СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ФИЗИКИ

Серия выпускается под общим руководством редакционной коллегии журнала «Успехи физических наук»

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

А. С. ВАЙТМАН

ПРОБЛЕМЫ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКЕ КВАНТОВАННЫХ ПОЛЕЙ

Перевод с английского
А. Д. СУХАНОВА

Под редакцией
Б. В. МЕДВЕДЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

В 14
530.1
УДК 539.101

Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. Вайтман А.С., Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1967.

Книга представляет собой первую строгую попытку синтеза идей аксиоматического направления и обычного гамильтонова формализма. В части I на примере конкретных моделей обсуждается роль различных аксиом в квантовой теории поля. В части II рассматривается ряд трудностей настоящей теории поля и выясняется их физическая сущность. В дополнении дается изложение современной теории рассеяния Хаага—Рюэля.

Рис. 5, библ. 128 назв.

А. С. Вайтман

Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей

М., 1967 г., 184 стр. с илл.

(Серия «Современные проблемы физики»)

Редактор *Д. А. Миртова*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова* Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 22/IV 1967 г. Подписано к печати 3/XI 1967 г.
Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 5,75. Условн. печ. л. 9,66.
Уч.-изд. л. 9,7. Тираж 9000 экз. Цена книги 67 коп. Заказ № 3373

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10.

2-3-2
116-67

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода 7

§ 1. Введение. 9

Часть I

ИЗВЕСТНЫЕ ЯВНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ

§ 2. Обобщенные свободные поля и их классы эквивалентности 19
§ 3. Теория полей Ли 32
§ 4. Модели в двумерном пространстве-времени 37
Пример 1. Экспоненты по свободным полям ненулевой массы и операторные калибровочные преобразования 40
Пример 2. Скалярные и спинорные поля нулевой массы в двумерном пространстве-времени 46
Пример 3. ν-теория фононов 59
Пример 4. Модель Тирринга 63
Пример 5. Векторные мезоны, взаимодействующие с фермионами нулевой массы 78
Пример 6. Модель Федербуша 80
§ 5. Общие методы построения новых теорий из старых . . . 88
Прямая сумма 88
Сужение на подпространство 89
Тензорное произведение (прямое произведение) 90
Сужение на времениподобную гиперповерхность 93
Заключительные замечания 93

Часть II

ОЦЕНКА ТРАДИЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СТАНДАРТНЫХ НЕТРИВИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

§ 6. Чем плохо представление взаимодействия? (Теорема Хаага) 95
§ 7. Чем плохо представление взаимодействия? (Ультрафиолетовая катастрофа) 111
§ 8. Формализм гильбертова пространства; существенная самосопряженность различных гамильтонианов 116
Пример 1. Бесконечно малый сдвиг 118
Пример 2. Свободная шредингерова частица на некотором интервале 120

Примеры 3 и 4. Шредингерова частица в поле с четверным потенциалом притяжения и с кубическим потенциалом 121
Пример 5. Оператор $-\Delta+V$ с потенциалом V, ограниченным снизу 123
§ 9. Стабильность вакуума. 128
§ 10. Модели теорем существования. Выводы 137

Дополнение
ПОСЛЕДНИЕ ДОСТИЖЕНИЯ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Аксиомы и теорема реконструкции 145
2. Сравнение пространств $\mathscr{D}$ и $\mathscr{S}$ в качестве областей определения поля $A(\varphi)$; обсуждение пространства D; самосопряженность эрмитовых полей 149
3. Алгебры фон Неймана, ассоциированные с областью в пространстве-времени, и поле 155
4. Теория рассеяния Хаага — Рюэля. Общий обзор . . . 159
5. Асимптотическое поведение решений уравнения Клейна — Гордона 165
6. Усовершенствованная теорема о распадении на пучки 169
7. Заключительные замечания о теории рассеяния Хаага — Рюэля 180

Литература 181

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая читателю в серии «Современные проблемы физики» книга А. С. Вайтмана «Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей» представляет собой перевод лекций, прочитанных автором в летней школе теоретической физики на Корсике в 1964 г.*).

В первой части предлагаемой книги автор, являющийся одним из создателей аксиоматического направления в квантовой теории поля, изучает, на примере конкретных моделей, роль различных аксиом в квантовой теории поля. Вторая часть книги посвящена обсуждению ряда трудностей, которые присущи настоящей теории поля. К числу их принадлежат теорема Хаага и проблема неэквивалентных представлений канонических перестановочных соотношений, несепарабельность гильбертова пространства состояний, проблема ультрафиолетовых расходимостей.

Можно сказать, что эта книга представляет собой первую строгую попытку синтеза идей аксиоматического направления и обычного гамильтонова формализма. Вместе с тем действительное преимущество этой книги состоит в том, что она написана для физиков, а не для математиков. Поэтому в ней не только формулируются и доказываются различные теоремы, но каждый раз выясняется и далеко не простое физическое существо дела.

---

*) Introduction to some aspects of the relativistic dynamics of quantized fields by A. S. Wightman. Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Bures—sur—Yvette (Seine—&—Oise), on leave from Princeton University, Princeton, New Gersy, USA. Revised notes for lectures at the French Summer School of Theoretical Physics, Cargêse, Corsica, July 1964.

С целью более полного ознакомления читателя с работами по аксиоматической теории поля мы сочли целесообразным включить в данное издание также и вторую часть лекций А. С. Вайтмана, прочитанных им на семинаре по теоретической физике в Триесте в 1962 г., посвященную в основном теории рассеяния Хаага — Рюэля (Theoretical Physics, Lectures, presented at the Seminar on Theoretical Physics, Trieste, 1962, IAEA, Vienna, 1963). Это позволит восполнить существующий в нашей литературе пробел, поскольку изложение теории Хаага — Рюэля не вошло ни в одну из монографий или обзорных статей на русском языке*). Что же касается первой части триестских лекций Вайтмана, то она содержит изложение ряда наиболее простых, общих и известных результатов аксиоматической теории поля, которые полностью и с большей подробностью излагаются в основной части этой книги или же в недавно вышедшей книге Р. Ф. Стритера и А. С. Вайтмана «*PCT*, спин и статистика и все такое» («Наука», 1966). Поэтому перевод этой части был признан излишним, и мы ограничимся здесь тем, что приведем только заголовки входящих в нее разделов: 1. Ретроспективный взгляд на теорему *PCT*. 2. Транзитивность слабой локальной коммутативности и локальной коммутативности; классы эквивалентности локальных полей. 3. Обобщенные свободные поля и свойство сосредоточенности полей в импульсном пространстве. 4. Свойство распадения на пучки. Поскольку вторая часть триестских лекций, по замыслу автора, не зависит от первой, то перевод только одной этой части можно считать оправданным.

Мы надеемся, что настоящая книга будет полезна научным работникам, студентам и аспирантам, как физикам, так и математикам, интересующимся современной квантовой теорией поля.

31 декабря 1966 г.

Б. Медведев

---

*) В настоящее время в издательстве «Мир» готовится к печати книга Р. Й о с т а «Общая теория квантовых полей».

§ 1. Введение

В последние годы было приложено немало усилий, чтобы прояснить основы квантовой теории поля. Был разработан такой язык, который в принципе должен был бы позволить рассуждать о теории квантованных полей математически строгим образом. Внутренняя непротиворечивость этого языка была продемонстрирована на теориях свободных полей и обобщенных свободных полей, но физически нетривиальные примеры взаимодействующих полей все еще неизвестны.

В то же время в эвристической квантовой теории поля известны многочисленные примеры нетривиальных моделей, для которых можно доказать существование решений в том смысле, что можно выписать формальные (преимущественно расходящиеся) ряды по константе связи, удовлетворяющие уравнениям движения (например, псевдоскалярная мезонная теория с псевдоскалярной связью).

Возможны по крайней мере две точки зрения на эти модели. Согласно одной из них, эти модели — часть древней истории и «будущую теорию» следует формулировать каким-то радикально новым способом. Согласно же другой, эти модели дают нам пробный объект, на котором общая теория квантованных полей должна продемонстрировать свои силы. В поддержку этой второй точки зрения можно сказать, что если бы современная теория смогла решить проблему доказательства существования решений этих стандартных моделей, проблему, сокрушившую два поколения физиков-теоретиков, то это дало бы возможность обосновать спорные предположения в теории S-матрицы и в теории элементарных частиц. Это также могло бы убедить кое-кого из ретроградов в том, что современная теория—вовсе не просто игра в бирюльки для любителей «высокой науки».

Как бы то ни было, в этих лекциях я считаю, что необходимо как можно шире изучать стандартные теории.

Вдобавок к упомянутым выше моделям в последние годы было открыто несколько явно решаемых моделей (например, модель Тирринга). Вообще говоря, с физической точки зрения эти модели тривиальны в том смысле, что они не приводят к нетривиальной теории рассеяния. Однако эти модели представляют значительный систематический интерес для оценки обоснованности общих методов теории поля. По этой причине в части I я дам обзор всех известных явно решаемых релятивистских моделей и покажу, насколько они укладываются в рамки общей теории.

Простейшими явно решаемыми моделями являются модели n скалярных полей, взаимодействие которых описывается лагранжианом, квадратичным по этим полям. Решения таких моделей — совокупность n обобщенных свободных полей, спектр масс которых содержит конечное число n дискретных значений.

Несколько более сложная ситуация возникает, когда, сохраняя квадратичность лагранжиана, рассматривают бесконечное семейство полей, характеризуемое каким-либо непрерывным параметром. Сами решения таких моделей, вообще говоря, не являются обобщенными свободными полями. Однако они могут быть представлены в виде

$$B(s, x) = \int_0^\infty K(s, t)\, A(t, x)\, dt, \tag{1.1}$$

где $\int_0^\infty A(t, x)\, dt$ — обобщенное свободное поле. Оператор B, определенный в (1.1), локален относительно оператора A, т. е.

$$[B(s, x),\ A(t, y)] = 0 \text{ для } (x-y)^2 < 0. \tag{1.2}$$

Это означает, что оба этих оператора принадлежат к одному классу эквивалентности (классу Борхерса). Как было установлено Лихтом, наиболее общий элемент такого класса эквивалентности представляет собой конечную сумму членов вида

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty F(s_1, \ldots, s_n): D^{\alpha_1} A(s_1, x) \ldots D^{\alpha_n} A(s_n, x): ds_1 \ldots ds_n, \tag{1.3}$$

где F — обобщенная функция умеренного роста, а D^α обозначает выражение

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x^0)^{\alpha(0)} (\partial x^1)^{\alpha(1)} (\partial x^2)^{\alpha(2)} (\partial x^3)^{\alpha(3)}}, \quad |\alpha| = \alpha^{(0)} + \alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)}, \tag{1.4}$$

где $\alpha = (\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)})$ — любая совокупность четырех неотрицательных целых чисел.

К числу моделей, относящихся к этой категории, принадлежит модель Захариасена в интерпретации Тирринга. В обобщенном толковании, обсуждавшемся Лихтом, она приводит к нетривиальной теории рассеяния. К сожалению, возможность явного решения этой модели связана как раз с теми ее особенностями, которые делают ее как физическую теорию непригодной.

В § 3 мы рассмотрим теорию полей Ли. Это такие поля, коммутатор которых имеет вид

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \\ = i^{-1} f(x-y) + i^{-1} \int g\left(x-y, \frac{x+y}{2} - z\right) \varphi(z)\, dz. \tag{1.5}$$

Соотношения (1.5) как раз того же типа, что имеют место между инфинитезимальными операторами в представлении группы Ли; функции f и g играют роль структурных констант. Обобщенные свободные поля — это специальный класс полей Ли, для которого $g = 0$. Как было впервые показано Робинсоном, поля Ли в трех- или четырехмерном пространстве-времени являются обобщенными свободными полями. Что касается двумерного пространства-времени, то известны примеры, когда поля Ли принадлежат к классу эквивалентности обобщенного свободного поля, но сами обобщенными свободными полями не являются. Итак, из всего сказанного выше мы можем сделать вывод, что все те поля, которых мы касались, принадлежат к классам эквивалентности обобщенных свободных полей.

§ 4 посвящен обсуждению моделей релятивистских теорий поля в двумерном пространстве-времени. Их конструкция существенно зависит от четырех специфических особенностей двумерного пространства-времени:

1) Класс эквивалентности свободного поля φ в двумерном пространстве-времени гораздо богаче, поскольку он, наряду с полиномами по φ, содержит и ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n : \varphi^n : (x). \tag{1.6}$$

Локальные функции свободных полей включают объекты, которые удовлетворяют содержательным уравнениям движения и которые в пространствах более высокой размерности не были бы хорошо определены.

2) Инвариантные обобщенные функции с носителем в будущем световом конусе $p^2 = 0$, $p^0 \geqslant 0$ никогда не будут положительными мерами. Это обстоятельство разъясняет некоторые математические двусмысленности, которые весьма досаждали в прежних формальных исследованиях.

3) Если исключить точку $p = 0$, то будущий световой конус распадается на две несвязные компоненты:

$$p^2 = 0,\ \ p^0 > 0,\ \ p^1 > 0 \ \ \text{и} \ \ p^2 = 0,\ \ p^0 > 0,\ \ p^1 < 0,$$

каждая из которых представляет собой выпуклый конус. Это приводит к существованию дополнительных интегралов движения, которые можно использовать для получения явных решений уравнений, гораздо менее податливых в пространствах более высокой размерности.

4) В двумерном пространстве-времени из уравнения $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$ следует, что соответствующий току j_μ псевдоток $k^\mu(x) = -\varepsilon^{\mu\nu} j_\nu(x)$ удовлетворяет условию $\operatorname{rot} k = 0$. Это в свою очередь означает, что существует псевдоскалярный оператор σ такой, что $k^\mu(x) = \partial^\mu \sigma(x)$. Если j_μ — ток свободного спинорного поля ψ ненулевой

массы, то соответствующий оператор σ оказывается локальным полем, *не принадлежащим к классу Борхерса поля* ψ. Соответствующим образом подобранные функции полей σ и ψ оказываются локальными полями, не принадлежащими к классу Борхерса свободного поля. Тем самым они могут иметь S-матрицу, отличную от единичной.

Частным случаем (1.6) является оператор $:\exp g\varphi:(x)$, где φ — свободное поле массы $m > 0$. Это поле и двукомпонентное поле $\psi(x) = :\exp\ g\varphi:(x)\,\psi^{(0)}(x)$, где $\psi^{(0)}(x)$ — решение свободного уравнения Дирака, обсуждаются в примере 1.

Вторая особенность становится существенной в случае свободного скалярного поля нулевой массы. Действительно, в двумерном пространстве-времени ни один объект такого рода существовать не может, если только накладывать на него обычные требования квантовой теории поля. Однако если в гильбертовом пространстве состояний ввести индефинитную метрику, то в нем можно определить свободное скалярное поле и экспоненту от него. Эти операторы можно использовать для построения модели теории поля, изученной Шроером в его работе об *инфрачастицах*. Эта модель вместе со свободным полем Дирака нулевой массы рассматривается в примере 2. Для поля Дирака нулевой массы усложнения, связанные с индефинитной метрикой, не возникают по соображениям размерности.

В примере 3 показано, как развитый формализм связан с ν-теорией фононов, т. е. с теорией, в которой бозонное поле нулевой массы строится из билинейных комбинаций фермионных полей нулевой массы.

В примере 4 рассматривается модель Тирринга, т. е. теория фермионного поля нулевой массы, которое взаимодействует само с собой посредством ферми-связи. Эта модель оказывается довольно тривиальным обобщением упоминавшейся выше модели, изученной Шроером. То же самое можно сказать, как то впервые заметили Тирринг и Весс, и о теории фермионного поля нулевой массы, взаимодействующего с двукомпонентным векторным полем. Она рассматривается в примере 5.

Последний рассматриваемый нами пример 6 был предложен Федербушем. Это теория двух фермионных полей ненулевой массы с взаимодействием вида $j_1^\mu(x)\,\varepsilon_{\mu\nu}\,j_2^\nu(x)$. Это взаимодействие также приводит к теории, решение которой можно просто выразить через свободные поля.

Выводы, которые можно сделать из изучения этих моделей, ясны не до конца. Все полученные решения можно без труда выразить через свободные поля и поля, довольно просто построенные из свободных. Кроме того, соответствующая теория рассеяния относительно тривиальна (сечения рассеяния зависят не от энергии и импульса, а лишь от внутренних квантовых чисел). Хотя эти модели служат неоценимым материалом для проверки общего формализма, создается впечатление, что они нисколько не продвинули нас к конечной цели построения нетривиальных теорий поля. (Существуют веские основания полагать, что стандартные теории взаимодействий Ферми и Юкава для фермионов ненулевой массы будут нетривиальными, если они вообще имеют решение.) Однако некоторые явные решения принадлежат к классам Борхерса, отличным от классов Борхерса свободных полей, а некоторых из них приводят к S-матрице, отличной от единичной. Представляет интерес исследовать дальше четвертую особенность, чтобы установить, не прольет ли это какой-либо свет на проблему решения нетривиальных моделей.

В конце части I мы кратко охарактеризуем несколько общих методов построения новых теорий поля, предложенных рядом других авторов. Ни один из этих методов, вероятно, не приведет к созданию нетривиальных теорий поля из тривиальных, но тем не менее иногда они оказываются полезными.

Даже если допустить, как мы здесь это делаем, что стандартные нетривиальные модели теорий поля заслуживают изучения, отсюда вовсе не следует, что эвристические формулы, которые выдаются за их решения, имеют хоть какой-то смысл. Действительно, наивные читатели оригинальных работ могли бы впасть в чрезвычайный пессимизм относительно пригодности предложенных решений. Следуя в этом направлении, можно было бы сделать вывод, что для получения теорем существования в этих теориях необходимо использовать формализм, в котором все общие требования релятивистской локальной теории выполняются автоматически. В конце концов, если квантовая теория полей окажется действительно плодотворной, такой формализм непременно будет создан. Но до сих пор остается ворчливый вопрос: существует ли что-нибудь поучительное в формальных решениях теорий поля, трудолюбиво выписывавшихся в 1946—1952 гг., кроме эвристического получения рядов теории возмущений (неперенормированных или перенормированных) по степеням константы связи? Часть II этих лекций как раз посвящена ответу на него. Точнее, если стандартные решения «плохи», то спросим: почему именно они плохи и можно ли их фиксировать так, чтобы они привели к теоремам существования? Очертим основные идеи, к которым можно тут прибегнуть.

Прототипом рассматриваемых проблем является задача: найти скалярное поле φ, удовлетворяющее уравнениям

$$(\Box + m^2)\,\varphi(x) = g \, \vdots\, \varphi^2 \,\vdots\, (x),$$

$[\varphi(x), \varphi(y)]_- = 0$ при всех x, y, для которых $(x-y)^2 < 0$,

$$\left[\varphi(x), \frac{\partial\varphi}{\partial y^0}(y)\right]_-\Big|_{x^0=y^0} = i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

где

$$\vdots\,\varphi^2\,\vdots\,(x) = \lim_{y\to x}\,[\varphi(y)\,\varphi(x) - (\Psi_0, \varphi(y)\,\varphi(x)\,\Psi_0)].$$

Эта задача формально была разрешена введением представления взаимодействия. Определим свободное поле φ_I, т. е. решение уравнений

$$(\Box + m^2)\,\varphi_I(x) = 0, \quad [\varphi_I(x), \varphi_I(y)] = i^{-1}\Delta(x-y),$$

так, чтобы при $t = 0$

$$\varphi(\mathbf{x}, 0) = \varphi_I(\mathbf{x}, 0), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^0}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\partial\varphi_I}{\partial x^0}(\mathbf{x}, 0).$$

Тогда для всех более поздних и более ранних моментов времени

$$\varphi(\mathbf{x}, x^0) = \mathcal{U}^{-1}(x^0)\,\varphi_I(\mathbf{x}, x^0)\,\mathcal{U}(x^0), \tag{1.7}$$

где $\mathcal{U}(x^0)$ — унитарная матрица, удовлетворяющая уравнению

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial x^0}\mathcal{U}(x^0) &= H_I(x^0)\,\mathcal{U}(x^0), \quad \mathcal{U}(0)=1,\\ H_I(x^0) &= -\int d^3x\,\frac{\lambda}{3}:\varphi_I^3:(\mathbf{x},x^0). \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Фактически матрицу $\mathcal{U}(x^0)$ можно записать как

$$\mathcal{U}(x^0) = \exp(iH_0x^0)\exp(-iH_{Tot}x^0), \tag{1.9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &H_{Tot} = H_0 + H_I,\\ &H_0 = \int d^3x\,\frac{1}{2}\left[:\left(\frac{\partial\varphi_I}{\partial x^0}\right)^2:(x) + :(\nabla\varphi_I)^2:(x) + m^2:\varphi_I^2:(x)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

Оказывается, что есть три существенные трудности, связанные с этим формальным результатом, которые можно анонсировать заголовками:

1) теорема Хаага;
2) ультрафиолетовая катастрофа;
3) нестабильность вакуума.

Теорема Хаага утверждает, что евклидово-инвариантному оператору, подобному H_I, можно придать смысл (если вообще это возможно) только в случае, если допустить странные представления перестановочных соотношений операторов $\varphi_I(\mathbf{x}, 0)$ и $\frac{\partial\varphi_I}{\partial x^0}(\mathbf{x}, 0)$. Далее, странные представления настолько многообразны, что до самого последнего времени казалось вообще безнадежным делом выяснить природу тех операторов, которые следует включить, чтобы сделать оператор H_I хорошо определенным. Тем самым на данной стадии дальнейший путь решения проблемы разветвляется. Либо необходимо приготовиться к созданию очень серьезной современной теории операторов, либо придется прибегнуть к неевклидово-инвариантным аппроксимациям, а затем получать из них решения настоящей теории поля в качестве предела. Стандартная версия последней процедуры состоит в том, чтобы модифицировать H_I, поместив систему в пространственный ящик. Тогда модифицированный гамильтониан будет иметь смысл в рамках фокова представления перестановочных соотношений при условии, что оператор H_I не приводит к ультрафиолетовой катастрофе. (Например, в модели (1.8) в случае дву- или трехмерного пространства-времени ультрафиолетовая катастрофа не должна возникать.) Именно такая стандартная процедура помещения системы в ящик и будет рассматриваться в этих лекциях. В § 6 подробно обсуждаются явления, связанные с теоремой Хаага.

Однако, как это видно из заголовка § 7 «Ультрафиолетовая катастрофа», могут встретиться вещи и похуже. Даже для системы в ящике оператор H_I может не иметь смысла. Стандартный способ борьбы с этим злом — ввести ультрафиолетовое «обрезание» и добавить к H_I должным образом подобранные контрчлены. Тогда, если стенки ящика и параметр обрезания устремить к бесконечности, поле, определенное формулой (1.7), должно сходиться к решению уравнений поля. Даже если эти предельные поля существуют как операторы, сглаженные с помощью основной функции в пространстве-времени, это вовсе не означает, что они обязательно хорошо определены как операторы, сглаженные по пространству в заданный момент времени. Тут уж следует отбросить всякую мысль о том, что канонические перестановочные соотношения имеют место в сколько-нибудь буквальном смысле. Приходится иметь дело с полями, для которых формально

$$\left[\varphi(x),\ \frac{\partial\varphi}{\partial y^0}(y)\right]_- \Big|_{x^0=y^0} = \frac{i}{Z}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

где $Z = 0$, т. е. величина перенормировки поля $1/Z$ бесконечна. Все эти вопросы обсуждаются в § 7.

Разделавшись с тем, как ввести ящик, ультрафиолетовое обрезание и контрчлены, мы сталкиваемся с математической проблемой: как доказать, что оставшаяся искромсанная теория действительно имеет решение, т. е. что операторы $\mathcal{U}(x^0)$ и $\varphi(\mathbf{x}, x^0)$, определенные формулами (1.7) — (1.10), действительно существуют и обладают требуемыми свойствами. Этот нетривиальный вопрос обсуждается в § 8. Как явствует из приведенных в этом параграфе результатов, мы пока неспособны решить его для всех случаев, представляющих интерес, хотя существуют случаи, где что-то можно понять.

В § 9 обсуждаются источники трудностей перехода к пределу, когда отсутствуют ящик и обрезание. Решающим аспектом проблемы, по крайней мере если использовать обсуждавшийся здесь формализм, является существование в искромсанной теории приемлемого приближенного вакуумного состояния. Требование существования такого состояния оказывается важным ограничением на способ введения ящиков и ультрафиолетовых обрезаний. В § 9 также обсуждаются хорошо известные соображения против кубических взаимодействий (нестабильность вакуума).

Наконец, в § 10 я собрал некоторые характерные теоремы существования. В частности, там показано, что с помощью надлежащего предельного перехода можно получить решение в теориях с квадратичными лагранжианами. К сожалению, моя коллекция не содержит теоремы существования для действительно нетривиальной релятивистской теории. Однако она, вероятно, дает представление о том, насколько трудно будет доказывать подобную теорему. По моему мнению, существует еще много поучительного в старомодном подходе к теории поля, и я надеюсь, что эти лекции послужат полезным введением для тех, кто пожелал бы работать в этом направлении.

Общий уровень изложения в данных лекциях — околоматематический. Это могло бы показаться удивительным с точки зрения их предмета — обсуждения некоторых аспектов математической структуры квантовой теории поля. Однако я убежден, что читатели, которым приходилось схватываться с современной квантовой теорией поля, без труда смогут превратить большинство сделанных здесь утверждений в математически строгие положения [см. (Schweber, 1961; Streater, Wightman, 1964; Jost, 1965)]

Появлением этих лекций я весьма обязан А. Джаффе и О. Лэнфорду, чьи работы, как опубликованные, так и неопубликованные, оказали на меня сильное влияние. Я также благодарен Г. Леману, В. Глазеру и многочисленным другим гостям Института высших научных исследований за полезные обсуждения, замечания и критику. Я благодарен д-ру Л. Мочану за гостеприимство в стенах этого института.

ЧАСТЬ I

ИЗВЕСТНЫЕ ЯВНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ

§ 2. Обобщенные свободные поля и их классы эквивалентности

Рассмотрим сначала такую элементарную проблему, про которую всем известно, как ее решать. Дана система n скалярных эрмитовых полей, характеризуемая квадратичной плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} :\partial_\mu\varphi_j\partial^\mu\varphi_j:(x) - \sum_{j,k=1}^{n} :\varphi_j\mathfrak{M}_{jk}\varphi_k:(x)\right], \quad (2.1)$$

где $\mathfrak{M}$ — вещественная симметричная положительно определенная матрица. Необходимо найти решения соответствующих уравнений движения

$$\Box\varphi_j(x) = -\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{M}_{jk}\varphi_k(x), \qquad j = 1, \ldots, n. \quad (2.2)$$

Символ $\vdots \ldots \vdots$ в (2.1) оэначает, что, например,

$$\vdots A \vdots = A - (\Psi_0, A\Psi_0),$$

где Ψ_0 — вакуумное состояние.

Чтобы решить эту проблему, необходимо диагонализовать квадратичную форму (2.1). Матрица $\mathfrak{M}$ может быть приведена к диагональному виду с помощью некоторого ортогонального преобразования B:

$$\mathfrak{M} = B^T \begin{pmatrix} M_1^2 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & M_2^2 \ldots & 0 \\ \vdots \ldots & \vdots \ldots & \vdots \\ 0 & 0 \ldots & M_n^2 \end{pmatrix} B, \quad (2.3)$$

где числа M_j^2 вещественны и положительны. Тем самым, если ввести поля

$$\psi_j(x) = \sum_{k=1}^{n} B_{jk}\varphi_k(x), \tag{2.4}$$

то мы получим для них

$$(\square + M_j^2)\,\psi_j(x) = 0, \tag{2.5}$$

так что не будет непоследовательным считать ψ_j свободными полями, удовлетворяющими соотношениям

$$[\psi_j(x),\ \psi_k(y)]_- = \delta_{jk}\left(\frac{1}{i}\right)\Delta(M_j^2,\ x-y), \tag{2.6}$$

где

$$\Delta(M^2,\ x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{-ikx}\,\mathrm{sgn}\,k^0\,\delta(k^2 - M^2)\,dk. \tag{2.7}$$

Тогда поля φ_j, определяемые равенством

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{n} B_{kj}\psi_k(x), \tag{2.8}$$

будут удовлетворять (2.1) и соотношениям

$$\begin{aligned}[\varphi_j(x),\ \varphi_k(y)]_- &= \sum_{r,\,s=1}^{n} B_{rj}B_{sk}\delta_{rs}\left(\frac{1}{i}\right)\Delta(M_r^2,\ x-y) = \\ &= \sum_{r=1}^{n} B_{rj}B_{rk}\left(\frac{1}{i}\right)\Delta(M_r^2,\ x-y).\end{aligned} \tag{2.9}$$

В частности,

$$[\varphi_j(x),\ \partial_0\varphi_k(y)]_-\big|_{x^0=y^0} = \delta_{jk}\,i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{2.10}$$

так что поля φ_j удовлетворяют тем же (каноническим) одновременным перестановочным соотношениям, что и свободные поля ψ_j.

Поля φ_j описывают n сортов скалярных невзаимодействующих частиц с массами $M_1, \ldots, M_n$. Описание такой системы с помощью всех n полей $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ с точки зрения теории рассеяния, вообще говоря, в высшей степени избыточно, поскольку, за исключением случая вырождения по массам, все поля $\psi_1,\ldots,\psi_n$ можно получить с помощью единственного поля φ_j. Более точно, если в матрице B есть столбец, скажем j-й, все элементы которого не равны нулю, то ψ_k можно найти из уравнений

$$\varphi_j(f) \equiv \int f(x)\,\varphi_j(x)\,dx = \int \tilde{f}(p)\,\tilde{\varphi}_j(p)\,dp = \\ = \sum_{k=1}^{n} B_{kj} \int \tilde{f}(p)\,\tilde{\psi}_k(p)\,dp. \qquad (2.11)$$

Здесь тильда обозначает фурье-образ:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{-ipx}\tilde{f}(p)\,dp, \\ \varphi_j(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{ipx}\,\tilde{\varphi}_j(p)\,dp, \end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

и, кроме того, для основных функций и полей мы приняли противоположное условие относительно знаков в экспонентах. В самом деле,

$$\prod_{l\neq k} (\Box + M_l^2)\,\varphi_j(g) = \varphi_j\left(\left[\prod_{l\neq k} (\Box + M_l^2)\right] g\right) = \\ = B_{kj} \int \tilde{g}(p) \prod_{l\neq k} (-p^2 + M_l^2)\,\tilde{\psi}_k(p)\,dp = \\ = B_{kj}\psi_k\left(\left[\prod_{l\neq k} (\Box + M_l^2)\right] g\right), \qquad (2.13)$$

и, поскольку произведение $\prod_{l\neq k} (-p^2 + M_l^2)$ не обращается в нуль, на гиперболоиде $p^2 = M_k^2$ можно найти функцию g, фурье-образ которой равен $(\prod_{l\neq k} (-p^2 + M_l^2)^{-1}\tilde{f}(p))$ в окрестности гиперболоида $p^2 = M_k^2$ и обращается в нуль в окрестности всех других гиперболоидов $p^2 = M_l^2$, $l \neq k$. Для такой функции g

$$\psi_k(f) = (B_{kj})^{-1} \prod_{l\neq k} (\Box + M_l^2)\,\varphi_j(g), \qquad (2.14)$$

что указывает, каким образом можно выразить $\psi_k(f)$ через φ_j. В действительности для определения ψ_k достаточно даже знать $\varphi_j(x)$ только во временном слое $0 < |x^0| < \varepsilon$. Это утверждение никоим образом не следует с очевидностью из (2.14), поскольку функция g в этой формуле будет, вообще говоря, иметь носитель, простирающийся за временной слой, если носитель функции f лежит внутри слоя. Оно следует из того факта, что если g изменяется по всем основным функциям с носителем в данном временном слое, то операторы $\varphi_j(g)$ с фиксированным j образуют неприводимый набор операторов: каждый оператор, в частности $\psi_k(f)$, является функцией операторов этого набора*). Конечно, в общем случае линейное соотношение (2.14) заменяется на нелинейное.

В заданный момент времени t, как это явствует из (2.10), переменные $\varphi_j(\mathrm{x}, t)$ и $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_j(\mathrm{x}, t)$ не образуют неприводимого набора, и это достаточная причина для рассмотрения всех n полей.

Вакуумные средние в этой теории вычисляются без труда. Например,

$$(\Psi_0, \varphi_j(x_1)\varphi_k(x_2)\Psi_0) = \sum_{l=1}^{n} B_{jl}B_{kl}\frac{1}{i}\Delta^{(+)}(M_l^2, x_1 - x_2). \quad (2.15)$$

Для $j = k$ из этой формулы следует, что функция распространения поля φ_j представляет собой результат усреднения свободных функций распространения для масс M_l^2 с весами B_{jl}^2. Аналогично четырехточечное вакуумное среднее имеет вид

$$(\Psi_0, \varphi_{j_1}(x_1)\varphi_{j_2}(x_2)\varphi_{j_3}(x_3)\varphi_{j_4}(x_4)\Psi_0) =$$
$$= \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} B_{k_1j_1}B_{k_2j_2}B_{k_3j_3}B_{k_4j_4}(\Psi_0, \psi_{k_1}(x_1)\ldots\psi_{k_4}(x_4)\Psi_0),$$

где

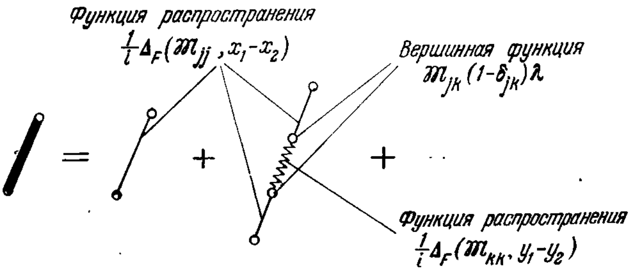
$$(\Psi_0, \psi_{k_1}(x_1)\ldots\psi_{k_4}(x_4)\Psi_0) =$$
$$= \delta_{k_1k_2}\delta_{k_3k_4}\left(\frac{1}{i}\right)\Delta^+(M_{k_1}^2, x_1 - x_2)\left(\frac{1}{i}\right)\Delta^+(M_{k_3}^2, x_3 - x_4) +$$
$$+ \delta_{k_1k_3}\delta_{k_2k_4}\left(\frac{1}{i}\right)\Delta^+(M_{k_1}^2, x_1 - x_3)\left(\frac{1}{i}\right)\Delta^+(M_{k_2}^2, x_2 - x_4) +$$
$$+ \delta_{k_1k_4}\delta_{k_2k_3}\left(\frac{1}{i}\right)\Delta^+(M_{k_1}^2, x_1 - x_4)\left(\frac{1}{i}\right)\Delta^+(M_{k_2}^2, x_2 - x_3). \quad (2.16)$$

*) Borchers, не опубликовано.

Естественно принять, что недиагональная часть матрицы $\mathfrak{M}$ описывает взаимодействие между полями φ_j. Тогда из формул (2.15) и (2.16) нетрудно получить ряд теории возмущений по степеням этого взаимодействия. Напишем

$$\mathfrak{M}_{jk}(\lambda) = \delta_{jk}\mathfrak{M}_{jj} + \lambda(1 - \delta_{jk})\,\mathfrak{M}_{jk}. \tag{2.17}$$

Для фиксированных $\mathfrak{M}_{jj} > 0$, $j = 1, \ldots, n$, константу λ можно выбрать достаточно малой, так что матрица $\mathfrak{M}_{jk}(\lambda)$ будет положительно определенной, а величины B_{jk} и M_j^2 — аналитическими функциями λ. В этом случае разложения в ряд Тейлора соотношений (2.15) и (2.16) будут сходиться. Эти разложения можно связать с обычным разложением по теории возмущений, если рассмотреть вакуумные средние от хронологически упорядоченных произведений. Соответствующие вклады в выражение $(\Psi_0, (\varphi_j(x_1)\,\varphi_j(x_2))_+\,\Psi_0)$ можно представить в виде фейнмановых графов:



Доказательство этого утверждения мы оставляем читателям в качестве упражнения.

Поле $\varphi_j(x)$, определенное формулой (2.8), представляет собой частный случай *обобщенного свободного поля**). В общем случае обобщенным свободным полем называют всякое поле, коммутатор которого кратен единичному оператору. Совокупность обобщенных свободных полей φ_j, $j = 1, \ldots, n$, обладает тем свойством, что коммутатор

*) Обобщенные свободные поля впервые были введены Гринбергом (Greenberg, 1961).

любой пары таких полей в пространственноподобных точках обращается в нуль:

$$[\varphi_j(x), \varphi_k(y)] = 0 \quad \text{при } (x-y)^2 < 0, \tag{2.18}$$

т. е. поля φ_j и φ_k относительно локальны. Кроме того, коммутатор $[\varphi_j(x)\,\varphi_k(y)]_-$ кратен единичному оператору. Как показал Борхерс, для обобщенных свободных полей второе свойство следует из первого*).

Для строгого математического рассмотрения обобщенных свободных полей очень полезно иметь их конкретную реализацию в конфигурационном пространстве. С этой целью рассмотрим прямую сумму

$$\mathscr{H} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathscr{H}^{(j)}, \tag{2.19}$$

где пространство $\mathscr{H}^{(0)}$ одномерно, а $\mathscr{H}^{(n)}$ — пространство всех функций n четырехмерных переменных, симметричных относительно перестановок и квадратично интегрируемых относительно произведения мер вида $d\mu^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = d\mu(p_1)\ldots d\mu(p_n)$. Здесь μ — медленно растущая положительная мера, инвариантная относительно связной компоненты однородной группы Лоренца и имеющая носитель внутри или на поверхности будущего конуса V_+.

В таком гильбертовом пространстве определим непрерывное унитарное представление группы Пуанкаре требованием

$$(U(a, \Lambda)\varphi)^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = \\ = \exp\left[i\left(\sum_{j=1}^{n} p_j\right)a\right]\varphi^{(n)}(\Lambda^{-1}p_1, \ldots, \Lambda^{-1}p_n) \tag{2.20}$$

*) Его аргументация сводилась к простому применению результатов Робинсона (Robinson, 1962) и Гринберга (Greenberg, 1962), которые установили, что если имеет место свойство (2.18) и фурье-образы $\tilde{\varphi}_j(k)$ и $\tilde{\varphi}_k(l)$, когда k и l принадлежат некоторой пространственноподобной области, обращаются в нуль, то данный коммутатор кратен единичному оператору.

