma^*\gamma_k = \psi_k,\ k = 1, \ldots, n. \qquad (21.24)$$

Из той же формулы (21.23) в сочетании с формулой (21.18) имеем

$$(\widetilde{B})^* = (\widetilde{B^*}).$$

При доказательстве теоремы 21.3, в частности, было показано, что оператор $(\widetilde{B}^*)$ имеет ограниченный обратный оператор. Это утверждение является двойственным к лемме Шмидта.

21.5. Неограниченные фредгольмовские операторы. Результаты параграфа почти без изменений можно перенести на более общий случай.

Пусть B — замкнутый линейный (не обязательно ограниченный) оператор из E_1 в E_2 с плотной в E_1 областью определения $D(B)$. На такие операторы без изменения переносятся понятия: число нулей, нормальная разрешимость, фредгольмовский оператор — и вообще все результаты в п. 21.1—21.3, с той лишь поправкой, что теперь операторы B, $\widetilde{B}$ определены не всюду в E_1, а на $D(B)$, а оператор $\hat{B}$ определен на $D(B) \cap E_1^{\infty-1}$, если $n > 0$.

Трудности возникают лишь в п. 21.4, и связаны они с тем обстоятельством, что, хотя оператор B^* также замкнут, его область определения $D(B^*)$ не является, вообще говоря, плотной в $\overset{*}{E}_2$. Тем не менее теорема 21.2, как видно из анализа ее доказательства, остается справедливой.

Теорема 21.3 в той форме, как она сформулирована, неверна (справедливо более слабое утверждение). Однако теорема эта, в сущности, не является необходимой для дальнейшего изложения и приведена скорее для полноты теории.

Заметим в заключение, что формулам (21.24) удобно придать следующий вид:

$$(\Gamma u, \gamma_k) = (u, \psi_k),\ u \in E_2, \qquad k = 1, \ldots, n, \quad (21.25)$$

справедливый также и для неограниченного оператора B $(\Gamma = \widetilde{B}^{-1})$ с числом нулей $n > 0$.

§ 22. Степенные операторы, ряды Тейлора, теоремы о неявных операторах

22.1 Степенные операторы (см. М. К. Гавурин [1]). Пусть E, E_1, E_2 — банаховы пространства.

Оператор $F_k(x_1, \ldots, x_k)$, определенный для $x_i \in E_1$, $i = 1, \ldots, k$ со значениями в E_2, называется k-линейным оператором, если он линеен по каждому аргументу x_i.

k-линейный оператор $F_k(x_1, \ldots, x_k)$ называется ограниченным, если

$$\| F_k(x_1, \ldots, x_k) \| \leqslant M \| x_1 \| \ldots \| x_k \|.$$

Наименьшая из постоянных M, для которых выполняется это неравенство, называется нормой F_k и обозначается $\| F_k \|$. Из ограниченности k-линейного оператора легко следует его непрерывность. Типичными примерами k-линейных операторов являются интегро-степенные члены.

k-линейный оператор называется симметричным, если его значения не изменяются при любой перестановке его аргументов.

Представляет интерес рассмотрение однородных операторов, возникающих, если в k-линейном операторе положить $x_1 = \ldots = x_k = x$. Такие операторы называются степенными или степенями и обозначаются $F_k x^k$. Всегда можно считать, что степень $F_k x^k$ порождена симметричным k-линейным оператором. Действительно, положим

$$\Phi_k(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum F_k(x_{\nu_1}, \ldots, x_{\nu_k}),$$

где суммирование проводится по всевозможным перестановкам $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$. Очевидно, $\Phi_k(x_1, \ldots, x_k)$ симметричен и $F_k x^k = \Phi_k(x, \ldots, x)$.

В книге Хилле и Филлипса [1] рассмотрены и более общие степенные операторы. В терминологии этих авторов степени, рассмотренные нами, — это F-степени. Это название связано с именем Фреше, так как степенной оператор $F_k x^k$ (любое число раз) непрерывно дифференцируем в смысле Фреше.

В частности, имеем $\frac{d}{dx} F_k x^k = kF_k x^{k-1}$ и при фиксированном x $F_k x^{k-1} \in \{E_1 \to E_2\}$. В упомянутой книге рассмотрены также степени, дифференцируемые лишь в смысле Гато. Такие степени не всегда непрерывны. Важным примером степенного оператора является дифференциал порядка k. Условимся через $D_\rho(a, E)$ обозначать шар $\| x - a \| \leqslant \rho$ в банаховом пространстве E.

Пусть $F(x)$ — нелинейный оператор, определенный и k раз непрерывно дифференцируемый в смысле Фреше в $D_\rho(x_0, E_1)$. Тогда (см., например, Л. А. Люстерник, В. И. Соболев [1]) $d^kF(x_0, h_1, \ldots, h_k)$ есть k-линейный симметричный оператор в E_1. В частности,

$$d^kF(x_0, h, \ldots, h) = \frac{\partial^k F(x_0)}{\partial x^k} h^k,$$

где $\dfrac{\partial^k F(x_0)}{\partial x^k}$ — частная производная, есть степенной оператор порядка k.

Введенные выше понятия легко обобщаются следующим образом. Рассмотрим оператор $F_{kl}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$, где $x_i \in E_1$, $i = 1, \ldots, k$; $y_j \in E$, $j = 1, \ldots, l$, а значения $F_{kl}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$ лежат в E_2. Оператор этот назовем k, l-линейным, если он линеен по каждому аргументу. k, l-линейный оператор назовем ограниченным, если

$$\| F_{kl}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) \| \leqslant M \| x_1 \| \ldots \| x_k \| \| y_1 \| \ldots \| y_l \|;$$

k, l-линейный ограниченный оператор всегда непрерывен.

Далее, оператор $F_{kl}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l)$ называется симметричным, если он симметричен отдельно по группе переменных $(x_1, \ldots, x_k)$ и отдельно по группе переменных $(y_1, \ldots, y_l)$. Полагая $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = x$, $y_1 = y_2 = \ldots = y_l = y$, придем к степенному оператору

$$F_{kl}x^ky^l.$$

Всегда можно считать, что степенной оператор порожден симметричным k, l-линейным оператором. Степенные операторы непрерывно дифференцируемы в смысле Фреше по x и по y любое число раз. Типичными примерами степеней являются интегро-степенные члены $U_{kl}(x, y)$.

Другой важный пример дает дифференциал. Пусть $F(x, y)$ — нелинейный оператор, определенный и непрерывно дифференцируемый в смысле Фреше в $D_\rho(x_0, E_1) \dotplus D_r(y_0, E)$ k раз по x и l раз по y. Тогда дифференциал

$$F_{kl}(x_0, y_0; h_1, \ldots, h_k; g_1, \ldots, g_l), \; h_i = x_i - x_0,$$
$$g_j = y_j - y_0,$$

является k, l-линейным симметричным оператором от $(h_1, \ldots, h_k; g_1, \ldots, g_l)$. В том случае, когда

$$h_i = h, \; i = 1, \ldots, k; \; g_j = g, \; j = 1, \ldots, l,$$
$$F_{k, l}(x_0, y_0; h, \ldots, h; g, \ldots, g) = \frac{\partial^{k+l} F(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^l} h^k g^l,$$

где $\dfrac{\partial^{k+l} F(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^l}$ — частная производная, и этот оператор является k, l-степенным.

22.2 Степенные ряды. Ряды Тейлора. Аналитические функции. Пусть $F_k x^k$, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность степенных операторов.

Образуем степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} F_k x^k \qquad (F_0 = \mathrm{const} \in E_2). \tag{22.1}$$

Областью сходимости степенного ряда служит c-звезда вокруг нуля (см. Хилле и Филлипс [1]), т. е. такое множество $\Omega \subset E_1$, что если $x \in \Omega$, то $tx \in \Omega$ при $|t| \leqslant 1$. В приложениях особенно важен случай, когда область сходимости ряда (22.1) содержит шар $D_\rho(0, E_1)$. Рассмотрим мажорантный числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \|F_k\| \cdot \|x\|^k$. Его радиус сходимости ρ_u называется радиусом равномерной сходимости степенного ряда (22.1). Очевидно,

$$\rho_u = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{\|F_n\|}}. \tag{22.2}$$

Пусть $\rho_u > 0$, тогда при всех $x \in D_\rho(0, E_1)$, где $\rho \in (0, \rho_u)$, степенной ряд (22.1) сходится абсолютно (т. е. по норме) и равномерно; если же $\rho > \rho_u$, то найдутся точки

x с $\| x \| = \rho$, в которых ряд (22.1) не сходится равномерно (см. Хилле и Филлипс [1]).

Таким образом, при $\rho_u > 0$ (и только в этом случае) область сходимости степенного ряда содержит шар (радиуса $\rho < \rho_u$). При $\| x \| < \rho_u$ сумма ряда (22.1) непрерывна.

Рассмотрим теперь двойные степенные ряды

$$\sum_{k+l \geqslant 0} F_{kl} x^k y^l, \quad x \in E_1, y \in E. \tag{22.3}$$

Здесь область сходимости устроена сложнее. Тем не менее справедливо следующее. Пусть ρ_u и r_u — совместные радиусы сходимости числового ряда (см. В. И. Смирнов [1])

$$\sum_{k+l \geqslant 0} \| F_{kl} \| \cdot \| x \|^k \| y \|^l, \tag{22.4}$$

т. е. при $\| x \| < \rho_u$, $\| y \| < r_u$ ряд (22.4) сходится равномерно, а при $\| x \| > \rho_u$, $\| y \| > r_u$ не сходится равномерно. Отметим, что ρ_u и r_u определяются неоднозначно (например, при уменьшении ρ_u может увеличиться r_u).

Назовем ρ_u и r_u совместными радиусами равномерной сходимости двойного степенного ряда (22.4). Пусть существуют $\rho_u > 0$ и $r_u > 0$, тогда при $x, y \in D_\rho(0, E_1) \dotplus D_r(0, E)$, где $\rho \in (0, \rho_u)$, $r \in (0, r_u)$, двойной ряд (22.3) сходится абсолютно и равномерно.

Обратно, если существуют положительные числа ρ и r такие, что сходится числовой ряд $\sum\limits_{k+l \geqslant 0} \| F_{kl} \| \rho^k r^l$, то найдутся совместные радиусы равномерной сходимости ряда (22.3) $\rho_u \geqslant \rho$ и $r_u \geqslant r$ и в $D_\rho(0, E_1) \dotplus D_r(0, E)$ ряд (22.3) сходится абсолютно и равномерно.

Сумма ряда (22.3) есть непрерывная функция переменных (x, y) в области $\| x \| < \rho_u$, $\| y \| < r_u$, и ряд этот можно в указанной области почленно дифференцировать по x и по y любое число раз, в результате чего получаются непрерывные функции, равные соответствующим производным ряда.

Оператор $F(x)$ со значениями в E_2, определенный в некоторой окрестности точки $x_0 \in E_1$, называется аналитическим в точке x_0, если он бесконечно дифференцируем в точке x_0, и представим в некоторой окрестности точки x_0 равномерно сходящимся рядом Тейлора

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} F^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k. \tag{22.5}$$

Оператор $F(x)$ называется аналитическим в области $\Omega \subset E_1$, если он аналитичен в каждой точке этой области.

На аналитические операторы переносятся различные методы и теоремы классического анализа: метод аналитического продолжения, принцип максимума, теорема единственности и др. В частности (см., например, Хилле и Филлипс [1]), справедлива теорема единственности: если аналитический оператор равен нулю в некоторой сфере, то он равен нулю во всей области его аналитичности. Особенно прост комплексный случай (когда банаховы пространства E_1 и E_2 комплексные). В этом случае и для аналитичности оператора $F(x)$ в области Ω_1 необходимо и достаточно, чтобы он был однозначен, локально ограничен и дифференцируем в смысле Гато в Ω_1 (см. Хилле и Филлипс [1], теорема 3.17.1).

Все произодные $F^{(k)}(x)$ аналитического оператора непрерывны по x, и для них выполняются неравенства Коши, т. е. для любго $x_0 \in \Omega$ найдутся положительные числа M и ρ такие, что

$$\| F^{(k)}(x_0) \| \leqslant Mk!\, \rho^{-k}. \tag{22.6}$$

Обратно, если $F(x)$ бесконечно дифференцируем в некоторой окрестности точки x_0 и имееют место неравенства Коши (22.6), то $F(x)$ — аналитический в $D_\rho(x_0, E_1)$, так как его ряд Тейлора (22.5) имеет радиус равномерной сходимости $\rho_u \geqslant \rho$. Аналогичные определения и результаты переносятся на случай двух (и более) переменных. Оператор $F(x, y)$ со значениями в E_2, определенный в области $\Omega_1 \dotplus \Omega \subset E_1 \dotplus E$, назовем аналитическим, если для каждой точки (x_0, y_0) этой области можно указать ее окрестность, в которой $F(x, y)$ представим равномерно сходящимся рядом Тейлора:

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{k!\,l!} \frac{\partial^{k+l} F(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^l} (x - x_0)^k (y - y_0)^l. \tag{22.7}$$

В комплексном случае двухкратным применением интегральной формулы Коши легко установить следующее предложение: если оператор $F(x, y)$ непрерывен по совокупности переменных в $\Omega_1 \dot{+} \Omega$ и аналитичен по каждому переменному в отдельности, то он аналитичен в $\Omega_1 \dot{+} \Omega$.

Все частные производные аналитического оператора непрерывны по (x, y) и удовлетворяют неравенствам Коши: для любой точки $(x_0, y_0) \in \Omega_1 \dot{+} \Omega$ найдутся положительные числа M, ρ и r такие, что

$$\left\| \frac{\partial^{k+l} F(x_0, y_0)}{\partial x^k \partial y^l} \right\| \leqslant M k!\, l!\, \rho^{-k} r^{-l}, \qquad k, l = 0, 1, \ldots \tag{22.8}$$

Обратно, если оператор $F(x, y)$ бесконечно дифференцируем в $D_\rho(x_0, E_1) \dot{+} D_r(y_0, E)$ и имеют место неравенства Коши (22.8), то $F(x, y)$ аналитичен в $D_\rho(x_0, E_1) \dot{+} D_r(y_0, E)$, так как из неравенств Коши следует существование совместных радиусов равномерной сходимости $\rho_u \geqslant \rho$ и $r_u \geqslant r$.

22.3 Теоремы о неявных операторах. Приведем две теоремы о неявных операторах. Первая из них была установлена Ламсоном [1] и обобщена Гильдебрандтом и Грэйвсом [1], вторая, по-видимому, принадлежит Майклу и Клиффорду [1].

Рассмотрим задачу о нахождении решений $x = x(y)$ (y играет роль параметра) уравнения

$$F(x, y) = 0, \tag{22.9}$$

удовлетворяющих условию

$$x(y_0) = x_0, \tag{22.10}$$

если оператор $F(x, y)$ удовлетворяет условию

$$F(x_0, y_0) = 0. \tag{22.11}$$

Теоремы о неявных операторах позволяют изучить простейший случай этой задачи, когда она имеет (локально) единственное решение. Общий случай приводит к теории ветвления решений нелинейных уравнений и будет изучен в последующих параграфах.

Т е о р е м а 22.1. *Пусть оператор $F(x, y)$ непрерывен в некоторой окрестности ω точки $(x_0, y_0) \in E_1 \dot{+} E$ со* *значениями в* E_2 *и удовлетворяет условию* (22.11). *Пусть, далее, в* ω *существует непрерывная частная производная* $F_x(x, y)$, *причем оператор*

$$B = -F_x(x_0, y_0) \tag{22.12}$$

имеет ограниченный обратный оператор.

Тогда существуют положительные числа ρ_1 *и* r_1 *такие, что в шаре* $D_{r_1}(x_0, E_1)$ *существует единственное решение*

$$x = f(y) \tag{22.13}$$

уравнения (22.9). *Это решение определено при* $y \in D_{\rho_1}(x_0, E)$, *непрерывно в этом шаре и удовлетворяет условию* (22.10).

Доказательство этой теоремы содержится в различных книгах (см., например, Л. В. Канторович, Г. П. Акилов [1], теорема 2 (4.17) или Л. А. Люстерник, В. И. Соболев [1]), и мы его приводить не будем.

Теорема 22.2. *Пусть* $F(x, y)$ — *аналитический оператор в* $D_r(x_0, E_1) \dotplus D_\rho(y_0, E)$ *со значениями в* E_2, *причем оператор* B *имеет ограниченный обратный. Тогда существуют положительные числа* ρ_1 *и* r_1 *такие, что в шаре* $D_{r_1}(x_0, E_1)$ *существует единственное решение* (22.13) *уравнения* (22.9). *Это решение определено в* $D_{\rho_1}(y_0, E)$, *аналитично в этом шаре и удовлетворяет условию* (22.10).

Доказательство. Сначала заметим, что выполнены все условия теоремы 2.1, поэтому справедлив вывод этой теоремы. Положим

$$x = x_0 + h, \quad y = y_0 + g \tag{22.14}$$

и запишем уравнение (22.9) так:

$$h = R_{01}g + \sum_{i+j\geqslant 2} R_{ij}h^i g^j, \tag{22.15}$$

где

$$R_{ij} = \frac{1}{i!\,j!}\left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}\right]^{-1} \frac{\partial^{i+j} F(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^j}. \tag{22.16}$$

Решение уравнения (22.15) будем искать в виде

$$h = \sum_{k=1}^{+\infty} h_k g^k, \tag{22.17}$$

где $h_k g^k$ — степенной оператор порядка k. Подставляя (22.17) в (22.15) и приравнивая, согласно теореме единственности аналитических функций, члены одинаковых порядков по g, получим рекуррентную систему для определения $h_k g^k$:

$$h_k g^k = P_k\,(g, h_1 g, \ldots, h_{k-1}\, g^{k-1}), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{22.18}$$

Оказывается, что

$$P_k(g, h_1 g, \ldots, h_{k-1}\, g^{k-1}) = \sum_{i+j=2}^{k-1} \sum_{\substack{j_1+\ldots+j_{k-1}=j \\ j_1+2j_2+\ldots+(k-1)\,j_{k-1}=k-i \\ j\neq 0}} \frac{j!}{j_1!\ldots j_{k-1}!} \times$$

$$\times R_{ji}\,[h_1 g]^{j_1}\ldots[h_{k-1}\, g^{k-1}]^{j_k}\, g^i + \sum_{i+j=k} R_{ji}\,[h_i g]^j\, g^i. \tag{22.19}$$

Из системы (22.18) последовательно определяем $h_1 g$, $h_2 g^2, \ldots$ и получаем формальное решение в виде ряда (22.17). Это решение окажется настоящим, если удастся доказать сходимость ряда (22.17).

Сходимость этого ряда устанавливается при помощи метода мажорант Коши — Гурса (см. Гурса [2]). Ряд, стоящий в правой части уравнения (22.15), если учесть формулы (22.16) и неравенства Коши (22.8), мажорируется следующей функцией (кратной прогрессией):

$$f(\xi, \eta) \equiv \| B^{-1} \| \cdot M \left[\left(1 - \frac{\xi}{r}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right)^{-1} - 1 - \frac{\xi}{r} \right],$$

где $\xi = \| h \|$ и $\eta = \| g \|$.

Как и в классическом случае (Гурса [1], стр. 78—82), легко убеждаемся, что уравнение

$$\xi = f(\xi, \eta)$$

будет мажорантным для уравнения (22.15). Это квадратное уравнение относительно ξ имеет единственный корень $\xi = \xi(\eta)$, удовлетворяющий условию $\xi(0) = 0$:

$$\xi = \frac{\rho}{2(\rho + M \| B^{-1} \|)} \left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{\rho}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\eta}{\alpha}\right)^{1/2} \right],$$

где

$$\alpha = r\left(\frac{\rho}{\rho + 2M\,\|B^{-1}\|}\right)^2,$$

так что ряд (22.17) сходится при

$$\|g\| < \alpha \text{ (так как } \alpha < r).$$

Итак, в качестве ρ_1 можно выбрать любое число из $(0, \alpha)$. Заметим еще, что $\xi(\eta)$ — монотонно возрастающая функция η на $(-\alpha, \alpha)$, поэтому в качестве r_1 можно принять $r_1 = \xi(\rho_1)$.

Теорема доказана.

В заключение приведем более общую теорему о неявных операторах, позволяющую привлечь к рассмотрению и неограниченные операторы. Близкие результаты получены А. Е. Гельманом [1].

Теорема 22.3. *Пусть D — линейное множество, плотное в E_1, и пусть $F(x, y)$ — нелинейный оператор со значениями в E_2, определенный при*

$$(x, y) \in \sum_{x_0, y_0} = \{x, y;\ x \in D_r(x_0, E_1) \cap D,\ y \in D_\rho(y_0, E)\},$$

удовлетворяющий условию $F(x_0, y_0) = 0$ и имеющий на Σ_{x_0, y_0} производную в смысле Гато $F_x(x, y)$. Пусть, далее, оператор $B = -F_x(x_0, y_0)$ имеет ограниченный обратный оператор, причем операторы

$$F(x_0 + B^{-1}u,\ y) \text{ и } F_x(x_0 + B^{-1}u, y)\,B^{-1}$$

непрерывны по $(u, y) \in D_\tau(0, E_2) \dotplus D_\rho(y_0, E)$, где $\tau = \|B^{-1}\| \cdot r$.

Тогда найдутся положительные числа ρ_1 и r_1 такие, что в шаре $D_{r_1}(x_0, E_1)$ уравнение (22.9) имеет при $y \in D_{\rho_1}(y_0, E)$ единственное решение (22.13). Это решение удовлетворяет условию (22.10) и непрерывно в $D_{\rho_1}(y_0, E)$. Если дополнительно оператор $F(x_0 + B^{-1}u, y)$ аналитичен при $(u, y) \in D_r(0, E_2) \dotplus D_\rho(y_0, E)$, то найдется число $\tilde{\rho}_1 \in (0, \rho_1)$ такое, что в шаре $D_{\tilde{\rho}_1}(y_0, E)$ указанное решение аналитично.

Доказательство. Уравнение (22.9) эквивалентно, очевидно, уравнению (замена $x = x_0 + B^{-1}u$)

$$u = R(u, y), \tag{22.20}$$

где

$$R(u, y) \equiv -F(x_0 + B^{-1} u, \ y) + u. \qquad (22.12)$$

Для уравнения (22.20) выполнены все условия теоремы 22.1. Так, условие (22.11) принимает вид $R(0, y_0) = 0$. Далее, здесь $E_1 = E_2$, оператор $R(u, y)$ непрерывен и, наконец,

$$\frac{\partial R(u, y)}{\partial u} = -\frac{\partial F(x_0 + B^{-1}u, y)}{\partial x} B^{-1} + I \in \{E_2 \to E_2\},$$

так как $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}$ есть линейный (возможно, неограниченный) оператор с областью определения D, не зависящей от (x, y) в окрестности точки (x_0, y_0). Таким образом, существование и единственность непрерывного (при дополнительном предположении — аналитического) решения $u = u(y)$, удовлетворяющего условию $u(0) = 0$, следуют из теорем 22.1 и 22.2. Очевидно, $x(y) = x_0 + B^{-1} u(y)$, и теорема доказана.

§ 23. Уравнение разветвления Ляпунова — Шмидта

23.1. Постановка задачи. Продолжим исследование уравнения (22.9)

$$F(x, y) = 0$$

в окрестности точки (x_0, y_0) в предположении, что выполнено условие (22.11):

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

Как и в предыдущем параграфе, предполагается, что $F(x, y)$ — нелинейный оператор со значениями в E_2, определенный и непрерывный в окрестности ω точки (x_0, y_0).

Если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) существует единственное решение уравнения (22.9), то назовем точку (x_0, y_0) регулярной точкой этого уравнения. Теоремы о неявных операторах дают условия, достаточные для регулярности точки (x_0, y_0). Если для любого достаточно малого $r > 0$ найдется $y \neq y_0$, $y \in D_r(y_0, E_1)$, которому отвечает по крайней мере два решения уравнения (22.9), то назовем точку (x_0, y_0) точкой ветвления этого уравнения.

Наконец, если в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) уравнение (22.9) имеет только решение x_0, определенное лишь при $y = y_0$, то назовем точку (x_0, y_0) точкой непродолжаемости.

В приложениях представляет интерес частный случай уравнения (22.9), а именно уравнение

$$x = \lambda\Phi(x), \tag{23.1}$$

где $\Phi(x)$ — нелинейный вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве E, и $\Phi(0) = 0$, λ — числовой параметр. Уравнение это всегда имеет тривиальное решение $x = 0$, от которого могут ответвляться нетривиальные решения.

Число λ_0 называется точкой бифуркации [1], если точка $(0, \lambda_0)$ является точкой ветвлений уравнения (23.1). Таким образом, понятие точки бифуркации есть частный случай понятия точки ветвления.

Для уравнения (23.1) иногда пользуются терминологией линейных уравнений: его нетривиальные решения называют собственными векторами, а соответствующие значения — собственными значениями.

Общую задачу локального разыскания всех решений уравнения (22.9) естественно расщепить на две частные задачи:

Задача А. Найти всевозможные локальные продолжения решения x_0 по параметру y, т. е. найти решения $x = x(y)$, определенные на возможно более широких множествах из окрестности точки y_0, содержащих y_0 и не сводящихся к точке y_0.

Задача Б. Найти решения уравнения (22.9), определенные лишь при $y = y_0$, т. е. решения уравнения

$$(x, y_0) = 0, \tag{23.2}$$

близкие к x_0.

В связи с задачей Б представляет интерес следующее понятие.

Решение x_0 уравнения (23.2) называется изолированным [2], если существует окрестность точки x_0, в которой это уравнение не имеет решений, отличных от x_0.

---

[1] См. пп. 12.3 и 12.7.

[2] См. п. 12.6.

В случае, когда точка (x_0, y_0) регулярная, обе задачи А и Б имеют единственное решение.

Учитывая замену (22.14), мы без ограничения общности можем рассматривать вместо уравнения (22.9) уравнение

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{23.3}$$

где

$$\Phi(0, 0) = 0. \tag{23.4}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь уравнение (23.3), где y — малый функциональный параметр.

Непрерывное на множестве $\Omega \subset E$, содержащем точку $y = 0$, решение $x = x(y)$ назовем малым решением уравнения (23.3), если $x(0) = 0$. Ниже будет показано, что задача отыскания малых решений уравнения (23.3) эквивалентна задаче разыскания малых решений некоторой числовой системы n уравнений с n неизвестными и параметром y. Будут рассмотрены методы решения этой системы, которую по аналогии с главой II мы будем называть уравнением разветвления [1]).

23.2. Вывод уравнения разветвления с помощью сужения оператора B. Пусть оператор $\Phi(x, y)$ непрерывно дифференцируем в ω, причем оператор

$$B = -\Phi_x(0, 0) \in \{E_1 \to E_2\} \tag{23.5}$$

есть фредгольмовский оператор. Случай, когда B не имеет нулей, исследован в § 22, и согласно п. 21.2 и 21.3 в этом случае оператор B^{-1} существует и ограничен.

Пусть теперь $n \geqslant 1$, где n — число нулей оператора B. Запишем уравнение (23.3) в следующем виде:

$$Bx = R(x, y), \tag{23.6}$$

где

$$R(x, y) \equiv \Phi(x, y) - \Phi_x(0, 0)\, x. \tag{23.7}$$

Заменим, пользуясь прямыми разложениями банаховых пространств E_1 и E_2 (п. 21.2), уравнение (23.6) системой двух уравнений с двумя неизвестными. Положим

$$x = u + v, \tag{23.8}$$

---

[1]) Уравнение разветвления для различных случаев выводилось рядом авторов, см., например, Кронин [1], Бартл [1], Треногин [3].

где

$$u = (I - P)\, x \in E_1^{\infty - n}, \quad v = Px \in E_1^n \tag{23.9}$$

и спроектируем уравнение (23.6) на $E_{2,\infty-n}$ и на E_{2n}. В результате получим следующую систему, эквивалентную уравнению (23.6):

$$\hat{B}u = (I - Q)R\,(u + v,\ y),\ 0 = QR\,(u + v,\ y),$$

где $\hat{B}$ — сужение оператора B на $E_1^{\infty-n}$ (п. 21.3), а Q — проектор, определенный формулой (21.12).

Учитывая второе уравнение, систему можно немного упростить:

$$\hat{B}u = R\,(u + v,\ y), \tag{23.10}$$

$$0 = QR\,(u + v,\ y). \tag{23.11}$$

Исключим из этой системы u. Будем считать параметром $(v,\ y) \in E_1^n \dotplus E$ (введя норму, например, так:

$$\|(v, y)\|_{E_1^n \dotplus E} = \|v\|_{E_1} + \|y\|_E).$$

Для уравнения (23.10) выполнены все условия теоремы 22 1 о неявных операторах. Действительно, иэ формулы (23.7) вытекает, что $R\,(u + v,\ y)$ непрерывен при всех достаточно малых u, v, y и $\frac{\partial R\,(u+v, y)}{\partial u} = -B + \frac{\partial \Phi\,(u+v, y)}{\partial x}$ также непрерывен. Кроме того, $\hat{B}^{-1}$ (п.21.3) существует и ограничен. Поэтому в достаточно малой окрестности точки $u = 0,\ v = 0,\ y = 0$ существует единственное решение

$$u = u\,(v,\ y) \tag{23.12}$$

уравнения (23.10), непрерывное и такое, что

$$u\,(0{,}0) = 0. \tag{23.13}$$

Подставим (23.12) в (23.11) и получим уравнение для определения v:

$$QR\,(u\,(v,\ y) + v,\ y) = 0. \tag{23.14}$$

Это уравнение принято называть уравнением Ляпунова — Шмидта. Его можно записать в виде системы n числовых уравнений с n числовыми неиэвестными. В самом деле, Всякий элемент $v \in E_1^n$ однозначно представим в виде (см. (21.15))

$$v = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i.$$

Поэтому

$$u(v, y) \equiv u(\xi_1, \ldots, \xi_n, y),$$

и, вспоминая (21.12) и пользуясь линейной независимостью $\{z_h\}$, мы можем уравнение Ляпунова — Шмидта записать так:

$$L^{(k)}(\xi_1, \ldots, \xi_n, y) \equiv$$

$$\equiv \left(R\left(u(\xi_1, \ldots, \xi_n, y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\varphi_i, y)\right), \psi_k\right) = 0, \quad (23.15)$$

$$k = 1, \ldots, n.$$

Функции $L^{(k)}(\xi_1, \ldots, \xi_n, y)$ $(k=1, \ldots, n)$ являются непрерывными при всех достаточно малых $y, \xi_1, \ldots, \xi_n$, причем

$$L^{(k)}(0, \ldots, 0, 0) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \quad (23.16)$$

Кроме того, эти функции при этих же значениях своих аргументов непрерывно дифференцируемы по ξ_l $(l = 1, \ldots, n)$. Действительно,

$$\frac{\partial L^{(k)}(\xi_1, \ldots, \xi_n, y)}{\partial \xi_l} = \left(\frac{\partial R(u+v, y)}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial v}\varphi_l + \varphi_l\right), \psi_k\right).$$

Но из формулы (23.7) имеем

$$\frac{\partial R(x, y)}{\partial x} = -\Phi_x(0,0) + \Phi_x(x,y),$$

откуда

$$\frac{\partial R(0, 0)}{\partial x} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial L^{(k)}(0, \ldots, 0, 0)}{\partial \xi_l} = 0, \qquad k, l = 1, \ldots, n. \quad (23.17)$$

Из формулы (23.17) следует, что система (23.15) имеет матрицу Якоби, тождественно равную нулю. Это обстоятельство, как мы убедимся ниже, приводит к тому, что уравнение разветвления имеет, вообще говоря, не единственное решение.

23.3. Вывод уравнения разветвления с помощью леммы Шмидта. Дадим другой вывод уравнения разветвления, имеющий то преимущество, что теперь не привлекаются к рассмотрению подпространства $E_1^{\infty-n}$ и E_1^n пространства E_1 и изучаемые операторы действуют во всем пространстве E_1.

Запишем уравнение (23.6) с помощью формулы (21.18) в виде эквивалентной ему системы

$$\tilde{B}x = R(x, y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i z_i, \tag{23.18}$$

$$\xi_k = (x, \gamma_k), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{23.19}$$

К уравнению (23.18), если рассматривать $(y, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ как параметр, можно применить теорему 22.1 о неявных операторах. Однако удобнее сначала немного преобразовать это уравнение. Сделаем в нем замену

$$x = u + \sum_{i+1}^{n} \xi_i \varphi_i.$$

Если учесть формулы (21.22), то для определения u мы получим уравнение

$$\tilde{B}u = R\left(u + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i, y\right). \tag{23.20}$$

Это уравнение того же типа, что и уравнение (23.10) и имеет при всех достаточно малых $y, \xi_1, \ldots, \xi_n$ единственное решение $u(y, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Итак, уравнение (23.18) имеет единственное малое решение

$$g = u(y, \xi_1, \ldots, \xi_n) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i. \tag{23.21}$$

Но это решение должно удовлетворять также уравнениям (23.19).

Учитывая формулы (21.7), получаем для определения $\xi_1, \ldots, \xi_n$ следующую систему:

$$(u(y, \xi_1, \ldots, \xi_n), \gamma_k) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{23.22}$$

Эта система также представляет собою уравнение разветвления Ляпунова — Шмидта, записанное в другой форме.

В самом деле, мы видели (см. (21.24)), что $\gamma_k = (\widetilde{B})^* \psi_k$, поэтому систему уравнений (23.22), если воспользоваться определением сопряженного оператора, можно записать так:

$$(\widetilde{B}u(y, \xi_1, \ldots, \xi_n), \psi_k) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Наконец, учитывая формулу (23.20), получим

$$\left(R\left(y, u(y, \xi_1, \ldots, \xi_n) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i\right), \psi_k\right) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

а это и есть уравнение разветвления в форме (23.15).

23.4. Основная теорема об уравнении разветвления. Значение уравнения разветвления, грубо говоря, заключается в том, что число его малых решений равно числу малых решений уравнения (23.3). Точнее, справедлив следующий результат.

Теорема 23.1. *Пусть оператор* $\Phi(x, y)$ *непрерывен и непрерывно дифференцируем по* x *в окрестности точки* $(0, 0) \in E_1 \dotplus E$, *пусть значения* $\Phi(x, y)$ *лежат в* E_2, $\Phi(0, 0) = 0$, *а оператор* $B = -\Phi(0, 0)$ *есть* Φ-*оператор с* $n > 0$. *Тогда формула* (23.21) *устанавливает взаимно однозначное соответствие между малыми решениями уравнения* (23.3) *и малыми решениями уравнения разветвления* (23.15).

Доказательство данной теоремы проводится примерно так же, как доказательство леммы 12.1.

23.5. Уравнение разветвления в аналитическом случае. Предположим, что оператор $\Phi(x, y)$ — аналитический в некоторой окрестности начала координат. Применим тогда в рассуждениях п. 23.3 вместо теоремы 22.1 теорему 22.2. В результате окажется, что все функции $L^k(\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_n, y)$ — аналитические по своим аргументам (по y это аналитические функционалы) и уравнение разветвления можно записать в виде

$$\sum_{i_1+\ldots+i_n\geqslant 2} L^{(k)}_{i_1,\ldots,i_n}(y)\,\xi_1^{i_1}\ldots\xi_n^{i_n}+$$
$$+\sum_{i_1+\ldots+i_n\geqslant 0}\ \sum_{l=1}^{+\infty} L^{(k)}_{i_1\ldots i_n l}(y)\,\xi_1^{i_1}\ldots\xi_n^{i_n}=0,$$
$$k=1,\ldots,n, \tag{23.23}$$

где $L^{(k)}_{i_1\ldots i_n l}(y)$ — мы будем называть их коэффициентами уравнения разветвления — суть степенные функционалы порядка l при $l\geqslant 1$ и числа при $l=0$. При этом из теоремы 22.2 следует, что существуют положительные числа $\tilde\rho$, $r_1,\ldots$ $\ldots, r_n$ такие, что при $\|y\|\leqslant\tilde\rho$, $|\xi_i|\leqslant r_i$, $i=1,\ldots,n$, степенные ряды, стоящие в левой части уравнений (23.22), сходятся абсолютно и равномерно.

Фиксируем $y=y_0$, где $\|y_0\|=\tilde\rho_0$, и рассмотрим уравнение (23.22) на луче $y=\lambda y_0$; тогда уравнение (23.22) на этом луче примет такой вид:

$$\sum_{i_1+\ldots+i_n\geqslant 2} L^{(k)}_{i_1\ldots i_n}(y_0)\,\xi_1^{i_1}\ldots\xi_n^{i_n}+$$
$$+\sum_{i_1+\ldots+i_n\geqslant 0}\xi_1^{i_1}\ldots\xi_n^{i_n}\sum_{l=1}^{+\infty} L^{(k)}_{i_1\ldots i_n l}(y)\lambda^l=0,$$
$$k=1,\ldots,n.$$

Более простым (и достаточно важным в приложениях) является случай, когда $y\equiv\lambda$ — числовой параметр. Тогда, полагая $L_{i_1\ldots i_n l}(y)\equiv L_{i_1\ldots i_n l}\lambda^l$, запишем уравнение разветвления (23.23):

$$\sum_{i_1+\ldots+i_n\geqslant 2} L^{(k)}_{i_1\ldots i_n 0}\,\xi_1^{i_1}\ldots\xi_n^{i_n}+$$
$$+\sum_{i_1+\ldots+i_n\geqslant 0}\xi_1^{i_1}\ldots\xi_n^{i_n}\sum_{l=1}^{+\infty} L^{(k)}_{i_1\ldots i_n l}\lambda^l=0,$$
$$k=1,\ldots,n. \tag{23.24}$$

Ниже мы ограничиваемся в основном изучением такого уравнения разветвления. В случае функционального параметра на каждом луче уравнение разветвления имеет вид (23.24).

Замечание 23.1. Обратим внимание на следующее важное обстоятельство: коэффициенты уравнения разветвления $L^{(k)}_{i_1\ldots i_{n0}}$ не зависят от y. Мы увидим, что в ряде важных случаев число малых решений уравнения разветвления определяется только этими коэффициентами и, значит, не зависит от y (от луча, на котором уравнение разветвления рассматривается).

23.6. Уравнение разветвления для неограниченных операторов. Пусть, как в теореме 22.3, D — линейное множество, плотное в E_1, и $\Phi(x, y)$ — нелинейный оператор со значениями в E_2, определенный при

$$(x, y) \in \Sigma_{0,0} = \{x, y; x \in D_r(0, E_1) \cap D; y \in D_\rho(0, E)\},$$

удовлетворяющий условию $\Phi(0, 0) = 0$ и имеющий на $\Sigma_{0,0}$ производную в смысле Гато $\Phi_x(x, y)$. Однако теперь мы предположим, что оператор

$$B = -\Phi_x(0, 0)$$

есть Ф-оператор в смысле п. 21.5, т. е. замкнутый линейный нормально разрешимый оператор из E_1 в E_2 с областью определения $D(B) \equiv D$, плотной в E_1, с числом нулей $n > 0$ и дефектным числом, также равным n. Пусть, далее, $\Gamma = \widetilde{B}^{-1}$ (см. обобщенную лемму Шмидта). Предположим, далее, что оператор $\Phi(x, y)$ подчинен B в том смысле, что операторы

$$\Phi(\Gamma u, y) \text{ и } \Phi_x(\Gamma u, y)\,\Gamma$$

непрерывны по $(u, y) \in D_\tau(0, E_2) \dotplus D_\rho(0, E)$ при $\tau = \|\Gamma\|^{-1} r$. В этих условиях рассуждения п. 23.3 можно повторить. Уравнение $\Phi(x, y) = 0$ сводится к системе (23.18) — (23.19). С помощью теоремы 22.3 о неявных операторах из (23.18) находим единственное малое решение $x = x(\xi_1, \ldots, \xi_n, y)$, подстановка которого в уравнения (23.19) приводит к уравнению разветвления (23.22). Можно, конечно, вывести это уравнение и способом, изложенным в п. 23.2. Хотя далее в данной главе преимущественно рассматриваются ограниченные операторы, все результаты без труда переносятся и на случай неограниченных операторов.

§ 24. Исследование одномерного случая ветвления

В этом параграфе будет рассмотрена задача разыскания малых решений уравнения (23.3) (или, что то же самое, эквивалентного ему уравнения (23.6)) в предположении, что выполнены условия: 1) число нулей n фредгольмовского оператора B (см. (23.5)) равно единице, 2) $y \equiv \lambda$ — малый числовой параметр, 3) $\Phi(x, \lambda)$ — аналитический оператор в некоторой окрестности точки (0,0).

При выполнении этих условий мы будем говорить, что имеет место одномерный случай ветвления. В данном случае уравнение (23.6) мы запишем так:

$$Bx = F_{01}\lambda + \sum_{i+j\geqslant 2} F_{ij}x^i\lambda^j, \tag{24.1}$$

а уравнение (23.24), если опустить верхний индекс у $L_{ij}^{(1)}$ и нижний индекс у ξ_1, примет следующий вид:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} L_{k0}\xi^k + \sum_{k=0}^{+\infty} \xi^k \sum_{l=1}^{+\infty} L_{kl}\lambda^l = 0. \tag{24.2}$$

24.1. Вычисление первых коэффициентов одномерного уравнения разветвления. Система (23.18) — (23.19) в рассматриваемом случае имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{B}x &= F_{01}\lambda + \sum_{i+j\geqslant 2} F_i\, x^i\lambda^j + \xi z, \\ \xi &= (x, \gamma), \end{aligned}\right\} \tag{24.3}$$

где $F_{ij} = \dfrac{1}{i!j!}\dfrac{\partial^{i+j}\Phi(0,0)}{\partial x^i\,\partial\lambda^j}$ (см. (22.7)).

Будем искать малое решение $x = x(\xi, \lambda)$ уравнения (24.3) в виде ряда

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} x_{i0}\xi^i + \sum_{i=0}^{+\infty} \xi^i \sum_{j=1}^{+\infty} x_{ij}\lambda^j, \tag{24.4}$$

сходимость которого при достаточно малых $|\xi|$ и $|\lambda|$ следует из (23.21).

Согласно результатам § 23 подстановка этого ряда в (24.3) и даст уравнение разветвления. Поэтому имеем

$$L_{ij} = (x_{ij},\ \gamma). \tag{24.5}$$

Подставляя ряд (24.4) в уравнение (24.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ и ξ, придем к следующей рекуррентной системе для определения x_{ij}:

$$\tilde{B}x_{01} = F_{01},$$

$$\tilde{B}x_{02} = F_{02} + 2F_{11}x_{01} + F_{20}x_{01}^2,$$

$$\tilde{B}x_{03} = F_{03} + 3F_{12}x_{01} + 3F_{21}x_{01}^2 + F_{30}x_{01}^3 + 2F_{11}x_{02} + \\ + 2F_{20}x_{01}x_{02},$$

$$\tilde{B}x_{10} = z,$$

$$\tilde{B}x_{20} = F_{20}x_{10}^2,$$

$$\tilde{B}x_{30} = 2F_{20}x_{10}x_{20} + F_{30}x_{10}^3,$$

$$\tilde{B}x_{11} = 2F_{11}x_{10} + 2F_{20}x_{10}x_{01},$$

$$\tilde{B}x_{21} = 2F_{11}x_{20} + 2F_{20}x_{01}x_{20} + 3F_{21}x_{10}^2 + 3F_{30}x_{01}x_{10}^2,$$

$$\tilde{B}x_{12} = 2F_{11}x_{11}' + 2F_{20}x_{01}x_{11} + 6F_{21}x_{01}x_{10} + \\ + 3F_{12}x_{1\,} + 3F_{30}x_{01}^2x_{10},$$

. . . .

Отсюда последовательно находим

$$x_{01} = \Gamma F_{01},$$

$$x_{02} = \Gamma\,[F_{02} + 2F_{11}\,(\Gamma F_{01}) + F_{20}\,(\Gamma F_{01})^2],$$

$$x_{03} = \Gamma\,[F_{03} + 3F_{12}\,(\Gamma F_{01}) + 3F_{21}\,(\Gamma F_{01})^2 + F_{30}(\Gamma F_{01})^3] + \\ + \Gamma\,[2F_{11} + 2F_{20}\,(\Gamma F_{01})]\,\Gamma\,[F_{02} + 2F_{11}\,(\Gamma F_{01}) + F_{20}\,(\Gamma F_{01})^2],$$

$$x_{10} = \varphi,$$

$$x_{20} = \Gamma F_{20}\varphi^2,$$

$$x_{30} = 2\Gamma\, F_{20}\varphi\,(\Gamma F_{20}\varphi^2) + \Gamma F_{30}\varphi^3,$$

$$x_{11} = 2\Gamma F_{11}\varphi + 2\Gamma\, F_{20}\varphi\,(\Gamma F_{01}),$$

$$x_{21} = 2\Gamma\,[F_{11} + F_{20}\,(\Gamma F_{01})]\Gamma\, F_{20}\varphi^2 + 3\Gamma\,[F_{21} + \\ + F_{30}(\Gamma F_{01})]\,\varphi^2,$$

$$x_{12} = 2\Gamma\,[F_{11} + F_{20}\,(\Gamma F_{01})]\,[2\Gamma F_{11}\varphi + 2\Gamma F_{20}\varphi\,(\Gamma F_{01})] + \\ + 3\Gamma\,[2F_{21}\,(\Gamma F_{01}) + F_{12} + F_{30}\,(\Gamma F_{01})^2]\varphi.$$

Учитывая теперь, что $\Gamma^*\gamma = \psi$ (формула (21.24)), из полученных формул и из формулы (24.5) находим

$$\left.\begin{aligned}
L_{01} &= (F_{01}, \psi),\\
L_{02} &= (F_{02} + 2F_{11}(\Gamma F_{01}) + F_{20}(\Gamma F_{01})^2, \psi),\\
L_{03} &= (F_{03} + 3F_{12}(\Gamma F_{01}) + 3F_{21}(\Gamma F_{01})^2 +\\
&+ F_{30}(\Gamma F_{01})^3, \psi) + ([2F_{11} + 2F_{20}(\Gamma F_{01})]\,\Gamma\,[F_{02} +\\
&\qquad + 2F_{11}(\Gamma F_{01}) + F_{20}(\Gamma F_{01})^2], \psi),\\
L_{20} &= (F_{20}\varphi^2, \psi),\\
L_{30} &= (2F_{20}\varphi(\Gamma F_{20}\varphi^2) + F_{30}\varphi^3, \psi),\\
L_{11} &= (2F_{11}\varphi + 2F_{20}\varphi(\Gamma F_{01}), \psi),\\
L_{21} &= ([2F_{11} + 2F_{20}(\Gamma F_{01})]\,\Gamma F_{20}\varphi^2, \psi) +\\
&\qquad + (F_{21}\varphi^2 + F_{30}(\Gamma F_{01})\varphi^2, \psi),\\
L_{12} &= 4([F_{11} + F_{20}(\Gamma F_{01})]\,\Gamma\,[F_{11}\varphi +\\
&\qquad + F_{20}\varphi(\Gamma F_{01})], \psi) + 3([2F_{21}(\Gamma F_{01}) +\\
&\qquad + F_{12} + F_{30}(\Gamma F_{01})^2]\varphi, \psi).
\end{aligned}\right\}\quad (24.6)$$

Так же можно найти и другие коэффициенты уравнения разветвления. Как мы убедимся ниже, особенно важную роль играют коэффициенты уравнения разветвления L_{i0}. Для их определения можно воспользоваться следующими соображениями. Введем обозначения

$$x^{(0)}(\xi) = x(\xi, 0).$$

Полагая в (24.3) $\lambda = 0$, получим

$$Bx^{(0)} = \sum_{l=2}^{+\infty} F_{l0}[x^{(0)}]^l + \xi z.$$

Из этого уравнения $x^{(0)}(\xi)$ можно найти в виде ряда

$$x^{(0)}(\xi) = \xi z + \sum_{k=2}^{+\infty} x_k^{(0)}\xi^k.$$

Методом математической индукции легко показать справедливость следующих рекуррентных формул для $x_k^{(0)}$:

$$x_s^{(0)} = \sum_{k=2}^{s} \sum_{i_1+\ldots+i_k=s} \Gamma F_{k0}(\Gamma x_{i_1}^{(0)})\ldots(\Gamma x_{i_k}^{(0)}). \qquad (24.7)$$

Следовательно, если $x_1^{(0)}, \ldots, x_{s-1}^{(0)}$ известны, то

$$L_{s0} = \sum_{k=2}^{s} \sum_{i_1+\ldots+i_k=s} (F_{k0}(\Gamma x_{i_1}^{(0)})\ldots(\Gamma x_{i_k}^{(0)}), \psi). \qquad (24.8)$$

24.2. Вырожденный случай. Переходя к изучению одномерного случая, займемся сначала вырожденным случаем, когда все коэффициенты уравнения разветвления равны нулю. Иными словами, равенство $\xi = (x, \gamma)$ теперь выполняется тождественно и, следовательно, уравнение (24.3) имеет свободный малый параметр ξ. Решение этого уравнения дается формулой (24.4).

Рассмотрим в этом случае задачи А и Б (см. п. 23.1). Полагая в (24.3) $\lambda = 0$, мы видим, что задача Б имеет бесчисленное (однопараметрическое семейство с параметром ξ) множество решений

$$x^{(0)}(\xi) = \xi\varphi + \sum_{k=2}^{+\infty} x_k \xi^k$$

при всех достаточно малых ξ.

Задача А также имеет бесчисленное множество решений. В самом деле, положим в формуле (24.4)

$$\xi = \xi(\lambda),$$

где $\xi(\lambda)$ — произвольная непрерывная функция λ, определенная в окрестности точки $\lambda = 0$ и такая, что $\xi(0) = 0$. Тогда ряд

$$x(\xi(\lambda), \lambda) = \sum_{i+j\geqslant 1} x_{ij}\xi^i(\lambda)\lambda^j \qquad (24.9)$$

дает решение задачи А.

Замечание 24.1. Естественно, решение (24.9) не всегда является аналитической функцией λ, достаточно в качестве $\xi(\lambda)$ взять неаналитическую функцию, например $\lambda \ln \lambda$.

Замечание 24.2. В рассматриваемом случае могут возникнуть так называемые формальные решения. Пусть ищутся решения уравнения (24.1) в виде всевозможных рядов по целым или дробным степеням параметра λ. В вырожденном случае среди таких рядов могут оказаться расходящиеся ряды. В самом деле, ряд (24.4), где

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n!\lambda^n,$$

обращает уравнение (24.1) в тождество, если формально приравнять коэффициенты при одинаковых степенях λ, но радиус сходимости этого ряда равен нулю.

24.3. Квазирегулярный случай (задача А). Пусть имеет место квазирегулярный случай, т. е. не все коэффициенты уравнения разветвления равны нулю. Это уравнение изучено нами в § 2 методом диаграммы Ньютона. Полученные там результаты приводят к предложению.

Теорема 24.1. *В квазирегулярном случае имеется только две возможности. Либо уравнение* (24.1) *не имеет при достаточно малых* $|\lambda| \neq 0$ *малых решений, либо это уравнение имеет при всех достаточно малых* $|\lambda| \neq 0$ *конечное число малых решений и все они представимы сходящимися рядами по целым или дробным степеням параметра* λ.

В п. 2.7 рассмотрен ряд случаев расположения убывающей части диаграммы Ньютона, каждый из которых в применении к уравнению разветвления (24.2) приводит к различным конкретным предложениям о числе решений уравнения (23.3) и об их виде.

Приведем несколько таких предложений, справедливость которых вытекает из метода диаграммы Ньютона (соответствующие результаты п. 2.7) и теорем 23.1 и 24.1.

Теорема 24.2. *Пусть* $L_{i0} = 0$ *при* $i < k$ *и* $L_{k0} \neq 0$. *Тогда при всех достаточно малых* $|\lambda| \neq 0$ *уравнение* (24.1) *имеет ровно* k (*с учетом кратности*) *малых решений и все они представимы сходящимися рядами по дробным степеням* λ.

Доказательство. Возможны два случая. Если не все коэффициенты L_{0j} уравнения разветвления равны нулю, то длина убывающей части диаграммы Ньютона равна k, откуда следует утверждение теоремы.

Если $L_{ij} = 0$, $i = 0, \ldots, s-1$, $j = 1, 2, \ldots$, но не все $L_{sj} = 0$, $j = 1, 2, \ldots$ $(s \leqslant k)$, то убывающая часть диаграммы Ньютона имеет длину $k - s$ и, кроме того, уравнение разветвления имеет множитель ξ^s. Таким образом, и во втором случае уравнение (24.2) имеет k малых решений ($k - s$ нетривиальных и s тривиальных). Заметим, что теорема 24.2 так же просто доказывается с помощью известной теоремы Руше (см., например, А. И. Маркушевич [1]).

Из теоремы 24.2 вытекает ряд простых следствий, соответствующих различным расположениям убывающей части диаграммы Ньютона, построенной для уравнения разветвления (24.2). Приведем некоторые из них.

Следствие 24.1. Пусть $L_{i0} = 0$ при $i < k, L_{k0} \neq 0$, $L_{01} \neq 0$. Тогда уравнение (24.1) имеет при всех достаточно малых $|\lambda| \neq 0$ ровно k малых решений. Все они различны и представимы сходящимися рядами вида

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \lambda^{\frac{i}{k}}. \tag{24.10}$$

Для доказательства заметим, что здесь убывающая часть диаграммы состоит из отрезка, соединяющего точки (k, 0) и (0, 1), которому соответствует значение показателя $\varepsilon = 1/k$, а корни ξ_ε простые (см. п. 2.4).

Следствие 24.2. Пусть $L_{i0} = 0$ при $i < k$, $L_{k0} \neq 0$, $L_{01} = 0$, $L_{02} \neq 0$, $L_{i1} = 0$ при $i < l$, причем $2l < k$. Тогда уравнение (24.1) имеет при всех достаточно малых $|\lambda| \neq 0$ ровно k малых решений. Все они различны, причем l из них представимы сходящимися рядами вида (см. п. 2.7, случай III)

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \lambda^{\frac{i}{l}}, \tag{24.11}$$

а $k - l$ — рядами вида

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \lambda^{\frac{i}{k-l}}. \tag{24.12}$$

Следствие 24.3. Пусть $L_{i0} = 0$, $i < k$, $L_{k0} \neq 0$, $L_{01} = 0$, $L_{02} \neq 0$, $L_{i1} = 0$, $i < l$, $2l > k$. Тогда (см. п. 2.7, случай IV) уравнение (24.1) имеет для всех достаточно малых $|\lambda| \neq 0$ ровно k малых решений. Все эти решения различны и представимы сходящимися рядами вида

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \lambda^{\frac{i+1}{k}}.$$

Следствие 24.4. Пусть $L_{i0} = 0$ $(i < k)$, $L_{k0} \neq 0$, $L_{01} = 0$, $L_{02} \neq 0$, $L_{i1} = 0$ при $i < l$, $L_{l1} \neq 0$, $2l = k$ и

$$\Delta = L_{l1}^2 - 4L_{02}L_{k0} \neq 0.$$

Тогда (см. п. 2.7, случай V) справедливо утверждение следствия 24.3.

Число таких следствий можно было бы увеличить, однако и приведенные выводы достаточно полно иллюстрируют случай, рассмотренный в теореме 24.2.

Пусть теперь все $L_{i0} = 0$, $i = 2, 3, \ldots$ Это означает, что уравнение разветвления (24.2) содержит множитель λ^s, где s — некоторое натуральное число. Сократив (24.2) на λ^s, мы получим уравнение того же типа, к которому можно применить ту же методику. При этом, однако, возможен и новый случай, когда полученное после сокращения на λ^s уравнение уже не имеет малых решений. Проиллюстрируем это для случая $s = 1$ (когда (24.2) имеет множитель λ, но не допускает сокращения на λ^2).

Теорема 24.3. *Пусть* $L_{i0} = 0$, $i = 2, 3, \ldots$, *но* L_{i1} *не все равны нулю. Если* $L_{01} \neq 0$, *то для достаточно малых* $|\lambda| \neq 0$ *уравнение* (24.1) *малых решений не имеет. Если же*

$$L_{i1} = 0,\ i = 0, \ldots, k-1,\ L_{k1} \neq 0\ (k \geqslant 1),$$

то уравнение (24.1) *имеет при всех достаточно малых* $|\lambda| \neq 0$ *ровно* k *(с учетом кратности) малых решений и все они представимы сходящимися рядами по целым или дробным степеням* λ.

Доказательство проводится так же, как в п. 2.7. В первом случае уравнение (24.2) имеет после сокращения на λ свободный член $L_{01} \neq 0$ и , следовательно, не имеет малых решений. Во втором случае сократим уравнение на λ, а затем при $k = 1$ воспользуемся теоремой о неявных функциях, а при $k \geqslant 2$ повторим рассуждения доказательства теоремы 24.2.

Заметим, что при $k \geqslant 2$ можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 24.1—24.3.

Ограничимся приведенными результатами, ибо каждый конкретный случай может быть до конца исследован при помощи диаграммы Ньютона.

24.4. Задача Б (невырожденный случай). Рассуждения предыдущего пункта можно повторить и для задачи Б, т. е. задачи разыскания малых решений уравнения

$$\Phi(x, 0) = 0. \tag{24.13}$$

Вследствие равенства (23.4) $x = 0$ является решением последнего уравнения. Из теоремы 22.1 (и 22.2) вытекает, что если оператор $B = -\Phi_x(0, 0)$ имеет ограниченный обратный оператор, то $x = 0$ — изолированное решение (см. п. 23.1). Пусть теперь B есть Ф-оператор с числом нулей $n = 1$. Тогда имеет место

Лемма 24.1 [1]. *Для того чтобы $x = 0$ было изолированным решением уравнения* (24.13), *необходимо и достаточно, чтобы не все коэффициенты L_{i0} уравнения разветвления* (24.2) *были равны нулю.*

Доказательство. Вследствие теоремы 23.1 задача разыскания малых решений уравнения (24.13) эквивалентна задаче разыскания малых решений уравнения разветвления (24.2) при $\lambda = 0$, т. е. уравнения

$$\sum_{i=2}^{+\infty} L_{i0}\xi^i = 0.$$

Если не все L_{i0} равны нулю, то $\xi = 0$ является единственным малым решением при $\lambda = 0$. Если все $L_{i0} = 0$, то ξ — произвольное достаточно малое число, и тогда при $\lambda = 0$ имеем неизолированное решение

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} x_{i0}\xi^i \tag{24.14}$$

уравнения (24.2). Лемма доказана. Из данной леммы вытекает, что задача Б имеет однопараметрическое решение (24.14) в том и только в том случае, когда все $L_{i0} = 0$. В

---

[1] См. п. 12.6.

противном случае задача Б имеет лишь тривиальное решение.

24.5 Вещественный случай. В приложениях обычно встречается случай, когда банаховы пространства E_1 и E_2 вещественны, E — числовая ось. При этом представляют интерес также только вещественные решения задачи. Расширим пространства E, E_1, E_2 естественным образом до комплексных пространств и предположим, что оператор $\Phi(x, \lambda)$ можно аналитически продолжить в окрестность точки $(0, 0)$ в расширении $E \dot{+} E_1$. Задача сведена к уже рассмотренной задаче, и можно воспользоваться всеми полученными выводами. Остается из полученных решений отобрать те, которые лежат в вещественном банаховом пространстве E_1 при вещественных значениях λ. При этом следует обратить внимание также на область определения этих решений, которая может заполнять как окрестность, так и полуокрестность точки $\lambda = 0$.

Проиллюстрируем сделанные замечания, предполагая, что $\Phi(x, \lambda)$ аналитически продолжим указанным выше образом.

Следствие 24.5. Пусть выполнены условия следствия 24.1. Если k нечетно, то при всех достаточно малых $|\lambda| \neq 0$ уравнение (24.1) имеет ровно одно малое решение вида (24.10). Если же k четно, то в той полуокрестности, где $L_{k0} L_{01} \lambda < 0$, уравнение (24.1) имеет ровно два малых решения вида (24.10), а в полуокрестности, где $L_{k0}L_{01}\lambda > 0$, уравнение (24.1) малых решений не имеет.

В самом деле, чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, нужно лишь, в дополнение к доказательству следствия 24.1, заметить, что $\xi(\lambda) \equiv \xi_{1/k} \lambda^{1/k}$ определяется из уравнений

$$L_{01}\lambda + L_{k0}\xi^k(\lambda) = 0.$$

Совершенно так же из следствия 24.2 вытекает в вещественном случае

Следствие 24.6. Пусть выполнены условия следствия 24.2, тогда для уравнения (24.3) справедливо следующее:

1) если k и l нечетны, то в той полуокрестности, где $L_{l1}L_{k0}\lambda > 0$, существует ровно одно малое решение, причем вида (24.11), а в полуокрестности, в которой $L_{l1}L_{k0}\lambda < 0$,

существует ровно три малых решения : два — вида (24.12) и одно — вида (24.11);

2) если k четно, l нечетно, то в окрестности точки $\lambda = 0$, исключая $\lambda = 0$, существует ровно два малых решения: одно — вида (24.11) и одно — вида (24.12);

3) если k нечетно, l четно, то в той полуокрестности, где $L_{02}L_{l1}\lambda > 0$, существует ровно одно малое решение, причем вида (24.12), а в полуокрестности, где $L_{02}L_{l1}\lambda < 0$, существует ровно три малых решения: одно — вида (24.12) и два — вида (24.11);

4) если k и l четны и $L_{02}L_{k0} > 0$, то в полуокрестности, где $L_{20}L_{l1}\lambda > 0$, малых решений нет, а в полуокрестности, где $L_{20}L_{l1}\lambda < 0$, существует ровно четыре малых решения: два — вида (24.11) и два — вида (24.12); если же $L_{02}L_{k0} < 0$, то в окрестности точки $\lambda = 0$ (исключая $\lambda = 0$) существует ровно два малых решения: в полуокрестности, в которой $L_{02}L_{l1}\lambda > 0$, оба вида (24.12), а в полуокрестности, где $L_{02}L_{l1}\lambda < 0$, оба вида (24.11).

Доказательство этих утверждений следует из п. 2.6. Укажем, что при определении главных членов решений уравнения разветвления (24.11), которые обозначим через $\xi(\lambda)$ ($\xi(\lambda)$ равно либо $\xi_{1/k}\lambda^{1/k}$, либо $\xi_{1/k-1}\lambda^{1/(k-l)}$), методом диаграммы Ньютона получаются уравнения:

$$L_{02}\lambda + L_{l1}\xi^{l}(\lambda) = 0$$

и

$$L_{l1}\lambda + L_{k0}\xi^{k-l}(\lambda) = 0.$$

Заметим в заключение, что аналогичные выводы нетрудно сделать также в условиях следствий 24.3 и 21.4, да и вообще в каждом конкретном случае применения диаграммы Ньютона 24.6.

24.6. О ветвлении решений уравнений с достаточно гладкими операторами. В предыдущих пунктах данного параграфа мы предполагали, что оператор $\Phi(x, \lambda)$ — аналитический по (x, λ) в некоторой окрестности точки $(0,0)$. Это ограничение не является, конечно, существенным. Пусть при $\|x\| \to 0$, $\lambda \to 0$

$$\Phi(x, \lambda) = \sum_{i+j=1}^{p} F_{ij}x^{i}\lambda^{j} + o([\|x\| + |\lambda|]^{p})$$

и $B = -F_{10}$ есть Φ-оператор с числом нулей $n = 1$.

Теперь уравнение разветвления (24.2) представляет собой не ряд, а многочлен степени p по ξ и λ плюс некоторый малый остаток. Так как при вычислении первых коэффициентов уравнения разветвления не нужно знать остатка, то мы сможем вычислить их, как и раньше. Если p достаточно велико, то нам удастся построить всю убывающую часть соответствующей диаграммы Ньютона, а следовательно, нам удастся найти число решений и вид их первых членов. Именно, каждое малое решение (в невырожденном случае) будет представляться в виде многочлена по целым или дробным степеням плюс малый остаток. Как и в аналитическом случае, особенно простая картина будет в случае простых корней (п. 2.4).

24.7 Случай функционального параметра. Ряды по однородным операторам. Вернемся к уравнению (23.3) для случая функционального параметра y в предположении аналитичности оператора $\Phi(x, y)$ и фредгольмовости оператора $B = -\Phi_x(0, 0)$ с числом нулей $n = 1$. В рассматриваемом случае уравнение (23.3) можно записать в виде

$$Bx = F_{01}y + \sum_{r+s\geqslant 2} F_{rs}x^r y^s, \tag{24.15}$$

где $F_{rs}x^r y^s$ — степенные ограниченные операторы порядка r по x и порядка s по y. Нам понадобятся следующие вспомогательные определения и факты.

Оператор $A_\alpha(y)$ с областью определения $D(A_\alpha)$ в банаховом пространстве E и с областью значений в банаховом пространстве E_2 назовем однородным с показателем однородности α, если

1) вместе с y $D(A_\alpha)$ содержит ty для любого $t > 0$,
2) $A_\alpha(ty) = t^\alpha A_\alpha(y)$.

Мы будем пользоваться лишь однородными операторами $A_{k/p}$, где k и p — натуральные числа. Введем в рассмотрение ряды по однородным операторам. Пусть $A_{k/p}$, $k = 1, 2, \ldots$, — последовательность однородных операторов, и пусть $D = \bigcap_{k=1}^{\infty} D(A_{k/p})$ не пусто. Назовем ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} A_{k/p}(y) \tag{24.16}$$

сходящимся в точке $y \in D$, если $\left\| \sum_{k=i}^{m} A_{k/p}(y) \right\| \to 0$ при $i \to \infty$, $m \to \infty$.

Из этого определения следует, что если ряд (24.16) сходится в точке y, то существует постоянная $C(y)$ такая, что

$$\| A_{k/p}(y) \| \leqslant C(y), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Область сходимости ряда (24.16) звездна относительно точки $y = 0$, т. е. вместе с y содержит ty при $t \in (0, 1)$. Доказательство следует из оценки

$$\left\| \sum_{k=i}^{m} A_{k/p}(ty) \right\| \leqslant \sum_{k=i}^{m} t^{\frac{k}{p}} \| A_{k/p}(y) \| \leqslant C(y) \frac{t^{\frac{i}{p}} - t^{\frac{m+1}{p}}}{1 - t^{1/p}} \to 0$$

при $i \to \infty$, $m \to \infty$.

Следующая лемма устанавливает единственность разложения в ряд по однородным операторам.

Лемма 24.2. *Пусть* $\sum_{k=1}^{+\infty} A_{k/p}(y) \equiv 0$ *для всех* y *из области сходимости этого ряда* D. *Тогда для всех* $y \in D$

$$A_{k/p}(y) \equiv 0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Фиксируем $y \in D$. Для любого $t \in (0, 1)$ имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} A_{k/p}(ty) \equiv 0.$$

Пусть f — произвольный функционал из E_2^*. Имеем

$$0 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} A_{k/p}(ty), f \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (A_{k/p}(y), f) t^{\frac{k}{p}} .$$

Положив $t^{1/p} = \tau$, из единственности разложения в обычный степенной ряд получим

$$(A_{k/p}(y), f) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, y \in D.$$

В силу произвольности $f \in E_2^*$ имеем

$$A_{k/p}(y) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, y \in D.$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь к разысканию малых решений уравнения (24.15). Для этой цели мы воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Предположим, что $L_{20} = (F_{02}\,\varphi^2, \psi) \neq 0$. Как и при доказательстве теоремы 24.2, получим, что уравнение разветвления (23.23) имеет ровно два малых решения (достаточно рассмотреть это уравнение на каждом луче $y = ty_1$). Пусть сначала параметр y лежит в многообразии, задаваемом неравенством

$$L_{01}(h) \equiv (F_{01}h, \psi) \neq 0. \tag{24.17}$$

Будем искать малые решения уравнения (24.15) в виде ряда по однородным операторам

$$x(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_{k/2}(y). \tag{24.18}$$

После подстановки (24.18) в (24.15), приравнивая на основании леммы 24.2 однородные операторы одинаковых порядков, получим рекуррентную систему для определения операторов $x_{k/2}(y)$:

$$\left.\begin{aligned} &B\,x_{1/2}(y) = 0,\\ &B\,x_1(y) = F_{01}y + F_{20}x_{1/2}^2(y),\\ &B\,x_{k/2}(y) = 2F_{20}x_{1/2}(y)\,x_{(k-1)/2}(y) + R_{k/2}(y, x_{1/2}(y), x_{(k-2)/2}(y)),\end{aligned}\right\} \tag{24.19}$$

где $R_{k/2}$ — однородные операторы порядка $k/2$.

Из первого уравнения системы (24.19) находим

$$x_{1/2}(y) = c_{1/2}(y)\varphi,$$

где $c_{1/2}(y)$ — неизвестный пока однородный функционал порядка $1/2$. Подставив найденное значение $x_{1/2}(y)$ в правую часть второго уравнения системы (24.19), запишем условие разрешимости этого уравнения:

$$L_{01}(y) + L_{20}c_{1/2}^2(y) = 0.$$

Это уравнение имеет двузначное решение вида

$$c_{1/2}(y) = \sqrt{-L_{20}^{-1}L_{01}(y)}\,.$$

Фиксируя одну из ветвей этой функции, из второго уравнения системы (24.19) найдем

$$x_1(y) = \Gamma\{F_{01}y + c_{1/2}^2(y)F_{20}\varphi^2\} + c_1(y)\varphi,$$

где $c_1(y)$ — однородный функционал порядка 1, также подлежащий определению, $c_1(y)$ мы находим по $c_{1/2}(y)$ однозначно из условия разрешимости третьего уравнения системы (24.19) и т. д. Методом математической индукции устанавливается, что этим путем мы построим два решения уравнения (24.15) вида (24.18).

Теперь пусть y принадлежит многообразию

$$\left.\begin{aligned} &L_{01}(y) = 0,\\ &L_{02}(y) \equiv (F_{02}y^2 + 2F_{11}y\,(\Gamma F_{01}y) +\\ &\qquad\qquad + F_{20}(\Gamma F_{01}y)^2,\ \psi) \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{24.20}$$

Малые решения уравнения (24.15) будем искать в виде следующего ряда:

$$x(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k(y). \tag{24.21}$$

Подстановка (24.21) в (24.15) приводит к системе

$$\left.\begin{aligned} &Bx_1(y) = F_{01}y,\\ &Bx_2(y) = F_{02}y^2 + 2F_{11}yx_1(y) + F_{20}x_1^2(y),\\ &Bx_k(y) = 2F_{11}yx_{k-1}(y) + 2F_{02}x_1(y)\,x_{k-1}(y) +\\ &\qquad\qquad + R_k(y, x_1(y), \ldots, x_{k-1}(y)),\\ &\qquad\qquad k = 3, 4, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{24.22}$$

Из первого уравнения этой системы находим

$$x_1(y) = \Gamma F_{01}y + c_1(y)\,\varphi,$$

где $c_1(y)$ — пока неизвестный однородный функционал первого порядка по y. Правая часть второго уравнения системы (24.22) после подстановки в нее найденного значения

$x_1(y)$ принимает вид

$$F_{02}y^2 + 2c_1(y)F_{11}y\varphi + c_1^2(y)F_{20}\varphi^2,$$

и условие разрешимости этого уравнения можно записать (используя коэффициенты уравнения(23.23)) так:

$$L_{20}c_1^2(y) + L_{11}(y)\,c_1(y) + L_{02}(y) = 0, \tag{24.23}$$

где

$$L_{11}(y) = 2\,(F_{11}y\varphi + F_{20}\varphi\,(\Gamma F_{01}\ y),\ \psi).$$

Потребуем, чтобы y принадлежало пересечению многообразия (24.20) и многообразия

$$L_{11}^2(y) - 4L_{20}L_{02}(y) \neq 0,$$

и пусть это пересечение не пусто. Тогда уравнение (24.23) имеет двузначное решение вида

$$c_1(y) = [-L_{11}(y) + \sqrt{L_{11}^2(y) - 4L_{20}L_{02}(y)}\,]\,(2L_{02})^{-1}.$$

Тем самым определены две ветви $c_1(y)$. По каждой из них, как можно показать методом математической индукции, однозначно определяются $x_2(y)$, ... Заметим, что сходимость полученных рядов (24.18) и (24.21) следует из метода диаграммы Ньютона, для чего достаточно рассмотреть уравнение (24.15) на каждом луче $y = ty_1$.

Этими простыми примерами мы и ограничимся. Подобные результаты имеются в работах В. А. Треногина [2—4] (где не обязательно $n = 1$), которым мы и следовали в изложении настоящего пункта. Для случая числового параметра метод неопределенных коэффициентов подробно изучен К. Т. Ахмедовым [1—3].

24.8. Случай двух числовых параметров. В ряде прикладных задач представляет значительный интерес рассмотрение уравнения (24.15), когда E_1, E_2, E и все операторы, входящие в (24.15), вещественны, причем E есть прямая сумма двух числовых осей. Иначе говоря, $y = (\varepsilon, \lambda)$, где ε и λ — малые вещественные параметры. Хотя, конечно, и в этом случае можно воспользоваться рассуждениями предыдущего пункта, рассматриваемая задача имеет также и свою специфику.

То обстоятельство, что y — двумерный вектор, позволяет получить более точную информацию о поведении решений уравнения (24.15) $x = x(\varepsilon, \lambda)$ как функций двух переменных, не ограничиваясь изучением их поведения на прямолинейных лучах, исходящих из точки (0, 0). С другой стороны, задача усложняется тем, что ищутся лишь вещественные решения, которые, естественно, оказываются определенными не во всей окрестности точки (0, 0).

Уравнение (24.15) в рассматриваемом случае можно записать так:

$$Bx = F_{010}\varepsilon + F_{001}\lambda + \sum_{i+j+k\geqslant 2} F_{ijk}x^i\varepsilon^j\lambda^k. \tag{24.24}$$

Предполагая, как и всюду в этом параграфе, что B — фредгольмовский оператор с числом нулей $n = 1$, мы можем задачу об отыскании малых уравнений (24.24) заменить эквивалентной ей задачей об отыскании малых решений уравнения разветвления (23.23), которое теперь принимает вид

$$L(\xi, \varepsilon, \lambda) \equiv \sum_{i=2}^{+\infty} L_{i00}\xi^i + \sum_{i=0}^{+\infty} \xi^i \sum_{j+k\geqslant 1} L_{ijk}\varepsilon^j\lambda^k = 0. \tag{24.25}$$

Ограничимся случаем, когда не все коэффициенты L_{ijk}— нули. В частности, если не все L_{i00}— нули и L_{k00}— первый из них отличный от нуля, то (в комплексном случае) задача имеет k малых решений.

Пусть ξ_0 — решение уравнения (24.25) в точке $(\varepsilon_0, \lambda_0)$. Это решение, согласно теореме о неявных функциях, локально продолжаемо по (ε, λ) единственным образом, если

$$\frac{\partial L(\xi_0, \varepsilon_0, \lambda_0)}{\partial \xi} \neq 0.$$

Таким образом, для того чтобы точка (ε, λ) была точкой ветвления решения ξ уравнения (24.25), необходимо, чтобы

$$\frac{\partial L(\xi, \varepsilon, \lambda)}{\partial \xi} = 0. \tag{24.26}$$

В результате исключения ξ из уравнений (24.25) — (24.26) мы получим в окрестности точки (0, 0) плоскости (ε, λ) дискриминантную кривую, которая может состоять из нескольких ветвей, проходящих через начало координат (0, 0).

Назовем кривой разветвления малых решений уравнения (24.25) совокупность тех ветвей дискриминантной кривой, при переходе через которые действительно меняется число малых решений уравнения (24.25).

Из этого определения вытекает, что окрестность точки (0,0) разбивается кривой разветвления на несколько частей, в каждой из которых число малых решений уравнения разветвления (24.25) постоянно.

Для нахождения дискриминантной кривой можно поступить следующим образом: с помощью подготовительной теоремы Вейерштрасса (см. теорему 3.3) задачу отыскания малых решений уравнения (24.25) можно заменить эквивалентной задачей разыскания малых решений уравнения

$$P(\xi, \varepsilon, \lambda) = 0,$$

где $P(\xi, \varepsilon, \lambda)$ — отмеченный многочлен по ξ некоторой степени k, причем $P_\xi(\xi, 0, 0) \not\equiv 0$ в некоторой окрестности точки $\xi = 0$. Составим результант (см. п. 4.2) $R(\varepsilon, \lambda)$ многочленов $P(\xi, \varepsilon, \lambda)$ и $P_\xi(\xi, \varepsilon, \lambda)$. Уравнение $R(\varepsilon, \lambda) = 0$ и есть уравнение дискриминантной кривой [1]).

Приведенными здесь соображениями мы воспользуемся в дальнейшем (гл. VIII, примеры 3 и 4) при исследовании некоторых прикладных задач. Точно так же можно рассмотреть и случай, когда $y = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ есть n-мерный вектор. Вместо кривой разветвления здесь естественным образом возникают поверхности разветвления различных размерностей (меньших n), при переходе через которые либо рождается четное число новых решений, либо некоторые пары решений исчезают, превращаясь в комплексные.

§ 25. Многомерный случай ветвления

В данном параграфе мы исследуем задачу о ветвлении малых решений уравнения

$$Bx = F_{01}\lambda + \sum_{i+k \geqslant 2} C_{k+i}^{k} F_{ik} x^i \lambda^k \tag{25.1}$$

---

[1]) Если P содержит кратные множители (см. п. 2.5), то мы их отделяем и повторяем процесс для каждого из них.

в предположении, что выполнены следующие условия: λ — числовой параметр, F_{ik} — i-линейные операторы из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, F_{01} — элемент из E_2, B — фредгольмовский оператор, у которого число нулей $n \geqslant 2$. При этом мы будем придерживаться работ П. Г. Айзенгендлера [1, 3], П. Г. Айзенгендлера и М. М. Вайнберга [1]. Сначала мы рассмотрим случай $n = 2$, а затем общий случай.

25.1. Переход к эквивалентной системе. Согласно лемме 12.1, утверждения которой справедливы и в абстрактном случае (см. теорему 23.1), для малых решений уравнение (25.1) эквивалентно системе

$$x = a_{0\ldots 01}\lambda + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i + \sum_{k_1+\ldots+k_n+k\geqslant 2} a_{k_1\ldots k_n k}\xi_1^{k_1}\ldots\xi_n^{k_n}\lambda^k, \tag{25.2}$$

$$\Phi_i(\xi_1,\ldots,\xi_n,\lambda) \equiv \sum_{k_1+\ldots+k_n\geqslant 2} L^{(i)}_{k_1\ldots k_n 0}\xi_1^{k_1}\ldots\xi_n^{k_n} + \\ + \sum_{k_1+\ldots+k_n\geqslant 0} \xi_1^{k_1}\ldots\xi_n^{k_n} \sum_{k\geqslant 1} L^{(i)}_{k_1,\ldots k_n k}\lambda^k = 0, \tag{25.3}$$

где $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ — базис подпространства нулей $N(B)$ оператора B. Система (25.2) — (25.3) получается из предыдущего следующим образом. Из (25.1), учитывая (23.18) и (21.22), мы после применения оператора $\Gamma = \tilde{B}^{-1}$ находим, что

$$x = \Gamma F_{01}\lambda + \sum_{i=1}^{n} \xi_i\varphi_i + \sum_{k+s\geqslant 2} C^k_{k+s}\Gamma F_{ks}x^k\lambda^s. \tag{25.4}$$

При достаточно малых $|\lambda|$, $|\xi_i|$ и $\|x\|$ правая часть есть оператор сжатия (относительно x), а потому уравнение (25.4) имеет единственное малое решение. Это решение мы ищем в виде ряда (25.2), коэффициенты которого определяются путем подстановки (25.2) в (25.4) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях (т. е.

методом неопределенных коэффициентов). Например, при $n=2$ мы находим

$$\left.\begin{aligned}
&a_{001} = \Gamma F_{01},\\
&a_{002} = \Gamma F_{02} + 2\Gamma F_{11} a_{001} + \Gamma F_{20} a_{001}^2,\\
&a_{100} = \varphi_1,\\
&a_{200} = \Gamma F_{20} a_{100}^2,\\
&a_{010} = \varphi_2,\\
&a_{020} = \Gamma F_{20} a_{010}^2,\\
&a_{110} = 2\Gamma F_{20} a_{100} a_{010},\\
&a_{101} = 2\Gamma (F_{11} a_{100} + F_{20} a_{100} a_{001}),\\
&a_{011} = 2\Gamma (F_{11} a_{010} + F_{20} a_{010} a_{001}),\\
&a_{111} = 2\Gamma F_{11} a_{110} + 2\Gamma F_{20} (a_{001} a_{110} + a_{100} a_{011} +\\
&\quad + a_{010} a_{101}) + 6\Gamma F_{21} a_{100} a_{010} + 6\Gamma F_{30} a_{001} a_{100} a_{010},\\
&a_{k_1,k_2,k} = P_{k_1,k_2,k} (a_{001}, a_{100}, a_{010}, a_{110}, a_{101}, a_{011}, \ldots\\
&\qquad\qquad \ldots, a_{k_1,k_2,k-1}, a_{k_1,k_2-1,k}, a_{k_1-1,k_2,k}.)
\end{aligned}\right\}\qquad(25.5)$$

Сходимость ряда (25.2) следует из принципа сжатых отображений (см. теорему 7.3) или непосредственно из теоремы о неявных операторах 21.2.

Подставляя теперь (25.2) в (23.19) и учитывая формулы (21.24) и (21.7), получим (25.3), где

$$L^{(i)}_{k_1\ldots k_n k} = (\tilde{B}\, a_{k_1\ldots k_n k}, \psi_i). \qquad (25.6)$$

При этом функции Φ_i являются аналитическими в начале координат и

$$\operatorname{ord}\Phi_i\, (\xi_1, \ldots, \xi_n, 0) \geqslant 2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

25.2. Коэффициенты двумерного уравнения разветвления. При $n=2$ мы из (25.5) и (25.6) находим

$$\left.\begin{aligned}
&L^{(i)}_{001} = (F_{01}, \psi_i),\\
&L^{(i)}_{002} = (F_{02} + 2F_{11}(\Gamma F_{01}) + F_{20}(\Gamma F_{01})^2, \psi_i),\\
&L^{(i)}_{101} = 2\,(F_{20}(\Gamma F_{01})\,\varphi_1 + F_{11}\varphi_1, \psi_i),\\
&L^{(i)}_{011} = 2\,(F_{20}(\Gamma F_{01})\,\varphi_2 + F_{11}\varphi_2, \psi_i),\\
&L^{(i)}_{110} = 2\,(F_{20}\,\varphi_1\varphi_2, \psi_i),
\end{aligned}\right\}\qquad(25.7)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&L_{200}^{(i)} = (F_{20}\varphi_1^2, \psi_i),\\
&L_{020}^{(i)} = (F_{20}\varphi_2^2, \psi_i),\\
&L_{003}^{(i)} = (F_{03} + 3F_{12}(\Gamma F_{01}) + 3F_{21}(\Gamma F_{01})^2 +\\
&+ F_{30}(\Gamma F_{01})^3 + (2F_{11} + 2F_{20}(\Gamma F_{01}))(\Gamma F_{02} +\\
&\qquad\qquad + 2\Gamma F_{11}(\Gamma F_{01}) + \Gamma F_{20}(\Gamma F_{01})^2), \psi_i),\\
&L_{102}^{(i)} = (3F_{30}(\Gamma F_{01})^2\varphi_1 + 6F_{21}\varphi_1(\Gamma F_{01}) +\\
&+ 2F_{20}(\varphi_1 a_{002} + (\Gamma F_{01})a_{101}) + 3F_{12}\varphi_1 +\\
&\qquad\qquad\qquad + 2F_{11}a_{101}, \psi_i),\\
&L_{012}^{(i)} = (3F_{30}(\Gamma F_{01})^2\varphi_2 +\\
&+ 6F_{21}\varphi_2(\Gamma F_{01}) + 2F_{20}(\varphi_2 a_{002} + (\Gamma F_{01})a_{011}) +\\
&\qquad\qquad + 3F_{12}\varphi_2 + 2F_{11}a_{011}, \psi_i),\\
&L_{201}^{(i)} = (2F_{20}\varphi_1 a_{101} + 2F_{20}a_{200}(\Gamma F_{01}) +\\
&\qquad + 3F_{30}(\Gamma F_{01})\varphi_1^2 + 3F_{21}\varphi_1^2 + 2F_{11}a_{200}, \psi_i),\\
&L_{021}^{(i)} = (2F_{20}\varphi_2 a_{011} + 2F_{20}a_{020}(\Gamma F_{01}) +\\
&+ 3F_{30}(\Gamma F_{01})\varphi_2^2 + 3F_{21}\varphi_2^2 + 2F_{11}a_{020}, \psi_i),\\
&L_{111}^{(i)} = (2F_{20}((\Gamma F_{01})a_{110} + \varphi_2 a_{101} + \varphi_1 a_{011}) +\\
&\quad + 2F_{11}a_{110} + 6F_{21}\varphi_1\varphi_2 + 6F_{30}(\Gamma F_{01})\varphi_1\varphi_2, \psi_i),\\
&L_{210}^{(i)} = (2F_{20}(\varphi_1 a_{110} + \varphi_2 a_{200}) + 3F_{30}\varphi_1^2\varphi_2, \psi_i),\\
&L_{120}^{(i)} = (2F_{20}(\varphi_2 a_{110} + \varphi_1 a_{020}) + 3F_{30}\varphi_1\varphi_2^2, \psi_i),\\
&L_{300}^{(i)} = (2F_{20}\varphi_1 a_{200} + F_{30}\varphi_1^3, \psi_i),\\
&L_{030}^{(i)} = (2F_{20}\varphi_2 a_{020} + F_{30}\varphi_2^3, \psi_i)\\
&\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2).
\end{aligned}\right\} \tag{25.7}
$$

25.3. Двумерный случай ветвления. Рассмотрим уравнение (25.1) при $n = 2$. Тогда система (25.3) принимает вид

$$\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{25.8}$$

Данная система была изучена в § 5 (см. (5.1)), в котором было показано, что задача о малых решениях системы (25.8) сводится к исследованию уравнения (см. (5.4))

$$\widetilde{R}(z_2, \lambda) = 0.$$

Используя теперь теорему 5.1, мы приходим к следующему предложению.

Теорема 25.1. *Имеют место утверждения:*

I. *Если* $\widetilde{R}\,(0,\,0) \neq 0$, *то уравнение* (25.1) *не имеет малых решений.*

II. *Если* $\widetilde{R}\,(z_2,\,\lambda) \not\equiv 0$ *и* $\widetilde{R}\,(0,\,0) = 0$, *то уравнение* (25.1) *имеет конечное число малых решений, представимых в виде сходящихся рядов по целым или дробным степеням* λ.

III. *Если* $\widetilde{R}\,(z_2,\,\lambda) \equiv 0$ *или все коэффициенты системы* (25.8) *нули, то уравнение* (25.1) *имеет семейство решений, соответственно зависящее от одного или двух параметров.*

В последнем случае возможны и формальные решения в виде расходящихся рядов. Из II и III вытекает, что условие $\widetilde{R}\,(z_2,\,\lambda) \not\equiv 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы число малых решений уравнения (25.1) было конечным.

Отметим, что изложенный метод позволяет выделить и все вещественные решения, как это было показано в примере 13.2 (см. частный случай этого примера, для которого были получены этим методом два вещественных решения (13.9)).

25.4 Общий случай. Здесь мы рассмотрим уравнение (25.1) при $n \geqslant 2$. Так как для малых решений это уравнение эквивалентно системе (25.2) — (25.3), то задача отыскания всех малых решений уравнения (25.1) сводится к задаче отыскания всех малых решений уравнения разветвления (25.3), которая была изучена в § 6.

Так же, как в § 6, построим для уравнения разветвления (25.3) многочлены

$$d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_k \quad (k \leqslant n),$$

каждый из которых либо является отмеченным многочленом, либо ассоциирован с единицей (~ 1), и рассмотрим квазирегулярный и вырожденный случаи (см. определения 6.1 и 6.2). Теоремы 6.1 и 6.2. приводят к следующему предложению.

Теорема 25.2. *Имеют место утверждения:*

1. *Если* $d_i \sim 1$ $(i = 1,\,2,\,\ldots,\,n)$, *то уравнение* (25.1) *не имеет малых решений.*

2. *Если в квазирегулярном случае* d_n *не ассоциирован с* 1, *то уравнение* (25.1) *имеет конечное (отличное от нуля) число решений и каждое из них представимо в виде сходящегося ряда по целым или дробным степеням* λ.

3. *Если для уравнения разветвления* (25.3) *имеет место вырожденный случай или все функции* $\Phi_i \equiv 0$, *то уравнение* (25.1) *имеет бесчисленное множество решений.*

Отметим, что в условиях утверждения 3 уравнение (25.1) имеет бесчисленное множество малых решений, представимых в виде сходящихся рядов по целым или дробным степеням λ, бесчисленное множество решений, равных нулю при $\lambda = 0$ и представимых в виде расходящихся рядов по целым или дробным степеням параметра λ, и бесчисленное множество малых решений, не представимых в виде рядов.

Отметим еще, что если в условиях утверждения 2 получено формальное решение уравнения (25.1) в виде ряда по целым иди дробным степеням λ, то этот ряд необходимо является сходящимся в некоторой окрестности (в вещественном случае, быть может, в некоторой полуокрестности) точки $\lambda = 0$. Это — полезное для приложений замечание, так как в прикладных задачах обычно решение уравнения (25.1) ищется в виде формального ряда, а для доказательства его сходимости строятся мажоранты.

25.5. О ветвлении изолированного решения. Так же, как в п. 12.6, мы обозначим через $F(x, \lambda)$ правую часть уравнения (25.1). Полагая затем $\lambda = 0$, мы получим

$$Bx = F(x, 0). \tag{25.9}$$

Данное уравнение имеет нулевое решение, ибо $F(0, 0) = 0$. В п. 12.6 нами был изучен вопрос об изолированности нулевого решения такого уравнения (см. (12.13)) как в регулярном случае, так и в случае ветвления (одномерного и многомерного). Этот вопрос также рассматривался в п. 23.1. Следует отметить, что рассуждения в п. 12.6 носили общий характер, так что установленные там предложения сохраняются и для рассматриваемых здесь (в банаховых пространствах) уравнений (25.1) и (25.9). В частности, имеет место предложение о том (см. лемму 12.3), что нулевое решение уравнения (25.9) является изолированным тогда и только тогда, когда нулевое решение системы (12.14) изолировано. Условия изолированности нулевого решения системы (12.14) были установлены в п. 6.5 (см. теорему 6.3). Сохраняется и следующее предложение (см. теорему 12.9).

Теорема 25.3. *Если нулевое решение уравнения* (25.9) *изолировано, то уравнение* (25.1) *имеет конечное число малых решений и каждое из них представимо в виде сходящегося ряда по целым или дробным степеням параметра* λ.

Данная теорема показывает, что для квазирегулярности уравнения (25.1) достаточно, чтобы нулевое решение уравнения (25.9) было изолированным. Обратное утверждение, как показывают примеры 12.2 и 12.3, не всегда имеет место.

25.6. О точках бифуркации [1]. В п. 12.3 было введено понятие о точках бифуркации уравнения (12.11) (см. также п. 23.1) и установлены различные предложения о точках бифуркации уравнения (12.1) в одномерном случае ветвления. Эти исследования были дополнены в п. 12.7, в котором изучалась задача о точках бифуркации уравнения (12.1) в многомерном случае ветвления. Оказывается, что все предложения, установленные в пп. 12.3 и 12.7 для уравнения (12.1), сохраняются и для уравнения (25.1). Действительно, при доказательстве предложений, содержащихся в пп. 12.3 и 12.7, мы исходили из того, что между множеством всех малых решений уравнения (12.1) и множеством всех малых решений выведенного для него уравнения разветвления существует взаимно однозначное соответствие. Исходя из этого соответствия, мы свели задачу о точках бифуркации уравнения (12.1) к такой же задаче для соответствующего ему уравнения разветвления (12.4) или (12.6). Таким образом, были установлены различные предложения о точках бифуркации уравнения (12.1). Так как согласно теореме 23.1 существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех малых решений уравнения (25.1) и множеством всех малых решений уравнения разветвления (25.3), то и в данном случае задача о точках бифуркации для уравнения (25.1) сводится к такой же задаче для уравнения (25.3). Вот почему все предложения, установленные в пп. 12.3 и 12.7, распространяются на рассматриваемые в данном параграфе уравнения в банаховых пространствах. Приведем одно предложение (аналог теоремы 12.10), в котором мы используем

[1]) См. М. М. Вайнберг [3].

понятие бифуркационного уравнения (определение 12.1) и обозначения d_i^* (см. п. 12.7).

Теорема 25.4 *Пусть уравнение* (25.3) *является бифуркационным. Тогда, если отмеченный многочлен d_i^* не ассоциирован с* 1 *при некотором i, то уравнение* (25.1) *имеет точку бифуркации $\lambda = 0$. При этом, если $d_i^* \sim 1$ для всех $i < n$ и d_n^* не ассоциирован с единицей, то точке бифуркации $\lambda = 0$ заведомо соответствует конечное число*[1] q ($q \geqslant 1$) *нетривиальных малых решений уравнения* (25.1) *и каждое из них представимо в виде сходящегося ряда по целым или дробным степеням λ.*

Отметим, что примером бифуркационного уравнения может служить система

$$\Phi_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \xi_1^{k_i}(\xi_1^2 + \xi_1\xi_2 \ldots \xi_n \lambda + \lambda^2) \times \\ \times (1 + \lambda^{m_i} \varphi_i(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

для которой k_i и m_i — натуральные числа φ_i — аналитические функции в начале координат такие, что $\varphi_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

Для данной системы имеем

$$\Phi_i(0, 0, \ldots, 0, \lambda) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\Phi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n, \lambda) \equiv \xi_1^{k_i} \Phi_i^*(\xi_1, \ldots, \xi_n, \lambda),$$

где

$$\Phi_i^* = (\xi_1^2 + \xi_1\xi_2, \ldots, \xi_n\lambda + \lambda^2)(1 + \lambda^{m_i}\varphi_i(\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)),$$

так что

$$\Phi_i^*(0, 0, \ldots, 0, \lambda) \not\equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и отмеченный многочлен

$$d_1^* = \xi_1^2 + \xi_1\xi_2 \ldots \xi_n\lambda + \lambda^2$$

не ассоциирован с единицей.

В заключение отметим, что мы не касались здесь истории вопроса. Она освещена в работе М. М. Вайнберга и П. Г. Айзенгендлера [1].

---

[1]) См. также примечание к теореме 12.10.

ГЛАВА VIII

Ветвление решений нелинейных уравнений в сингулярном случае

§ 26. Нетеровские операторы

26.1. Нетеровские операторы [1]. Обозначим, как и в § 21, через $N(B)$ и $N^*(B)$ подпространство нулей нормально разрешимого оператора $B \in \{E_1 \to E_2\}$ и его дефектное подпространство. Теперь, однако, мы не предполагаем, что размерности этих подпространств равны. Нормально разрешимый оператор $B \in \{E_1 \to E_2\}$ называется нетеровским или, короче, H-оператором, если число нулей оператора B и его дефектное число конечны, т. е.

$$n = \dim N(B) < +\infty, \quad m = \dim N^*(B) < +\infty.$$

Число $\chi = n - m$ называется индексом нетеровского оператора, а упорядоченная пара чисел (n, m) — d-характеристикой. Фредгольмовские операторы можно охарактеризовать как нетеровские операторы нулевого индекса.

Для нетеровских операторов могут представиться три [2]) случая: 1) $n > 0$, $m = 0$; 2) $n = 0$, $m > 0$; 3) $n > 0$, $m > 0$. Если $n > 0$, то через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ обозначим базис в $N(B)$. Если же $m > 0$, то через $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ обозначим базис в $N^*(B)$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$Bx = 0 \tag{26.1}$$

и соответствующее ему неоднородное уравнение

$$Bx = h. \tag{26.2}$$

В случае $n > 0$, $m = 0$ общее решение однородного уравнения (26.1) имеет вид

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i, \tag{26.3}$$

---

[1]) См., например, И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [1].
[2]) Случай $n = m = 0$ рассмотрен нами в § 22.

где c_i — произвольные числа. В этом же случае неоднородное уравнение (26.2) разрешимо при любой правой части $h \in E_2$ и общее решение его равно

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i, \tag{26.4}$$

где x_0 — какое-либо частное решение уравнения (26.2), c_i — произвольные числа.

В случае $n = 0$, $m > 0$ однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение $x = 0$. Для разрешимости неоднородного уравнения необходимо и достаточно, чтобы

$$(h, \psi_i) = 0, \; i = 1, \ldots, m, \tag{26.5}$$

и если эти условия выполнены, то общее решение имеет вид (26.4).

Наконец, в случае $n > 0$, $m > 0$ общее решение однородного уравнения дается формулой (26.3). Неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда выполнены условия (26.5), и в случае их выполнения общее решение неоднородного уравнения дается формулой (26.4).

26.2. Разложение пространств в прямые суммы подпространств. Сужение оператора. Пусть B есть H-оператор. Если $n > 0$, то, поступая так же, как в п. 21.2, придем к разложению (21.9), где $E_1^n = PE_1$, а $E_1^{\infty-n} = (I - P) E_1$ и проектор P определяется формулой (21.8). Точно так же, если $m > 0$ и $\psi_1, \ldots, \psi_m$ — базис в $N^*(B)$, а $z_1, \ldots, z_m$ — биортогональная к этому базису система из E_2, т. е.

$$(z_i, \psi_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, m, \tag{26.6}$$

то с помощью проектора

$$Qh = \sum_{k=1}^{m} (h, \psi_k) z_k, \qquad h \in E_2, \tag{26.7}$$

мы приходим к разложению

$$E_2 = E_{2,m} \dotplus E_{2,\infty-m}. \tag{26.8}$$

Здесь $E_{2,m}$ — подпространство, натянутое на элементы $z_1, \ldots, z_m$, а $E_{2,\infty-m}$ совпадает с областью значений оператора

B. Из этих рассуждений, в частности, следует, что область значений H-оператора всегда замкнута. Как показал Хаусдорф [1], замкнутость области значений линейного ограниченного оператора эквивалентна его нормальной разрешимости.