и обобщенное свободное поле $\varphi(f)$ условием

$$(\varphi(f)\Psi)^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) =$$
$$= \sqrt{\pi}\,\{\sqrt{n+1}\int d\mu(p)\tilde{f}(p)\,\Psi^{(n+1)}(p, p_1, \ldots, p_n) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\tilde{f}(-p_j)\Psi^{(n-1)}(p_1, \ldots, \hat{p}_j, \ldots, p_n)\}. \quad (2.21)$$

Оператор $\varphi(f)$ хорошо определен и ограничен на всех векторах Ψ из $\mathscr{H}$, амплитуды которых $\Psi^{(n)}$ для достаточно больших n обращаются в нуль. Этот оператор удовлетворяет требованию

$$U(a, \Lambda)\varphi(f)U^{-1}(a, \Lambda) = \varphi(\{a, \Lambda\} f), \quad (2.22)$$

где

$$(\{a, \Lambda\} f)(x) = f(\Lambda^{-1}(x - a))$$

при условии, что $f \in \mathscr{S}$ — пространству всех быстроубывающих основных функций, т. е. пространству всех бесконечно дифференцируемых функций, которые на бесконечности обращаются в нуль вместе со всеми производными быстрее любой степени расстояния в евклидовом пространстве.

Двуточечная функция в этой теории имеет вид

$$(\Psi_0, \varphi(f)\varphi(g)\Psi_0) = \pi\int\tilde{f}(p)\tilde{g}(-p)\,d\mu(p) \quad (2.23)$$

или

$$(\Psi_0, \varphi(x_1)\varphi(x_2)\Psi_0) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int \exp(-ip(x_1 - x_2))\,d\mu(p).$$

Инвариантность меры μ требует, чтобы она имела вид

$$c\delta(p)\,dp + d\rho(p^2)\,d\Omega_{\sqrt{p^2}}(p), \quad (2.24)$$

где

$$d\Omega_{\sqrt{p^2}}(p) = \frac{d^3p}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}},$$

а ρ — положительная мера на полуоси $0 \leqslant m^2 < \infty$, носитель которой задает спектр масс рассматриваемой теории. (Поскольку мы собираемся ниже считать, что $(\Psi_0, \varphi(x)\Psi_0) = 0$, то $c = 0$.) Очевидно, в предыдущих примерах из (2.15) следует, что для φ_j

$$d\rho(m^2)=\sum_{j=1}^{n}\delta(m^2-M_k^2)(B_{kj})^2.$$

Обобщенное свободное поле, очевидно, полностью характеризуется мерой ρ. Вид ρ можно восстановить по коммутатору

$$[\varphi(x),\varphi(y)]=\int d\rho(m^2)\frac{1}{i}\Delta(m^2,x-y). \tag{2.25}$$

С обобщенным свободным полем ассоциировано поле, которое Лихт (Licht, 1963)*) назвал полем с параметром. Оно определяется выделением из (2.21) компоненты с массой $\sqrt{s}$. Именно,

$$(\varphi(s,f)\Psi)^{(n)}(p_1,\ldots,p_n)=$$
$$=\sqrt{\pi}\left\{\sqrt{n+1}\,d\rho(s)\int d\Omega_{\sqrt{s}}(p)\tilde{f}(p)\Psi^{(n+1)}(p,p_1,\ldots,p_n)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\delta(s-p_j^2)\tilde{f}(-p_j)\Psi^{(n-1)}(p_1,\ldots,\hat{p}_j,\ldots,p_n)\right\}.$$

Или же

$$\varphi(s,f)=\varphi(f^{(s)}), \tag{2.26}$$

где

$$f^{(s)}(x)=\int\Delta^{(1)}(s,x-y)f(y)\,dy,$$
$$\Delta^{(1)}(s,x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx}\delta(k^2-s)\,dk.$$

Перестановочное соотношение для поля $\varphi(s,x)$ имеет вид

$$[\varphi(s,x),\varphi(t,y)]=\delta(s-t)\frac{1}{i}\Delta(s,x-y)\frac{d\rho}{ds}(s). \tag{2.27}$$

Как было установлено Лихтом, если образовать асимптотический предел Лемана — Шиманчика — Циммермана (ЛШЦ) с массой $\sqrt{s}$ от поля с параметром $\varphi(s,x)$, ассоциированного с обобщенным свободным полем, то оказывается, что

*) См. также A. Licht, Ann. Phys. 34, 161 (1965). (*Прим. перев.*)

соответствующие *in*- и *out*-поля равны друг другу и равны $\varphi(s, x)$, т. е.

$$\varphi(s, x) = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{1}{i} \int\limits_{y^0 = t} d^3y \left[\Delta(s, x - y) \frac{\partial}{\partial y^0} \varphi(s, y) - \frac{\partial}{\partial y^0} \Delta(s, x - y) \varphi(s, y) \right]. \quad (2.28)$$

С другой стороны, хорошо известно, что если применить асимптотическое условие ЛШЦ к самому обобщенному свободному полю φ, то отличный от нуля результат получается только тогда, когда масса $\sqrt{s}$ принадлежит дискретному спектру ρ. Тем самым использование полей с параметром, по крайней мере формально, интересно тем, что оно предоставляет нам нетривиальное расширение формализма ЛШЦ. Его физический смысл мы обсудим ниже на конкретном примере модели Захариасена.

Квадратичный лагранжиан (2.1) приводит к обобщенным свободным полям с дискретным спектром масс. Предшествующее обсуждение (в частности, (2.21)) показывает, что без каких-либо дополнительных усилий можно рассмотреть и случай обобщенных свободных полей, спектр которых содержит как непрерывную, так и дискретную части. Естественно, что интересно найти квадратичный лагранжиан, из которого в качестве решений получаются такие обобщенные свободные поля. Фактически мы увидим, что нам придется иметь дело с общим лагранжианом этого типа, который приводит к объектам несколько более общим, чем обобщенное свободное поле. Они оказываются элементами класса эквивалентности обобщенного свободного поля.

Общее выражение для такого квадратичного лагранжиана получается заменой (2.1) выражением

$$-\frac{1}{2}\left[\int ds \colon \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi \colon (s, x) - \iint ds\, dt \colon \varphi(s, x) \mathfrak{M}(s, t) \varphi(t, x) \colon\right], \quad (2.29)$$

где $\mathfrak{M}(s, t)$ — вещественное симметричное ядро, которое положительно определенно в том смысле, что для вещественных основных функций φ

$$\int \varphi(s)\mathfrak{M}(s,t)\varphi(t)\,ds\,dt \geqslant 0.$$

Уравнение движения, возникающее из такого лагранжиана, имеет вид

$$\Box\varphi(s,x) = -\int \mathfrak{M}(s,t)\varphi(t,x)\,dt. \qquad (2.30)$$

Если существует ядро U, которое диагонализует $\mathfrak{M}$ в том смысле, что

$$\iint ds'\,dt'\,U(s',s)\mathfrak{M}(s',t')U(t',t) = M^2(s)\delta(s-t), \qquad (2.31)$$

то для получения набора полей, удовлетворяющих такому уравнению движения, необходимо положить

$$\varphi(s,x) = \int U(s,t)\psi(t,x)\,dt \qquad (2.32)$$

и считать $\psi(t, x)$ полем с параметром, ассоциированным с обобщенным свободным полем. Очевидно, что

$$\left.\begin{aligned}
&(\Box + M^2(s))\psi(s,x) = 0,\\
&[\varphi(s,x),\varphi(t,y)] =\\
&\quad = \int U(s,s')U(t,s')\frac{1}{i}\Delta(s',x-y)\,ds'\,\frac{d\rho}{ds'}(s').
\end{aligned}\right\} \qquad (2.33)$$

Отметим, что, вообще говоря, формула (2.33) не сводится к (2.27), так что $\varphi(s, x)$ не является полем с параметром, ассоциированным с обобщенным свободным полем. Однако оно, конечно, удовлетворяет соотношению

$$[\varphi(s,x),\psi(t,y)]_- = 0 \text{ при } (x-y)^2 < 0,$$

т. е. поле $\varphi(s, x)$ локально относительно $\psi(t, y)$ для всех t. Тем самым

$$[\varphi(s,x),\psi(y)]_- = 0 \quad \text{при } (x-y)^2 < 0,$$

где

$$\psi(y) = \int_0^\infty dt\,\psi(t,y).$$

Однако набор всех полей, локальных относительно данного неприводимого локального поля, образует класс эквивалентности. (Более точно, если поле B локально относительно поля A и поле C локально относительно A, то C локально относительно B при условии, что поле A локально и неприводимо. Поскольку этот факт был открыт Борхерсом (Borchers, 1960), подобный класс иногда называют классом Борхерса.) Структура же класса Борхерса данного обобщенного свободного поля была исследована Лихтом (Licht, 1963). Если $\psi(s, x)$ — поле с параметром, принадлежащее данному обобщенному свободному полю $\psi(x)$, то каждый элемент соответствующего класса эквивалентности имеет вид конечной суммы членов типа

$$\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty ds_1 \ldots ds_n F(s_1, \ldots, s_n) :D^{\alpha_1}\psi(s_1, x)\ldots D^{\alpha_n}\psi(s_n, x):,$$

где F — обобщенная функция умеренного роста, а символ D^α определен в (1.4). Тем самым поля, появляющиеся в качестве решений уравнений в рассматриваемом примере, оказываются простейшими элементами класса эквивалентности поля $\psi(s, x)$, именно теми, которые линейны по ψ.

Несмотря на то, что выражение (2.32) так просто, оно может привести к новому явлению (Licht, 1963). Если к полю $\varphi(s, x)$ применить асимптотическое условие ЛШЦ с массой $\sqrt{s}$, то может случиться так, что соответствующие *in*- и *out*-поля существуют и отличны друг от друга. Кроме того, может существовать нетривиальный унитарный оператор S такой, что

$$\varphi^{out}(s, x) = S^{-1}\varphi^{in}(s, x)\,S. \tag{2.34}$$

Тем самым с некоторой формальной точки зрения, физический смысл которой еще должен быть выяснен, в такой теории есть нетривиальная S-матрица.

Для простоты обсудим эту проблему в связи с конкретным примером — моделью Захариасена (Zachariasen, 1961) в форме, которая была придана ей Тиррингом (Thirring, 1962) и Лихтом (Licht, 1963). В этой модели спектр масс s выбран так, что он включает отдельную точку s_0 и континуум $\mu^2 \leqslant s < \infty$, причем $s_0 < \mu^2$. Плотность лагранжиана имеет вид $\mathscr{L}(x) = \mathscr{L}_0(x) + \mathscr{L}_I(x)$, где

$$\mathscr{L}_0(x) = -\frac{1}{2}[:\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi:(s_0, x) - s_0 : \varphi^2 : (s_0, x)] - \\ -\frac{1}{2}\int_{\mu^2}^{\infty} ds\,[:\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi:(s, x) - s : \varphi^2 : (s, x)], \quad (2.35)$$

$$\mathscr{L}_I(x) = -g_0 \int_0^{\infty} ds\varphi(s, x) f(s)\, \varphi(s_0, x). \quad (2.36)$$

Функция $f^2(s)$ была выбрана Тиррингом в виде

$$\frac{1}{16\pi^2}\theta(s-\mu^2)\sqrt{\frac{s-\mu^2}{s}}\,e^{-ps}.$$

Она представляет собой «обрезанную версию» такого взаимодействия, которое приводит для амплитуды рассеяния в s-состоянии к сумме графов типа

Если константа g_0 достаточно мала, то решением уравнений поля будет образование

$$\varphi(s, x) = \int K(s, t)\,\psi(t, x)\,dt,$$

где $\psi(t, x)$ — поле с параметром, ассоциированное с обобщенным свободным полем с мерой

$$d\rho(b) = [\delta(b^2 - s_1) + \theta(b^2 - \mu^2)]\,db,$$

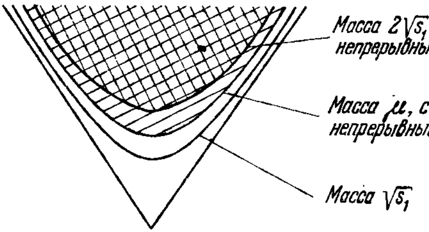
и

$$\left.\begin{aligned} &K(s, t) = \delta(t - s_0)\,a(s) + \theta(t - \mu^2)\,G(s, t), \\ &a(s_0) = 1, \quad a(s) = -g_0\frac{f(s)}{s_1 - s} \quad \text{для } s \geqslant \mu^2, \\ &G(s_0, t) = -g_0 f(t)\,[F(t)]^{-1}, \\ &G(s, t) = \delta(s - t) + g_0^2 f(s)\,f(t)\,[(t - s - i\varepsilon)\,F(t)]^{-1} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{для } s, t \geqslant \mu^2, \end{aligned}\right\} \quad (2.37)$$

а

$$F(t) = t - s_0 - g_0^2\int_{\mu^2}^{\infty} d\tau\,\frac{f^2(\tau)}{t - \tau - i\varepsilon}.$$

Тирринг показал, что эта теория удовлетворяет всем требованиям, обычно предъявляемым к квантовой теории поля, кроме асимптотического условия*). Фактически ее физическая непригодность очевидна уже из кинематических соображений. Дело в том, что спектр масс в этой теории имеет вид



В заштрихованной части непрерывного спектра для каждого состояния с фиксированным импульсом имеется одно физическое состояние со спином нуль, а именно s-состояние в системе центра масс, и как раз рассеяние в этом s-состоянии описывается нетривиальным оператором рассеяния, упоминавшимся в (2.34). Обобщенный вариант асимптотического условия, предложенный Лихтом, позволяет выделить это нетривиальное рассеяние из всего пространственно-временного поведения полей $\varphi(s, x)$ **). В результате проясняется физический смысл обобщенного асимптотического условия. В то же время выявляются такие кинематические свойства теории, которые противоречат опыту: рассматриваемые состояния со спином нуль принадлежат непрерывному спектру, что, как известно, означает, что они «выливаются» в некую «частицу». Но для этого требуется, чтобы вдобавок к ним существовали состояния со всеми высшими моментами количества движения. Такого рода возражения применимы

---

*) В работе А. В. Астахова и А. Д. Суханова (Ядерная физика 4, 1083 (1966)) показано, что такой результат Тирринга явился следствием неправильного выбора асимптотических полей. При правильном выборе этих полей обобщенное асимптотическое условие ЛШЦ оказывается выполненным. (*Прим. перев.*)

**) Отметим, что, как подчеркнуто Лихтом, поле $\psi(t, x)$ не является ни *in*-, ни *out*-полем с параметром, ассоциированным с $\varphi(s, x)$.

ко всем теориям, ассоциированным с обобщенными свободными полями, имеющими непрерывный спектр масс.

Эти замечания обнажают также и другую проблему. В некотором смысле в теоретико-полевой формулировке модели, предложенной Тиррингом, к идеям оригинальной модели Захариасена отнеслись не совсем честно. В последней основные величины — это амплитуды рассеяния, вершинные функции и функции распространения, т. е. техника, которая с самого начала предполагает, что все необходимые состояния рассеяния существуют. Тем самым ближе к духу модели Захариасена была бы теория с «частицами», в которые выливаются упомянутые выше s-состояния. Если бы эта теория оказалась теорией поля, то она была бы либо нелокальной, либо асимптотически неполной, либо и той и другой, поскольку соответствующие амплитуды рассеяния не удовлетворяют условию перекрестной симметрии. Подобная теория поля до сих пор не создана.

Во всяком случае очевидно, что для получения теорий поля, которые представляли бы физический интерес с развиваемой здесь точки зрения, необходимо выйти за класс эквивалентности обобщенного свободного поля.

§ 3. Теория полей Ли

В предыдущем параграфе было показано, как элементарные проблемы в теории поля приводят к понятию обобщенного свободного поля.

В той же статье, в которой Гринберг (Greenberg, 1961) изложил систематическую теорию обобщенных свободных полей, он выдвинул также то предположение, что естественным расширением этого понятия было бы поле, удовлетворяющее соотношению

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = -if(x-y) - \\ - i\int g\left(x-y, \frac{x+y}{2} - z\right)\varphi(z)\,dz, \qquad (3.1)$$

где f и g — какие-то фиксированные обобщенные функции. Подобные объекты мы будем называть полями Ли по той очевидной причине, что перестановочное соотношение (3.1) является аналогом соотношений, определяющих алгебру Ли, причем функции f и g соответствуют структурным константам алгебры Ли*).

В случае алгебры Ли, соответствующей группе Ли, для заданных структурных констант может быть много неэквивалентных представлений. В противоположность этому для заданных функций f и g существует самое большее одно поле Ли при условии, что сделано обычное предположение о существовании циклического вакуумного состояния для этого поля. Чтобы убедиться в этом, нужно только воспользоваться предписаниями Гринберга (Greenberg, 1961) и рассчитать n-точечное вакуумное среднее

$$\begin{aligned}(\Psi_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) &= (\Psi_0, \varphi_-(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) = \\ &= (\Psi_0, [\varphi_-(x_1), \varphi(x_2)]_-\varphi(x_3)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) + \\ &\quad + (\Psi_0, \varphi(x_2)\varphi_-(x_1)\varphi(x_3)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) = \\ &= \sum_{j=2}^{n}(\Psi_0, \widehat{\varphi(x_1)}\ldots[\varphi_-(x_1), \varphi(x_j)]_-\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) + \\ &\quad + (\Psi_0, \varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n)\varphi_-(x_1)\Psi_0). \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Здесь $\varphi_-(x)$ — отрицательно частотная компонента поля $\varphi(x)$ вещественной массы. Вообще

$$\varphi(x) = \varphi_-(x) + \varphi_s(x) + \varphi_+(x), \qquad (3.3)$$

где $\varphi_-^*(x) = \varphi_+(x)$, $\varphi_s^*(x) = \varphi_s(x)$. Вопрос о том, следует ли из (3.1), что разложение (3.3) единственно, несколько запутан. Мы не будем здесь в него вдаваться, а вместо этого предположим, что свойства функций f и g таковы, что они допускают подобное инвариантное разложение. В частности, будем предполагать, что

$$(\Psi_0, \varphi(x)\Psi_0) = 0, \qquad (3.4)$$

чего, однако, можно всегда добиться вычитанием константы из рассматриваемого поля. Требование отсутствия состояний с отрицательной энергией приводит к

$$\varphi_s(x)\Psi_0 = 0 = \varphi_-(x)\Psi_0. \qquad (3.5)$$

*) Краткое введение в теорию алгебр Ли содержится в работе Салама (Salam, 1963). [См. также Д. П. Желобенко, Лекции по теории групп Ли, Препринт, Дубна, 1965. (*Прим. перев.*)].

Тогда из (3.1) следует, что

$$(\Psi_0, \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) =$$
$$= -i\sum_{j=2}^{n} f_-(x_1-x_j)(\Psi_0, \widehat{\varphi(x_1)}\ldots\widehat{\varphi(x_j)}\ldots\varphi(x_n)\Psi_0) -$$
$$- i\int g_-\left(x_1-x_j, \frac{x_1+x_j}{2}-z\right)(\Psi_0, \widehat{\varphi(x_1)}\ldots$$
$$\ldots\varphi(z)\ldots\varphi(x_n)\Psi_0)\,dz, \qquad (3.6)$$

где индекс минус означает, что функция $\tilde{f}(p)$ заменяется на $\tilde{f}(p)\,\theta(p^0)\,\theta(p^2)$, а функция $g\left(\frac{p_1-p_2}{2}, p_1+p_2\right)$ — на $\theta(p_1^0)\,\theta(p_1^2)\,g\left(\frac{p_1-p_2}{2}, p_1+p_2\right)$. Соотношение (3.6) представляет собой рекуррентную формулу, которая определяет n-точечное вакуумное среднее через вакуумные средние $(n-1)$ и $(n-2)$ полей. Поскольку двуточечное вакуумное среднее непосредственно определяется через уравнения движения

$$(\Psi_0, \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\,\Psi_0) = -if_-(x_1-x_2)$$

и поскольку *теорема реконструкции* квантовой теории поля гарантирует возможность восстановления теории поля по вакуумным средним полей, то нетрудно понять, что функции f и g определяют либо одну теорию поля, либо ни одной.

Если $g=0$, то поле φ превращается просто в обобщенное свободное поле. В двумерном пространстве-времени, как отметил Леман*), нетрудно построить пример теории с $g=0$. Именно, если ψ — свободное поле массы m, то за поле φ можно выбрать

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda :\psi^2:(x), \qquad (3.7)$$

где λ — вещественная постоянная. Действительно, тогда

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_- = \frac{1}{i}\Delta(x-y)(1+2\lambda^2\Delta^{(1)}(x-y)) +$$
$$+ 2\lambda\Delta(x-y)[\psi(x)+\psi(y)+2\lambda :\psi(x)\psi(y):], \qquad (3.8)$$

что немедленно ведет к

$$\frac{1}{i}f(x-y) = \frac{1}{i}\Delta(x-y)(1+2\lambda^2\Delta^{(1)}(x-y)). \qquad (3.9)$$

*) Lehmann, частное сообщение.

Остается единственный вопрос: можно ли записать второй член в (3.8) в виде

$$i^{-1}\int g\left(x-y,\ \frac{x+y}{2}-z\right)(\psi(z)+\lambda:\psi^2:(z))\,dz?$$

Оказывается, что по чисто кинематическим причинам это возможно в двумерном пространстве-времени, но невозможно в трех- и четырехмерном. Существенный момент здесь состоит в том, что в двумерном пространстве-времени множество двучастичных состояний, натянутое на векторы вида $:\psi^2:(z)\,\Psi_0$, совпадает с множеством таких же состояний, натянутых на векторы вида: $\psi(z)\,\psi(w):\Psi_0$, в то время как в трех- и четырехмерном пространстве-времени последнее множество существенно шире. В двумерном пространстве-времени функция g имеет вид

$$g(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-i[p\xi+g\eta]}\tilde{g}(p,q)\,dp\,dq,$$

$$\tilde{g}\left(\frac{-p-q}{2},\ p+q\right)=\frac{4}{\pi}\,|(p\cdot q)|\,|(p+q)|^2\times$$
$$\times\,\delta(4m^2[(pq)^2-p^2q^2]+(p+q)^2p^2q^2)\times$$
$$\times\,\mathrm{sgn}\,(-(q^2)(pq+p^2)p^0+(p^2)(pq+q^2)q^0). \qquad (3.10)$$

В пространстве-времени трех или более измерений имеет место следующий примечательный результат, установленный Робинсоном (Robinson, 1964).

Теорема

В пространстве-времени трех или четырех измерений не существует никаких скалярных полей Ли, отличных от обобщенных свободных полей.

Доказательство Робинсона основано на тщательном изучении тождества Якоби для структурных констант f и g. Это тождество принимает следующий вид:

$0=[[\varphi(x_1),\varphi(x_2)]_-,\varphi(x_3)]_-+$(циклические перестановки (123)) $=\left[\int g\left(x_1-x_2,\frac{x_1+x_2}{2}-z\right)f(z-x_3)\,dz\right.+$ (циклические перестановки (123))$]-\left[\iint g\left(x_1-x_2,\frac{x_1+x_2}{2}-z\right)\times\right.$

$$\times g\left(z-x_3, \frac{z+x_3}{2}-w\right)\varphi(w)\,dz\,d\omega +$$
$$+ \text{(циклические перестановки (123))}].$$

Отсюда следует, что это тождество эквивалентно паре тождеств

$$0=\delta(p_1+p_2+p_3)\left[\tilde{g}\left(\frac{p_1-p_2}{2}, p_1+p_2\right)\tilde{f}(p_1+p_2)+\right.$$
$$\left.+\text{циклические перестановки (123))}\right], \quad (3.11)$$

$$0=\left[\tilde{g}\left(\frac{p_1-p_2}{2}, p_1+p_2\right)\tilde{g}\left(\frac{p_1+p_2+p_3}{2}, p_1+p_2+p_3\right)+\right.$$
$$\left.+\text{(циклические перестановки (123))}\right]. \quad (3.12)$$

Нетрудно убедиться в том, что если функция $\tilde{f}$ совместима со спектральным условием и требованием лоренц-инвариантности, то можно, вообще говоря, найти много функций $\tilde{g}$, удовлетворяющих (3.11). С другой стороны, из (3.12) следует, что функция $\tilde{g}$ должна быть равна нулю. При доказательстве этого утверждения, которое слишком сложно, чтобы его здесь приводить, широко используется алгебраическая независимость скалярных произведений

$$p_1^2,\ p_2^2,\ p_3^2,\ (p_1+p_2)^2,\ (p_1+p_3)^2 \text{ и } (p_1+p_2+p_3)^2,$$

т. е. обстоятельство, справедливое в трех- или четырехмерном, но несправедливое в двумерном пространстве-времени.

Пока неизвестно, можно ли получить поля Ли, допустив рассмотрение полей с более сложными трансформационными свойствами. Однако, как явствует из замечания Глазера*), ни одно подобное поле не может привести к полной физической теории, в которой справедливо асимптотическое условие ЛШЦ. Это замечание сводится к тому, что, если

$$[\varphi_j(x), \varphi_k(y)]_- = i^{-1}f_{jk}(x-y)+$$
$$+i^{-1}\int\sum_l g_{jkl}\left(x-y, \frac{x+y}{2}-z\right)\varphi_l(z)\,dz,$$

---

*) Glaser, частное сообщение.

то

$$(\Psi_0, [\varphi_j(x_1), \varphi_k(x_2)]_- [\varphi_l(x_3), \varphi_m(x_4)]_- \Psi_0) =$$
$$= -f_{jk}(x_1 - x_2) f_{lm}(x_3 - x_4) -$$
$$- \iint \sum_{r,s} g_{jkr}\left(x_1 - x_2, \frac{x_1 + x_2}{2} - y\right) \times$$
$$\times g_{lms}\left(x_3 - x_4, \frac{x_3 + x_4}{2} - z\right) (\Psi_0, \varphi_r(y)\varphi_s(z)\Psi_0)\, dy\, dz. \quad (3.13)$$

Между тем фурье-образ выражения (3.13) входит в абсорбтивную часть амплитуды упругого рассеяния. Структура же правой части (3.13) такова, что она соответствует промежуточным состояниям Ψ_i, входящим в $(\Psi_0, [\ ,\ ]\Psi_i) \times (\Psi_i, [\ ,\ ]\Psi_0)$ с конечным числом различных моментов количества движения (без индексов r, s этими состояниями могли бы быть только s-состояния). Последнее не может иметь места в релятивистской асимптотически полной квантовой теории поля. Тем самым, даже если поля Ли, отличные от обобщенных свободных полей, существуют, они не могут привести к асимптотически полным теориям.

§ 4. Модели в двумерном пространстве-времени

Ранее мы уже отмечали, что виковы полиномы по свободному полю φ массы $m \neq 0$, т. е. $\sum a_n : \varphi^n : (x)$, являются хорошо определенными полями*). Глазер**) указал, что никакие ряды вида $B(x) = \sum a_n : \varphi^n : (x)$ с бесконечным числом $a_n \neq 0$ не определяют поля в обычном смысле в пространстве-времени, размерность которого больше двух. Действительно, в этом случае $B(f) = \int f(x) B(x) d^4x$ не будет операторнозначной обобщенной функцией для всех основных функций f, бесконечно дифференцируемых и обладающих компактным носителем. Простейший путь, позволяющий в этом убедиться, состоит в том, чтобы рассмотреть двуточечную обобщенную

---

*) Формальное доказательство содержится в работе Гординга и Вайтмана (Gårding, Wightman, 1964).

**) Glaser, не опубликовано. См. также работу Эпштейна (Epstein, 1963).

функцию $(\Psi_0, B(x_1)B(x_2)\Psi_0)$. Согласно общей теореме*), ее можно представить в виде

$$(\Psi_0, B(x_1)B(x_2)\Psi_0) = \int_0^\infty d\rho(a)\frac{1}{i}\Delta^{(+)}(a, x_1 - x_2), \quad (4.1)$$

где ρ — положительная мера, возрастающая самое большее как некоторая степень, т. е.

$$\int_0^L d\rho(a) \leqslant C(1+L)^N \quad (4.2)$$

для некоторых C и N. С другой стороны, для упоминавшихся выше рядов

$$(\Psi_0, B(x_1)B(x_2)\Psi_0) = \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 (\Psi_0, :\varphi^n:(x_1):\varphi^n:(x_2)\Psi_0) =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty |a_n|^2 n! \left[\frac{1}{i}\Delta^{(+)}(x_1 - x_2)\right]^n. \quad (4.3)$$

Далее, в пространстве-времени размерности $k \geqslant 2$ функции $\left[\frac{1}{i}\Delta^{(+)}(x_1 - x_2)\right]^n$ имеют спектральное представление, подобное (4.1), с мерой $d\rho(a)$, которая при больших a ведет себя как $a^{n(k-2)-k-1}$. Тем самым, если существует бесконечное число отличных от нуля коэффициентов a_n и $k > 2$, поведение меры ρ для двуточечной обобщенной функции оператора B будет противоречить условию (4.2).

В двумерном пространстве-времени эти соображения теряют силу и соответствующий класс эквивалентности свободного поля включает, наряду с виковыми полиномами, и виковы целые функции**).

Наличие такого более широкого класса эквивалентности приводит к тому, что в двумерном пространстве-времени существуют кажущиеся нетривиальными урав-

*) См. работу Вайтмана (Wightman, 1956). Спектральное представление (4.1) было, конечно, хорошо известно. Существенным утверждением теоремы является оценка (4.2).

**) Полное описание этого класса эквивалентности принадлежит Джаффе (Jaffe, 1965).

нения взаимодействующих полей, решения которых принадлежат к классу эквивалентности свободных полей. С физической точки зрения подобные примеры не очень интересны, поскольку они не приводят к нетривиальной матрице рассеяния. Тем не менее с точки зрения общей теории они представляют известный систематический интерес.

Вторая характерная особенность двумерного пространства-времени, позволяющая продвинуться в поисках явного решения проблемы взаимодействующих полей, связана с тем, что в этом случае сохраняющийся ток j можно записать в виде $j^\mu(x) = -\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\sigma(x)$, где σ — некое псевдоскалярное поле. Если оператор j — ток свободного диракова поля ψ, то можно показать, что поле σ само по себе может быть локальным, но в то же время нелокальным относительно поля ψ. Тем самым для построения локальных полей в двумерном пространстве-времени можно воспользоваться не только свободным полем ψ и его классом эквивалентности, но также и полем σ. Это позволяет выписать явно точное решение модели Федербуша (пример 6). Если ψ — свободное дираково поле нулевой массы, то обращаются в нуль дивергенции как от тока j, так и от соответствующего псевдотока k, т. е.

$$\partial^\mu j_\mu(x) = 0 = \partial^\mu k_\mu(x), \quad \text{где } j^1 = k^0, \quad j^0 = k^1.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{rot} k = \operatorname{rot} j = 0$ и тем самым $j^\mu = \partial^\mu\rho$, $k^\mu = \partial^\mu\sigma$, $\Box j_\mu = 0 = \Box k_\mu$. Существование в качестве сохраняющихся величин обоих операторов — и j и k — связано с тем, что, когда точка $p = 0$ исключается из рассмотрения, будущий световой конус $p^2 = 0$, $p^0 \geqslant 0$ распадается на два несвязных куска $p^1 > 0$, $p^0 > 0$ и $p^1 < 0$, $p^0 > 0$. Именно это существенное обстоятельство приводит к явной разрешимости модели Тирринга (пример 4). В то же время, как будет видно из дальнейшего, тот факт, что лоренц-инвариантные обобщенные функции F, удовлетворяющие на будущем световом конусе условию $p^2F = 0$, оказываются неопределенными, усложняет детали таких теорий.

Хотя величины, подобные $:\exp(g\varphi):(x)$, не являются полями в обычном смысле в пространстве-времени размерности больше двух, это вовсе не означает, что они представляют собой объекты, непригодные для рассмотрения.

Фактически большую часть обычного формализма можно расширить так, чтобы охватить и эти величины. Для этого необходимо просто использовать в качестве основных функций те бесконечно дифференцируемые функции, фурье-образы которых бесконечно дифференцируемы и имеют компактный носитель. Было предложено назвать такие поля *неперенормируемыми* и тем самым придать общий смысл понятию, ранее использованному для описания теорий поля, в которых разложение по теории возмущений приводит к бесконечному числу расходимостей различного типа (Güttinger, 1958; Schroer, 1964). В дальнейшем при обсуждении двумерных примеров я буду часто добавлять замечания относительно их неперенормируемых аналогов в пространстве-времени более высокой размерности.

Пример 1

Экспоненты по свободным полям ненулевой массы и операторные калибровочные преобразования. Рассмотрим формальное выражение

$$:\exp(g\varphi):(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n}{n!} :\varphi^n:(x), \tag{4.4}$$

где φ — свободное поле массы $m \neq 0$, а g — комплексное число. Будучи сглаженной с основной функцией из пространств $\mathcal{D}$ или $\mathcal{S}$, правая часть (4.4) может быть определена, по крайней мере на вакуумном состоянии Ψ_0, поскольку

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n}{n!} :\varphi^n:(f)\Psi_0 \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \iint \bar{f}(x) \exp\left(|g|^2 \frac{1}{i} \Delta^{(+)}(m, x-y)\right) f(y)\, dx\, dy < \infty.$$

Аналогичные оценки показывают, что вектор

$$:\exp(g_1\varphi):(f_1) \ldots :\exp(g_n\varphi):(f_n)\Psi_0 \tag{4.5}$$

хорошо определен своим разложением в ряд по $g_1, \ldots, g_n$. Линейные комбинации векторов этого типа образуют область D_0 со свойствами

$$:\exp(g\varphi):(f)\, D_0 \subset D_0, \quad \Psi_0 \in D_0 \text{ и } U(a, \Lambda)\, D_0 \subset D_0.$$

Чтобы убедиться в том, что оператор $:\exp(g\varphi):(x)$ является полем, остается проверить, что его вакуумные средние представляют собой подлинные обобщенные функции умеренного роста. Соответствующая двуточечная обобщенная функция имеет вид

$$\begin{aligned}(\Psi_0 :\exp(g_1\varphi):(x_1):\exp(g_2\varphi):(x_2)\,\Psi_0) &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g_1g_2)^n}{(n!)^2} (\Psi_0, :\varphi^n:(x_1):\varphi^n:(x_2)\,\Psi_0) &= \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g_1g_2)^n}{n!} \left(\frac{1}{i}\, \Delta^{(+)}(m, x_1 - x_2)\right)^n &= \\ = \exp\left(\frac{g_1\, g_2}{i}\, \Delta^{(+)}(m, x_1 - x_2)\right). \quad (4.6)\end{aligned}$$

В более общем случае

$$\begin{aligned}&\left(\Psi_0, \prod_{j=1}^{n} :(\exp g_j\varphi):(x_j)\,\Psi_0\right) = \\ &\quad = \sum_{k_1, \ldots, k_n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{g_j^{k_j}}{k_j!}\right)\left(\Psi_0, \sum_{j=1}^{n} :\varphi^{k_j}:(x_j)\,\Psi_0\right) = \\ &= \sum_{k_1, \ldots, k_n=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{(g_j)^{k_j}}{k_j!}\right)\Big[\underbrace{x_1 \ldots x_1}_{k_1}\ \underbrace{x_2 \ldots x_2}_{k_2} \ldots \underbrace{x_n \ldots x_n}_{k_n}\Big]. \quad (4.7)\end{aligned}$$

Здесь гафниан $[1 \ldots 2l]$ раскладывается, вообще говоря, по формуле

$$[1 \ldots 2l] = \sum_{\substack{i_1 < j_1,\ i_2 < j_2, \ldots, i_n < j_n \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_l \\ j_1 < j_2 < \ldots < j_l}} [i_1j_1]\,[i_2j_2] \ldots [i_lj_l],$$

где $i_1j_1, \ldots, i_lj_l$ — одна из перестановок чисел $1, \ldots, 2l$. В этом разложении $[jk] = 0$, если j и k отвечают одной и той же точке, и $[jk] = \frac{1}{i}\, \Delta^{(+)}(x-y)$, если j-е место соответствует точке x, а k-е — точке y. Допустим, что r_{jk} — симметричная матрица из неотрицательных целых чисел, причем $r_{jj}=0$. Положим $k_j = \sum_{s=1}^{n} r_{js}$. Тогда

$$[\underbrace{x_1\ldots x_1}_{k_1}\ \underbrace{x_2\ldots x_2}_{k_2}\ldots\underbrace{x_n\ldots x_n}_{k_n}] =$$

$$= \sum_{\substack{r_{st} \\ \left(\sum\limits_{t=1}^{n} r_{st}=k_s\right)}} \prod_{j=1}^{n} k_j! \prod_{\substack{s<t \\ s=1}}^{n} \frac{1}{\sqrt{st!}} \left[\frac{1}{i}\,\Delta^{(+)}(m, x_t - x_s)\right]^{r_{st}},$$

поэтому

$$\left(\Psi_0, \prod_{j=1}^{n} :\exp(g_j\varphi):(x_j)\,\Psi_0\right) = \prod_{\substack{r<s \\ r=1}}^{n} \exp\left(g_r g_s \frac{1}{i}\,\Delta^{(+)}(m, x_r - x_s)\right). \tag{4.8}$$

Поскольку в двумерном пространстве-времени

$$\Delta^{(+)}(m,x) = -\frac{1}{4}\begin{cases} H_0^{(1)}\left(-m\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2}\right), & x^0 > |x^1|, \\ H_0^{(1)}\left(im\sqrt{(x^1)^2-(x^0)^2}\right), & -|x^1| < x^0 < |x^1|, \\ H_0^{(1)}\left(m\sqrt{(x^0)^2-(x^1)^2}\right), & x^0 < -|x^1|, \end{cases} \tag{4.9}$$

а функция $H_0^{(1)}(mz)$ ограничена в верхней полуплоскости вне круга произвольного радиуса вокруг начала координат, то двуточечная обобщенная функция может быть продолжена до голоморфной функции, определенной в плоскости с разрезом вдоль положительной вещественной оси и ограниченной вне окрестности начала координат. Вблизи начала координат

$$-\frac{1}{4}H_0^{(1)}(m\sqrt{x^2}) = -\frac{1}{4}\left[I_0(m\sqrt{x^2}) + iY_0(m\sqrt{x^2})\right] =$$

$$= -\frac{1}{4}\left[I_0(m\sqrt{x^2})\left(1+\frac{2}{\pi}i\left(\gamma+\ln\frac{m\sqrt{x^2}}{2}\right)\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{2}{\pi}i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{m\sqrt{x^2}}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)\right], \tag{4.10}$$

так что на световом конусе (при $x^2 = 0$) двуточечная обобщенная функция имеет сингулярность вида $\exp\left(-\frac{g_1 g_2}{2\pi}\cdot\ln\left(\frac{m\sqrt{x^2}}{2}\right)\right)$. Очевидно, что это приводит к тому, что в спектральном представлении, аналогичном (4.1), при $-g_1 = \bar{g}_2$ полная весовая функция бесконечна, т. е.

$$\int_0^\infty d\rho(a) = \infty \tag{4.11}$$

(как раз это обычно имеют в виду, когда говорят, что перенормировка поля бесконечна). Доказательство состоит в том, что интегралы вида $\int_0^\infty d\rho(a)\, H_0^{(1)}\left(\sqrt{az}\right)$ при $\int_0^\infty d\rho(a) < \infty$ имели бы в точке $z = 0$ такую же точно особенность, что и сама функция $H_0^{(1)}\left(\sqrt{mz}\right)$.

Чтобы понять, как из подобных операторных экспонент можно сконструировать решения уравнений взаимодействующих полей, рассмотрим двукомпонентное поле

$$\psi(x) = :\exp(g\varphi):(x)\,\psi^{(0)}(x), \tag{4.12}$$

где $\psi^{(0)}(x)$ — свободное двукомпонентное поле, удовлетворяющее уравнению

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + M)\,\psi^{(0)}(x) = 0, \qquad M > 0, \tag{4.13}$$

и условиям

$$\begin{gathered}[\psi^{(0)}(x),\ \psi^{(0)}(y)]_+ = 0,\\ [\psi^{(0)}(x),\ \psi^{(0)+}(y)]_+ = \frac{1}{i}S(M,\ x-y).\end{gathered} \tag{4.14}$$

Для краткости мы будем называть $\psi^{(0)}(x)$ спинорным полем, хотя, конечно, в двумерном пространстве-времени никаких спиноров не существует. Далее, здесь

$$\left\{\begin{aligned} S(M,x) &= \left(-\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M\right)\Delta(M,x),\\ \Delta(M,x) &= \Delta^{(+)}(M,x) - \Delta^{(+)}(M,-x),\\ \Delta^{(+)}(M,x) &= \frac{i}{4\pi}\int d\Omega_M(p)\, e^{-ipx}.\end{aligned}\right. \tag{4.15}$$

Поля $\varphi(x)$ и $\psi^{(0)}(x)$ могут быть обычным образом реализованы в пространстве Фока.

Непосредственный расчет показывает, что

$$\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M\right)\psi(x) = f(x), \tag{4.16}$$

где

$$f(x) = g{:}\gamma^\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \exp(g\varphi) : (x)\, \psi^{(0)}(x). \tag{4.17}$$

Наконец, функцию $f(x)$ можно также записать в виде

$$f(x) = \lim_{y\to x}\left[g\gamma^\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}(x)\,\psi(y) - \left(\frac{g^2}{i}\right)\gamma^\mu \frac{\partial\Delta^{(+)}}{\partial x^\mu}(x-y)\,\psi(y)\right]. \tag{4.18}$$

Тем самым хорошо определенное поле (4.12) удовлетворяет уравнению взаимодействующих полей с «бесконечной перенормировкой фазы». Смысл такой терминологии понятен. Выражение $-\frac{g^2}{i}\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Delta^{(+)}(x-y)\,\psi(y)$ — это «контрчлен перенормировки фазы», поскольку в пределе $y \to x$ он имеет такой же вид, как и контрчлен, который появился бы, если бы поле $\psi(x)$ было заменено на $e^{\alpha(x)}\psi(x)$. Эта перенормировка «бесконечна», поскольку $\lim\limits_{y\to 0}\Delta^{(+)}(y)$ бесконечен или, во всяком случае, плохо определен.

Поучительно сравнить этот результат со старомодным способом рассмотрения уравнений поля

$$\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M\right)\psi(x) = ig\gamma^\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\psi(x),$$
$$(\Box + m^2)\,\varphi(x) = 0,$$

где g — вещественная константа.

Эти уравнения могут быть получены из формальной плотности лагранжиана

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\left[\left(: \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu} : - m^2 : \varphi^2 :\right) - :\psi^+\left(\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + M\right)\psi: + \right.$$
$$\left. + g : \psi^+ i\gamma^\mu\psi : \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right]. \tag{4.19}$$

(Константа g выбирается здесь вещественной, чтобы уравнение для ψ^+, полученное с помощью вариационного принципа, было совместимо с уравнением, выведенным для ψ.)

Обычное рассмотрение началось бы с предположения о «кинематической независимости» полей φ и ψ:

$$[\varphi(x), \psi(y)]_-|_{x^0=y^0} = 0 = [\varphi(x), \psi^+(y)]_-|_{x^0=y^0}, \qquad (4.20)$$

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}(x), \psi(y)\right]_-\Bigg|_{x^0=y^0} = 0 = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}(x), \psi^+(y)\right]_-\Bigg|_{x^0=y^0}, \qquad (4.21)$$

и, миновав различные бесконечности, пришло бы в точности к тому же решению (4.17). Незаконность предположения о кинематической независимости очевидна: для этого решения (4.20) имеет место, а (4.21) нет. На это обстоятельство в различной связи обращали внимание многие авторы. [См., например, (Goto, 1955; Schwinger, 1959; Johnson, 1961; Sommerfield, 1964)]. Например, в квантовой электродинамике предположение о том, что $[j^\mu(x), j^\nu(y)]_-|_{x^0=y^0} = 0$, было бы равносильно катастрофе. Преимущество моделей, подобных рассматриваемой здесь, состоит в том, что можно выставить напоказ точное решение и проверить, справедливы ли предположения типа (4.21). Если отсюда что и следует, так это мораль: даже в хорошо определенной теории определение токов в виде локальных функций полей может оказаться мудреным делом.

Стоит отметить, что вакуумные средние в этой теории представляют собой целые функции константы связи g^2.

Естественно спросить, приводят ли взаимодействующие поля φ, ψ к нетривиальной теории рассеяния. На самом деле — нет, и причина лежит в том, что переход от полей φ и ψ к *in*- и *out*-полям возвращает нас к полям φ и $\psi^{(0)}$, т. е.

$$\varphi^{in} = \varphi^{out} = \varphi, \quad \psi^{in} = \psi^{out} = \psi^{(0)}.$$

То, что это должно было быть именно так, следует из теоремы Борхерса*). Поля φ и ψ принадлежат к классу

*) Это следует из теоремы Борхерса, поскольку, как было недавно установлено Хеппом (Hepp, частное сообщение), теория рассеяния Хаага — Рюэля имеет двумерный аналог.

эквивалентности полей φ и $\psi^{(0)}$ в том смысле, что

$$[\varphi(x), \varphi(y)]_- = 0 = [\varphi(x), \psi^{(0)}(y)]_- = \\ = [\varphi(x), \psi^{(0)+}(y)]_- \quad \text{для} \quad (x-y)^2 < 0,$$
$$[\psi^{(0)}(x), \psi(y)]_+ = 0 = [\psi^{(0)}(x), \psi^+(y)]_+ \quad \text{для} \quad (x-y)^2 < 0.$$

Борхерс же показал, что два таких набора полей не могут приводить к различным теориям рассеяния. Проверку того, что этот результат в действительности следует из редукционной формулы ЛШЦ, я оставляю в качестве упражнения усердным читателям.

Построение этого примера в равной степени хорошо проходит и в пространстве-времени более высокой размерности, однако ведет к неперенормируемым теориям, поскольку функции $H_0^{(1)}$ в $\Delta^{(+)}$ заменяются на функции Ханкеля более высокого порядка. Например, в четырехмерном пространстве-времени двуточечное вакуумное среднее имеет в начале координат существенную особенность вида $\exp\left(-\frac{c}{z_2}\right)$.

Пример 2

Скалярные и спинорные поля нулевой массы в двумерном пространстве-времени *). В двумерном пространстве времени никаких свободных скалярных полей нулевой массы не существует. В справедливости этого утверждения можно убедиться, перейдя к пределу $m = 0$ в выражении для двуточечной обобщенной функции свободного скалярного поля массы $m \neq 0$:

$$(\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = -\frac{1}{2\pi} I_0\left(m\sqrt{x^2}\right) + \\ + \text{члены, ограниченные при } m \to 0. \quad (4.22)$$

Предел первого члена в (4.22) при $m \to 0$ не существует. Доказательство сводится к следующему. Скалярное поле нулевой массы имеет двуточечную обобщенную функцию $(\Psi_0, \varphi(x)\varphi(y)\Psi_0) = F(x-y)$, удовлетворяющую уравнению

$$\square F(x) = 0. \quad (4.23)$$

*) См. работу Шроера (Schroer, 1963).

Ее фурье-образ $\widetilde{F}$ является лоренц-инвариантной обобщенной функцией с носителем на будущем световом конусе $p^2 = 0$, $p^0 \geqslant 0$, удовлетворяющей условию $p^2\widetilde{F}(p) = 0$. Единственными обобщенными функциями подобного рода являются*) комбинации вида

$$a\left[\left(\frac{1}{p^0+p^1}\right)_+ \delta(p^0-p^1) + \left(\frac{1}{p^0-p^1}\right)_+ \delta(p^0+p^1)\right] + b\delta(p^0)\delta(p^1). \tag{4.24}$$

Здесь функция $\left(\frac{1}{x}\right)_+$ определяется как $\frac{d}{dx}[\theta(x)\ln x]$. Она является такой обобщенной функцией, которая при $x \neq 0$ сводится к функции $\theta(x)\frac{1}{x}$ и так ведет себя при $x = 0$, чтобы можно было придать смысл расходящемуся интегралу $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$. Она *неположительна* и, следовательно, не может быть мерой**). Тем самым функция (4.24) положительна, только если $a = 0$, $b > 0$. Тогда $\varphi(x)\Psi_0 = \pm\sqrt{b}\,\Psi_0$, а это — тривиальный случай.

Отсюда следует, что никаких математических объектов типа свободного поля массы нуль в двумерном пространстве-времени не существует, если только не отказываться ни от одного из обычных предположений. Поскольку все отрицательные вклады в (4.24) возникают от окрестности точки $p = 0$***), то один из способов избавиться от требования положительной определенности (4.24) состоит в том, чтобы ограничить класс основных функций, допус-

---

*) См. работу Гординга и Лиона (Gårding, Lions, 1959).

**) Каждая положительная обобщенная функция является мерой. См., например, (Schwartz, 1957).

***)
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}(\theta(x)\ln x)\,\varphi(x)\,dx = -\int\limits_0^{\infty} \ln x\,\frac{d\varphi}{dx}\,dx =$$
$$= \lim_{\delta\to 0+}\left[\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x} + \ln\delta\,\varphi(0)\right].$$

тимых для поля φ, функциями из $\mathcal{S}_0$, т. е. из семейства всех основных функций из $\mathcal{S}$, которые удовлетворяют условию

$$\tilde{f}(0)=0.$$

Для таких основных функций второй член в (4.24) всегда дает нулевой вклад, а первый член приводит к выражению

$$(\Psi_0,\ \varphi(f)\,\varphi(g)\,\Psi_0)=\frac{a}{2}\int\frac{dp^1}{|p^1|}\tilde{f}(p)\,\tilde{g}(-p).$$

Другой возможный путь — допустить все основные функции из $\mathcal{S}$, но ввести индефинитную метрику, которая естественно следует из (4.24). Для Φ, $\Psi\in\mathcal{S}$ положим, что

$$\{\Phi,\ \Psi\}=\int d\omega(p)\,\Phi(p)\,\Psi(p),$$

$$d\omega(p)=\left[\left(\frac{1}{p^0-p^1}\right)_+\delta(p^0+p^1)+b\left(\frac{1}{p^0+p^1}\right)_+\delta(p^0-p^1)\right]+\\+b\delta(p).$$

Если обозначить сужение таких Φ на световой конус через $\mathcal{S}(C_+)$, а подпространство тех из них, которые при $p=0$ обращаются в нуль, через $\mathcal{S}_0(C_+)$, то окажется, что $\mathcal{S}_0(C_+)\subset L^2\left(C_+-(0),\ \frac{dp^1}{|p^1|}\right)$, где правая часть включения — это пространство всех функций, определенных на световом конусе с исключенной вершиной $p=0$ и квадратично интегрируемых относительно инвариантной положительной меры $\frac{dp^1}{|p^1|}$. Взаимосвязи между этими пространствами иллюстрируются схемой

$\mathcal{S}_0(C_+)$. Предгильбертово пространство относительно (,), которое совпадает на нем с {,}	
$\cap$	$\cap$
$\mathcal{S}(C_+)$, снабженное {,}	$L^2\left(C_+-(0),\ \frac{dp^1}{|p^1|}\right)$. Гильбертово пространство относительно (,), пополнение $\mathcal{S}_0(C_+)$

Обычным образом пространство $L^2\left(C_+ - (0), \frac{dp^1}{|p^1|}\right) = \mathscr{H}^{(1)}$ описывает одночастичные состояния в пространстве Фока

$$\mathscr{H}_{\text{Фок}}\left(C_+ - (0), \frac{dp^1}{|p^1|}\right) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathscr{H}^{(j)},$$

где $\mathscr{H}^{(0)}$ — одномерное гильбертово пространство, а $\mathscr{H}^{(j)}$, $j \geqslant 1$, — пространство симметричных функций, квадратично интегрируемых относительно произведения мер $\frac{dp_1^1}{|p_1^1|} \cdots \frac{dp_j^1}{|p_j^1|}$.

Аналогично можно сконструировать векторные пространства $\mathbf{V}_{\mathscr{S}_0}$ и $\mathbf{V}_{\mathscr{S}}$. Как $\mathbf{V}_{\mathscr{S}_0}$, так и $\mathbf{V}_{\mathscr{S}}$ составляются из последовательностей $\{\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \ldots\}$, где $\Phi^{(n)}$ — симметричная функция $p_1, \ldots, p_n$. Она есть сужение элемента из $\mathscr{S}$ на произведение n конусов $C_+ \times \ldots \times C_+$, причем для больших n наложено некоторое условие роста. В данный момент достаточно положить $\Phi^{(n)} = 0$ для достаточно больших n. Пространство $\mathbf{V}_{\mathscr{S}_0}$ — это подсовокупность элементов $\mathbf{V}_{\mathscr{S}}$, для которых $\Phi^{(n)} = 0$ всякий раз, когда какой-либо $p_k = 0$. Форма $\{\ ,\ \}$, расширенная на $\mathbf{V}_{\mathscr{S}}$, имеет вид

$$\{\Phi, \Psi\} = \overline{\Phi}^{(0)} \Psi^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \int \cdots \int d\omega(p_1) \ldots d\omega(p_n) \overline{\Phi^{(n)}}(p_1, \ldots, p_n) \Psi^{(n)}(p_1, \ldots, p_n).$$

В то же время форма $(\ ,\ )$ определена на $\mathbf{V}_{\mathscr{S}_0}$ равенством

$$(\Phi, \Psi) = \overline{\Phi^{(0)}} \Psi^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \int \cdots \int \frac{dp_1^1}{|p_1^1|} \cdots \frac{dp_n^1}{|p_n^1|} \overline{\Phi^{(n)}}(p_1, \ldots, p_n) \Psi^{(n)}(p_1, \ldots, p_n)$$

и положительно определенна на нем. Пополнение по норме есть $\mathscr{H}_{\text{Фок}}\left(C_+ - (0), \frac{dp^1}{|p^1|}\right)$.

Действие группы Пуанкаре во всех этих пространствах задается одной и той же формулой

$$(U(a, \Lambda)\Phi)^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = \exp\left[i\left(\sum_{j=1}^{n} p_j\right) \cdot a\right] \Phi^{(n)}(\Lambda^{-1}p_1, \ldots, \Lambda^{-1}p_n).$$

Цель всего этого построения состояла в подготовке подходящего «поля деятельности» для свободного поля φ. Оно определено для каждой функции $f \in \mathcal{S}$ и каждого вектора $\Phi \in \mathbf{V}_{\mathcal{S}}$ согласно

$$(\varphi(f)\Psi)^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) =$$
$$= \sqrt{\pi}\left\{\sqrt{n+1}\int d\omega(p)\tilde{f}(p)\Psi^{(n+1)}(p, p_1, \ldots, p_n) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\tilde{f}(-p_j)\Psi^{(n-1)}(p_1, \ldots, \widehat{p_j}, \ldots, p_n)\right\}.$$

Очевидно, что если $\tilde{f}(0) = 0$, то $\varphi(f)$ переводит пространство $\mathbf{V}_{\mathcal{S}_0}$ само в себя.

Тем самым скалярное поле нулевой массы можно определить на пространстве $\mathbf{V}_{\mathcal{S}}$. Однако проблема существования величин, подобных $:\varphi^n:$ и $:\exp(g\varphi):$, требует нового исследования. В качестве определения $:\varphi^n:$ мы выберем ту же формулу, что и в случае $m > 0$:

$$:\varphi^l:(f)\Psi)^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) =$$
$$= \frac{\pi^{l/2}}{(2\pi)^{2(l-1)}}\sum_{j=0}^{l}\left[\frac{(n-l+2j)!}{n!}\right]^{1/2}\int\cdots\int\left(\prod_{k=1}^{j}d\omega(\eta_k)\right)\times$$
$$\times\sum_{k_1<k_2<\ldots<k_{l-j}=1}^{n}(j!)^{-1}\sum_{P}P\left(\tilde{f}\left(\sum_{r=1}^{j}\eta_r - \sum_{r=1}^{l-j}\xi_{k_r}\right)\right)\times$$
$$\times\Psi^{(n-l+2j)}(\eta_1, \ldots, \eta_j, \xi_1, \ldots, \widehat{\xi_{k_1}}, \ldots, \widehat{\xi_{k_{l-j}}}, \ldots, \xi_n).$$

В таком случае $:\varphi^n:(f)$ переводит пространство $\mathbf{V}_{\mathcal{S}}$ само в себя. Доказательство того, что оператор: $\exp(g\varphi)$: может быть определен своим разложением в ряд, как и в случае $m > 0$, проводится в точности так же, как и в работе Гординга и Вайтмана (Gårding, Wightman, 1964). Поэтому мы не будем повторять его здесь. Хотя в данном случае нельзя сослаться на теорему реконструкции в силу неположительной определенности $\{\ ,\ \}$, можно непосредственно доказать сходимость скалярных произведений векторов вида $\mathcal{P}(\varphi(h_1), \ldots, \varphi(h_k): \exp(g_1\varphi):(f_1), \ldots, :\exp(g_n\varphi):(f_n))\Psi_n$ и определить совокупность таких векторов в качестве пространства $\mathbf{V}_{\mathcal{S}}$.

Нетрудно проверить, что оператор $:\exp(g\varphi):$ удовлетворяет соотношению

$$\{\Phi, :\exp(g\varphi):(f)\,\Psi\} = \{:\exp(\bar{g}\varphi):(\bar{f})\,\bar{\Phi},\ \Psi\}$$

для всех $\bar{\Phi}, \Psi \in \mathbf{V}_{\mathscr{S}}$.

Поучительно вычислить двуточечную обобщенную функцию такой операторной экспоненты в данном формализме

$$\{\Psi_0, :\exp(g_1\varphi):(x_1):\exp(g_2\varphi):(x_2)\,\Psi_0\},$$

где Ψ_0 — последовательность $(1, 0, 0,\ldots)$. Эта функция равна

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(g_1g_2)^n}{(n!)^2}\{\Psi_0, :\varphi^n:(x_1):\varphi^n:(x_2)\,\Psi_0\} =$$

$$= \exp\left(g_1g_2\frac{1}{i}\Delta^{(+)}(0, x_1-x_2)\right), \tag{4.25}$$

где

$$\frac{1}{i}\Delta^{(+)}(0, x) = \frac{1}{4\pi}\int d\omega(p)\,e^{-ipx} = -\frac{1}{4\pi}\ln(-x^2+i\varepsilon x^0) + \\ + \frac{1}{4\pi}[b+2\Gamma'(1)].$$

Обобщенная функция (4.25) исследовалась Шроером (Schroer, 1963), который показал, что ее можно представить в виде

$$\int_0^{\infty} d\rho(a)\frac{1}{i}\Delta^{(+)}(a, x_1-x_2),$$

где $d\rho(a)$ имеет вид функции $\exp\left(\frac{g_1g_2}{4\pi}\ [b+2\,\Gamma'\ (1)]\right)$, умноженной на обобщенную функцию, определенную на интервале $(0, \infty)$ и представляющую собой положительную меру при $g_1 = \bar{g}_2$. Тем самым, хотя (4.25) было вычислено в пространстве со скалярным произведением $\{\ ,\ \}$, результат удовлетворяет условию положительной определенности $d\rho \geqslant 0$. Единственным следствием индефинитности метрики остается то обстоятельство, что на световом конусе нет никаких δ-функций. (Тот факт, что

$\varphi(f)\Psi_0$ — состояние, импульсы которого лежат только на световом конусе, и то, что

$$\{\varphi(f)\Psi_0,\ :\exp\ (g\varphi):(h)\Psi_0\} = g\,\{\varphi(f)\Psi_0, \varphi(h)\Psi_0\} \neq 0$$

означало бы, что *если* форма $\{\ ,\ \}$ была бы положительной, то мера $d\rho\,(a)$ *обязательно содержала бы* δ-функцию с нулевой массой.)

Результат преобразования вакуумных средних такой операторной экспоненты выражается так же, как и в случае $m \neq 0$, через двуточечную обобщенную функцию. Поэтому естественно предположить, что, вероятно, в подпространстве $\mathbf{V}_{\mathscr{S}}$, натянутом на полиномы по сглаженным операторным экспонентам, форма $\{\ ,\ \}$ положительно определена. Однако на самом деле это не так. Например,

$$\{\alpha\Psi_0 + \beta:\exp(ig\varphi):(f)\Psi_0,\ \alpha\Psi_0 + \beta:\exp(ig\varphi):(f)\Psi_0\} =$$
$$= |\alpha|^2 + |\beta|^2\{:\exp(ig\varphi):(f)\Psi_0,\ :\exp(ig\varphi):(f)\Psi_0\} +$$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\,(\bar{\alpha}\beta\,(2\pi)\tilde{f}\,(0)).$$

Далее, при фиксированном значении $\tilde{f}\,(0)$ фигурную скобку во втором члене можно сделать произвольно малой, потребовав, чтобы $\tilde{f}$ была ограничена по абсолютной величине значением $\tilde{f}\,(0)$ и чтобы носитель был достаточно близок к нулю. Это означает, что при соответствующем выборе α, β и $\tilde{f}\,(0)$ данная сумма будет отрицательной.

Чтобы условия положительной определенности исследовать подробнее, можно рассмотреть предельный случай нулевой массы в вакуумных средних операторов $:\exp\,(ig\varphi):$, где φ — свободное поле с $m \neq 0$. Для двуточечной обобщенной функции

$$(\Psi_0:\exp(ig_1\varphi):(x_1):\exp(ig_2\varphi):(x_2)\Psi_0) =$$
$$= \exp\left[\frac{g_1g_2}{4i}H_0^{(1)}\left(m\sqrt{(x_1-x_2)^2}\right)\right] =$$
$$= \exp\left(\frac{g_1g_2}{2\pi}\ln m\right)F\,(m,\ g_1,\ g_2,\ x_1-x_2), \quad (4.26)$$

где

$$\lim_{m\to 0} F\,(m,\ g_1,\ g_2,\ x_1-x_2) = \exp\left(-\frac{g_1g_2}{i}\Delta^{(+)}(0,\ x_1-x_2)\right). \quad (4.27)$$

Итак, в этом случае положительная определенность предельного выражения

$$\iint \widetilde{f}(x_1) \exp\left(\frac{g^2}{i}\Delta^{(+)}(0, x_1 - x_2)\right) f(x_2)\, dx_1 dx_2 \geqslant 0,$$

следует из того же свойства при $m > 0$. (Очевидно, существует некий произвол в разделении двуточечной обобщенной функции (4.26) на произведение множителей $\exp(g_1 g_2 \ln m)$ и F. Можно было бы также написать $\exp(g_1 g_2 \ln(m + \Delta m))$ и $\exp(-g_1 g_2 \ln(\Delta m)) F$. Утверждение (4.27) соответствует частному выбору такого разделения.) Общее условие положительной определенности выражается через положительную определенность матриц, ассоциированных с квадратичной формой по α_i:

$$\begin{aligned}
&\| \{\alpha_0 + \alpha_{+1} : \exp(ig\varphi) : (f_{+1}) + \alpha_{-1} : \exp(-ig\varphi) : (f_{-1}) + \\
&+ \alpha_{+1+1} \int : \exp(ig\varphi) : (x_1) : \exp(ig\varphi) : (x_2) f_{+1+1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\
&+ \alpha_{+1-1} \int : \exp(ig\varphi) : (x_1) : \exp(-ig\varphi) : (x_2) f_{+1-1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\
&+ \alpha_{-1+1} \int : \exp(-ig\varphi) : (x_1) : \exp(ig\varphi) : (x_2) f_{-1+1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\
&+ \alpha_{-1-1} \int : \exp(-ig\varphi) : (x_1) : \exp(-ig\varphi) : (x_2) \times \\
&\qquad\qquad \times f_{-1-1}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 + \ldots\} \Psi_0 \|^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Верхний левый угол этих матриц имеет вид

$$\left.\begin{array}{l}
(\Psi_0, \Psi_0)\,(\Psi_0, : \exp(ig\varphi) : (f_{+1})\Psi_0)(\Psi_0, \\
\qquad\qquad : \exp(-ig\varphi) : (f_{-1})\Psi_0) \ldots \\
(: \exp(ig\varphi) : (f_{+1})\Psi_0, \Psi_0)\,(: \exp(ig\varphi) : (f_{+1})\Psi_0, \\
\qquad\qquad : \exp(ig\varphi) : f\,({}_{+1})\Psi_0) \ldots \\
(: \exp(-ig\varphi) : (f_{-1})\Psi_0, \Psi_0)(: \exp(-ig\varphi) : (f_{-1})\Psi_0, \\
\qquad\qquad : \exp(ig\varphi) : (f_{+1})\Psi_0) \ldots \\
\left(\iint : \exp(ig\varphi) : (x_1) : \exp(ig\varphi) : (x_2) f_{+1+1}(x_1, x_2) \times\right. \\
\qquad\qquad \times dx_1 dx_2 \Psi_0, \Psi_0) \ldots
\end{array}\right\} \qquad (4.28)$$

Каждый из этих матричных элементов в случае, если проведено расщепление (4.26), зависит от $\exp\left(\frac{g^2}{2\pi}\ln m\right)$.

Допустим, что пара неотрицательных целых чисел (k_+, k_-) обозначает соответственно число операторов $:\exp(ig\varphi):$ и $:\exp(-ig\varphi):$, участвующих в образовании некоторого вектора путем действия произведения таких операторов на Ψ_0. Тогда скалярное произведение вектора, характеризуемого (k_{1+}, k_{1-}), и вектора, характеризуемого (k_{2+}, k_{2-}), приводит к вакуумному среднему, содержащему $(k_{1-}+k_{2+})\times$ $\times:\exp(ig\varphi):$ и $(k_{2-}+k_{1+})$ $:\exp(-ig\varphi):$. Такой матричный элемент будет содержать множитель $\exp\left(N\frac{g^2}{2\pi}\ln m\right)$, где

$$N=\frac{(k_{1-}+k_{2+})(k_{1-}+k_{2+}-1)}{2}+\frac{(k_{2-}+k_{1+})(k_{2-}+k_{1+}-1)}{2}-$$
$$-(k_{1-}+k_{2+})(k_{2-}+k_{1+})=$$
$$=\frac{1}{2}\left[(k_{1-}+k_{2+}-k_{1+}-k_{2-})^2-(k_{1-}+k_{1+}+k_{2-}+k_{2+})\right].$$

Положительная определенность матрицы (4.28) приводит к положительной определенности матрицы, полученной из нее умножением ее справа и слева на некую вещественную положительную диагональную матрицу. Эта последняя матрица может быть выбрана так, чтобы в диагональных элементах исчезли множители $\exp(Ng^2\ln m/2\pi)$. Тогда для недиагональных элементов с индексами (k_{1+}, k_{1-}) и (k_{2+}, k_{2-}) число $N=(k_{1-}+k_{2+}-k_{1+}-k_{2-})/2$. В этой матрице можно перейти к предельному случаю нулевой массы и получить положительно определенную матрицу, которая в точности совпадает с аналогичной матрицей из теории поля $:\exp(ig\varphi):$ в случае нулевой массы, за исключением того, что все вакуумные средние, содержащие различное число операторов $:\exp(ig\varphi):$ и $:\exp(-ig\varphi):$, оказываются равными нулю. Между прочим, это ограничение представляет собой в точности пример правила отбора, которое появилось бы, если бы мы имели дело с полем $:\exp(ig\varphi):(x)\,\psi^{(0)}(x)$, где $\psi^{(0)}$ — дираково поле, удовлетворяющее (4.11), (4.12) и (4.13). Тем самым, хотя предыдущее рассуждение не вносит никакой ясности непосредственно в проблему положительности $\{\ ,\ \}$ в циклическом подпространстве, образованном действием на Ψ_0 оператора $:\exp(ig\varphi):$ и сопряженного ему оператора с тривиальными модификациями, оно превращается в доказательство положительной определенности аналогичной формы $\{\ ,\ \}$ определенной на подпространстве прямого произведения $\mathbf{V}_{\mathcal{S}} \times \mathcal{H}_{\text{фермион}}$, образованном при действии на вакуум поля $:\exp(ig\varphi):(x)\psi^{(0)}(x)$ и сопряженного ему оператора. В самом деле, как явствует из рассмотрения величин типа

$$\{\Psi_0,\ \mathcal{P}(\varphi,\ :\exp(ig\varphi):,\ :\exp(-ig\varphi):)\Psi_0\},$$

где $\mathcal{P}$ — полином по выделенным аргументам, форма $\{\ ,\ \}$ положительно определенна также и на циклическом подпространстве, образованном действием на Ψ_0 операторов φ, $:\exp(ig\varphi):\psi^{(0)}$, $:\exp(-ig\varphi):\psi^{(0)}$. При этом поле φ, но не обязательно поле $:\exp(\pm ig\varphi):\psi^{(0)}(x)$ должно быть сглажено с основными функциями f, для которых $\tilde{f}(0)=0$. (Вакуумные средние, содержащие поля φ, можно получить из вакуумных средних с одними операторными экспонентами, если продифференцировать (4.8) по некоторому набору g_i, положив затем эти $g_i=0$.) Этим рассуждением завершается доказательство утверждений Шроера (Schroer, 1963).

С другой стороны, тот факт, что в пределе нулевой массы в условии положительной определенности некоторые матричные элементы «аннигилируют», заставляет подозревать, что в теории поля $:\exp(ig\varphi):$ условие положительной определенности не выполнено. Мы уже показывали, что в рассмотренном выше примере $d\rho(a)<0$. Последнее должно иметь место и в других случаях, например:

$$\Big\{\alpha:\exp(ig\varphi):(f)\Psi_0+$$
$$+\beta\iint :\exp(ig\varphi):(x):\exp(ig\varphi):(y)\,h(x,y)\,dx\,dy\cdot\Psi_0,$$
$$\alpha:\exp(ig\varphi):(f)\Psi_0+$$
$$+\beta\iint :\exp(ig\varphi):(x):\exp(ig\varphi):(y)\,h(x,y)\,dx\,dy\cdot\Psi_0\Big\}<0$$

при должном выборе α, β, f, h. Однако мы не будем подробно обсуждать здесь эту проблему.

Модель теории поля, заданная в циклическом подпространстве, образованном действием на Ψ_0 полей φ и $:\exp(ig\varphi):(x)\psi^{(0)}(x)$, была исследована Шроером в качестве примера теории с *инфрачастицами.* Так он назвал частицы, у которых дискретная масса благодаря связи с полем нулевой массы «растворена» в непрерывном спектре. Следует отметить, что обсуждаемое явление не связано с отсутствием аналитичности вакуумных средних по константе связи. Как было подробно разобрано Клайбером (Klaiber, 1964), вакуумные средние в этой теории являются голоморфными функциями константы связи.

Сделаем последнее замечание относительно теории скалярного поля нулевой массы. Очевидно, что в этой теории нет ни одного параметра с размерностью длины, так что в величинах, подобных (4.25), для образования безразмерных аргументов необходимо выбрать какую-то произвольную единицу длины, и тогда x будет безразмерной величиной, выражающей компоненты радиуса-вектора в выбранных единицах. Поэтому можем, например, провозгласить, что в уравнениях, подобных (4.25), все длины будут измеряться в морских саженях,— это никак не ограничит данную теорию.

Интересно сравнить образования $:\exp(ig\varphi):$ и $:\exp(ig\varphi):(x)\,\psi^{(0)}(x)$ в двумерном пространстве-времени с соответствующими конструкциями в пространстве-времени трех или более измерений. В последнем случае ситуация существенно менее сложна, поскольку положительно частотное решение уравнения (4.23) может быть фурье-образом положительной меры. Это обстоятельство исключает необходимость определять пространство с индефинитной метрикой, аналогичное пространству $\mathbf{V}_{\mathscr{S}}$. С другой стороны, поля, определенные таким образом, оказываются неперенормируемыми, точно так же, как и в случае полей ненулевой массы.

Обратим теперь внимание на случай двукомпонентного поля нулевой массы, удовлетворяющего уравнению Дирака, т. е. на поле, удовлетворяющее

$$\left.\begin{array}{c} \gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)=0, \quad [\psi(x), \psi(y)]_{+}=0, \\ [\psi(x), \psi^{+}(y)]_{+}=i^{-1}S(x-y), \end{array}\right\} \qquad (4.29)$$

где

$$S(x)=-\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Delta(x)=\frac{i}{4\pi}\int d\Omega_0(k)\,e^{-ikx}. \qquad (4.30)$$

Такое поле, в отличие от соответствующего скалярного поля, можно реализовать в обычном пространстве Фока просто потому, что в (4.30) присутствует дополнительная степень k. Обычным образом можно образовать операторы вида

$$j^{\mu}(x) = :\psi^{+}(x)\, i\gamma^{\mu}\psi(x): \tag{4.31}$$

и

$$k^{\mu}(x) = :\psi^{+}(x)\, i\gamma^{5}\gamma^{\mu}\psi(x):. \tag{4.32}$$

Дивергенции как от j, так и от k равны нулю, и

$$j^{\mu}(x) = -\varepsilon^{\mu\nu}k_{\nu}(x), \quad \varepsilon^{01} = +1 = -\varepsilon^{10}. \tag{4.33}$$

Перестановочные соотношения операторов j, k и ψ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} [\psi(x), j^{\mu}(y)]_{-} &= (g^{\mu k} + \gamma^{5}\varepsilon^{\mu k})\frac{\partial\Delta(0, x-y)}{\partial x^{k}}\psi(y), \\ [\psi^{+}(x), j^{\mu}(y)]_{-} &= -\frac{\partial\Delta(0, x-y)}{\partial x^{k}}\psi^{+}(y)(g^{\mu k}+\gamma^{5}\varepsilon^{\mu k}), \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

$$\left.\begin{aligned} [\psi(x), k^{\mu}(y)]_{-} &= -(\varepsilon^{\mu k} + \gamma^{5}g^{\mu k})\frac{\partial\Delta(0, x-y)}{\partial x^{k}}\psi(y), \\ [\psi^{+}(x), k^{\mu}(y)]_{-} &= \frac{\partial\Delta(0, x-y)}{\partial x^{k}}\psi^{+}(y)(\varepsilon^{\mu k} + g^{\mu k}\gamma^{5}), \end{aligned}\right\} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned} [j^{\mu}(x), j^{\nu}(y)]_{-} &= \frac{1}{\pi i}\frac{\partial^{2}}{\partial x_{\mu}\partial x_{\nu}}\Delta(0, x-y) = \\ &= [k^{\mu}(x), k^{\nu}(y)]_{-}, \end{aligned} \tag{4.36}$$

$$[j^{\mu}(x), k^{\nu}(y)]_{-} = \frac{1}{\pi i}\varepsilon^{\nu k}\frac{\partial^{2}}{\partial x_{k}\partial x_{\mu}}\Delta(0, x-y). \tag{4.37}$$

Выявленный в (4.36) и (4.37) факт, что коммутаторы операторов j и k, являются постоянными, умноженными на единичный оператор, в какой-то мере удивителен и заслуживает некоторых комментариев. По поводу коммутатора $[j, j]$ эти комментарии впервые появились в работе Соколова (Sokolow, 1937).