Как и в п. 21.3, рассмотрим некоторое сужение оператора B. Однако здесь имеется больше разнообразных случаев. Введем оператор $\hat{B} \in \{E_1^{\infty-n} \to E_{2,\infty-m}\}$, совпадающий с B на $E_1^{\infty-n}$. Условимся, что при $n=0$ $E_1^{\infty-n} \equiv E_1$, а при $m=0$ $E_{2,\infty-m} \equiv E_2$.

Оператор $\hat{B}$ отображает $E_1^{\infty-n}$ на $E_{2,\infty-m}$ взаимно однозначно и, согласно теореме Банаха, имеет ограниченный обратный оператор $\hat{B}^{-1} \in \{E_{2,\infty-m} \to E_1^{\infty-n}\}$.

26.3. Теорема Аткинсона. Связь с сопряженным оператором. Читатель, интересующийся лишь теорией ветвления, этот пункт может пропустить. Результаты пункта приведены нами лишь для полноты соответствующей линейной теории.

В рассматриваемом случае лемма Шмидта, естественно, неверна, однако в ряде вопросов ее может заменить следующее предложение.

Теорема 26.1. (Ф. Аткинсон [1]). *Для того чтобы нормально разрешимый оператор B был H-оператором с d-характеристикой (n, m), необходимо и достаточно, чтобы существовали ограниченный оператор $U \in \{R(B) \to E_1\}$ ($R(B)$ — область значений оператора B — подпространство в E_2)*[1]*, n-мерный проектор $K_1 \in \{E_1 \to E_1\}$ и m-мерный проектор $K_2 \in \{E_2 \to E_2\}$ такие, что*

$$UB = I - K_1, \quad BU = I - K_2. \tag{26.9}$$

Доказательство необходимости. Пусть B есть H-оператор с d-характеристикой (n, m). Покажем, что можно принять

$$U = \check{B}^{-1},$$

$$K_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, \\ P & \text{при } n > 0, \end{cases} \qquad K_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } m = 0, \\ Q & \text{при } m > 0, \end{cases}$$

[1]) Оператор U называется регуляризатором оператора B.

где P и Q — проекторы, определенные формулами (21.8) и (26.7). Действительно, при $n > 0$ вследствие очевидной формулы $BP = 0$ имеем

$$\hat{B}^{-1} By = \hat{B}^{-1}B (I - P)y + \hat{B}^{-1}BPy = \\ = \hat{B}^{-1}\hat{B} (I - P)y = (I - P)y.$$

Если же $n = 0$, то

$$\hat{B}^{-1}By = y.$$

Аналогично при $m > 0$, учитывая, что $QB = 0$, имеем

$$B\hat{B}^{-1}u = (I - Q) B\hat{B}^{-1}u + QB\hat{B}^{-1}u = (I - Q)u,$$

а при $m = 0$

$$B\hat{B}^{-1}u = u.$$

Необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Пусть теперь существуют оператор U и проекторы K_1 и K_2 такие, что выполнены условия (26.9). Рассмотрим уравнение $By = 0$. Применяя к нему справа оператор U, получим $y = K_1y$. Если K_1 нульмерен, то $y = 0$.

Пусть K_1 — n-мерный проектор; тогда легко показать, что найдутся система линейно независимых элементов $\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_n \in E_1$ и система функционалов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in E_2^*$, биортогональные друг к другу, такие, что

$$K_1 y = \sum_{i=1}^{n} (y, \gamma_i) \varphi_i.$$

В этом случае уравнение $By = 0$ имеет решение $y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\varphi_i$, где ξ_i — произвольные числа и $\dim N(B) = n$.

Аналогично рассмотрим неоднородное уравнение $By = h$ и положим $y = Uu$. Согласно второй формуле (26.9) имеем

$$u - K_2u = h. \tag{26.10}$$

Если K_2 нульмерен, то $u = h$ и $y = Uh$, т. е. в этом случае неоднородное уравнение разрешимо при любых

$h \in E_2$. Пусть K_2 m-мерный проектор в E_2. Тогда найдутся системы m линейно независимых элементов $z_1, \ldots, z_m \in E_2$ и биортогональная к ней система функционалов $\psi_1, \ldots, \psi_m \in E_2^*$ такие, что

$$K_2 = \sum_{j=1}^{m} (\cdot, \psi_j)\, z_j.$$

Из (26.10) имеем необходимое условие $K_2 h = 0$, т. е.

$$(h, \psi_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Если это условие выполнено, то найдется $u_0 \in E_2$ (см. (26.10)) такое, что $h = (I - K_2)\, u_0$ и неоднородное уравнение имеет решение $y = Uu_0$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть B есть H-оператор с d-характеристикой (n, m), тогда B^* также есть H-оператор и его d-характеристика равна (m, n). Кроме того, $N^*(B^*) = N(B)$ и $N(B^*) = N^*(B)$.

Доказательство. Ограничимся случаем, когда $n > 0$ и $m > 0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично).

Имеем (доказательство необходимости теоремы 26.1)

$$\hat{B}^{-1} B = I - \sum_{i=1}^{n} (\cdot, \gamma_i)\, \varphi_i,$$

$$B \hat{B}^{-1} = I - \sum_{j=1}^{m} (\cdot, \psi_j)\, z_j.$$

Переходя в этих равенствах к сопряженным операторам, получим

$$B^* (\hat{B}^{-1})^* = I - \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i, \cdot)\, \gamma_i,$$

$$(\hat{B}^{-1})^* B^* = I - \sum_{j=1}^{m} (z_j, \cdot)\, \psi_j.$$

Но B^* нормально разрешим (Хаусдорф [1]). Применяя к оператору $B^* \in \{E_2^* \to E_1^*\}$ теорему 26.1 (достаточность), мы видим, что за U можно принять $(\hat{B}^{-1})^*$, а за

K_1 и K_2 — соответственно проекторы

$$\sum_{j=1}^{m} (z_j, \cdot)\, \psi_j \text{ — проектор в } E_2^*$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} (\varphi_i, \cdot)\, \gamma_i \text{ — проектор в } E_1^*.$$

Поэтому B^* — H-оператор с d-характеристикой (m, n). Отсюда видно, что $\psi_1, \ldots, \psi_m$ — базис в $N(B^*)$, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — базис в $N^*(B^*)$. Следствие доказано.

26.4. О нетеровских неограниченных операторях. Пусть теперь B — замкнутый линейный нормально разрешимый оператор с областью определения $D(B)$, плотной в банаховом пространстве E_1 и со значениями в банаховом пространстве E_2. Для таких операторов, как и в случае ограниченных операторов, вводятся понятия множества нулей $N(B)$, дефектного множества $N^*(B)$, размерности которых обозначим соответственно через n и m. Неограниченный оператор B называется H-оператором, если

$$n < +\infty, \quad m < +\infty.$$

Для нетеровского оператора B $N(B)$ и $N^*(B)$ являются подпространствами в E_1 и E_2^* соответственно.

Нетрудно убедиться, что для так определенных H-операторов справедливы все результаты пп. 26.1, 26.2. Следует лишь подчеркнуть, что оператор $\hat{B}$, как и оператор B, не является, вообще говоря, ограниченным. Область определения есть $D(B) \cap E_1^{\infty-n}$ (при $n = 0$ она равна $D(B)$) и отображается оператором $\hat{B}$ взаимно однозначно на $E_{2,\infty-m}$. Оператор $\hat{B}^{-1}$, будучи определен всюду на $E_{2,\infty-m}$, является ограниченным оператором. Легко проверяется также справедливость для неограниченных H-операторов теоремы Аткинсона. В ее формулировке следует лишь первое из условий (26.9) записать в виде $\overline{UB} = I - K_1$, где черта означает замыкание (аналогично вместо $\hat{B}^{-1}B$ следует в ходе доказательства теоремы писать $\overline{\hat{B}^{-1}B}$).

При введении оператора B^* возникает, как обычно, осложнение, ибо в общем случае $D(B^*)$ не является плотной в E_2^*. Тем не менее верно равенство $N^*(B) = N(B^*)$, которое проверяется, как и во фредгольмовском случае (теорема 21.1), а также и равенство $N^*(B^*) = N(B)$. Впрочем, в теории ветвления оператор B^* можно не привлекать вовсе.

§ 27. Теоремы о ветвлении решений[1])

27.1. Постановка задачи. Мы снова вернемся к изучению уравнения (22.9) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ в окрестности точки $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$, считая выполненным условие (22.11) $F(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = 0$. С помощью замены (22.14) $\tilde{x} = \tilde{x}_0 + x$, $\tilde{y} = \tilde{y}_0 + y$ уравнение это сводится к виду (23.3)

$$\Phi(x, y) = 0, \qquad \text{где } \Phi(0, 0) = 0.$$

Предполагая, далее, что $\Phi(x, y)$ непрерывно дифференцируем в ω-окрестности точки $(0, 0)$, запишем последнее уравнение в виде (23.6):

$$Bx = R(x, y), \tag{27.1}$$

где $R(x, y)$ и B определяются формулами (23.7) и (23.5):

$$R(x, y) = -\Phi_x(0, 0)x + \Phi(x, y); \; B = -\Phi_x(0, 0). \tag{27.2}$$

Однако на этот раз предполагается, что B есть H-оператор. Рассмотрим три различных случая: 1) $n > 0$, $m = 0$; 2) $n = 0$, $m > 0$; 3) $n > 0$, $m > 0$.

27.2. Случай $n > 0$, $m = 0$.

Положим в уравнении (27.1)

$$x = u + v, \tag{27.3}$$

где $u \in E_1^{\infty - n}$, а $v \in E_1^n$, и запишем это уравнение в виде

$$\hat{B}u = R(u + v, y). \tag{27.4}$$

Мы воспользовались при этом определением оператора $\hat{B}$ и тем, что $Bv = 0$. Введем новое пространство параметров $E \dotplus E_1^n$, приняв за норму

$$\|(y, v)\| = \|y\|_E + \|v\|_{E_1}.$$

[1]) См. В. А. Треногин [3].

По теореме о неявных операторах 22.1 найдутся положительные числа ρ_1 и r_1, такие, что в шаре $Dr_1\,(0, E_1^{\infty-n})$ существует единственное решение уравнения (27.4)

$$u = u\,(v,\ y). \tag{27.5}$$

Это решение определено и непрерывно при $\|y\|_E+\|v\|_{E_1}\leqslant\rho_1$ и удовлетворяет условию

$$u\,(0,\ 0) = 0. \tag{27.6}$$

Согласно формуле (27.3) уравнение (27.1) имеет решение

$$x = u\,(v,\ y) + v.$$

Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — базис в E_1^n, то имеем $v = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\varphi_i$ и, следовательно,

$$x = u\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\varphi_i,\ y\right) + \sum_{i=1}^{n}\xi_i\varphi_i. \tag{27.7}$$

Так как мы разыскиваем малые решения $x = x\,(y)$, т. е. такие, что $x\,(0) = 0$, то положим $\xi_i = \xi_i\,(y)$, где $\xi_i\,(y)$, $i = 1, \ldots, n$,— произвольные функционалы с достаточно малыми значениями, непрерывные при $y = 0$ и удовлетворяющие условию $\xi_i\,(0) = 0$. (Точнее, фиксируем положительные числа ρ_1' и ρ_1'', $\rho_1' + \rho_1'' = \rho_1$, и пусть $\xi_i\,(y)$ определены и непрерывны при $\|y\| \leqslant \rho_1'$, $\xi_i\,(0) = 0$, а $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\,(y)\,\varphi_i\right\| \leqslant \rho_1''$.) Нами, следовательно, доказана

Т е о р е м а 27.1. *Пусть оператор* $\Phi\,(x, y)$ *непрерывен и непрерывно дифференцируем по* x *в окрестности* ω *точки* $(0, 0) \in E_1 \dot{+} E$, *значения* $\Phi\,(x, y)$ *лежат в* E_2 и $\Phi\,(0, 0) = 0$, *и пусть* $B = -\Phi_x\,(0, 0)$ *есть* H-*оператор с* d-*характеристикой* $(n, 0)$, *где* $n > 0$. *Тогда найдутся положительные числа* ρ_1', ρ_1'' *и* r_1 *такие, что в шаре* $S_{r_1+\rho_1''}\,(0, E_1)$ *уравнение* (27.1) *имеет при* $\|y\|\leqslant\rho_1'$ *решение вида* (27.7), *где* $\xi_i = \xi_i\,(y)$ — *произвольные функционалы, непрерывные при* $y = 0$, *определенные при* $\|y\|\leqslant\rho_1'$ *и такие, что* $\xi_i\,(0) = 0$ *и* $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\,(y)\,\varphi_i\right\|\leqslant\rho_1''$.

Замечание. Если оператор $\Phi(x, y)$ аналитический в ω, то решение $x(y, \xi_1(y), \ldots, \xi_n(y))$ аналитично по каждому переменному $y, \xi_1, \ldots, \xi_n$, но, понятно, может не быть аналитичной как функция y, так как $\xi_i(y)$ не обязаны быть аналитичными.

27.3. Случай $n = 0, m > 0$. Допустим, что уравнение (27.1) разрешимо. Тогда необходимо, чтобы для каждого его решения $x(y)$ выполнялись следующие условия:

$$(R(x(y), y), \psi_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{27.8}$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_m$ — базис в $N^*(B)$.

Пусть условия (27.8) выполнены, тогда оператор $\Phi(x, y)$ действует из ω в $E_{2, \infty-m}$ и уравнение (27.2), согласно теореме о неявных операторах 22.1, имеет единственное малое решение $x = x(y)$. Условия (27.8) накладывают ограничения на область определения этого решения, которое в результате может состоять лишь из точки $y = 0$.

Мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 27.2. *Пусть оператор $\Phi(x, y)$ непрерывен и непрерывно дифференцируем по x в окрестности ω точки $(0, 0) \in E_1 \dotplus E$, значения $\Phi(x, y)$ лежат в E_2 и $\Phi(0, 0) = 0$, и пусть $B = -\Phi_x(0, 0)$ есть H-оператор с d-характеристикой $(0, m)$, где $m > 0$; тогда уравнение* (27.1) *имеет единственное малое решение $x = x(y)$. Это решение определено для всех достаточно малых по норме y, для которых выполнены условия* (27.8).

Замечание. Если оператор $\Phi(x, y)$ аналитический, то решение $x(y)$ также аналитическое. Условия (22.18) теперь можно записать в виде

$$(P_k(y, x_1, y, \ldots, x_{k-1}y^{k-1}), \psi_j) = 0,$$
$$j = 1, \ldots, m, \quad k = 1, 2, \ldots$$

(см. формулы (22.19)), и мы имеем счетное множество условий.

Возможен, впрочем, случай, когда $R(x, y) \in E_{2,\infty-m}$ для всех x и y из ω. В этом случае условия (27.8) выполнены автоматически и $x = x(y)$ определено для всех достаточно малых y.

27.4. Основной случай. Уравнение разветвления. Пусть $m > 0$, $n > 0$. Полагая $x = u + v$, где $u \in E_1^{\infty-n}$, $v \in E_1^n$, и проектируя уравнение (27.1) на $E_{2,\infty-m}$ и на $E_{2,m}$, как и в п. 23.2, придем к системе

$$\hat{B}u = R(u+v,\ y),\ 0 = QR(u+v,\ y).$$

Исключая из нее u с помощью теоремы о неявных операторах 22.1, придем к уравнению (23.14) для определения v:

$$QR(u(v,\ y) + v,\ y) = 0.$$

Это и есть уравнение разветвления Ляпунова — Шмидта. В рассматриваемом случае это уравнение можно записать как систему m числовых уравнений с n числовыми неизвестными и функциональным параметром y:

$$L^{(k)}(\xi_1, \ldots, \xi_n,\ y) \equiv \left(R\left(u(\xi_1, \ldots, \xi_n, y) + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i,\ y\right), \psi_k\right) = 0,$$
$$k = 1, \ldots, m. \tag{27.9}$$

Как и в п. 23.2, убеждаемся, что

$$L^{(k)}(0, \ldots, 0, 0) = \frac{\partial L^{(k)}(0, \ldots, 0)}{\partial \xi_l} = 0,$$
$$k = 1, \ldots, m; \qquad l = 1, \ldots, n. \tag{27.10}$$

Если $\Phi(x, y)$ — аналитический оператор в ω, то функции $L^{(k)}(\xi_1, \ldots, \xi_n,\ y)$ аналитичны по своим переменным в окрестности начала координат. Если, кроме того, E — комплексная плоскость ($y \equiv \lambda$ — числовой комплексный параметр), то уравнение разветвления (27.9) с учетом формул (27.10) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i_1+\ldots+i_n \geqslant 2} L^{(k)}_{i_1 \ldots i_m 0}\, \xi_1^{i_1} \ldots \xi_n^{i_n} +$$
$$\sum_{i_1+\ldots+i_n \geqslant 0} \xi_i^{i_1} \ldots \xi_n^{i_n} \sum_{l=1}^{+\infty} L^{(k)}_{i_1 \ldots i_n l}\, \lambda^l = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$
$$\tag{27.11}$$

Для исследования этого уравнения можно воспользоваться методикой, разработанной в главах I и II.

Между малыми решениями уравнения (27.1) и малыми решениями уравнения разветвления (27.9) (при дополнительных предположениях — уравнения (27.11)) формула (27.7) устанавливает взаимно однозначное соответствие.

27.5. О ветвлении решений уравнения с неограниченным оператором. Пусть D — линейное множество, плотное в E_1, и $\Phi(x, y)$ — нелинейный оператор, определенный при

$$(x, y) \in \Sigma_{0,0} = \{x, y;\ \ x \in D_r(0, E_1) \cap D;\ \ y \in D_\rho(0, E)\}.$$

Пусть, далее, $\Phi(x, y)$ дифференцируем на $\Sigma_{0,0}$ по x в смысле Гато, причем

$$B = -\Phi_x(0, 0)$$

есть H-оператор в смысле п.27.4 с областью определения $D(B) \equiv D$. Обозначив через $\hat{B}$ сужение оператора B на $E_1^{\infty-n}$, потребуем, чтобы оператор $\Phi(x, y)$ был подчинен оператору B в следующем смысле. Операторы $\Phi(\hat{B}^{-1}u, y)$ и $\Phi_x(\hat{B}^{-1}u, y)\hat{B}^{-1}$ непрерывны по (u, y) при $u \in D_\tau(0, E_2)$, $y \in D_\rho(0, E)$, где $\tau = \|B^{-1}\|^{-1} r$.

Запишем уравнение (22.9) в виде (27.1) Можно повторить теперь все рассуждения пп.27.2—27.4. При этом следует лишь вместо теоремы о неявных операторах 22.1 воспользоваться теоремой 22.3 Не представляет труда перефразировать формулировки теорем 27.1—27.2 для рассматриваемого случая.

§ 28. Ветвление решений нелинейных сингулярных интегральных уравнений [1]).

28.1. Линейные сингулярные интегральные операторы с ядром типа Коши в пространствах Гёльдера. Приведем некоторые известные предложения (Н. И. Мусхелишвили [1], С. Г. Михлин [2], Ф. Д. Гахов [1]).

[1]) См. В. А. Треногин [6].

Пусть L — линия, лежащая в плоскости комплексной переменной и состоящая из конечного числа гладких замкнутых контуров $L_1, \ldots, L_p$ без общих точек. Введем $H_\alpha(L)$ — гёльдеровское пространство комплекснозначных функций $y(s)$, определенных на L и удовлетворяющих на L условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$. Введя норму

$$\|y(s)\| = \max_{s\in L}|y(s)| + \max_{k=1,\ldots,p}\ \sup_{s,t\in L_k} \frac{|y(s)-y(t)|}{|s-t|^\alpha},$$

превратим $H_\alpha(L)$ в банахово пространство.

Рассмотрим линейный сингулярный интегральный оператор с ядром типа Коши

$$By \equiv a(s)\,y(s) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(s,t)\,y(t)}{t-s}\,dt. \tag{28.1}$$

Здесь $s, t \in L$, $a(s) \in H_\alpha(L)$, $K(s, t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α по совокупности переменных s, $t \in L$. Хорошо известно, что оператор B является линейным ограниченным оператором из $H_\alpha(L)$ в $H_\alpha(L)$, т. е. $E_1 = E_2 = H_\alpha(L)$.

Сингулярный интегральный оператор

$$a(s)\,y(s) + \frac{K(s,s)}{\pi i}\int_L \frac{y(t)}{t-s}\,dt \tag{28.2}$$

называется характеристическим для оператора B (или характеристической частью оператора B).

Далее, оператор

$$B'\psi(s) \equiv a(s)\,\psi(s) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,s)\,\psi(t)}{t-s}\,dt \tag{28.3}$$

называется союзным к оператору B. B' также является линейным ограниченным оператором из $H_\alpha(L)$ в $H_\alpha(L)$. Оператор

$$a(s)\,y(s) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,t)\,y(t)}{t-s}\,dt,$$

очевидно, является союзным к характеристическому оператору.

Предположим, что всюду на L выполнено условие: $a(s) \pm K(s, s) \neq 0$; тогда имеют место следующие теоремы Ф. Нетера.

Теорема 28.1. *Либо уравнение $By = 0$ не имеет нетривиальных решений, либо оно имеет конечное число n линейно независимых решений.*

Теорема 28.2. *Либо неоднородное уравнение*

$$By = h(s)$$

разрешимо при любой правой части $h(s) \in H_\alpha(L)$, либо для его разрешимости необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_L \psi_i(s) h(s)\, ds = 0, \qquad i = 1, \ldots, m; \quad m < +\infty, \tag{28.4}$$

где $\psi_1(s), \ldots, \psi_m(s)$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения $B'\psi = 0$.

Из теорем 28.1 и 28.2 вытекает, что B есть нетеровский ператор (H-оператор).

Для индекса χ оператора B доказывается следующая формула:

$$\chi = n - m = \frac{1}{2\pi}\left[\arg \frac{a(s) - K(s, s)}{a(s) + K(s, s)}\right]_L,$$

где выражение $[\ \ ]_L$ означает приращение функции, заключенной в скобки, при обходе линии L в положительном направлении. Из формулы для индекса χ видно, что он зависит лишь от характеристической части оператора B. Если, в частности, $\chi = 0$, то сингулярный интегральный оператор B оказывается фредгольмовским оператором (Ф-оператором).

Отметим в заключение частный случай, когда оператор B совпадает со своим характеристическим ($K(s, t) \equiv b(s)$). В этом случае d-характеристика B имеет вид $(\chi, 0)$, если $\chi > 0$, и $(0, -\chi)$, если $\chi < 0$. Аналогичное утверждение справедливо (с заменой χ на $-\chi$) для оператора B, являющегося союзным к характеристическому

$$(K(s, t) \equiv b(t)).$$

28.2. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения с ядром типа Коши в пространствах Гёльдера. Рассмотрим теперь следующее нелинейное [1]) сингулярное интегральное уравнение с комплексным числовым параметром μ:

$$F\left(s, y(s), \mu, \int_L \frac{L(s, t, y(t), \mu)}{t-s}\, dt\right) = 0, \tag{28.5}$$

где L —линия, введенная выше, $L(s, t, y, \mu)$ и $F(s, y, \mu, z)$ — комплекснозначные функции комплексных переменных, ограничения на которые будут наложены ниже.

Пусть при значении параметра $\mu = \mu_0$ уравнение (28.5) имеет решение $y_0(s) \in H_\alpha(L)$. Предположим, что при всех $x(s) = y(s) - y_0(s) \in H_\alpha(L)$, удовлетворяющих неравенству

$$\| x(s) \|_{H_\alpha(L)} < r_1,$$

и для всех $\lambda = \mu - \mu_0$ таких, что $|\lambda| \leqslant \rho_1$, функции

$$L(s, t, y_0(t) + x(t), \mu_0 + \lambda) \text{ и } L_y(s, t, y_0(t) + x(t), \mu_0 + \lambda)$$

удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α по переменным $(s, t) \in L$. Пусть, далее, функции

$$F(s, y_0(s) + x(s), \mu_0 + \lambda, z(s)),$$
$$F_y(s, y_0(s) + x(s), \mu_0 + \lambda, z(s)),$$
$$F_z(s, y_0(s) + x(s), \mu_0 + \lambda, z, (s))$$

также удовлетворяют тому же условию Гёльдера при тех же $x(s)$ и λ и при

$$\| z(s) - z_0(s) \|_{H_\alpha(L)} \leqslant r_2,$$

где

$$z_0(s) = \int_L \frac{L(s, t, y_0(t), \mu_0)}{t-s}\, dt.$$

[1]) Нелинейные сингулярные интегральные уравнения изучались в работах А. И. Гусейнова [1, 2] и его учеников, В. К. Наталевича [1], Б. И. Гехта [1] и других авторов.

В этих предположениях имеем

$$F(s, y(s), \mu, \int\limits_L \frac{L(s, t, y(t), \mu)}{t-s}\, dt) \equiv a(s)\, x(s) +$$
$$+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(s, t)\, x(t)}{t-s}\, dt + R(s, x(s), \lambda, \int\limits_L \frac{r(s, t, x(t), \lambda)}{t-s}\, dt),$$

причем пусть функции $R(s, x, \lambda, u)$ и $r(s, t, x, \lambda)$ обладают следующими свойствами:

$$R(s, 0, 0, \int\limits_L \frac{r(s, t, 0, 0)}{t-s}\, dt) \equiv 0,$$
$$R_x(s, 0, 0, \int\limits_L \frac{r(s, t, 0, 0)}{t-s}\, dt) \equiv 0,$$
$$R_u(s, 0, 0, \int\limits_L \frac{r(s, t, 0, 0)}{t-s}\, dt)\, r_x(s, t, 0, 0) \equiv 0.$$

Пусть, кроме того, функции

$$a(s) \pm K(s, s)$$

нигде на L в нуль не обращаются. Теперь уравнение (28.5) можно записать в виде

$$Bx = R(x, \lambda), \tag{28.6}$$

где B есть H-оператор, и воспользоваться результатами § 27, в результате чего мы приходим к следующему предложению.

Теорема 29.1. *Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда*

1) *если $n = m = 0$, то уравнение* (28.6) *имеет в $H_\alpha(L)$ единственное малое решение;*

2) *если $n = 0$, $m > 0$, то уравнение* (28.6) *имеет в $H_\alpha(L)$ единственное малое решение, если только выполнено m дополнительных условий:*

$$\int\limits_L R(s, x(s), \lambda, \int\limits_L \frac{r(s, t, x(t), \lambda)}{t-s}\, dt)\, \psi_i(s)\, ds = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\psi_1(s), \ldots, \psi_m(s)$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного линейного уравнения $B'\psi = 0$ (см. (28.3));

3) *если* $n > 0$, $m = 0$, *то уравнение* (28.6) *имеет семейство малых решений вида*

$$x(s) = x(s,\ \lambda,\ \xi_1(\lambda), \ldots, \xi_n(\lambda)),$$

где $\xi_i(\lambda)$ — *произвольные непрерывные функции* ($\xi_i(0) = 0$) *с достаточно малыми значениями;*

4) *если* $n > 0$, $m > 0$, *то задача определения малых решений уравнения* (28.6) *сводится к эквивалентной задаче: задаче отыскания малых решений уравнения разветвления* (27.9) — *системы* m *числовых уравнений с* n *неизвестными и параметром* λ.

28.3. Аналитический случай. Следующие понятия обобщают на сингулярный случай соответствующие понятия, введенные А. М. Ляпуновым и Э. Шмидтом (см. главу III).

Пусть i, j, k — неотрицательные целые числа, и пусть функции $K_{ijk}(s,\ t)$ определены на L и удовлетворяют там условию Гёльдера по s, t, $a_i(s) \in H_\alpha(L)$. Интегро-степенным сингулярным членом порядка l относительно функции $x(s) \in H_\alpha(L)$ назовем выражение

$$a_i(s)\, x^i(s) \left[\int\limits_L \frac{K_{ijk}(s,t)\, x^j(t)}{t-s}\, dt \right]^k,$$

где $i + kj = l$.

Сумма конечного числа интегро-степенных сингулярных членов порядка l называется интегро-степенной сингулярной формой порядка l и обозначается через $U_l\binom{s}{x}$.

Лемма. $U_l\binom{s}{x}$ *есть степенной оператор порядка* l *в* $H_\alpha(L)$.

Доказательство следует из свойств степенной функции, если принять во внимание также следующее соображение: если $x(s) \in H_\alpha(L)$ и $y(s) \in H_\alpha(L)$, то $x(s)\, y(s) \in H_\alpha(L)$ и для любого натруального k $x^k(s) \in H_\alpha(L)$, причем справедливы неравенства

$$\| x(s)\, y(s) \|_{H_\alpha(L)} \leqslant \| x(s) \|_{H_\alpha(L)} \| y(s) \|_{H_\alpha(L)},$$

$$\| x^k(s) \|_{H_\alpha(L)} \leqslant \| x(s) \|^k_{H_\alpha(L)}.$$

. з этих неравенств и свойства сингулярного интегрального оператора (28.1) переводить функции из $H_\alpha(L)$ в функции из $H_\alpha(L)$ и следует ограниченность $U_l\binom{s}{x}$, т. е. неравенство

$$\left\| U_l\binom{s}{x}\right\|_{H_\alpha(L)} \leqslant c_l \| x(s) \|^l_{H_\alpha(L)}.$$

Положим, как обычно,

$$\| U_l \| = \sup_{s \in L} \left\| U_l\binom{s}{x}\right\| \quad \text{при} \; \|x\|_{H_\alpha(L)} \leqslant 1, \; s \in L$$

Очевидно, имеем

$$\| U_l \| = \inf c_l.$$

Интегро-степенным сингулярным рядом называется ряд вида $\sum\limits_{l=0}^{+\infty} U_l\binom{s}{x}$, причем $U_0\binom{s}{x}$ от x не зависит и по s является функцией из $H_\alpha(L)$.

Предположим, что сходится числовой ряд $\sum\limits_{l=0}^{+\infty} \| U_l \| r^l$, тогда ряд $\sum\limits_{l=0}^{+\infty} U_l\binom{s}{x}$ сходится абсолютно и равномерно в круге $\|x\|_{H_\alpha(L)} \leqslant r$. Рассмотрим, далее, двойной ряд: степенной по λ и интегро-степенной сингулярный по x:

$$U_{10}\binom{s}{x}\lambda + \sum_{k+l \geqslant 2} U_{kl}\binom{s}{x}\lambda^k, \tag{28.7}$$

где λ — комплексный числовой параметр.

Пусть сходится числовой ряд ($\rho > 0$, $r > 0$)

$$\| U_{10} \| \rho + \sum_{k+l \geqslant 2} \| U_{kl} \| r^l \rho^k, \tag{28.8}$$

тогда ряд (28.7) при $|\lambda| \leqslant \rho$, $\| x \|_{H_\alpha(L)} \leqslant r$ сходится абсолютно и равномерно.

Вернемся к уравнению (28.5). Предположим, что найдутся положительные числа ρ и r такие, что при $|\lambda| \leqslant \rho$, $\| x \|_{H_\alpha(L)} \leqslant r$ левая часть уравнения (28.5) представима двойным рядом (28.7), причем мажорантный числовой ряд (28.8) сходится. Пусть, кроме того,

$$U_{01}\binom{s}{x} \equiv a(s)\,x(s) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(s,t)\,x(t)}{t-s}\,dt,$$

где $a(s) \pm K(s, s) \neq 0$ на L.

В этих предположениях к уравнению (28.5) также применима изложенная выше теория, причем если $\chi = 0$, то можно воспользоваться результатами §§ 23—25.

Если же $\chi \neq 0$, то при $n > 0$, $m = 0$ верна теорема 27.1 (и замечание к ней), при $n = 0$, $m > 0$ верна теорема 27.2 (и замечание к ней), наконец, при $n > 0$, $m > 0$ задача приводится к аналитическому уравнению разветвления в форме (27.11), для исследования которого следует воспользоваться теорией, изложенной в §§ 3—6.

Приведем в заключение еще один пример — сингулярное интегральное уравнение в пространствах суммируемых функций. Не стремясь рассмотреть самый общий случай, мы хотим лишь проиллюстрировать, каким образом рассматриваемый класс уравнений вкладывается в рамки изложенной общей теории.

28.4. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения с ядром Гильберта в пространствах Лебега. Рассмотрим теперь нелинейное сингулярное интегральное уравнение с ядром типа Гильберта [1])

$$F(\lambda, x) \equiv a(s)\,x(s) - \frac{b(s)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi(t, x(t), \lambda)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,dt = 0$$

в предположении, что выполнены следующие условия:

1) $a(s)$ и $b(s)$ на $[0, 2\pi]$ одновременно в нуль не обращаются и удовлетворяют на $[0, 2\pi]$ условию Гёльдера с показателем $\alpha \in (0, 1]$;

2) $\Phi(t, x, \lambda)$ и $\Phi_x(t, x, \lambda)$ непрерывны по совокупности переменных x, λ в полосе $x \in (-\infty, +\infty)$, $|\lambda| \leqslant l$ почти при каждом фиксированном $t \in [0, 2\pi]$ и измеримы по t при фиксированных x и λ;

3) $\Phi(t, 0, 0) = 0$ и $\Phi_x(t, 0, 0) = 1$ почти для всех значений $t \in [0, 2\pi]$;

---

[1]) См. М. М. Вайнберг и В. А. Треногин [1].

4) для всех $x \in (-\infty, +\infty)$ и почти для всех значений $t \in [0, 2\pi]$ имеет место равномерная по λ, $|\lambda| \leqslant l$, оценка

$$|\Phi_x(t, x, \lambda)| \leqslant A(t) + C|u|^{p-2},$$

где $p > 2$, $A(t) \in L^{p/(p-2)}$, $C = \text{const}$, L^γ — пространство функций, суммируемых на $(0, 2\pi)$ со степенью $\gamma = p/(p-2)$.

Эти четыре условия достаточны для того, чтобы оператор $F(\lambda, x)$ был непрерывным оператором из топологического произведения $[-l, l] \times L^p$ в L^q, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, и имел непрерывную производную Фреше по x. Действительно, если мы рассмотрим оператор Немыцкого h:

$$hx \equiv \Phi(t, x, \lambda),$$

то из условия 4) согласно теореме 19.1 (М. М. Вайнберг [1]) следует, что оператор

$$h'x \equiv \Phi_x(t, x, \lambda)$$

действует непрерывно из L^p в $L^{p/(p-2)}$, а потому по лемме 20.1 (М. М. Вайнберг [1]) h — непрерывный оператор из L^p в L^q.

Рассмотрим теперь операторы G и T:

$$Gx = a(s)\,x(s); \qquad Tx = -\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,dt.$$

Оператор G, как оператор умножения на ограниченную функцию (см. условие 1)), действует из L^p в L^p, а так как пространство L^p вложено в L^q, ибо $p > 2$, $q < 2$, то G действует и из L^p в L^q. Далее, как показал М. Рисс [1], линейный сингулярный интегральный оператор

$$\int_a^b \frac{x(t)}{t-s}\,dt$$

непрерывен из L^q в L^q при всяком $q > 1$. Отсюда и из равенства

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2} = \frac{1}{t-s} + \frac{1}{t-s-2\pi} + P(t-s),$$

где $P(\tau)$ — непрерывная функция на $[0, 2\pi]$, следует, что оператор T также непрерывен из L^q в L^q.

Из непрерывности операторов T и h следует непрерывность произведения линейного оператора T и оператора Немыцкого h, т. е. что нелинейный оператор

$$Thu = -\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(t, x(t), \lambda)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,dt$$

непрерывен из пространства L^p в пространство L^q. Но

$$F(\lambda, x) = Gx + Thx,$$

следовательно, F — непрерывный оператор из L^p в L^q. Остается еще показать дифференцируемость $F(\lambda, x) = Gx + Thx$. Оператор G дифференцируем по Фреше, как линейный ограниченный оператор. Далее, так как h' непрерывно действует из L^p в $L^{p/(p-2)}$, то по теореме 20.1 (М. М. Вайнберг [1]) оператор h имеет линейный ограниченный дифференциал Гато

$$\Phi_x(t, x_0(t), \lambda_0)\, v(t),$$

где $u_0(t) \in L^p$, $\lambda_0 \in [-l, +l]$ фиксированы, а $v(t)$ произвольная функция из L^p. Отсюда и из ограниченности оператора T следует, что и оператор Th имеет линейный дифференциал Гато

$$DTh(x_0, v) = -\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_x(t, x_0(t), \lambda_0)\, v(t)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,dt.$$

Поступая теперь так же, как при доказательстве теоремы 20.3 (М. М. Вайнберг [1]), мы найдем, что данный дифференциал Гато является дифференциалом Фреше. Этим доказано, что

$$\frac{\partial F(\lambda, x_0)}{\partial x}v =$$

$$= a(s)\,v(s) - \frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_x(t, x_0(t), \lambda)\, v(t)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,dt.$$

Покажем ограниченность этого оператора. Во-первых,

$$\|Gv\|_q \leqslant C_1\|v\|_p, \quad C_1 = \mathrm{const} > 0,$$

ибо G — ограниченный оператор из L^p в L^q (значки p и q означают, что нормы берутся соответственно в L^p и L^q). Далее, так как

$$\Phi_x(t, x_0(t), \lambda) \in L^{p/(p-2)}, \; v(t) \in L^p,$$

то $\Phi_x(t, x_0(t), \lambda) v(t) \in L^q$. Отсюда в силу ограниченности оператора T из L^p в L^q имеем

$$\| T\Phi_x(t, x_0(t), \lambda) \, v(t) \|_q \leqslant C_2 \|\Phi_x v\|_q$$

и, кроме того,

$$\Phi_x(t, x_0(t), \lambda) v(t) \|_q \leqslant \|\Phi_x(t, x_0(t), \lambda)\|_{p/(p-2)} \|v\|_p,$$

причем $\|\Phi_x(t, x_0(t), \lambda)\|_{p/(p-2)} = C(\lambda) \leqslant C_3 = \mathrm{const}$, ибо $x_0(t) \in L^p$ — фиксированная функция.

Таким образом, окончательно

$$\left\| \frac{\partial F(\lambda, x_0)}{\partial x} v \right\|_q \leqslant (C_1 + C_2 \cdot C_3) \|v\|_p.$$

Представим теперь оператор $F(\lambda, x)$ в таком виде, чтобы можно было воспользоваться теоремами 27.1—27.2. Можно показать, что из условий 2) и 3) следует, что

$$\Phi(t, x, \lambda) = x + f(t, x, \lambda),$$

где $f(t, x, \lambda) = o(x)$ при $x \to 0$, $\lambda \to 0$. При этом оператор $f(t, x, \lambda)$ действует из L^p в L^q, ибо $\Phi(t, x, \lambda)$ обладает этим свойством. Следовательно, мы можем написать, что

$$F(\lambda, x) = a(s)\, x(s) - \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \operatorname{ctg} \frac{t-s}{2}\, dt - \\ - \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, x(t), \lambda) \operatorname{ctg} \frac{t-s}{2}\, dt,$$

и, полагая

$$Bx = a(s)\, x(s) - \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \operatorname{ctg} \frac{t-s}{2}\, dt,$$

получим, что уравнение $F(\lambda, x) = 0$ можно записать в следующем виде:

$$Bx = \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t, x(t), \lambda) \operatorname{ctg} \frac{t-s}{2}\, dt,$$

где согласно доказанному правая часть этого равенства действует из L^p в L^q. Из § 27 непосредственно следует, что к этому уравнению применимы теоремы 27.1—27.2 или же теорема о неявных операторах, если только оператор B удовлетворяет соответствующим условиям. Но к оператору B и к союзному оператору

$$B'\psi = a(s)\psi(s) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b(t)\psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t-s}{2}\,dt$$

применимы теоремы 28.1 и 28.2 Ф. Нетера (Ф. Д. Гахов [1], В. К. Наталевич [1]).

Оператор B в рассматриваемом случае совпадает со своим характеристическим, однако здесь ситуация несколько отличается от той, которая имеет место для оператора с ядром типа Коши. Возможны следующие случаи (и только они):

I. $\chi = 0$. Тогда имеется две возможности (Ф. Д. Гахов [1]): либо $n = m = 0$, либо $n = m = 1$. (В случае сингулярного интегрального оператора с ядром типа Коши осуществляется только первое $n = m = 0$.)

Если $n = m = 0$, то оператор B имеет ограниченный обратный B^{-1} и применима теорема о неявных операторах 22.1. Если же $n = m = 1$, то задача сводится к одномерному уравнению разветвления, что позволяет при конкретном виде $f(t, x, \lambda)$ выяснить, сколько решений и какого типа имеет задача.

II. $\chi > 0$. Тогда $n = \chi$ и $m = 0$ и по теореме 27.1 решение уравнения зависит от функции

$$v(s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\chi} \xi_i(\lambda)\varphi_i(s), \quad \xi_i(0) = 0,$$

где $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_\chi(s)$ — нули оператора B, а $\xi_i(\lambda)$ — произвольные непрерывные функции, достаточно малые по абсолютной величине ($\xi_i(0) = 0$).

III. $\chi < 0$. Тогда $n = 0$ и $m = -\chi$ и по теореме 27.2 задача может иметь лишь единственное решение, если выполнено m дополнительных условий.

Подчеркнем, что индекс χ мы понимаем здесь в смысле Н. И. Мусхелишвили:

$$\chi = n - m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d \arg [a(s) + ib(s)].$$

В заключение заметим, что полученные в настоящем параграфе утверждения можно сформулировать и как соответствующие утверждения теории ветвления краевых задач для аналитических функций (Ф. Д. Гахов [1], В. К. Наталевич [1]).

§ 29. Ветвление решений краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений

В этом параграфе будет показана справедливость результатов §§ 21—27 для некоторых достаточно широких классов краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений и систем с параметром. Современная теория дифференциальных уравнений основывается на фундаментальных исследованиях С. Н. Бернштейна, Шаудера, И. Г. Петровского, С. Л. Соболева, М. И. Вишика, И. Н. Векуа, О. А. Олейник, О. А. Ладыженской и многих других авторов. В последние годы установлена нетеровость (или фредгольмовость) ряда линейных операторов, порождаемых эллиптическими краевыми задачами, а также более общими сингулярными операторами, включающими также сингулярные интегральные операторы (А. И. Вольперт, С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, М. Шехтер, А. С. Дынин, Л. Р. Волевич, М. И. Вишик, М. С. Агранович и др.). Каждый такой результат позволяет применить абстрактную схему глав VII и VIII к соответствующему классу нелинейных задач. Ниже мы приводим три класса задач, достаточно полно, на наш взгляд, иллюстрирующих метод. Вспомогательные результаты линейной теории даны без доказательств.

29.1. Краевые задачи для эллиптического уравнения второго порядка в пространствах Гёльдера. Следуя монографии Миранды [1], рассмотрим сначала краевые задачи для линейных эллиптических уравнений. Пусть Ω — ограниченная область класса $A^{(1,\lambda)}$ (см. Миранда [1], стр. 10) с границей Г, лежащей в евклидовом пространстве R^k. Рассмотрим в Ω дифференциальное выражение

$$Lu \equiv \sum_{i,\,j=1}^{k} b_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{i=1}^{k} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x)\,u, \quad (29.1)$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, коэффициенты $b_{ij} \in H^1_\lambda(\Omega)$ [1]), $b_i,\ b \in H^0_\lambda(\Omega)$, $e_i = b_i - \sum\limits_{j=1}^{k}\dfrac{\partial b_{ij}}{\partial x_j} \in H^1_\lambda(\Omega)$, причем

$$\sum_{i,\,j=1}^{k} b_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \neq 0$$

при любых вещественных $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \neq 0$ и любых $x \in \overline{\Omega}$. Рассмотрим в каждой точке Г ориентированную прямую l, направленную от Ω, т. е. такую, что $\cos(l, n) > 0$. Пусть, далее, α, β и φ — три функции, определенные и непрерывные на Г, так что $|\alpha| + |\beta| > 0$ и $f(x)$ — непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция, причем $f(x) \in H^0_\lambda(\overline{\Omega})$. Ставится краевая задача: найти непрерывную в $\overline{\Omega}$ и дважды непрерывно дифференцируемую в Ω функцию $u(x)$ такую, что $Lu \equiv f(x)$ в Ω, $u(x)$ дифференцируема по направлению l в каждой точке Г, в которой $\alpha \neq 0$, и во всех точках Г удовлетворяет краевому условию

$$\Lambda u \equiv \alpha\frac{du}{dl} + \beta u = \varphi. \quad (29.2)$$

Наиболее важными являются следующие краевые задачи:

а) Первая краевая задача, или задача Дирихле, когда в (29.2) $\alpha \equiv 0$, $\beta \equiv 1$. Здесь краевое условие принимает вид

$$u\,|_{\Gamma} = \varphi.$$

б) Вторая краевая задача, или задача Неймана, когда в (29.2) $\alpha > 0$ и направление l совпадает с направлением

---

[1]) Через $H^i_\lambda(\Omega)$ обозначено гёльдеровское пространство функций, удовлетворяющих вместе с производными до i-го порядка включительно условию Гёльдера с показателем $\lambda \in (0, 1]$.

конормали, направляющие косинусы которого равны

$$Y_i = \frac{\sum_{j=1}^{k} b_{ij} X_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{l=1}^{k} b_{jl} X_l\right)^2}},$$

где X_j — направляющие косинусы внешней нормали к Г. Здесь граничное условие (29.2) без ограничения общности можно написать в виде

$$\sum_{i,\,j=1}^{k} b_{ij} X_j \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta u = \varphi.$$

в) Третья краевая задача, или задача с косой производной, когда в (29.2) $\alpha > 0$ и направление l любое, для которого $\cos\,(l, n)$ имеет положительную нижнюю грань на Г. Можно показать (см. Миранда [1]), что без ограничения общности граничное условие (29.2) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i,\,j=1}^{k} b_{ij} X_j \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta u = \varphi,$$

где α_i таковы, что $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i = 0$. В случае третьей краевой задачи будем предполагать дополнительно, что функции β и φ принадлежат H_λ (Г), а направляющие косинусы направления l принадлежат H_λ^1 (Г).

Возможны также краевые задачи, в которых направление l является касательным к Г в некоторых точках, а также задачи, в которых α обращаются в нуль на части границы, но здесь такие задачи рассматриваться не будут.

В книге Миранды [1] методом сведения к интегральным уравнениям для задач а), б), в) доказана альтернатива Фредгольма: либо однородная задача

$$Lu = 0,\ x \in \Omega;\ \Lambda u = 0,\ x \in \Gamma \tag{29.3}$$

имеет лишь тривиальное решение, в этом случае неоднородная задача

$$Lu = f,\ f \in H_\lambda,\ x \in \Omega;\ \Lambda u = \varphi,\ \varphi \in C\ (\Gamma),\ x \in \Gamma \quad (29.4)$$

разрешима при любых f, φ, либо однородная задача (29.3) имеет $1 \leqslant n < +\infty$ линейно независимых решений, в этом случае существует n линейно независимых пар функций $(v_i(x), \omega_i(s))$, $i = 1, \ldots, n$, таких, что для разрешимости неоднородной задачи (29.4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_\Omega f(x)\, v_i(x)\, dx + \int_\Gamma \varphi(s)\, \omega_i(s)\, ds = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Дифференциальное выражение L с граничными условиями Λ задает дифференциальный оператор $B = (L, \Lambda)$, который является линейным ограниченным оператором, действующим из $E_1 = H_\lambda^2\ (\bar\Omega)$ в $E_2 = H_\lambda(\Omega) \dotplus C\ (\Gamma)$. Для случаев 1-й, 2-й и 3-й краевых задач, вследствие справедливости для них альтернативы Фредгольма, оператор B является ограниченным фредгольмовским оператором.

Заметим еще, что в случае 1-й краевой задачи

$$\omega_i(s) = \sqrt{\sum_{l=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k} b_{lj} X_j \right)^2}\, \frac{dv_i}{d\nu}$$

(ν — направление конормали), а в случае 2-й и 3-й краевых задач

$$\omega_i(s) = -v_i(s),$$

где $v_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, — линейно независимые решения однородной сопряженной задачи

$$L^* v \equiv \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial v}{\partial x_j}\left(b_{ij} \frac{\partial v}{\partial x^i}\right) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i}(l_i v) + bv = 0, \qquad x \in \Omega,$$

$$\Lambda^* v \equiv \alpha^* \frac{dv}{d\lambda} + \beta^* v = 0,\ \ x \in \Gamma,$$

где функции α^* и β^* определяются через известные функции.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$F\,(u_{ij}, u_i, u, x, \mu) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{29.5}$$

с граничным условием

$$G\left(\frac{du}{dl}, u, x, \mu\right) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{29.6}$$

где

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

а функции F и G — достаточно гладкие функции своих переменных, μ — числовой параметр. Пусть при значении параметра $\mu = \mu^0$ краевая задача (29.5) — (29.6) имеет эллиптическое решение $u = u^0\,(x) \in H^2_\lambda$, т. е. квадратичная форма

$$\sum_{i,\,j=1}^{k} F_{u_{ij}}\,(u^0_{ij}, u^0_i, u^0, x, \mu^0)\,\xi_i\xi_j$$

для всех $x \in \Omega$ является положительной.