Опрометчивый расчет может легко привести здесь к формально другому ответу. Например, стандартные манипуляции в четырехмерной квантовой электродинамике приводят к

$$[j^\mu(x), j^\nu(y)]_- = \psi^+(x)\, i\gamma^\mu i^{-1} S(x-y)\, i\gamma^\nu \psi(y) - \\ - \psi^+(y)\, i\gamma^\nu i^{-1} S(y-x)\, i\gamma^\mu \psi(x),$$

и поскольку в двумерном пространстве-времени

$$i\gamma^\mu S(x-y)\, i\gamma^\nu = (-i\gamma^k g^{\mu\nu} + i\gamma^\mu g^{k\nu} + i\gamma^\nu g^{k\mu}) \frac{\partial\Delta}{\partial x^k}(0, x-y),$$

то коммутатор

$$[j^\mu(x), j^\nu(y)]_- = \\ = -g^{\mu\nu}[\psi^+(x)\, i\gamma^k \psi(y) - \psi^+(y)\, i\gamma^k \psi(x)] \frac{\partial\Delta}{\partial x^k}(0, x-y) + \\ + [\psi^+(x)\, i\gamma^\mu \psi(y) - \psi^+(y)\, i\gamma^\mu \psi(x)] \frac{\partial\Delta}{\partial x_\nu}(0, x-y) + \\ + [\psi^+(x)\, i\gamma^\nu \psi(y) - \psi^+(y)\, i\gamma^\nu \psi(x)] \frac{\partial\Delta}{\partial x_\mu}(0, x-y). \quad (4.38)$$

На первый взгляд, казалось бы, трудно поверить в то, что хотя вакуумное среднее правой части коммутатора (4.38) и не обращается в нуль, но члены, описывающие рождение и аннигиляцию пар, равны нулю. Тем не менее это так, и причина данного факта коренится в том, что (4.38) — слишком сингулярное выражение для величины, которая должна вести себя вполне хорошо. (Например, если вакуумные средние от него вычислять непосредственно, то получаются члены, пропорциональные

$$\frac{\partial\Delta^{(1)}(0, x-y)}{\partial x_\mu} \frac{\partial\Delta(0, x-y)}{\partial x_\nu}.)$$

Эта неоднозначность проявляется в неопределенностях связанных с нейтринной теорией фононов (Фок, 1937) и с моделью Тирринга. Я хотел бы подчеркнуть, что единственный разумный путь раскрытия таких двусмысленностей в перестановочном соотношении $[A, B] = C$ пары неограниченных операторов A, B состоит в том, чтобы точно установить, на каких векторах можно считать определенными операторы A и B. Далее нужно показать, что операторы AB и BA имеют смысл на некоторой существенной подобласти этой области, и, наконец, показать, что на этой подобласти $AB - BA = C$. В рассматриваемой квантовой теории поля минимальная область определения состоит из вектора $\mathcal{P}\Psi_0$, где Ψ_0 — физический вакуум, а $\mathcal{P}$ — произвольный полином по сглаженным полям, встречающимся в теории. Строгое содержание равенств (4.34) — (4.37) сводится к тому, что указанные соотношения справедливы всякий раз, когда их левые и правые части действуют на векторы вида $\mathcal{P}\Psi_0$, где $\mathcal{P}$ — полином по сглаженным полям

$$\psi(f_1), \quad \psi^*(f_2), \quad j(f_3), \quad k(f_4).$$

Другой путь, позволяющий установить, что коммутатор $[j, j]$ должен быть постоянной, умноженной на единичный оператор, состоит в том, чтобы рассчитать вакуумное среднее от него и заметить, что оно совпадает с вакуумным средним от $\pi^{-1/2}\,\partial\varphi/\partial x^\mu$, где φ — свободное скалярное поле. Тогда, если бы была применима теорема Иоста и Шроера [см. напр. (Streater, Wightman, 1964, стр. 163)], то можно было бы сделать вывод, что

$$[j^\mu(x), j^\nu(y)]_- = (\Psi_0, [j^\mu(x), j^\nu(y)]_- \Psi_0)\cdot\mathbf{1}. \qquad (4.39)$$

К сожалению, оказалось, что эта теорема неприменима к полям нулевой массы, так что необходимо непосредственное вычисление.

Пример 3

ν-теория фононов. Представление о том, что бозонные поля нулевой массы можно сконструировать из билинейных комбинаций фермионных полей, было выдвинуто на заре истории квантовой теории поля в связи с попытками создать нейтринную теорию света (Jordan, 1935). Это предложение было первоначально разработано в случае двумерного пространства-времени для системы в ящике с периодическими граничными условиями. Сначала казалось, что возникающие математические двусмысленности связаны с проблемой сходимости бесконечных сумм. Борн и Наджендра Нат достаточно хорошо прояснили характер этих трудностей для системы частиц в ящике, последовательно применив теорию дырок для фермионов (Born, Nagendra Nath, 1936). В цитированной выше работе (Sokolow, 1937) Соколов придал этому формализму ковариантную форму, показав, каким образом можно образовать скалярное поле из билинейной комбинации операторов рождения и уничтожения диракова поля, не прибегая к ящику. Как явствует из проведенной выше дискуссии, в двумерном пространстве-времени уместно произвести тщательный пересмотр подобного построения полевой теории скалярных частиц, поскольку ни один из указанных авторов не заметил невозможности построения скалярных полей нулевой массы в двумерном пространстве-времени.

Чтобы подойти к сути дела, рассмотрим поле Дирака нулевой массы и связанные с ним ток j и псевдоток k, определенные в (4.31) и (4.32). Поскольку

$$\partial^\mu j_\mu(x) = 0 = \partial^\mu k_\mu(x) \tag{4.40}$$

и

$$k_\mu = -\varepsilon^{\mu\nu} j^\nu,$$

то

$$\partial_0 j_1 - \partial_1 j_0 = 0 = \partial_0 k_1 - \partial_1 k_0. \tag{4.41}$$

Отсюда следует, что существуют бозонные поля ρ и σ, удовлетворяющие соотношениям

$$j^\mu(x) = \pi^{-1/2}\partial^\mu\rho(x), \quad k^\mu(x) = \pi^{-1/2}\partial^\mu\sigma(x) \tag{4.42}$$

и

$$\Box\rho(x) = 0 = \Box\sigma(x) \tag{4.43}$$

(множители $\pi^{-1/2}$ включены для того, чтобы нормировка операторов ρ и σ совпадала с нормировкой свободного поля). Чтобы найти кандидатуру на роль оператора ρ, рассмотрим формальное выражение для диракова тока

$$\begin{aligned}
:\psi^+ i\gamma^\mu\psi:(x) = \frac{1}{2\pi}\iint d\Omega_0(p)\, d\Omega_0(q) \times \\
\times \{a^*(p)\, a(q) \exp(i(p-q)x)\, u^+(p)\, i\gamma^\mu u(q) - \\
- b^*(q)\, b(p) \exp(-i(p-q)x)\, u^{c+}(p)\, i\gamma^\mu u^c(q) + \\
+ a^*(p)\, b^*(q) \exp(i(p+q)x)\, u^+(p)\, i\gamma^\mu u^c(q) + \\
+ b(p)\, a(q) \exp(-i(p+q)x)\, u^{c+}(p)\, i\gamma^\mu u(q)\}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Далее в случае двумерных полей нулевой массы скалярные произведения дираковых волновых функций можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}
&u^+(p)\, i\gamma^\mu u(q) = \\
&\quad = \begin{cases} 0, & \text{если } p^0/p^1 \neq q^0/q^1, \\ \sqrt{\dfrac{p^0}{q^0}}\, q^\mu = \sqrt{p^0 q^0}\,\{q^0/q^1\}, & \text{если } p^0/p^1 = q^0/q^1, \end{cases} \\
&u^{c+}(p)\, i\gamma^\mu u^c(q) = u^+(p)\, i\gamma^\mu u(q) = \\
&\qquad = -\operatorname{sgn}(p^0/p^1)\, u^+(p)\, i\gamma^\mu u^c(q) = \\
&\qquad\qquad = -\operatorname{sgn}(p^0/p^1)\, u^{c+}(p)\, i\gamma^\mu u(q).
\end{aligned}\right\} \tag{4.45}$$

Эти матричные элементы всегда пропорциональны импульсу, возникающему в экспоненциальном множителе. Тем самым кандидатуры на роли полей ρ и σ имеют вид

$$\begin{aligned}
\rho(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, i} \iint d\Omega_0(p)\, d\Omega_0(q)\, \theta\left(\frac{p^0}{p^1} \frac{q^0}{q^1}\right) \sqrt{p^0 q^0}\, \times \\
\times \left\{ \frac{a^*(p)\, a(q)}{p^0 - q^0} \exp(i(p-q)x) + \frac{b^*(q)\, b(p)}{p^0 - q^0} \exp(-i(p-q)x) - \right. \\
\left. - \frac{a^*(p)\, b^*(q)}{p^0 + q^0} \exp(i(p+q)x) + \frac{b(p)\, a(q)}{p^0 + q^0} \exp(-i(p+q)x) \right\},
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, i} \iint d\Omega_0(p)\, d\Omega_0(q)\, \theta\left(\frac{p^0}{p^1} \frac{q^0}{q^1}\right) \sqrt{p^0 q^0}\, \times \\
\times \left\{ \frac{a^*(p)\, a(q)}{p^1 - q^1} \exp(i(p-q)x) + \frac{b^*(q)\, b(p)}{p^1 - q^1} \exp(-i(p-q)x) - \right. \\
\left. - \frac{a^*(p)\, b^*(q)}{p^0 + q^0} \exp(i(p+q)x) + \frac{b(p)\, a(q)}{p^0 + q^0} \exp(-i(p+q)x) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Как и следовало ожидать, эти формальные выражения приводят к инфракрасным трудностям. Например, рассмотрим выражение $\|\rho(f)\Psi_0\|$, которое является нормой состояния пары частиц

$$\begin{aligned}
\rho(f)\Psi_0 = \sqrt{\pi}\, i \iint d\Omega_0(p)\, d\Omega_0(q)\, \frac{\tilde{f}(-(p+q))}{p^1 + q^1} \times \\
\times \theta\left(\frac{p^0}{p^1} \frac{q^0}{q^1}\right) \sqrt{p^0 q^0}\, a^*(p)\, b^*(q)\, \Psi_0.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Оно бесконечно. Однако его можно сделать конечным, если использовать трюк, предложенный Шроером, и потребовать, чтобы $\tilde{f}(0)=0$. Подробное обсуждение показывает, что, как и прежде в случае скалярного поля нулевой массы, чтобы сделать поля ρ и σ хорошо определенными, достаточно либо применить этот метод, либо ввести индефинитную форму $\{\ ,\ \}$.

Поля ρ и σ удовлетворяют перестановочным соотношениям свободных полей

$$[\rho(x), \rho(y)]_- = i^{-1}\Delta(0, x-y) = [\sigma(x), \sigma(y)]_-, \qquad (4.49)$$

что не столь удивительно, если уж ухитрились стерпеть (4.36). Кроме того,

$$[\rho(x), \sigma(y)]_- = i\operatorname{sgn}(x^1-y^1)\,\theta(-(x-y)^2) = i\tilde{\Delta}(x-y) \qquad (4.50)$$

Отметим, что функция $\tilde{\Delta}$ в правой части этой формулы представляет собой нечетное решение волнового уравнения

$$\Box\tilde{\Delta}(x) = 0,$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\tilde{\Delta}(x^0, 0) = 0, \quad \frac{\partial\tilde{\Delta}}{\partial x_1}(x^0, 0) = \delta(x^0). \qquad (4.51)$$

Она является аналогом для переменной x^1 функции $\Delta(0, x)$ для переменной x^0. Такие объекты существуют только в двумерном пространстве-времени.

Поля ρ и σ следует интерпретировать так, как будто они описывают свойства свободных бозонов (скалярных и псевдоскалярных соответственно), представляющих собой составные частицы, построенные из соответствующих фермионов массы нуль. Например, состояние с одной парой (4.48) — это бозонное состояние. Однако состояние с двумя бозонами — это не просто состояние с двумя парами. Типичное двубозонное состояние имеет вид

$$\rho^{(+)}(f)\,\rho^{(+)}(g)\,\Psi_0,$$

где $\rho^{(+)}$ — положительно частотная часть ρ. Это состояние содержит хитрую суперпозицию состояний двух пар и одной пары.

В заголовке обсуждаемого примера такие бозоны были названы фононами, чтобы подчеркнуть, что они — не фотоны. Их существование было недавно заново открыто в модели, используемой в теории твердого тела (Mattis, Lieb, 1965) *). Там их называют плазмонами.

Пример 4

Модель Тирринга. Тирринг (Thirring, 1958) был первым, кто понял, что ферми-взаимодействие поля Дирака нулевой массы в двумерном пространстве-времени приводит к явно решаемой модели. Он получил формулы для нескольких матричных элементов такого поля. Далее Глазер (Glaser, 1958) вывел явную формулу для оператора поля в зависимости от свободного поля Дирака нулевой массы. Работу Глазера подверг критике Прадхан (Pradhan, 1958). Прадхан утверждал, что некоторые сингулярные и несколько двусмысленные выражения, которые Глазер считал равными нулю, фактически нулю не равны, что должно повлиять на некоторые из результатов Глазера. С другой стороны, Скарф (Scarf, 1959а), первоначально подтвердивший правильность решения Глазера, позднее изменил свое мнение и доказал, что это решение противоречиво (Scarf, 1959б). Затем Джонсон (Johnson, 1959), воспользовавшись совсем другой техникой, рассмотрел проблему вновь ab initio. Двумя важными результатами его работы были предписания для вычисления тока с перенормированным оператором поля и явные, свободные от неопределенностей, формулы для двуточечной и четырехточечной функций Грина. Выражение, полученное им для двуточечной функции Грина, отличается от выражения, полученного Скарфом (Scarf, 1959в) на основании формулы Глазера. Поразительная особенность джонсоновых выражений для функций Грина — отсутствие δ-функций на световом конусе в импульсном пространстве; взаимодействие Ферми как бы превращает фермионы модели в инфрачастицы в смысле Шроера. Этот результат порождает сомнение в справедливости формулы Глазера, выражающей поле через свободное поле Дирака нулевой массы. (Свободное поле $\psi^{(0)}$ автоматически генерирует

*) Рассматриваемая ими модель была предложена Латтинжером (Luttinger, 1963).

состояния определенной массы, именно $\Psi^{(0)}\Psi_0$). Аналогичную критику можно адресовать более поздним попыткам исправить формулу Глазера так, чтобы она приводила к джонсоновым выражениям для функций Грина (Scarf, 1962).

Если все это кого-нибудь смущает, то я с ними заодно. То, что последует ниже, представляет собой первую попытку вписать упомянутые выше факты в рамки аксиоматической теории поля.

Тирринг доказал, что все варианты взаимодействия Ферми в двумерном пространстве-времени в существенном совпадают. Например,

$$\psi^+(x)\, i\gamma^\mu\psi(x)\, \psi^+(x)\, i\gamma_\mu\psi(x) = 2\,(\psi^+(x)\,\psi(x))^2 + \\ + (\text{бесконечные члены, квадратичные по } \psi). \quad (4.52)$$

Это утверждение можно доказать, исходя из

$$[\psi_1(x),\ \psi_2(x)]_+ = 0 = [\psi_1(x),\ \overset{*}{\psi}_2(x)]_+ \ \text{и}\ \ \psi_1^2(x) = \psi_2^2(x) = 0,$$

путем элементарных алгебраических манипуляций. К сожалению, этот результат нельзя принять за чистую монету, поскольку произведение полей в некоторой точке следует, вообще говоря, определять с помощью должного предельного перехода. В любом случае в качестве первого шага на пути получения формулы Глазера следует ввести специальные матрицы

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

и признать, что уравнение

$$\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) = g\psi^+(x)\, i\gamma^\mu\psi(x)\, i\gamma_\mu\psi(x) = -2g\psi^+(x)\,\psi(x)\,\psi(x)$$

формально сводится посредством (4.53) к двум уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\psi_1}{\partial u}(u,\ v) - ig\overset{*}{\psi}_2\psi_2\psi_1(u,\ v) = 0, \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial v}(u,\ v) - ig\overset{*}{\psi}_1\psi_1\psi_2(u,\ v) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (4.54)$$

где

$$u = x^0 + x^1, \qquad v = x^0 - x^1. \quad (4.55)$$

Тогда, если пренебречь возможной некоммутативностью операторов, получается решение

$$\left.\begin{aligned}\psi_1(u, v) &= \psi_1^{(0)}(\hat{u}, v)\exp\left[ig\int_{\hat{u}}^{u}\psi_2^{(0)*}(w, \hat{v})\,\psi_2^{(0)}(w, \hat{v})\,dw\right],\\ \psi_2(u, v) &= \psi_2^{(0)}(v, \hat{u})\exp\left[ig\int_{\hat{v}}^{v}\psi_1^{(0)*}(\hat{u}, w)\,\psi_1^{(0)}(\hat{u}, w)\,dw\right].\end{aligned}\right\}\tag{4.56}$$

Этому решению можно придать другую форму, чтобы выявить его связь с ν-теорией фононов. Заметим, что

$$\psi^{(0)+}(u, v)\, i\gamma^{\mu}\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\,\psi^{(0)}(u, 0) = \\ = \psi_2^{(0)*}(u, v)\,\psi_2^{(0)}(u, v)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

так что

$$\psi^{(0)+}(\xi)\, i\gamma^{\mu}\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\,\psi^{(0)}(\xi)\, d\xi_{\mu} = \psi_2^{(0)*}(\xi)\,\psi_2^{(0)}(\xi)\, d(\xi^0+\xi^1).$$

Если ввести, по аналогии с ν-теорией фононов, операторы ρ и σ согласно

$$\psi^{(0)+}(x)\, i\gamma^{\mu}\psi^{(0)}(x) = \pi^{-1/2}\partial^{\mu}\rho(x),$$
$$\psi^{(0)+}(x)\, i\gamma^5\gamma^{\mu}\psi^{(0)}(x) = \pi^{-1/2}\partial^{\mu}\sigma(x),$$

то формальное решение принимает вид

$$\psi(x) = \exp\frac{ig}{2\sqrt{\pi}}\left[(\rho(x)-\rho(\hat{x})) - \right. \\ \left. -(\sigma(x)-\sigma(\hat{x}))\right]\frac{1-\gamma^5}{2}\psi^{0}(x) + \exp\frac{ig}{2\sqrt{\pi}}\left[(\rho(x)-\rho(\hat{x})) + \right. \\ \left. +(\sigma(x)-\sigma(\hat{x}))\right]\frac{1+\gamma^5}{2}\psi^{(0)}(x),$$

т. е.

$$\psi(x) = \exp\frac{ig}{2\sqrt{\pi}}\left[(\rho(x)-\rho(\hat{x})) - \gamma^5(\sigma(x)-\sigma(\hat{x}))\right]\psi^{(0)}(x).$$

Глазер сдвинул $\hat{x}$ на $-\infty$ и опустил члены $\rho(\hat{x})$, $\sigma(\hat{x})$. В результате окончательное выражение для предложенного классического решения имеет вид

$$\psi(x) = \exp\frac{ig}{2\sqrt{\pi}}(\rho(x) - \gamma^5\sigma(x))\,\psi^{(0)}(x). \qquad (4.57)$$

Следуя процедуре, использованной Тиррингом в его первой работе, Глазер предложил перенести эту формулу в квантовую теорию поля в два этапа. Сначала трактовать ее с помощью полей из нефизического мира, в котором все состояния с отрицательной энергией, за исключением конечного числа, заняты. Затем переинтерпретировать формулы такой нефизической теории дырок и в результате получить физическую теорию.

Рассмотрим эти шаги поочередно. Нефизический мир, необходимый на первой стадии, был в достаточной мере знаком физикам-теоретикам двадцатых и тридцатых годов, но в наше время, вероятно, стоит описать его немного подробнее.

Соответствующее гильбертово пространство есть

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(n)},$$

где пространство $\mathcal{H}^{(0)}$ одномерно, а $\mathcal{H}^{(n)}$ — гильбертово пространство всех квадратично-интегрируемых антисимметричных функций, определенных на произведении гипербол $p^2_1 = \ldots = p_n^2 = m^2$, причем допустимы *оба* знака $p^0{}_j$. Представление группы Пуанкаре определяется в нем точно так же, как в (2.20), но теперь вакуум $\Psi_0 = \{1,0,0,\ldots\}$ не является более состоянием с наинизшей энергией, поскольку

$$(P^0\Psi)^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} p_j^0\right)\Psi^{(n)}(p_1, \ldots, p_n)$$

не будет более положительным оператором. Операторы рождения и уничтожения определяются так:

$$(a(p)\Psi)^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = \sqrt{n+1}\,\Psi^{(n+1)}(p, p_1, \ldots, p_n),$$

$$(a^*(p)\Psi)^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\delta(\mathrm{p} - \mathrm{p}_j)\,\delta_{\operatorname{sgn} p^0,\, \operatorname{sgn} p_j^0} \times$$
$$\times (-1)^{j+1}\Psi^{(n-1)}(p_1, \ldots, \hat{p}_j, \ldots, p_n). \qquad (4.58)$$

Они удовлетворяют соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} &[a(p),\, a(q)]_+ = 0,\\ &[a(p),\, a^*(q)]_+ = \delta(p^2 - q^1)\,\delta_{\operatorname{sgn} p^0,\, \operatorname{sgn} q^0}\,|p^0|,\\ &a(p)\,\Psi_0 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.59)$$

для всех p и q.

Поле Дирака определяется формулой

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int d\Omega_m(p)\,a(p)\,u(p)\,e^{-ipx}, \qquad (4.60)$$

где опять допускаются оба знака p^0. Для такого оператора $\psi(x)$ справедлив обычный закон преобразования спинорного поля

$$U(a,\, A)\,\psi(x)\,U^{-1}(a,\, A) = S(A^{-1})\,\psi(\Lambda(A)\,x + a).$$

Однако в противоположность ситуации в теории, удовлетворяющей спектральному условию, здесь имеет место свойство

$$\psi(x)\Psi_0 = 0.$$

Билинейные величины, подобные

$$\int d^2x f(x)\,\psi^+(x)\,i\gamma^\mu\psi(x),$$

в этом нефизическом мире имеют смысл без всякого упорядочения по Вику, как это нетрудно видеть из их определения в пространстве Фока:

$$\left(\int d^2x f(x)\,\psi^+(x)\,i\gamma^\mu\psi(x)\,\Psi\right)^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) =$$

$$= \left(\int d\Omega_0(p)\,d\Omega_0(q)\,c^*(p)\,c(q)\,\tilde{f}(-(p-q))\,u^+(p)\,i\gamma^\mu\,u(q)\,\times\right.$$

$$\left.\times\,\Psi\right)^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\left(\int d\Omega_0(q)\,\tilde{f}(-(p_j - q))\,\times\right.$$

$$\left.\times\,u^+(p_j)\,i\gamma^\mu u(q)\,\Psi\right)^{(n)}(q, p_1, \ldots, \hat{p}_j, \ldots, p_n). \qquad (4.61)$$

Так же, как и в ν-теории фононов, в данном случае можно сконструировать такие ρ и σ, что

$$j^\mu(x) = \pi^{-1/2}\partial^\mu\rho(x), \quad k^\mu(x) = \pi^{-1/2}\partial^\mu\sigma(x).$$

Возникнут и сходные инфракрасные трудности, которые можно преодолеть с помощью такой же техники.

Можно вычислить коммутатор

$$[j^0(x)+j^1(x), \quad j^0(y)+j^1(y)]_- \tag{4.62}$$

и убедиться в том, что он *не равен* нулю. Это означает, что большинство манипуляций, осуществленных Глазером (предполагавшим, что этот коммутатор обращается в нуль) с токами свободного поля в этом нефизическом мире, не законно. В результате возникают три возможности:

1) Этот коммутатор обращается в нуль для точного решения, хотя это не так для свободного поля (очень маловероятно, поскольку результат для свободного поля является пределом результата для взаимодействующего поля, когда константа связи стремится к нулю);

2) полученное решение правильно, хотя метод его получения не верен;

3) полученное решение отнюдь не есть решение.

Я утверждаю, что в действительности реализуется третья возможность *). Существенную роль играет здесь тот факт, что формула (4.57) не определяет локального поля, поскольку ρ и σ не локальны ни друг относительно друга (см. (4.50)!), ни относительно $\psi^{(0)}$. Конечно, чтобы выражение (4.57) было полностью хорошо определено, необходимо определить в этом нефизическом мире соответствующую «упорядоченную по Вику» экспоненту, но это не приведет к локальности ψ. Необходимый расчет, позволяющий в этом убедиться, будет приведен в нашей последующей дискуссии.

Следующий этап в построении Тирринга — Глазера связан с переинтерпретацией входящих в (4.57) операторов в терминах реального физического мира (оператор $c(p)$ с $p^0<0$ переписывают как $b^*(-p)$ и интерпретируют как оператор рождения античастицы с импульсом

---

*) См. в связи с этим работы: А. В. Астахов, ДАН СССР 174, 771 (1967); А. В. Астахов, О. И. Завьялов, А. Д. Суханов, ЖЭТФ 52, 780 (1967). (*Прим. перев.*)

p^1). Эта процедура не приводит к локальности оператора (4.57), но, как подчеркивал Скарф, она оказывает сильное влияние на оператор тока. Выражение типа $\psi^+(x)\,\psi(x)$ в нефизическом мире определено вполне хорошо, однако для придания ему смысла в переинтерпретированной теории могут потребоваться тонкие предельные переходы. Это означает, что уравнения движения, которым удовлетворяет оператор поля после переинтерпретации, могут быть иными.

Имеется еще один существенный момент в такой переинтерпретации: важно сохранить следы локальных свойств рассматриваемых операторов, и в то же время нельзя беспечно полагать, что обычное виково упорядочение основных фермионных операторов — это как раз правильная процедура, позволяющая этого добиться. Чтобы проиллюстрировать этот вопрос, рассмотрим проблему определения n-й степени псевдоскалярного поля σ. С этой целью можно попытаться вычесть из произведения $\sigma(x_1)\ldots\sigma(x_n)$ вакуумные средние операторов так, чтобы все сингулярности в точке совпадения аргументов сократились. Оказывается, что эта процедура приводит к выражению, совершенно непохожему на обычное виково упорядочение. Поэтому, следуя А. Джаффе, мы введем для такой конструкции обозначение $\vdots\ldots\vdots$

$$\vdots\,\sigma(x_1)\,\sigma(x_2)\,\vdots = \sigma(x_1)\,\sigma(x_2) - (\Psi_0,\ \sigma(x_1)\,\sigma(x_2)\,\Psi_0), \quad (4.63)$$

$$\vdots\,\sigma^2\,\vdots\,(x) = \lim_{x_1,\ x_2\to x}\ \vdots\,\sigma(x_1)\,\sigma(x_2)\,\vdots\,, \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned}\vdots\,\sigma(x_1)\,\sigma(x_2)\,\sigma(x_3)\,\vdots &= \sigma(x_1)\,\sigma(x_2)\,\sigma(x_3) - \\ &- (\Psi_0,\ \sigma(x_1)\,\sigma(x_2)\,\Psi_0)\,\sigma(x_3) - (\Psi_0,\ \sigma(x_1)\,\sigma(x_3)\,\Psi_0)\,\sigma(x_2) - \\ &- (\Psi_0,\ \sigma(x_2)\,\sigma(x_3)\,\Psi_0)\,\sigma(x_1),\end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\vdots\,\sigma^3\,\vdots\,(x) = \lim_{x_1,\ x_2,\ x_3\to x}\ \vdots\,\sigma(x_1)\,\sigma(x_2)\,\sigma(x_3)\,\vdots \quad (4.66)$$

и вообще индуктивно

$$\begin{aligned}\vdots\,\sigma(x_1)\ldots\sigma(x_n)\,\vdots &= \sigma(x_1)\ldots\sigma(x_n) - \\ &- \sum_{r=1}^{n}\sum_{P}(\Psi_0,\ \sigma(x_{i_1})\ldots\sigma(x_{i_r})\,\Psi_0)\,\vdots\,\sigma(x_{j_1})\ldots\sigma(x_{j_{n-r}})\,\vdots\,,\end{aligned} \quad (4.67)$$

где сумма $\sum_P$ берется по всем разбиениям индексов $1, \ldots, n$ на различные группы $i_1, \ldots, i_r$, $j_1, \ldots, j_{n-r}$, причем $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-r}$ и $1 \leqslant r \leqslant n$. Тогда

$$\vdots \sigma^n \vdots (x) = \lim_{x_1, \ldots, x_n \to x} \vdots \sigma(x_1) \ldots \sigma(x_n) \vdots . \qquad (4.68)$$

Конечно, a priori нет никакой гарантии того, что такое определение приводит к хорошо определенному полю $\vdots \sigma^n \vdots$. Для некоторых σ это будет так, а для некоторых нет.

После работ (Thirring, 1958; Glaser, 1958; Pradhan, 1958; Scarf, 1959a) теория модели Тирринга находилась в чрезвычайно запутанном состоянии. Не было ясно, какие из многих, часто взаимно противоречивых уравнений, выписанных различными авторами, истинны, а какие ложны. В этот момент К. Джонсон пересмотрел всю теорию с совершенно другой точки зрения. Он настаивал на существовании сохраняющихся тока j и псевдотока k и задался вопросом: какими перестановочными соотношениями со спинорным полем ψ они должны обладать, чтобы соответствующие заряды генерировали калибровочные преобразования спинорного поля? Тем самым ему пришлось предположить (для неперенормированных полей), что

$$\left.\begin{aligned} [\psi(x),\ j^0(y)]_- &= a\delta(x^1 - y^1)\,\psi(x), \\ [\psi(x),\ k^0(y)]_- &= \bar{a}\delta(x^1 - y^1)\,\gamma^5\psi(x). \end{aligned}\right\} \qquad (4.69)$$

В результате, зная эти соотношения и законы сохранения, он выразил вершинную функцию Грина $(\Psi_0, (j_\mu(x_1), \psi(x_2), \psi^+(x_3))_+ \Psi_0)$ через константы a, $\bar{a}$ и однофермионную функцию Грина $(\Psi_0, (\psi(x_1), \psi(x_2))_+ \Psi_0)$. Аналогичным образом он выразил функцию Грина вида $(\Psi_0, (j_\mu(x_1), \psi(x_2), \psi(x_3), \psi(x_4), \psi^+(x_5))_+ \Psi_0)$ через a, $\bar{a}$ и двуфермионную функцию Грина $(\Psi_0, (\psi(x_1)\,\psi(x_2)\,\psi^+(x_3)\,\psi^+(x_4))_+ \Psi_0)$. Затем, используя уравнение движения

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = \lambda \lim_{y \to x} \frac{1}{2} [j^\mu(x),\ i\gamma_\mu \psi(y)]_+, \qquad (4.70)$$

он получил явные выражения для одно- и двуфермионных функций Грина в зависимости от a и $\bar{a}$, не конкретизировав предельную процедуру, необходимую для определения $j^\mu(x)$ через ψ и ψ^+. В этом случае представление о том, что $j^\mu(x)$ — это каким-то образом определенный предел выражения $\psi^+(x)i\gamma^\mu\psi(y)$, естественно приводит к определению (для перенормированного тока, выраженного через перенормированные поля)

$$j^\mu(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \tilde{\varepsilon}\to 0}} \frac{1}{2}[j^\mu(x, \varepsilon) + j^\mu(x, \tilde{\varepsilon})](\varepsilon^2)^\alpha, \tag{4.71}$$

где

$$\varepsilon^2 = -\tilde{\varepsilon}^2,\ \varepsilon\cdot\tilde{\varepsilon} = 0, \quad \alpha = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2\left[1-\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2\right]^{-1}$$

и

$$j^\mu(x, \varepsilon) = \frac{1}{2}[\psi^+(x, \varepsilon)\, i\gamma^\mu\psi(x) - \psi(x)(\psi^+(x, -\varepsilon)\, i\gamma^\mu)]. \tag{4.72}$$

Требования совместности приводят к

$$a = \left[1-\frac{\lambda}{2\pi}\right]^{-1}, \quad \bar{a} = \left[1+\frac{\lambda}{2\pi}\right]^{-1}. \tag{4.73}$$

Такую процедуру в принципе можно было бы использовать для получения явных выражений для всех функций Грина. Позднее Клайбер (Klaiber, 1964) выписал общую формулу для соответствующих вакуумных средних

$$\begin{aligned}(\Psi_0, \psi(x_1)\ldots\psi(x_n)\psi^+(y_1)\ldots\psi^+(y_n)\Psi_0) =\\ = \prod_{j<k}\exp\left(-\lambda a\frac{1}{i}\Delta^{(+)}(0, x_j-x_k)\right)\times\\ \times\prod_{j<k}\exp\left(-\lambda a\frac{1}{i}\Delta^{(+)}(0, y_j-y_k)\right)\times\\ \times\prod_{j,k}\exp\left(-\lambda a\frac{1}{i}\Delta^{(+)}(0, x_j-y_k)\right)\times\\ \times\prod_{j<k}\exp\left(+\lambda\bar{a}\gamma^5_{x_j}\gamma^5_{x_k}i^{-1}\Delta^{(+)}(0, x_j-x_k)\right)\times\\ \times\prod_{j<k}\exp\left(+\lambda\bar{a}\gamma^5_{y_j}\gamma^5_{y_k}i^{-1}\Delta^{(+)}(0, y_j-y_k)\right)\times\end{aligned}$$

$$\times \prod_{j,k} \exp\left(+\lambda \bar{a} \gamma^5_{x_j} \gamma^5_{y_k} i^{-1} \Delta^{(+)}(0, x_j - y_k)\right) \times$$
$$\times (\Psi_0, \psi^{(0)}(x_1) \ldots \psi^{(0)}(x_n) \psi^{(0)+}(y_1) \ldots \psi^{(0)+}(y_n) \Psi_0), \quad (4.74)$$

и доказал, что они являются обобщенными функциями, аналитичными по константе связи λ для всех комплексных λ, исключая $\lambda = \pm 2\pi$.

Можно непосредственно проверить *), что для таких вакуумных средних имеют место операторные уравнения движения (4.70) в том смысле, что

$$(\Phi, \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \Psi) = \lambda \lim_{y \to x} \left(\Phi, \frac{1}{2} [j^\mu(x), i\gamma_\mu \psi(y)]_+ \Psi\right), \quad (4.75)$$

где Φ и Ψ — произвольные состояния вида $\mathcal{P}\Psi_0$, а $\mathcal{P}$ — полином по сглаженным полям ψ и ψ^+.

Подробное исследование Клайбера позволило установить, что такие вакуумные средние удовлетворяют всем гипотезам, необходимым для применения теоремы реконструкции, исключая, быть может, требование положительной определенности. То обстоятельство, что требование положительной определенности приводит к нетривиальным ограничениям, очевидно уже из джонсонова выражения для однофермионной функции Грина: для значений λ вне интервала $-2\pi < \lambda < 2\pi$ состояния $\psi(f)\Psi_0$ при соответствующем выборе f дают $(\psi(f)\Psi_0, \psi(f)\Psi_0) < 0$. Насколько мне известно, непосредственно из (4.74) никто пока не смог доказать, что условие $-2\pi < \lambda < 2\pi$ достаточно для выполнения $(\mathcal{P}\Psi_0, \mathcal{P}\Psi_0) \geqslant 0$ для всех состояний $\mathcal{P}\Psi_0$, где $\mathcal{P}$ — полином по сглаженным полям. Как уже отмечалось ранее, формулы Джонсона показывают, что фермионы в этой теории являются инфрачастицами.

С точки зрения данных лекций в качестве исходного пункта естественно выбрать формулу (4.74) для вакуумных средних и постараться определить гильбертово пространство и операторы, приводящие к таким формулам. Оказывается, что сделать это очень просто, причем однов-

---

*) Я благодарен А. Джаффе за выполнение этой трудной работы.

ременно удается выяснить, почему вакуумные средние вида (4.74) так просты по структуре. Пусть φ_1 — свободное скалярное поле нулевой массы, определенное на $V_{\mathscr{S}}^{(1)}$, снабженном полуторалинейной формой $\{\ ,\ \}_1$, определенной так же, как и в примере 2. Пусть φ_2 — другое такое свободное поле нулевой массы, но определенное так, что оно удовлетворяет перестановочным соотношениям

$$[\varphi_2(x), \varphi_2(y)]_- = -\frac{1}{i}\Delta(0, x-y)$$

(обращаем внимание на лишний знак минус в правой части равенства). Оператор φ_2 определен на $V_{\mathscr{S}}^{(2)}$, снабженном полуторалинейной формой $\{\ ,\ \}_2$, смысл которой вскоре станет ясен. Пусть $\psi^{(0)}$ — свободное спинорное поле нулевой массы, определенное на $\mathscr{H}^{(3)}$, снабженном скалярным произведением $(\ ,\ )_3$. Для простоты будем считать, что $0 \leqslant \lambda < 2\pi$. Тогда поле ψ, определенное выражением

$$\psi(x) = :\exp(f_1\varphi_1):(x):\exp(f_2\gamma^5\varphi_2):(x)\,\psi^{(0)}(x) \tag{4.76}$$

с

$$f_1 = i\,|\lambda|^{1/2}a^{-1/2},\quad f_2 = i\,|\lambda|^{1/2}\bar{a}^{-1/2},$$

будет определено в $V_{\mathscr{S}}^{(1)} \times V_{\mathscr{S}}^{(2)} \times \mathscr{H}^{(3)}$, снабженном полуторалинейной формой $\{\ ,\ \}$, построенной обычным образом из $\{\ ,\ \}_1$, $\{\ ,\ \}_2$ и $(\ ,\ )_3$. Здесь следует считать, что γ^5 действует на двузначный индекс $\psi^{(0)}$. В этом пространстве есть вакуум $\Psi_0 = \Psi_0^{(1)} \times \Psi_0^{(2)} \times \Psi_0^{(3)}$, а вакуумные средние

$$\begin{aligned}
&\{\Psi_0, \psi(x_1)\ldots\psi(x_n)\,\psi^+(y_1)\ldots\psi^+(y_n)\,\Psi_0\} = \\
&\quad = \{\Psi_0^{(1)} :\exp(f_1\varphi_1):(x_1)\ldots:\exp(f_1\varphi_1):(x_n)\,\times \\
&\quad \times :\exp(\bar{f}_1\varphi_1):(y_1)\ldots:\exp(\bar{f}_1\varphi_1):(y_n)\,\Psi_0^{(1)}\}_1 \times \\
&\quad \times \{\Psi_0^{(2)}, :\exp(f_2\gamma_{x_1}^5\varphi_2):(x_1)\ldots:\exp(f_2\gamma_{x_n}^5\varphi_2):(x_n)\,\times \\
&\quad \times :\exp(-\bar{f}_2\gamma_{y_1}^5\varphi_2):(y_1)\ldots:\exp(-\bar{f}_2\gamma_{y_n}^5\varphi_2):(y_n)\,\Psi_0^{(2)}\}_2 \times \\
&\quad \times (\Psi_0^{(3)}, \psi^{(0)}(x_1)\ldots\psi^{(0)}(x_n)\,\psi^{(0)+}(y_1)\ldots\psi^{(0)+}(y_n)\,\Psi_0^{(3)})_3
\end{aligned} \tag{4.77}$$

в точности совпадают с вакуумными средними вида (4.74).

Полуторалинейная форма $\{\ ,\ \}_2$, которую мы обещали определить, выбирается так, чтобы

$$\{\Psi_0^{(2)}, \varphi_2(x_1)\ldots\varphi_2(x_n)\Psi_0^{(2)}\}_2 = \begin{cases} 0, & n \text{ — нечетное,} \\ [1\ldots n], & n \text{ — четное,} \end{cases}$$

где $[1\ldots n]$ — гафниан, определенный выше сразу после формулы (4.8), и

$$[jk] = -\frac{1}{i}\Delta^{(+)}(0, x_j - x_k).$$

Для реализации этих свойств в пространстве Фока требуется лишь слегка изменить стандартный формализм. Опять, как и в примере 2, в качестве $V_{\mathcal{F}}^{(2)}$ выберем пространство последовательностей $\{\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \ldots\}$, однако теперь определим

$$\{\Phi, \Psi\}_2 = \overline{\Phi}^{(0)}\Psi^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int\ldots\int d\omega(p_1)\ldots d\omega(p_n) \times$$
$$\times \overline{\Phi}^{(n)}(p_1, \ldots, p_n)\Psi^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) \qquad (4.78)$$

и

$$(\varphi_2(f), \Psi)^{(n)}(p_1, \ldots, p_n) =$$
$$= \sqrt{\pi}\Big\{\sqrt{n+1}\int d\omega(p)\tilde{f}(p)\Psi^{(n+1)}(p, p_1, \ldots, p_n) -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\tilde{f}(-p_j)\Psi^{(n-1)}(p_1, \ldots, \hat{p}_j, \ldots, p_n)\Big\}.$$

Нетрудно проверить, что эти формулы приводят к выражениям для вакуумных средних, приведенным выше.

Если $-2\pi < \lambda \leqslant 0$, то следует $\{\ ,\ \}_1$ и $\{\ ,\ \}_2$ поменять ролями, сделав неопределенной первую, а не последнюю форму.

Формула (4.76) предоставляет нам одно из объяснений простоты модели Тирринга. Из нее следует, что при вложении гильбертова пространства теории в более широкое пространство в этом более широком пространстве можно определить тривиальные поля, сужение которых на требуемое подпространство и приводит к решению. С другой стороны, формула (4.76) оставляет абсолютно таинственным вопрос об условиях положительной определенности.

После того как Джонсон дал свое решение модели Тирринга, Скарф и Весс вновь исследовали проблему нахождения явной зависимости этого решения от свободных полей. Эта проблема была ими решена путем использования двух свободных полей, удовлетворяющих относительно простым перестановочным соотношениям. Я не буду воспроизводить здесь их результаты. Если игнорировать (как это делали они) проблему определения соответствующего обобщенного викова упорядочения, то можно найти гораздо более простое решение, на что впервые явно указал Лойтвайлер (Leutwyler, 1965). Отметим, что $\gamma^\mu j_\mu = -\gamma^5\gamma^\mu k_\mu$, где $k^0 = j^1$, $k^1 = j^0$. Тем самым комплекснозначное поле ψ вида

$$\psi(x) = \exp\left(\frac{i}{\sqrt{\pi}}(c_1\rho(x) + c_2\gamma^5\sigma(x))\right)\psi^{(0)}(x) \qquad (4.79)$$

удовлетворяет (4.54) с тем же успехом, что и поле Глазера вида (4.57), при условии, что $c_1 + c_2 = \lambda$.

[Здесь уместно процитировать недавнее высказывание Вайтмана (Wightman, 1966) по поводу модели Тирринга: «В теории модели Тирринга имеется два открытых вопроса. Первый состоит в том, чтобы дать математически строгую версию оригинального решения Глазера. Предполагаемая формула, которая, как мне кажется, должна быть правильной, была предложена Лойтвайлером *):

$$\psi(x) = \exp\{i[c_1(\lambda)\rho^{(+)}(x) + c_2(\lambda)\gamma^5\sigma^{(+)}(x)]\}\psi^{(0)}(x)\times$$
$$\times\exp\{i[c_1(\lambda)\rho^{(-)}(x) + c_2(\lambda)\gamma^5\sigma^{(-)}(x)]\},$$

где $\psi^{(0)}(x)$ — свободное спинорное поле нулевой массы, а $\rho^{(\pm)}$, $\sigma^{(\pm)}$ — положительно и отрицательно частотные части операторов ρ, σ, которые в свою очередь являются полями, удовлетворяющими соотношениям

$$\partial^\mu\rho = j^\mu, \quad \partial^\mu\sigma = \varepsilon^{\mu\nu}j_\nu.$$

Здесь

$$j^\mu(x) = :\psi^+ i\gamma^\mu\psi:(x).$$

*) См. (Leutwyler, 1965) и частные сообщения.

Доказательство того, что эта формула действительно определяет поле, все еще не завершено. Если, как я надеюсь, его удастся осуществить, то данная формула открывает путь для доказательства того, что метрика гильбертова пространства в стандартном джонсоновом решении модели Тирринга в действительности положительно определенна. Это и есть второй открытый вопрос, который я имел в виду». (*Прим. перев.*)]

Возникает вопрос: если ρ и σ образованы стандартным способом из свободного спинорного поля нулевой массы по формулам (4.46), (4.47), то при каком выборе c_1 и c_2 поле ψ будет локальным? (Очевидно, этот выбор скорее всего приведет к нетривиальному условию на c_1 и c_2, поскольку ни одна пара среди полей $\psi^{(0)}$, ρ и σ не является относительно локальной.)

Для выполнения такого расчета нам потребуются две формулы из ν-теории фононов, которые не были выписаны нами выше:

$$[\psi(x), \rho(y)]_- = \sqrt{\pi}\,[\Delta(x-y) + \gamma^5\tilde{\Delta}(x-y)]\,\psi(x) \qquad (4.80)$$

и

$$[\psi(x), \sigma(y)]_- = \sqrt{\pi}\,[\gamma^5\Delta(x-y) + \tilde{\Delta}(x-y)]\,\psi(x). \qquad (4.81)$$

Далее из (4.80) и (4.81) формально получаем

$$\exp\left(-\frac{i}{\sqrt{\pi}}(c_1\rho(x) + c_2\gamma^5\sigma(x))\right)\psi^{(0)}(x)\times$$

$$\times\exp\left(\frac{i}{\sqrt{\pi}}(c_1\rho(y) + c_2\gamma^5\sigma(y))\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(\pi)^{n/2}n!}\times$$

$$\times[\cdots[\psi^{(0)}(x), c_1\rho(y) + c_2\gamma_y^5\sigma(y), \ldots, c_1\rho(y) + c_2\gamma_y^5\sigma(y)]] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}[(c_1 - c_2\gamma_x^5\gamma_y^5)\,\Delta(x-y) + (c_1\gamma_x^5 - c_2\gamma_y^5)\times$$

$$\times\tilde{\Delta}(x-y)]^n\psi^{(0)}(x) = \exp(-i\,[(c_1 - c_2\gamma_x^5\gamma_y^5)\,\Delta(x-y) +$$

$$+ (c_1\gamma_x^5 - c_2\gamma_y^5)\,\tilde{\Delta}(x-y)])\,\psi^{(0)}(x),$$

а из (4.50)

$$\exp\left(\frac{i}{\sqrt{\pi}}(c_1\rho(x)+c_2\gamma_x^5\sigma(x))\right)\exp\left(\frac{i}{\sqrt{\pi}}(c_1\rho(y)+c_2\gamma_y^5\sigma(y))\right)\times$$
$$\times\exp\left(\frac{-i}{\sqrt{\pi}}(c_1\rho(x)+c_2\gamma_x^5\sigma(x))\right)=$$
$$=\exp\left(-\frac{i}{\pi}c_1c_2(\gamma_x^5+\gamma_y^5)\widetilde{\Delta}(x-y)\right)\exp\frac{i}{\sqrt{\pi}}(c_1\rho(y)+c_2\gamma_y^5\sigma(y)).$$

Тем самым

$$\psi(x)\,\psi(y)=-\exp(-iF(x,\,y))\,\psi(y)\,\psi(x),$$

где

$$F(x,y)=2(c_1-c_2\gamma_x^5\gamma_y^5)\,\Delta(x-y)+$$
$$+\widetilde{\Delta}(x-y)\left[\frac{c_1c_2}{\pi}(\gamma_x^5+\gamma_y^5)+(c_1\gamma_x^5-c_2\gamma_y^5)+(c_1\gamma_y^5-c_2\gamma_x^5)\right].$$

Для локальности поля ψ необходимо и достаточно, чтобы

$$c_1-c_2+\frac{c_1c_2}{\pi}=0.$$

Это условие также оказывается необходимым и достаточным для выполнения равенства

$$[\psi(x),\,\psi^+(y)]_+=0\quad\text{при}\quad(x-y)^2<0. \tag{4.82}$$

Полученное соотношение совместно с $c_1+c_2=\lambda$ позволяет определить зависимость c_1 и c_2 от λ:

$$\begin{aligned}c_1&=\frac{1}{2}\left(\lambda+2\pi\pm\sqrt{\lambda^2+4\pi^2}\right),\\ c_2&=\frac{1}{2}\left(\lambda-2\pi\mp\sqrt{\lambda^2+4\pi^2}\right)\end{aligned} \tag{4.83}$$

или, если ввести новый параметр Λ с помощью $\operatorname{sh}\Lambda=\lambda/2\pi$,

$$c_1=\pi\begin{cases}e^{\Lambda}+1,\\ e^{-\Lambda}+1,\end{cases}\qquad c_2=\pi\begin{cases}e^{-\Lambda}-1,\\ e^{\Lambda}-1.\end{cases} \tag{4.84}$$

По моему мнению, формулы (4.79) и (4.83) представляют собой правильное осуществление оригинальной идеи Глазера. Однако очевидно, что они не являются математически приемлемыми утверждениями. Необходимо еще выделить из (4.79) конечную часть

$$\psi(x) = \vdots \exp\left(\frac{i}{\sqrt{\pi}}(c_1(\lambda)\rho + c_2(\lambda)\gamma^5\sigma)\right)\psi^{(0)} \vdots (x), \qquad (4.85)$$

определив соответствующим образом $\vdots \ldots \vdots$, и при этом не разрушить условие локальности (4.82). Здесь это делаться не будет.

Формула, подобная (4.85), казалось бы, должна была явиться хорошей отправной точкой для доказательства справедливости условий положительной определенности в модели Тирринга. Можно изменить ρ и σ, введя некоторую массу с тем, чтобы введение инфракрасной индефинитной метрики было не обязательно, но в то же время так, чтобы вакуумные средние в пределе нулевой массы сходились бы к вакуумным средним модели Тирринга.

Пример 5

Векторные мезоны, взаимодействующие с фермионами нулевой массы. Самые ранние работы по этой модели были выполнены Бялницким-Бирула (Bialnicki-Birula, 1958) и Глазером и Якшичем (Glaser, Iakšić, 1959). В них они следовали методу, использованному Глазером в его работе о модели Тирринга. Так что вся критика, высказанная выше в связи с той работой, применима и здесь.

Эта модель была вновь исследована рядом авторов в связи с проблемой массы частиц, связанных с калибровочным полем (Boulware, Gilbert, 1962; Schwinger, 1963; Brown, 1963; Sommerfield, 1963). Некоторые из этих работ были выполнены в так называемой кулоновой калибровке, некоторые — в лоренцевой калибровке. Некоторые авторы имели дело с семейством функций Грина, а некоторые — с операторами поля, наконец, некоторые авторы рассматривали только такие теории, в которых голая масса векторного мезона считается равной нулю, а другие — общий случай.

С обсуждаемой здесь точки зрения наипростейшую формулировку этой модели нашли Тирринг и Весс (Thirring, Wess, 1964). Соответствующая формула представляет собой полный аналог формулы (4.76) для модели

Тирринга. Она выражает операторы поля в модели в зависимости от набора свободных полей, часть которых опять-таки действует в гильбертовом пространстве с индефинитной метрикой.

Итак, допустим, что a_μ, b, B, C и $\psi^{(0)}$ — независимые свободные поля, удовлетворяющие соотношениям

$$\left.\begin{aligned}
&(\Box+\mu^2)\,a_k(x)=0,\quad \partial^k a_k(x)=0,\\
&\qquad [a_k(x),\,a_\lambda(y)]_-=g_{k\lambda}\frac{1}{i}\Delta(\mu,\,x-y),\\
&\Box\, b(x)=0,\quad [b(x),\,b(y)]_-=\frac{1}{i}\Delta(0,\,x-y),\\
&(\Box+\mu_0^2)\,B(x)=0,\quad [B(x),\,B(y)]_-=\\
&\qquad =-\frac{1}{i}\Delta(\mu_0,\,x-y),\\
&\Box\, C(x)=0,\quad [C(x),\,C(y)]_-=-\frac{1}{i}\Delta(0,\,x-y),\\
&\gamma^\mu\partial_\mu\psi^{(0)}(x)=0,\quad [\psi(x),\,\psi(y)]_+=0,\\
&\qquad [\psi(x),\,\psi^+(y)]_+=\frac{1}{i}S(0,\,x-y).
\end{aligned}\right\}\tag{4.86}$$

Очевидно, что поля B и C следует понимать в неортодоксальном духе, описанном в (4.78). Решение модели задается формулами

$$\left.\begin{aligned}
&A_k(x)=a_k(x)+\frac{1}{\mu}\varepsilon_{k\lambda}\partial^\lambda c(x)+\\
&\qquad\qquad +\frac{1}{\mu_0}(\partial_k B(x)+\partial_k b(x)),\\
&\psi(x)=:\exp\left[i\left(-\frac{\gamma^5}{\mu}(\varepsilon^{k\lambda}\partial_k a_\lambda+C)-\right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left.-\frac{1}{\mu_0}(B+b)\right]:(x)\,\psi^{(0)}(x)
\end{aligned}\right\}\tag{4.87}$$

в том смысле, который обсуждался выше в связи с моделью Тирринга. Именно правые части этих формул дают вакуумные средние в модели*).

*) Это утверждение справедливо только при μ_0, $\mu\neq 0$. Не исключено, что аналогичные формулы имеют место и в случае нулевой массы.

Так же, как и в случае модели Тирринга, из существования операторного решения (4.87) немедленно следует существование набора вакуумных средних, которые являются обобщенными функциями умеренного роста, удовлетворяют спектральному условию и обладают правильными трансформационными свойствами относительно группы Пуанкаре. Однако, как и прежде, остается открытым вопрос, удовлетворяют ли скалярные произведения, построенные с помощью вакуумных средних, условиям положительной определенности. В данный момент проблема остается открытой. Исследование этой проблемы в кулоновой калибровке делает очень вероятной перспективу того, что эта теория удовлетворяет условиям положительной определенности.

Между прочим, Соммерфильд показал, что модель Тирринга и рассматриваемую сейчас модель можно скомбинировать. Он провел подробное изучение проблемы возможных определений тока и псевдотока для такой комбинированной системы во внешних полях.

Пример 6

Модель Федербуша. В ходе эвристической дискуссии, приведшей к построению полей ρ и σ в ν-теории фононов, отмечалось, что в двумерном пространстве-времени равенство $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$ эквивалентно $\partial_0 k_1 - \partial_1 k_0 = 0$, а равенство $\partial^\mu k_\mu(x) = 0$ эквивалентно $\partial_0 j_1 - \partial_1 j_0 = 0$. Далее для свободного поля Дирака ненулевой массы в двумерном пространстве-времени $\partial^\mu j_\mu = 0$ и $\partial^\mu k_\mu = -2mi :\psi^+\gamma^5\psi:$. Тем самым можно было бы ожидать, что поле σ, удовлетворяющее равенству $k^\mu(x) = \partial^\mu\sigma(x)$, в этом случае должно существовать, даже если ни одного поля ρ, удовлетворяющего равенству $j^\mu(x) = \partial^\mu\rho(x)$, не существует. В действительности это так и есть. Аналогом (4.44) будет выражение

$$
\begin{aligned}
:\psi^+ i\gamma^5\gamma^\mu\psi:(x) = \frac{1}{2\pi}\iint d\Omega_m(p)\, d\Omega_m(q)\, \times \\
\times\, [a(p)^* a(q)\, u^+(p)\, i\gamma^5\gamma^\mu u(q) \exp(i(p-q)x) - \\
- b(q)^* b(p)\, u^{c+}(p)\, i\gamma^5\gamma^\mu u(q) \exp(-i(p-q)x) + \\
+ a(p)^* b(q)^*\, u^+(p)\, i\gamma^5\gamma^\mu u^c(q) \exp(i(p+q)x) + \\
+ b(p)\, a(q)\, u^{c+}(p)\, i\gamma^5\gamma^\mu u(q) \exp(-i(p+q)x)], \quad (4.88)
\end{aligned}
$$

а подробный расчет, в котором используется представление (4.45), приводит к

$$\left.\begin{aligned} &u^+(p)\, i\gamma^5\gamma^\mu u(q) = u^{c+}(p)\, i\gamma^5\gamma^\mu u^c(q) = \\ &\qquad = -m \operatorname{sgn}\det(p, q)\,|(p-q)^2|^{-1/2}(p-q)^\mu, \\ &u^+(p)\, i\gamma^5\gamma^\mu u^c(q) = u^{c+}(p)\, i\gamma^5\gamma^\mu u(q) = \\ &\qquad = m\,|(p+q)^2|^{-1/2}(p+q)^\mu. \end{aligned}\right\} \tag{4.89}$$

Эти последние формулы обнаруживают как раз ту зависимость от импульсов ($p \pm q$), которая соответствует зависимости, появляющейся в экспонентах в (4.88). Тождество, делающее это возможным, имеет вид

$$p-q = -|(p-q)^2|^{1/2}|(p+q)^2|^{-1/2} \operatorname{sgn}\det(p, q)\begin{pmatrix} p^1+q^1 \\ p^0+q^0 \end{pmatrix}. \tag{4.90}$$

Тем самым очевидной кандидатурой на роль σ будет оператор

$$\begin{aligned} \sigma(x) = \frac{im}{\sqrt{2\pi}} \iint d\Omega_m(p)\, d\Omega_m(q)\, [a(p)^* a(q)\,|(p-q)^2|^{-1/2} \times \\ \times \operatorname{sgn}\det(p, q) \exp(i(p-q)x) + \\ + b(q)^* b(p)\,|(p-q)^2|^{-1/2} \operatorname{sgn}\det(p, q) \exp(-i(p-q)x) + \\ + a(p)^* b(q)^*\,|(p+q)^2|^{-1/2} \exp(i(p+q)x) + \\ + a(q)\, b(p)\,|(p+q)^2|^{-1/2} \exp(-i(p+q)x)]. \end{aligned} \tag{4.91}$$

Нетрудно проверить, что такой оператор σ обладает относительно группы Пуанкаре трансформационными свойствами псевдоскалярного поля. То, что не так очевидно, так это вопрос о локальности поля σ. Поэтому я хотел бы обсудить его подробно. Чтобы вычислить коммутатор, удобно возвратиться к языку «додырочной» теории, введя оператор

$$c(p) = \begin{cases} a(p), & p^0 > 0, \\ b(-p)^*, & p^0 < 0. \end{cases} \tag{4.92}$$

Тогда

$$\sigma(x)=\frac{im}{2\pi}\iint d\Omega_m(p)\,d\Omega_m(q):c(p)^+c(q):\exp(i(p-q)x)\times$$
$$\times|(p-q)^2|^{-1/2}[(\theta(p^0)\theta(q^0)-\theta(-p^0)\theta(-q^0))\operatorname{sgn}\det(p,q)+$$
$$+\theta(p^0)\theta(-q^0)-\theta(-p^0)\theta(q^0)],\quad(4.93)$$

где интегрирование должно выполняться по обеим частям поверхности гиперболоида $p^2=m^2$. Коммутатор имеет вид

$$[\sigma(x),\sigma(y)]_-=-\left(\frac{m}{2\pi}\right)^2\iint d\Omega_m(p)\,d\Omega_m(s)\,c(p)^*c(s)\times$$
$$\times 2i\operatorname{Im}F(x-y)\exp\left(i\left(\frac{p-s}{2}\right)(x+y)\right),\quad(4.94)$$

где

$$F(x)=\exp\left(i\frac{p+s}{2}x\right)\int d\Omega_m(q)\,|(p-q)^2|^{-1/2}|(q-s)^2|^{-1/2}\times$$
$$\times e^{-iqx}\{\theta(p^0)\theta(s^0)[\theta(q^0)\operatorname{sgn}\det(p,q)\operatorname{sgn}\det(q,s)-$$
$$-\theta(-q^0)]+\theta(-p^0)\theta(-s^0)[\theta(-q^0)\operatorname{sgn}\det(p,q)\times$$
$$\times\operatorname{sgn}\det(q,s)-\theta(q^0)]+\theta(p^0)\theta(-s^0)[-\theta(q^0)\operatorname{sgn}\det(p,q)+$$
$$+\theta(-q^0)\operatorname{sgn}\det(q,s)]+\theta(-p^0)\theta(s^0)\times$$
$$\times[\theta(q^0)\operatorname{sgn}\det(q,s)-\theta(-q^0)\operatorname{sgn}\det(p,q)]\}.\quad(4.95)$$

Тем самым для локальности σ необходимо и достаточно, чтобы два интеграла

$$I_1=\int d\Omega_m(q)\exp\left(-i\left(q-\frac{p+s}{2}\right)x\right)|(p-q)^2|^{-1/2}\times$$
$$\times|(q-s)^2|^{-1/2}[\theta(q^0)\operatorname{sgn}\det(p,q)\operatorname{sgn}\det(q,s)-$$
$$-\theta(-q^0)]\ \text{с}\ p^0>0,\quad s^0>0\quad(4.96)$$

и

$$I_2=\int d\Omega_m(q)\,|(p-q)^2|^{-1/2}|(q-s)^2|^{-1/2}\times$$
$$\times\exp\left(-i\left(q-\frac{p+s}{2}\right)x\right)[\theta(-q^0)\operatorname{sgn}\det(q,s)-$$
$$-\theta(q^0)\operatorname{sgn}\det(p,q)]\ \text{с}\ p^0>0,\quad s^0<0\quad(4.97)$$

имели такие мнимые части, которые обращались бы в нуль, когда вектор x пространственноподобен. (Другие два случая следуют из этого.)

С помощью длинных алгебраических выкладок можно показать, что при $x^0 = 0$ эти интегралы можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}
I_1\big|_{x^0=0} &= \frac{1}{\sqrt{2m^2}}\left[p^0s^0 + p^1s^1 + m^2\right]^{-1/2} \times \\
&\qquad \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dr}{\frac{(p^1 - s^1)}{2} - r^2} \exp(irx^1), \\
I_2\big|_{x^0=0} &= \frac{1}{\sqrt{2m^2}}\left[-p^0s^0 - p^1s^1 - m^2\right]^{1/2} \operatorname{sgn}(p^1 - s^1) \times \\
&\qquad \times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dr}{\frac{(p^1 - s^1)^2}{2} - r^2} \exp(irx^1).
\end{aligned}\right\} \qquad (4.98)$$

Поскольку подынтегральные выражения в этих интегралах четны, то при $x^0 = 0$ интегралы I_1 и I_2 оказываются вещественными. Тогда в силу лоренцевой инвариантности (4.96) и (4.97) получаем, что мнимые части I_1 и I_2 обращаются в нуль для всех пространственноподобных интервалов. Тем самым поле σ локально.

В то же время поле σ не локально относительно свободного диракова поля ненулевой массы, из которого оно образовано. В самом деле,

$$\begin{aligned}
[\psi(x), \sigma(y)]_- = &-\frac{1}{4}\left[\operatorname{sgn}((x^0 - y^0) - (x^1 - y^1)) - \right. \\
&\left. - \operatorname{sgn}((x^0 - y^0) + (x^1 - y))\right] \psi(x) + \gamma^5 \Delta(x - y)\psi(y) + \\
&+ \frac{1}{2}\left[\operatorname{sgn}((x^0 - y^0) - (x^1 - y^1)) + \right. \\
&\left. + \operatorname{sgn}((x^0 - y^0) - (x^1 - y^1))\right] f(\psi),
\end{aligned} \qquad (4.99)$$

и правая часть здесь не обращается в нуль для пространственноподобных $(x - y)$. Насколько мне известно, это первый пример локального поля, построенного из свободного поля ненулевой массы, которое не принадлежит к классу эквивалентности этого свободного поля.

Доказательство формулы (4.99) можно провести так. Из определения поля σ (см. (4.93)) немедленно следует, что

$$[\psi(x), \sigma(y)] = \frac{im}{(2\pi)^{3/2}} \int d\Omega_m(q) \{\exp(-iqy)\, a(q) \int d\Omega_m(p) \times$$
$$\times \left[\frac{\exp(-ip(x-y))\, u(p) \operatorname{sgn} \det(p, q)}{\sqrt{(p-q)^2}} - \frac{\exp(ip(x-y))\, u^c(p)}{\sqrt{(p+q)^2}}\right] +$$
$$+ \exp(iqy)\, b(q)^* \int d\Omega_m(p) \times$$
$$\times \left[\frac{\exp(-ip(x-y))\, u(p)}{\sqrt{(p+q)^2}} - \frac{\exp(ip(x-y))\, u^c(p) \operatorname{sgn} \det(p, q)}{\sqrt{(p-q)^2}}\right]\Bigg\}, \tag{4.100}$$

где

$$u(p) = [2(p^0 + p^1)]^{-1/2} \begin{pmatrix} p^0 + p^1 \\ -m \end{pmatrix},$$
$$u^c(p) = [2(p^0 + p^1)]^{-1/2} \begin{pmatrix} -(p^0 + p^1) \\ -m \end{pmatrix}. \tag{4.101}$$

Используя представление

$$\left.\begin{aligned} p^0 &= m \operatorname{ch} \chi, & p^1 &= m \operatorname{sh} \chi, \\ q^0 &= m \operatorname{ch} \chi_1, & q^1 &= m \operatorname{sh} \chi_1, \end{aligned}\right\} \tag{4.102}$$

получим

$$\int d\Omega_m(p) \left[\frac{\exp(-ip(x-y)) \operatorname{sgn} \det(p, q)\, u(p)}{\sqrt{(p-q)^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\exp(ip(x-y))\, u^c(p)}{\sqrt{(p+q)^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} \exp(\chi_1/2)\, I_3 \\ \exp(-\chi_1/2)\, I_4 \end{pmatrix}, \tag{4.103}$$

где

$$I_3 = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho}{-\rho} \exp\left(-i\left(a\rho + \frac{b}{\rho}\right)\right),$$
$$I_4 = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho(1-\rho)} \exp\left(-i\left(a\rho + \frac{b}{\rho}\right)\right),$$

причем

$$a = \frac{1}{2}(q^0 + q^1)[(x^0 - y^0) - (x^1 - y^1)],$$
$$b = \frac{1}{2}(q^0 - q^1)[(x^0 - y^0) + (x^1 - y^1)].$$

Стандартная техника интегрирования по контуру приводит к выражениям

$$\left.\begin{aligned} I_3 = \frac{[\operatorname{sgn} a + \operatorname{sgn} b]}{2} \int \frac{d\rho}{1-\rho} \exp\left(-i\left(a\rho + \frac{b}{\rho}\right)\right) + \\ + i\pi \operatorname{sgn} a \exp(-i(a+b)), \\ I_4 = \frac{4\pi}{i} \Delta(m, x-y) + I_3. \end{aligned}\right\} \qquad (4.104)$$

Аналогично

$$\int d\Omega_m(p)\left[\frac{\exp(-ip(x-y))\,u(p)}{\sqrt{(p+q)^2}} - \frac{\exp(ip(x-y))\,u^c p}{\sqrt{(p-q)^2}}\right] = \\ = \frac{1}{\sqrt{2m}}\begin{pmatrix} \exp\ \ (\chi_1/2)\, I_3 \\ \exp(-\chi_1/2)\, I_4 \end{pmatrix}, \qquad (4.105)$$

откуда следует формула (4.99).

Для дальнейшего интересен и важен тот факт, что для пространственноподобных интервалов и для $x^0 = y^0$ справедливо следующее соотношение:

$$[\psi(x), \sigma(y)]_- = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x^1 - y^1)\, \psi(x) \qquad (4.106)$$

и тем самым

$$\psi(x) \vdots \exp i\lambda\sigma \vdots (y) = \exp\left(i \frac{\lambda}{2} \operatorname{sgn}(x^1 - y^1)\right) \vdots \exp i\lambda\sigma \vdots (y)\, \psi(x). \qquad (4.107)$$

Это означает, что при $x^0 = y^0$ коммутирование $\psi(x)$ и $\vdots \exp i\lambda\sigma \vdots (y)$ приводит к появлению фазового множителя.

Конечно, для полной уверенности в том, что оператор σ как поле хорошо определен, следует показать, что он может быть определен на соответствующем линейном плотном множестве в пространстве Фока, т. е. на области, которая должна быть инвариантна относительно $U(a, A)$, а под действием $\sigma(f)$ должна переходить сама в себя для всех основных функций f. Областью, достаточной для этой цели, будет набор всех Ψ, для которых амплитуда $\Psi(n_1, n_2)$, описывающая n_1 частиц и n_2 античастиц, обращается в нуль для всех достаточно больших n_1 и n_2 и принадлежит пространству $\mathcal{S}$ для всех n_1 и n_2 (или, более точно, сужение $\mathcal{S}$ на гиперболоиды $p^2=m^2$, $p^0>0$). Если векторы Φ, Ψ принадлежат этой области, то

$$(\Phi, \sigma(f)\Psi) = (\sigma(f)\Phi, \Psi). \tag{4.108}$$

Доказательство этих утверждений оставляем читателям.

Раз уж мы определили таким способом оператор σ, то естественно ввести $:\sigma^n:$ и $:\exp(i\lambda\sigma):$, как это было сделано ранее в случае нулевой массы. Мы сделаем это без каких-либо дальнейших комментариев, хотя проверка того, что эти операторы хорошо определены, связана с массой утомительной работы. Имея в своем распоряжении такой аппарат, можно описать решение модели Федербуша.

В предыдущих примерах 3, 4, 5 существенным моментом было то, что встречающееся в них поле спина 1/2 имело нулевую массу. Все уверены, что аналогичные теории с фермионами ненулевой массы гораздо более сложны. Например, модель Тирринга с фермионами ненулевой массы

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = \lambda j^\mu(x)\, i\gamma_\mu\psi(x), \qquad m>0 \tag{4.109}$$

до сих пор сопротивлялась всем попыткам точного решения. Это обстоятельство делает модель Федербуша (Federbush, 1961а, б), к обсуждению которой мы теперь переходим, еще более замечательной. Это теория с взаимодействием Ферми вида

$$\lambda j_{1\mu}(x)\, k_2^\mu(x) \equiv \lambda j_{1\mu}\,\varepsilon^{\mu\nu} j_{2\nu} \tag{4.110}$$

двух спинорных полей с массами m_1 и m_2 соответственно. Она неинвариантна относительно инверсии пространства, поскольку форма (,) — псевдоскаляр, но это не может служить сколько-нибудь серьезным аргументом против нее.

Формальные уравнения движения для ψ_1 и ψ_2 имеют вид

$$\left.\begin{aligned}(\gamma^\mu\partial_\mu + m_1)\psi_1(x) &= \lambda k_2^\mu(x)\, i\gamma_\mu\psi_1(x),\\ (\gamma^\mu\partial_\mu + m_2)\psi_2(x) &= \lambda k_1^\mu(x)\, i\gamma_\mu\psi_2(x).\end{aligned}\right\} \tag{4.111}$$

Предложенное решение таково:

$$\left.\begin{aligned}\psi_1(x) &= \vdots \exp(i\lambda\sigma_2^{(0)}) \vdots (x)\,\psi_1^{(0)}(x),\\ \psi_2(x) &= \vdots \exp(i\lambda\sigma_1^{(0)}) \vdots (x)\,\psi_2^{(0)}(x).\end{aligned}\right\} \tag{4.112}$$

Здесь $\psi_1^{(0)}$ и $\psi_2^{(0)}$ — свободные спинорные поля с массами m_1 и m_2 соответственно, а $\sigma_1^{(0)}$ и $\sigma_2^{(0)}$ — псевдоскалярные поля, построенные из них в соответствии с (,). Очевидно, что поля, определенные с помощью (,), удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned}(\gamma^\mu\partial_\mu + m_1)\,\psi_1(x) &= f_1(x) \equiv i\lambda \vdots k_2^\mu \exp(i\lambda\sigma_2^{(0)}) \vdots (x)\,\gamma_\mu\psi_1^{(0)}(x),\\ (\gamma^\mu\partial_\mu + m_2)\,\psi_2(x) &= f_2(x) \equiv i\lambda \vdots k_1^\mu \exp(i\lambda\sigma_1^{(0)}) \vdots (x)\,\psi_2^{(0)}(x).\end{aligned}\right\} \tag{4.113}$$

Далее, в оригинальной формулировке модели, данной Федербушем, правые части f_1 и f_2 этих уравнений выражаются через поля ψ_1 и ψ_2, а не через $\psi_1^{(0)}$ и $\psi_2^{(0)}$. Для придания точного смысла правым частям (4.112) необходимо задать очень сложную последовательность предельных переходов, но мы не будем воспроизводить ее здесь. Тем самым мы вновь убеждаемся в том, как сложно записать одно локальное поле в зависимости от другого, даже если основополагающая структура теории столь проста, как в (4.112). Между прочим, я не проверял, действительно ли формулы Федербуша для f_1 и f_2 справедливы для решения (4.112); единственное, что мною было сделано, так это проверка того, что такое решение приводит к тем же вакуумным средним, что и описанные у Федербуша. Тогда в тех пределах, в которых справедливы утверждения его работы, соответствующие уравнения движения имеют место.

Поскольку выражения для ψ_1 и ψ_2 содержат операторы $\sigma_i^{(0)}$, они не принадлежат к классу Борхерса свободных полей $\psi_1^{(0)}$, $\psi_2^{(0)}$. Тем самым появляется надежда на то, что эта теория приводит к S-матрице, отличной от единичной. Так оно и есть на самом деле. Непосредственное, хотя и беспорядочное применение асимптотического условия ЛШЦ приводит к

$$\psi_1^{\substack{in\\out}}(x) = \exp(\mp i\pi\lambda Q_2)\,\psi_1^{(0)}(x),$$

$$\psi_2^{\substack{in\\out}}(x) = \exp(\mp i\pi\lambda Q_1)\,\psi_2^{(0)}(x),$$

и тем самым оператор S, который удовлетворяет соотношению

$$\psi_1^{out} = S^{-1}\psi_1^{in} S, \quad \psi_2^{out} = S^{-1}\psi_2^{in} S,$$

имеет вид

$$S = \exp(2\pi \, i\lambda Q_1 \; Q_2).$$

Здесь Q_1 и Q_2 определяются равенствами

$$Q_j = \int d\sigma^\mu(x) : \psi_j^{(0)+} i\gamma_\mu \psi_j^{(0)} : (x), \quad j = 1, 2.$$

Тот факт, что подобная S-матрица не приводит к зависимости сечений рассеяния от энергии, лишает модель особого физического интереса. Однако возникает интригующая возможность попытаться получить решения в других двумерных теориях с нетривиальными S-матрицами, обобщив методы, приводящие к решению модели Федербуша.

§ 5. Общие методы построения новых теорий из старых

В алгебре существует несколько весьма общих методов построения новых алгебраических объектов из данного семейства таких объектов. Завершая обсуждение явно решаемых моделей, я перечислю несколько таких методов и кратко опишу, как они применяются в теории поля.

Прямая сумма. Из данных двух сепарабельных гильбертовых пространств $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ и соответствующих непрерывных унитарных представлений U_1 и U_2 группы Пуанкаре в них можно образовать сепарабельное гильбертово пространство

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2 \tag{5.1}$$

и прямую сумму представлений U_1 и U_2

$$U = U_1 \oplus U_2 \tag{5.2}$$

в нем.

Поля в пространстве $\mathscr{H}$ могут быть выражены через поля в пространствах $\mathscr{H}_j$ $(j = 1, 2)$ следующим образом. Если операторы $A_j^{(k)}$ $(j = 1, \ldots, n, \; k = 1, 2)$ — поля в пространствах $\mathscr{H}_k$, $k = 1, 2$, соответственно, то операторы

$A_j = A_j^{(1)} \oplus A_j^{(2)}$, $j = 1, \ldots, n$, будут полями в пространстве $\mathcal{H}$.

Типичным примером такой прямой суммы будет ситуация, возникающая при попытке построить теорию, обладающую правилами суперотбора, из наблюдаемых полей, рассматриваемых в когерентных подпространствах.

С другой стороны, если теории в $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ полны, то построенная таким способом теория в $\mathcal{H}$ оказывается «переопределенной». Например, если теория в $\mathcal{H}_1$ и теория в $\mathcal{H}_2$ обладают единственными вакуумными состояниями, то теория в $\mathcal{H}$ будет обладать двумерным многообразием вакуумных состояний. Допустимую теорию можно получить только на основе операции, которую мы обсудим сначала в общем виде, прежде чем применить к данному специальному случаю.

Сужение на подпространство. Допустим, что $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, U — непрерывное унитарное представление группы Пуанкаре и $\mathfrak{A}$ — некоторое семейство полей в $\mathcal{H}$. Предположим, что $\mathfrak{A}_1$ — подсемейство $\mathfrak{A}$, а j_1 — линейное подпространство $\mathcal{H}$, инвариантное относительно U и $\mathfrak{A}_1$:

$$Uj_1 \subset j_1, \quad \mathfrak{A}_1 j_1 \subset j_1. \tag{5.3}$$

Тогда в качестве определения новой теории поля можно рассматривать сужение U и $\mathfrak{A}_1$ на $\mathcal{H}_1 = \overline{j_1}$, замыкание j_1.

Обычно эта процедура применяется тогда, когда теория в $\mathcal{H}$ обладает вакуумом Ψ_0 и $j_1 = \{\mathfrak{A}_1 \Psi_0\}$ является линейным подпространством $\mathcal{H}$, содержащим векторы вида $\mathcal{P}\Psi_0$, где $\mathcal{P}$ — полином по сглаженным полям, принадлежащим к $\mathfrak{A}_1$. Тогда из инвариантности вакуума $U(a, \Lambda)\Psi_0 = \Psi_0$ и трансформационных свойств полей следует, что $U(a, \Lambda)\{\mathfrak{A}_1\Psi_0\} \subset \{\mathfrak{A}_1\Psi_0\}$. Эта процедура была использована выше при построении решения модели Тирринга (§ 4, пример 4).