Будем разыскивать решения задачи (29.5) — (29.6), являющиеся продолжениями решения $u^0\,(x)$ по параметру μ. Для этой цели сделаем замену переменных u и μ:

$$u\,(x) = u^0\,(x) + g\,(x), \quad \mu = \mu^0 + \lambda, \tag{29.7}$$

в результате чего придем к следующей задаче для определения $g\,(x)$:

$$\left.\begin{aligned} Lg &= R\,(g_{ij}, g_i, g, x, \lambda), && x \in \Omega, \\ \Lambda g &= r\left(\frac{dg}{dl}, g, x, \lambda\right), && x \in \Gamma. \end{aligned}\right\} \tag{29.8}$$

Здесь L — дифференциальный оператор вида (29.1). Пусть функция G в (29.6) и решение $u^0\,(x)$ таковы, что Λ — граничное условие 1-й, 2-й или 3-й краевой задачи. Функции R и r зависят от g и ее производных при $\lambda = 0$ нелинейно, т. е.

$$R_{g_{ij}}\,(0, 0, 0, x, 0) \equiv R_{g_i}(0, 0, 0, x, 0) = R_g(0, 0, 0, x, 0) \equiv 0,$$

$$r_{g_l}\,(0, 0, x, 0) \equiv r_g\,(0, 0, x, 0) \equiv 0,$$

причем R и r достаточно гладки.

Полагая $E_1 = H^2_\lambda(\Omega)$ и $E_2 = H_\lambda \dotplus C(\Gamma)$, мы видим, что (29.8) можно рассматривать как одно уравнение вида (23.6) с фредгольмовским оператором. Поэтому для задачи (29.8), а значит и для задачи (29.5) — (29.6), применимы результаты главы VII. Например, ограничиваясь случаем аналитических по своим переменным (кроме x) функций F и G, приходим к следующему выводу:

Теорема 29.2. *Если однородная задача* (29.3) *имеет лишь тривиальное решение, то для всех* μ, *достаточно близких к* μ^0, *задача* (29.5) — (29.6) *имеет единственное решение, удовлетворяющее условию* $u(x, \mu^0) = u^0(x)$.

Пусть (29.3) имеет n линейно независимых решений, тогда отыскание решений задачи (29.5) — (29.6) сводится к уравнению разветвления, представляющему собой систему n числовых уравнений с n неизвестным и параметром $\lambda = \mu - \mu^0$. При $n = 1$ возможны лишь три случая:

1) Уравнение разветвления обращается в тождество, тогда задача (29.5) — (29.6) имеет однопараметрическое семейство решений $u = u(\mu, x, \xi)$ с малым прозвольным параметром ξ.

2) Уравнение разветвления не имеет малых решений, тогда и (29.5) — (29.6) не имеет решений, близких к $u^0(x)$.

3) Существует конечное число решений задачи (29.5) — (29.6), обращающихся в $u^0(x)$ при $\mu = \mu^0$, и все они представимы сходящимися рядами по целым или дробным степеням $\lambda = \mu - \mu^0$.

29.2. Краевые задачи на плоскости для эллиптических систем k-го порядка в пространстве Гёльдера. Изложим сначала, следуя работе А. И. Вольперта [1], необходимые сведения из линейной теории.

Пусть Ω — ограниченная область на плоскости переменных $z = (x, y)$ с замыканием $\overline{\Omega}$ и границей — k-кратно гладкой кривой Ляпунова — Γ. Пусть $A_{ij}(z)$ — вещественные квадратные матрицы порядка p, заданные в $\overline{\Omega}$, причем $A_{ij}(z)$ при $i + j < k$ удовлетворяют в $\overline{\Omega}$ условию Гёльдера с показателем $\lambda \in (0, 1]$; если же $i + j = k$, то $A_{ij}(z)$ имеют в $\overline{\Omega}$ первые производные, удовлетворяющие условию Гёльдера с тем же показателем λ. Ниже, говоря о непрерывности в смысле Гёльдера функции $\psi(z)$, мы будем понимать под этим, что $\psi(z)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем λ.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lu \equiv \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant k} A_{ij}(z) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}, \tag{29.9}$$

где u — столбец высоты p: $u = \left\| \begin{matrix} u_1(z) \\ \cdots \\ u_p(z) \end{matrix} \right\|$. Дифференциальное выражение L предполагается эллиптическим в смысле И. Г. Петровского [1]:

$$\det \sum_{i+j=k} A_{ij}(z) \alpha^i \beta^j \neq 0$$

при любых $z \in \overline{\Omega}$ и любых вещественных α и β, не равных нулю одновременно.

Наряду с дифференциальным выражением L рассмотрим граничное дифференциальное выражение

$$\Lambda u \equiv \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant l} B_{ij}(z) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} \bigg|_{\Gamma} \qquad (l < k), \tag{29.10}$$

где $B_{ij}(z)$ — матрицы порядка $q \times p$ $\left(q = \frac{pl}{2}\right)$ — заданы на Γ и имеют там непрерывные в смысле Гёльдера производные по дуговой абсциссе до порядка $k - l - 1$.

Пусть $f(z)$ — p-мерный функциональный столбец с элементами, определенными на $\overline{\Omega}$ и непрерывными там в смысле Гёльдера, а $g(z)$ — функциональный столбец высоты q с элементами, определенными на Γ и непрерывными там в смысле Гёльдера.

Введем характеристические матрицы дифференциальных выражений L и Λ:

$$P(z, \lambda) = \sum_{i+j=k} A_{ij}(z) \lambda^j, \qquad Q(z, \lambda) = \sum_{i+j=l} B_{ij}(z) \lambda^j.$$

Будем говорить, что краевая задача

$$Lu = f, \ \Lambda u = \varphi$$

удовлетворяет условию З. Я. Шапиро—Я. Б. Лопатинского, если ранг матрицы $\int\limits_{\gamma} Q(z, \lambda) P^{-1}(z, \lambda) R(\lambda) d\lambda$ равен $\frac{pl}{2}$ для всех $z \in \Gamma$. Здесь $R(\lambda) = (I, \lambda I, \ldots, \lambda^{n-1} I)$, где I — единичная матрица порядка q, γ — контур в полуплоскости $\operatorname{Im} \lambda > 0$, охватывающий все корни λ-полинома $\det P(z, \lambda)$, лежащие в этой полуплоскости.

Обозначим через $H_\lambda^k(\overline{\Omega})$ гёльдеровское пространство p-мерных вещественных функциональных столбцов, имеющих k-е непрерывные в смысле Гёльдера производные в $\overline{\Omega}$, через $H_\lambda(\overline{\Omega})$ обозначим гёльдеровское пространство p-мерных вещественных функциональных столбцов, непрерывных в смысле Гёльдера в $\overline{\Omega}$, а через $H_\lambda(\Gamma)$ обозначим гёльдеровское пространство q-мерных вещественных функциональных столбцов, непрерывных в смысле Гёльдера на Γ.

Оператор $B = (L, \Lambda)$ есть линейный ограниченный оператор из $H_\lambda^k(\overline{\Omega})$ в $H_\lambda(\overline{\Omega}) \dotplus H_\lambda(\Gamma)$.

А. И. Вольперт [1] показал, что если выполнено условие Шапиро — Лопатинского, то оператор B является нетеровским. Он также нашел условие разрешимости неоднородной задачи

$$Lu = f, \quad \Lambda u = g.$$

Как и в предыдущем примере, при наличии достаточной гладкости параметров задачи устанавливается связь условий разрешимости неоднородной задачи с решениями однородной сопряженной задачи.

Рассмотрим теперь следующую нелинейную краевую задачу:

$$\left.\begin{aligned} Lu &= R(u, \varepsilon, x), \qquad x \in \Omega, \\ \Lambda u &= r(u, \varepsilon, x), \qquad x \in \Gamma, \end{aligned}\right\} \tag{29.11}$$

где R — p-мерный столбец, а r — p-мерный столбец, компоненты которых суть непрерывно дифференцируемые функции по u в окрестности точки $u = 0$, $\varepsilon = 0$, непрерывные по ε и удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем λ по x на Ω и Γ соответственно. Пусть, кроме того, выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial R_i(0, 0, x)}{\partial u_j} \equiv 0, \qquad x \in \Omega,\ i, j = 1, \ldots, p,$$

$$\frac{\partial r_s(0, 0, x)}{\partial u_t} \equiv 0, \qquad x \in \Gamma,\ s = 1, \ldots, q;\ t = 1, \ldots, p.$$

Как и в предыдущих примерах, устанавливается, что задача (29.11) является конкретной реализацией общей задачи(27.1), где B в силу вышеизложенного есть H-оператор, $E_1 = H_\lambda^k(\overline{\Omega})$, $E_2 = H_\lambda(\overline{\Omega}) \dot{+} H_\lambda(\Gamma)$. Следовательно, для краевой задачи (29.11) справедливы результаты § 27. Не представляет труда, в частности, перефразировать для (29.11) теоремы 27.1 — 27.2, что мы предоставляем читателю.

Можно, конечно, допустить зависимость R и r от производных u, а также, как в предыдущем пункте, рассмотреть общую нелинейную (возможно, не эллиптическую) систему, имеющую эллиптическое решение (в смысле И. Г. Петровского).

29.3. Краевые задачи для эллиптических уравнений в пространстве суммируемых функций. Пусть Ω — ограниченная область в евклидовом пространстве R^k с бесконечно дифференцируемой границей Γ (класса C^∞). Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u, \qquad x \in \Omega, \tag{29.12}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — мультииндекс, т. е. последовательность индексов $\alpha_s \geqslant 0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$,

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_k^{\alpha_k}, \qquad D_s = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_s}, \qquad s = 1, \ldots, k,$$

а функции $a_\alpha(x)$ бесконечно дифференцируемы в $\overline{\Omega}$.

Дифференциальное выражение Lu называется эллиптическим в $\overline{\Omega}$, если его характеристический полином

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x)\, \xi^\alpha$$

всюду в $\overline{\Omega}$ отличен от нуля при любом вещественном векторе $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$, отличном от нуля. Под ξ^α понимается выражение $\xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_k^{\alpha_k}$.

Дифференциальное выражение Lu называется сильно эллиптическим (М. И. Вишик [1]), если существует комплексная функция $\gamma(x)$, непрерывная в $\overline{\Omega}$ и такая, что полином $\operatorname{Re}\gamma(x) P(x, \xi) \neq 0$ при $x \in \overline{\Omega}$ и любом вещественном векторе $\xi \neq 0$.

Наконец, эллиптическое в $\overline{\Omega}$ дифференциальное выражение Lu назовем правильно эллиптическим в $\overline{\Omega}$, если для каждого вещественного вектора $\tau \neq 0$, параллельного Γ в точке x, и каждого вещественного вектора $\nu \neq 0$, нормального к Γ в x, полином от z $P(x, \tau + z\nu) \equiv P(z)$ имеет ровно m корней $\lambda_k(\tau, \nu)$, $k = 1, \ldots, m$, с положительными мнимыми частями (остальные m корней вследствие эллиптичности имеют отрицательные мнимые части).

Всякий эллиптический оператор в R^k при $k \geqslant 3$ правильно эллиптичен (Я. Б. Лопатинский [1]). Наряду с дифференциальным выражением (29.12) рассмотрим также граничные дифференциальные выражения

$$\Lambda_j u \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m_j} b_{\alpha j}(x) D^\alpha u, \qquad x \in \Gamma, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{29.13}$$

где $0 \leqslant m_j \leqslant 2m - 1$, а коэффициенты $b_{\alpha j}(x)$ бесконечно дифференцируемы на Γ. (Естественно, можно ослабить ограничения на гладкость границы Γ и коэффициентов a_α и $b_{\alpha j}$.) Для граничных дифференциальных выражений составим их характеристические полиномы

$$Q_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m_j} b_{\alpha j}(x) \xi^\alpha, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Будем говорить, что система граничных дифференциальных выражений (29.13) дополнительна к правильно эллиптическому дифференциальному выражению (29.12), если для каждого вещественного вектора $\tau \neq 0$, параллельного Γ в точке x, и для каждого вещественного вектора $\nu \neq 0$, нормального к Γ в x, полиномы от z $Q_j(z) \equiv$ $\equiv Q_j(x, \tau + z\nu)$, $j = 1, \ldots, m$, линейно независимы по модулю полинома

$$S(z) \equiv \prod_{l=1}^{m} [z - \lambda_k(\tau, \nu)],$$

где $\lambda_k(\tau, \nu)$ — корни полинома $P(z)$ с положительными мнимыми частями, т. е. тождество вида

$$\alpha_1 Q_1(z) + \ldots + \alpha_m Q_m(z) = C(z) S(z),$$

где $C(z)$ — полином, возможно лишь при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. Отметим, что требование дополнительности Λ_j, $j=1,\ldots, m$, к L является видоизменением на рассматриваемый случай условия Шапиро — Лопатинского (см. предыдущий пункт).

Система граничных дифференциальных выражений (29.13) называется нормальной, если

1) $m_j \neq m_k$ при $j \neq k$,

2) $Q_j(x, \nu) \neq 0$ при всех j и $x \in \Gamma$, где $\nu \neq 0$ — вектор, нормальный к Γ в точке x (это условие эквивалентно тому, что Γ не является характеристикой ни для одного из Λ_j).

Введем банахово пространство $W_p^{2m}(\Omega; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$, состоящее из функций $u(x)$ пространства $W_p^{2m}(\Omega)$ (см. С. Л. Соболев [1]) и удовлетворяющих граничным условиям $\Lambda_j u = 0$, $j = 1, \ldots, m$ (граничные значения эти имеют смысл для функций из $W_p^{2m}(\Omega)$ и понимаются в смысле обобщенных производных С. Л. Соболева).

Пусть L — правильно эллиптическое дифференциальное выражение, а $\{\Lambda_j\}_1^m$ — дополнительная к L и нормальная система граничных дифференциальных выражений. Тогда имеет место неравенство коэрцитивности (см., например, М. Шехтер [1])

$$\|u\|_{W_p^{2m}(\Omega;\ \Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)} \leqslant K(\|Lu\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\Omega)}).$$

Из этого неравенства следует, что дифференциальный оператор B, задаваемый на функциях из $W_p^{2m}(\Omega; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$ формулой $Bu = Lu$, является ограниченным оператором (оператором из $W_p^{2m}(\Omega; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_m) \to L_p(\Omega)$), причем число его нулей $n = n(B)$ конечно.

Пусть L^*v — формально сопряженное к Lu дифференциальное выражение:

$$L^* v = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [\bar{a}_\alpha (x) v].$$

Можно определить также сопряженную к $\{\Lambda_j\}_1^m$ нормальную систему граничных дифференциальных выражений $\{\Lambda_j'\}_1^m$ (она определяется, как обычно, с помощью интегрирования по частям).

Рассмотрим теперь граничную задачу

$$L^*v = 0, x \in \Omega; \Lambda_j'v = 0, j = 1, \ldots, m, x \in \Gamma. \quad (29.14)$$

Если задача (29.14) имеет лишь тривиальное решение, то задача $Bu = f$ разрешима при любой правой части $f \in L_p(\Omega)$ (М. Шехтер [1]). Если же задача (29.14) имеет нетривиальные решения, то для того, чтобы уравнение $Bu = f$ было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы $(f, v) = \int\limits_\Omega f(x)\, \bar{v}(x)\, dx = 0$ для каждого решения v задачи (29.14) (см. М. Шехтер [2]). Это означает нормальную разрешимость оператора B. Далее, неравенство коэрцитивности справедливо, конечно, и для сопряженной задачи, и потому задача (29.14) имеет конечное число линейно независимых решений. Таким образом, B есть нетеровский оператор.

В ряде случаев B оказывается фредгольмовским оператором. Так будет, например, в случае задачи Дирихле, когда $\Lambda_j = D_n^{j-1}$ (производная по нормали к Γ). Фредгольмовость оператора B, порожденного некоторыми краевыми задачами для сильно эллиптических дифференциальных выражений, установлена М. И. Вишиком [1]. Отметим, что при $m = 1$ всякое правильно эллиптическое дифференциальное выражение L является сильно эллиптическим.

Рассмотрим теперь нелинейную краевую задачу с малым комплексным параметром λ:

$$\left.\begin{aligned} &Lu = R(D^\alpha u, \lambda, x), \quad x \in \Omega, \quad |\alpha| \leqslant 2m, \\ &\Lambda_j u = 0, \qquad j = 1, \ldots, m; \quad x \in \Gamma, \end{aligned}\right\} \quad (29.15)$$

где L правильно эллиптично, а $\{\Lambda_j\}_1^m$ — дополнительная к L нормальная система.

(Запись $R(D^\alpha u, \lambda, x)$, $|\alpha| \leqslant 2m$ — сокращенная запись, которая означает, что функция R может зависеть от u и ее производных до порядка $2m$. Также под $R_v(v, \lambda, x)$ будем понимать набор производных R по всем ее аргументам $v = D^\alpha u$.)

Пусть функция R удовлетворяет следующим условиям:

1) $R(v, \lambda, x)$ и $R_v(v, \lambda, x)$ непрерывны по совокупности переменных v, λ, где v любое, а $|\lambda| \leqslant \rho$ почти при каждом фиксированном $x \in \overline{\Omega}$, и измеримы по x при фиксированных v и λ;

2) $R(0, 0, x) = 0$, $R_v(0, 0, x) = 0$ почти для всех $x \in \in \overline{\Omega}$;

3) $R(D^\alpha u, \lambda, x)$ есть непрерывный оператор, отображающий сферу $\|u\|_{W_p^{2m}(\Omega)} \leqslant r$ в пространство $L_p(\Omega)$, и имеющий в указанной сфере непрерывную производную Фреше. (Если R зависит только от u, λ, x, то достаточное условие для выполнимости 3) можно дать, повторяя рассуждения п.28.4.)

Эти условия обеспечивают применимость к задаче (29.15) теории § 27, а в случае фредгольмости оператора B — теории главы VII. Можно сформулировать соответствующие теоремы.

Заметим в заключение, что иногда удобно рассматривать задачу (29.15) как задачу с неограниченными операторами. Пусть в дополнение к перечисленным выше условиям выполнено неравенство $k \geqslant 2mp$ (k — число измерений), тогда вследствие теорем вложения Соболева — Кондрашева пространство $W_p^{2m}(\Omega)$ вполне непрерывно вложено в $L_p(\Omega)$, и поэтому B можно рассматривать как замкнутый линейный неограниченный оператор с плотной в $L_p(\Omega)$ областью определения $D(B) \equiv W_p^{2m}(\Omega; \Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$. Оператор R, очевидно, подчинен B, так как имеет более широкую область определения. По-прежнему B есть H-оператор, и, следовательно, можно воспользоваться теперь результатами пп. 26.4 и 27.5.

ГЛАВА IX

Некоторые задачи теории возмущений

§ 30. Жордановы цепочки и наборы фредгольмовских операторов

Пусть даны два оператора B и A из $\{E_1 \to E_2\}$, причем оператор B фредгольмовский с числом нулей $n \geqslant 1$.

30.1. *A-жорданова цепочка при* $n = 1$. Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Пусть φ — нуль оператора B, а ψ — его дефектный функционал (см. п 21.1).

Если $(A\varphi, \psi) \neq 0$, то будем говорить, что элемент φ имеет A-жорданову цепочку длины 1, состоящую из элемента $\varphi^{(1)} = \varphi$. При $(A\varphi, \psi) = 0$ рассмотрим уравнение $By = A\varphi^{(1)}$, которое разрешимо. Пусть $\varphi^{(2)}$ — одно из его решений. Если $(A\varphi^{(2)}, \psi) \neq 0$, то будем говорить, что элемент φ имеет A-жорданову цепочку длины 2, состоящую из элементов $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{(2)}$.

Дадим теперь общее определение. Будем говорить, что элемент $\varphi \in N(B)$ имеет A-жорданову цепочку длины p, если существуют элементы $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(p)}$, удовлетворяющие соотношениям

$$B\varphi^{(1)} = 0, \quad B\varphi^{(k)} = A\varphi^{(k-1)}, \quad k = 2, \ldots, p, \tag{30.1}$$

причем

$$(A\varphi^{(p)}, \psi) \neq 0. \tag{30.2}$$

Будем говорить при этом, что указанная жорданова цепочка состоит из элементов $\varphi^{(1)} = \varphi, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(p)}$. Элемент $\varphi^{(k)}$ будем называть A-присоединенным элементом $(k-1)$-го порядка к элементу φ.

Условимся, далее, о следующем обозначении: длину p A-жордановой цепочки нуля φ оператора B будем обозначать через

$$p = J(\varphi, B, A). \tag{30.3}$$

Скажем, что длина A-жордановой цепочки равна бесконечности ($J(\varphi, B, A) = +\infty$), если существует последовательность элементов $\{\varphi^{(k)}\}_1^{+\infty}$, удовлетворяющая соотношениям

$$B\varphi^{(1)} = 0, \quad B\varphi^{(k)} = A\varphi^{(k-1)}, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{30.4}$$

Заметим еще, что из определения A-жордановой цепочки следует, что

$$(A\varphi^{(k)}, \psi) = 0, \qquad k = 1, \ldots, p-1; \tag{30.5}$$

A-жорданова цепочка определяется, конечно, неоднозначно. Эту неоднозначность мы устраним следующим образом. Пусть $\gamma \in E^*{}_1$ таков, что $(\varphi, \gamma) = 1$. Потребуем, чтобы при $p > 1$ выполнялись условия

$$(\varphi^{(k)}, \gamma) = 0, \qquad k = 2, \ldots, p. \tag{30.6}$$

Это требование означает, что A-присоединенные элементы к $\varphi^{(1)}$ мы разыскиваем в $E_1^{\infty-1}$. В случае $p = +\infty$ мы предполагаем, что условия (30.6) выполняются при любых k.

Далее без ограничения общности можно считать, что

$$(A\varphi^{(p)}, \psi) = 1. \tag{30.7}$$

(Если это равенство не выполнено, то достаточно заменить ψ на $\psi\,(A\varphi^{(p)}, \psi)^{-1}$, что возможно вследствие неравенства (30.2).) Положим, наконец,

$$z = A\varphi^{(p)} \tag{30.8}$$

и построим, следуя Э. Шмидту, оператор

$$\tilde{B}y = By + (y, \gamma)z, \qquad y \in E_1. \tag{30.9}$$

Из леммы 21.1 вытекает, что оператор

$$\Gamma = \tilde{B}^{-1} \tag{30.10}$$

существует и ограничен. Кроме того, из формул (30.9), (30.4) и (30.6) имеем

$$\varphi^{(k)} = (\Gamma A)^{k-1}\varphi^{(1)}, \; k = 2, \ldots, p, \quad \varphi^{(1)} = (\Gamma A)\varphi^{(p)}. \tag{30.11}$$

В свою очередь из этих формул вытекает линейная независимость элементов A-жордановой цепочки. Действительно, допустим противное, что существуют числа

$\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, не все равные нулю, такие, что

$$\lambda_1 \varphi^{(1)} + \ldots + \lambda_p \varphi^{(p)} = 0.$$

Применим к этому равенству оператор A, а затем функционал ψ и согласно формулам (30.5) и (30.7) получим, что $\lambda_p = 0$. К равенству $\sum\limits_{i=1}^{p-1} \lambda_i \varphi^{(i)} = 0$ применим теперь оператор ΓA и, пользуясь формулами

$$\Gamma A \varphi^{(s)} = \varphi^{(s+1)}, \quad s = 1, \ldots, p-1,$$

которые доказываются так же, как формулы (30.11), получим

$$\lambda_1 \varphi^{(2)} + \lambda_2 \varphi^{(3)} + \ldots + \lambda_{p-1} \varphi^{(p)} = 0.$$

К этому равенству снова применим оператор A, а затем функционал ψ и найдем, что $\lambda_{p-1} = 0$.

Продолжая данный процесс, мы придем к противоречию, что все $\lambda_i = 0$. Следовательно, $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(p)}$ линейно независимы.

30.2. A-жордановы цепочки и наборы при $n > 1$. Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — базис в $N^*(B)$. Будем говорить, что элемент $\varphi \in N(B)$ имеет A-жорданову цепочку длины p, если существует p элементов $\varphi^{(1)} = \varphi, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(p)}$, удовлетворяющих соотношениям

$$B\varphi^{(1)} = 0, \quad B\varphi^{(k)} = A\varphi^{(k-1)}, \qquad k = 2, \ldots, p, \tag{30.12}$$

причем не все числа $(A\varphi^{(p)}, \psi_i)$, $i = 1, \ldots, n$, равны нулю.

A-жорданова цепочка элемента φ определяется неоднозначно, причем $(A\varphi^{(l)}, \psi_i) = 0$ при $l = 1, \ldots, p-1$. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — базис в $N(B) = E_1^n$. Построим A-жордановы цепочки элементов этого базиса:

$$\varphi_i^{(j)}, j = 1, \ldots, p_i, \; i = 1, \ldots, n; \; \varphi_i^{(1)} = \varphi_i.$$

Элемент $\varphi_l^{(k)}$ назовем A-присоединенным к φ_l элементом $(k-1)$-го порядка. Совокупность нулей $\varphi_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, n$, оператора B и всевозможных A-присоединенных к ним элементов назовем A-жордановым набором. A-жорданов набор назовем полным, если

$$\det \| (A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j) \| \neq 0. \tag{30.13}$$

Покажем, что в случае полного A-жорданова набора можно без ограничения общности предполагать выполненными следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned} &(A\varphi_j^{(k)},\ \psi_i)=0, && k<p_j,\\ &(A\varphi_j^{(p_j)},\psi_i)=\delta_{ji}, && i,j=1,\dots,n. \end{aligned}\right\} \qquad (30.14)$$

В самом деле, перейдем от функционалов $\psi_1, \dots, \psi_n$ к следующим их линейным комбинациям:

$$\chi_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}^{(-1)}\psi_k, \qquad i=1,\dots,n,$$

где $\alpha_{ik}^{(-1)}$— элементы матрицы, обратной к матрице $\|\alpha_{ij}\| = =\|(A\varphi_i^{(p_i)},\ \psi_j)\|$, удовлетворяющей условию (30.13). Тогда

$$(A\varphi_i^{(k)},\chi_j)=\sum_{l=1}^{n}\alpha_{jl}^{(-1)}(A\varphi_i^{(k)},\psi_l).$$

Если $k<j$, то $(A\varphi_i^{(k)},\ \chi_j)=0$ вследствие (30.12). Если же $k=p_i$, то $(A\varphi_i^{(p_i)},\ \chi_j)=\delta_{ij}$ по определению обратной матрицы. Таким образом, функционалы $\psi_1, \dots, \psi_n$ можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства (30.14), что мы и предполагаем ниже. Формула (30.13) теперь примет вид

$$\det\|(A\varphi_i^{(p_i)},\ \psi_j)\|=1.$$

Согласно следствию из теоремы Хана — Банаха в E_1^* найдутся функционалы $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, образующие систему, биортогональную к $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Эти функционалы порождают разложение $E_1=E_1^n\dotplus E_1^{\infty-n}$ (см. п.21.2). A-жорданов набор мы будем всегда считать выбранным так, чтобы входящие в него k-присоединенные элементы лежали в $E_1^{\infty-n}$, т. е. чтобы

$$(\varphi_j^{(k)},\ \gamma_i)=0, \qquad k=2,\dots,\ p_j,\ \ i=1,\ \dots,\ n; \qquad (30.15)$$

j пробегает те значения, при которых $p_j>1$. Это возможно осуществить вследствие справедливости замечания 21.3.

Действительно, положим

$$z_k = A\varphi_k^{(p_k)}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{30.16}$$

Оператор $\tilde{B}y = By + \sum_{i=1}^{n} (y, \gamma_i) z_i$ имеет по лемме 21.1 ограниченный обратный $\Gamma = \tilde{B}^{-1}$.

Имеют место формулы

$$\varphi_k^{(l)} = (\Gamma A)\varphi_k^{(l-1)}, \qquad l \geqslant 2, \tag{30.17}$$

$$\varphi_i^{(k)} = (\Gamma A)^{k-1}\varphi_i, \quad \varphi_i^{(1)} = (\Gamma A)\varphi_i^{(p_i)}, \tag{30.18}$$

$$k = 1, \ldots, p_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Основываясь на этих формулах, докажем линейную независимость элементов полного A-жорданова набора. Как и выше, поведем доказательство от противного. Допустим, что существуют числа $\lambda_i^{(j)}$, $j = 1, \ldots, p_i$, $i = 1, \ldots, n$, не все равные нулю и такие, что выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \lambda_i^{(j)} \varphi_i^{(j)} = 0. \tag{30.19}$$

К этому равенству применим сначала оператор A, а затем функционалы $\psi_1, \ldots, \psi_n$ и согласно формулам (30.14) получим, что $\lambda_i^{(p_i)} = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Теперь равенство (30.19) принимает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{p_i-1} \lambda_i^{(j)} \varphi_i^{(j)} = 0,$$

причем знак ($'$) у суммы означает, что суммирование ведется лишь по тем i, для которых $p_i > 1$. Если к последнему равенству применить оператор ΓA, то на основании формул (30.17) мы получим

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{p_i-1} \lambda_i^{(j)} \varphi_i^{(j+1)} = 0.$$

Применяя к этому равенству оператор A, а затем функционалы $\psi_1, \ldots, \psi_n$, получим, как и выше, что

$$\lambda_i^{(p_i-1)}=0, \qquad i=1, \ldots, n.$$

Эти рассуждения приводят к утверждению.

30.3. Условия полноты A-жорданова набора. Докажем сначала следующее предложение.

Лемма 30.1. *Пусть B есть Φ-оператор с числом нулей $n \geqslant 1$ и $A \in \{E_1 \to E_2\}$. Пусть, далее, существует число ρ_0 такое, что для всех ε, удовлетворяющих неравенству*

$$0<|\varepsilon| \leqslant \rho_0, \tag{30.20}$$

оператор $(B-\varepsilon A)^{-1}$ существует и ограничен; тогда все A-жордановы цепочки элементов $\varphi \in N(B)$ имеют конечные длины.

Доказательство. Допустим противное, что при всех ε из круга (30.20) оператор $(B-\varepsilon A)^{-1}$ существует и ограничен, но некоторый элемент $\varphi^{(1)} \in N(B)$ имеет A-жорданову цепочку бесконечной длины $\{\varphi^{(k)}\}_1^{+\infty}$, т. е. для элементов этой последовательности выполнены равенства (30.4). Будем разыскивать $\varphi^{(i)} \in E_1^{\infty-n}$, $i \geqslant 2$; тогда согласно замечанию 21.3 имеем $\tilde{B}\varphi^{(i)}=A\varphi^{(i-1)}$, $i \geqslant 2$, и, следовательно, $\varphi^{(i)}=(\Gamma A)\varphi^{(i-1)}$, откуда методом математической индукции находим

$$\varphi^{(i)}=(\Gamma A)^{i-1}\varphi^{(1)}, \qquad i=1,2, \ldots$$

Отсюда следуют неравенства

$$\|\varphi^{(i)}\| \leqslant \|\Gamma A\|^{i-1}\|\varphi^{(1)}\|,$$

из которых вытекает, что в круге $|\varepsilon| \leqslant \rho_1<\|\Gamma A\|^{-1}$ ряд

$$y(\varepsilon)=\sum_{i=0}^{+\infty} \varphi^{(i+1)} \varepsilon^i$$

сходится абсолютно и равномерно. Этот ряд при указанных значениях ε является решением уравнения

$$(B-\varepsilon A) y(\varepsilon)=0.$$

По условиям это уравнение может иметь лишь тривиальное решение при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$. Мы пришли к противоречию. Лемма доказана.

Пусть B и A — операторы из $\{E_1 \to E_2\}$, причем B есть Ф-оператор с числом нулей $n \geqslant 1$.

Теорема 30.1. *Для того чтобы существовал полный A-жорданов набор из нулей B и A-присоединенных к ним элементов, необходимо и достаточно, чтобы существовало число ρ_0 такое, что для всех ε, удовлетворяющих неравенству* (30.20), *оператор* $(B - \varepsilon A)^{-1}$ *существовал и был ограничен.*

Доказательство необходимости. Пусть существует полный A-жорданов набор $\varphi_j^{(k)}$, $k = 1, \ldots, p_j$, $i = 1, \ldots, n$, оператора B. Покажем, что найдется число ρ_0 такое, что для всех ε из (30.20) уравнение

$$(B - \varepsilon A) y = h \tag{30.21}$$

имеет единственное решение $y(\varepsilon)$ для любого $h \in E_2$. Заметим, что если уравнение (30.21) разрешимо, то для его решения y необходимо должны выполняться условия

$$\varepsilon (Ay, \psi_i) + (h, \psi_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{30.22}$$

Для доказательства этих неравенств достаточно применить к обеим частям уравнения (30.21) функционалы ψ_i и воспользоваться их ортогональностью к области значений $R(B)$ оператора B. Построим теперь для оператора B оператор $\tilde{B}$, выбрав $\{\gamma_i\}_1^n$ и $\{z_i\}_1^n$ так, чтобы выполнялись равенства (30.15) и (30.16); тогда для элементов A-жорданова набора будем иметь формулы (30.18).

Заменим уравнение (30.21) эквивалентной ему системой

$$\left.\begin{aligned} \tilde{B} y &= \varepsilon A y + h + \sum_{i=1}^{n} \xi_i z_i, \\ \xi_k &= (y, \gamma_k), \ k = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{30.23}$$

Пусть теперь $|\varepsilon| \leqslant \rho_1 < \| \Gamma A \|^{-1}$, тогда оператор $(I - \varepsilon \Gamma A)^{-1}$ существует и ограничен и систему (30.22) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} &y = (I - \varepsilon\Gamma A)^{-1}\Gamma h + \sum_{i=1}^{n} \xi_i (I - \varepsilon\Gamma A)^{-1}\varphi_i, \\ &\xi_k = (y, \gamma_k), \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{30.24}$$

Подставив y из первого уравнения этой системы в остальные получим систему n линейных числовых уравнений с n числовыми неизвестными

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i (\varepsilon\Gamma A (I - \varepsilon\Gamma A)^{-1}\varphi_i, \gamma_k) = -((I - \varepsilon\Gamma A)^{-1}\Gamma h, \gamma_k),$$

$$k = 1, \ldots, n. \tag{30.25}$$

Мы воспользовались при этом тождеством $I + \varepsilon A\Gamma (I - \varepsilon A\Gamma)^{-1} = (I - \varepsilon A\Gamma)^{-1}$ и формулами (21.7). Определитель системы (30.25) равен

$$\Delta(\varepsilon) = \det \| (\varepsilon\Gamma A (I - \varepsilon\Gamma A)^{-1}\varphi_i, \gamma_k) \|.$$

Вследствие формул (21.24) имеем

$$\Delta(\varepsilon) = \det \| (\varepsilon A (I - \varepsilon\Gamma A)^{-1}\varphi_i, \psi_k) \|.$$

В силу линейного свойства определителя

$$\Delta(\varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^{n+s} \sum_{s_1 + \ldots + s_n = s} \begin{vmatrix} (A(\Gamma A)^{s_1}\varphi_1, \psi_1) & (A(\Gamma A)^{s_n}\varphi_n, \psi_1) \\ \dots & \dots \\ (A(\Gamma A)^{s_1}\varphi_1, \psi_n) & (A(\Gamma A)^{s_n}\varphi_n, \psi_n) \end{vmatrix}.$$

Учитывая теперь формулы (30.14) и (30.18), приходим к выводу, что при $\varepsilon \to 0$

$$\Delta(\varepsilon) = \varepsilon^{p_1 + \ldots + p_n} \{\det \| (A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j) \| + o(1)\}.$$

Поэтому найдется число ρ_0 такое, что для всех ε, удовлетворяющих условию (30.20), $\Delta(\varepsilon) \neq 0$, и, следовательно, система (30.24), а вместе с ней и уравнение (30.21), имеет единственное решение для любого $h \in E_2$.

Доказательство достаточности. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — какой-либо базис в $N(B)$. Построим для каждого φ_i жорданову цепочку $\varphi_i^{(l)}$, $l = 1, \ldots, q_i$, причем согласно лемме 30.1 все q_i $(i = 1, \ldots, n)$ конечны. Далее построим оператор $\widetilde{B}$ так, чтобы были справедливы формулы (30.18). Если $\det \| (A\varphi_i^{(q_i)}, \psi_j) \| \neq 0$, то построенный A-жорданов набор полон. Пусть $\det \| (A_{\varphi_i}^{(q)}{}^i, \psi_j) \| = 0$; тогда к построенному A-жорданову набору можно присоединить элементы вида $\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j^{(q_j)}$, где числа $c_1, \ldots, c_n$ определяются как всевозможные линейно независимые нетривиальные решения следующей алгебраической однородной линейной системы n уравнений с n неизвестными и определителем, равным нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} (A\varphi_i^{(q_i)}, \psi_j) c_i = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{30.26}$$

Пусть $c_1^0, \ldots, c_n^0$ — одно из нетривиальных решений этой системы. Определим число $q_{j_0} = \max q_j$, где max берется по тем номерам j, для которых $c_j^0 \neq 0$. Произведем перестройку жордановой цепочки элемента φ_{j_0}, положив

$$\widetilde{\varphi}_{j_0}^{(k)} = \varphi_{j_0}^{(k)}, \qquad k < q_{j_0},$$

$$\varphi_{j_0}^{(q_{j_0})} = \sum_{j=1}^{n} c_j^0 \varphi_j^{(q_j)},$$

и добавим к этой перестроенной цепочке элемент

$$\varphi_{j_0}^{(q_{j_0}+1)} = \Gamma A \varphi_{j_0}^{(q_{j_0})}.$$

Поступая так же со всеми линейно независимыми решениями системы (30.26), мы придем к новому A-жорданову набору

$$\widetilde{\varphi}_j^{(k)}, \qquad k = 1, \ldots, \widetilde{q}_j, \; j = 1, \ldots, n,$$

причем хотя бы для одного j $\widetilde{q}_j > q_j$.

Если $\det \| (A\varphi_i^{(\widetilde{q}_i)}, \psi_j) \| \neq 0$, то полученный A-жорданов набор полный. Если же этот определитель равен нулю, то наши рассуждения можно повторить. После конечного числа шагов мы получим полный A-жорданов набор; иначе оказалось бы, что хотя бы один элемент $\varphi_j \in E_1^n$ имеет A-жорданову цепочку бесконечной длины, что противоречило бы лемме 30.1. Теорема доказана.

Заметим, что приведенное доказательство достаточности дает одновременно и способ построения полного A-жорданова набора исходя из любого A-жорданова набора.

30.4. Пример. Приведем пример фредгольмовского оператора, имеющего A-жорданову цепочку бесконечной длины.

Пусть $\{x_i\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Определим в H линейный оператор B следующим образом:

$$Bx_1 = x_2,\ Bx_3 = 0,\ Bx_{2i+1} = x_{2i-1},\ i = 2, 3, \ldots,$$
$$Bx_{2j} = x_{2j+2},\ j = 1, 2, \ldots$$

Подпространство нулей $N(B)$ одномерно с базисным элементом x_3, а область значений $R(B)$ состоит из элементов, ортогональных к x_1, поэтому B есть Ф-оператор. Далее, из определения B следует, что он имеет жорданову (I-жорданову) цепочку $x_3,\ x_5,\ \ldots,\ x_{2n+1},\ \ldots$ и, таким образом, $J(x_3, B, I) = +\infty$. Из доказательства леммы 30.1 вытекает, что уравнение $(B - \varepsilon I)y = 0$ имеет решение

$$y(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_{2i+1}\varepsilon^{i-1}.$$

Радиус абсолютной сходимости этого ряда равен 1, и, значит, спектр оператора B заполняет круг $|\varepsilon| < 1$.

§ 31. Возмущение линейного уравнения малым линейным слагаемым [1])

В этом параграфе рассматривается задача об отыскании решения уравнения

$$By = h + \varepsilon Ay, \tag{31.1}$$

где B и A — операторы из $\{E_1 \to E_2\}$, B есть Ф-оператор, ε — малый числовой параметр ($|\varepsilon| \leqslant \rho_0$), неизвестное y разыскивается в E_1. Как обычно, через n обозначается число нулей оператора B. Без специальных оговорок мы будем пользоваться обозначениями и выводами § 30.

[1]) См. В. А. Треногин [5], М. И. Вишик и Л. А. Люстерник [1].

Если $n = 0$, то B^{-1} существует и ограничен. Записывая уравнение (31.1) в виде

$$y = B^{-1}h + \varepsilon B^{-1}Ay,$$

мы видим, что при $|\varepsilon| \leqslant \rho_1 < \| B^{-1}A\|^{-1}$ существует и ограничен оператор $(I - \varepsilon B^{-1}A)^{-1}$ и что этот оператор является в указанном круге аналитической функцией ε, ибо справедливо разложение в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$(I - \varepsilon B^{-1}A)^{-1} = \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s (B^{-1}A)^s.$$

Но $y(\varepsilon) = (I - \varepsilon B^{-1}A)^{-1}h$, поэтому y также является при тех же ε аналитической функцией. В тех же предположениях решение единственно и $y(\varepsilon)$ можно, конечно, найти методом неопределенных коэффициентов, т. е. в виде ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} y_k\varepsilon^k$. Такие рассуждения мы приводим ниже при $n > 0$. При этом $y(\varepsilon)$ может иметь в точке $\varepsilon = 0$ полюс, порядок которого подлежит определению.

31.1. Исследование случая $n = 1$. Пусть $p < +\infty$ и пусть $\{\varphi^{(k)}\}_1^p$ — элементы A-жордановой цепочки, порожденной элементом $\varphi^{(1)} = \varphi \in N(B)$. Дефектный функционал ψ выберем так, чтобы выполнялось условие (30.7). Пусть, далее, $z \in E_2$ и $\gamma \in E_1^*$ выбраны так, чтобы выполнялись условия (30.8) и (30.6). Операторы $\tilde{B}$ и Γ определим формулами (30.9) и (30.10). Заменим уравнение (31.1) эквивалентной ему системой

$$\left.\begin{aligned} \tilde{B}y &= h + \varepsilon Ay + \xi z, \\ \xi &= (y, \gamma). \end{aligned}\right\} \tag{31.2}$$

Предположим, что

$$|\varepsilon| \leqslant \rho_1 < \|\Gamma A\|^{-1}, \tag{31.3}$$

тогда систему (31.2) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} y &= (I - \varepsilon\Gamma A)^{-1}\Gamma h + \xi(I - \varepsilon\Gamma A)^{-1}\varphi, \\ \xi &= (y, \gamma). \end{aligned}\right\} \tag{31.4}$$

Отсюда получаем уравнение для определения ξ:

$$\xi\,(\varepsilon\Gamma A\,(I-\varepsilon\Gamma A)^{-1}\varphi,\gamma)+((I-\varepsilon\Gamma A)^{-1}\Gamma h,\ \gamma)=0.$$

Если воспользоваться равенством $(\Gamma u,\gamma)=(u,\psi)$, которое следует из формулы (21.24), и формулой

$$(I-\varepsilon\Gamma A)^{-1}\Gamma=\Gamma\,(I-\varepsilon A\Gamma)^{-1},$$

то уравнение для ξ можно переписать так:

$$\xi\,(\varepsilon A\,(I-\varepsilon\Gamma A)^{-1}\varphi,\ \psi)+((I-\varepsilon A\Gamma)^{-1}h,\ \psi)=0. \qquad (31.5)$$

Рассмотрим сначала коэффициент при ξ. Он равен

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(A\varphi^{(k)},\psi)\,\varepsilon^k, \qquad \text{где } \varphi^{(k)}=(\Gamma A)^{k-1}\varphi.$$

Первые p элементов последовательности $\{\varphi^{(k)}\}$ — это элементы A-жордановой цепочки. Далее, из (30.11) имеем $\varphi^{(p+1)}=(\Gamma A)\varphi^{(p)}=\varphi^{(1)}$. Отсюда вытекает, что в последовательности $\{\varphi^{(k)}\}$ периодически повторяется группа элементов A-жордановой цепочки, т. е. эта последовательность имеет вид $\varphi^{(1)},\ \dots,\ \varphi^{(p)},\ \varphi^{(1)},\ \dots,\ \varphi^{(p)},\ \dots$ (В частности, при $p=1$ последовательность стационарна.) Поэтому вследствие формул (30.5) и (30.7) имеем

$$(A\varphi^{(k)},\ \psi)=\begin{cases}1, & \text{если } k \text{ делится на } p,\\ 0, & \text{если } k \text{ не делится на } p,\end{cases}$$

и, следовательно,

$$(\varepsilon A\,(I-\varepsilon\Gamma A)^{-1}\varphi,\ \psi)=\varepsilon^p\,(1-\varepsilon^p)^{-1}.$$

Введем теперь в рассмотрение номер q $(0\leqslant q< +\infty)$, связанный с неоднородностью h. Если $(h,\psi)\neq 0$, то положим $q=0$. Пусть теперь $(h,\psi)=0$. Рассмотрим числовую последовательность $((A\Gamma)^s h,\ \psi)$, $s=0,\ 1,\ \dots,$ и обозначим через q номер первого отличного от нуля члена этой последовательности. Если последовательность состоит из одних нулей, то положим $q=+\infty$.

Пусть сначала и p и q конечны, тогда

$$\xi=-\frac{((I-\varepsilon A\Gamma)^{-1}h,\ \psi)}{\varepsilon^p}(1-\varepsilon^p), \qquad (31.6)$$

причем числитель имеет при $\varepsilon = 0$ нуль порядка q. Поэтому, если $0 \leqslant q < p < +\infty$, то ξ, а вместе с ней и решение $y(\varepsilon)$, получаемое подстановкой (31.5) в первую из формул (31.4), имеет при $\varepsilon = 0$ полюс порядка $p - q$. В этих же предположениях, если $q > 0$, уравнение (31.1) имеет при $\varepsilon = 0$ бесконечное множество решений

$$y = \Gamma h + \xi\varphi, \tag{31.7}$$

где ξ — произвольная постоянная.

Пусть теперь $1 \leqslant p \leqslant q < +\infty$, тогда из (31.6) видно, что $\xi(\varepsilon)$ — аналитическая функция ε в круге (31.3), а потому и решение $y(\varepsilon)$ — аналитическая функция в том же круге. Кроме того, при $\varepsilon = 0$ существует семейство решений вида (31.7).

Пусть p или q принимают бесконечные значения. Если $0 \leqslant q < p = +\infty$, то уравнение (31.5), а значит, и (31.1) при $\varepsilon \neq 0$ не имеют решения, ибо $((I - \varepsilon A\Gamma)^{-1}h, \psi) \not\equiv \not\equiv 0$, а $((I - \varepsilon\Gamma A)^{-1}\varphi, \psi) \equiv 0$. При $\varepsilon = 0$, если $q > 0$, существует решение вида (31.7). Если $1 \leqslant p < q = +\infty$, то из (31.6) имеем $\xi = 0$, и, следовательно, $y(\varepsilon)$ аналитично. Имеется также решение (31.7), определенное лишь при $\varepsilon = 0$. Остался случай $p = q = +\infty$. Теперь уравнение (31.5) удовлетворяется при любом ξ. Следовательно, наша задача в круге (31.3) имеет решение вида (31.7), где в качестве ξ можно выбрать произвольную функцию от ε. Этот случай можно назвать вырожденным. Этим установлено предложение.

Теорема 31.1. *Пусть $B \in \{E_1 \to E_2\}$ есть Ф-оператор с числом нулей $n = 1$ и $A \in \{E_1 \to E_2\}$.*

Если $p = J(\varphi, B, A) < +\infty$ (φ — базисный элемент в $N(B)$), то при всех $\varepsilon \in C$, где

$$C = \{\varepsilon,\ 0 < |\varepsilon| < \|\Gamma A\|^{-1}\}, \tag{31.8}$$

существует единственное решение $y(\varepsilon)$ уравнения (31.1).

Если дополнительно выполнено неравенство $p \leqslant q$, то $y(\varepsilon)$ аналитично и при $\varepsilon = 0$. Если $q < p$, то в C $y(\varepsilon)$ аналитично, а при $\varepsilon = 0$ имеет полюс порядка $p - q$.

Если $p = +\infty$ и $q < +\infty$, то в C уравнение (31.1) не имеет решений. Если $p = q = +\infty$, то уравнение (31.1) имеет в C однопараметрическое семейство решений вида (31.7), причем в качестве ξ можно взять произвольную функцию ε.

Отметим еще, что во всех случаях, когда $q > 0$, уравнение (31.1) имеет решение, определенное лишь при $\varepsilon = 0$. Это решение дается формулой (31.7), где ξ — произвольная постоянная.

31.2. Случай $n > 1$. Ограничимся здесь тем случаем, когда существует полный A-жорданов набор из нулей оператора B и A-присоединенных к ним элементов. Дефектные элементы $\varphi, \ldots, \varphi_n$ будем считать выбранными так, чтобы выполнялись равенства (30.14). Оператор $\tilde{B}$ строим с помощью $\{\gamma_i\}_1^n$ и $\{z_i\}_1^n$, удовлетворяющих формулам (30.15) и (30.16). Как и при доказательстве теоремы 30.1, уравнение (31.1) (оно же уравнение (30.21)) приводим, исключая y, к эквивалентному виду (30.24).