В случае прямой суммы эту процедуру можно применять следующим образом. Состояние $\Psi_{0\theta} = \sqrt{\alpha}\Psi_0^{(1)} + \sqrt{1-\alpha}\, e^{i\theta}\Psi_0^{(2)}$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а θ — вещественная постоянная, является нормируемым состоянием $\mathcal{H}$, инвариантным относительно $U = U_1 \oplus U_2$, если $\Psi_0^{(1)}$ и $\Psi_0^{(2)}$ — соответствующие вакуумные состояния в $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. За искомую теорию следует принять сужение на подпространство, натянутое на векторы, полученные действием полиномов по сглаженным полям A_j, действующим на $\Psi_{0\theta}$. Такая процедура приводит к вакуумным средним, которые оказываются выпуклыми линейными комбинациями *) вакуумных средних теорий в $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ **):

$$(\Psi_{0\theta}, A_{j_1}(x_1)\dots A_{j_n}(x_n)\Psi_{0\theta}) = \\ = \alpha(\Psi_0^{(1)}, A_{j_1}^{(1)}(x_1)\dots A_{j_n}^{(1)}\Psi_0^{(1)}) + \\ + (1-\alpha)(\Psi_0^{(2)}, A_{j_1}^{(2)}(x_1), \dots, A_{j_n}^{(2)}(x_n)\Psi_0^{(2)}).$$

К сожалению, оказывается, что при $0 < \alpha < 1$ вместе с $\Psi_{0\theta}$ возникает и состояние $\Psi_{0\theta'}$, где $0 \leqslant \theta' \leqslant 2\pi$. Тем самым процедура сужения на это подпространство не в состоянии в этом случае привести к сколько-нибудь удовлетворительной теории (Hepp, Jost, Ruelle, Steinmann, 1961).

Тензорное произведение (прямое произведение). Из данных двух сепарабельных гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ и двух непрерывных унитарных представлений U_1 и U_2 группы Пуанкаре в них можно образовать тензорное произведение пространств $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ и тензорное произведение представлений группы Пуанкаре $U = U_1 \otimes U_2$. Это стандартная процедура, используемая для описания всех возможных состояний сложной системы, состоящей из систем 1 и 2.

Существует несколько способов построения полей в пространстве $\mathcal{H}$ по заданным полям A_j, $j = 1, 2$, в пространствах $\mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$. Прежде всего, можно образовать тензорное произведение вида

$$A = A_1 \otimes A_2. \tag{5.4}$$

Тот факт, что в результате получится поле, никоим образом не очевиден, поскольку мы определяем здесь тензорное произведение полей тем же способом, каким опреде-

---

*) Выпуклая линейная комбинация — это линейная комбинация, коэффициенты которой в сумме равны единице и принадлежат сегменту [0, 1] (см., например, книгу Н. Данфорда, Дж. Т. Шварца «Линейные операторы», т. I, ИЛ, 1962). (*Прим. перев.*)

**) Соответствующая процедура была предложена в работе Сударшана, Бардакци (Sudarshan, Bardakci, 1961).

ляют тензорное произведение представлений какой-либо группы G. Именно просто конструируют представление $\{g_1, g_2\} \to U(g_1) \otimes U(g_2)$ произведения группы самой на себя $G \times G$, а затем переходят к «диагонали», т. е. к подмножеству элементов $G \times G$, которые имеют вид $\{g, g\}$. Оно образует группу, изоморфную G, так что сужение тензорного произведения представлений на «диагональ» действительно приводит к некоему представлению группы G. В данном случае сужение на «диагональ» представляет собой операцию перехода от $A_1(x) \otimes A_2(y)$ к $A_1(x) \otimes A_2(x)$. Поскольку A_1 и A_2 — операторнозначные обобщенные функции, то следует доказать, что последнее выражение действительно определяет операторнозначную обобщенную функцию. Доказательство мы проведем для случая, когда оба пространства $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ обладают единственными вакуумными состояниями Ψ_{01} и Ψ_{02} соответственно. Тогда пространство $\mathscr{H}$ будет иметь единственный вакуум $\Psi_0 = \Psi_{01} \otimes \Psi_{02}$, инвариантный относительно $U_1 \otimes U_2$ и

$$(\Psi_0, A_1(x_1) \otimes A_2(y_1) \ldots A_1(x_n) \otimes A_2(y_n) \Psi_0) =$$
$$= (\Psi_{01}, A_1(x_1) \ldots A_1(x_n) \Psi_{01}) (\Psi_{02}, A_2(y_1) \ldots A_2(y_n) \Psi_{02}), \tag{5.5}$$

что представляет собой в точности тензорное произведение вакуумных средних полей A_1 и A_2. На «диагонали», по определению, имеем

$$(\Psi_0, (A_1 \otimes A_2)(x_1) \ldots (A_1 \otimes A_2)(x_n) \Psi_0) =$$
$$= (\Psi_{01}, A_1(x_1) \ldots A_1(x_n) \Psi_{01}) (\Psi_{02} A_2(x_1) \ldots A_2(x_n) \Psi_{02}) \tag{5.6}$$

(мы еще не знаем, какой смысл вкладывается в это определение!). Далее, хорошо известно, что обобщенные функции умеренного роста, фурье-образы которых обращаются в нуль вне выпуклого нетупого конуса, могут быть мультиплицированы, в результате чего получаются обобщенные функции умеренного роста, обладающие тем же свойством*). Наиболее убедительный способ устано-

---

*) Применение этого замечания в квантовой теории поля, кажется, впервые было сделано в печати в работе Шроера (Schroer, 1963, приложение). Необходимую математическую аргументацию можно найти в § 2.3 книги Стритера и Вайтмана (Streater, Wightman, 1964).

вить этот факт — это заметить, что такие обобщенные функции можно рассматривать как граничные значения полиномиально ограниченных голоморфных функций, а произведение двух таких функций опять принадлежит к тому же классу. (В данном случае подходящими переменными являются $(x_1 - x_2), \ldots, (x_{n-1} - x_n)$, а конус, которому принадлежат переменные после преобразования Фурье,— это $p_1, \ldots, p_{n-1} \in \overline{\mathbf{V}}_+$. Область голоморфности такой голоморфной функции представляет собой трубу, определенную условиями $x_1 - x_r - i\eta_1, \ldots, x_{n-1} - x_n - i\eta_{n-1}$, $\eta_j \in \mathbf{V}_+$, $j = 1, \ldots, n-1$.) Тем самым правая часть (5.6) — это обобщенная функция умеренного роста, удовлетворяющая спектральным условиям. Она, очевидно, лоренц-инвариантна. Тогда в силу теоремы реконструкции, если к тому же справедливы условия положительной определенности, существует поле $(A_1 \otimes A_2)$, приводящее к таким вакуумным средним. Чтобы вывести требуемые условия положительной определенности, можно начать с условий положительной определенности для величин $A_1(x) \otimes A_2(y)$ и затем перейти на «диагональ». (Для этого необходимо свойство непрерывности выражения (5.5) относительно предельного перехода $f_n(x, y) \to g(x)\,\delta(x-y)$ на основных функциях. Его нетрудно вывести из предельной теоремы А. Джаффе, изложенной в его работе (Jaffe, 1965). Мы не будем приводить здесь подробности.) Очевидно, что это построение распадается на три этапа: а) построение $A_1(x) \otimes A_2(y)$; б) сужение на циклическое подпространство, порождаемое действием на вакуум оператора $A_1(x) \otimes A_2(y)$; в) переход к «диагонали» в циклическом подпространстве, порождаемом действием на вакуум оператора $(A_1 \otimes A_2)(x)$.

Большинство примеров в § 4 были построены как тензорные произведения. В качестве примера иного рода рассмотрим оператор, введенный Борхерсом в его исследованиях проблемы единственности теорий с заданной двуточечной функцией*)

$$A(x) = \lambda A_1(x) \otimes 1 + \mu\, 1 \otimes A_2(x).$$

Этот оператор приводит к двуточечному вакуумному

*) Borchers, не опубликовано.

среднему

$$(\Psi_0, A(x_1)\ A(x_2)\ \Psi_0) = \lambda^2 (\Psi_{01}, A_1(x_1)\ A_1(x_2)\ \Psi_{01}) + \\ + \mu^2 (\Psi_{02}, A_2(x_1)\ A_2(x_2)\ \Psi_{02}),$$

которое при $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ является такой же выпуклой линейной комбинацией, как и конструкция, помещенная выше вслед за формулой (5.3). Однако для *усеченных* вакуумных средних большего числа полей получаем

$$(\Psi_0, A(x_1) \ldots A(x_n)\Psi_0)_T = \lambda^n (\Psi_0, A_1(x_1) \ldots A_1(x_n)\Psi_{01})_T + \\ + \mu^n (\Psi_{02}, A_2(x_1) \ldots A_2(x_n)\Psi_{02})_T.$$

Сужение на времениподобную гиперповерхность. Борхерс (Borchers, 1964) показал, что поле, сглаженное с основной функцией, зависящей от времени, является бесконечно дифференцируемой функцией пространственных координат. Тем самым имеет смысл приравнять нулю некоторые пространственные переменные, от которых зависит поле. В более инвариантном виде это утверждение формулируется так: сужение поля на некоторую времениподобную гиперповерхность вновь оказывается операторнозначной обобщенной функцией. Кроме того, оно преобразуется ковариантным образом относительно тех преобразований Пуанкаре, которые оставляют данную времениподобную гиперповерхность неизменной, и, наконец, оно локально. Иначе говоря, на этой времениподобной гиперповерхности оно определяет поле.

Очевидно, что сужение на времениподобную гиперповерхность обобщенного свободного поля представляет собой также обобщенное свободное поле, поскольку утверждение, что коммутатор полей кратен единичному оператору, сохраняется при сужении. Сужение свободного поля — это обобщенное свободное поле с непрерывным спектром масс.

Заключительные замечания. Хотя здесь и не было доказано, что каждое поле, построенное на основе предложенного выше формализма из полей, принадлежащих классу эквивалентности обобщенного свободного поля, само принадлежит классу эквивалентности некоторого обобщенного свободного поля, ни один из обсуждавшихся нами объектов не кажется многообещающим кандидатом на роль физически интересного оператора поля.

В части II мы займемся исследованием совершенно иной совокупности возможностей. Мы рассмотрим там теории, динамика которых гарантированно будет существенно нетривиальной, если только она вообще существует. Эта гарантия основана на существовании бесконечного числа нетривиальных вкладов в ряд теории возмущений для матрицы рассеяния.

ЧАСТЬ II

ОЦЕНКА ТРАДИЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СТАНДАРТНЫХ НЕТРИВИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

§ 6. Чем плохо представление взаимодействия? (Теорема Хаага)

В наши дни стандартным ответом на вопрос, поставленный в заглавии этого параграфа, должен быть тот, что дан в самом этом заглавии. И все же широко распространено мнение, что явления, ассоциируемые с теоремой Хаага, в какой-то мере патологичны и не имеют отношения к реальной физике. В этом параграфе мною будет предпринята еще одна попытка объяснить, почему это не так.

Хорошо известно, что при соответствующих предположениях перестановочные соотношения вида

$$[a_i, a_j]_- = 0, \quad [a_i, a_j^*]_- = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{6.1}$$

для систем с конечным числом n степеней свободы обладают единственным неприводимым представлением с точностью до унитарно эквивалентных. Необходимая для этого совокупность предположений сводится, например, к тому, что соотношение (6.1) можно заменить условиями на операторы

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{U}(\alpha) &= \exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j\right), \quad q_j = 2^{-1/2}(a_j + a_j^+), \\ \mathscr{V}(\beta) &= \exp\left(i \sum_{j=1}^{n} \beta_j p_j\right), \quad p_j = 2^{-1/2} i^{-1}(a_j - a_j^+). \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

Именно, операторы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ непрерывны по вещественным параметрам $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, $\beta_1 \ldots \beta_n$ и

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{U}(\alpha)\,\mathcal{U}(\alpha) = \mathcal{U}(\alpha + \alpha), \\ &\mathcal{V}(\beta)\,\mathcal{V}(\beta) = \mathcal{V}(\beta + \beta), \\ &\mathcal{U}(\alpha)\,\mathcal{V}(\beta) = \exp(i\alpha\cdot\beta)\,\mathcal{V}(\beta)\,\mathcal{U}(\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

где $\alpha\cdot\beta = \sum_j \alpha_j\beta_j$. Формулы (6.3) — это перестановочные соотношения в форме Вейля.

В теории поля приходится иметь дело с системами, обладающими бесконечным числом степеней свободы. Если допустить, что операторы $\mathcal{U}(\alpha)$ и $\mathcal{V}(\beta)$ определены для бесконечных последовательностей $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots$, все члены которых, кроме некоторого конечного числа, равны нулю, то, как сейчас также хорошо известно, существует много унитарно неэквивалентных представлений перестановочных соотношений (6.3). И только одно из этих представлений в случае систем с бесконечным числом степеней свободы обладает тем выполняющимся и для систем с конечным числом степеней свободы свойством, что существует нормируемое состояние, для которого

$$a_j\Phi_0 = 0. \tag{6.4}$$

Мы пользуемся обычной терминологией; подобное представление называется *представлением Фока*, а Φ_0— соответствующим *состоянием без частиц*. В большинстве старых работ по квантовой теории поля молчаливо предполагалось, что в теории поля следует рассматривать только представление Фока.

Обычно, когда имеют дело с полями, соотношения (6.1) записывают не в дискретном, а в непрерывном виде. Например, для свободного нейтрального скалярного поля массы m имеем

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\,(2\pi)^{3/2}} \int d\Omega_m(k)\,[a(k)\,e^{-ikx} + a^*(k)\,e^{ikx}], \tag{6.5}$$

где оператор $a(k)$ определен для всех k, удовлетворяющих $k^2 = m^2$, $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} > 0$, причем

$$[a(k), a(k')]_- = 0, \quad [a(k), a(k')^*]_- = k^0\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{6.6}$$

Очевидно, что аналогом оператора a_i в (6.1) в данном случае будет оператор $b(\mathbf{k})$ вида

$$b(\mathbf{k}) = (k^0)^{-1/2} a(k) = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^{3/2}} \int \Big[(-\Delta + m^2)^{1/4} \varphi(\mathbf{x}, t) + \\ + i(-\Delta + m^2)^{-1/4} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big] e^{ikx} d^3x, \quad (6.7)$$

причем правая часть (6.7) фактически не зависит от t. В этом случае указанное состояние без частиц как раз представляет собой физический вакуум теории.

Один из простейших примеров странных представлений можно получить, вычислив операторы рождения и уничтожения свободных полей с «неправильной» массой (Haag, 1955):

$$\hat{b}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^{3/2}} \int \Big[(-\Delta + m_1^2)^{1/4} \varphi(\mathbf{x}, t) + \\ + i(-\Delta + m_1^2)^{1/4} \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big] e^{ikx} d^3x = \\ = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\hat{k}^0}{k^0}} + \sqrt{\frac{k^0}{\hat{k}^0}} \right) e^{-ik^0x^0} b(\mathbf{k}) + \\ + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\hat{k}^0}{k^0}} - \sqrt{\frac{k^0}{\hat{k}^0}} \right) e^{ik^0x^0} b(\mathbf{k})^*, \quad (6.8)$$

где $k^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$, $\hat{k}^0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_1^2}$. Операторы $\hat{b}(\mathbf{k}, t)$ и $\hat{b}(\mathbf{k}', t)^*$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[(\hat{b}(\mathbf{k}, t), \hat{b}(\mathbf{k}', t)]_- = 0, \quad [\hat{b}(\mathbf{k}, t), \hat{b}(\mathbf{k}', t)^*]_- = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (6.9)$$

Но, как это явствует из элементарного расчета в конфигурационном пространстве, не существует ни одного вектора Ψ, который удовлетворял бы условию $\hat{b}(\mathbf{k})\Psi = 0$ для всех $\mathbf{k}$. Оператор

$$\mathcal{U} = \exp \int d^3k \chi(\mathbf{k}) [b^*(\mathbf{k}) b^*(-\mathbf{k}) - b(\mathbf{k}) b(-\mathbf{k})], \quad (6.10)$$

где $\chi(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2} \operatorname{arcsh} \left(\sqrt{\frac{\hat{k}^0}{k^0}} - \sqrt{\frac{k^0}{\hat{k}^0}} \right)$, формально удовлетворяет равенству

$$\hat{b}(\mathbf{k}) = \mathcal{U} b(\mathbf{k}) \mathcal{U}^{-1}. \quad (6.11)$$

Однако на самом деле он не существует как хорошо определенный математический объект, поскольку иначе состояние $\Psi = \mathcal{U}\Phi_0$ было бы состоянием без частиц и для оператора $\hat{b}$ (k).

Преобразование, приводящее от операторов b к операторам $\check{b}$, представляет собой частный случай преобразования, использовавшегося в проблеме многих тел (Bogoliubov, 1958; Valatin, 1958) *); однако, в последнем случае имеет место естественное обрезание по $|\mathbf{k}|$ (импульс Ферми), так что фактически оператор $\mathcal{U}$ существует [см., например, (Segal, 1958) или (Haag, 1955, стр. 19)].

Другим способом получения странного представления является замена в (6.7) φ на $e^{\chi}\varphi$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}$ на $e^{-\chi}\frac{\partial\varphi}{\partial x^0}$. Возникающее преобразование для b имеет вид

$$\hat{b}(\mathbf{k}) = \operatorname{ch}\chi\cdot b(\mathbf{k}) + \operatorname{sh}\chi b(-\mathbf{k}). \tag{6.12}$$

Та же аргументация, что и для (6.8), показывает, что никакого состояния без частиц для $\hat{b}$ (k) не существует.

Третий путь получения странного представления состоит в том, чтобы определить оператор

$$\hat{b}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{k}) + \alpha(\mathbf{k}), \tag{6.13}$$

где α (k) — комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\int |\alpha(\mathbf{k})|^2 d\mathbf{k} = \infty. \tag{6.14}$$

Подобные странные представления встречаются в двух весьма различных физических контекстах. В проблемах, связанных с инфракрасными расходимостями (Bloch, Nordsieck, 1937; Friedrichs, 1952 **), Borchers, Haag, Schroer, 1963), функция α (k) велика при малых k, так что

$$\int |\alpha(\mathbf{k})|^2 \mathbf{k}^2 d\mathbf{k} < \infty.$$

*) См. также книгу: Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков, Новый метод в теории сверхпроводимости, Изд. АН СССР, 1958. (*Прим. перев.*)

**) Перепечатано в его книге (Friedrichs, 1953), см. особенно стр. 75.

В случае ультрафиолетовых расходимостей (Friedrichs, 1952; Van Hove, 1952; Wightman, Schweber, 1955) к расходимости интеграла (6.14) приводит поведение α (k) при боьших k.

Как явствует из этих примеров, для получения странных представлений из представления Фока достаточно воспользоваться чрезвычайно элементарными алгебраическими операциями. В принципе это ставит каждого специалиста по математической физике в затруднительное положение. Даже если ему задан некоторый гамильтониан, зависящий от b и b^*, то, оказывается, он еще должен решить, в каком именно неприводимом представлении перестановочных соотношений следует работать. Один выбор может сделать гамильтониан осмысленным, а другой — нет. Кроме того, поскольку сколько-нибудь эффективное описание *всех* неприводимых представлений все еще неизвестно, в нашем распоряжении остаются весьма малые средства математического контроля за ситуацией в целом. Но действительно ли эта ситуация встречается на практике? Почему нельзя всегда пользоваться представлением Фока? В теории свободного поля физической интуиции оказалось достаточно для того, чтобы рассчитать оператор b (k) с правильной массой. Вероятно, в более сложных теориях поля также существуют столь же простые методы. Однако шансы на успех подобного предположения серьезно подорваны теоремой Хаага.

Теорема

В евклидово-инвариантной теории поля, использующей фоково представление перестановочных соотношений, состояние без частиц евклидово-инвариантно.

Доказательство

В евклидово-инвариантной теории унитарный оператор, описывающий закон преобразования состояний, действует на канонические переменные φ (x, t) и π (y, t), удовлетворяющие соотношениям

$$[\varphi(\mathrm{x}, t), \varphi(\mathrm{y}, t)]_- = 0, \quad [\varphi(\mathrm{x}, t), \pi(\mathrm{y}, t)]_- = i\delta(\mathrm{x}-\mathrm{y}), \tag{6.15}$$

следующим образом:

$$U(\mathbf{a}, R)\,\varphi(\mathbf{x}, t)\,U^{-1}(\mathbf{a}, R) = \varphi(R\mathbf{x} + \mathbf{a}, t),$$
$$U(\mathbf{a}, R)\,\pi(\mathbf{y}, t)\,U^{-1}(\mathbf{a}, R) = \pi(R\mathbf{y} + \mathbf{a}, t).$$

Если Φ_0 — состояние без частиц, то для всех $\mathbf{x}$ оно удовлетворяет условию

$$[(-\Delta + m^2)^{1/4}\varphi(\mathbf{x}, t) + i(-\Delta + m^2)^{-1/4}\pi(\mathbf{x}, t)]\,\Phi_0 = 0.$$

Поэтому по закону преобразования состояние $U(\mathbf{a}, R)\,\Phi_0$ удовлетворяет такому же условию. А это в свою очередь означает, что

$$U(\mathbf{a}, R)\,\Phi_0 = \omega(\mathbf{a}, R)\,\Phi_0, \tag{6.16}$$

где $\omega(\mathbf{a}, R)$ — число, по абсолютной величине равное единице, ибо состояние без частиц единственно с точностью до фазового множителя. Далее, из (6.16) нетрудно показать, что $\{\mathbf{a}, R\} \to \omega(\mathbf{a}, R)$ — это непрерывное одномерное представление евклидовой группы. Но других подобных представлений, кроме $\omega = 1$, не существует, поэтому

$$U(\mathbf{a}, R)\,\Phi_0 = \Phi_0, \tag{6.17}$$

и теорема доказана.

В физических приложениях это довольно тривиально звучащее утверждение приводит к весьма серьезным последствиям. В евклидово-инвариантной теории у нас нет иной физической интерпретации для состояния, инвариантного относительно евклидовых преобразований, кроме как считать его физическим вакуумом. Но в то же время физический вакуум должен быть также инвариантен относительно временных сдвигов (в теории без внешних источников), т. е. он должен быть собственным состоянием гамильтониана. Можно показать, что это утверждение *не верно* для всех обычно используемых гамильтонианов квантовой теории поля, исключая гамильтониан свободного поля. Тем самым, чтобы придать теории физический смысл, *необходимо* использовать странные представления перестановочных соотношений.

Существует еще один аспект теоремы Хаага, не затронутый предыдущими рассуждениями. Предположим, что гамильтониан теории имеет вид

$$H = \int \mathscr{H}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

где $\mathscr{H}(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию

$$U(\mathbf{a}, 1)\, \mathscr{H}(\mathbf{x})\, U^{-1}(\mathbf{a}, 1) = \mathscr{H}(\mathbf{x} + \mathbf{a}).$$

Тогда, если Ψ — некое состояние, инвариантное относительно $U(\mathbf{a}, 1)$, т. е.

$$U(\mathbf{a}, 1)\, \Psi = \Psi,$$

то выражение $(\Psi, \mathscr{H}(\mathbf{x})\, \mathscr{H}(\mathbf{y})\, \Psi)$ зависит только от $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, так что

$$\| H\Psi \|^2 = \int d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}\, (\Psi, \mathscr{H}(\mathbf{x})\, \mathscr{H}(\mathbf{y})\, \Psi) = \begin{cases} 0, \\ \text{или} \\ \infty. \end{cases}$$

Иначе говоря, оператор H должен уничтожать всякое трансляционно-инвариантное состояние, на которое он действует. Если в H использовать операторы в представлении Фока и выбрать в качестве Ψ соответствующее состояние без частиц Φ_0, то окажется, что оператором H можно подействовать на Φ_0, только если он уничтожит это состояние.

Стандартный ответ на предшествующие доводы в пользу важности странных представлений таков: если во всех этих случаях поместить систему в ящик, то странные представления не потребовались бы, т. е. соответствующий гамильтониан имел бы смысл для представления Фока. Тем самым явления, ассоциируемые с возникновением странных представлений, чувствительно зависят от наличия или отсутствия ящика независимо от того, насколько может быть велик этот ящик. Однако ничто важное в физике от этого зависеть не должно. Поэтому указанное соображение в каком-то смысле должно быть неправильно. Я не согласен с ним, поскольку существование гамильтониана и его свойства кажутся мне существенной частью физики. Однако с рецептурными выводами, которые следует сделать в возникшей ситуации, я думаю, все могут согласиться: если стремиться исследовать проблему существования решений нетривиальных теорий поля, в которых имеют смысл перестановочные соотношения полей в заданный момент времени, то имеются три возможности:

1) переформулировать теорию (скажем, в терминах функций Грина) так, чтобы не возникало и вопроса о зависимости гамильтониана от операторов b и b^*;

2) работать со странными представлениями, которые должны появиться в теории;

3) поместить систему в ящик (или иным путем разрушить евклидову инвариантность теории). Использовать представление Фока. После этого исследовать предельный переход к случаю, когда стенки ящика устремляются к бесконечности.

Вторая возможность представляет собой серьезную математическую проблему, которая кажется очень интересной, но и очень трудной; мы не будем обсуждать ее здесь в дальнейшем. В этих лекциях мы будем стремиться реализовать третью возможность, комбинируя ее с первой, которая соответствует главному направлению развития квантовой теории поля в течение последних нескольких лет.

Теперь мы подготовлены к обсуждению проблемы существования представления взаимодействия в свете теоремы Хаага. В простейшем случае нейтрального скалярного поля φ, канонически сопряженный импульс которого π (φ и π, по определению, удовлетворяют соотношениям (6.15)) равен $\partial\varphi/\partial x_0$, поле φ_I в представлении взаимодействия определяется следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\mathrm{x}, t) &= \mathcal{U}^{-1}(t)\,\varphi_I(\mathrm{x}, t)\,\mathcal{U}(t), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x^0}(\mathrm{x}, t) &= \mathcal{U}^{-1}(t)\,\frac{\partial\varphi_I}{\partial x^0}(\mathrm{x}, t)\,\mathcal{U}(t), \end{aligned}\right\} \qquad (6.18)$$

$$[\varphi_I(x), \varphi_I(y)]_- = \frac{1}{i}\Delta(m^2, x-y), \qquad (\Box + m^2)\,\varphi_I(x) = 0. \qquad (6.19)$$

Здесь оператор $\mathcal{U}(t)$ унитарен и $\mathcal{U}(0) = 1$.

Иначе говоря, φ_I — это поле, удовлетворяющее уравнению и перестановочным соотношениям свободного поля.

Оно вместе с производной от него по времени в момент $t=0$ сводится к данному полю, а в произвольный момент t эти два поля связаны унитарно эквивалентным образом посредством $\mathcal{U}(t)$. В старой литературе по квантовой теории поля молчаливо допускалось, что поле φ_I может быть выражено через операторы рождения и уничтожения в пространстве Фока. Из теоремы Хаага следует, что это предположение несостоятельно, если теория евклидово-инвариантна и описывает нетривиальное взаимодействие полей. Это как раз тот аргумент против существования представления взаимодействия, который нашел отражение в заглавии данного параграфа.

Чтобы обойти эту трудность, можно также рассмотреть такую возможность, когда, хотя (6.19) и имеет место, поле φ_I приводит к странному представлению перестановочных соотношений. Она будет означать, что для поля φ_I не существует состояния без частиц (состояния «голого вакуума»). Тогда решающим будет вопрос: изменяется во времени или нет класс унитарной эквивалентности такого странного представления? Если изменяется, то уравнения (6.18) и (6.19) будут несовместимы. В этой связи поучительно заново рассмотреть пример обобщенных свободных полей с дискретным спектром масс, приведенный в (2.8). Для них представление перестановочных соотношений имеет вид

$$\begin{aligned} b_j(\mathbf{k}, x_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^{3/2}}\int d^3x e^{ikx}\Big[(-\Delta+\mathfrak{M}_{jj})^{1/4}\varphi_j(x)+ \\ &\qquad + i(-\Delta+\mathfrak{M}_{jj})^{-1/4}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x^0}(x)\Big] = \\ &= \sum_{l=1}^{n} B_{jl}\frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^{3/2}}\int d^3x e^{ikx}\,[(-\Delta+\mathfrak{M}_{jj})^{1/4}\psi_l(x)+ \\ &\qquad + i(-\Delta+\mathfrak{M}_{jj})^{-1/4}\frac{\partial\psi_l}{\partial x^0}(x)\Big] = \\ &= \sum_{l=1}^{n} B_{jl}\left\{\frac{1}{2}\left(\left[\frac{\mathfrak{M}_{jj}+\mathbf{k}^2}{M_l^2+\mathbf{k}^2}\right]^{1/2}+\left[\frac{M_l^2+\mathbf{k}^2}{\mathfrak{M}_{jj}+\mathbf{k}^2}\right]^{1/2}\right)b_l(\mathbf{k})e^{i[M_l^2+\mathbf{k}^2]^{1/2}x^0}+\right. \\ &\left.+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{\mathfrak{M}_{jj}+\mathbf{k}^2}{M_l^2+\mathbf{k}^2}\right]^{1/2}-\left[\frac{M_l^2+\mathbf{k}^2}{\mathfrak{M}_{jj}^2+\mathbf{k}^2}\right]^{1/2}\right)b_l(\mathbf{k})e^{-i[M_l^2+\mathbf{k}^2]^{1/2}x^0}\right\}. \quad (6.20) \end{aligned}$$

Соответствующие перестановочные соотношения записываются так:

$$[b_j(\mathrm{k}, t), b_l(\mathrm{k}', t)]_- = 0, \quad [b_j(\mathrm{k}, t), b_l^*(\mathrm{k}', t)]_- = \delta_{jl}\delta(\mathrm{k} - \mathrm{k}'). \tag{6.21}$$

Здесь оператор $b_l(k)$ в точности равен $[M_l^2 + \mathrm{k}^2]^{-1/2} a_l(k)$, где $a_l(k)$ — оператор, входящий в разложение

$$\psi_l(x) = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^{3/2}} \int d\Omega_{M_l}(p)\,[a_l(p)\,e^{-ipx} + a_l^*(p)\,e^{ipx}]. \tag{6.22}$$

Операторы $b_j(\mathrm{k}, t)$ для различных значений t, конечно, унитарно эквивалентны, поскольку под действием оператора временных сдвигов теории они отображаются друг в друга. Совершенно иначе обстоит дело с зависимостью от времени, которая порождается оператором $\varphi_{jI}(x)$, удовлетворяющим свободному уравнению

$$(\Box + \mathfrak{M}_{jj})\,\varphi_{jI}(x) = 0.$$

Она соответствует переходу от оператора $b_j(\mathrm{k}, 0)$ к

$$b_{jI}(\mathrm{k}, t) = \exp\left(i\sqrt{\mathfrak{M}_{jj} + \mathrm{k}^2}\,x^0\right) b_j(\mathrm{k}, 0).$$

Можно ожидать, что никакого унитарного преобразования, порождающего подобное изменение фазы, не существует, поскольку если бы оно существовало, то оно, вероятно, имело бы вид

$$-\exp\left[ix^0 \sum_{j=1}^{n} \int d^3k\,[\mathfrak{M}_{jj} + \mathrm{k}^2]^{1/2}\, b_{jI}^*(\mathrm{k}, 0) b_{jI}(\mathrm{k}, 0)\right], \tag{6.23}$$

а такой оператор имеет математический смысл только в представлении Фока. Именно эта ситуация на самом деле имеет место, как то следует из приведенной ниже леммы.

Лемма

Пусть $\{\mathrm{a}, R\} \to U(\mathrm{a}, R)$ — непрерывное унитарное представление евклидовой группы с единственным инвариантным состоянием Ψ_0 (физический вакуум). Предположим, что оператор $b_j(\mathrm{k})$ реализует неприводимое представление перестановочных соотношений (6.21) и

1) для всех $\mathbf{a}$ и R

$$U(\mathbf{a}, R)\, b_j(\mathbf{k})\, U^{-1}(\mathbf{a}, R) = \exp(i(R\mathbf{k} - \mathbf{a}))\, b_j(R\mathbf{k}); \tag{6.24}$$

2) для некоторого момента $t \neq 0$ существует унитарный оператор V такой, что

$$V b_j(\mathbf{k})\, V^{-1} = \exp\left(i\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mathfrak{M}_{jj}}\, t\right) b_j(\mathbf{k}). \tag{6.25}$$

В этом случае вакуум инвариантен относительно V с точностью до фазового множителя и

$$\left.\begin{aligned} (\Psi_0, b_j(\mathbf{k})\, b_l(\mathbf{k}')\, \Psi_0) &= \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\, F_{jl}(\mathbf{k}), \\ (\Psi_0, b_j(\mathbf{k})\, b_l(\mathbf{k}')\, \Psi_0) &= \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\, G_{jl}(\mathbf{k}), \end{aligned}\right\} \tag{6.26}$$

где F_{jl} и G_{jl} обращаются в нуль для всех $\mathbf{k}$, исключая, быть может, те из них, которые удовлетворяют условию

$$[\mathfrak{M}_{jj} + \mathbf{k}^2]^{1/2} + [\mathfrak{M}_{ll} + \mathbf{k}^2]^{1/2} = \frac{2\pi n}{t} \tag{6.27}$$

с целым n.

Доказательство

Оператор $U(\mathbf{a}, R)\, V\, U^{-1}(\mathbf{a}, R)\, V^{-1}$ коммутирует со всеми операторами $b_j(\mathbf{k})$ и $b^*{}_j(\mathbf{k})$. Следовательно, в силу неприводимости данного представления

$$U(\mathbf{a}, R)\, V = \omega(\mathbf{a}, R)\, V U(\mathbf{a}, R), \tag{6.28}$$

где ω — комплексное число, по модулю равное единице. Действуя этим соотношением на вакуумное состояние, получим $U(\mathbf{a}, R)\, V\Psi_0 = \omega(\mathbf{a}, R)\, V\Psi_0$, что приводит к

$$V\Psi_0 = \omega_1 \Psi_0$$

и доказывает первое утверждение леммы.

Чтобы доказать второе утверждение, вычислим

$$\begin{aligned} (\Psi_0, b_j(\mathbf{k})\, b_l(\mathbf{k}')\, \Psi_0) &= (U(\mathbf{a}, R)\Psi_0, U(\mathbf{a}, R)\, b_j(\mathbf{k})\, b_l(\mathbf{k}')\, \Psi_0) = \\ &= (V\Psi_0, V b_j(\mathbf{k})\, b_l(\mathbf{k}')\, \Psi_0) = \\ &= \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\mathbf{a})\, (\Psi_0, b_j(R\mathbf{k})\, b_l(R\mathbf{k}')\, \Psi_0) = \\ &= \exp\left(i\left([\mathfrak{M}_{jj} + \mathbf{k}^2]^{1/2} + [\mathfrak{M}_{ll} + \mathbf{k}'^2]^{1/2}\right) t\right) (\Psi_0, b_j(\mathbf{k})\, b_l(\mathbf{k}')\, \Psi_0), \end{aligned}$$

откуда все остальные утверждения леммы следуют немедленно.

Если установленный этой леммой критерий применить к примерам (6.20), то нетрудно видеть, что он в них не выполняется. (Мы всегда будем игнорировать тот тривиальный случай, когда M_j^2 является некоторой перестановкой $\mathfrak{M}_{jj}$.) Иначе говоря, в этих примерах для любых двух различных моментов времени t_1 и t_2 представления перестановочных соотношений, возникающие из $\varphi_{jI}(\mathbf{x}t_1)$, $\frac{\partial\varphi_{jI}}{\partial y^0}(\mathbf{y},t_1)$, $j=1,\ldots,n$, и из $\varphi_{jI}(\mathbf{x}t_2)$, $\frac{\partial\varphi_{jI}}{\partial y^0}(\mathbf{y},t_2)$, $j=1,\ldots,n$, унитарно неэквивалентны. *Уже в этих элементарных примерах не только встречаются странные представления, но и различным моментам времени соответствуют различные странные представления.* Уравнения (6.18), (6.19), определяющие представление взаимодействия, настолько плохи, насколько только можно себе представить.

Следует подчеркнуть, что рассматриваемая модель с квадратичным лагранжианом никоим образом не является ни сингулярной, ни патологической. На самом деле странные представления, ассоциируемые с теоремой Хаага, представляют собой совершенно элементарное явление и появляются всякий раз, как только мы требуем, чтобы теория была евклидово-инвариантной и имела бы гамильтониан, для которого состояние без частиц не является собственным вектором. Возникновение этих представлений не зависит от того, является ли теория релятивистски инвариантной или нет и существуют или нет в данной теории ультрафиолетовые расходимости.

Рискуя быть невежливым и даже наверняка будучи им по отношению ко многим авторам, я все же хочу долбить и долбить этот вопрос, поскольку в обычной литературе он изложен отвратительно. Сам факт существования странных представлений до пятидесятых годов вообще не был известен физикам. Первое указание на него для случая антиперестановочных соотношений, насколько мне известно, содержится в гектографированном варианте неопубликованной лекции И. фон Неймана (Pauli, 1936).

Интересующее нас представление получается путем рассмотрения всех квадратично интегрируемых функций на пространстве Г последовательностей x_1, x_2, $x_3,\ldots$ нулей и единиц, снабженном мерой μ, которая соответствует мере Лебега на единичном интервале, если она отображает Г на этот единичный интервал по закону $x_1, x_2, \ldots \to x = \sum_{k=1}^{j} 2^{-k} x_k$. Действие оператора уничтожения a_j определяется так: $(a_j\Phi)(x) = \exp\left(\pi i \sum_{k=1}^{j} x_k\right) \Phi(x+\delta_k)$. Здесь $x+\delta_j$ обозначает число, полученное из x изменением его j-го элемента на число, по модулю равное единице. Обозначения, использованные в этой формуле, соответствуют обозначениям, принятым в работе (Wightman, Schweber, 1955). Сходные примеры нетрудно выделить из опубликованной работы фон Неймана, однако там они не выражены явным образом через представления антиперестановочных соотношений (Neumann, 1938). Соответствующее представление определено на пространстве квадратично интегрируемых функций из $\Gamma_0 \times \Gamma$, где Γ_0 — множество последовательностей из Г с конечным числом единиц, т. е. $\Phi(y, x)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{y \in \Gamma_0} \int d\mu(x) \, |\Phi(y, x)|^2 < \infty,$$

где μ — мера, описанная выше. Представление задается формулой

$$(a_j\Phi)(y, x) = (-1)^{\sum_{k=1}^{j-1} x_k} \Phi(y+\delta_j;\ x+\delta_j).$$

Вскоре после этой работы фон Неймана появилась работа Блоха и Нордсика о взаимодействии поля излучения с шредингеровой частицей (Bloch, Nordsieck, 1937). В ней авторы ввели преобразование, существенно напоминающее (6.13). Однако они не задались вопросом, можно ли его осуществить с помощью унитарного преобразования. Первый опубликованный довод в пользу того, что такое унитарное преобразование может не существовать, содержится в работе Фридрикса (Friedrichs, 1952) *). Фридрикс ввел понятие о myriotic и amyriotic полях. С точки

*) Перепечатано в его книге «Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields», см. особенно стр. 139—142.

зрения проведенного выше рассмотрения этими эпитетами проще снабжать набор операторов рождения и уничтожения, а не сами поля. Тогда существо этих понятий сводится к следующему: представление перестановочных соотношений amyriotic, если оператор полного числа частиц хорошо определен, и myriotic, если это не так. Для перестановочных соотношений в дискретной форме это означает, что оператор

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^* a_i$$

существует. Хотя сам Фридрикс не сформулировал это утверждение в виде теоремы для представлений перестановочных соотношений в форме Вейля, однако довольно очевидно, что различие между myriotic и amyriotic полями инвариантно относительно унитарного преобразования. На самом деле всякое неприводимое amyriotic представление всегда унитарно эквивалентно представлению Фока (Фок, 1937).

Независимо и примерно в то же самое время Ван Хов исследовал группу моделей теории поля, весьма схожих с моделями, рассматриваемыми Фридриксом. Он подошел к проблеме с несколько иной точки зрения. Он представлял себе рассматриваемые операторы действующими в несепарабельном гильбертовом пространстве, полученном путем образования бесконечного тензорного произведения гильбертовых пространств, соответствующих различным числам степеней свободы. (Первое систематическое исследование бесконечного тензорного произведения подобного рода произвел фон Нейман в работе (Neumann, 1938).) Ван Хов установил, что гамильтонианы моделей могут быть определены как эрмитовы операторы только на очень малых подмножествах векторов этого огромного пространства, подмножествах, на которые натянуты *сепарабельные* подпространства. При разных значениях параметров модели (т. е. констант связи) эти подпространства оказываются на самом деле ортогональными. Иначе говоря, в этой реализации собственные векторы теории с одним значением константы связи не могут быть разложены в ряд по собственным векторам теории с другим значением константы связи. Ван Хов не выяснил вопроса о том, являются ли представления перестановочных соотношений в этих ортогональных сепарабельных подпространствах унитарно эквивалентными. Многочисленные авторы (но не сам Ван Хов!) сделали из этой работы следующие выводы:

1) в теории поля играет существенную роль несепарабельное гильбертово пространство;

2) в теории поля собственные функции возмущенной системы всегда ортогональны собственным функциям системы в отсутствие возмущения.

На самом деле, конечно, каждое сепарабельное подпространство реализации Ван Хова можно отобразить с помощью унитарного преобразования на любое другое сепарабельное подпространство. При этом вовсе не очевидно, будет ли представление перестановочных соотношений, которое возникает при таком отображении, унитарно эквивалентно тому представлению, которое всегда существует в подпространстве отображения. Очевидным же является тот факт, что собственные функции гамильтониана после унитарного преобразования образуют полный набор в обычном смысле спектральной теоремы, так что оба утверждения ошибочны.

Математическая проблема определения всех унитарно неэквивалентных представлений перестановочных соотношений очень активно обсуждалась в течение всего этого периода (см., например, Haag, 1953—1954; Segal, 1951—1952), однако в опубликованном виде результаты появились много позже. К середине пятидесятых годов исследование этого вопроса выродилось в малозначительную отрасль математики (Segal, 1958; Gårding, Wightman, 1954).

Но затем, прежде всего под влиянием работы Хаага (Haag, 1955), стало совершенно ясно, что возникновение странных представлений перестановочных соотношений, которое в первых моделях связывалось или с инфракрасными, или ультрафиолетовыми расходимостями, обязательно должно иметь место в *любой* физической модели, которая обладает нетривиальной поляризацией вакуума и является евклидово-инвариантной, совершенно независимо от того, имеют место в ней или нет инфракрасные или ультрафиолетовые расходимости.

В каком объеме и каким образом физики усвоили все эти факты, ясно видно из текста «Трудов Сольвейского конгресса» 1961 г., стр. 169—172. На стр. 170 там содержится утверждение: «Теорема, открытая Ван Ховом и Фридриксом и обычно именуемая „теоремой Хаага“, в действительности имеет весьма тривиальную природу, и из нее вовсе не следует, что собственные значения гамильтониана не существуют, или любое другое столь же фундаментальное утверждение». Я попытаюсь разъяснить, что я думаю по этому поводу. (Это следовало бы сравнить с замечаниями Ван Хова на стр. 172 тех же «Трудов».)

Если имеется теория без ультрафиолетовых или инфракрасных расходимостей, например теория, основанная на квадратичном лагранжиане (2.1), то от странных представлений можно отделаться, поместив систему в произвольно большой ящик и используя представление Фока. Далее, существующая теория позволяет выделить не зависящие от наличия ящика различные существенные физические величины в пределе, когда стенки ящика устремляются к бесконечности. Тем самым в упоминании странных представлений перестановочных соотношений нет никакой нужды. Этот аргумент выглядит неопровержимым, пока «существующая теория» не исследуется более тщательно. Оказывается, что если (в отличие от случая квадратичного лагранжиана) динамика теории вообще представляет интерес, то установить, имеют ли физические величины предельные значения, не зависящие от наличия ящика, становится, несомненно, нетривиальной задачей. Фактически вплоть до прошедшего года это не было продемонстрировано ни в одном нетривиальном случае, если не считать формальных манипуляций с, вероятно, расходящимися степенными рядами *). Теорема Хаага тривиальна в том смысле, что, зная полное решение проблем, которые она порождает, в этих случаях без учета инфракрасной и ультрафиолетовой катастроф, мы по-прежнему оказываемся не в состоянии ничего сказать о

*) Существующее состояние теории для проблемы многих тел в статистической механике охарактеризовано в работе (Ruelle, 1963).

них в этих же случаях при наличии инфракрасной и ультрафиолетовой катастроф.

Существующее сейчас положение в учебной литературе можно проиллюстрировать двумя цитатами из стандартных текстов:

> «...любое преобразование $\varphi \to \varphi'$, которое оставляет инвариантными уравнения поля и перестановочные соотношения, приводит к унитарному оператору $\mathcal{U}$ со свойством $\varphi'(x) = \mathcal{U}\varphi(x)\mathcal{U}^{-1}$ (это следует из единственности представлений...)» (Jauch, Rohrlich, 1955, стр. 82).

> «Тем самым применимость теории возмущений основана на предположении, в силу которого векторы состояний возмущенной и невозмущенной задачи лежат в одном и том же гильбертовом пространстве. Однако известно, что в случае локальных взаимодействий это как раз не так» (Schweber, 1961, стр. 416).

На этом я хотел бы закончить мой несколько полемический экскурс в историю.

Раз мы уже решили, что введение ящика становится существенным, если гамильтониан теории поля должен иметь смысл в представлении Фока, то необходимо понять, каким из нескольких возможных путей это можно было бы сделать. Этот вопрос будет обсуждаться в § 8.

§ 7. Чем плохо представление взаимодействия? (Ультрафиолетовая катастрофа)

В предыдущем параграфе мы имели дело с явлениями, ассоциируемыми с теоремой Хаага, и чтобы иметь возможность использовать представление Фока, были вынуждены ввести в рассмотрение ящик. Как хорошо известно, в случае взаимодействующих полей, вообще говоря, этой процедуры недостаточно, чтобы превратить гамильтониан в хорошо определенный оператор. Трудности порождаются так называемой *ультрафиолетовой катастрофой*. Ее простейшее проявление состоит в том, что, хотя образование $\psi(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n : \varphi^n : (x)$ — хорошо определенное поле, так что $\int d^4x f(x)\psi(x)$ — оператор с плотной областью определения для каждой основной функции с компактным носителем в четырехмерном пространстве-времени, требование

$$\left\| \int d^3x g(\mathbf{x})\, \psi(\mathbf{x}, t)\, \Phi_0 \right\| < \infty$$

означает, что $c_n = 0$ для $n > 2$. Здесь φ — свободное поле, а Φ_0 — соответствующее состояние без частиц.

Традиционный метод, позволяющий рассматривать эту трудность и в то же время прояснить вопрос о том, действительно ли она связана с ультрафиолетовой катастрофой, состоит во введении *ультрафиолетового обрезания*. Например, если заменить φ на регуляризованное поле

$$\varphi_h(x) = \int h(x - y)\, dy\, \varphi(y),$$

где h — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем, то

$$\left\| \int d^3x g(\mathbf{x}) \sum_{n=0}^{N} c_n : \varphi_h^n : (x)\; \Phi_0 \right\| < \infty.$$

Естественно задать вопрос, представляет ли ультрафиолетовая катастрофа реальную математическую трудность или нет. Одна из первых серьезных попыток ответить на этот вопрос была сделана Ван Ховом (Van Hove, 1951). Он показал, что для типичного гамильтониана $H_{V,K}$ в ящике объема V с ультрафиолетовым обрезанием K

$$\lim_{K \to \infty} \| H_{V,K} \Phi \| = 0$$

для всех Φ, кроме $\Phi = 0$, при условии, что используется представление Фока. Это указывает на серьезную трудность, связанную с использованием представления Фока. (Это никоим образом не означает, что $(\Phi, H_{V,K}, \Psi)$ не сходится для специально выбранных состояний Φ и Ψ, а это может оказаться достаточным для определения предельной теории.) Ван Хов предположил, что рассматриваемому гамильтониану можно придать смысл иным способом, который, если перевести его на наш язык, сводится к использованию странного представления перестановочных соотношений. И Ван Хов (Van Hove, 1952) и Фридрикс (Friedrichs, 1952) продемонстрировали, что действительно подобное предположение осуществляется для случая бозонов, взаимодействующих с подходящими внешними источниками. Другой результат того же рода был получен Сигалом (Segal, 1960). Он показал, что определенному классу гамильтонианов взаимодействия всегда можно придать математический смысл, если использовать в них операторы в подходящем странном представлении. Утверждение, противоположное этому, было фактически высказано Араки (Araki, 1960) *). При определенных предположениях он показал, что гамильтониан теории единственным образом определяется представлением перестановочных соотношений.

Можно ли придать смысл гамильтониану во всякой теории, если использовать подходящее странное представление перестановочных соотношений? Наверняка нет, поскольку нам известны примеры теорий, в которых, чтобы базисные поля имели смысл как операторы, их следует сглаживать с основными функциями в четырехмерном пространстве; это поля с бесконечной перенормировкой операторов полей. Например, подобным свойством обладает поле :exp $ig\varphi$:, определенное в § 4, пример 1. Однако может случиться так, что если слегка изменить поставленный вопрос, то на него может быть дан положительный ответ. Если допустить, что гамильтониан теории может быть выражен через некое поле, принадлежащее классу эквивалентности данного поля, то может оказаться, что это другое поле удастся выбрать так, что оно в существенном будет вести себя хорошо. В данный момент это явление можно проиллюстрировать только на примерах классов эквивалентности обобщенных свободных полей и свободных полей. В них, как читатели вскоре убедятся, проблема записи гамильтониана свободного поля в зависимости от общего элемента класса эквивалентности совершенно запутана. В других случаях, при отсутствии теорем существования для нетривиальных теорий с взаимодействием, вообще нельзя сказать ничего окончательного. Однако некоторые ценные факты удается

*) Высказанные в этой работе гипотезы будут обсуждаться в § 9.

установить при изучении рядов теории возмущений в нетривиальных теориях поля. (Это, конечно, ничего не доказывает и является лишь правдоподобным доводом. Соответствующие явления были впервые замечены Штюкельбергом (Stueckelberg, 1951) *), который дал им совершенно иную интерпретацию.)

Оригинальная формулировка теории перенормировок, предложенная Дайсоном, основывалась на разложении в ряд выражения

$$S = \lim_{t\to\infty} \mathcal{U}(t)\,\mathcal{U}^*(-t).$$

Штюкельберг заметил, что предписания теории перенормировок, цель которых — сделать хорошо определенным каждый член разложения матрицы S в ряд по степеням константы связи, *недостаточны* для определения матриц $\mathcal{U}(t)\,\mathcal{U}^*(-t)$ и $\mathcal{U}(t)$. Он интерпретировал этот факт в том смысле, что в матрице $\mathcal{U}(t)$ необходимо произвести сглаживание по времени, поскольку в определение $\mathcal{U}(t)$ в теории возмущений включено представление о мгновенном включении и выключении взаимодействия. Однако эта трудность с матрицей $\mathcal{U}(t)$ остается даже в нетривиальных теориях в двумерном пространстве-времени, подобных (1.10), для которых никакие бесконечные перенормировки не нужны. Эту ситуацию можно и, по-моему, нужно в действительности интерпретировать совершенно по-другому: точное решение теории приводит в каждый момент времени к разным странным представлениям, точно так же, как это было в (6.23). В этом случае матрица $\mathcal{U}(t)$ существовать не может, несмотря на то что поля в представлении Гейзенберга и представления группы Пуанкаре хорошо определены.

Приведенные выше доводы говорят в пользу той точки зрения, что ультрафиолетовая катастрофа — та цена, которую приходится платить за игнорирование странных представлений. Однако в традиционном способе рассуждения, которому я здесь хочу следовать, подобных вопро-

---

*) См. также Н. Н. Боголюбов и Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957, гл. 6. (*Прим. перев.*)

сов избегают, используя ультрафиолетовое обрезание. В результате странные представления могут появиться только в пределе, когда соответствующие обрезания и стенки ящика устремляются к бесконечности. Как всем известно, этот предельный переход широко изучался в теории перенормировок. Основная идея проста. Путем тщательного исследования рядов теории возмущений выделяют основные расходимости теории, скажем перенормировку массы, перенормировку заряда. Затем в гамильтониан вводятся контрчлены, которые в пределе, когда обрезание обращается в бесконечность, становятся настолько сингулярными, что оказываются в состоянии компенсировать бесконечности, возникающие вследствие сингулярности взаимодействия. Например, контрчлен перенормировки массы в теории типа (1.8) должен иметь вид $A\ (h) : \varphi^2 : (x)$, где $A\ (h) \to \infty$, когда h стремится к трехмерной δ-функции. Насколько мне известно, тщательное математическое рассмотрение, показывающее, что последнее имеет место во всех порядках теории возмущений, произведено не было*). Я думаю, что почти все уверены в том, что этот прием должен работать безотказно, если контрчлены подобраны достаточно мудро. Что было сделано до сих пор, так это регуляризация формального степенного разложения неким ковариантным образом, который отнюдь не просто связан с упомянутым выше нерелятивистским способом обрезания. Затем устанавливают, каким образом перенормируется возникающее выражение, и, наконец, формально показывают, как подобную операцию можно интерпретировать в терминах перенормировок массы, заряда и т. п. С точки зрения данных лекций все эти результаты, относящиеся к наиболее серьезным достижениям квантовой теории поля, подлежат систематическому пересмотру.

Если кто-нибудь заинтересуется тем, чтобы как-то понять структуру теории с нетривиальной динамикой, но без технических трудностей, связанных с перенормировкой, то для этого можно рассмотреть самодействующее скалярное поле с четверным взаимодействием в двумерном

---

*) См., однако, книгу Н. Н. Боголюбова и Д. В. Ширкова, указанную в сноске на предыдущей странице (*Прим. перев.*)

пространстве-времени. В такой теории все константы перенормировки конечны во всех порядках теории возмущений, так что в ней имеется возможность исследовать предел теории в ящике без ультрафиолетового обрезания.

§ 8. Формализм гильбертова пространства; существенная самосопряженность различных гамильтонианов

В предыдущих двух параграфах я пытался прояснить, почему, если следовать традиционной линии построения квантовой теории поля, введение ящика и, если потребуется,— ультрафиолетового обрезания более или менее неизбежно. Обсуждение ведется на самом высоком уровне. В данном параграфе я, наконец, обращаюсь к первой части реальной задачи: допустим, что вводится ящик и, если необходимо,— ультрафиолетовое обрезание. Можно ли доказать, что возникающий формальный гамильтониан определяет динамику, и если да, то будет ли эта динамика единственной?

Всем известно, что об этом говорится в большинстве книг по квантовой механике. Если H — гамильтониан и он эрмитов, то $\mathcal{U}(t) = \exp iHt$ — унитарный оператор, который описывает динамику, т. е. временную эволюцию состояния или наблюдаемых систем (в зависимости от того, используется ли шредингерово или гейзенбергово представление). Чтобы сохранялась вероятность, оператор $\mathcal{U}(t)$ должен быть унитарным. Конечно, малейшее знакомство с любой книгой о гильбертовом пространстве позволяет убедиться, что это не всегда бывает так. (Иногда это соображение используется в качестве аргумента в пользу изучения математики на физических факультетах, так что студенты-физики старших курсов не должны смущаться.) Существует различие между эрмитовым и самосопряженным операторами. Самосопряженный оператор приводит к единственной динамике; эрмитов оператор может, вообще говоря, привести либо к нескольким динамикам, либо ни к одной. Первая задача этого параграфа — разъяснить, что в большинстве случаев это различие существенно физическое. Возникающие здесь весьма правдоподобные интуитивные соображения, конечно, не в состоянии заменить точную математическую теорию, изложение которой содержится в многочисленных прекрасных учебниках (см., например, Stone, 1965; Riesz, SZ-Nagy, 1955; Ахиезер, Глазман, 1966 *)).

Прежде всего приведем некоторые стандартные обозначения и теоремы. Рассмотрим линейный оператор A, определяемый на подмножестве $D(A)$ сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Подмножество $D(A)$ не обязано совпадать со всем $\mathcal{H}$, но предполагается. что оно является в нем плотным линейным подмножеством. Если B — линейный оператор такой, что $D(B) \supset D(A)$ и $B\Phi = A\Phi$ для всех $\Phi \in D(A)$, то это записывают как $B \supset A$ и называют оператор B расширением A. Сопряженный A оператор A^* определяется следующим образом: $\mathrm{X} \in D(A^*)$, если существует вектор X такой, что для всех $\Phi \in D(A)$

$$(\mathrm{X}, A\Phi) = (\hat{\mathrm{X}}, \Phi). \tag{8.1}$$

Тогда, по определению, $\hat{\mathrm{X}} = A^*\mathrm{X}$. То, что это равенство действительно определяет (однозначно!) линейный оператор, следует из предположения,что подмножество $D(A)$ плотное. Область определения A^*, следующая из такого определения, не обязательно плотная. Если она плотная, то определен оператор $(A^*)^*$; он называется замыканием A. Если $A = (A^*)^*$, то оператор A называется *замкнутым*. Если $A \subset A^*$, то оператор A называется *эрмитовым*. Если $A = A^*$, то он называется *самосопряженным*. Если $A^{**} = A^*$, то оператор A называется *существенно самосопряженным*. Если оператор A эрмитов, но не существенно самосопряжен, то существуют два числа, которые позволяют оценить его отклонение от требований существенной самосопряженности; это *индексы дефекта*. Они представляют собой числа линейно независимых решений уравнений

$$A^*\Phi = \pm i\Phi \tag{8.2}$$

соответственно. Если ни один из индексов дефекта (m, n) эрмитова оператора A не равен нулю, то можно получить эрмитово расширение B оператора A, определив его равенством

$$B(\Phi + \alpha(\Phi_+ + \Phi_-)) = A\Phi + \alpha i(\Phi_+ - \Phi_-),$$

*) См. особенно гл. 7 и приложения 1, 2.

где $\Phi \in D(A)$, α — произвольное комплексное число, а Φ_+ и Φ_- — соответствующие решения уравнений (8.2). Тогда оператор B имеет индексы дефекта $(m-1,\ n-1)$. Тем самым для случая индексов дефекта (1,1) можно ожидать наличие однопараметрического семейства самосопряженных расширений, иначе говоря, с практической точки зрения следует иметь в виду существование однопараметрического семейства различных динамик.

Если A — вещественный эрмитов оператор, то его индексы дефекта должны быть равны. Более наглядно, если V — антиунитарное преобразование, т. е. оно представляет собой однозначное отображение пространства $\mathscr{H}$ самого на себя со свойствами $V(a\Phi + b\Psi) = \bar{a}V\Phi + \bar{b}V\Phi$ и $(V\Phi, V\Psi) = \overline{(\Phi, \Psi)}$ для всех $\Phi, \Psi \in \mathscr{H}$, то оператор A называется *вещественным относительно* V, если $VD(A) = D(A)$ и $VAV^{-1} = A$. Если $A^*\Phi = \pm i\Phi$, то $A^*V\Phi = \mp iV\Phi$, когда оператор A вещественен относительно V, так что оператор A имеет равные индексы дефекта.

Пример 1

Бесконечно малый сдвиг *). Пусть $\mathscr{H}$ — пространство всех квадратично интегрируемых функций, заданных на ограниченном интервале (a, b), A — оператор $-i\frac{d}{dx}$, $D(A)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых функций с носителями внутри этого интервала. Тогда, если $\Phi, \Psi \in D(A)$, то

$$(\Phi, A\Psi) - (A\Phi, \Psi) = -i\overline{\Phi}(x)\Psi(x)\,\Big|_a^b = 0,$$

так что $A \subset A^*$. Оператор A, очевидно, представляет собой инфинитезимальный оператор сдвига

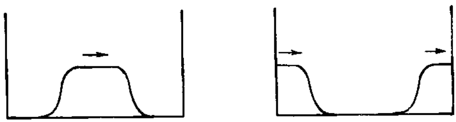
$$(\mathscr{U}(t)\ \Phi)(x) = (\exp\ (itA)\ \Phi)(x) = \Phi(x+t)$$

для всех достаточно малых t. Малость t должна определяться тем, насколько близко носитель Φ примыкает к краю интервала. Очевидно, что если Φ не нуль, то для достаточно больших t оператор сдвига будет перемещать Φ к са-

---

*) Примеры 1, 2, 3, 4 охватываются теоремами главы V книги Титчмарша (Titchmarsh, 1958).

мому концу этого интервала. Что в этом случае произойдет, нельзя определить, зная A только на $D(A)$. Очевидно, что для сохранения интеграла $\int\limits_a^b |\Phi(x)|^2\,dx$ все, что сдвигается через границу в правой краевой точке, должно возвращаться через левую краевую точку.



Однако, поскольку в интеграл входит только модуль Φ, эта функция может изменить фазу. Из принципа суперпозиции следует, что эта фаза должна быть одинаковой для всех функций. Таким образом, должно существовать однопараметрическое семейство самосопряженных расширений A_θ оператора A на все квадратично интегрируемые функции с квадратично интегрируемыми производными такое, что

$$\Phi(a) = e^{i\theta}\Phi(b). \tag{8.3}$$

Очевидно, что на таких функциях в силу (8.3)

$$(\Phi,\ A_\theta\Psi) - (A_\theta\Phi,\ \Psi) = -i\overline{\Phi(x)}\,\Psi(x)\,\big|_a^b = 0.$$

Чтобы рассчитать оператор A^*, полезно сделать одно замечание технического порядка. Он ищется для тех $\mathrm{X} \in \mathcal{H}$, для которых $(\mathrm{X}, A\Phi) = (\hat{\mathrm{X}}, \Phi)$ для всех $\Phi \in D(A)$. Далее, для *любого* $\mathrm{X} \in \mathcal{H}$ левая часть этого равенства определяет линейный функционал на Φ, который непрерывен на Φ в смысле Шварца. В самом деле, по определению, этот функционал совпадает с $-i\,\dfrac{d\mathrm{X}}{dx}$, как с обобщенной функцией. Возникает только один вопрос: является ли эта обобщенная функция квадратично интегрируемой функцией? Это означает, что при решении уравнения (8.2) следует искать все решения в виде обобщенных функций, рассматривая оператор A^* как оператор дифференцирования.

В данном случае решения с точностью до постоянных множителей равны $\exp(\pm x)$, так что фактически, как мы и предполагали, индексы дефекта равны (1, 1). Самосопряженное расширение A_θ обладает дискретным спектром с собственными значениями

$$\lambda_n = \frac{\theta + 2\pi n}{a - b}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

и с собственными функциями $\exp(i\lambda_n x)$.

Если краевую точку b устремить к $+\infty$, то ситуация коренным образом изменится. Из решений $\exp(\pm x)$ уравнения (8.2) только одно решение $\exp(-x)$ является квадратично интегрируемой функцией на интервале (a, ∞), так что индексы дефекта равны (1, 0). Тем самым в этом случае оператор A не обладает какими-либо самосопряженными расширениями и $\mathcal{U}(t)$ нельзя распространить на все t в качестве непрерывного унитарного представления группы временных сдвигов. Все будет хорошо для положительных t, но для достаточно больших отрицательных t любая функция Φ будет сдвигаться так, что ее носитель достигнет точки a. Тем самым в этом случае не будет никакой возможности сохранить вероятность.

С другой стороны, если a сдвинуть к $-\infty$, а b — к $+\infty$, то ни одна из функций $e^{\pm x}$ не будет квадратично интегрируемой, так что индексы дефекта будут равны (0, 0) и оператор $\mathcal{U}(t)$ будет единственным.

Пример 2

Свободная шредингерова частица на некотором интервале. Здесь мы будем рассматривать оператор $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ на точно такой же области, что и оператор в примере 1. Далее, для каждой Φ и всех достаточно малых t выражение $\mathcal{U}(t)\Phi = \exp[-(iAt)]\Phi$ определяет решение уравнения Шредингера для свободной частицы массы 1/2. В данном случае динамика не определяется единственным образом для всех t, поскольку есть несколько способов сохранить вероятность: частица может отразиться от концов данного интервала, или, как в предыдущем примере, она может «вытечь» в точке b для того только, чтобы возвратиться в точку a. Наиболее удобный способ наглядно представить ситуацию — это мысленно считать, что концы рассматриваемого интервала соединяются, образуя окружность. Тогда проблема сводится к движению по окружности, причем в точке соединения допускаются разрывы производной. Условие самосопряженности приводит к требованию непрерывности тока в точке соединения. Возможные динамики, очевидно, следует охарактеризовать возможными теориями рассеяния в точке соединения. В более явной форме самосопряженные расширения должны одно-однозначно соответствовать возможным матрицам рассеяния. Подобная матрица унитарна и включает в себя четыре амплитуды: отраженную и прошедшую для двух направлений. Это соответствует индексам дефекта (2, 2).

Решение в обобщенных функциях уравнения $-\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \pm i\Phi$ имеет вид $\Phi(x) = e^{cx}$, где c принимает одно из четырех значений: $\sqrt{\pm i}$, $-\sqrt{\pm i}$. Тем самым, как и предполагалось, индексы дефекта равны (2, 2). Если краевую точку b устремить к $+\infty$, то решения с $c = \sqrt{i}$, $-\sqrt{-i}$ не будут более квадратично интегрируемыми, так что индексы дефекта станут равными (1, 1). Однопараметрическое семейство различных динамик будет соответствовать различным законам отражения в краевой точке a. Если a устремить к $+\infty$, то индексы дефекта станут равными (0, 0). Условие квадратичной интегрируемости волновой функции вблизи бесконечности налагает на волновую функцию достаточное ограничение, так что никакой свободы, связанной с условиями отражения на бесконечности, больше не остается.

Примеры 3 и 4

Шредингерова частица в поле с четверным потенциалом притяжения и с кубическим потенциалом. Предыдущий пример продемонстрировал, что условия отражения в краевых точках интервала оказываются существенными, если иметь целью фиксировать динамику. Некоторые интересные разновидности этого явления имеют место, если рассматривать оператор $A = -\frac{d^2}{dx^2} - ax^4$, $a > 0$, на интервале $(-\infty, \infty)$ с той же областью определения, как и в примерах 1 и 2. Этот пример соответствует движению шредингеровой частицы в потенциале притяжения $V(x) = -ax^4$.

Классическое движение частицы в подобном потенциале таково, что частице с энергией E потребуется лишь конечный промежуток времени t, чтобы уйти на бесконечность из некоторой точки L, где

$$t = \int_L^\infty \frac{dx}{v} = \int_\infty^\infty \frac{dx}{2\sqrt{E - V}} \sim \int_L^\infty \frac{dx}{2\sqrt{a}\, x^2} < \infty.$$

Тем самым такая частица, вероятно, отразится на бесконечности и вернется обратно за конечный промежуток времени. Иначе говоря, в среднем бо́льшую часть времени она проводит вблизи начала координат. Подобная классическая картина движения могла бы навести на мысль, что все собственные функции дифференциального оператора A квадратично интегрируемы, так что спектр самосопряженного расширения A всегда дискретен. Отсюда также следует, что для определения динамики существен закон отражения на бесконечности. Действительно, детальное исследование показывает, что оператор A имеет индексы дефекта $(2, 2)$, так что точки $\pm\infty$ ведут себя подобно точке соединения в примере 2.

Аналогичные рассуждения, будучи примененными к случаю кубического потенциала ax^3, $a > 0$, приводят к тому, что здесь индексы дефекта следует ожидать равными $(1, 1)$, поскольку частица никогда не может достичь $+\infty$, тогда как на $-\infty$ ее поведение аналогично поведению частицы в четверном потенциале притяжения. Все однопараметрическое семейство самосопряженных расширений обладает дискретным спектром.

Следующий пример более близок к системам, которые представляют интерес в теории поля. Теорема, которая там приводится, является частным случаем известной теоремы Карлемана (Carleman, 1934). Приводимое ниже доказательство принадлежит Джаффе.

Пример 5

Оператор $-\Delta + V$ с потенциалом V, ограниченным снизу.

Теорема 8.1

Пусть Δ — лапласиан в пространстве n измерений, т. е. оператор $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, и V — бесконечно дифференцируемая вещественная функция на $\mathbf{R}^n$, ограниченная снизу. Пусть оператор $A = -\Delta + V$ определен на бесконечно дифференцируемых функциях с компактным носителем. Тогда A — существенно самосопряженный оператор.

Доказательство

Поскольку из существенной самосопряженности оператора A следует существенная сопряженность $(A + a \cdot 1)$, где a — любая вещественная постоянная, достаточно рассмотреть случай

$$V \geqslant 0.$$

В силу аргументации, которую мы уже несколько раз использовали, нам следует искать решения дифференциального уравнения в частных производных

$$(-\Delta + V)\,\Phi = \pm i\Phi \tag{8.4}$$

в виде обобщенных функций и показать, что ни одно из них не является квадратично интегрируемой функцией. В качестве первого шага следует доказать, что решения уравнения (8.4) в виде обобщенных функций фактически представляют собой бесконечно дифференцируемые функции. Это утверждение следует из так называемой *теоремы о локальной регулярности* *).

Чтобы убедиться в том, что такая функция не является квадратично интегрируемой, рассмотрим функцию u,

*) Теорема о локальной регулярности гласит, что решения в виде обобщенных функций дифференциального уравнения эллиптического типа ведут себя как коэффициенты уравнения; они бесконечно дифференцируемы, если бесконечно дифференцируемы эти коэффициенты; они аналитичны, если аналитичны коэффициенты. См. (Hörmander, 1965).

полученную усреднением $|\Phi(x)|^2$ по сфере радиуса r:

$$u(r) = \int\limits_{|x|=r} d\omega(x)\,|\Phi(x)|^2.$$

Функция u, будучи определенной на неотрицательной вещественной оси, бесконечно дифференцируема и обращается в нуль в точке $r = 0$. Запишем, что $\Phi = a + ib$, где a, b вещественны, и заметим, что a и b удовлетворяют уравнениям

$$-\Delta a + Va = \mp b, \qquad -\Delta b + Vb = \pm a.$$

Далее, интеграл по поверхности для функции $\frac{du}{dr}$ можно превратить в интеграл по объему:

$$\frac{du}{dr} = \int\limits_{|x|=r} d\omega(x)\,\frac{d}{dr}\,|\Phi(x)|^2 = 2\int\limits_{|x|\leqslant r} dx\nabla(a\nabla a + b\nabla b) =$$

$$= 2\int\limits_{|x|\leqslant r} dx\,[(\nabla a)^2 + (\nabla b)^2 + V(a^2 + b^2)] \geqslant 0.$$

Тем самым u является возрастающей функцией r, и, следовательно, функция Φ не может быть квадратично интегрируемой.

Если оператор V не ограничен снизу на бесконечности, то следует ожидать, что будут наблюдаться те же явления, что и в примере 4. Иначе говоря, если промежуток времени, необходимый частице для перемещения на бесконечность, конечен, то условия отражения на бесконечности конечны. Условия отражения на бесконечности должны быть существенны для определения динамики. В результате оператор A не будет существенно самосопряженным, и спектры его самосопряженных расширений должны будут содержать бесконечное число дискретных уровней энергии, идущих вплоть до $-\infty$. В силу большей геометрической свободы в пространствах с размерностью больше единицы, индексы дефекта в них должны быть, вообще говоря, равны (∞, ∞).

Если потенциал V не ограничен, но его сингулярность такова, что условие квадратичной интегрируемости решения (8.2) вблизи особой точки будет выделять это решение, то опять можно надеяться на то, что оператор A будет существенно самосопряженным. Однако при этом необходим более сложный аппарат, чем тот, который был использован при доказательстве теоремы 8.1. Классическая теорема такого рода сформулирована Т. Като (Kato T., 1949a, 1951).

Теорема 8.2

Пусть оператор H_0 с областью определения $D(H_0)$ является существенно самосопряженным, и пусть оператор H_1 определен на $D(H_0)$ и эрмитов в этой области. Предположим, что для каждой $\Phi \in D(H_0)$

$$\|H, \Phi\| \leqslant a\|\Phi\| + b\|H_0\Phi\| \tag{8.5}$$

для некоторых положительных постоянных a, b с $b \leqslant 1$. Тогда оператор $(H_0 + H_I)$, определенный на $D(H_0)$, будет существенно самосопряженным.

Эта теорема была использована Т. Като, чтобы показать существенную самосопряженность гамильтониана в атомной физике. Гипотеза (8.5) означает, что оператор H_I в некотором смысле мал по сравнению с оператором H_0. Теоремы 8.1 и 8.2 были объединены и обобщены различными авторами с тем, чтобы можно было охватить потенциалы V, имеющие интересные локальные сингулярности и, кроме того, растущие на бесконечности (Stummel, 1956; Wienholtz, 1958; Nilsson, 1958).

Гамильтониан вида (8.4), где V — полином, представляет собой конечномерный аналог типичного гамильтониана теории поля

$$H = \sum_{j=1}^{\infty} P_j^2 + \mathcal{P}(q_1, q_2, \ldots).$$

Тем самым по аналогии следовало бы ожидать, что если $\mathcal{P}$ — полином третьей степени, то оператор H *не должен* быть существенно самосопряженным на соответствующем аналоге области определения, рассмотренной в конечномерном случае, и спектр его самосопряженных расширений должен простираться до $-\infty$. Ослабленный вариант в существенном такого же утверждения был доказан, и мы обсудим его в § 9. Хотя утешительно, что аналогия между системами с конечным и бесконечным числом степеней свободы применима в столь широких масштабах, однако далеко не очевидно, что все превратности системы с бесконечным числом степеней свободы имеют аналоги в системах с конечным числом степеней свободы. Замечательный позитивный результат в этом направлении был получен И. Като, который показал, что для скалярного взаимодействия бозонов и фермионов типа Юкава с должным образом подобранным ультрафиолетовым обрезанием гамильтониан взаимодействия мал сравнительно со свободным гамильтонианом, так что применима теорема Т. Като (Kato Y., 1961) *).

При переходе от взаимодействия Юкава к нелинейным бозонным взаимодействиям ситуация радикальным образом меняется. Как только степень взаимодействия $n \geqslant 3$, гамильтониан взаимодействия совершенно подавляет вклад от P_j. Более точно, Галиндо (Galindo, 1962) построил для таких гамильтонианов состояния, дающие любые отрицательные средние значения.

В этой связи интересно отметить, что, в то время как взаимодействие $\lambda\varphi^4$ в двумерном пространстве-времени гораздо «больше», чем взаимодействие Юкава, для придания ему математического смысла в случае системы в ящике не нужны никакие ультрафиолетовые обрезания, в то время как для той же цели в случае взаимодействия $\lambda\bar{\psi}\psi\varphi$ даже в двумерном пространстве-времени ультрафиолетовое обрезание необходимо.

Тот факт, что гамильтониан взаимодействия $\lambda\varphi^4$ «больше» свободного гамильтониана, не означает, что свободный гамильтониан мал в сравнении с $\lambda\varphi^4$ в смысле Т. Като; в смысле Т. Като они вообще несравнимы. В этом случае естественно попытаться исследовать непосредственно уравнение

$$i\frac{\partial \mathcal{U}(t)}{\partial t} = H_I(t)\,\mathcal{U}(t). \tag{8.6}$$

Первым шагом в этом направлении должно быть изучение существенной самосопряженности гамильтониана $H_I(t)$ на соответствующей области. Хороший результат подобного рода был получен Лэнфордом**), который показал, что справедлива следующая теорема.

*) См. также анонсированные результаты (Prosser, 1963).

**) O. E. Lanford, частное сообщение.

Теорема 8.3

Пусть H_I определен и эрмитов на линейном подмножестве D_0 пространства $\bigoplus\mathscr{H}^{(k)}$, состоящего из всех векторов Φ, для которых $\Phi^{(k)}=0$ для всех достаточно больших k. Предположим, что $H_I D_0 \subset D_0$ и на D_0 имеет место $H_I \varphi_I(g_i) = \varphi_I(g_i) H_I$, где g_i, $i=1,2,\ldots,$ — некоторый набор одночастичных состояний, полный и ортонормированный относительно скалярного произведения $(g, h) = \int d\Omega(p)\overline{\tilde{g}(\mathrm{p})}\tilde{h}(\mathrm{p})$, где $\varphi_I(g_i) = \int d^3x\varphi_I(\mathrm{x})g_i(\mathrm{x})$. Тогда оператор H_I существенно самосопряжен.

Эта теорема достаточно сильна, чтобы обеспечить доказательство существенной самосопряженности всех гамильтонианов взаимодействия самодействующих бозонных полей, которые представляют собой полиномы по соответствующему полю (с учетом ультрафиолетового обрезания, когда оно необходимо). Она была обобщена Джаффе и Доплихером *). Предварительно необходимо ввести два определения.

Определения

Линейное множество D векторов в $\mathscr{H}$ образует *коммутирующую* область относительно оператора A, если:

1) $D \subset D(A)$;

2) D плотно в $\mathscr{H}$;

3) $\varphi(g)D \subset D$ для всех квадратично интегрируемых функций g;

4) $AD \subset D(\varphi)$;

5) $[\varphi(g), A]_- D = 0$.