Рассмотрим n последовательностей

$$\varphi_i^{(s)} = (\Gamma A)^{s-1}\varphi_i, \qquad s = 1,\ 2, \ldots, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{31.9}$$

и заметим, что в i-й последовательности периодически повторяется группа элементов A-жордановой цепочки элемента φ_i, т. е. i-я последовательность имеет вид

$$\varphi_i^{(1)}, \ldots, \varphi_i^{(p_i)}, \varphi_i^{(1)}, \ldots, \varphi_i^{(p_i)}, \ldots$$

Это утверждение вытекает из формул (30.18). Поэтому из формул (30.15) следует, что

$$(\varphi_i^{(k)}, \gamma_l) = \begin{cases} \delta_{il}, & \text{если } k \text{ делится на } p_i, \\ 0, & \text{если } k \text{ не делится на } p_i. \end{cases} \tag{31.10}$$

Наряду с последовательностями (31.9) рассмотрим последовательность, порожденную элементом $h \in E_2$:

$$h^{(k)} = (A\Gamma)^k h, \qquad k = 0,\ 1, \ldots \tag{31.11}$$

С помощью этой последовательности каждому элементу $h \in E_2$ поставим в соответствие n целых неотрицательных чисел $q_1, \ldots, q_n$. Рассмотрим числовую последовательность

$$(h^{(k)}, \psi_i), \qquad k = 0,\ 1, \ldots \tag{31.12}$$

(i фиксировано). Если эта последовательность состоит из одних лишь нулей, то положим $q_i = +\infty$. В противном случае определим q_i как номер первого не равного нулю члена в последовательности (31.12).

Система (30.24) принимает, следовательно, вид (ср. (31.5))

$$\varepsilon^{p_i}(1-\varepsilon^{p_i})^{-1}\xi_i = -((I-\varepsilon A\Gamma)^{-1}h,\ \psi_i),\ i = 1, \dots, n.$$

Может представиться несколько случаев: если $p_i > q_i$, то $\xi_i = \xi_i(\varepsilon)$ имеет при $\varepsilon = 0$ полюс порядка $p_i - q_i$; если же $p_i \leqslant q_i < +\infty$ или $p_i < q_i = +\infty$, то $\xi_i(\varepsilon)$ аналитична в C.

Мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 31.2. *Пусть $B \in \{E_1 \to E_2\}$ есть Ф-оператор с $n > 1$, $A \in \{E_1 \to E_2\}$, и пусть существует полный A-жорданов набор из нулей оператора B и A-присоединенных к ним элементов. Тогда существует единственное решение $y(\varepsilon)$ уравнения* (31.1), *аналитичное в C* (см. (31.8)). *Если все числа $p_i - q_i \leqslant 0$, то $y(\varepsilon)$ аналитично и при $\varepsilon = 0$, в противном случае $y(\varepsilon)$ имеет при $\varepsilon = 0$ полюс порядка $\max_i (p_i - q_i)$. Если все $q_i > 0$, то существует также решение уравнения* (31.1), *определенное лишь при $\varepsilon = 0$. Оно дается формулой*

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\varphi_i + \Gamma h,$$

где ξ_i — произвольные числа.

31.3. Метод неопределенных коэффициентов. Ограничимся рассмотрением случая $n = 1$, достаточно хорошо иллюстрирующего метод.

Пусть сначала $p < +\infty$, тогда согласно теореме 31.1 уравнение (31.1) имеет в круге (31.8) единственное решение $y(\varepsilon)$.

Если $q < p$, то это решение представимо в виде

$$y(\varepsilon) = \sum_{i=-p+q} y_{p-q+1-i}\,\varepsilon^{i} \tag{31.13}$$

и его можно найти методом неопределенных коэффициентов. Подставим ряд (31.13) в уравнение (31.1) и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную систему для определения коэффициентов $y_1, y_2, \ldots$ $(p-q>1)$:

$$\left.\begin{aligned} &By_1 = 0, \\ &By_k = Ay_{k-1}, \quad k=2,\ldots,p-q, \\ &By_{p-q+1} = Ay_{p-q}+h, \\ &By_l = Ay_{l-1}, \quad l=p-q+2,\ldots \end{aligned}\right\} \tag{31.14}$$

Если $p-q=1$, то система эта упрощается:

$$\left.\begin{aligned} &By_1 = 0,\ By_2 = Ay_1+h, \\ &By_l = Ay_{l-1}, \quad l=3,4,\ldots \end{aligned}\right\} \tag{31.15}$$

Пусть пока $p-q>1$. Из первого уравнения системы (31.14) находим $y_1=\xi_1\varphi^{(1)}$, где ξ_1 — постоянная, подлежащая определению. Правая часть второго уравнения той же системы равна $\xi_1 A\varphi^{(1)}$, и вследствие (30.5) это второе уравнение разрешимо, причем

$$y_2 = \xi_1\varphi^{(2)} + \xi_2\varphi^{(1)},$$

где ξ_2 также еще предстоит определить.

Методом математической индукции устанавливаются формулы

$$y_i = \sum_{j=1}^{i} \xi_j\varphi^{(i+1-j)}, \quad i=1,\ldots,p-q, \tag{31.16}$$

$$y_k = \sum_{j=1}^{k} \xi_j\varphi^{(k+1-j)} + h_{k-p+q}, \quad k=p-q+1,\ldots,p, \tag{31.17}$$

где

$$h_k = \Gamma\,(A\Gamma)^{k-1}h, \quad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{31.18}$$

Отметим, что такие же формулы получаются при $p-q=1$, так что ограничение $p-q>1$ можно снять.

Рассмотрим правую часть $(p+1)$-го уравнения системы (31.14) или (31.15). Она равна

$$\sum_{j=1}^{p} \xi_j A\varphi^{(p+1-j)} + Ah_q.$$

Поэтому вследствие формул (30.5) и (30.7) условие разрешимости указанного $(p+1)$-го уравнения имеет такой вид:

$$(Ah_q, \psi) + \xi_1 = 0.$$

Но $Ah_q = h^q$ (см. (31.11)) и по определению числа q $(Ah_q, \psi) \neq 0$, поэтому необходимо $\xi_1 = -(Ah_q, \psi)$. Теперь $(p+1)$-е уравнение разрешимо и из него находим

$$y_{p+1} = \sum_{j=1}^{p+1} \xi_j \varphi^{(p+2-j)} + h_{q+1}.$$

Точно так же методом математической индукции устанавливается справедливость формул (31.17) при любом $k \geqslant p - q + 1$. При этом ξ_j определяется с запаздыванием в p шагов из условия разрешимости $(p+j)$-го уравнения и

$$\xi_j = -(Ah_{q+j-1}, \psi).$$

Решение (31.13) построено. Сходимость полученного ряда доказывать не нужно, так как она является следствием аналитичности $y(\varepsilon)$ при $\varepsilon \in C$.

Пусть $p \leqslant q < +\infty$ или $q = +\infty$. Решение $y(\varepsilon)$ согласно той же теореме 31.1 следует искать в виде

$$y(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \varepsilon^i. \tag{31.19}$$

Подстановка (31.18) в (31.11) приводит к такой рекуррентной системе:

$$By_0 = h, \quad By_l = Ay_{l-1}, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{31.20}$$

Так как $q \geqslant 1$, то первое уравнение разрешимо, и из него находим (см. (31.18)) $y_0 = h_1 + \xi_1\varphi^{(1)}$. Правая часть второго уравнения системы (31.20) равна $Ah_1 + \xi_1 A\varphi^{(1)}$. Если $p = 1$, то из условия разрешимости этого уравнения найдем $\xi_1 = -(Ah_1, \psi)$. В общем случае методом математической индукции устанавливаем, что

$$y_l = h_{l+1} + \sum_{i=1}^{l+1} \xi_j \varphi^{(l+2-j)}, \quad l = 0, 1, \ldots,$$

причем ξ_j определяются с запаздыванием в p шагов из условия разрешимости $(p+j)$-го уравнения (ξ_j появляется при решении j-го уравнения) и $\xi_j = -(Ah_{p+j-1}, \psi))$.

Заметим, что из определения вытекает, что $\xi_j = 0$ при $j = 1, \ldots, q-p$; в частности, при $q = +\infty$ все $\xi_j = 0$. Сходимость ряда (31.19) следует при $|\varepsilon| < \|\Gamma A\|^{-1}$ из теоремы 31.1.

При $p = +\infty$, $q < +\infty$, как мы знаем, решения уравнения (23.1) при $|\varepsilon| \neq 0$ не существует. При $p = q = +\infty$ метод неопределенных коэффициентов не всегда применим, как показывает следующий пример.

Рассмотрим уравнение (см. п.30.4, откуда взят оператор B)

$$Bx = \varepsilon Bx + x_3, \quad x \in H$$

(здесь $A = B$). Уравнение это имеет общее решение вида

$$x(\varepsilon) = (1-\varepsilon)^{-1}x_5 + \xi(\varepsilon)x_3,$$

где $\xi(\varepsilon)$ — произвольная функция. Положим, в частности, $\xi(\varepsilon) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n n!$, тогда радиус сходимости ряда $x(\varepsilon)$ равен нулю (формальное решение).

Если $n > 1$ и существует полный A-жорданов набор, решение $y(\varepsilon)$ уравнения (31.1), согласно теореме 31.2, можно найти в виде

$$y(\varepsilon) = \sum_{i=-s}^{+\infty} y_i \varepsilon^i,$$

где $s = \max\limits_i (p_i - q_i)$, если среди чисел $p_i - q_i$ есть положительные; если же все $p_i - q_i \leqslant 0$, то следует положить $s = 0$.

В заключение отметим, что результаты параграфа переносятся на более общие уравнения

$$By = h + \sum_{i=1}^{+\infty} A_i \varepsilon^i,$$

в том числе с неограниченными операторами.

§ 32. Ветвление собственных значений и собственных элементов фредгольмовских операторов

Пусть $A \in \{E \to E\}$, причем λ_0 является собственным значением оператора A с собственным подпространством размерности $n \geqslant 1$. Рассмотрим оператор $B = A - \lambda_0 I$ и предположим, что это есть Ф-оператор.

Пусть, далее, ε — малый комплексный параметр: $|\varepsilon| \leqslant \rho_0$, и $A(\varepsilon) \in \{E \to E\}$ непрерывен по ε в равномерной операторной топологии, причем $A(0) = A$. Задача теории возмущений состоит в следующем: найти собственные значения $\lambda_0 + \mu(\varepsilon)$ оператора $A(\varepsilon)$ такие, чтобы $\mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а также собственные элементы, отвечающие этим собственным значениям.

Задаче этой посвящена обширная литература (см., например, Данфорд и Шварц [1]). Нашей целью является применить к исследованию этой задачи методы теории ветвления, изложенные выше для нелинейных уравнений (см. В. А. Треногин [5]).

32.1. Вывод уравнения разветвления. Пусть y — собственный элемент оператора $A(\varepsilon)$, отвечающий собственному значению $\lambda_0 + \mu$. По определению это означает, что

$$A(\varepsilon)y = (\lambda_0 + \mu)y. \tag{32.1}$$

Если воспользоваться обозначением $B = A - \lambda_0 I$ и обозначением

$$H(\varepsilon) = A - A(\varepsilon) \quad (H(0) = 0), \tag{32.2}$$

то равенство (32.1) можно переписать в виде

$$By = H(\varepsilon)y + \mu y. \tag{32.3}$$

Введем, как обычно, в рассмотрение систему элементов $\{\varphi_i\}_1^n$, образующую базис в $N(B)$, биортогональную к ней систему функционалов $\{\gamma_i\}_1^n$, систему функционалов $\{\psi_i\}_1^n$, образующую базис в $N^*(B)$, и биортогональную к ней систему элементов $\{z_i\}_1^n$. Построим оператор Шмидта $\tilde{B} = B + \sum\limits_{i=1}^{n} (\cdot, \gamma_i) z_i$, обратный к которому обозначим через Γ. Уравнение (32.3) заменим эквивалентной ему системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{B}y &= H(\varepsilon)\,y + \mu y + \sum_{i=1}^{n} \xi_i z_i, \\ \xi_k &= (y, \gamma_k), \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{32.4}$$

Первое уравнение этой системы можно записать так:

$$(I - \Gamma H(\varepsilon) - \mu\Gamma)\,y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i. \tag{32.5}$$

Вследствие непрерывности $H(\varepsilon)$ в равномерной операторной топологии при всех ε и μ, удовлетворяющих неравенству

$$\| \Gamma H(\varepsilon) + \mu\Gamma \| \leqslant q < 1, \tag{32.6}$$

оператор $[I - \Gamma H(\varepsilon) - \mu\Gamma]^{-1}$ существует и ограничен. Поэтому при ε и μ, удовлетворяющих (32.6), из уравнения (32.5) находим

$$y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, [I - \Gamma H(\varepsilon) - \mu\Gamma]^{-1} \varphi_i. \tag{32,7}$$

Подставляя это выражение в последние n уравнений системы (32.4), приходим к следующей системе для определения $\xi_1, \ldots, \xi_n$:

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_i ([I - \Gamma H(\varepsilon) - \mu\Gamma]^{-1} \varphi_i, \gamma_k), \quad k = 1, \ldots, n. \tag{32.8}$$

Учитывая биортогональность систем $\{\gamma_i\}_1^n$ и $\{\varphi_i\}_1^n$, а также то обстоятельство, что $(\Gamma u, \gamma_k) = (u, \psi_k)$, запишем систему (32.8) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(\varepsilon, \mu)\, \xi_i = 0, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{32.9}$$

где

$$a_{ik}(\varepsilon, \mu) = ([H(\varepsilon) + \mu I]\,[I - \Gamma H(\varepsilon) - \mu\Gamma]^{-1} \varphi_i, \gamma_k), \tag{32.10}$$
$$i, k = 1, \ldots, n.$$

Система (32.9) является однородной линейной системой n алгебраических уравнений с n неизвестным, и для того, чтобы она имела нетривиальное решение (собственный элемент (32.7) не может равняться нулю), необходимо и достаточно, чтобы

$$L(\mu,\ \varepsilon) \equiv \det \| a_{ik}(\varepsilon,\ \mu) \| = 0. \tag{32.11}$$

Это и есть уравнение для определения поправок $\mu(\varepsilon)$ к собственному значению λ_0. Мы будем называть его уравнением разветвления [1]) собственного значения λ_0.

Из наших рассуждений следует, что формула $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \mu(\varepsilon)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между собственными значениями $\lambda(\varepsilon)$ оператора $A(\varepsilon)$ и корнями $\mu(\varepsilon)$ уравнения разветвления (32.11).

Для того чтобы найти соответствующие $\lambda(\varepsilon)$ элементы $y(\varepsilon)$ (где $\mu(\varepsilon)$ — корень уравнения (32.11)), следует подставить $\mu(\varepsilon)$ в систему (32.9), найти все ее линейно независимые решения $\xi_1(\varepsilon), \ldots, \xi_n(\varepsilon)$ и подставить каждое из них и $\mu(\varepsilon)$ в формулу (32.7). Таким путем будут найдены все собственные элементы, отвечающие $\lambda_0 + \mu(\varepsilon)$.

32.2. Уравнение разветвления в аналитическом случае. Предположим теперь, что оператор $A(\varepsilon)$ является аналитическим при $|\varepsilon| \leqslant \rho_0$, т. е. разлагается в ряд

$$A(\varepsilon) = A - \sum_{i=1}^{+\infty} H_i \varepsilon^i, \tag{32.12}$$

причем мажорантный числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \|H_i\| \rho_0^i$ сходится.

Фиксируем положительные числа ρ и r $(\rho \leqslant \rho_0)$ такие, что

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|H_i\| \rho^i + r < \|\Gamma\|^{-1}; \tag{32.13}$$

тогда при $|\varepsilon| \leqslant \rho$ и $|\mu| \leqslant r$ выполнено неравенство (32.6) и справедливо все изложенное в предыдущем пункте.

---

[1]) В литературе уравнение (32.11) часто называют секулярным уравнением.

Однако теперь имеем

$$a_{ik}(\varepsilon, \mu) = \sum_{\alpha+\beta\geqslant 1} a_{ik\alpha\beta}\,\mu^\alpha\varepsilon^\beta,$$

причем эти ряды сходятся абсолютно и равномерно при $|\varepsilon| \leqslant \rho$, $|\mu| \leqslant r$; поэтому и $L(\mu, \varepsilon) = \det \| a_{ik} \| (\varepsilon, \mu) \|$ является аналитической функцией ε и μ, причем из того факта, что в каждую из функций $a_{ik}(\varepsilon, \mu)$ переменные ε и μ входят по меньшей мере линейно, вытекает, что уравнение разветвления (32.11) можно записать теперь в следующем виде:

$$L(\mu, \varepsilon) \equiv \sum_{\alpha+\beta\geqslant n} L_{\alpha\beta}\mu^\alpha\varepsilon^\beta = 0. \tag{32.14}$$

Это уравнение подробно изучено нами с помощью метода диаграммы Ньютона в п.2.7.

Полученные там выводы мы применим к задаче о возмущении собственных значений и собственных элементов.

32.3. Вырожденный и невырожденный случаи. Рассмотрим сначала тривиальный (вырожденный) случай, когда все коэффициенты $L_{\alpha\beta}$ уравнения разветвления (32.14) равны нулю. В данном случае всякое λ, достаточно близкое к λ_0, является при достаточно малых ε собственным значением возмущенного оператора $A(\varepsilon)$. Соответствующие числу $\lambda_0 + \mu$ собственные элементы определяются при данном μ формулой (32.7), где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ пробегают фундаментальную систему решений системы (32.9). В общем случае можно утверждать лишь, что размерность собственного подпространства, отвечающего λ, не превосходит n и равна n, если в точке (ε, μ) все функции $a_{ik}(\varepsilon, \mu)$ обращаются в нуль. В частности, если $a_{ik}(\varepsilon, \mu) \equiv 0$, $i, k = 1, \ldots, n$, то указанная размерность равна в точности n и в качестве базиса в собственном подпространстве можно выбрать элементы

$$\varphi_i(\varepsilon, \mu) = [I - \Gamma H(\varepsilon) - \mu\Gamma]^{-1}\varphi_i.$$

Линейная независимость системы, составленной из этих элементов при всех достаточно малых ε и μ, вытекает из линейной независимости системы элементов $\varphi_i(0, 0) = \varphi_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Указанный случай всегда имеет место при $n = 1$, когда $L(\mu, \varepsilon) \equiv a_{11}(\varepsilon, \mu)$.

Приведем пример, показывающий, что вырожденный случай действительно возможен при возмущении фредгольмовского оператора.

Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$By = \varepsilon y + \lambda y. \tag{32.15}$$

Здесь $A = I$, а B — фредгольмовский оператор в гильбертовом пространстве H. Построим оператор $\tilde{B} = B + (\cdot, x_3)x_1$. Отсюда и из определения оператора B вытекает, что $\tilde{B}$ можно задать также равенствами

$$\tilde{B}x_1 = x_2, \quad \tilde{B}x_{2i+1} = x_{2i-1}, \quad \tilde{B}x_{2i} = x_{2i+2}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Уравнение (32.15) эквивалентно системе

$$\tilde{B}y = (\varepsilon + \lambda)y + \xi x_1, \quad \xi = (y, x_3)$$

или системе

$$y = (\varepsilon + \lambda)\Gamma y + \xi x_3, \quad \xi = (y, x_3),$$

откуда получаем уравнение для определения y, ξ:

$$\left.\begin{aligned} y &= \xi\,[I - (\varepsilon + \lambda)\,\Gamma]^{-1} x_3, \\ \xi &= \xi\,([I - (\varepsilon + \lambda)\,\Gamma]^{-1} x_3, x_3). \end{aligned}\right\} \tag{32.16}$$

Так как Γ (также и $\tilde{B}$) является изометрическим оператором, то $\|\Gamma\| = 1$, и, следовательно, при $|\varepsilon + \lambda| < 1$ имеем

$$[I - (\varepsilon + \lambda)\,\Gamma]^{-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} (\varepsilon + \lambda)^i \Gamma^i,$$

и уравнение (32.16) можно записать в виде

$$\xi \sum_{i=1}^{+\infty} (\Gamma^i x_3, x_3)(\varepsilon + \lambda)^i = 0.$$

Заметим, что

$$\Gamma^i x_3 = x_{2i+3} \text{ при } i \geqslant 1.$$

Поэтому при $i \geqslant 1$

$$(\Gamma^i x_3, x_3) = 0.$$

Отсюда следует, что уравнение (32.16) есть тождество при любых ε и λ таких, что $|\varepsilon+\lambda|<1$.

Следовательно, при всех ε, удовлетворяющих неравенству

$$0<|\varepsilon|\leqslant\rho_0<1,$$

спектр оператора $B-\varepsilon I$ заполняет сферу

$$|\lambda|<1-\rho_0.$$

Каждая точка λ этой сферы является собственным значением, которому отвечает единственный с точностью до числового множителя собственный элемент

$$y=[I-(\varepsilon+\lambda)\Gamma]^{-1}x_3=x_3+(\varepsilon+\lambda)x_5+\sum_{i=2}^{+\infty}(\varepsilon+\lambda)^i x_{2i+3}.$$

Всюду ниже исследуется лишь невырожденный случай, когда при достаточно малых ε и μ $L(\mu,\varepsilon)\not\equiv 0$. Из метода диаграммы Ньютона в применении к уравнению разветвления (32.14) вытекает следующее предложение (см. п. 12.1).

Теорема 32.1. *В невырожденном аналитическом случае при всех достаточно малых $\varepsilon\neq 0$ существует не более чем конечное число непрерывных по ε собственных значений $\lambda(\varepsilon)=\lambda_0+\mu(\varepsilon)$ оператора $A(\varepsilon)$, удовлетворяющих условию $\mu(0)=0$. Каждому из них отвечает конечное число линейно независимых собственных элементов $y(\varepsilon)$. Все $\lambda(\varepsilon)$ и $y(\varepsilon)$ представимы сходящимися рядами по целым или дробным степеням ε.*

Ниже будут получены различные достаточные условия, конкретизирующие результаты этой теоремы.

32.4. Одномерный случай. Здесь мы предполагаем, что $n=1$, и рассматриваем невырожденный аналитический случай.

Теперь уравнение разветвления принимает вид

$$L(\mu,\varepsilon)\equiv([H(\varepsilon)+\mu I][I-\Gamma H(\varepsilon)-\mu\Gamma]^{-1}\varphi,\psi)=0,\tag{32.17}$$

где φ и ψ — базисные элементы в $N(B)$ и $N^*(B)$ соответственно, а собственные элементы определяются формулой

$$y(\varepsilon)=[I-\Gamma H(\varepsilon)-\mu\Gamma]^{-1}\varphi,\tag{32.18}$$

где вместо μ следует подставить $\mu(\varepsilon)$ — малые решения уравнения (32.17). Исследуем сначала случай, когда $p = J(\varphi, B, I) < +\infty$. Будем считать, что оператор $\tilde{B}$ и жорданова цепочка построены специальным образом: так, чтобы выполнялись условия (31.6) и (31.7), причем в последнем условии $A = I$. Теперь для элементов жордановой (I-жордановой) цепочки $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(p)}$ справедливы формулы (31.11) также при $A = I$:

$$\varphi^{(k)} = \Gamma^{k-1}\varphi, \qquad k = 1, \ldots, p. \tag{32.19}$$

Из формулы (31.7) при $A = I$ и из формул (32.17) и (32.14) при $\varepsilon = 0$ непосредственно видно, что

$$L_{i0} = 0, \ i < p, \ L_{p0} = 1. \tag{32.20}$$

Заметим, что при $p = 1$ можно принять $\psi = \gamma$, ибо $(\varphi, \psi) = 1$ (ср. п.21.2).

Рассмотрим сначала случай $p = 1$. Здесь $L_{10} \neq 0$, для исследования уравнения (33.17) можно применить обычную теорему 1.2 о неявных функциях. Равенство $p = 1$ имеет место, например, когда B — эрмитов оператор в гильбертовом пространстве H. Приведем соответствующий результат.

Теорема 32.2. *Пусть $J(\varphi, B, I) = 1$, тогда существует единственное непрерывное по ε для достаточно малых значений ε собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ ($\lambda(0) = \lambda_0$) оператора $A(\varepsilon)$ и ему отвечает единственный собственный элемент $y(\varepsilon)$. Функции $\lambda(\varepsilon)$ и $y(\varepsilon)$ являются аналитическими.*

Замечание. В частном случае, когда B и $H(\varepsilon)$ эрмитовы и ε — вещественный параметр, собственное значение $\lambda(\varepsilon)$, указанное в теореме 32.2, вещественно.

Перейдем теперь к более содержательному случаю, когда длина жордановой цепочки элемента φ

$$J(\varphi, B, I) = p \text{ и } 1 < p < +\infty.$$

Здесь мы воспользуемся методом диаграммы Ньютона (см. п.2.7), который приводит к различным предложениям о собственных значениях и собственных функциях оператора $A(\varepsilon)$.

Из формул (32.20) и (32.7) вытекает

Теорема 32.3. *Пусть выполнено условие* $1 < p < +\infty$, *тогда при всех достаточно малых* $\varepsilon \neq 0$ *существует ровно* p (*с учетом кратности*) *непрерывных по* ε *собственных значений* $\lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \mu(\varepsilon)$ *оператора* $A(\varepsilon)$ *таких, что* $\lambda(0) = \lambda_0$ *и все они представимы сходящимися рядами по целым или дробным степеням* ε. *Каждому* $\lambda(\varepsilon)$ *отвечает собственный элемент* $y(\varepsilon)$, *определяемый по формуле* (32.18) *и представимый сходящимся рядом по тем же дробным степеням, что и* $\lambda(\varepsilon)$.

Рассмотрим несколько частных случаев теоремы 32.3.

Предположим, что (см. формулу (32.12)) $L_{01} = (H_1\varphi, \psi) \neq 0$. Тогда диаграмма Ньютона, составленная для уравнения (32.17), имеет убывающую часть, состоящую из одного отрезка, соединяющего точки $(0, 1)$ и $(p, 0)$. Следовательно, показатель равен $\frac{1}{p}$. Далее, определяющее уравнение имеет вид ($L_{p0} = 1$)

$$\mu_1^p + L_{01} = 0.$$

Отсюда вытекает

Следствие 32.1. Если $1 < p < +\infty$ и $L_{01} \neq 0$, то собственные значения и элементы, указанные в теореме 32.3, представимы рядами по степеням $\varepsilon^{1/p}$, причем при $\varepsilon \to 0$

$$\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_0 + [-(H_1\varphi, \psi)\,\varepsilon]_i^{\frac{1}{p}} + o(\varepsilon^{\frac{1}{p}}),$$

$$y_i(\varepsilon) = \varphi + [-(H_1\varphi, \psi)\,\varepsilon]_i^{\frac{1}{p}}\,\Gamma\varphi + o(\varepsilon^{\frac{1}{p}}).$$

Заметим, что под $[\ \ ]_i^{\frac{1}{p}}$ следует понимать последовательно все p значений корня p-й степени. Далее, согласно определению $\Gamma\varphi = \varphi^{(2)}$. В частности, для вещественного случая (E, A, $H(\varepsilon)$ и ε вещественны) можно сделать следующий вывод: если p нечетно, то существует одно собственное значение (и один собственный элемент); если же p четно, то в полуокрестности, где $(H_1\varphi, \psi)\varepsilon < 0$, существует два собственных значения, а в полуокрестности, где $(H_1\varphi,\psi)\,\varepsilon > 0$, собственных значений нет.

Приведем пример, когда диаграмма может содержать убывающую часть, состоящую более чем из одного отрезка.

Теорема 32.4. *Пусть выполнены условия:* $1 < p < +\infty$, $L_{01} = 0$, $L_{11} = \frac{1}{2}(H_1\Gamma\varphi + \Gamma H_1\varphi, \psi) \neq 0$ *при* $p = 2$, *пусть* $L_{02} = (H_1\Gamma H_1\varphi + H_2\varphi, \psi) = 0$. *Тогда при всех достаточно малых* $\varepsilon \neq 0$ *существует ровно* p *различных непрерывных по* ε *собственных значений* $\lambda(\varepsilon)$ $(\lambda(0) = \lambda_0)$ *оператора* $A(\varepsilon)$, *причем одно собственное значение представимо сходящимся рядом по целым степеням* ε, *а* $p-1$ *собственных значений представимы сходящимся рядом по степеням* $\varepsilon^{1/(p-1)}$. *Каждому* $\lambda(\varepsilon)$ *отвечает собственный элемент* $y(\varepsilon)$, *представимый сходящимся рядом по тем же степеням* ε, *что и соответствующее ему* $\lambda(\varepsilon)$.

Доказательство. Заметим, что и при $p = 2$ и при $p > 2$ убывающая часть диаграммы Ньютона, построенной для уравнения разветвления (32.17), состоит либо из одного отрезка, соединяющего точки $(1, 1)$ и $(p, 0)$ (так будет, если все $L_{0j} = 0$), либо из двух отрезков: указанного выше и отрезка, соединяющего точки $(0, q)$ и $(1, 1)$, где q — номер первого отличного от нуля члена в последовательности $\{L_{0i}\}_2^{+\infty}$. Первому отрезку отвечает показатель $\frac{1}{p-1}$, а второму отрезку в любом случае — целочисленный показатель. Утверждение теоремы следует, таким образом, из рассуждений п.2.7.

Замечание. При помощи диаграммы Ньютона находим приближенные формулы при $\varepsilon \to 0$: одна пара $\lambda(\varepsilon)$, $y(\varepsilon)$ имеет вид $(p > 2)$

$$\lambda_p(\varepsilon) = \lambda_0 + O(\varepsilon),\quad y_p(\varepsilon) = \varphi + O(\varepsilon),$$

при $p = 2$ имеем

$$\lambda_p(\varepsilon) = \lambda_0 + O(\varepsilon^2),\quad y_p(\varepsilon) = \varphi + O(\varepsilon^2).$$

Остальные $p-1$ пар $\lambda(\varepsilon)$, $y(\varepsilon)$ имеют вид $(p > 2)$

$$\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_0 + [-2L_{11}\varepsilon]_i^{\frac{1}{p-1}} + o\left(\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}\right),$$

$$y_i(\varepsilon) = \varphi + [-2L_{11}\varepsilon]_i^{\frac{1}{p-1}}\Gamma\varphi + o\left(\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}\right);$$

если же $p = 2$, то

$$\lambda_1(\varepsilon) = \lambda_0 - 2L_{11}\varepsilon + o(\varepsilon),$$

$$y_1(\varepsilon) = \varphi + [(H_1\varphi - 2L_{11}\Gamma\varphi]\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Если в условиях теоремы 32.4 имеем $L_{0j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots$, то для всех достаточно малых $\varepsilon\, \lambda_p(\varepsilon) \equiv \lambda_0$ и $y_p(\varepsilon) \equiv \equiv \varphi$. Легко убедиться, что если $H(\varepsilon) \equiv \varepsilon H_1$, то для того, чтобы $L_{i0} = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, необходимо и достаточно выполнение условия $H(\varphi, B, H_1) = +\infty$ (см. п.31.1).

В вещественном случае (в условиях теоремы 32.4) при p четном в окрестности точки $\varepsilon = 0$ существует два различных собственных значения $\lambda(\varepsilon)$. При p нечетном в той полуокрестности точки $\varepsilon = 0$, где $L_{11}\varepsilon > 0$, существует одно собственное значение, а в той полуокрестности, где $L_{11}\varepsilon < < 0$, существует три различных собственных значения $\lambda(\varepsilon)$ оператора $A(\varepsilon)$. Рассмотрим еще случай, когда $L_{02} \neq 0$, $L_{20} \neq 0$ $(p = 2)$ (требование $L_{11} \neq 0$ здесь несущественно) и $\Delta = L_{11}^2 - L_{02} \neq 0$. Здесь убывающая часть диаграммы Ньютона состоит из отрезка, соединяющего точки (0,2) и (2,0), которому отвечает значение показателя 1. Корни определяющего уравнения простые, так как $\Delta \neq 0$. Значит, существует два собственных значения и элемента, аналитически зависящие от ε.

В вещественном случае это утверждение сохраняется при $\Delta > 0$. Если $\Delta < 0$, то собственных значений $\lambda(\varepsilon)$, $\lambda(0) = \lambda_0$ оператор $A(\varepsilon)$ не имеет.

Указанным выше методом можно получить и другие аналогичные утверждения. Нам представляется, что приведенные предложения в достаточной степени иллюстрируют случай $p < +\infty$. Приведем результат, показывающий, что это предположение несущественно (известные нам классические методы теории возмущений всегда основываются на предположении конечномерности корневого подпространства оператора B и, следовательно, не позволяют изучить случай $p = +\infty$).

Т е о р е м а 32.5. *Пусть $p = +\infty$. Если $L_{01} \neq 0$, то $A(\varepsilon)$ не имеет собственных значений $\lambda(\varepsilon)$ таких, что $\lambda(0) = = \lambda_0$ при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$. Если $L_{01} = 0$, $L_{02} \neq 0$ и существует $q < +\infty$ такое, что L_{q1} — первый отличный от нуля коэффициент в последовательности $\{L_{j1}\}_1^{+\infty}$, то при всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ оператор $A(\varepsilon)$ имеет q различных собственных значений $\lambda_i(\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, q$, представимых сходящимися рядами по степеням $\varepsilon^{1/q}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убывающая часть диаграммы Ньютона отсутствует при $L_{01} \neq 0$ и состоит из одного отрезка, соединяющего точки $(q, 1)$ и $(0, 2)$, при $L_{01} = 0$, $L_{02} \neq 0$, причем в рассматриваемом случае она не достигает оси абсцисс. Утверждение теоремы следует теперь из результата п.2.7 и из формулы (32.18).

П р и м е р. Покажем, что описанные в теореме 32.5 случаи действительно возможны. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$(B - \varepsilon A)y = \mu y$$

в гильбертовом пространстве H, где B — оператор, построенный в п.31.4 (см. также п.32.3). Мы видели, что $J(x_3, B, I) = +\infty$ эквивалентно условиям $L_{i0} = 0$, $i = 2, 3, \ldots$ Зададим сначала оператор A формулами $Ax_3 = x_1$, $Ax_k = 0$ при $k \neq 3$. Имеем тогда $\Gamma A x_3 = x_3$. Поэтому $L_{01} = (\Gamma A x_3, x_3) = 1$, и согласно теореме 32.5 при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ оператор $B - \varepsilon A$ собственных значений $\lambda(\varepsilon)$ таких, что $\lambda(0) = \lambda_0$, не имеет.

Зададим теперь оператор A так:

$$Ax_3 = x_2,\ Ax_1 = x_1,\ Ax_s = 0,\ s \neq 1,\ 3.$$

Имеем согласно п.32.3

$$\begin{aligned}
L_{01} &= (\Gamma A x_3, x_3) = (\Gamma x_2, x_3) = (x_1, x_3) = 0,\\
L_{02} &= ((\Gamma A)^2 x_3, x_3) = (\Gamma A x_1, x_3) = (\Gamma x_1, x_3) = 1,\\
2L_{11} &= (\Gamma A \Gamma x_3 + \Gamma^2 A x_3, x_3) = (\Gamma A x_5, x_3) + (\Gamma^2 x_2, x_3) = \\
&= (\Gamma x_1, x_3) = 1.
\end{aligned}$$

Из теоремы 32.5 следует, что при всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ оператор $B - \varepsilon A$ имеет единственное собственное значение $\lambda(\varepsilon) \sim \lambda_0 - \varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$, ему отвечает собственный элемент $y(\varepsilon) \sim x_1$.

32.5. Метод неопределенных коэффициентов[1]. В предыдущих пунктах было показано, что при достаточно общих предположениях собственные значения и собственные элементы возмущенного оператора представимы сходящимися рядами по целым или дробным степеням малого параметра ε. В этих случаях для практического нахождения собственных значений и собственных элемен-

[1]) См. также М. И. В и ш и к и Л. А. Л ю с т е р н и к [1], В. Б. Л и д с к и й [1].

тов удобно также пользоваться методом неопределенных коэффициентов. Применение этого метода базируется на некоторых элементарных соображениях.

Введем при $k \geqslant i$ (k и i — натуральные числа) многочлены $P_{ki}(\mu_1, \ldots, \mu_{k-i+1})$ от $k-i+1$ комплексных переменных как коэффициенты в формальном разложении

$$\left[\sum_{l=1}^{+\infty} \mu_l \varepsilon^l\right]^i = \sum_{k=i}^{+\infty} P_{ki}(\mu_1, \ldots, \mu_{k-i+1})\, \varepsilon^k. \tag{32.21}$$

Очевидно, имеем

$$P_{ki}(\mu_1, \ldots, \mu_{k-i+1}) = \sum_{s_1+\ldots+s_i=k} \mu_{s_1}\mu_{s_2}\ldots\mu_{s_i}. \tag{32.22}$$

Из определения многочленов P_{ki} следуют формулы

$$\left.\begin{array}{l} P_{k1}(\mu_1, \ldots, \mu_k) = \mu_k, \\ P_{kk}(\mu_1) = \mu_1^k,\ P_{k+1\,k}(\mu_1, \mu_2) = k\mu_1^{k-1}\mu_2 \end{array}\right\} \tag{32.23}$$

и более общая формула

$$P_{k+l\,k}(\mu_1, \ldots, \mu_{l+1}) = k\mu_1^{k-1}\mu_{l+1} + R_{k+l\,k}(\mu_1, \ldots, \mu_l), \tag{32.24}$$

где $R_{k+l\,k}$ — некоторые многочлены, и для нас существенно лишь то, что они не зависят от μ_{l+1}.

Л е м м а 32.1. *Справедлива формула сложения*

$$\sum_{j=1}^{k-i+1} P_{k-j\,i-1}(\mu_1, \ldots, \mu_{k-j-i+2})\, P_{j1}(\mu_1, \ldots, \mu_j) = \\ = P_{ki}(\mu_1, \ldots, \mu_{k-i+1}). \tag{32.25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем искомую формулу так (см. (32.23)):

$$\sum_{j=1}^{k-i+1} P_{k-j\,i-1}(\mu_1, \ldots, \mu_{k-j-i+2})\,\mu_j = P_{ki}(\mu_1, \ldots, \mu_{k-i+1}).$$

Из формулы (32.21) имеем тождество

$$\sum_{k=i}^{+\infty} P_{ki}\varepsilon^k = \left[\sum_{r=i-1}^{+\infty} P_{r\,i-1}\varepsilon^r\right]\left[\sum_{l=1}^{+\infty} \mu_l \varepsilon^l\right].$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим формулу (32.25). Лемма доказана.

Для иллюстрации применения метода неопределенных коэффициентов мы рассмотрим характерный случай условий теоремы 32.4, где $n = 1$, $J(\varphi, B, I) = p$, $1 < p < +\infty$, $L_{01} \neq 0$. Согласно теореме 32.4 $y(\varepsilon)$ и $\mu(\varepsilon)$ следует искать в виде

$$y(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \varepsilon^{\frac{i}{p}}, \quad \mu(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu_i \varepsilon^{\frac{i}{p}}. \tag{32.26}$$

Для определенности нормируем $y(\varepsilon)$ так: $(y(\varepsilon), \gamma) = 1$. Следовательно, имеем

$$(y_0, \gamma) = 1, \ (y_i, \gamma) = 0, \ i = 1, 2, \ldots \tag{32.27}$$

Мы уже знаем, что ряды (32.26) сходятся при всех достаточно малых ε, и наша цель — дать метод, позволяющий определить все коэффициенты y_i и μ_i. Подставляя выражения (32.26) в (32.3), получим, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, следующую рекуррентную систему для разыскания y_i и μ_i:

$$\left.\begin{aligned} &By_0 = 0,\\ &By_s = \sum_{i=1}^{s} \mu_i y_{s-i}, \quad s = 1, \ldots, p-1,\\ &By_t = \sum_{i=1}^{t} \mu_i y_{t-i} + H_1 y_{t-p} + \ldots + H_{\alpha(t)} y_{\beta(t)},\\ &\quad t = p, p+1, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{32.28}$$

Входящие в формулу числа $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ определяются так: число t единственным образом можно представить в виде $t = \alpha p + \beta$, где $\alpha = 1, 2, \ldots$, $\beta = 0, \ldots, p-1$ (β — остаток от деления t на p).

Из первого уравнения системы (32.28) находим, пользуясь первым условием (32.28), $y_0 = \varphi = \varphi^{(1)}$.

Второе уравнение той же системы разрешимо, так как его правая часть равна $\mu_1 y_0 = \mu_1 \varphi^{(1)}$ и ортогональна ψ, так как по предположению $p > 1$. Из этого уравнения находим единственное ортогональное к γ (см. (32.27)) решение

$$y_1 = \mu_1 \Gamma \varphi^{(1)} = \mu_1 \varphi^{(2)}.$$

Докажем методом математической индукции, что первые p уравнений системы (32.28) разрешимы и что

$$y_s = \sum_{i=1}^{s} P_{si}(\mu_1, \ldots, \mu_{s-i+1}) \varphi^{(i+1)}, \quad s = 1, \ldots, p-1. \quad (32.29)$$

Эта формула при $s = 1$ верна, так как согласно (32.23) $P_{11}(\mu_1) = \mu_1$.

Пусть первые $k-1$ уравнений системы (32.28) разрешимы, и пусть формула (32.29) верна при $s = 1, \ldots$ $\ldots, k-1$. Докажем, что тогда k-е уравнение системы (32.28) также разрешимо и формула (32.29) верна при $s = k$. Преобразуем правую часть k-го уравнения, для чего воспользуемся предположениями индукции, правилом перестановки порядка суммирования в двойной сумме и, наконец, формулой (32.25):

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i y_{k-i} = \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i \sum_{j=1}^{k-i} P_{k-i\,j} \varphi^{(j+1)} + \mu_k \varphi^{(1)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \varphi^{(j+1)} \sum_{i=1}^{k-j} \mu_i P_{k-i\,j} + \mu_k \varphi^{(1)} = \sum_{j=1}^{k-1} \varphi^{(j+1)} P_{kj+1} +$$

$$+ P_{k1} \varphi^{(1)} = \sum_{j=1}^{k} P_{kj} \varphi^{(j)}.$$

Отсюда, согласно определению жордановой цепочки, видно, что k-е уравнение также разрешимо и, кроме того, что формула (32.29) верна и при $s = k$. Рассмотрим теперь $(p+1)$-е уравнение:

$$B y_p = \sum_{j=1}^{p} P_{pj}(\mu_1, \ldots, \mu_{p-j+1}) \varphi^{(j)} + H_1 \varphi^{(1)}. \quad (32.30)$$

Из условия разрешимости этого уравнения, учитывая, что $P_{pp}(\mu_1) = \mu_1^p$ (см. (32.23)), имеем

$$\mu_1^p + L_{01} = 0.$$

Из этого уравнения находим p различных значений μ_1. Подставляя каждое из них в выражение для y_1, найдем p различных значений коэффициента y_1. Фиксируем любое из найденных значений μ_1 и покажем, что остальные коэффициенты $\mu_2, \ldots, y_2$ определяются по μ_1 однозначно.

Из (32.30) находим

$$y_p = \sum_{j=1}^{p} P_{pj}(\mu_1, \ldots, \mu_{p-j+1})\,\varphi^{(j+1)} + \Gamma H_1 \varphi.$$

Правая часть $(p+2)$-го уравнения системы (32.28), как легко подсчитать, равна

$$\sum_{j=1}^{p} P_{p+1\ j}(\mu_1, \ldots, \mu_{p+2-j})\,\varphi^{(j)} + l_2,$$

где

$$l_2 = \mu_1^{p+1}\,\varphi^{(p+1)} + \mu_1 \Gamma H_1 \varphi^{(1)}.$$

Условие разрешимости $(p+2)$-го уравнения приводит поэтому к равенству

$$p \cdot \mu_1^{p-1}\,\mu_2 + (l_2,\ \psi) = 0,$$

откуда единственным образом определяем μ_2, что в свою очередь дает возможность из третьего уравнения (32.28) окончательно определить y_2.

Пусть определены $\mu_1, \ldots, \mu_k$ и $y_1, \ldots, y_k$, и пусть первые $p+k$ уравнений системы (32.28) разрешимы, причем

$$y_t = \bar{y}_t + \sum_{i=1}^{t} P_{ti}(\mu_1, \ldots, \mu_{t-i+1})\,\varphi^{(i+1)}, \qquad (32.31)$$
$$t = 1, \ldots, p+k-1,$$

где $\bar{y}_t = 0$ при $t < p$ и $\bar{y}_t$ при $t \geqslant p$ зависят лишь от μ_1, $\mu_2, \ldots, \mu_k$.

Покажем, что из условия разрешимости $(p+k+1)$-го уравнения μ_{k+1} определяется по μ_1 однозначно и формула (32.31) справедлива и при $t = p+k$. Тем самым будет установлена возможность определения всех коэффициентов μ_i и y_i и справедливость (32.31) при любом t.

Преобразуем правую часть $(p+k+1)$-го уравнения системы (32.28), как мы это делали выше, при $k=0$:

$$\sum_{i=1}^{p+k} \mu_i y_{t-i} + H_1 y_k + \ldots + H_{\alpha(p+k)}\, y_{\beta(p+k)} =$$

$$= \mu_{p+k}\varphi^{(1)} + \sum_{i=1}^{p+k-1} \mu_i \left\{ \sum_{j=1}^{p+k-i} P_{p+k-i\, j}\, \varphi^{(j+1)} + \bar{y}_{p+k-i} \right\} +$$

$$+ H_1 y_k + \ldots + H_{\alpha(p+k)}\, y_{\beta(p+k)} = \sum_{i=1}^{p+k} P_{p+k\, i}\varphi^{(i)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p-1} \mu_i \bar{y}_{p+k-i} + H_1 y_k + \ldots + H_{\alpha(p+k)} y_{\beta(p+k)}.$$

Заметим, что при $i = p+1, \ldots, p+k P_{p+k\, i}$ зависят самое большее от k аргументов $\mu_1, \ldots, \mu_k$, которые уже известны по предположению индукции.

Обозначим через l_{k+1} следующую известную величину:

$$l_{k+1} = \sum_{i=p+1}^{p+k} P_{p+k\, i}\, \varphi^{(i)} + \sum_{i=1}^{p-1} \mu_i \bar{y}_{p+k-i} + H_1 y_k + \ldots + H_\alpha y_\beta.$$

Теперь условие разрешимости $(p+k+1)$-го уравнения дает согласно (32.24)

$$k\mu_1^{k+1}\, \mu_{k+1} + R_{k+1,k}\ (\mu_1, \ldots, \mu_k) + (l_{k+1}, \ \psi) = 0,$$

откуда μ_{k+1} определяется однозначно.

Далее, из разрешимого $(p+k+1)$-го уравнения находим, что y_{p+k} также определяется формулой (32.31). Доказательство закончено.

32.6. Многомерный случай. Здесь рассматривается аналитический случай при $n > 1$, причем предполагается также, что уравнение разветвления собственного значения λ_0 не обращается в тождество (не все $L_{\alpha\beta}$ в (32.14) равны нулю). Кроме того, для простоты мы ограничим рассмотрение предположением о существовании полного жорданова (I-жорданова) набора из нулей оператора B и присоединенных (I-присоединенных) к ним элементов.

Напомним, что результат основной теоремы 32.1 справедлив и без этого дополнительного предположения. Следующая теорема устанавливает связь между числом N элементов полного жорданова набора из нулей B и присоединенных к ним элементов и числом непрерывных собственных значений $\lambda(\varepsilon)$ оператора $A(\varepsilon)$, удовлетворяющих условию $\lambda(0) = \lambda_0$.

Теорема 32.6. *Пусть Φ-оператор B имеет полный жорданов набор из N элементов $\left(N = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i\right)$. Тогда при всех достаточно малых ε существует N (с учетом кратности) собственных значений $\lambda(\varepsilon)$, $\lambda(0) = \lambda_0$, оператора $A(\varepsilon)$. Все они представимы сходящимися рядами по дробным (или целым) степеням ε.*

Доказательство. Покажем, что в уравнении разветвления (32.14) $L_{i0} = 0$, $i = n, \ldots, N-1$, но $L_{N0} \neq 0$. Заметим, что L_{i0} есть коэффициент при μ^i в $L(\mu, \varepsilon) = \det \| a_{ij}(\varepsilon, \mu) \|$ или, что то же, коэффициент при μ^i в

$$L(\mu, 0) = \det \| (\mu [I - \mu\Gamma]^{-1} \varphi_i, \psi_j) \| = \det \left\| \sum_{s=0}^{+\infty} (\Gamma^s \varphi_i \psi_j) \mu^{s+1} \right\|.$$

По линейному свойству определителя имеем

$$L(\mu, 0) = \sum_{s=n}^{+\infty} L_{s0} \mu^s,$$

где

$$L_{s0} = \sum_{s_1+\ldots+s_n=s}' \begin{vmatrix} (\Gamma^{s_1}\varphi_1, \psi_1) & (\Gamma^{s_n}\varphi_n, \psi_1) \\ \hdashline (\Gamma^{s_1}\varphi_1, \psi_n) & (\Gamma^{s_n}\varphi_n, \psi_n) \end{vmatrix}.$$

Если $s_j < p_j$ хотя бы при одном j, то по определению жордановой цепочки $(\Gamma^{s_j} \varphi_j, \psi_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$, и $L_{s0} = 0$ при $s < N$. С другой стороны, при $s_j = p_j$ имеем $L_{N0} = \det \| (\Gamma^{p_i} \varphi_i, \psi_j) \| = 1$ согласно (31.14). Теперь утверждение теоремы вытекает из метода диаграммы Ньютона (п.2.7).

Введем далее одно важное понятие. Будем говорить, что в задаче о собственных значениях и элементах возмущенного оператора A (ε) имеет место полное снятие вырождения, если

1) существует полный жорданов набор из нулей оператора B и присоединенных к ним элементов длины N;

2) длина проекции убывающей части диаграммы Ньютона, составленной для уравнения разветвления собственного значения, равна N;

3) указанное уравнение разветвления не имеет кратных корней.

Теорема 32.7. *Пусть имеет место полное снятие вырождения; тогда* A (ε) *при всех достаточно малых* $\varepsilon \neq 0$ *имеет* N *различных собственных значений* $\lambda_i(\varepsilon)$ $(\lambda_i(0) = \lambda_0)$, $i = 1, \ldots, N$, *и каждому из них отвечают единственный (с точностью до числового множителя) собственный элемент*

$$y_i(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(i)}(\varepsilon)\{I - \Gamma H(\varepsilon) - [\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_0]\Gamma\}^{-1}\varphi_j, \quad (32.32)$$

где $\{\xi_j^{(i)}(\varepsilon)\}_{j=1}^{n}$ — *единственное с точностью до множителя нетривиальное решение системы* (32.9) *при* $\mu = \lambda_i(\varepsilon) - \lambda_0$, *определенное при всех достаточно малых* ε *и не равное нулю при* $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Первая часть теоремы следует из теоремы 32.6 и определения полного снятия вырождения. Покажем, что ранг матрицы $\|a_{ij}(\varepsilon, \lambda_i(\varepsilon) - \lambda_0)\|$ равен $n - 1$. Допустим противное, что указанный ранг меньше $n - 1$. Это означает, что всякие $n - 1$ строк матрицы $\|a_{ij}(\varepsilon, \lambda_i(\varepsilon) - \lambda_0)\|$ линейно зависимы. Отсюда и из формулы для производной определителя следует, что $\left.\frac{\partial L(\varepsilon, \mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu = \lambda_i(\varepsilon) - \lambda_0} = 0$, как сумма определителей, каждый из которых имеет $n - 1$ линейно зависимых строк. Но это противоречит условию теоремы, что все корни $\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_0 = \mu_i(\varepsilon)$ при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ простые. Следовательно, указанный ранг равен $n - 1$. Решив теперь систему (32.9) и сократив, если это потребуется, ее решение на некоторую степень ε, получаем утверждение теоремы.

Понятие полного снятия вырождения оправдывается тем обстоятельством, что построенные нами собственные элементы y (ε) не могут иметь присоединенных элементов, так как при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ размерность корневого подпространства оператора $A(\varepsilon)$ также равна N (см., например, Данфорд и Шварц [1]). Приведем один конкретный результат, доказанный для случая матриц М. И. Вишиком и Л. А. Люстерником [1] с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Полный жорданов набор $\{\varphi_i^{(j)}\}$, $j = 1, \ldots, p_i$, $i = 1, \ldots n$, будем считать расположенным в следующем порядке. Пусть первые q_1 элементов $\varphi_i^{(1)}$, $i = 1, \ldots, q_1$, имеют жорданову цепочку длины p_1, следующие q_2 элементов $\varphi_i^{(1)}$, $i = q_1 + 1, \ldots, q_1 + q_2$, имеют жорданову цепочку длины $p_2 > p_1$ и т. д., наконец, последние q_l элементов $\varphi_i^{(1)}$ имеют жорданову цепочку длины $p_l > p_{l-1}$ $(p_1 < p_2 < \ldots < p_l)$. Весь жорданов набор состоит, очевидно, из $N = p_1 q_1 + \ldots + p_l q_l$ элементов.

Представляется удобным ввести две целочисленные функции целочисленных аргументов $t(i)$ и $\tau(i)$, $i=1, \ldots l$, по формулам

$$t(i) = \sum_{s=1}^{i} p_s q_s, \quad \tau(i) = \sum_{s=i}^{l} q_s. \tag{32.33}$$

Очевидно, имеем

$$t(l) = N, \ \tau(1) = n. \tag{32.34}$$

Кроме того, доопределим $t(i)$ при $i = 0$, а $\tau(i)$ при $i = l + 1$ так, чтобы

$$t(0) = 0, \ \tau(l+1) = 0. \tag{32.35}$$

Возьмем на плоскости некоторую прямоугольную систему координат и рассмотрим ломаную линию L, соединяющую последовательно точки $(t(i-1), \tau(i))$, $i = 1, \ldots, l+1$. L есть выпуклая ломаная, ибо $\operatorname{tg} \alpha_i$, где α_i — угол, образованный i-м звеном L с отрицательным направлением оси абсцисс, монотонно убывает с возрастанием i. Действительно, в силу формул (32.33) — (32.35) имеем

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{\tau(i) - \tau(i+1)}{t(i) - t(i-1)} = \frac{q_i}{p_i q_i} = \frac{1}{p_i},$$

и так как $p_{i-1} < p_i$, то

$$\operatorname{tg}\alpha_i = \frac{1}{p_i} > \frac{1}{p_{i-1}} = \operatorname{tg}\alpha_{i-1}.$$

Лемма 32.2. *Пусть существует полный жорданов набор и он упорядочен указанным выше образом, и пусть коэффициенты уравнения разветвления* (32.14) *таковы, что*

$$L_{\tau(i)(i-1)} \neq 0, \quad i = 1, \ldots, l+1. \tag{32.36}$$

Тогда убывающая часть диаграммы Ньютона, построенной для (32.14), *совпадает с введенной выше ломаной L.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $L_{ij} = 0$ для точек первого квадрата с целочисленными координатами, лежащих левее ломаной L.

По определению

$$L(\mu, \varepsilon) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{r_1+s_1\geqslant 1} a_{11}^{r_1 s_1}\varepsilon^{r_1}\mu^{s_1} & \ldots & \sum\limits_{r_n+s_n\geqslant 1} a_{1n}^{r_n s_n}\varepsilon^{r_n}\mu^{s_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{r_1+s_1\geqslant 1} a_{n1}^{r_1 s_1}\varepsilon^{r_1}\mu^{s_1} & \ldots & \sum\limits_{r_n+s_n\geqslant 1} a_{nn}^{r_n s_n}\varepsilon^{r_n}\mu^{s_n} \end{vmatrix},$$

где a_{11}^{rs} (r, s — индексы) — коэффициенты в разложении

$$a_{ij}(\varepsilon, \mu) = \sum_{r+s\geqslant 1} a_{ij}^{rs}\varepsilon^r\mu^s.$$

По линейному свойству определителя

$$L(\mu, \varepsilon) = \sum_{r+s\geqslant n} L_{rs}\mu^s\varepsilon^s,$$

где

$$L_{rs} = \sum_{\substack{r_1+\ldots r_n=s\\ s_1+\ldots s_n=r}} \begin{vmatrix} a_{11}^{r_1 s_1} & \ldots & a_{1n}^{r_n s_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}^{r_1 s_1} & \ldots & a_{nn}^{r_n s_n} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что согласно определению p_j

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{0s} &= (\Gamma^{s-1}\varphi_j, \psi_i) = 0 \text{ при } s < p_j = J(\varphi_j, B, I), \\ \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}^{0p_j}|^2 &= \sum_{i-1}^{n} |(\Gamma^{p_j-1}\varphi_j, \psi_i)|^2 \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{32.37}$$

Поэтому наибольшее s, при котором возможно неравенство $L_{s1} \neq 0$, равно $N - p_l$. Покажем, что точка с координатами $(N - p_l, 1)$ лежит на L. Уравнение прямой, на которой лежит l-е звено L, есть

$$y + \frac{x}{p_l} = \frac{N}{p_l},$$

и точка $(N - p_l, 1)$ лежит на этой прямой. Это рассуждение можно провести для общего случая. Наименьшее значение s, при котором возможно неравенство $L_{sr} \neq 0$, $1 \leqslant r \leqslant n - 1$, определяется так. Число r единственным образом представляется в виде

$$r = \tau(i + 1) + j, \; 1 \leqslant j \leqslant q_i$$

(числа i и j определяются по r также однозначно). Тогда указанное значение s определяется формулой

$$s = t(i) - jp_i, \; 1 \leqslant i \leqslant l.$$

$L_{sr} = 0$, если s меньше этого значения, ибо тогда все определители, входящие в выражение для L_{sr}, содержат по крайней мере один нулевой столбец.

Далее, уравнение прямой, содержащей i-е звено L, имеет вид

$$y + \frac{x}{p_i} = \tau(i + 1) + \frac{t(i)}{q_i},$$

и точка $(t(i) - jp_i, \; \tau(i + 1) + j)$ лежит, очевидно, на этой прямой. Этим установлено, что левее L нет точек, для которых $L_{ij} \neq 0$. Лемма доказана.

Непосредственным следствием леммы, теоремы 32.7 и метода диаграммы Ньютона является следующее утверждение.

Теорема 32.8. *Пусть существует полный жорданов набор, он упорядочен указанным выше образом, и пусть выполнены равенства* (32.35). *Пусть, наконец, следующие l алгебраических уравнений*

$$\sum^{(i)} L_{rs}\mu^s = 0, \qquad i = 1, \ldots, l,$$

где значок (i) означает, что суммирование ведется по всем

r и s, удовлетворяющим соотношению

$$r+\frac{s}{p_i}=\tau(i+1)+\frac{t(i)}{p_i},$$

не имеют кратных корней. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon\neq 0$ $A(\varepsilon)$ имеет ровно N различных собственных значений $\lambda(\varepsilon)$, $\lambda(0)=\lambda_0$, каждому из которых отвечает единственный собственный элемент $y(\varepsilon)$, причем все $\lambda(\varepsilon)$ представимы в виде

$$\lambda(\varepsilon)=\lambda_0+\sum_{s=1}^{+\infty}\mu_{s/p_n}\varepsilon^{\frac{s}{p_n}},\qquad n=1,\ldots,l.$$

$y(\varepsilon)$ определяются формулами (32.32) и также разлагаются в ряды по степеням ε^{1/p_n}.

32.7. Некоторые обобщения. Если воспользоваться рассуждениями п.30.5, то результаты § 32 можно легко перенести на более общий класс уравнений.

Пусть дано семейство операторов $A(\lambda,\varepsilon)$ из $\{E_1\to E_2\}$, зависящих от произвольного комплексного параметра λ и малого комплексного параметра ε.

Пусть $B=A(\lambda_0,0)$ есть Ф-оператор с числом нулей $n\geqslant 1$.

Задача: найти собственные значения $\lambda=\lambda_0+\mu(\varepsilon)$, где $\mu(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, и отвечающие им нули оператора $A(\lambda_0+\mu(\varepsilon),\varepsilon)$.

Вместо уравнения (32.3) теперь имеем более общее уравнение

$$By=[A(\lambda_0+\mu,\varepsilon)-A(\lambda_0,0)]y.$$

Если $A(\lambda_0+\mu,\varepsilon)$ аналитически зависит от μ и ε:

$$A(\lambda_0+\mu,\varepsilon)-A(\lambda_0,0)=\sum_{k+l\geqslant 1}A_{kl}\varepsilon^k\mu^l,$$

то нетрудно перенести сюда все соображения, связанные с методом диаграммы Ньютона. Вместо понятия обычной жордановой цепочки теперь следует воспользоваться понятием $\{A_{0l}\}_{l=1}^{+\infty}$-жордановой цепочки (п.30.5).

Формулировку соответствующих предложений можно провести по аналогии с изложенным выше. Можно рассматривать и неограниченные операторы (см. В. А. Треногин [3]).

§ 33. Особые решения нелинейных уравнений[1])

33.1. Постановка задачи и основные понятия. Пусть $F(x, y)$ — нелинейный оператор, определенный для всех $x \in E_1$ и для $y \in D_\rho(y_0, E)$ со значениями в E_2. Пусть $x = x(y)$ — решение при $y \in D_\rho(y_0, E)$, $y \neq y_0$, уравнения $F(x, y) = 0$. Назовем $x(y)$ особым решением, если не существует конечного предела $x(y)$ при $y \to y_0$; если указанный предел существует и конечен, то решение $x(y)$ назовем регулярным. Ниже мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда $y_0 = 0$, $y \equiv \lambda$ — малый комплексный параметр и E_i, $i = 1, 2$,— также комплексные банаховы пространства. С одной стороны, этот случай наиболее важен в приложениях, с другой стороны, в известном смысле он является общим, ибо в случае функционального параметра, рассмотрев уравнение в отдельности на каждом луче $y = ty_1$, $\|y_1\| = \rho$, мы приходим к уравнению с малым числовым параметром t.

Приведем некоторые примеры особых решений. Простейшие примеры дает алгебраическое уравнение

$$P_n(\xi, \lambda) \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i(\lambda)\, \xi^{n-i} = 0,$$

где $a_i(\lambda)$ — аналитические функции λ в окрестности точки $\lambda = 0$.

В § 2 мы видели, что если $a_0(0) = 0$, то уравнение это имеет особые решения вида

$$\xi = \lambda^{-\frac{p}{q}}[\xi_0 + o(1)],$$

где p и q — натуральные числа. Таким образом, здесь точка $\lambda = 0$ служит алгебраической точкой ветвления типа полюса для особого решения $\xi(\lambda)$.

Более содержательные примеры особых решений доставляют нелинейные интегральные уравнения (см. § 14).

---

[1]) В параграфе с полным доказательством излагаются результаты работы В. А. Треногина [4].

Рассмотрим, например, интегральное уравнение с малым комплексным параметром λ:

$$x(t) = \lambda \int_0^1 x(s)\, \varphi[x(s)]\, ds.$$

Из уравнения непосредственно видно, что $x(t)$ не зависит от t, и, следовательно, уравнение это эквивалентно уравнению

$$\varphi(x) = C(\lambda).$$

Подбирая в качестве $\varphi(x)$ функции, различным образом, стремящиеся к ∞, получим различные примеры особых решений.

Пример 1. $\varphi(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$, тогда $x = \lambda^{-1/\alpha}$. При $\alpha = 1/n$, где n натурально, $\lambda = 0$ является полюсом порядка n, в остальных случаях $\lambda = 0$ является алгебраической или трансцендентной точкой ветвления типа полюса.

Пример 2. $\varphi(x) = \ln x$, тогда $x = e^{1/\lambda}$ и $\lambda = 0$ служит существенно особой точкой решения.

Пример 3. $\varphi(x) = e^x$, тогда $x = \ln 1/\lambda$ и $\lambda = 0$ является логарифмической точкой ветвления решения.

Можно построить и более сложные примеры.

Особое решение $x(\lambda)$ назовем большим, если

$$\lim_{\lambda \to 0} x(\lambda) = \infty.$$

За исключением примера 2, все рассмотренные выше особые решения являются большими. Именно исследованием больших решений мы ограничимся ниже, хотя, конечно, аналогичными методами можно исследовать и некоторые другие типы особых решений.

Исследование больших решений следующим элементарным приемом во многих случаях можно свести к исследованию малых решений.

Будем искать большие решения уравнения

$$F(x, \lambda) = 0, \tag{33.1}$$

представимые в виде

$$x(\lambda) = \varphi(\lambda)\,[x_0 + g(\lambda)], \tag{33.2}$$

где $\varphi(\lambda)$ — комплекснозначная функция малого комплексного переменного λ такая, что

$$\lim_{\lambda\to 0}\varphi(\lambda)=\infty, \tag{33.3}$$

а $g(\lambda)$ — малая функция со значением в E_1, т. е.

$$\lim_{\lambda\to 0} g(\lambda)=0. \tag{33.4}$$

Пусть существует комплекснозначная функция $\psi(\lambda)$, определенная для достаточно малых λ, исключая, быть может, точку $\lambda=0$, и функции $\Phi(x)$ и $\Phi(g, \lambda, x)$ со значениями в E_2 такие, что справедливо разложение

$$F(\varphi(\lambda)[x_0+g(\lambda)],\ \lambda)\equiv\psi(\lambda)[\Phi(x_0)+\Phi(g,\ \lambda,\ x_0)], \tag{33.5}$$

и пусть уравнение $\Phi(x)=0$ имеет решение x_0. Тогда задача нахождения больших решений вида (33.2) эквивалентна задаче отыскания малых решений уравнений

$$\Phi(g,\ \lambda,\ x_0)=0, \tag{33.6}$$

где x_0 пробегает множество корней уравнения $\Phi(x)=0$.

Отметим, что если $x_0=0$, то мы приходим к большому решению

$$x(\lambda)=o\,[\varphi(\lambda)] \text{ при } \lambda\to 0. \tag{33.7}$$

Если же $x_0\neq 0$, то

$$x(\lambda)=O\,[\varphi(\lambda)] \text{ при } \lambda\to 0. \tag{33.8}$$

При этом возможны большие решения обоих типов, так как уравнение $\Phi(x)=0$ может иметь как тривиальное, так и нетривиальные решения.

В заключение заметим, что уравнения вида (33.6) были исследованы в главах VII и VIII и, таким образом, в ряде случаев задача отыскания больших решений сводится к задаче отыскания малых решений.

33.2. Задача о возмущении линейного уравнения малым нелинейным слагаемым. Рассмотрим уравнение

$$Bx=f+\lambda\sum_{i=0}^{k}F_i x^i. \tag{33.9}$$

Здесь x — неизвестное, разыскиваемое в E_1, f и F_0 — элементы из E_2, B — фредгольмовский оператор, $F_i x^i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$ суть i-степенные операторы из E_1 в E_2 (F_1 — линейный оператор). Кроме того, предположим, что банаховы пространства E_1 и E_2 комплексные и λ — малый комплексный параметр, а $k \geqslant 2$. Введем $\mathfrak{N}_k$ — класс абстрактных, вообще говоря, многозначных функций $x(\lambda)$, определенных и непрерывных каждая в своей окрестности точки $\lambda = 0$ (быть может, исключая самое точку $\lambda = 0$) и имеющих при $\lambda \to 0$ порядок роста

$$x(\lambda) = o\left(\lambda^{-\frac{1}{k-1}}\right).$$

Сделаем в уравнении (26.9) замену переменных

$$\lambda = \mu^{k-1}, \quad x = g\mu^{-1}. \tag{33.10}$$

Замену эту можно считать взаимно однозначной, так как обратный переход можно осуществить по формулам

$$\mu = \lambda^{\frac{1}{k-1}}, \qquad g = x\lambda^{\frac{1}{k-1}}, \tag{33.11}$$

где под $\lambda^{1/(k-1)}$ в случае $k > 2$ мы будем понимать главное значение этой функции. После замены (33.10) уравнение (33.9) переходит в уравнение

$$Bg = \mu f + \sum_{i=0}^{k} \mu^{k-i} F_i g^i, \tag{33.12}$$

а задача разыскания решений уравнения (26.9) класса $\mathfrak{N}_k$ переходит в эквивалентную ей задачу разыскания малых решений $g = g(\mu)$ уравнения (33.12).

Эта последняя задача является частным случаем общей задачи теории ветвления, изученной выше. Могут представиться различные случаи в зависимости от величины n — числа нулей оператора B. Если $n = 0$, то согласно теореме о неявных операторах 22.2 уравнение (33.12) имеет единственное малое решение и это решение представимо в окрестности точки $\lambda = 0$ сходящимся рядом

$$g(\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \mu^i.$$

Следовательно, существует единственное решение класса $\mathfrak{N}_k$

$$y(\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty} g_i\lambda^{\frac{i-1}{k-1}} \tag{33.13}$$

Если $n=1$, то задача сводится к уравнению разветвления (24.2), причем возможны два случая: вырожденный, когда все коэффициенты уравнения разветвления равны нулю, и невырожденный, когда хотя бы один коэффициент уравнения разветвления отличен от нуля.

В вырожденном случае существует однопараметрическое семейство малых решений $g=g(\mu, \xi)$, зависящее от произвольного малого параметра ξ.

Следовательно, в классе $\mathfrak{N}_k$ уравнение (33.9) также имеет однопараметрическое семейство малых решений.

В невырожденном случае уравнение (33.12) может иметь не более конечного числа малых решений, причем каждое из них представимо в окрестности точки $\mu=0$ сходящимся рядом по дробным (или целым) степеням μ. Возвращаясь к переменным y и λ, мы видим, что уравнение (33.9) в этом случае имеет также не более конечного числа решений класса $\mathfrak{N}_k$, причем все эти решения представимы в окрестности точки $\lambda=0$ (возможно, исключая $\lambda=0$) рядами (типа Лорана) по дробным степеням параметра $\lambda^{1/(k-1)}$.

Здесь мы рассматриваем лишь случай $n=1$, для которого получаются более законченные результаты. Случай $n>1$ изучен в работе П. Г. Айзенгендлера [2].

В следующих двух пунктах приведем необходимые для дальнейшего результаты. Нашей целью является применение для исследования уравнения (33.9) метода неопределенных коэффициентов. И здесь важную роль играют понятие жордановой цепочки в нелинейном случае, а также свойства некоторых вспомогательных полиномов.

33.3. Понятие обобщенной жордановой цепочки. Пусть B — фредгольмовский оператор с числом нулей $n=1$. Обозначим через φ и ψ соответственно нуль оператора B и его дефектный функционал.

Определение. Будем говорить, что φ имеет F_k-жорданову цепочку длины $p<+\infty$, если существует p

линейно независимых элементов $\varphi_1 = \varphi, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$, удовлетворяющих соотношениям

$$B\varphi_1 = 0, \; B\varphi_s = \sum_{s_1+\ldots+s_k=k+s-2} F_k\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_k}, \quad s = 2, \ldots, p, \tag{33.14}$$

причем

$$\alpha_p = \Big(\sum_{s_1+\ldots+s_k=p+k-1} F_k\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_k}, \psi \Big) \neq 0.$$

Заметим, что в этом определении заключено требование разрешимости уравнений (33.14) и, следовательно,

$$\Big(\sum_{s_1+\ldots+s_k=k+s-2} F_k\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_k}, \psi \Big) = 0, \qquad s = 2, \ldots, p. \tag{33.15}$$

Легко убедиться, что требование линейной независимости φ_i эквивалентно требованию линейной независимости элементов

$$\Phi_2(\varphi_1), \; \Phi_3(\varphi_1, \; \varphi_2), \ldots, \Phi_p(\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}),$$

где

$$\Phi_s(\varphi_1, \ldots, \varphi_{s-1}) = \sum_{s_1+\ldots+s_k=k+s-2} F_k\varphi_{s_1}, \ldots, \varphi_{s_k}. \tag{33.16}$$

Следующая теорема устанавливает связь между длиной F_k-жордановой цепочки и числом решений класса $\mathfrak{N}_k$ уравнения (33.9).

Пусть p — длина F_k-жордановой цепочки нуля фредгольмовского оператора B, т. е. $J(\varphi, B, F_k) = p$.

Теорема 33.1. *Пусть $p < +\infty$, тогда существует ровно $1 + p(k-1)$ (с учетом кратности) однозначных решений класса $\mathfrak{N}_k$ уравнения* (33.9). *Все они представимы в окрестности точки $\lambda = 0$ (может быть, исключая точку $\lambda = 0$) сходящимися рядами по дробным степеням параметра λ.*

Доказательство. Покажем, что для коэффициентов уравнения разветвления (33.12) имеют место соотношения

$$L_{i0} = 0, \; i = 2, \ldots, (k-1)p, \; L_{1+p(k-1)0} \neq 0. \tag{33.17}$$

Отсюда справедливость теоремы 33.1 будет следовать из теоремы 24.1 (не все коэффициенты уравнения разветвления равны нулю!) и из теоремы 24.2 в силу указанной эквивалентности соответствующих задач для уравнений (33.9) и (33.12). Докажем формулы (33.17). Для этого воспользуемся предложенным в п.24.1 методом вычисления коэффициентов L_{i0}. В рассматриваемом случае уравнение (24.3) при $\lambda = 0$ упрощается и принимает вид

$$u^{(0)} = F_k\,[\Gamma u^{(0)}\;]^k + \xi z. \tag{33.18}$$

Из теоремы о неявных операторах 22.2 следует, что уравнение (33.18) имеет единственное решение $u^{(0)}(\xi)$, обладающее тем свойством, что $u^{(0)}\,(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$, и что это решение можно найти в виде сходящегося ряда

$$u^{(0)} = \sum_{s=1}^{+\infty} u_s^{(0)} \xi^s. \tag{33.19}$$

Согласно результатам п.24.1 (см. формулы (24.7) и (24.8)) имеем

$$L_{i0} = (u_i^{(0)},\ \psi)\ ,\ \ i = 2, 3, \ldots \tag{33.20}$$

Подставим ряд (33.19) в уравнение (33.18) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ξ. В результате мы придем к рекуррентной системе уравнений для определения $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \ldots$ При этом в правой части j-го уравнения полученной системы стоит нуль, если $j \neq 1 + (k - 1)\,(s - 1)$, и выражение, не равное, вообще говоря, нулю, если $j = 1 + (k - 1)\ (s - 1)$ (если $k = 2$, то все правые части, вообще говоря, не нули). Эта рекуррентная система имеет вид

$$u_1^{(0)} = z,\ u_j^{(0)} = 0, \qquad \text{если } j \neq 1 + (k-1)\,(s-1),$$
$$u^{(0)}_j = \Phi_j(\Gamma u_1^{(0)}, \Gamma u_k^{(0)}, \ldots, \Gamma u^{(0)}_{1+(k-1)(s-1)}),\ \text{если } j = 1 + (k-1)\,(s-1).$$

Сравнивая эти формулы с формулами (33.13) (см. также (33.16)), приходим к выводу, что $\Gamma u_{1+(k-1)\,(s-1)} = \varphi_s$, $s = 1, \ldots, p$. Поэтому из формул (33.15) следует, что

$$L_{i0} = 0,\ \ i = 2, \ldots, 1 + (k - 1)\ (p - 1),$$

а вследствие формулы (33.14) $L_{1+(k-1)p_0} = \alpha_p \neq 0$. Теорема доказана.

33.4. Свойства некоторых многочленов. В п. 32.5 при отыскании собственных значений и собственных элементов возмущенного линейного оператора методом неопределенных коэффициентов были введены многочлены P_{ij}. Оказывается, что эти многочлены, а также некоторые более общие многочлены P_{ijk} играют существенную роль в задаче о возмущении линейного уравнения малым нелинейным слагаемым. В этом пункте будут введены упомянутые многочлены и установлены их основные свойства.

Как и в п.32.5, введем при $i \geqslant j \geqslant 1$ многочлены $P_{ij}(c_1, \ldots, c_{i-j+1})$ от $i-j+1$ переменных как коэффициенты в формальном разложении

$$\left(\sum_{l=1}^{+\infty} c_l \varepsilon^l\right)^j = \sum_{i=j}^{+\infty} P_{ij}(c_1, \ldots, c_{i-j+1})\,\varepsilon^i. \qquad (33.21)$$

Докажем, что эти многочлены удовлетворяют некоторой общей формуле сложения, частным случаем которой является формула (32.25).

Лемма 33.1. *Для любых натуральных σ, β и l, удовлетворяющих неравенству $\sigma \geqslant \beta \geqslant l$, имеет место равенство*

$$\sum_{i_1+\ldots+i_l=\sigma} P_{i_1 j_1} \ldots P_{i_l j_l} = P_{\sigma\beta} \qquad (33.22)$$

для любых $j_1, \ldots, j_l$, для которых $j_1 + \ldots + j_l = \beta$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$Q(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\sigma-\beta+1} c_i \varepsilon^i.$$

Имеем

$$P_{\sigma\beta}(c_1, \ldots, c_{\sigma-\beta+1}) = \frac{1}{\sigma!}\frac{d^\sigma}{d\varepsilon^\sigma}[Q^\beta(\varepsilon)]\,\Big|_{\varepsilon=0},$$

$$P_{i_s j_s}(c_1, \ldots, c_{i_s-j_s+1}) = \frac{1}{i_s!}\frac{d^{i_s}}{d\varepsilon^{i_s}}[Q^{j_s}(\varepsilon)]\,\Big|_{\varepsilon=0}.$$

Методом математической индукции устанавливается формула

$$\frac{d^\sigma}{d\varepsilon^\sigma}[R_{j_1}(\varepsilon)R_{j_2}(\varepsilon)\ldots R_{j_l}(\varepsilon)] = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_l=\sigma\\ i_s\geqslant 0}} \frac{\sigma!}{i_1!\ldots i_l!}\frac{d^{i_1}R_{j_1}}{d\varepsilon^{i_1}}\cdots\frac{d^{i_l}R_{j_l}}{d\varepsilon^{i_l}}.$$

Полагая в этой формуле $R_{j_s} = Q^{j_s}$, а затем полагая $\varepsilon = 0$ и учитывая, что $Q(0) = 0$, получим утверждение леммы. Введем теперь более общие многочлены $P_{ijk}(c_1, \ldots, c_{i-j+1})$, зависящие также от $i-j+1$ переменных и определенные для всех натуральных i, j, k, удовлетворяющих неравенствам $i \geqslant j \geqslant 1$, $k \geqslant 2$.

Положим по определению

$$P_{ijk} = P_{i'j'}, \tag{33.23}$$

где

$$i' = i + (k-2)(j-1), \quad j' = j + (k-2)(j-1). \tag{33.24}$$

В частности, имеем

$$P_{ij2} = P_{ij}. \tag{33.25}$$

Далее, согласно формулам (33.22), (33.23) и (32.23)

$$P_{iik} = P_{1+(i-1)(k-1)\ 1+(i-1)(k-1)} = c_1^{1+(i-1)(k-1)} \tag{33.26}$$

Точно так же имеем

$$P_{p+2\ p+1\ k} = [1 + p(k-1)]c_1^{p(k-1)}c_2. \tag{33.27}$$

Наконец, если воспользоваться формулой (32.24), то получим

$$P_{p+q\ p+1\ k} = [1 + p(k-1)]c_1^{p(k-1)}c_q + R_{pqk}(c_1, \ldots, c_{q-1}), \tag{33.28}$$

где R_{pqk} — некоторые многочлены. Для нас важно лишь то обстоятельство, что они не зависят от c_q.

Для многочленов P_{ijk} также справедлива некоторая формула сложения, превращающаяся в формулу (33.22) при $k = 2$.

Лемма 33.2. *Для любых натуральных $j_1, \ldots, j_k$, s, t таких, что $j_1 + \ldots + j_k = t$, где $k - 1 \leqslant t \leqslant k + s - 2$,* *справедлива формула*

$$\sum_{i_1+\ldots+i_k=k+s-2} P_{i_1j_1k}\ldots P_{i_kj_kk} = P_{s\,t-k+2\,k}. \qquad (33.29)$$

Доказательство. Вычислим сначала $\sum\limits_{s=1}^{k} i_s'$ и $\sum\limits_{s=1}^{k} j_s'$:

$$\sum_{s=1}^{k} i_s' = \sum_{s=1}^{k} i_s + (k-2)\left[\sum_{s=1}^{k} j_s - k\right] =$$
$$= k-2+s+(k-2)(t-k) = s+(k-2)(t-k+1),$$
$$\sum_{s=1}^{k} j_s' = k+(k-1)(t-k) = t-k+2+(k-2)(t-k+1).$$

Если $i=s$ и $j=t+2-k$, то по формулам (33.24) имеем

$$s' = s+(k-2)(t-k+1),$$
$$(t-k+2)' = t-k+2+(k-2)(t-k+1).$$

Теперь, исходя из определения многочленов P_{ijk}, получим

$$I = \sum_{i_1+\ldots+i_k=k+s-2} P_{i_1j_1k}\ldots P_{i_kj_kk} = \sum_{i_1'+\ldots+i_k'=s'} P_{i_1'j_1'}\ldots P_{i_k'j_k'},$$

где

$$j_1' + \ldots + j_k' = (t-k+2)'.$$

Поэтому согласно формуле сложения (33.22) и определению имеем $I = P_{s'(t-k+2)'} = P_{s\,t-k+2\,k}$, что и требовалось доказать.

Лемма 33.3. *В условиях леммы* 33.2 *справедлива формула*

$$\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=s+k-2\\ i_l\neq s-1}} P_{i_1j_1k}\ldots P_{i_kj_kk} = P_{s\,t-k+2\,k} - kc_1^{k-1}P_{s-1\,t-k+1\,k}.$$

(33.30)

Доказательство. Положим

$$I_1 = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=s+k-2 \\ i_l\neq s-1}} P_{i_1j_1k}\ldots P_{i_kj_kk};$$

$$I_2 = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=s+k-2 \\ i_l = s-1}} P_{i_1j_1k}\ldots P_{i_kj_kk}.$$

По лемме 33.2 имеем $I_1+I_2 = P_{s\,t-k+2\,k}$. Поэтому формула (33.30) будет доказана, если будет доказано, что

$$I_2 = k\,(P_{11})^{k-1}\,P_{s-1\,t-k+1k}. \tag{33.31}$$

Рассмотрим выражение I_2. Если для какого-нибудь номера l_0 имеем $i_{l_0} = s-1$, то

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq l_0}} i_l = s+k-2-s+1 = k-1,$$

а так как $i_l \geqslant 1$, то все остальные $i_l = 1$. Но тогда в силу неравенств $i_l \geqslant j_l \geqslant 1$ будет $j_l = 1$ при $l\neq l_0$. Наконец, так как $\sum\limits_{l=1}^{k} j_l = t$, то $j_{l_0} = t-k+1$. Таким образом, формула (33.31), а вместе с ней и лемма 33.3 доказаны.

33.5 Основной случай задачи о возмущении. В этом пункте исследуется случай, когда $(f, \psi)\neq 0$. В применении к вспомогательному уравнению (33.12) согласно § 24 (см. например, первую из формул (24.6)) это означает, что $L_{01} = (f, \psi)\neq 0$. Поэтому можно воспользоваться результатом п.2.7, по которому если $L_{01}\neq 0$ и $L_{n0}\neq 0$, то уравнение (33.12) имеет n-значное решение вида

$$g(\mu) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i\mu^{\frac{i}{n}}, \quad g_1\neq 0.$$

Переходя к переменным λ и x, найдем, что в классе $\mathfrak{N}_k$ уравнение (33.9) имеет n-значное особое решение вида

$$x = \lambda^{-\frac{1}{k-1}}\sum_{i=1}^{+\infty} g_i\lambda^{\frac{i}{(k-1)n}}$$

(под $\lambda^{1/(k-1)}$ понимается определенная однозначная ветвь этой многозначной функции, а именно ее главное значение).

Наконец, в п.33.3 была установлена связь между длиной F_k-жордановой цепочки и номером первого отличного от нуля коэффициента уравнения разветвления $n = 1 + p(k-1)$. В результате мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 33.2. *Пусть $p < +\infty$ и $(f, \psi) \neq 0$, тогда уравнение* (27.1) *имеет* $1 + p(k-1)$-*значное особое решение, представимое в виде сходящегося ряда*

$$x(\lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} g_i \lambda^{\frac{-1+(k-1)p+i}{(k-1)[1+(k-1)p]}}, \qquad (33.32)$$

где $g_1 \neq 0$. В классе $\mathfrak{N}_k$ это многозначное решение единственно.

Ниже будет показано, что решение (33.3) можно найти с помощью метода неопределенных коэффициентов. При этом удается получить более точную информацию о решении. Из формулы (33.32) следует, что при $\lambda \to 0$

$$x(\lambda) \sim g_1 \lambda^{-\frac{p}{1+p(k-1)}}.$$

Методом неопределенных коэффициентов удается установить, что при $k > 2$

$$g_i = 0, \text{ если } i \neq 1 + (k-1)s,$$

так что

$$x(\lambda) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \lambda^{\frac{-p+i-1}{1+(k-1)p}}. \qquad (33.33)$$

Покажем это. Подставим ряд (33.33) в уравнение (33.9) и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ, придем к следующей рекуррентной системе для нахождения неопределенных коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned} &Bx_1 = 0,\\ &Bx_i = \Phi_i(x_1 \ldots, x_{i-1}), \quad i = 2, \ldots, p,\\ &Bx_{p+1} = \Phi_{p+1}(x_1, \ldots, x_p) + f,\\ &Bx_{p+l} = \Phi_{p+l}(x_1, \ldots, x_{p+l-1}) + H_l(x_1, \ldots, x_{l-1}),\\ &\qquad\qquad l = 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (33.34)$$

Операторные полиномы $\Phi_s(x_1, \ldots, x_{s-1})$ были введены формулой (33.16), $H_l(x_1, \ldots, x_{l-1})$ — также некоторые операторные полиномы, точный вид которых не важен для нашей цели.

Лемма 33.4. *Пусть* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ — F_k *жорданова цепочка дефектного элемента* $\varphi_1 = \varphi$ *оператора* B. *Тогда*

$$x_i = \sum_{j=1}^{i} P_{ijk}(c_1, \ldots, c_{i-j+1})\varphi_j, \qquad i = 1, \ldots, p, \tag{33.35}$$

где $c_1, \ldots, c_p$ — *произвольные постоянные и* P_{ijk} *многочлены от них, введенные в* п.32.5.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Из первого уравнения системы (33.34) имеем

$$x_1 = c_1\varphi_1 = P_{11k}(c_1)\varphi_1,$$

т. е. формула (33.35) верна при $i = 1$. Предположим теперь, что эта формула верна при $i = 1, \ldots, s-1$, и докажем ее справедливость при $i = s$. Имеем по определению $\Phi_s(x_1, \ldots, x_{s-1})$:

$$\Phi_s(x_1, \ldots, x_{s-1}) = \sum_{i_1+\ldots+i_k=k+s-2} F_k x_{i_1} \ldots x_{i_k}.$$

Воспользовавшись предположением индукции и меняя затем порядок суммирования, найдем

$$\Phi_s = \sum_{i_1+\ldots+i_k=k+s-2} F_k\left(\sum_{j_1=1}^{i_1} P_{i_1j_1k}\varphi_{j_1}\right)\ldots\left(\sum_{j_k=1}^{i_k} P_{i_kj_kk}\varphi_{j_k}\right) =$$

$$= \sum_{i_1+\ldots+i_k=k+s-2} P_{i_1j_1k}\ldots P_{i_kj_kk}\sum_{j_1=1}^{i_1}\sum_{j_k=1}^{i_k} F_k\varphi_{j_1}\ldots\varphi_{j_k} =$$

$$= \sum_{i_1+\ldots+i_k=k+s-2} P_{i_1j_1k}\ldots P_{i_kj_kk}\sum_{\rho=k}^{k+s-2}\sum_{j_1+\ldots+j_k=\rho} F_k\varphi_{j_1},\ldots,\varphi_{j_k}.$$

Произведем замену индекса суммирования, полагая $\rho = k - 2 + \alpha$, получим

$$\Phi_s = \sum_{i_1+\ldots+i_k=k+s-2} P_{i_1j_1k}\ldots P_{i_kj_kk}\sum_{\alpha=2}^{s}\sum_{j_1+\ldots+j_k=k+\alpha-2} F_k\varphi_{j_1}\ldots\varphi_{j_k}$$

Воспользуемся леммой 33.2 и определением Φ_α и найдем, что

$$\Phi_s(x_1,\ldots,x_{s-1})=\sum_{\alpha=2}^{s}P_{s\alpha k}(c_1,\ldots,c_{s-\alpha+1})\,\Phi_\alpha(\varphi_1,\ldots,\varphi_{\alpha-1}). \tag{33.36}$$

Для определения x_s воспользуемся s-м уравнением системы (30.3), которое разрешимо в силу формул (33.15) и последней формулы для Φ_s. Имеем

$$x_s=\Gamma\Phi_s(x_1,\ldots,x_{s-1})+c_s\varphi_s=\sum_{\alpha=2}^{s}P_{s\alpha k}\Gamma\Phi_\alpha+c_s\varphi_1=$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{s}P_{s\alpha k}(c_1,\ldots,c_{s-\alpha+1})\,\varphi_\alpha.$$

Мы воспользовались формулой $P_{s1k}=P_{s1}=c_s$, вытекающей из формулы (33.26). Лемма доказана.

Перейдем к вычислению x_{p+1}. Так как формула (33.36) верна и при $s=p+1$ (то же самое доказательство), то имеем

$$\Phi_{p+1}(x_1,\ldots,x_p)=\sum_{\alpha=2}^{p+1}P_{p+1\,\alpha\,k}(c_1,\ldots,c_{p-\alpha+2})\,\Phi_\alpha(\varphi_1,\ldots,\varphi_{\alpha-1}).$$

Пользуясь формулами (33.15), (33.14) и (33.26), найдем

$$(\Phi_{p+1}(x_1,\ldots,x_p),\psi)=P_{p+1p+1k}(c_1)\alpha_p=\alpha_p c_1^{1+p(k-1)}.$$

Следовательно, условие разрешимости $(p+1)$-го уравнения системы (33.34) имеет вид

$$\alpha_p c_1^{1+p(k-1)}+\gamma=0, \tag{33.37}$$

откуда имеем

$$c_1=[-\gamma\alpha_p^{-1}]^{\frac{1}{1+p(k-1)}}.$$

Теперь c_1 полностью определено и при $\lambda\to 0$

$$x(\lambda)\sim c_1\lambda^{-\frac{p}{1+(k-1)p}}\varphi. \tag{33.38}$$

Так как $(p+1)$-е уравнение системы (33.34) при указанном выборе c_1 уже разрешимо, то из этого уравнения находим

$$x_{p+1} = \bar{x}_{p+1} + \sum_{\alpha=1}^{p} P_{p+1\,\alpha\,k}(c_1, \ldots, c_{p+2-\alpha})\,\varphi_\alpha, \tag{33.39}$$

где для краткости мы положили

$$\bar{x}_{p+1} = \Gamma\left\{f - \frac{\gamma}{\alpha_p}\,\Phi_{p+1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)\right\}.$$

Займемся теперь вычислением x_{p+2}. Для этого потребуется сначала вычислить $\Phi_{p+2}(x_1, \ldots, x_{p+1})$.

Имеем

$$\Phi_{p+2}(x_1, \ldots, x_{p+1}) = \sum_{i_1+\ldots+i_k=k+p} F_k x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} =$$

$$= kF_k x_1^{k-1}\,x_{p+1} + \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=k+p\\ i_s\neq p+1}} F_k x_{i_1}\ldots x_{i_k} = kF_k x^{k-1}\bar{x}_{p+1} +$$

$$+ \sum_{=}^{p} P_{p+1\,\alpha k}(c_1, \ldots, c_{p+2-\alpha})\,kc_1^{k-1}F_k\varphi_1^{k-1}\varphi_\alpha +$$

$$+ \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=k+p\\ i_s\neq p+1}} P_{i_1 j_1 k}, \ldots, P_{i_k j_k k} \sum_{\rho=k}^{+p-1} \sum_{j_1+\ldots+j_k=\rho} F_k\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_k} +$$

$$+ \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=k+p\\ i_s\neq p+1}} P_{ijk}, \ldots, P_{i_k j_k k} \sum_{j_1+\ldots+j_k=k+p} F_k\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_k}.$$

Заметим, что второе и третье слагаемые можно снова объединить в сумму, которую затем можно вычислить с помощью леммы 33.2:

$$\sum_{i_1+\ldots+i_k=k+p} P_{i_1 j_1 k}\ldots P_{i_k j_k k} \sum_{\rho=k}^{k+p-1} \sum_{j_1+\ldots+j_k=\rho} F_k\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_k} =$$

$$= \sum_{\alpha=2}^{p+1} P_{p+2\,\alpha\,k}\Phi_\alpha.$$

Далее, по лемме 33.3

$$\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=k+p \\ i_s\neq p+1}} P_{i_1j_1k}, \ldots, P_{i_kj_kk} = P_{p+2\ p+2\ k}(c_1) -$$

$$- kc_1^{k-1} P_{p+1\ p+1\ k}(c_1) = c_1^{1+(k-1)(p+1)} - kc_1^{k-1+1+(k-1)p} =$$
$$= (1-k)c_1^{kp+k-p}.$$

Окончательно имеем

$$\Phi_{p+2}(x_1, \ldots, x_{p+1}) =$$
$$= \sum_{\alpha=2}^{p+1} P_{p+2\ \alpha\ k}(c_1, \ldots, c_{p+3-\alpha})\, \Phi_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\alpha-1}) +$$
$$+ kF_k x_1^{k-1}\bar{x}_{p+1} + (1-k)c_1^{kp+k-p} \sum_{j_1+\ldots+j_k=k+p} F_k \varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_k}.$$

Нетрудно убедиться, что условие разрешимости $(p+2)$-го уравнения системы (33.34) имеет следующий вид:

$$\alpha_p P_{p+2\ p+1\ k}(c_1,\ c_2) + \gamma_1 = 0,$$

где γ_1 — известная величина, зависящая лишь от c_1. Это уравнение с помощью формулы (29.7) можно переписать так:

$$\alpha_p\,[1 + p\,(k-1)]c_1^{(k-1)p}c_2 + \gamma_1 = 0. \tag{33.40}$$

Каждому из $1 + (k-1)p$ значений c_1 отвечает единственное значение c_2, определяемое уравнением (33.40). Теперь x_2 определено и уравнение с номером $p+2$ системы (33.34) разрешимо. Находим из него

$$x_{p+2} = \bar{x}_{p+2} + \sum_{\alpha=1}^{p} P_{p+2\ \alpha\ k}\varphi_\alpha\ . \tag{33.41}$$

Лемма 33.5. *Справедлива формула* $(l = 2,\ 3, \ldots)$

$$x_{p+l} = \bar{x}_{p+l} + \sum_{\alpha=1}^{p} P_{p+l\ \alpha\ k}(c_1, \ldots, c_{p+l-\alpha})\,\varphi_\alpha, \tag{33.42}$$

где $\bar{x}_{p+l}$ *зависит лишь от* $c_1, \ldots, c_l$.

Доказательство проведем методом математической индукции. При $l = 2$ формула (33.42) превращается в доказанную выше формулу (33.35) и, значит, верна. Предположим, что формула (33.42) верна при $l = 2, \ldots, q-1$, причем $c_1, \ldots, c_{q-1}$, а тем самым и $x_1, \ldots, x_{q-1}$ уже определены. Вычислим

$$\Phi_{p+q}(x_1, \ldots, x_{p+q-1}) = \sum_{i_1+\ldots+i_k=p+q+k-2} F_k x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} =$$

$$= kF_k x_1^{k-1} x_{p+q-1} + \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=p+q+k-2\\ i_s \neq p+q-1}} F_k x_{i_1}, \ldots, x_{i_k} =$$

$$= \sum_{l=1}^{p} kc_1^{k-1} P_{p+q-1\, l\, k} F_k \varphi_1^{k-1}\varphi_l +$$

$$+ \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=p+q+k-2\\ i_s \neq p+q-1}} F_k \left(\sum_{j_1=1}^{i_1} P_{i_1 j_1 k}\varphi_{j_1}\right) \ldots \left(\sum_{j_k=1}^{i_k} P_{i_k j_k k}\varphi_{j_k}\right) +$$

$$+ kP_k x_1^{k-1}\bar{x}_{p+q-1} + \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=p+q+k-2\\ i_s \neq p+q-1}} F_k \bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_m} \times$$

$$\times \left(\sum_{j_{m+1}=1}^{p} P_{i_{m+1} j_{m+1} k}\, \varphi_{j_{m+1}}\right) \ldots \left(\sum_{j_k=1}^{p} P_{i_k j_k k}\varphi_{j_k}\right).$$

Последние два слагаемых зависят лишь от известных величин. Действительно, третье слагаемое зависит только от уже определенных x_1 и $\bar{x}_{p+q-1}$. Рассмотрим четвертое слагаемое. Очевидно, наибольшее число постоянных c_s содержит член с $m = 1$. Так как $\bar{x}_{i_1} = 0$ при $i_1 \leqslant p$, то $i_1 \geqslant p+1$. Следовательно, $i_2 + \ldots + i_s \leqslant q + k - 3$. Отсюда видно, что $1 \leqslant i_l \leqslant q-1$, $l = 2, \ldots, s$. $P_{i_l j_l k}$ зависит от $i_l - j_l + 1$ постоянных. Это число максимально при $i_l = q-1$, $j_l = 1$, т. е. $\max(i_l - j_l + 1) = q - 1$. Таким образом, четвертое слагаемое зависит лишь от $c_1, \ldots$ $\ldots, c_{q-1}$, которые уже определены по предположению индукции.

Преобразуем теперь первые два слагаемых в формуле для Φ_{p+q}:

$$\sum_{\alpha=1}^{p} kc_1^{k-1} P_{p+q-1\,\alpha\,k} F_k \varphi_1^{k-1} \varphi_\alpha + \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=p+q+k-2\\ i_s\neq p+q-1}} P_{i_1 j_1 k}, \ldots, \times$$

$$\times P_{i_k j_k k} \sum_{\rho=k}^{k+p+m} \sum_{j_1+\ldots+j_k=\rho} F_k \varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_k} =$$

$$= \sum_{\alpha=2}^{p+1} P_{p+q\,\alpha\,k} \Phi_\alpha + \sum_{\beta=p+2}^{p+m} \Bigg\{ \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=p+q+k-2\\ i_s\neq p+q-1}} P_{i_1 j_1 k}, \ldots, \times$$

$$\times P_{i_k j_k k} \Bigg\} \widetilde{\Phi}_\beta.$$

Здесь $m = q$, если $q \leqslant p$, и $m = p$, если $q \geqslant p$, а

$$\widetilde{\Phi}_\beta(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) = \sum_{j_1+\ldots+j_k=\beta+k-2} F_k \varphi_j, \ldots, \varphi_{j_k}.$$

По лемме 33.3 имеем

$$\sum_{\substack{i_1+\ldots+i_k=p+q+k-2\\ i_s\neq p+q-1}} P_{i_1 j_1 k} \ldots P_{i_k j_k k} = P_{p+q\,\beta\,k}(c_1, \ldots, c_{p+q+1-\beta}) -$$

$$- kc_1^{k-1} P_{p+q-1\,\beta-1\,k}(c_1, \ldots, c_{p+q+1-\beta});$$

$P_{p+q\beta k}$ зависит самое большее от $q-1$ аргументов, так как $\min\beta = p+2$. $P_{p+q-1\,\beta-1\,k}$ также зависит самое большее от $q-1$ аргументов по той же причине. Итак,

$$\Phi_{p+q}(x_1, \ldots, x_{p+q-1}) = \sum_{\alpha=2}^{p+1} P_{p+q\,\alpha\,k}(c_1, \ldots, c_{p+q+1-\alpha}) \times$$

$$\times \Phi_\alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\alpha-1}) + G_q(c_1, \ldots, c_{q-1}),$$

где через G_q обозначены известные члены.

Условие разрешимости $(p+q)$-го уравнения системы (30.3) дает

$$P_{p+q\,p+1\,k}(c_1, \ldots, c_q)\alpha_p + \gamma_q = 0,$$

где $\gamma_q = (G_q + H_q, \psi)$.

По формуле (33.28)

$$P_{p+q\ p+1\ k}(c_1, \ldots, c_q) = \\ = [1 + (k-1)p]c_1^{(k-1)}c_q + R_{pqk}(c_1, \ldots, c_{q-1}).$$

Поэтому указанное выше условие разрешимости имеет вид

$$\alpha_p\,[1 + (k-1)p]c_1^{(k-1)p}c_q + \alpha_p R_{pqk} + \gamma_q = 0.$$

Отсюда по $c_1, \ldots, c_{q-1}$ однозначно находим c_q, а следовательно, p определено. Наконец, из $(p+q)$-го уравнения системы (33.34) находим

$$x_{p+q} = \bar{x}_{p+q} + \sum_{\alpha=1}^{p} P_{p+q\ \alpha\ k}(c_1, \ldots, c_{p+q+1-\alpha})\varphi_\alpha,$$

и лемма 33.5 доказана.

В результате мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 33.3. *В условиях теоремы* 33.2 *существует единственное в классе* $\mathfrak{N}_k$ $(1+(k-1)p)$*-значное особое решение уравнения* (33.9). *Это решение представимо в виде сходящегося ряда* (33.33), *причем при определении его методом неопределенных коэффициентов* y_i *определяется с запозданием в* p *шагов из условия разрешимости* $(p+i)$*-го уравнения.*

В заключение рассмотрим вещественный случай. Конечно, мы могли бы перефразировать соответствующий результат § 2, однако проще провести исследование непосредственно.

Существуют ли вещественные решения, сколько их и где они определены?

Ответ на эти вопросы дает исследование нелинейного уравнения (33.37) для определения c_1. Действительно, если c_1 вещественно, то соответствующие ему значения $c_2, c_3, \ldots$ также будут вещественны, так как определяются из линейных уравнений типа (33.40) с вещественными коэффициентами.

Пусть сначала $1+(k-1)p$ нечетно. Это возможно либо когда p четно, либо когда k нечетно. Уравнение (33.37) в этом случае имеет единственное вещественное решение. Пусть $1+(k-1)p$ четно. Это возможно в том и только в том случае, когда одновременно k четно и p нечетно. Уравнение (33.37) имеет в этом случае два вещественных решения, если $\alpha_p\gamma < 0$. Для рассмотрения случая $\lambda < 0$ заменим λ на $-\lambda$ в уравнении (33.9), что приведет к замене α_p на $-\alpha_p$, и снова уравнение (33.37) будет иметь два вещественных решения, если $\alpha_p\gamma > 0$. Теперь можно сформулировать окончательный результат.

Теорема 33.4. *Если в условиях теоремы* 33.2 *имеет место вещественный случай, то*

1) *если p четно или k нечетно, то уравнение* (33.9) *имеет в классе $\mathfrak{N}_k$ ровно одно решение, определенное в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$, исключая точку $\lambda = 0$;*

2) *если p нечетно, а k четно, то уравнение* (33.9) *имеет в классе $\mathfrak{N}_k$ ровно два решения, определенных в той полуокрестности точки $\lambda = 0$, исключая точку $\lambda = 0$, в которой $\lambda\alpha_p\gamma < 0$. Все эти решения особые, представимы сходящимися рядами вида* (33.33), *и их можно определить методом неопределенных коэффициентов.*

Случай $(f, \psi) = 0$ будет рассмотрен в следующем пункте, причем для простоты мы предположим, что $k = 2$.

33.6. Случай возмущения второго порядка. Здесь мы рассмотрим случай $k = 2$. Теперь уравнение (33.9) упрощается и принимает следующий вид:

$$Bx = f + \lambda [F_0 + F_1x + F_2x^2]. \tag{33.43}$$

Замену (33.10) можно переписать так:

$$x = g\lambda^{-1}, \tag{33.44}$$

а вспомогательное уравнение (33.12) будет таким:

$$Bg = \lambda f + \lambda^2 F_0 + \lambda F_1 g + F_2 g^2. \tag{33.45}$$

В данном случае ряды (33.22) и (33.33) совпадают.

Случай $(f, \psi) \neq 0$ рассмотрен в предыдущем пункте. Здесь мы рассмотрим случай $(f, \psi) = 0$. Если $p = J(\varphi, B, F_2) < +\infty$, то согласно теореме 33.1 для коэффициентов уравнения разветвления, составленного для уравнения (33.12), имеем

$$L_{i0} = 0, \quad i = 1, \ldots, p, \quad L_{1+p\,0} \neq 0$$

и уравнение (33.43) имеет в классе $\mathfrak{N}_2$ (абстрактных функций, растущих при $\lambda \to 0$ медленнее, чем λ^{-1}) ровно $1 + p$ решений с учетом их кратности.

Поскольку, как и в случае любого k, полное решение задачи определения всех решений класса $\mathfrak{N}_2$ уравнения

(33.43) дает метод диаграммы Ньютона, применяемый к уравнению (33.45), то мы ограничимся лишь некоторыми характерными частными случаями.

Нетрудно убедиться, что справедливы следующие формулы для коэффициентов уравнения разветвления, составленного для уравнения (33.45) (ср. (24.6)):

$$\left.\begin{aligned} &L_{01} = (f, \psi), \qquad L_{02} = (F_0 + F_1(\Gamma f) + F_2(\Gamma f)^2, \psi), \\ &L_{11} = \frac{1}{2}(F_1\varphi + 2F_2(\Gamma f)\varphi, \ \psi). \end{aligned}\right\} \tag{33.46}$$

Теорема 33.5. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $L_{01} = 0$, $L_{02} \neq 0$, $L_{11} \neq 0$, *тогда уравнение* (33.43) *имеет ограниченное решение вида*

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \lambda^i \tag{33.47}$$

и p-значное особое решение вида

$$x = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \lambda^{-1+\frac{i}{p}}. \tag{33.48}$$

В классе $\mathfrak{R}_2$ *других решений* (33.47), (33.48), (33.43) *нет.*

Доказательство. Воспользуемся результатом п.2.7 (случай 1, 3), где в нашем случае $\nu = 1$, $m = p + 1$. Всего уравнение (33.45) имеет $p + 1$ малых решений. Из них одно решение можно найти в виде сходящегося ряда по целым степеням λ, а остальные — по степеням $\lambda^{1/p}$, ибо $m - \nu = p$. Пользуясь заменой (33.44), получаем утверждение теоремы.

Покажем, как реализуется в условиях теоремы 33.5 метод неопределенных коэффициентов.

Найдем сначала этим методом решение (33.47). Подставим ряд (33.47) в уравнение (33.43) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ. Получим

$$\left.\begin{aligned} &B x_0 = f, \\ &B x_1 = F_0 + F_1 x_0 + F_2 x_0^2, \\ &B x_s = F_1 x_{s-1} + 2F_2 x_0 x_{s-1}, \ s = 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{33.49}$$

Из первого уравнения этой системы (оно разрешимо, ибо $L_{10} = (f, \psi) = 0$) находим

$$x_0 = \Gamma f + c_0\varphi \tag{33.50}$$

и подставляем в правую часть второго уравнения, которая примет вид

$$H_1 = F_0 + F_1(\Gamma f) + F_2(\Gamma f)^2 + \\ + c_0[F_1\varphi + 2F_2(\Gamma f)\varphi]\, c_0^2F_2\varphi^2. \tag{33.51}$$

Так как $L_{20} = (F_2\varphi^2, \psi) = 0$, ибо $p > 1$, то условие разрешимости второго уравнения системы (33.49) с учетом формул (33.46) можно записать так:

$$2L_{11}c_0 + L_{02} = 0,$$

откуда

$$c_0 = -L_{02}(2L_{11})^{-1}.$$

При таком выборе c_0 второе уравнение системы (33.49) разрешимо, и из него находим (см. (33.51).)

$$x_1 = \bar{x}_1 + c_1\varphi, \quad \bar{x}_1 = \Gamma H_1.$$

Пусть $x_1, \ldots, x_{s-1}$ уже определены, причем s-е уравнение системы (33.49) разрешимо. Из этого уравнения найдем $x_s = \bar{x}_s + c_s\varphi_s$. Правая часть $(s+1)$-го уравнения той же системы после подстановки в нее найденного выражения x_s будет равна

$$H_{s+1} = F_1\bar{x}_s + 2F_2x_0\bar{x}_s + c_s[F_1\varphi + 2F_2(\Gamma f)\varphi],$$

и, следовательно, условие разрешимости $(c+1)$-го уравнения системы (33.49) дает

$$2L_{11}c_s + (F_1\bar{x}_s + 2F_2x_0\bar{x}_s, \psi) = 0,$$

откуда найдем c_s. Теперь $(s+1)$-е уравнение уже разрешимо и

$$x_{s+1} = \bar{x}_{s+1} + c_{s+1}\varphi, \quad \bar{x}_{s+1} = \Gamma H_{s+1}.$$

Методом математической индукции мы сможем построить ряд (33.47).

Покажем, как найти методом неопределенных коэффициентов решение (33.48). Подставим (33.48) в (33.43) и, приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\lambda^{i/p}$, получим

$$\left.\begin{aligned} &B x_1 = 0,\\ &B x_s = \Phi_s(x_1,\dots,x_{s-1}),\ s = 2,\dots,p-1,\\ &B x_p = \Phi_p(x_1,\dots,x_{p-1}) + f,\\ &B x_{p+l} = \Phi_{p+l}(x_1,\dots,x_{p+l-1}) + F_1 x_l,\\ &\qquad\qquad l = 1,\dots,p-1,\\ &B x_{2p} = \Phi_{2p}(x_1,\dots,x_{2p-1}) + F_1 x_p + F_0,\\ &B x_m = \Phi_m(x_1,\dots,x_{m-1}) + F_1 x_{m-p},\\ &\qquad\qquad m = 2p+1,\ 2p+2,\dots \end{aligned}\right\} \tag{33.52}$$

Здесь использовано обозначение (ср. (33.16))

$$\Phi_s(x_1,\dots,x_{s-1}) = \sum_{i_1+i_2=s} F_2 x_{i_1} x_{i_2}. \tag{33.53}$$

Заметим еще, что при $p=2$ система (33.52) упрощается:

$$\begin{aligned} &Bx_1 = 0,\\ &Bx_2 = f + \Phi_2(x_1),\\ &Bx_3 = F_1 x_1 + \Phi_3(x_1,\ x_2),\\ &Bx_4 = F_0 + F_1 x_2 + \Phi_4(x_1,\ x_2,\ x_3),\\ &Bx_t = F_1 x_{t-2} + \Phi_t(x_1,\ \dots,\ x_{t-1}),\ t = 5,\ 6,\ \dots \end{aligned}$$

Если учесть формулу (33.25), то из леммы 33.4 следует, что

$$x_i = \sum_{j=1}^{i} P_{ij}(c_1,\dots,c_{i-j+1})\,\varphi_j, \qquad i = 1,\dots,p-1.$$

Далее, формула (33.36) из доказательства той же леммы дает

$$\Phi_p(x_1,\dots,x_{p-1}) = \sum_{j=2}^{p} P_{pj}(c_1,\dots,c_{p-j+1})\,\Phi_j(\varphi_1,\dots,\varphi_{j-1}).$$

Из равенств (33.15) теперь следует, что

$$(\Phi_p(x_1,\ \dots,\ x_{p-1}),\ \psi) = 0.$$

Кроме того, дано, что $(f,\ \psi) = 0$, поэтому p-е уравнение системы (33.52) разрешимо. Его решение имеет следующий вид:

$$x_p = \Gamma f + \sum_{j=1}^{p} P_{pj}(c, \ldots, c_{p-j+1}) \varphi_j.$$

Рассмотрим правую часть $(p+1)$-го уравнения. Она равна

$$c_1 F_1 \varphi + c_1 F_2 \varphi (\Gamma f) + \sum_{j=1}^{p+1} P_{p+1\,j}(c_1, \ldots, c_{p+2-j}) \Phi_j(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}).$$

Поэтому условие разрешимости $(p+1)$-го уравнения имеет вид

$$P_{p+1 p+1}(c_1) L_{1+p0} + 2L_{11} c_1 = 0$$

или, после применения формулы (32.33)

$$L_{1+p\,0} c_1^{1+p} + 2L_{11} c_1 = 0.$$

Так как нас интересуют лишь значения $c_1 \neq 0$, то после сокращения на c_1 получим следующее уравнение для определения p:

$$L_{1+p0} c_1^p + 2L_{11} = 0. \tag{33.54}$$

Из этого уравнения находим p различных значений c_1. Теперь x_1 определено. Кроме того, $(p+1)$-е уравнение системы (33.52) разрешимо и из него получаем

$$x_{p+1} = \bar{x}_{p+1} + \sum_{j=1}^{p} P_{p+1\,j}(c_1, \ldots, c_{p+2-j}) \varphi_j,$$

где $\bar{x}_{p+1}$ — известная величина.

Нетрудно убедиться, далее, что условие разрешимости $(p+2)$-го уравнения системы (33.52) имеет вид

$$pL_{1+p\,0} c_1^{p-1} c_2 + \gamma_2(c_1) = 0,$$

откуда c_2 определяется по c_1 однозначно. Методом математической индукции, как и при доказательстве леммы 33.5, устанавливаем, что

$$x_{p+i} = \bar{x}_{p+i} + \sum_{j=1}^{p} P_{p+i\,j}(c_1, \ldots, c_{p+i+1-j}) \varphi_j,$$

причем c_i определяются с запаздыванием в p шагов из условия разрешимости $(p+i)$-го уравнения системы (33.52).

Рассмотрим еще вещественный случай (в условиях теоремы 33.5). Решение (33.47), очевидно, всегда вещественно. Вопрос о существовании вещественных решений вида (33.48) решается изучением уравнения (33.54). Если p нечетно, то решение вида (33.54) единственно и определено и справа и слева от $\lambda=0$. Если же p четно, то решений вида (33.54) два и определены они с той стороны от точки $\lambda=0$, где $\lambda L_{11}L_{1+p0}<0$. Доказана

Теорема 33.6. *Пусть имеет место вещественный случай и выполнены условия теоремы* 33.5; *тогда*

1) *если p нечетно, то существует ровно два решения класса $\mathfrak{N}_2$ — одно ограниченное вида* (33.47), *определенное в некоторой окрестности точки $\lambda=0$, а второе — большое — вида* (33.48), *определенное в окрестности точки $\lambda=0$, исключая точку $\lambda=0$;*

2) *если p четно, то в той полуокрестности точки $\lambda=0$, где $\lambda L_{11}L_{1+p0}>0$, существует ровно, одно решение класса $\mathfrak{N}_2$ — ограниченное решение вида* (33.47), *а в той полуокрестности точки $\lambda=0$, где $\lambda L_{11}L_{1+p\,0}<0$, существует ровно три решения класса $\mathfrak{N}_2$ уравнения* (33.9) — *одно ограниченное вида* (33.47) *и два больших вида* (33.48).

В заключение рассмотрим особый случай, когда $p=1$, т. е.

$$L_{20}=(F_2\varphi^2,\ \psi)\neq 0.$$

Теорема 33.7. *Пусть $L_{01}=0$, $L_{02}\neq 0$, $L_{20}\neq 0$ и $\Delta=L_{11}^2-L_{20}L_{02}\neq 0$; тогда уравнение* (33.9) *имеет в классе $\mathfrak{N}_2$ ровно два решения, оба они ограниченные вида* (33.47).

Для доказательства достаточно воспользоваться результатом п.2.7 (случай I, 4 при $\nu=1$) и заменой (33.10).

При построении решений в условиях теоремы 33.7 методом неопределенных коэффициентов получим рекуррентную систему (33.52). Учитывая выражение (31.9) для правой части второго уравнения и то, что теперь $L_{20}\neq 0$, требование разрешимости второго уравнения системы (33.52) запишем в виде

$$L_{20}c_0^2+2L_{11}c_0+L_{02}=0. \qquad (33.55)$$

Так как дискриминант $\Delta \neq 0$, то находим два значения c_0. Методом математической индукции легко установить, что

$$x_s = \bar{x}_s + c_s\varphi, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

где $\bar{x}_s$ известно, а для определения c_s можно воспользоваться условием разрешимости $(s+1)$-го уравнения системы (33.52), которое имеет вид

$$2\,(L_{11} + L_{20}c_0)c_s + \gamma_s\,(c_1, \ldots, c_{s-1}) = 0.$$

В вещественном случае дополнительно предполагаем, что $\Delta > 0$. Имеет место случай I, 4 п. 2.7, и поэтому существует ровно два вещественных решения.

Осталось рассмотреть случай, когда $\Delta = 0$. Ограничимся следующим результатом.

Теорема 33.8. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$L_{01} = 0, \quad L_{02} \neq 0, \quad L_{20} \neq 0, \quad \Delta = L_{11}^2 - L_{20}L_{02} = 0,$$

$$\delta = (F_1\bar{x}_2 + 2F_2x_0\bar{x}_2, \ \psi) \neq 0,$$

где $x_0 = \Gamma f + c_0\varphi, \quad \bar{x}_2 = \Gamma\,[F_0 + F_1x_0 + F_2x_0^2]$, *а* $c_0 = -L_{11}L_{20}^{-1}$; *тогда уравнение* (33.9) *имеет в классе* $\mathfrak{N}_2$ *ровно два решения. Оба они ограниченные и представимы в некоторой окрестности точки* $\lambda = 0$ *сходящимися рядами*

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i\lambda^{\frac{i}{2}}, \quad \text{где} \quad x_0 \neq 0, \quad x_1 \neq 0. \qquad (33.56)$$

Доказательство. Подставим ряд (33.56) в уравнение (33.9) и придем к следующей системе для определения x_i:

$$\left.\begin{aligned} &Bx_0 = f, \\ &Bx_1 = 0, \\ &Bx_2 = F_0 + F_1x_0 + F_2x_0^2, \\ &Bx_t = F_1x_{t-2} + \Phi_{t-1}(x_1, \ldots, x_{t-2}), \quad t = 3, 4, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (33.57)$$

Из первого и второго уравнений этой системы находим

$$x_0 = \Gamma f + c_0\varphi, \ x_1 = c_1\varphi.$$

Подставим x_0 в правую часть третьего уравнения системы (33.57) и потребуем, чтобы это уравнение было разрешимо. В результате придем к уравнению (33.55), которое ($\Delta = 0$) имеет кратный корень

$$c_0 = -L_{11}L_{20}^{-1}. \tag{33.58}$$

Теперь из третьего уравнения имеем

$$x_2 = \bar{x}_2 + c_2\varphi.$$

Правая часть четвертого уравнения рассматриваемой системы равна

$$c_1\,[F_1\varphi + 2F_2\,(\Gamma f)\varphi + 2F_2\varphi^2 c_0],$$

и поэтому условие разрешимости третьего уравнения вследствие равенства (33.58) выполнено для любых c_1, и, значит, четвертое уравнение системы (33.57) разрешимо, а потому из него находим

$$x_3 = \bar{x}_3 + c_3\varphi.$$

Рассмотрим, наконец, правую часть пятого уравнения

$$F_1x_2 + 2F_2x_0x_2 + F_2x_1^2 = \\ = F_1\bar{x}_2 + 2F_2x_0\bar{x}_2 + F_2\varphi^2\,c_1^2 + F_1\varphi + 2F_2x_0\varphi.$$

Требование разрешимости пятого уравнения системы (33.57) дает

$$L_{20}c_1^2 + \delta = 0,$$

откуда находим два значения c_1. Далее, как и в других рассмотренных выше случаях, легко показать, что таким же способом определяются и все остальные неопределенные коэффициенты, причем уравнения для нахождения остальных произвольных постоянных оказывается уже линейным.

Нетрудно сформулировать также соответствующий результат для вещественного случая.

33.7. Решения порядка $O(\lambda^{-\frac{1}{k-1}})$. Рассмотрим теперь задачу отыскания решений уравнения (33.9) вида (ср. (33.8))

$$x = \lambda^{-\frac{1}{k-1}}\{x_0 + g(\lambda)\}, \tag{33.59}$$

где $g(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$.

Пусть выполнены следующие условия:

1) уравнение

$$Bx = F_k x^k \tag{33.60}$$

имеет нетривиальное решение x_0;

2) оператор $B_1 = B - kF_k x_0^{k-1}$ фредгольмовский.

Тогда задача отыскания решений вида (33.59) сводится к задаче отыскания малых решений $g(\lambda)$. При этом роль оператора B играет оператор B_1. Число решений задачи определяется при этом как числом решений x_0 уравнения (33.60), удовлетворяющих условию 2), так и числами малых решений соответствующих задач для определения $g(\lambda)$.

В заключение отметим, что дальнейшее развитие на нелинейный случай понятия обобщенной жордановой цепочки оказалось полезным в задачах о длинных и уединенных волнах, изученных А. М. Тер-Крикоровым и В. А. Треногиным.

ГЛАВА X

Некоторые прикладные задачи

Теория ветвления решений нелинейных уравнений имеет широкое поле приложений.

В главе VIII была показана применимость этой теории к широким классам нелинейных сингулярных интегральных уравнений, а также нелинейных эллиптических краевых задач.

В главах I—VI были рассмотрены алгебраические, интегральные, интегро-дифференциальные уравнения, а также задачи о периодических решениях.

В § 13 в качестве примера были изложены результаты А. И. Некрасова по теории волн на поверхности тяжелой жидкости.

В этой главе мы приводим примеры других задач механики и физики, иллюстрирующих изложенные в книге общие методы и результаты. Это задача о малых изгибах стержня при постоянной нагрузке (§ 34), задача о малых прогибах гибких пластин (§ 35), задача о колебаниях спутника в плоскости эллиптической орбиты (§ 36) и, наконец, задача о волнах на поверхности тяжелой жидкости, когда давление периодически распределено по свободной поверхности (§ 37). Число таких примеров можно, конечно, значительно увеличить.

§ 34. О малых изгибах прямолинейного стержня под действием постоянной нагрузки

Пусть

$x(s)$ — прогиб прямолинейного стержня единичной длины $(0 \leqslant s \leqslant 1)$,

$p \geqslant 0$ — нагрузка,

$\rho(s)$ — непрерывная и строго положительная на $[0, 1]$ функция — жесткость стержня.

Для определения $x(s)$ имеем следующую краевую задачу:

$$x''(s) + P\rho(s)x(s)\sqrt{1 - x'^2(s)} = 0, \tag{34.1}$$

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{34.2}$$

Введем вещественные банаховы пространства: пространство E_1, состоящее из дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $x(s)$, удовлетворяющих граничным условиям (34.2) с нормой

$$\|x(s)\|_1 = \sum_{i=0}^{2} \max_{[0,1]} |x^{(i)}(s)|,$$

и банахово пространство $E_2 = C(0, 1)$ — пространство непрерывных на $[0, 1]$ функций с нормой

$$\|f(s)\| = \max_{[0,1]} |f(s)|.$$

Задачу (34.1) — (34.2) теперь можно записать в виде

$$F(x, P) = 0, \tag{34.3}$$

где $F(x, P)$ — нелинейный оператор, задаваемый на функциях из E_1 дифференциальным выражением, стоящим в левой части уравнения (34.1).

$F(x, P)$ отображает окрестность $\|x(s)\|_1 \leqslant r < 1$ в окрестность нуля пространства E_2 и аналитичен, так как в указанной окрестности

$$F(x, P) \equiv x''(s) +$$
$$+ P\rho(s)x(s)\left[1 - \frac{1}{2}x'^2(s) - \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{(2i-3)!!\,[x'(s)]^{2i}}{2^i i!}\right]. \tag{34.3'}$$

$P \geqslant 0$ играет роль параметра, и при любых значениях P уравнение (34.3′) имеет тривиальное решение $F(0, P) = 0$. Будем разыскивать всевозможные локальные продолжения по параметру P решения $x(s) \equiv 0$. Положим $P = P_0 + \lambda$ и запишем уравнение (34.3′) в виде (23.6):

$$Bx = R(x, \lambda), \tag{34.4}$$

где линейный дифференциальный оператор B задается на функциях из E_1 выражением

$$Bx \equiv x''(s) + P_0\rho(s)\,x(s),$$

а

$$R(x,\lambda) = \frac{1}{2} P_0\rho(s)\,x(s)\,x'^2(s) - \lambda\rho(s)\,x(s) + \\ + (P_0+\lambda)\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{(2i-3)!!\,[x'(s)]^{2i}}{2i i!} + \frac{1}{2} P\rho(s)\,x(s)\,x'^2(s) \quad (34.5)$$

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу Штурма — Лиувилля:

$$x''(s) + P_0\rho(s)\,x(s) = 0, \quad x(0) = x(1) = 0. \qquad (34.6)$$

Задача эта имеет последовательность собственных значений $P_0 = P_{0k} \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Все они положительны и просты. Обозначим через $\varphi_k(s)$ собственные функции, отвечающие собственным значениям P_{0k}, нормированные следующим образом:

$$\int_0^1 \varphi_k^2(s)\,ds = 1.$$

Соответствующая неоднородная задача

$$x''(s) + P_0\rho(s)\,x(s) = h(s), \quad h(s) \in E_2,$$
$$x(0) = x(1) = 0$$

имеет единственное решение $x(s) \in E_1$, если $P_0 \neq P_{0k}$, $k = 1, 2, \ldots$ Если же $P_0 = P_{0k}$, то для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^1 h(s)\,\varphi_k(s)\,ds = 0, \qquad (34.7)$$

ибо формально сопряженная к (34.6) задача совпадает с задачей (34.6). Таким образом, B есть ограниченный Ф-оператор с числом нулей $n = 0$ или $n = 1$ и для исследования уравнения (34.4) можно воспользоваться результатами §§ 22—24.

Если $P_0 \neq P_{0k}$, $k = 1, 2, \ldots$, то задача (34.4) имеет единственное малое решение, а именно тривиальное. Так будет, например, если нагрузка P достаточно мала, т. е.

$0 \leqslant P \leqslant P_{01}$, где P_{01} — первое собственное значение задачи Штурма — Лиувилля (34.6). Этот результат является следствием теоремы о неявных операторах 22.2.

Пусть теперь $P_0 = P_{0k}$, где P_{0k} — одно из собственных значений задачи (34.6). Задачу отыскания малых решений уравнения (34.4) согласно § 23 можно свести к эквивалентной задаче отыскания малых решений уравнения разветвления (24.2). Следуя п.24.1, вычислим его главные коэффициенты. Из формулы (34.5) следует, что

$$F_{20}x^2 \equiv 0, \quad F_{30}x^3 = \frac{1}{2} P_{0k}\rho(s)\,x(s)\,x'^2(s),$$

$$F_{0j} = 0, \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ 2F_{11}x = -\rho\,(s)x(s).$$

Из этих формул и формул (24.6), учитывая равенство $\psi = \varphi = \varphi_k(s)$, получаем

$$L_{20} = 0, \quad L_{30} = \frac{1}{2} P_{0k}\int_0^1 \rho(s)\,\varphi_k^2(s)\,\varphi'^2_k(s)\,ds > 0,$$

$$L_{0j} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad L_{11} = -\int_0^1 \rho(s)\,\varphi_k^2(s)\,ds < 0.$$

Таким образом, имеет место случай расположения диаграммы Ньютона, описанный в п.2.7. Ее убывающая часть состоит из одного отрезка, соединяющего точки (1, 1) и (3, 0), которому отвечает значение показателя $\varepsilon = 1/2$, а определяющее уравнение

$$L_{11}\lambda + L_{03}\xi^2 = 0$$

имеет простые корни:

$$\xi = \pm\sqrt{-L_{03}^{-1}L_{11}\lambda}.$$

Итак, от тривиального решения при каждом из значений $P = P_{0k}$ ответвляется по два новых малых нетривиальных решения, определенных в полуокрестности $P > P_{0k}$ и представимых в ней в виде сходящихся рядов по степеням $\sqrt{P - P_{0k}}$. (Вопросов устойчивости этих малых решений мы здесь не касаемся). Приближенно эти решения даются формулами

$$x(s) = \pm \sqrt{\frac{2\int\limits_0^1 \rho(s)\varphi_k^2(s)\,ds\,(P-P_{0k})}{P_{0k}\int\limits_0^1 \rho(s)\varphi_k^2(s)\varphi_k'^2(s)\,ds}}\,\varphi_k(s) + o\left(\sqrt{P-P_{0k}}\right).$$

Методом неопределенных коэффициентов можно найти и дальнейшие члены. Первое собственное значение P_{01} называется критической силой Эйлера.

Рассмотренная задача была решена М. А. Красносельским [1] с помощью топологических методов. Аналитический метод кроме доказательства существования решений дает также конструктивный способ их нахождения [1]). Этим же путем можно изучать задачи для систем стержней.

§ 35. К теории малых прогибов гибких пластин [2])

35.1. Постановка задачи и некоторые общие замечания. Рассмотрим в ограниченной плоской области Ω с границей Γ систему нелинейных дифференциальных уравнений теории гибких пластин

$$\left.\begin{aligned} \frac{D}{h}\Delta^2 w &= L(w, \Phi) + \frac{q(x_1, x_2)}{h} \\ \frac{1}{E}\Delta^2\Phi &= -\frac{1}{2}L(w, w). \end{aligned}\right\} \qquad (35.1)$$

Здесь w и Φ — неизвестные функции: $w(x_1, x_2)$ — функция прогиба, $\Phi(x_1, x_2)$ — функция напряжений. D, h и E — известные положительные постоянные: D — жесткость на изгиб, h — толщина пластины, E — модуль упругости. $\varepsilon q(x_1, x_2)$ — непрерывная в $\overline{\Omega}$ известная функция — нагрузка на пластину, которая предполагается

[1]) Задача о стержнях рассматривалась многими авторами. Своеобразный подход предложен Фогелем (см., например, Z. angew. Math. und Mech 47, № 2 (1967), 83—90).

[2]) Более общие результаты изложены в работе Л. И. Србщика и В. А. Треногина: ПММ, № 4 (1968).

малой (ε — малый параметр). Наконец, через $L(w, \Phi)$ обозначено билинейное дифференциальное выражение

$$L(w, \Phi) = w_{x_1x_1}\Phi_{x_2x_2} + w_{x_2x_2}\Phi_{x_1x_1} - 2w_{x_1x_2}\Phi_{x_1x_2}.$$

Ставится граничная задача об отыскании решений уравнения (35.1), удовлетворяющих следующим граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda_k^{(1)} w = \sum_{i+j=0}^{4} a_{ijk}(x) \frac{\partial^{i+j} w}{\partial x_1^i \partial x_2^j} = 0, \quad k = 1, 2; \ x \in \Gamma, \\ &\Lambda_1^{(2)} \Phi \equiv \frac{1}{h} \Phi_{n\tau} = P, \quad \Lambda_2^{(2)} \Phi \equiv \frac{1}{h} \Phi_{\tau\tau} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{35.2}$$

Задача (35.1) — (35.2) охватывает, как известно, широкий класс краевых задач нелинейной теории гибких пластин. Для исследования этой задачи удобно преобразовать ее к иному виду. Пусть $c(x_1, x_2)$ — решение краевой задачи:

$$\Delta^2 c = 0, \ x \in \Omega, \ c_{n\tau} = h, \ c_{\tau\tau} = 0, \ x \in \Gamma.$$

Введем функцию

$$F(x_1, x_2) = \Phi(x_1, x_2) - Pc(x_1, x_2).$$

Очевидно, имеем следующие формулы:

$$\Delta^2\Phi = \Delta^2 F, \ \Lambda_i^{(2)} F = 0, \ i = 1, 2,$$

$$L(w, \Phi) = L(w, F) + PL(w, c).$$

Нашей целью является изучение продолжения решений задачи (35.1) — (35.2) по параметру P, поэтому положим еще $P = P_0 + \lambda$. В результате для определения функций F и w возникает следующая краевая задача с однородными граничными условиями:

$$\frac{D}{h} \Delta^2 w - p_0 L(w, c) = L(w, F) + \lambda L(w, c) + \frac{\varepsilon q(x_1, x_2)}{h},$$

$$\frac{1}{E} \Delta^2 F = -\frac{1}{2} L(w, w),$$

$$\Lambda_i^1 w = 0, \ i = 1, 2; \ \Lambda_j^{(2)} F = 0, \ j = 1, 2.$$

Эту краевую задачу мы запишем в виде одного абстрактного уравнения типа (23.6). Введем E_1 — банахово пространство двумерных функциональных столбцов

$$y(x_1, x_2) = \left\| \begin{matrix} w(x_1, x_2) \\ F(x_1, x_2) \end{matrix} \right\|,$$

где $w \in W_\sigma^4(\Omega; \Delta_1^{(1)}, \Lambda_2^{(1)})$, а $F \in W_\sigma^4(\Omega; \Lambda_1^{(2)}, \Lambda_2^{(2)})$ $(\sigma > 1)$, причем $W_\sigma^4(\Omega; \Lambda_1^{(0)}, \Lambda_2^{(1)})$ и $W_\sigma^4(\Omega; \Lambda_1^{(2)}, \Lambda_2^{(2)})$ — подпространства соболевского пространства $W_\sigma^4(\Omega)$ с элементами, удовлетворяющими соответствующим однородным граничным условиям.

Положим, далее (матричные обозначения),

$$B = \left\| \begin{matrix} \frac{D}{h}\Delta^2 - p_0 L(\cdot, c) & 0 \\ 0 & \frac{1}{E}\Delta^2 \end{matrix} \right\|; \quad F_1 = \left\| \begin{matrix} L(\cdot, c) & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|;$$

$$2F_2 y_1 y_2 = \left\| \begin{matrix} L(w_1, F_2) + L(w_2, F_1) \\ -L(w_1, w_2) \end{matrix} \right\|; \quad F_0 = \left\| \begin{matrix} q(x_1, x_2) \\ 0 \end{matrix} \right\|.$$

С помощью этих обозначений задача запишется так:

$$By = \varepsilon F_0 + \lambda F_1 y + F_2 y^2.$$

Из теорем вложения Соболева — Кондрашева следует что $W_\sigma^4(\Omega)$ вполне непрерывно вложено в $C^2(\Omega)$, поэтому значения билинейного оператора $F_2 y_1 y_2$ лежат в банаховом пространстве двумерных столбцов с непрерывными в $\overline{\Omega}$ компонентами. Далее, значения B лежат в банаховом пространстведвумерных столбцов с компонентами из $L_0(\Omega)$, которое мы обозначим через E_2. Следовательно, операторы B, F_1 и F_2 имеют значения в E_2. Кроме того, $F_0 \in E_2$.

Сделаем теперь следующее основное предположение: пусть краевая задача

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^2 w - \frac{hp_0}{D} L(w, c) = 0, x \in \Omega \\ &\Lambda_i^{(1)} w = 0, \quad i = 1, 2, \quad x \in \Gamma \end{aligned}\right\} \qquad (35.3)$$

является фредгольмовской с числом нулей $n = 0$ или $n = 1$. (Заметим, что обычно эта задача оказывается даже самосопряженной, а отвечающая ей функция Грина порождает вполне непрерывный интегральный оператор, причем одно или несколько его первых собственных значений оказываются простыми.) Тогда фредгольмовским будет и оператор B, и числа нулей B и задачи (35.3) совпадают. Заметим еще, что если $n = 1$, то для разрешимости уравнения

$$By = h, \quad \text{где} \quad h = \begin{Vmatrix} h_1(x_1, x_2) \\ h_2(x_1, x_2) \end{Vmatrix},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_{\Omega} h_1(x_1, x_2)\, \psi(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 0,$$

где $\psi(x_1, x_2)$ — нетривиальное решение краевой задачи, формально сопряженной к задаче (35.3).

Сказанное выше позволяет воспользоваться для исследования нелинейных прогибов гибких пластин методами и выводами, полученными выше. При $\varepsilon = 0$ задача всегда имеет тривиальное решение. Если $n = 0$, то это тривиальное решение продолжается по параметру p для значений, близких к p_0, единственным образом и его можно найти в виде сходящегося ряда по целым степеням ε и $\lambda = p - p_0$. (Этот результат обосновывает, в частности, известный метод малого параметра П. Я. Полубариновой-Кочиной [1].)

Если $n = 1$, то, предполагая, что имеет место невырожденный случай (это предположение, по-видимому, здесь всегда выполнено), мы можем воспользоваться рассуждениями, приведенными в § 24, составить уравнение разветвления, построить кривые разветвления и таким образом определить число и вид решений, близких к тривиальному. В частности, на каждом луче $\lambda = t\varepsilon$ все малые решения представимы в виде сходящихся рядов по дробным степеням ε. Случай $n = 1$ известен в нелинейной теории пластин (см. И. И. Ворович [1]). Значение $P = P_0$, при котором $n \neq 0$, соответствует моменту потери устойчивости пластины, и при P, близких к P_0, возможно появление нескольких решений, часть которых может оказаться устойчивыми, а часть — неустойчивыми. Вопросами устойчивости мы здесь не занимаемся.

35.2. Случай круглой пластины. В качестве конкретного примера рассмотрим случай круглой пластины с осесимметричной нагрузкой q, причем мы ограничимся разысканием малых осесимметричных решений. Отметим, что аналогичную задачу (для кольцевой пластины с более общими краевыми условиями) рассмотрел И. И. Ворович [1], так что предлагаемый пример можно рассматривать как изложение его результата в иной, на наш взгляд, более простой форме. Нам представляется целесообразным повторить для круглой пластины приведенные выше построения, ибо здесь они особенно прозрачны, вычисления могут быть далеко проведены и в то же время этот случай имеет свои специфические особенности. Итак, теперь Ω — круг радиуса R. Задача существенно упрощается и ставится следующим образом (Вольмир [1]): дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} D\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] &= \frac{h}{r}\frac{d\Phi}{dr}\frac{dw}{dr}+\frac{\varepsilon g(r)}{r},\\ \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Phi}{dr}\right)\right] &= -\frac{E}{2r}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (35.4)$$

Здесь $\frac{1}{r}g(r)=\frac{1}{r}\int\limits_0^r q(s)\,ds$ — усредненная нагрузка. Будем разыскивать решения этой системы, удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} &w\Big|_{r=R}=0, \quad \frac{dw}{dr}\Big|_{r=R}=0, \quad \frac{h}{r}\frac{d\Phi}{dr}\Big|_{r=R}=p,\\ &\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} \text{ и } \frac{1}{r}\frac{d\Phi}{dr} \text{ ограничены при } r=0 \end{aligned}\right\} \qquad (35.5)$$

(защемление по контуру, на контуре задано радиальное напряжение σ_r).

Сделаем в (35.4) и в (35.5) следующую замену неизвестных функций w и Φ и параметра p:

$$\frac{dw}{dr}=u, \qquad \frac{d\Phi}{dr}=\frac{rp}{h}+v, \qquad p=p_0+\lambda.$$

Далее обозначим через A дифференциальный оператор, даваемый на дважды непрерывно дифференцируемых функциях $f(r)$, удовлетворяющих граничным условиям, $r^{-1}f(r)$ ограничено при $r \to 0$ и $f(R) = 0$ следующей формулой:

$$Af \equiv -r \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rf(r))\right].$$

После этой замены мы придем к следующей задаче для определения u и v:

$$\left.\begin{aligned} &DAu + p_0 u = -\varepsilon g(r) - \lambda u - huv, \\ &Av = \frac{1}{2}u^2. \end{aligned}\right\} \qquad (35.6)$$

Введем банаховы пространства E_1 и E_2. Через E_1 обозначим пространство двумерных функциональных столбцов $y = \left\|\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\|$ с дважды непрерывно дифференцируемыми на $[0, R]$ компонентами, для которых $r^{-1}u$ и $r^{-1}v$ ограничены и $u(R) = v(R) = 0$, а норма введена равенством

$$\|y\|_1 = \sup_{[0,\,R]} \frac{|u(r)| + |v(r)|}{r} + \sum_{i=1}^{2} \max_{[0,\,R]} [\,|u^{(i)}(r)| + |v^{(i)}(r)|\,].$$

Через E_2 обозначим банахово пространство двумерных функциональных столбцов с компонентами из $C^2(0, R)$ и с естественной нормой. Теперь задачу (35.6) можно записать в виде уравнения (23.6) с операторами, действующими из E_1 в E_2. Для этого достаточно воспользоваться матричными обозначениями

$$B = \left\|\begin{matrix} DA + p_0 I & 0 \\ 0 & A \end{matrix}\right\|, \qquad F_0 = \left\|\begin{matrix} -g(r) \\ 0 \end{matrix}\right\|,$$

$$F_1 = \left\|\begin{matrix} -I & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\|, \qquad 2F_2 y_1 y_2 = \left\|\begin{matrix} -h(u_1 v_2 + v_1 u_2) \\ u_1 u_2 \end{matrix}\right\|.$$

Возможны только два случая.

1) Оператор $DA + p_0 I$ не находится на спектре. Так будет, например, если $p_0 > 0$ (пластина растянута по контуру). Тогда оператор B имеет ограниченный обратный (обратимы $DA + p_0 I$ и A). Для достаточно малых значений ε и $\lambda = p - p_0$ существует единственное малое решение задачи, и оно представимо в виде сходящегося ряда по целым степеням ε и λ.

2) Оператор $DA+p_0I$ находится на спектре (теперь необходимо $p_0<0$: пластина сжата по контуру). Для нахождения собственных значений p_{0k} имеем задачу

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}-\left(\frac{p_0}{D}+\frac{1}{r^2}\right)u=0,$$

$r^{-1}u(r)$ ограничено, $u(R)=0$.

Общее решение уравнения, удовлетворяющее первому граничному условию, имеет вид $cJ_1\left(\sqrt{-\frac{p_0}{D}}\,r\right)$. Для того чтобы выполнялось и второе граничное условие, необходимо

$$p_0=p_{0k}=-\frac{\alpha_k^2 D}{R^2},$$

где α_k — положительные нули функции Бесселя $J_1(r)$. Все p_{0k} простые, и им отвечают собственные функции $J_1(\alpha_k/R)$, ортогональные на $[0, R]$ с весом r.

Таким образом, уравнение $By=0$ имеет решение

$$\varphi=\left\|\begin{matrix} J_1\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right) \\ 0 \end{matrix}\right\|.$$

Так как оператор B совпадает со своим формально сопряженным оператором, то $\psi=\varphi$. Поэтому условие разрешимости неоднородного уравнения $By=h$, где $h=\left\|\begin{matrix} h_1 \\ h_2 \end{matrix}\right\|$, имеет вид

$$\int_0^R h_1(r)\,J_1\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right)dr=0.$$

Уравнение разветвления, составленное для рассматриваемого случая, имеет вид (24.25). Вычислим его первые коэффициенты, определяющие число и вид малых решений.

Так как

$$F_2\varphi^2 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \frac{1}{2} J_1^2\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right) \end{matrix} \right\|, \quad \text{то} \quad L_{002} = 0,$$

Далее, $L_{003} = (2F_2\varphi\ (\Gamma F_2\varphi^2),\ \psi)$ (см. 24.6)). Для того чтобы найти $\Gamma F_2\varphi^2$, нужно решить уравнение $By = F_2\varphi^2$, которое подробнее записывается так:

$$DAy_1 + p_0 y_1 = 0, \quad Ay_2 = \frac{1}{2} J_1^2\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right).$$

Отсюда $y_1 = 0$, а $y_2(r) = \frac{1}{2}\int\limits_0^R G(r, s)\, J_1^2\left(\frac{\alpha_k s}{R}\right) ds$, где $G(r, s)$ — функция Грина оператора A. Теперь имеем

$$2F_2\varphi\Gamma F_2\varphi^2 = \left\| \begin{matrix} -\frac{h}{2} J_1\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right)\int\limits_0^R G(r, s)\, J_1^2\left(\frac{\alpha_k s}{R}\right) ds \\ 0 \end{matrix} \right\|$$

и, следовательно,

$$L_{003} = -\frac{h}{2}\int\limits_0^R J_1^2\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right)\int\limits_0^R G(r, s)\, J_1^2\left(\frac{\alpha_k s}{R}\right) ds\, dr < 0.$$

Точно так же имеем

$$L_{010} = 0, \quad L_{011} = (F_1\varphi,\ \psi) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^R J_1^2\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right) dr < 0;$$

$$L_{100} = -\int\limits_0^R g(r)\, J_1\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right) dr.$$

Приближенно уравнение разветвления имеет вид

$$L_{100}\,\varepsilon + L_{011}\lambda\xi + L_{003}\xi^3 \approx 0.$$

35.3. Исследование уравнения разветвления. Нетрудно подсчитать, что результант $R(\varepsilon, \lambda)$ многочленов $Q(\varepsilon, \lambda, \xi) = L_{100}\varepsilon + L_{011}\lambda\xi + L_{003}\xi^3$ и $Q_\xi(\varepsilon, \lambda, \xi) = L_{011}\lambda + 3L_{003}\xi^2$ равен

$$R(\varepsilon, \lambda) = 4L_{003}^2 L_{011}\lambda^3 + 27L_{100}^2 L_{003}^3\varepsilon^2.$$

Таким образом, приближенное уравнение дискриминантной кривой имеет вид (предполагается, что $L_{100} \neq 0$)

$$4L_{011}^3\lambda^3 + 27L_{100}^2L_{003}\varepsilon^2 = 0 \tag{35.7}$$

и изображает полукубическую параболу, касающуюся оси λ.

Эта кривая является приближенной кривой разветвления и делит окрестность $|\varepsilon| \leqslant a$, $|\lambda| \leqslant b$ на две части: выше кривой существует ровно три вещественных малых решения уравнения разветвления, а ниже кривой существует ровно одно вещественное малое решение уравнения разветвления.

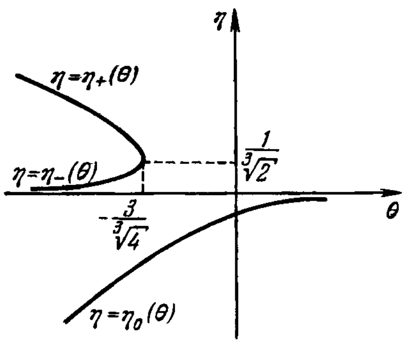

Рис. 18.

Для исследования асимптотики этих решений удобно перейти от двух малых параметров ε и λ в уравнении (35.7) к одному параметру, принимающему произвольные вещественные значения. Этого можно добиться, введя новые переменные θ и η по формулам

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{L_{100}\varepsilon}{L_{003}}}\,\eta, \quad \theta = \frac{L_{011}\lambda}{(L_{100}\varepsilon)^{2/3}(L_{003})^{1/3}}\,. \tag{35.8}$$

В переменных η и θ уравнение (35.7) примет вид

$$1 + \theta\eta + \eta^3 \simeq 0. \tag{35.9}$$

График η как функции θ изображен на рис. 18. Точка $\left(-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ является точкой ветвления. Существует три однозначные ветви: ветвь $\eta = \eta_0(\theta)$, определенная при всех значениях θ, и ветви $\eta = \eta_-(\theta)$ и $\eta = \eta_+(\theta)$, определенные при $\theta < -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ и сливающиеся при $\theta = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

Определяя из уравнения (35.9) с нужной степенью точности $\eta_0(\theta)$, $\eta_-(\theta)$ и $\eta_+(\theta)$, мы затем с помощью формул (35.8) можем найти с той же степенью точности малые решения приближенного уравнения разветвления (35.6), а значит, и малые решения краевой задачи (35.4) — (35.5).

Дадим, например, без обоснования асимптотику η_0, η_- и η_+ при больших значениях θ, чему соответствует асимптотика соответствующих значений ξ вне малой полоски, окружающей кривую разветвления.

При $\theta \to +\infty$ $\eta_0(\theta) \to 0$, и из уравнения (35.9) находим, что

$$\eta_0 \sim -\theta^{-1} \text{ при } \theta \to +\infty.$$

Переходя к старым переменным по формулам (35.8), получим

$$\xi_0(\varepsilon, \lambda) \simeq -\frac{L_{100}}{L_{011}} \frac{\varepsilon}{\lambda} \quad \text{при } \lambda\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \to +\infty.$$

Точно так же при $\theta \to +\infty$

$$\eta_-(\theta) \simeq -\theta^{-1}, \text{ т. е. } \xi_-(\varepsilon, \lambda) \sim -\frac{L_{100}\varepsilon}{L_{011}\lambda} \text{ при } \lambda\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \to -\infty.$$

Далее, при $\theta \to -\infty$ (см. рис. 18) из (35.9) имеем $\eta_0(\theta) \sim -\sqrt{-\theta}$, а $\eta_0(\theta) \sim \sqrt{-\theta}$, откуда с помощью формул (35.8) находим

$$\xi_0(\varepsilon, \lambda) \sim -\frac{\operatorname{sign}(L_{100}\varepsilon)}{L_{003}} \sqrt{-L_{011}\lambda},$$

$$\xi_+(\varepsilon, \lambda) \sim \frac{\operatorname{sign}(L_{100}\varepsilon)}{L_{003}} \sqrt{-L_{011}\lambda}$$

при $\lambda\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \to -\infty$.

Этим же способом можно получить асимптотику решений вблизи кривой разветвления.

Полагая в (35.9)

$$\theta = -\frac{3}{\sqrt[3]{4}} - \tau, \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \sigma$$

нетрудно прийти к выводу, что если при $\tau \to 0$ и $\sigma \to 0$, то

$$\sigma \sim \pm\sqrt{\frac{\tau}{3}}.$$

Следовательно, при

$$\eta_{\pm}(\theta) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt{-\frac{3}{\sqrt[3]{4}} - \theta},$$

что позволяет дать асимптотику для ξ:

$$\xi_{\pm}(\varepsilon, \lambda) \sim \sqrt[3]{\frac{L_{100}\varepsilon}{L_{003}}} \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \pm \sqrt{-\frac{3}{\sqrt[3]{4}} - \frac{L_{011}\lambda}{(L_{100}\varepsilon)^{2/3}(L_{003})^{1/3}}} \right\}$$

при

$$\lambda\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \to -\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \frac{(L_{003})^{1/3}(L_{100})^{2/3}}{L_{011}}.$$

Можно показать также, что при этом

$$\xi_0(\varepsilon, \lambda) \sim \sqrt[3]{\frac{4L_{100}\varepsilon}{L_{003}}}.$$

Заметим, что полученные формулы дают возможность построить также и приближенное решение задачи (35.6). Можно показать, что в первом приближении

$$v \approx 0, \quad u \approx \xi(\varepsilon, \lambda) J_1\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right).$$

Подставляя вместо ξ его асимптотические выражения, найдем асимптотику всех решений задачи (35.6), а значит, и задачи (35.4) — (35.5).

35.4. Круглая пластина с нулевой внешней нагрузкой. Рассмотрим частный случай, когда в системе (35.4) отсутствует внешняя нагрузка, т. е. $g(r) \equiv 0$. Здесь рассуждения значительно упрощаются. Задача (35.6) допускает тривиальное решение, вследствие чего коэффициенты уравнения разветвления $L_{i00} = 0$, $i = 1, 2, \ldots$

После сокращения уравнения разветвления на ξ получим новое уравнение, которое с точностью до главных членов (см. (35.6)) имеет вид

$$L_{011}\lambda + L_{003}\xi^2 + \ldots,$$

причем мы видели, что $L_{011} < 0$, $L_{003} < 0$.

Таким образом, ситуация здесь такая же, как и в § 34: каждое $p = p_{0k}$ служит точкой ветвления тривиального решения задачи, от которого при $p = p_{0k}$ ответвляется всякий раз два новых малых нетривиальных решения. Эти решения можно найти методом неопределенных коэффициентов в виде рядов по степеням $(p_{0k} - p_0)^{1/2}$. В частности, в первом приближении имеем

$$\frac{dw}{dr} \approx \pm \sqrt{-\frac{L_{011}(p-p_{0k})}{L_{003}}}\, J_1\left(\frac{r\alpha_k}{R}\right); \qquad \frac{d\Phi}{dr} \approx \frac{rp_{0k}}{h}.$$

§ 36. О колебаниях спутника в плоскости эллиптической орбиты[1])

Колебания спутника в плоскости его эллиптической орбиты около направления радиуса-вектора описываются следующим уравнением:

$$(1 + e\cos\nu)\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu} + \alpha\sin\delta - 4e\sin\nu = 0. \quad (36.1)$$

Здесь δ — удвоенный угол между одной из главных осей эллипсоида инерции спутника, лежащей в плоскости орбиты, и радиусом-вектором орбиты, ν — истинная аномалия, $\alpha = 3\frac{B-A}{C}$, где A, B, C — главные центральные моменты инерции, причем $|\alpha| \leqslant 3$, e — эксцентриситет: $0 \leqslant e < 1$.

Представляет интерес изучение периодических решений уравнения (36.1) с периодом, равным периоду обращения центра масс спутника по орбите, т. е. 2π-периодических решений уравнения (36.1).

Ограничимся отысканием нечетных 2π-периодических решений, что эквивалентно решению для уравнения (36.1) краевой задачи с граничными условиями

$$\delta(0) = \delta(\pi) = 0. \quad (36.2)$$

Введем (ср. § 34) вещественные банаховы пространства E_1 и E_2. Пусть E_2 — пространство непрерывных на $[0, \pi]$ функций, а E_1 — пространство дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, \pi]$ функций, удовлетворяющих граничным условиям (36.2). Нормы в E_1 и в E_2 вводятся, как в § 34. Краевую задачу (36.1) — (36.2) в пространст-

[1]) Здесь излагаются результаты А. П. Торжевского [1],

ве E_1 можно теперь рассматривать как одно нелинейное уравнение вида

$$F(\delta,\ \varepsilon,\ \alpha) = 0 \tag{36.3}$$

с двумя вещественными параметрами $\varepsilon \in [0,\ 1]$ и $\alpha \in \in [-3, 3]$ и с нелинейным оператором F, задаваемым на функциях δ из E_1 дифференциальным выражением, стоящим в левой части уравнения (36.1). Значения $F \in E_2$ и $F(\delta,\ \varepsilon,\ \alpha)$ — аналитический оператор.

Рассмотрим случай малого эксцентриситета e. При $e = 0$ уравнение (36.1) превращается в уравнение математического маятника

$$\delta'' + \alpha \sin \delta = 0. \tag{36.4}$$

При $-3 \leqslant \alpha \leqslant 1$ задача (36.4) — (36.2) имеет лишь тривиальное решение, а при $1 < \alpha \leqslant 3$ эта задача имеет три решения:

$$\begin{gathered} \delta_0(\nu) \equiv 0,\ \delta_+(\nu) = 2 \arcsin k \operatorname{sn} \sqrt{\alpha}\,\nu, \\ \delta_-(\nu) = -2 \arcsin k \operatorname{sn} \sqrt{\alpha}\nu, \end{gathered} \tag{36.5}$$

причем параметр $k \in (0,\ 1)$ эллиптической функции должен быть определен из уравнения

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha}. \tag{36.6}$$

Таким образом, точка $e = 0$, $\alpha = 1$, $\delta(\nu) = 0$ является точкой ветвления уравнения (36.4): от тривиального решения при $\alpha > 1$ ответвляется два малых нетривиальных решения. Итак, $F(0,\ 0,\ 1) = 0$.

Рассмотрим задачу продолжения по параметрам e и решения $\delta(\nu) \equiv 0$ уравнения (36.3).
α Положим

$$\alpha = 1 + \mu, \tag{36.7}$$

где μ — новый малый параметр. Уравнение (36.3) теперь можно записать в виде

$$B\delta = R(\delta,\ \varepsilon,\ \mu), \tag{36.8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} B\delta &\equiv \delta'' + \delta, \quad \delta \in E_1, \\ R(\delta, \varepsilon, \mu) &\equiv 4e\sin\nu - e\cos\nu\delta'' + \frac{\delta^3}{6} - \mu\delta + \\ &\qquad + 2e\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu} + r(\delta, \varepsilon, \mu), \end{aligned}\right\} \tag{36.9}$$

где $r(\delta, \varepsilon, \mu) = o(\delta^3)$ при $\delta \to 0$, $\mu \to 0$, $e \to 0$.

Оператор B фредгольмовский с числом нулей $n = 1$, причем его нуль $\varphi(\nu)$ и дефектный функционал $\psi(\nu)$ можно выбрать так:

$$\varphi(\nu) = \frac{2}{\pi}\sin\nu, \qquad \psi(\nu) = \sin\nu. \tag{36.10}$$

Для построения приближенного уравнения разветвления Ляпунова — Шмидта мы поступим следующим образом (см. п. 23.2). Для того чтобы уравнение (36.8) имело решение $\delta(\nu)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^\pi R(\delta(\nu), \varepsilon, \mu)\sin\nu\, d\nu = 0.$$

Учитывая вторую из формул (36.9), после интегрирования по частям последнее уравнение можно записать так:

$$\begin{gathered} 2\pi e - 2e\int_0^\pi \delta(\nu)\sin 2\nu\, d\nu + \frac{1}{6}\int_0^\pi \delta^3(\nu)\sin\nu\, d\nu - \\ - 2e\int_0^\pi \delta(\nu)\cos\nu\, d\nu - \mu\int_0^\pi \delta(\nu)\sin\nu\, d\nu + \\ + \int_0^\pi r(\delta(\nu), \mu, \varepsilon)\sin\nu\, d\nu = 0. \end{gathered} \tag{36.11}$$

Далее, непосредственно из уравнения (36.8) и формул (36.9) заключаем, что

$$\delta(\nu) = \frac{2}{\pi}\xi\sin\nu + 4e\sin\nu + \delta_2(\nu), \tag{36.12}$$

где $\delta_2(\nu)$ содержит члены второго и высших порядков относительно e, ν и ξ.

Подставляя (36.12) в (36.11), после простых выкладок приходим к уравнению разветвления

$$2\pi e - \mu\xi + \frac{1}{2\pi^2}\xi^3 - 2\pi\mu e + l_3(e, \mu, \xi) = 0, \quad (36.13)$$

где $l_3(e, \mu, \xi)$ содержат лишь члены третьего и высших порядков, а $l_3(0, 0, \xi)$ — лишь члены выше третьего порядка по ξ.

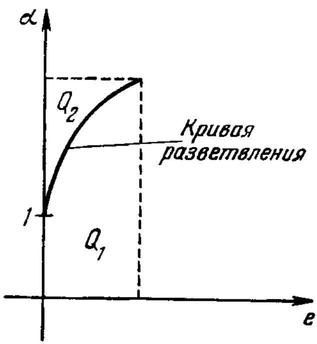

Рис. 19.

Приближенно имеем следующее уравнение разветвления:

$$\xi^3 - 2\pi^2\mu\xi + 4\pi^3 e \approx 0. \quad (36.14)$$

Составим дискриминант этого уравнения:

$$D = 4\pi^6\left(e^2 - \frac{2}{27}\mu^3\right).$$

Отсюда следует, что точки ветвления задачи (36.1) — (36.2) лежат на кривой разветвления, которая при малых e и μ имеет приближенное уравнение

$$e^2 = \frac{2}{27}\mu^3.$$

В Q_1 (рис. 19) уравнение (36.14) имеет единственное вещественное решение, в Q_2 это уравнение имеет три различных вещественных решения, которые сливаются в одно решение на кривой разветвления. Из соотношений

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, \quad \frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \frac{1}{\xi_3} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mu}{e}, \quad \xi_1\xi_2\xi_3 = -4\pi^3 e$$

следует отрицательность одного из корней и положительность двух других, если $e \neq 0$. При $e = 0$

$$\lambda_1 = \pi\sqrt{2\varepsilon} > 0, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = -\pi\sqrt{2\varepsilon} < 0.$$

Можно показать, что решения $\delta_+(\nu)$ и $\delta_-(\nu)$ (см. (36.5)) не разветвляются.

Окончательно имеем приближенную формулу

$$\delta(\nu) = \frac{2}{\pi}\,\xi(\varepsilon, \mu)\sin\nu,$$

где ξ определяется из уравнения (36.14). Используя формулу (36.13), можно получить δ с любой степенью точности. Приведем без доказательства такую формулу с точностью до $\sqrt[3]{(e^2+\mu^2)^2}$:

$$\delta(\nu) = \frac{2}{\pi}\,\xi\sin\nu - \frac{3e}{4\pi}\,\xi\sin 2\nu + \frac{2}{27}\left(\frac{\mu\xi}{\pi} - 2e\right)\sin 3\nu$$

(ξ определяется из уравнения (36.14)).

На кривой разветвления

$$\delta_p(\nu) = 2\sqrt[3]{2e}\sin\nu - \frac{3}{4}e\sqrt[3]{2e}\sin 2\nu + \frac{2}{27}\left(\mu\sqrt[3]{2e} - 2e\right)\sin 3\nu.$$

В области, лежащей ниже кривой разветвления, решение может быть эффективно построено в виде ряда по целым степеням e.

В заключение заметим, что, используя рассуждения п. 35, можно дать асимптотику решений задачи как вблизи кривой разветвления, так и вне этой кривой.

§ 37. Об одном виде установившихся волн

Здесь мы рассмотрим задачу об установившихся волнах конечной амплитуды, вызванных давлением, периодически распределенным по поверхности потока тяжелой жидкости бесконечной глубины (см. Я. И. Секерж-Зенькович [1]).

37.1. Постановка задачи и вывод основного интегрального уравнения. Рассмотрим плоскопараллельное установившееся движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, ограниченной только сверху свободной поверхностью, на которой давление p равно некоторой заданной функции p_0. Предположим, что поток движется слева направо с постоянной скоростью c на бесконечной глубине, а давление p_0 является периодической функцией горизонтальной координаты x.

Так как на поверхности давление является периодической функцией x, то поверхность принимает форму неподвижной волны.

Если мы придадим всей жидкости скорость $-c$, то поток на бесконечной глубине остановится, а по поверхности побежит волна со скоростью $-c$.

Из сказанного следует, что определение этой прогрессивной волны сводится к отысканию установившегося движения жидкости с волнообразной свободной поверхностью.

Предположим, что искомая волна и давление p_0 симметричны относительно вертикали гребня.

Пусть ось OY совпадает с осью симметрии и направлена вертикально вверх. За начало координат O примем точку пересечения оси OY со свободной поверхностью, а ось OX направим вправо. Плоскость течения XOY примем за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$.

Введем обычные обозначения: φ — потенциал скоростей, ψ — функция тока, w — комплексный потенциал скоростей, u и v — проекции вектора скорости q на оси координат. Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned} w &= \varphi + i\psi, & \frac{dw}{dz} &= -u + iv, \\ u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, & v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{37.1}$$

Для нахождения формы волны мы сначала отобразим конформно область, занятую одной волной и представляющую собою бесконечную вертикальную полуполосу, ограниченную сверху волнообразной кривой, на полуполосу

$$|\varphi| \leqslant \frac{1}{2} c\lambda, \qquad 0 \leqslant \psi \leqslant \infty,$$

а затем эту полуполосу — на внутренность единичного круга с центром в нуле плоскости $u = u_1 + iu_2$. При этом предполагается, что длина волны λ совпадает с периодом функции p_0.

Как известно, последнее отображение задается формулой

$$w = \frac{c\lambda}{2\pi i} \ln u \qquad (w = \varphi + i\psi), \tag{37.2}$$

причем профиль волны перейдет в окружность единичного круга с разрезом вдоль радиуса $\arg u = \pi$.

Отображение области одной волны на круг $|u| \leqslant 1$ определяется путем интеграции уравнения

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\lambda}{2\pi i}\frac{f(u)}{u}, \tag{37.3}$$

где

$$f(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u^k. \tag{37.4}$$

Коэффициенты a_k вещественны, так как волна симметрична относительно оси OY, и $a_0 = 1$, ибо скорость потока в бесконечности направлена по оси OX и равна c.

Используя интеграл Бернулли, мы из формул (37.3) и (37.4), учитывая, что на поверхности давление $p = p_0(x)$, находим, что

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp_0}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -g\frac{dy}{d\theta} - \frac{1}{2}\frac{dq^2}{d\theta}, \tag{37.5}$$

где $u = e^{i\theta}$, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, q — модуль вектора скорости $\boldsymbol{q}$.

Как обычно, путем введения функции

$$\omega(u) = \Phi + i\tau = -i\ln f(u) \tag{37.6}$$

мы в силу формул (37.2) и (37.3) находим

$$\frac{dw}{dz} = -ce^{\tau - i\Phi}. \tag{37.7}$$

Отсюда следует, что всюду в потоке функция Φ представляет собою угол, образуемый вектором $\boldsymbol{q}$ с осью OX, причем

$$q = ce^{\tau}. \tag{37.8}$$

Из (37.6) и (37.3) находим, что при $u = e^{i\theta}$

$$\frac{dx}{d\theta} + i\frac{dy}{d\theta} = -\frac{\lambda}{2\pi}e^{-\tau(\theta)}(\cos\Phi + i\sin\Phi).$$

Отсюда и в силу (37.8) мы из уравнения (37.5) имеем

$$\frac{d}{d\theta}e^{3\tau} = \frac{3g\lambda}{2\pi c^2}\left(\sin\Phi + \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx}\cos\Phi\right)$$

или, после интеграции,

$$e^{3\tau} = \frac{3g\lambda}{2\pi c^2 \mu}\left[1 + \mu\int_0^\theta \left(\sin\Phi + \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx}\cos\Phi\right) d\eta\right], \quad (37.9)$$

где постоянное интегрирование μ^{-1};

$$\mu = \frac{3g\lambda}{2\pi c^2} e^{-3\tau(0)}. \quad (37.10)$$

Из (37.9) имеем

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{1}{3}\,\frac{\mu\left(\sin\Phi + \dfrac{1}{\rho g}\dfrac{dp_0}{dx}\cos\Phi\right)}{1 + \mu\displaystyle\int_0^\theta \left(\sin\Phi + \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx}\cos\Phi\right) d\eta}. \quad (37.11)$$

Данное равенство дает связь между функциями $\tau(\theta)$ и $\Phi(\theta)$ на окружности $|u| = 1$.

Так как функция $\tau(\theta)$ симметрична относительно вещественной оси, то $\tau(\theta) = \tau(2\pi - \theta)$. Отсюда вытекает справедливость известного соотношения Дини:

$$\Phi(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{d\eta} \ln\left|\frac{\sin\dfrac{\eta-\theta}{2}}{\sin\dfrac{\eta+\theta}{2}}\right| d\eta. \quad (37.12)$$

В этом соотношении мы опустили произвольное постоянное, так как касательная в вершине гребня горизонтальна, т. е. $\Phi(0) = 0$.

Из (37.11) и (37.12) имеем окончательно

$$\Phi(\theta) = -\frac{\mu}{6\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\Phi(\eta) + \dfrac{1}{\rho g}\dfrac{dp_0}{dx}\cos\Phi(\eta)}{1 + \mu\displaystyle\int_0^\eta \left(\sin\Phi + \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx}\cos\Phi\right) d\eta_1} \times$$

$$\times \ln\left|\frac{\sin\dfrac{\eta-\theta}{2}}{\sin\dfrac{\eta+\theta}{2}}\right| d\eta. \quad (37.13)$$

Это и есть интегральное уравнение задачи.

Из данного уравнения, в частности, при $p_0 = \mathrm{const}$ получается известное уравнение Некрасова (13.12). В отличие от уравнения Некрасова, уравнение (37.13) не является однородным, так как функция $\Phi(\theta) \equiv 0$ ему не удовлетворяет.

При изучении уравнения (37.13) мы ограничимся следующим частным случаем. Мы будем предполагать, что

$$\frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n d_n \sin n\theta, \tag{37.14}$$

где ε — малый положительный безразмерный параметр, d_n — заданные числа, причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n d_n$ сходится в круге радиуса ε_0.

Заметим, что в исходной задаче предполагалось, что p_0 — заданная периодическая функция от x.

Можно, однако, показать (см. Я. И. Секерж-Зенькович [1]), что решение изучаемой задачи при условии (37.14) приводит к следующей формуле:

$$\frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx} = -\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \tilde{c}_n \sin \frac{2\pi}{\lambda} x,$$

де

$$\tilde{c}_n = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \tilde{c}_{in}.$$

При этом либо коэффициенты $\tilde{c}_{0n}$ можно считать заданными и по ним определить d_n, либо наоборот; $\tilde{c}_{in}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ определяются через d_n.

Преобразуем равенство (37.10). На окружности $|u| = 1$ функция $\tau(\theta)$ является четной, а функция $\Phi(\theta)$ — нечетной. Ввиду этого имеем

$$\Phi(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\theta, \qquad \tau(\theta) = -\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos k\theta,$$

ибо $\omega(0) = 0$ (см. (37.4) и (37.6)), откуда $b_0 = 0$, Отсюда (37. 10) принимает вид

$$\mu = \frac{3g\lambda}{2\pi c^2}\, e^{3\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k}. \tag{37.15}$$

При этом, если $\Phi(\theta) \equiv 0$, то все $b_k = 0$, и, следовательно,

$$\mu = \mu_0 = \frac{3g\lambda}{2\pi c^2}, \tag{37.16}$$

где λ и c фиксированы.

Для дальнейшего положим

$$\mu = \mu_0 (1 + \mu'). \tag{37.17}$$

Заметим, что задание μ определяет скорость в вершине гребня (см. (37.8) и (37.10)).

37.2. Сведение к системе. Здесь мы сведем основное уравнение (37.13) к эквивалентной системе[1]).

Положим

$$\Psi(\theta) = \left[1 + \mu \int_0^\theta (\sin\Phi + Q(\eta)\cos\Phi)\, d\eta\right]^{-1}, \tag{37.18}$$

где

$$Q(\eta) = \frac{1}{\rho g}\frac{dp_0}{dx}.$$

Отсюда $\Psi(0) = 1$ и

$$\Psi'(\theta) = -\mu\Psi^2(\theta)(\sin\Phi(\theta) + Q(\theta)\cos\Phi(\theta)).$$

Интегрируя и учитывая (37.13) и (37.18), мы приходим к системе

$$\Phi(\theta) = \mu \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)[\sin\Phi + Q\cos\Phi]\,\Psi(\eta)\, d\eta, \tag{37.19}$$

$$\Psi(\theta) = 1 - \mu \int_0^\theta \Psi^2(\eta)(\sin\Phi + Q\cos\Phi)\, d\eta, \tag{37.20}$$

---

[1]) Аналогичный прием был применен Я. И. Секерж-Зеньковичем в работе А. И. Некрасова ([2], § 6).

где

$$K(\eta, \theta) = -\frac{1}{6\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{\eta - \theta}{2}}{\sin \frac{\eta + \theta}{2}} \right|.$$

Из выражения для ядра следует, что

$$K(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\eta \sin n\theta}{3n}. \tag{37.21}$$

Таким образом, мы свели основное уравнение (37.13) к системе (37.19) — (37.20) относительно неизвестных функций $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\theta)$. В этой системе имеется два параметра: параметр ε, ибо заданная функция Q аналитически зависит от ε, и параметр μ', где в силу (37.17), (37.10) и выражения для τ имеем

$$\mu' = e^{3(b_1+b_2+b_3+\ldots)} - 1. \tag{37.22}$$

В дальнейшем будет доказано, что данное равенство устанавливает связь между параметрами ε и μ'.

37.3. Регулярный случай. Пусть $\mu_0 \neq \nu_n = 3n$. Покажем, что в этом случае система (37.19) — (37.20) имеет единственное решение и оно представимо при достаточно малых ε в виде сходящегося ряда по целым степеням ε. Действительно, запишем систему (37.19) — (37.20) в виде

$$\Phi(\theta) = \mu_0 (1 + \mu') \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) [\Phi(\eta) + P(\eta)]\, d\eta, \tag{37.19'}$$

$$\tilde{\Psi}(\theta) = -\mu_0 (1 + \mu') \int_0^{\theta} \{\Phi(\eta) + \varepsilon d_1 \sin \eta + {} \\ + F_1 [\Phi(\eta), \tilde{\Psi}(\eta), \varepsilon]\}\, d\eta, \tag{37.20'}$$

где $\tilde{\Psi}(\theta) = \Psi(\theta) - 1$, P и F_1 — ряды относительно ε, Φ и Ψ такие, что среди линейных членов отсутствуют члены с Φ и Ψ. Отсюда согласно исследованиям главы III мы приходим к выводам, что данная система имеет единственное решение и оно представимо при достаточно малых ε и $|\mu'|$ в виде двойного степенного ряда по ε и μ'.

При помощи этого решения мы найдем коэффициенты b_k как аналитические функции от ε и μ'. Заметим, что из (37.11) и (37.13) следует сходимость ряда, входящего в равенство (37.22). Подставляя b_k в (37.22), мы получим аналитическую функцию $\chi(\varepsilon, \mu')$ такую, что $\chi(0, 0) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial\mu'}\chi(0, 0) = 1$. Отсюда по теореме 1.2 параметр μ' является аналитической функцией от ε. Найденное значение μ' мы подставим в полученный двойной степенной ряд и получим решение в виде сходящегося степенного ряда по одному малому параметру ε. Это решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов исходя из системы (37.19) — (37.20). Удобнее, однако, исходить из другой системы, получающейся из данной путем предварительного преобразования уравнения (37.19) при помощи резольвенты Фредгольма ядра $K(\eta, \theta)$. Таким путем могут быть найдены первые члены ряда для $\Phi(\theta)$. Первые три члена этого ряда и ряда для $\Psi(\theta)$ найдены и использованы в работе Я. И. Секерж-Зеньковича [1] для определения профиля волны.

37.4. Случай ветвления. Здесь исследуется случай, когда $\mu_0 = \nu_n = 3n$. Для простоты вычислений полагается $n = 1$, так как для других n исследование проводится аналогично. Исходя из (37.21), напишем

$$K(\eta, \theta) = \frac{1}{3\pi}\sin\eta\sin\theta + \frac{1}{3\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n\eta\sin n\theta}{n} = \frac{1}{3\pi}\sin\eta\sin\theta + N(\eta, \theta).$$

Подставляя данное выражение в (37.19′), получим

$$\Phi(\theta) = \mu_0(1+\mu')\int_0^{2\pi} N(\eta, \theta)[\Phi(\eta) + P(\eta)]\,d\eta + \mu_0(1+\mu')\left[\xi\sin\theta + \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi} P(\eta)\sin\eta\sin\theta\,d\eta\right], \tag{37.23}$$

где

$$\xi = \frac{1}{3\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\eta)\sin\eta\,d\eta. \tag{37.24}$$

Будем рассматривать систему (37.23) — (37.20′), которая согласно лемме Шмидта является регулярной. Эта система (см. п. 10.3) имеет при достаточно малых $|\xi|$, ε и $|\mu'|$ единственное решение, и оно представимо в виде тройного степенного ряда по ξ, ε, μ'. Коэффициенты этих рядов находятся обычным способом. Далее, при помощи ряда для $\Phi(\theta)$ мы находим коэффициенты b_k и, подставляя их в (37.22), получим μ' в виде двойного степенного ряда по ξ и ε. Подставляя найденное значение μ' в ряды для Φ и Ψ, мы получим решение Φ и Ψ в виде двойных степенных рядов по ξ и ε.

Подставляя Φ в (37.24), мы получим уравнение разветвления

$$\sum_{k=2}^{\infty} L_{k0}\xi^k + \sum_{k=0}^{\infty} L_{ki}\xi^k \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i = 0.$$

Производя вычисления, получим

$$L_{20} = 0, \quad L_{30} = -\mu_0^3, \quad L_{01} = d_1 \neq 0,$$
$$L_{11} = -2d_1\mu_0, \quad L_{02} = -\mu_0^2\, d_1^2.$$

Убывающая часть диаграммы Ньютона состоит из одного отрезка с концами (0, 1) и (3, 0). Уравнение разветвления имеет три решения, и каждое из них представимо в виде сходящегося ряда по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$. Из этих решений лишь одно вещественное.

Задача, следовательно, имеет единственное непрерывное малое решение

$$\Phi(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(\theta)\, \varepsilon^{\frac{i}{3}}.$$

Методом неопределенных коэффициентов находим

$$\alpha_1(\theta) = -d_1^{\frac{1}{3}} \sin\theta, \quad \alpha_2(\theta) = \frac{3}{2} d_1^{\frac{2}{3}} \sin 2\theta,$$
$$\alpha_3(\theta) = \frac{1}{6} d_1 \left(\frac{1031}{48} \sin\theta - 17 \sin 3\theta\right).$$

Здесь d_1 — заданный коэффициент в разложении (37.14). Заметим, что из постановки задачи вытекает отрицательность d_1.

Литература

А й з е н г е н д л е р П. Г.

1. Некоторые вопросы теории ветвления решений нелинейных уравнений, УМН **21**, вып. 1 (1966).
2. Об особых решениях нелинейных уравнений, Сообщения АН Груз.ССР **93**, № 3 (1966).
3. К теории ветвления малых решений нелинейных уравнений, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та **166**, вып. 10 (1966).
4. Применение теории исключения к задаче о ветвлении малых решений нелинейных уравнений. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та **166**, вып. 10 (1966).
5. Применение диаграммы Ньютона к задаче об устойчивости периодических решений, ДАН **179**, № 5 (1968).

А й з е н г е н д л е р П. Г. и В а й н б е р г М. М.

1. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в многомерном случае, ДАН **163**, № 3 (1965).
2. О периодических решениях неавтономных систем, ДАН **165**, № 2 (1965).
3. О разветвлении периодических решений, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та **166**, вып. 10 (1966).
4. О ветвлении периодических решений автономных систем и дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, ДАН **176**, № 1 (1967).
5. О ветвлении периодических решений дифференциальных уравнений с запаздыванием I, II (в печати).
6. О ветвлении периодических решений дифференциально-разностных уравнений, ДАН 186, № 3 (1969).

А т к и н с о н Ф. В.

1. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сб. **28** (70): 1 (1951).

А х м е д о в К. Т.

1. Аналитическое продолжение решения нелинейного уравнения в B-пространствах, Уч. зап. Азерб. ун-та, № 12 (1956).
2. О задаче Коши для одного класса нелинейных уравнений в функциональных пространствах, ДАН **115**, № 1 (1957).
3. Аналитический метод Некрасова — Назарова в нелинейном анализе, УМН **12**, вып. 4 (1957).
4. Об особых решениях одного класса интегро-дифференциальных уравнений, ДАН 128, № 3 (1959).

Б а р т л (Bartle R. G.)

1. Singular points of functional equations, Trans. Amer. Math. Soc. 75, № 2 (1953).

Бернштейн С. Н.
1. О некоторых априорных оценках в обобщенной задаче Дирихле, ДАН 124, № 4 (1959).
Боголюбов Н. Н. и Митропольский Ю. А.
1. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
Бохнер С. и Мартин У. Т.
1. Функции многих комплексных переменных, ИЛ, 1951.
Быков Я. В.
1. Об особых периодических решениях системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Диф. уравнения 1, № 7 (1965).
Вайнберг М. М.
1. Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Гостехиздат, 1956.
2. Интегро-дифференциальные уравнения, «Итоги науки. Матем. анализ. Теория вероятностей. Регулирование, 1962», ВИНИТИ АНСССР, М., 1964.
3. Точки бифуркации аналитических операторов. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та 188, вып. 11 (1967).
Вайнберг М. М. и Айзенгендлер П. Г.
1. Методы исследования в теории разветвления решений, «Итоги науки. Матем. анализ, 1965», ВИНИТИ АН СССР, М., 1966.
Вайнберг М. М. и Треногин В. А.
1. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие, УМН 17, вып. 2 (1962).
2. К теории неявных функций, УМН 17, вып. 5 (1962).
3. К теории ветвления решений нелинейных уравнений, УМН 18, вып. 5 (1963).
4. К теории систем неявных функций, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та 87, вып. 8 (1964).
Вайнберг М. М. и Энгельсон Я. Л.
1. О неявных аналитических операторах в локально выпуклых пространствах, Уч. зап. Латв. ун-та 47, Тр. выч. центра 1 (1963).
Валле-Пуссен
1. Курс анализа бесконечно малых, т. 1. ГТТИ, 1933
Ван-дер-Варден Б. Л.
1. Современная алгебра, ч. 1, Гостехиздат, 1947.
2. Современная алгебра, ч. 2, Гостехиздат, 1947.
Вишик М. И.
1. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Матем. сб. 29 (1951).
2. Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, Тр. Моск. матем. о-ва 1 (1952).
Вишик М. И. и Люстерник Л. А.
1. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений, УМН 15, вып. 3 (1960).

Вольмир А. С.
1. Гибкие пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1956.
Вольперт А. И.
1. Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем на плоскости, Тр. Моск. матем. о-ва **10** (1961).
Ворович И. И.
1. О поведении круглой плиты после потери устойчивости, Уч. зап. Ростовск. ун-та **32** № 4 (1955).
Габиб-заде А. Ш.
1. Исследование точек ветвления нелинейных нагруженных интегральных уравнений с различными параметрами, Тр. III Всес. матем. съезда **1**, Изд-во АН СССР (1956).
Гавурин М. К.
1. Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований, Уч. зап. Ленингр. ун-та, сер. матем. **19** (1950).
Гантмахер Ф. Р.
1. Теория матриц, «Наука», 1967.
Гахов Ф. Д.
1. Краевые задачи, Физматгиз, 1958.
Гельман А. Е.
1. Теоремы о неявной абстрактной аналитической функции, ДАН **132**, № 3 (1960).
2. Об аналитических решениях существенно нелинейных уравнений, ДАН **144**, № 1 (1962).
3. О простых решениях операторных уравнений в случае ветвления, ДАН **152**, № 5 (1963).
Гехт Б. И.
1. Разрешимость нелинейных сингулярных интегральных уравнений методом итераций, Уч. зап. Казанск. ун-та **116**, № 4 (1956).
Гильдебрандт и Грэйвс (Hildebrandt T. H., Graves L. M.)
1. Implicit functions and their differentials in general analysis, Trans. Amer. Math. Soc. **29** (1927).
Голомб (Golomb M.)
1. Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und algemeine Funktionalgleichungen, Math. Zeitschrift **39** (1934).
Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г.
1. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН **12**, вып. 2 (1957).
Грэйвс Л. М. (Graves L. M.)
1. Remarks on singular points of functional equations, Trans. Amer. Math. Soc. **79**, № 1 (1955).
Гурса Э.
1. Курс математического анализа, т. 1, ч. 1, ГТТИ, 1933.
2. Курс математического анализа, т. 1, ч. 2, ГТТИ, 1933.
3. Курс математического анализа, т. 3, ч. 1, ГТТИ, 1933.
4. Курс математического анализа, т. 3, ч. 2, ГТТИ, 1933.

Гусейнов А. И.
1. Теоремы существования и единственности для нелинейных сингулярных интегральных уравнений, Матем. сб. 20 (1947).
2. Об одном классе нелинейных сингулярных интегральных уравнений, Изв. АН СССР, сер. матем. 12 (1948).

Далецкий Ю. Л.
1. Формулы дифференцирования функций от матриц и матрично-монотонные функции, Функциональный анализ и его применение, Баку, 1961.

Далецкий Ю. Л. и Крейн С. Г.
1. Интегрирование и дифференцирование функций эрмитовых операторов и применения к теории возмущений, Тр. сем. по функц. анализу Воронеж. ун-та, вып. 1 (1956).

Данфорд Н. и Шварц Дж. Т.
1. Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, 1963.
2. Линейные операторы. Спектральная теория, «Мир», 1966.

Дьедонне Ж.
1. Курс современного анализа, «Мир», 1964.

угин Л. П.
1. Неявные функции, Изд-во Ленингр. ун-та, 1956.
2. К теории неявных функций, Докл. АН БССР 7, № 1 (1963).

Зарисский О., Самюэль П.
1. Коммутативная алгебра, т. 1, ИЛ, 1963.
2. Коммутативная алгебра, т. 2, ИЛ, 1963.

Иглиш Р. (Iglisch R.)
1. Zur Theorie der reellen Verzweigungen von Lösungen nichtlinearen Integralgleichungen, Journal für die reine und angewandte Math. 164, № 3 (1931).

Канторович Л. В. и Акилов Г. П.
1. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

Като Т. (Kato T.)
1. On the perturbation theorie of closed linear operators, J. Math. Soc. Japan 4 (1952).

Келдыш М. В.
1. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН 77, № 1 (1951).

Коддингтон Э. А. и Левинсон Н.
1. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.

Красносельский М. А.
1. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.
2. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений, «Наука», 1966.

Крейн М. Г.
1. О формуле следов в теории возмущений, Матем. сб. 33 (75) (1953).

К р о н и н (Cronin J.)
1. Branch pointes of solutions of equations in Banach Space, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950).
2. Analytic functional mappings, Ann. Math. 58, № 1 (1953).
К у р о ш А. Г.
1. Курс высшей алгебры, Физматгиз, 1962.
К у ш у л ь М. Я.
1. О квазигармонических системах, близких к системам с постоянными коэффициентами, у которых чисто мнимые корни фундаментального уравнения имеют непростые элементарные делители, ПММ 22, вып. 4 (1958).
Л а в р е н т ь е в М. А.
1. К теории длинных волн, ДАН 41, № 7 (1943).
Л а г р а н ж (Lagrange J. L.)
1. Solution de differents problemes de calcul integral, Miscellaneu Taurinensia, t. 3 (1762—1765), t. 4 (1760).
2. Memoires de l'Academie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.
Л а м с о н (Lamson)
1. A general implicit function theorem, Amer. Journ. Math. 42 (1920).
Л е ф ш е ц С. (Lefschetz S.)
1. Complete families of periodic solutions of differential equations, Comm. Helv. 28 (1954).
2. Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, 1961.
Л и д с к и й В. Б.
1. К теории возмущений несамосопряженных операторов, Журн. выч. матем. и матем. физ. 6, № 1 (1966).
Л и х т е н ш т е й н Л. (Lichtenstein L.).
1. Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen, Berlin, 1931.
Л о б а ч е в С. В.
1. Обобщение теории нелинейных интегральных уравнений Н. Н. Назарова, Тр. Краснодарск. ин-та пищ. пром-сти, № 16 (1957).
Л о п а т и н с к и й Я. Б.
1. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического вида к регулярным интегральным уравнениям, Укр. матем. ж. 5 (1953).
Л ю с т е р н и к Л. А.
1. Некоторые вопросы нелинейного функционального анализа, УМН 11, вып. 6 (1956).
Л ю с т е р н и к Л. А. и С о б о л е в В. И.
1. Элементы функционального анализа, «Наука», 1965.
Л я п у н о в А. М.
1. Sur les figures d'equilibre peu differentes des ellipsoides d'une masse liquide homogene donee d'un mouvement de rotation, P. 1, Зап. Акад. наук, С.-Петербург (1906).

2. Общая задача об устойчивости движения, Собр. соч., т. 2, Изд-во АН СССР, 1956.
3. О фигурах равновесия, мало отличающихся от эллипсоидов вращающейся однородной массы жидкости, Собр. соч., т. 4, Изд-во АН СССР, 1959.

Майкл, Клиффорд (Michal A., Clifford A.).
1. Fonctions analitiques implicites dans des dspaces vectoriels abstraits, Compt. Rend. Acad. Sci. 197 (1933).

Малкин И. Г.
1. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.

Мальцев А. И.
1. Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1956.

Мамашев С. Х.
1. Исследование одного класса операторных уравнений методом диаграммы Ньютона, Тр. Самаркандск. ун-та, Новая сер., вып. 151 (1964).

Маркус А. С.
1. О голоморфных оператор-функциях, ДАН 119, № 6 (1958).

Маркушевич А. И.
1. Краткий курс теории аналитических функций, «Наука», 1966.

Меламед В. Б.
1. К задаче о ветвлении решений нелинейного аналитического уравнения, ДАН 145, № 3 (1962).
2. О формальных решениях некоторых нелинейных уравнений, Сибирский матем. ж. 6, № 1 (1965).

Миранда К.
1. Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, 1957.

Михлин С. Г.
1. Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники, Гостехиздат, 1949.
2. Сингулярные интегральные уравнения, УМН 3, вып. 3 (1948).

Моисеев Н. Н.
1. Теорема существования и неединственности вихревых волн периодического типа, ПММ 24, вып. 4 (1960).

Мусхелишвили Н. И.
1. Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1946.

Наталевич В. К.
1. Нелинейные сингулярные интегральные уравнения и нелинейные краевые задачи теории аналитических функций, Уч. зап. Казанск. ун-та 112, № 10 (1952).

Некрасов А. И.
1. О волнах установившегося вида, Изв. Ивановск. политехн. ин-та 6 (1922).
2. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости, Изд-во АН СССР, 1951.

3. О волнах установившегося вида, Собр. соч., т. 1, Изд-во АН СССР, 1961.

Немыцкий В. В.

1. Метод неподвижных точек в анализе, УМН, вып. 1 (1936).

Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А.

1. Курс матем. анализа, т. 2, Гостехиздат, 1957.

Никольский С. М.

1. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, Изв. АН, сер. матем. 7 (1943).

Ньютон И.

1. Математические работы. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением к геометрии кривых, ОНТИ, 1937.

Петровский И. Г.

1. Лекции по теории интегральных уравнений, «Наука», 1965.
2. О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными, УМН 1, № 3—4 (1946).

Плисс В. А.

1. Нелокальные проблемы теории колебаний, «Наука», 1964.

Плотникова Г. В.

1. Об устойчивости периодических решений неавтономных квазилинейных систем с двумя степенями свободы, ПММ 29, вып. 6 (1965).

Полубаринова-Кочина П. Я.

1. К вопросу об устойчивости пластинки, ПММ 3, вып. 1 (1936).

Проскуряков А. П.

1. К построению периодических решений автономных систем с одной степенью свободы, ПММ 21, вып. 4 (1957).
2. Построение периодических решений с одной степенью свободы в случае произвольных вещественных корней уравнения основных амплитуд, ПММ 22, вып. 4 (1958).
3. Периодические решения квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы в виде рядов по целым и дробным степеням параметра, ПММ 25, вып. 3 (1961).
4. Устойчивость периодических решений квазилинейных автономных систем с двумя степенями свободы, ПММ 29, вып. 5 (1965).

Пуанкаре (Poincare H.)

1. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1, Paris, Gauthier-Villars, 1892.

Пюизё (Puiseux V.).

1. Recherches sur les fonctions algébriques, J. de math. pures et appl. 15 (1850).

Реллих (Rellich F.)

1. Störungstheorie der Spektralzerlegung, Proc. Internat. Congress of Math., Cambridge, Mass. 1 (1950).

Рисс (Riesz M.).

1. Sur les fonctions conjuguees, Math. Z. 27 (1927).

Рисс Ф. и Секкефальви-Надь Б.

1. Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.

Секерж-Зенькович Я. И.
1. К теории установившихся волн конечной амплитуды, вызванных давлением, периодически распределенным по поверхности потока тяжелой жидкости бесконечной глубины, ДАН **180**, № 2 (1968) (см. также ДАН **180**, № 3 (1968)).
2. Об одном виде установившихся волн конечной амплитуды, ПММ **32**, вып. 6 (1968).

Симидзу (Shimizu T.).
1. Analytic operations and analytic operational equations, Math. Japan **1** (1948).

Соболев С. Л.
1. Об одной теореме функционального анализа, Матем. сб. **4** (46) (1938).
2. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.

Смирнов В. И.
1. Курс высшей математики, т. 5, Гостехиздат, 1959.

Сретинский Л. Н.
1. Волны конечной амплитуды, возникающие от периодически распределенного давления, Изв. АН СССР, ОТН, № 4 (1953).

Стапан А. Э.
1. Разветвление решений нелинейных интегральных уравнений, Уч. зап. Рижского пед. ин-та 4 (1957).

Тер-Крикоров А. М.
1. К теории волн установившегося типа в неоднородной жидкости, ПММ 29, вып. 3 (1965).

Тер-Крикоров А. М. и Треногин В. А.
1. Существование и асимптотика решений типа «уединенной волны» для одного класса нелинейных эллиптических уравнений, Матем. сб. 62, вып. 3 (1963).
2. Решения типа длинных волн для квазилинейных эллиптических уравнений в неограниченной полосе, Диф. уравнения **3**, № 3 (1967).

Тихонов А. Н.
1. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, Матем. сб. 22 (61) (1948).

Торжевский А. П.
1. Периодические решения уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите, Космические иссл. 2, вып. 5 (1964).

Треногин В. А.
1. Разветвление решений нелинейных уравнений в банаховом пространстве, УМН **13**, вып. 4 (1958).
2. О разветвлении решений нелинейных уравнений в аналитическом случае, Тр. физ.-техн. ин-та, вып. 3 (1959).
3. Уравнение разветвления и диаграмма Ньютона, ДАН **131**, № 5 (1960).
4. Возмущение линейного уравнения малым нелинейным слагаемым, ДАН 140, № 2 (1961).
5. Возмущение собственных значений и собственных элементов линейных операторов, ДАН **167**, № 3 (1966).

6. Разветвление решений нелинейных сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши, Материалы 6 межвузовской физ.-матем. науч. конф. Дальнего Востока, Хабаровск, 1967.
7. Линейные уравнения в пространстве Банаха с малым параметром, Материалы в межвузовской физ.-матем. науч. конф. Дальнего Востока, Хабаровск, 1967.
8. Асимптотика и существование решений задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве, ДАН 152, 1 (1963).
9. Существование и асимптотика решений типа «уединенной волны» для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, ДАН 156, 5 (1964).

Фихтенгольц Г. М.
1. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, «Наука», 1969.

Фукс Б. А.
1. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, 1962.

Фукс Б. А. и Левин В. И.
1. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, Гостехиздат, 1951.

Хаусдорф Ф.
1. Теория множеств, ОНТИ, 1937.

Хилле Э., Филлипс Р. Ф.
1. Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962.

Чеботарев Н. Г.
1. Многоугольник Ньютона и его роль в современном развитии математики, Сб. статей к трехсотлетию со дня рождения И. Ньютона, 1943 (см. также Собр. соч. Н. Г. Чеботарева, т. 3).
2. Теория алгебраических функций, Гостехиздат, 1948.

Чезари Л.
1. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, «Мир», 1964.

Шапиро З. Я.
1. Об общих краевых задачах для уравнений эллиптического типа, Изв. АН, сер. матем. 17 (1953).

Шаудер (Schauder J.).
1. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z. 38 (1934).

Шехтер М.
1. Общие граничные задачи для эллиптических уравнений в частных производных, Математика (период. сб. переводов) 4 : 5, ИЛ, 1960.
2. Замечания об эллиптических граничных задачах, Математика (период. сб. переводов) 4 : 6, ИЛ, 1960.

Шилов Г. Е.
1. Математический анализ (специальный курс), Физматгиз, 1961.

Шмидт Э. (Schmidt E.)
1. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, Teil 3, Über die Auflösungen der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrer Lösungen, Math. Ann. 65 (1908).
Штеренгас В. Н.
1. Особые решения одного класса нелинейных интегральных уравнений, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та 188, вып. 11 (1967).
Энгельсон Я. Л.
1. О ветвлении решений нелинейных уравнений в локально выпуклых пространствах, Уч. зап. Латв. ун-та, 58 (1964).
Юдович В. И.
1. Свободная конвекция и ветвление, ПММ 31, вып. 1 (1967).

Мордухай Моисеевич Вайнберг
Владилен Александрович Треногин

ТЕОРИЯ ВЕТВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

М., 1969 г., 528 стр. с илл.

Редактор *П. Г. Айзенвендлер*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр*
Корректор *Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 9/XII 1968 г. Подписано к печати 27/VI 1969 г. Бумага 84×108[1]/[32]. Физ. печ. л. 16,5. Условн. печ. л. 27,72. Уч.-изд. л. 26,51. Тираж 11900 экз. Т-08956. Цена книги 1 р 87 к Заказ 1434.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
Москва В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
19	10 сн.	кнльце	кольце
185	15 св.	$\varphi_1^2(t) + a_{011}(t)$	$\varphi_1^2(t)\, a_{011}(t)$
214	12 »	$\overline{\varphi}_i(s)$	$\overline{\psi}_i(s)$
332	15 сн.	меньше единицы	меньше единицы, если $\mathrm{Re}\,\zeta \neq 0$
332	5 »	неотрицательную	положительную
333	6 св.	$\mathrm{Re}\,\zeta \geqslant 0$	$\mathrm{Re}\,\zeta > 0$
333	15 »	$s > 1$	$s > 2$
333	23 »	единице	единице или двум
355	31 »	$(x,\ y_0) = 0$	$F(x,\ y_0) = 0$
363	12 »	F_{ij}	$C_{i+j}^i\, F_{ij}$
363	8 сн.	F_i	$C_{i+j}^i\, F_{ij}$
363	6 »	$\frac{1}{i!\, j!}$	$\frac{1}{(i+j)!}$
381	14 »	21.2	22.2

Кн. М. М. Вайнберг и В. А. Треногин