Множество D представляет собой *Ψ-коммутирующую область относительно A*, если:

1) D — коммутирующая область относительно A;

2) $\Psi \in D$ — циклический вектор для полиномов по φ;

3) Ψ — аналитический вектор для $\varphi(g)$.

(Напомним, что Ψ называется аналитическим вектором для $\varphi(g)$, если для некоторой $a>0$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\|\varphi(g)^{(n)}\Psi\|}{n!}<\infty$.)

---

*) A. Jaffe, S. Doplicher, частные сообщения.

Теорема 8.4

Допустим, что для некоторого Ψ область D будет Ψ-коммутирующей областью относительно A, и предположим, что $A\Psi \subseteq D\ ((A|_{\mathscr{P}\Psi})^*)$, где $\mathscr{P}\Psi$ состоит из полиномов по $\varphi\ (g)$, которыми подействовали на Ψ. Тогда, если $A \subset A^*$, то $A|_D$ — существенно самосопряженный оператор.

Эта теорема настолько мощна, что с ее помощью можно показать, что все гамильтонианы взаимодействия, представляющие собой виковы целые функции по свободным полям, являются самосопряженными, если они определены на соответствующей области.

Из этой теоремы следует, что гамильтониан $H_I(t)$ определен как самосопряженный оператор существенно единственным образом. Следующим этапом в изучении уравнения (8.6) должно быть придание хорошо определенного математического смысла его формальному решению, т. е. упорядоченной по времени экспоненте

$$\mathscr{U}(t) = T\left[\exp - i \int_{-\infty}^{t} H_I(\tau)\,d\tau\right]. \tag{8.7}$$

К сожалению, математическая теория выражения (8.7) все еще далека от совершенства. Наилучшие результаты, полученные до сих пор, были связаны с теорией дифференциальных уравнений в частных производных (Lions, 1965, стр. 42—52). При этом обычно требуется, чтобы гамильтониан $H_I\ (t)$ был ограничен снизу, т. е. принимается гипотеза, которая для обсуждаемых гамильтонианов теории поля несправедлива, если только они не искромсаны настолько, что их можно более непосредственно исследовать другими методами. Существенной проблемой является постоянный контроль за действием оператора $\mathscr{U}\ (t)$ на область определения гамильтониана $H_I\ (t)$. Очевидно, что в этом направлении еще предстоит уйма работы.

§ 9. Стабильность вакуума

В предыдущем параграфе было показано, что для некоторых искромсанных гамильтонианов существует единственным образом определенная динамика, хотя в ряде наиболее интересных случаев состояние вопроса все еще неудовлетворительно. В этом параграфе будет обсуждаться следующий этап объявленной программы: переход к пределу, когда отсутствуют обрезание и ящик.

От каких объектов из искромсанного формализма можно было бы ожидать сходимости к соответствующим объектам теории без ящика и обрезания и в каком смысле следует понимать эту сходимость? Примером объекта, который не должен сходиться, поскольку у него нет никакого разумного предела, является семейство унитарных операторов $\mathcal{U}(t)$, связывающих представления Гейзенберга и взаимодействия. Сходимость должна отсутствовать, поскольку для гамильтонианов, которыми мы интересуемся, в теории без ящика представление взаимодействия существовать не может.

То обстоятельство, что релятивистская теория поля может быть весьма просто описана с помощью своих вакуумных средних, подсказывает нам, что следовало бы исследовать сходимость вакуумных средних. Для этой цели необходимо подобрать достойную кандидатуру на роль приближенного вакуума в искромсанной теории. Тот факт, что это может привести к совершенно нетривиальным ограничениям, вытекает из следующей теоремы.

Теорема 9.1.

Пусть A — оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{R}(\mathcal{O})$ ограниченного открытого множества $\mathcal{O}$ в локальной квантовой теории. Тогда оператор A не обладает ни одним собственным значением конечной кратности.

Замечания. Оператор A называется присоединенным к $\mathcal{R}(\mathcal{O})$, если он коммутирует со всеми операторами, которые коммутируют с каждым оператором из $\mathcal{R}(\mathcal{O})$. Например, предположим, что A — замыкание сглаженного оператора поля $\varphi(f)$, где f — вещественная основная функция с носителем в $\mathcal{O}$ и где для всех основных функций g имеет место $\|\varphi(g)^n \Psi_0\| < C^n n!$ для некоторой постоянной C, которая может зависеть от g. Тогда, как это следует из работы Борхерса и Циммермана, оператор $\varphi(g)$ существенно самосопряжен на наборе векторов $\mathcal{P}\Psi_0$, где $\mathcal{P}$ — полином по сглаженным полям, а соответствующие спектральные проекции порождают алгебры фон Неймана локальной квантовой теории (Borchers, Zimmerman, 1964).

Доказательство

Простейший путь доказательства теоремы — обратить внимание на то, что она следует из хорошо известного результата локальной квантовой теории: если E — оператор проектирования, принадлежащий алгебре фон Неймана $\mathscr{R}(\mathscr{O})$ ограниченного открытого множества $\mathscr{O}$, то оператор E бесконечен в алгебрах фон Неймана $\mathscr{R}(\mathscr{O})$ открытых множеств $\mathscr{O}_1$, содержащих $\mathscr{O}$ и таких, что пересечение $\mathscr{O} \cap \mathscr{O}_1$ не пусто*). Оператор проектирования конечномерного ранга конечен в каждой алгебре фон Неймана, которая его содержит. Если собственное значение λ оператора $\varphi(f)$ обладает конечной кратностью, то оператор проектирования на подпространство, натянутое на соответствующие собственные функции, принадлежит алгебре фон Неймана $\mathscr{R}(\mathscr{O})$ для каждого ограниченного множества $\mathscr{O}$, содержащего носитель f.

Это рассуждение можно распространить на поля, сглаженные с основными функциями в трехмерном пространстве при условии, что они присоединены к алгебре фон Неймана некоторой ограниченной области. Таким образом, если задан оператор плотности энергии $T_{00}(x)$, локальный относительно некоторого неприводимого набора полей, и удается доказать, что оператор

$$\int g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\, T_{00}(\mathbf{x}) = H_g \tag{9.1}$$

хорошо определен для некоторой бесконечно дифференцируемой вещественной функции g с компактным носителем, то на роль вакуумного состояния не будет ни одного приемлемого кандидата. Уравнение

$$H_g \Phi = \lambda \Phi \tag{9.2}$$

может иметь (нормируемые!) решения Φ, только если λ бесконечно вырождено. (Фактически предположение, что спектр оператора вида (9.1) всегда непрерывен, почти

*) Это в свою очередь следует из известного результата Кадисона (Kadison, 1963). См. также работу (Guenin, Misra, 1963). Явным образом это утверждение установлено в пока не опубликованной работе Борхерса.

очевидно, но оно все еще не доказано.) Следует также отметить, что для свободного скалярного поля оператор H_g, определенный формулой (9.1), не может действовать на вакуум ($\|H_g \Phi_0\| = \infty$!). Это не лишает полностью интереса теорему 9.1, поскольку можно рассматривать приближенные гамильтонианы, полученные сглаживанием T_{00} с основными функциями в четырехмерном пространстве или, наоборот, используя выражение (9.1), но с регуляризованными полями.

С другой стороны, из результатов И. Като, упомянутых выше (Kato Y., 1961), следует , что если ввести ящик только в член с взаимодействием, то для простых взаимодействий бозонов и формионов спектр полного гамильтониана будет близок к спектру свободного гамильтониана для достаточно малых значений константы связи. В частности, будет существовать единственное нормируемое приближенное вакуумное состояние. Иначе говоря, существование приближенного вакуума очень существенно зависит от способа, каким ящик вводится в теорию.

Существует еще одна общая теорема, которая проливает свет на природу спектра оператора H_g, если ящик введен посредством (9.1). Она принадлежит Эпштейну, Глазеру и Джаффе (Epstein, Glaser, Jaffe, 1965).

Теорема 9.2.

Если φ — локальное поле и f — основная функция с компактным носителем, то в релятивистской теории поля с вакуумом Ψ_0 выражение $\varphi(f) - (\Psi_0, \varphi(f)\Psi_0)$ никогда не может быть положительно определенным.

Доказательство этой теоремы можно провести, построив состояние, являющееся линейной комбинацией состояний Ψ_0 и $\varphi(f)\Psi_0$, в котором среднее значение рассматриваемого оператора равно нулю. Это доказательство также будет справедливо, если предположить, что поля имеют смысл, будучи сглаженными с основными функциями, зависящими только от пространственных переменных. Тем самым можно сделать вывод, что ни один оператор H_g вида (9.1) никогда не может быть положительно определенным.

Иначе говоря, введение ящика по методу (9.1) порождает огромные технические трудности. Чтобы выполнить эту работу, вероятно, следовало бы использовать в качестве приближенного вакуума волновой пакет непрерывных волновых функций в надежде, что нежелательные состояния с отрицательной энергией, появляющиеся вследствие теоремы 9.2, исчезнут в пределе, когда отбрасываются ящик и ультрафиолетовое обрезание. Как мне кажется, наиболее привлекательной перспективой в данный момент является введение ящика только в член с взаимодействием. Хотя очевидно, что в этом случае теоремы 9.1 и 9.2 станут неприменимыми, далеко не ясно, приведет ли подобная процедура к гамильтониану, ограниченному снизу.

На примере искромсанных гамильтонианов мы здесь столкнулись с известной проблемой квантовой теории поля. В течение некоторого времени многие авторы полагали, что для традиционных взаимодействий, встречающихся в квантовой теории поля, точные решения, если они только существуют, не могут удовлетворять спектральному условию. Например, Мано (Mano, 1955) привел разнообразные доводы, которые свидетельствуют о том, что в теории нейтрального скалярного бозонного поля, связанного скалярным взаимодействием Юкава со спинорным полем, существуют состояния с произвольно низким значением энергии. К сожалению, его расчеты были лишь приближенными и поэтому неубедительными. Однако существуют случаи, когда можно привести убедительные аргументы в пользу того, что никаких решений, удовлетворяющих спектральному условию, не существует. Этот вопрос имеет такое фундаментальное значение, что он заслуживает более подробного обсуждения.

К числу таких теорий относятся теории бозонных полей, связанных тройным взаимодействием, например $\lambda\varphi^3$, $\lambda\varphi^2\psi$, $\lambda\varphi\psi\chi$. Для простоты мы будем рассматривать только первую теорию. Она была предложена Уордом в качестве примера теории, в которой ряд теории возмущений является сверхперенормируемым (Ward, 1950).

Вскоре все поняли, что если считать, что из принципа соответствия следует хоть что-нибудь поучительное, то эта теория не может удовлетворять спектральному условию, поскольку гамильтониан соответствующей классической теории поля не ограничен снизу (Fierz). Этот классический довод стал еще более убедительным после работы Келлера (Keller, 1957), который показал, что для большого класса начальных значений $u(\mathbf{x}, 0)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0)$ решения уравнения

$$(\square + m^2)\ u\ (x) = \lambda u^2\ (x) \tag{9.3}$$

в конечный момент времени содержат расходимости. Это находится в разительном противоречии с ситуацией, имеющей место для классического уравнения

$$(\square + m^2)\ u\ (x) = -\lambda u^3\ (x), \quad \lambda > 0, \tag{9.4}$$

для которого было показано, что общие решения его без сингулярностей существуют для всех достаточно гладких начальных условий (Jörgens, 1961; см. также Browder, 1962; Segal, 1963; Browder, Strauss, 1963).

Первое доказательство того, что решения уравнения (9.3) в квантовой теории поля не удовлетворяют спектральному условию, было дано Беймом (Baym, 1960). По-моему, рассуждения Бейма вообще нельзя считать доказательством, поскольку он игнорировал даже те тривиальные вычитания, которые необходимы, чтобы превратить $\varphi(x)^2$ в: φ^2: (x), так что вопрос о справедливости спектрального условия можно считать все еще открытым. В действительности можно предложить удовлетворительный вариант аргументации Бейма, который будет действенным по крайней мере в ряде нетривиальных случаев.

Пусть $\mathcal{U}(f)$ и $\mathcal{V}(g)$ — неприводимое представление перестановочных соотношений в форме Вейля (6.3), которые теперь будут записываться в непрерывном виде:

$$\mathcal{U}(f_1)\mathcal{U}(f_2) = \mathcal{U}(f_1 + f_2),$$
$$\mathcal{V}(g_1)\mathcal{V}(g_2) = \mathcal{V}(g_1 + g_2),$$
$$\mathcal{U}(f)\mathcal{V}(g) = \exp[-i(f, g)]\,\mathcal{V}(g)\mathcal{U}(f),$$

где f и g — основные функции в трехмерном пространстве. Предположим, что это представление ковариантно относительно представления $\{\mathbf{a}, R\} \to U(\mathbf{a}, R)$ группы Евклида и антиунитарного преобразования обращения времени $U\,(I_t)$:

$$\left.\begin{aligned} U(\mathbf{a},\ R)\,\mathcal{U}(f)\,\mathcal{U}^{-1}(\mathbf{a},\ R) &= \mathcal{U}(\{\mathbf{a},\ R\}\,f),\\ U(\mathbf{a},\ R)\,\mathcal{V}(g)\,U^{-1}(\mathbf{a},\ R) &= \mathcal{V}(\{\mathbf{a},\ R\}\,g),\\ U(I_t)\,\mathcal{U}(f)\,U^{-1}(I_t) &= \mathcal{U}(-f),\\ U(I_t)\,\mathcal{V}(g)\,U^{-1}(I_t) &= \mathcal{V}(g).\end{aligned}\right\}\tag{9.5}$$

Предположим, что U (a, R) обладает единственным инвариантным состоянием

$$U\,(\mathbf{a},\ R)\ \Psi_0 = \Psi_0,$$

которое также инвариантно относительно обращения времени

$$U\,(I_t)\,\Psi_0 = \Psi_0.$$

Предположим также, что Ψ_0 — циклический вектор для операторов $\mathcal{U}$ (f).

Заметим, кстати, что именно в рамках таких предположений Араки доказал цитированную выше фундаментальную теорему о единственности. Он показал, что оператор H, который на векторах вида $\sum a_i\,\mathcal{U}\ (f_i)\,\Psi_0$ эрмитов и положительно определен, фиксируется единственным образом заданием представления перестановочных соотношений, если он коммутирует с $U\,(I_t)$ и имеет вид

$$H = \int \frac{\pi^2(\mathbf{x})}{2}\,d\mathbf{x} + H',\tag{9.6}$$

где оператор H' коммутирует с $\mathcal{U}$ (f). Основная идея доказательства — использование тождества

$$(\mathcal{U}(f)\,\Psi_0,\quad H\,\mathcal{U}(f_k)\,\Psi_0) = \frac{1}{2}\,(f_j f_k)(\mathcal{U}(f_j)\,\Psi_0,\quad \mathcal{U}(f_k)\,\Psi_0),$$

которое позволяет выразить матричные элементы гамильтониана через производящий функционал

$$E\,(f) = (\Psi_0,\ \mathcal{U}(f)\,\Psi_0).$$

Для целей данного доказательства предположим, что оператор H определен также и на состояниях $\mathcal{V}$ $(g)\,\Psi_0$.

Тогда получим

$$(\mathcal{V}(g)\Psi_0,\ H\mathcal{V}(g)\Psi_0) =$$
$$= \Big(\Psi_0,\ \int d\mathbf{x}\,\frac{1}{2}\lim_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\to\mathbf{x}}[\pi(\mathbf{x}_1)\pi(\mathbf{x}_2) -$$
$$-(\Psi_0,\ \pi(\mathbf{x}_1)\pi(\mathbf{x}_2)\Psi_0)]\,\Psi_0\Big) + (\Psi_0,\ \mathcal{V}^{-1}(g)H'\mathcal{V}(g)\Psi_0).$$

Здесь предполагается, что H' имеет конкретный вид

$$\int d\mathbf{x}\Big\{-\frac{\lambda}{3}\lim_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3\to\mathbf{x}}[\varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2)\varphi(\mathbf{x}_3) -$$
$$-(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\Psi_0)\varphi(\mathbf{x}_2)\varphi(\mathbf{x}_3) - (\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0)\varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_3) -$$
$$-(\Psi_0,\varphi(\mathbf{x}_3)\Psi_0)\varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2) - (\Psi_0,\varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0)\varphi(\mathbf{x}_3) -$$
$$-(\Psi_0,\varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_3)\Psi_0)\varphi(\mathbf{x}_2) - (\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_2)\varphi(\mathbf{x}_3)\Psi_0)\varphi(\mathbf{x}_1) +$$
$$+2(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0)(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_3)\Psi_0) +$$
$$+2(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_3)\Psi_0)(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0) +$$
$$+2(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_2)\varphi(\mathbf{x}_3)\Psi_0)(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\Psi_0) -$$
$$-(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2)\varphi(\mathbf{x}_3)\Psi_0)] - \frac{\delta m^2}{2}\lim_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\to\mathbf{x}}[\varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2) -$$
$$-(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\Psi_0)\varphi(\mathbf{x}_2) - (\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0)\varphi(\mathbf{x}_1) +$$
$$+2(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\Psi_0)(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0) - (\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0)] +$$
$$+\frac{1}{2}\lim_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\to\mathbf{x}}[\nabla\varphi(\mathbf{x}_1)\nabla\varphi(\mathbf{x}_2) - (\Psi_0,\ \nabla\varphi(\mathbf{x}_1)\nabla\varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0)] +$$
$$+\frac{m^2}{2}\lim_{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\to\mathbf{x}}[\varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2) - (\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\Psi_0)\varphi(\mathbf{x}_2) -$$
$$-(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0)\varphi(\mathbf{x}_1) + 2(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\Psi_0)(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0) -$$
$$-(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0)]\Big\}.$$

Форма, в которой записаны контрчлены, предполагает, что константа перенормировки поля конечна, как это следует из рассмотрения по теории возмущений в пространстве-времени четырех, трех и двух измерений. (В противном случае использование канонического формализма скорее всего было бы бессмысленно.) Контрчлен перенормировки массы в теории поля в дву- или трехмерном пространстве оказывается излишним, если только указания теории возмущений хоть сколько-нибудь поучительны.

Входящая в (9.7) предельная процедура далее конкретизироваться не будет. Все, что здесь существенно, так это равенство

$$\mathscr{V}^{-1}(h)\,H\,\mathscr{V}(h) = H' + \int d\mathbf{x}\left\{\left[-\nabla h\cdot\nabla\varphi + \frac{1}{2}(\nabla h)^2\right] + \right.$$
$$+\frac{1}{2}(m^2-\delta m^2)\left[-2h(\mathbf{x})(\varphi(\mathbf{x}) - (\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x})\Psi_0)) + h^2(\mathbf{x})\right] +$$
$$+\lambda\left[h(\mathbf{x})\left(\lim_{\mathbf{x}_1,\,\mathbf{x}_2\to\mathbf{x}}(\varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2) - (\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\Psi_0)\varphi(\mathbf{x}_2) - \right.\right.$$
$$-(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0)\varphi(\mathbf{x}_1) + 2(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\Psi_0)(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0) -$$
$$\left.\left. -(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x}_1)\varphi(\mathbf{x}_2)\Psi_0)\right)\right] - h^2(\mathbf{x})(\varphi(\mathbf{x}) -$$
$$\left. -(\Psi_0,\ \varphi(\mathbf{x})\Psi_0)) + \frac{1}{3}h^3(\mathbf{x})\right\}.$$

Тем самым

$$(\mathscr{V}(h)\Psi_0,\ H\mathscr{V}(h)\Psi_0) = \int d\mathbf{x}\left\{\frac{1}{2}(\nabla h^2) + \right.$$
$$\left. +\frac{1}{2}(m^2-\delta m^2)h^2(\mathbf{x}) + \frac{\lambda}{3}h^3(\mathbf{x})\right\}.$$

Далее, если величина $(m^2 - \delta m^2)$ конечна, то это выражение представляет собой форму по h, которую при данном выборе h можно сделать сколько угодно отрицательной. С другой стороны, если величина $(m^2 - \delta m^2)$ бесконечна, то можно показать, что оператором H нельзя действовать на вектор $\mathscr{V}(h)\Psi_0$. Тот факт, что существуют ограничения подобного рода на область определения H, не кажется удивительным. Вектор $\mathscr{V}(h)\Psi_0$ сильнее зависит от больших частот, чем вектор $\mathscr{U}(f)\Psi_0$, поскольку $\pi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^0}$, а бесконечность величины $(m^2 - \delta m^2)$ указывает на факт чувствительности к большим частотам.

Аналогичные рассуждения для четверного взаимодействия приводят к четверной форме по h, которая ограничена снизу при условии, что перенормировка массы конечна, а константа связи имеет нужный знак $\lambda > 0$. Конечно, эти рассуждения нельзя считать доказательством того, что такой четверной гамильтониан H ограничен снизу. Чтобы это доказать, нужно было бы исследовать его вакуумные средние по всем состояниям, для которых он может быть определен. Существуют примеры операторов типа $B = \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) : \varphi^2 : (\mathbf{x})$, где φ — свободное поле, средние от которых $(\mathscr{V}(h)\Psi_0,\ B\mathscr{V}(h)\Psi_0)$ ограничены снизу, но сам оператор не ограничен (это показали Эпштейн, Глазер и Джаффе). Из всех мыслимых трудностей, которые могут препятствовать получению физически разумных решений стандартных моделей, проблема справедливости спектрального условия кажется наиболее серьезной.

Между прочим, существование перенормированных степенных рядов для вакуумных средних в такой теории, когда каждый член ряда удовлетворяет спектральному условию, проливает на этот вопрос лишь незначительный свет. Могут также существовать решения уравнения поля в теории с взаимодействием $\lambda\varphi^3$, не удовлетворяющие спектральному условию, но обладающие такими асимптотическими разложениями в ряд, в которых спектральному условию удовлетворяет каждый член.

§ 10. Модели теорем существования. Выводы

В данный момент не существует никаких действительно нетривиальных релятивистских теорий, для которых удалось бы осуществить программу, изложенную в этих лекциях, так что фактически есть лишь несколько результатов, о которых можно сказать в параграфе с таким названием. Однако, как нам кажется, стоит изложить здесь те результаты, которые уже удалось получить, поскольку они дают некоторое представление о трудностях, встречающихся при доказательстве необходимых теорем существования, если следовать традиционным воззрениям и в более интересных случаях.

Наиболее исследованный пример, для которого известна подлинная теорема существования,— это теория бозонного поля, взаимодействующего с внешними источниками. Формальное рассмотрение соответствующего гамильтониана было произведено еще на заре истории квантовой теории поля*), и эта модель была среди первых, которые рассматривались в пионерных исследованиях математических основ квантовой теории поля (Friedrichs, 1952). На данный момент эти показательные случаи изучены многочисленными авторами (см. напр., Kato T.,

*) См., например, работу Блоха и Нордсика (Bloch, Nordsieck 1937).

1949a, 1951; Cook, 1961; Shale, 1962; Prosser, 1963) со всем вниманием к математическим тонкостям.

Если внешние источники достаточно размазаны (например, с квадратично интегрируемой функцией), то по сравнению со свободным гамильтонианом гамильтониан взаимодействия мал в смысле Т. Като, и поэтому, когда ящик устремляется к бесконечности, все еще можно пользоваться представлением Фока для перестановочных соотношений. Если же размазка внешних источников приближается к δ-функции в трехмерном пространстве (случай точечных внешних источников), то необходимо использовать странное представление канонических перестановочных соотношений.

В простейшем случае нейтрального скалярного поля

$$\varphi(x) = \varphi^{in}(x) + \int \Delta_R(x-y)\,dy\, j(y),$$

где $\varphi^{in}(x)$ — свободное поле, а j — постоянная, кратная единичному оператору. Между прочим, при соответствующем выборе j не существует семейства унитарных операторов $\mathcal{U}(t)$, удовлетворяющих равенству

$$\varphi(x, t) = \mathcal{U}(t)\,\varphi(x, 0)\,\mathcal{U}^{-1}(t). \tag{10.1}$$

Иногда утверждают, что этот пример показывает, что в релятивистской квантовой теории поля действие группы Пуанкаре на операторы поля не обязательно представимо унитарным образом. Поскольку этот пример относится к полям с внешними источниками, такая аргументация не слишком убедительна. С другой стороны, обычные общие доводы в пользу унитарной представимости в релятивистской теории также не являются вполне убедительными, если учесть отсутствие нетривиальных теорий, в которых они бы реализовались.

Примером теории, также нерелятивистской, но с совершенно нетривиальной динамикой, может служить рассмотренная недавно теория, в которой нерелятивистские нуклоны связаны с нейтральным скалярным мезонным полем посредством точечного взаимодействия (Nelson, 1964). Здесь введение ящика не обязательно, ибо полное число нуклонов N является интегралом движения. В результате состояние без частиц Φ_0 невозмущенной системы представляет собой вакуумное состояние возмущенной системы:

$$(H_0 + H_I)\ \Phi_0 = H_0\Phi_0 = H_I\Phi_0 = 0.$$

Однако формальный гамильтониан

$$H = \frac{1}{2M}\int \nabla\psi^*(\mathbf{x})\,\nabla\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int (m^2+\mathbf{k}^2)^{1/2}\,d\mathbf{k}\,a^*(\mathbf{k})\,a(\mathbf{k}) + \\ + g\int \psi^*(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \quad (10.2)$$

содержит расходимости, и поэтому необходимо ввести ультрафиолетовое обрезание. Нельсон вводил обрезание, заменяя поле φ (x) в (10.2) на φ_K (x), где

$$\varphi_K(\mathbf{x}) = [2(2\pi)^3]^{1/2}\int [\mathbf{k}^2+m^2]^{-1/4}\,[a(\mathbf{k})\,e^{i\mathbf{kx}} + \\ + a^*(\mathbf{k})\,e^{-i\mathbf{kx}}]\,\chi_K(\mathbf{k}),$$

причем

$$\chi_K(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{k}| < K, \\ 0, & |\mathbf{k}| \geqslant K. \end{cases}$$

Затем он показал, что существует оператор

$$H = \lim_{K\to\infty}(H_K - N\Delta E_K), \qquad (10.3)$$

где

$$\Delta E_K = -2Mg^2\,[2(2\pi)^3]^{-1}\int [2M(m^2+\mathbf{k}^2) + \\ + \mathbf{k}^2(m^2+\mathbf{k}^2)^{1/2}]^{-1}\,\chi_K(\mathbf{k})\,d\mathbf{k} \quad (10.4)$$

— собственная энергия нуклона в теории с обрезанием K.

Главная идея доказательства — введение канонического преобразования e^{T_K}, которое позволяет явным образом отщепить собственную энергию, т. е.

$$e^{T_K}\,H_K\,e^{-T_K} = H_K^I + N(\Delta E_K + \mathrm{const}), \qquad (10.5)$$

и показать, что в пределе $K\to\infty$ операторы e^{T_K} и H_K^I хорошо определены. Тогда выражение (10.3) — это просто $\lim\limits_{K\to\infty} e^{-T_K}\,H_K^I\,e^{T_K}$, кроме члена вида const$\cdot N$. Подобное каноническое преобразование было уже введено в этой связи Гроссом (Gross, 1962, см. формулу (6.2)).

Было бы очень приятно завершить работу Нельсона и показать, что поля в представлении Гейзенберга $\psi(x, t)$ обладают обычными свойствами, которые им приписывают в релятивистской теории поля.

В своем доказательстве Нельсон, помимо теоремы Т. Като (теорема 8.1), использовал теорему Фридрикса о расширении полуограниченных билинейных форм (Lions, 1965, гл. II, разд. 1) и теорему Троттера о сходимости однопараметрических унитарных групп (Trotter, 1958, теорема 501). Поскольку эти теоремы совершенно нетривиальны, очевидно, что для проверки даже таких простых примеров, как этот, может потребоваться серьезное использование формализма гильбертова пространства.

Несмотря на то, что результат Нельсона представляет собой наилучшую модель теоремы существования из числа изученных до сих пор в рамках идей, излагаемых в данных лекциях, ситуация, которую он рассмотрел, очевидно, гораздо проще, чем ситуация в нетривиальной релятивистской теории. Помимо отсутствия релятивистской инвариантности, к недостаткам данной модели относятся:

1) отсутствие поляризации вакуума;

2) простота выражения для бесконечной собственной энергии.

Последний пример, который будет рассмотрен в этом параграфе, является релятивистски-инвариантным, в нем имеется нетривиальная поляризация вакуума, однако в нем нет вообще никаких ультрафиолетовых расходимостей. Это теория с квадратичным лагранжианом (2.1). Эту теорию стоит исследовать, поскольку если предложенные методы недейственны в этом случае, то не будет, в сущности, никаких надежд на то, что они применимы в нетривиальных теориях. Ниже следует лишь краткое изложение доказательства.

Первым делом нужно убедиться в существенной самосопряженности искромсанного гамильтониана. Вероятно, простейший путь, который позволяет сделать это, состоит в том, чтобы показать применимость в данном случае теоремы Т. Като. С этой целью проверим справедливость неравенств

$$\left\| \sum_{j \neq k=1}^{n} \int \varphi_j(x) \lambda \mathfrak{M}_{jk} \varphi_k(x) g(x)\, dx\, \Phi \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j \neq k=1}^{n} |\lambda \mathfrak{M}_{jk}| \left\| \int \varphi_j(x) \varphi_k(x) g(x)\, dx\, \Phi \right\|,$$

причем

$$\left\| \int \varphi_j(x) \varphi_k(x) f(x)\, dx\, \Phi \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(-2)(2\pi)^3} \left[\left\| \int a_j(q_1) a_k(q_2) F_{++}(q_1, q_2)\, d\Omega(q_1)\, d\Omega(q_2)\, \Phi \right\| + \right.$$

$$+ \left\| \int a_j^*(q_1) a_k(q_2) F_{-+}(q_1, q_2)\, d\Omega(q_1)\, d\Omega(q_2)\, \Phi \right\| +$$

$$+ \left\| \int a_j(q_1) a_k^*(q_2) F_{+-}(q_1, q_2)\, d\Omega(q_1)\, d\Omega(q_2)\, \Phi \right\| +$$

$$\left. + \left\| \int a_j^*(q_1) a_k^*(q_2) F_{--}(q_1, q_2)\, d\Omega(q_1)\, d\Omega(q_2)\, \Phi \right\| \right], \quad (10.6)$$

где

$$F_{\pm\pm}(q_1, q_2) = \int dx\, g(x)\, e^{\pm i q_1 x} e^{\pm i q_2 x}.$$

Далее,

$$\left\| \int a_j(q_1) a_k(q_2) F_{++}(q_1, q_2)\, d\Omega(q_1)\, d\Omega(q_2)\, \Phi \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| F_{++} \|^2 \left\| \sqrt{n_j + 1} \sqrt{n_k + 1}\, \Phi \right\|^2,$$

$$\left\| \int a_j^*(q_1) a_k(q_2) F_{-+}(q_1, q_2)\, d\Omega(q_1)\, d\Omega(q_2)\, \Phi \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \| F_{+-} \|^2 \left\| \sqrt{n_j + 1} \sqrt{n_k + 1}\, \Phi \right\|^2$$

и аналогично для двух других членов. Здесь

$$\| F_{\pm\pm} \|^2 = \int d\Omega(q_1)\, d\Omega(q_2)\, |F_{\pm\pm}(q_1, q_2)|^2. \quad (10.7)$$

(Заметим, что если в качестве g выбирается сглаживающая функция пространственных координат, то этот интеграл будет сходиться только в двумерном пространстве-времени. Если же в качестве g выбирается сглаживающая функция в пространстве-времени, то этот интеграл существует в пространстве-времени четырех, трех и двух измерений.) Затем

$$\|\sqrt{n_j+1}\sqrt{n_k+1}\,\Phi\| \leqslant \frac{1}{2m}\|H_0\Phi\| + \|\Phi\|. \qquad (10.8)$$

Таким образом, окончательно

$$\|\lambda \sum_{j\neq k=1}^{n} \int \varphi\,(x)\,\mathfrak{M}_{jk}\,\varphi_k(x)\,g(x)\,dx\,\Phi\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|\lambda|}{2(2\pi)^3}\sum_{j\neq k}|\mathfrak{M}_{jk}|\,[\|F_{++}\| + \|F_{-+}\| + \|F_{+-}\| + \|F_{--}\|] \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2m}\|H_0\Phi\| + \|\Phi\|\right].$$

Иначе говоря, для всех достаточно малых $|\lambda|$ гамильтониан взаимодействия

$$H_I = \lambda \int dx\,g(x) \sum_{j\neq k=1}^{n} \varphi_j(x)\,\mathfrak{M}_{jk}\,\varphi_k(x)$$

удовлетворяет неравенству (8.5) для всех векторов Φ, для которых определен оператор H_0, и тем самым, в частности, для тех Φ, для которых: а) $\|H_0\,\Phi\| < \infty$ и б) все компоненты $\Phi^{(n)}$, кроме конечного числа, равны нулю. Это последнее множество мы принимаем за $D\,(H_0)$. Поскольку гамильтониан H_0 на $D\,(H_0)$ существенно самосопряжен *), то из теоремы 8.2 следует, что для всех достаточно малых $|\lambda|$ гамильтониан $H = H_0 + \lambda H_I$ — существенно самосопряженный оператор.

---

*) Поскольку H_0 представляет собой сумму вкладов на подпространства прямой суммы $\mathcal{H} = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(j)}$, то достаточно убедиться в том, что H_0, ограниченный на $\mathcal{H}^{(n)}$, является существенно самосопряженным оператором. Там он представляет собой оператор умножения на вещественную положительную непрерывную функцию $f = \sum_{j=1}^{n}[\mathbf{k}_j^2 + m^2]^{1/2}$, ограниченную снизу условием $nm > 0$. Подобный оператор умножения всегда самосопряжен, поскольку, если $(X,\ (f \pm i)\,\Phi) = 0$ для Φ таких, что $f\Phi \in \mathcal{H}^{(n)}$, то можно положить $\Phi = X/f$ и получить $(X;\, X) + i\,(X,\ f^{-1}X) = 0$, откуда следует, что $X = 0$.

Следующий этап доказательства — показать, что существует приближенное вакуумное состояние. Этот факт является следствием второй части теоремы 8.2, которую мы здесь не цитировали. Она гласит, что если оператор $H_\lambda = H_0 + \lambda H_I$ удовлетворяет неравенству (8.5) для всех достаточно малых λ, то резольвента $R_\lambda(z) = (H_\lambda - z)^{-1}$ оператора H_λ аналитична по λ, когда z комплексна и λ достаточно мала, а когда z вещественна, она остается вне спектра H_λ. Разложение резольвенты в ряд имеет вид

$$R_\lambda(z) = R_0(z) \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \{H_I R_0(z)\}^n.$$

Кроме того, из этой теоремы следует, что изолированные собственные значения единичной кратности и соответствующие им собственные функции, которые должным образом нормированы, аналитически зависят от λ *).

Из этой теоремы следует также существование единственным образом определенного приближенного вакуума $\Psi_{0,\lambda}$, являющегося аналитическим продолжением состояния без частиц Φ_0, к которому он сводится при $\lambda = 0$.

Используя такой приближенный вакуум, можно вычислить вакуумные средние

$$\begin{aligned}(\Psi_{0,\lambda},\ &\exp(it_1 H_\lambda)\,\varphi_{j1}(f_1)\exp(i(t_2-t_1)H_\lambda)\,\varphi_{j2}(f_2)\ldots\\ &\ldots\exp(i(t_n-t_{n-1})H_\lambda)\,\varphi_{jn}(f_n)\exp(-it_n H_\lambda)\,\Psi_{0,\lambda}),\end{aligned} \qquad (10.9)$$

где поля сглажены с бесконечно дифференцируемыми функциями с компактным носителем в трехмерном пространстве. Чтобы быть уверенным в том, что такие величины существуют, достаточно показать, что существует область $D_1 \subset D(H_0)$*) такая, что $\Psi_{0,\lambda} \in D_1$, $\varphi_j(g)D_1 \in D_1$ и $\exp(itH_\lambda)\,D_1 \subset D_1$. Эти свойства не вытекают из результатов работ, указанных в сноске на этой странице, но в пользу их справедливости нетрудно привести прямые доводы. Оставшаяся часть доказательства сводится к

*) Пояснения и ссылки на оригинальные работы Реллиха и Секельфальви-Надя см. в книге Ф. Рисса и Б. Секельфальви-Надя (Riesz, SZ-Nagy, 1955, стр. 330—375). См. также работы (Kato T., 1949б) и (Kato Y., 1961).

установлению того, что каждый член ряда теории возмущений для (10.9) совпадает с соответствующим членом ряда, обсуждавшегося сразу после формулы (2.17), с той лишь разницей, что в каждый член ряда для (10.9) по каждой переменной интегрирования входит сглаживающая функция $g(x)$. Это довольно утомительная процедура, которую мы не будем излагать подробно, поскольку с точки зрения нашей программы ценность ее невелика: необходимо иметь доказательство, не зависящее от теории возмущений. Его еще предстоит получить.

Какие же выводы можно сделать из всего сказанного выше? Немногие, если иметь в виду только аргументы, защищенные несокрушимой броней строгости. Однако основанная на догадках оценка ситуации такова. Предположение о том, что теоремы существования для стандартных моделей квантовой теории поля могут быть получены исходя из точных решений искромсанных теорий путем вычисления искромсанных вакуумных средних и последующего перехода к пределу, кажется, переживет первоначальную не очень строгую проверку, приведенную выше. Проверка этой процедуры в интересных случаях не кажется неосуществимой задачей. Если это удастся сделать, то, как мне кажется, появится многообещающее направление атаки на то, что в данный момент представляется *Главной Проблемой* в математическом обосновании квантовой теории поля. Конечно, ничто не позволяет сейчас исключить возможность того, что стандартные теории имеют решения, но эти решения нельзя получить предельным переходом из решений искромсанных теорий.

ДОПОЛНЕНИЕ

ПОСЛЕДНИЕ ДОСТИЖЕНИЯ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ *)

1. Аксиомы и теорема реконструкции **)

Теория скалярных полей обладает непрерывным унитарным представлением ограниченной неоднородной группы Лоренца $\{a, \Lambda\} \to U(a, \Lambda)$ и единственным вакуумом Ψ_0 в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Поле представляет собой линейную функцию A с областью определения $\mathscr{D}$, значения которой — линейные операторы в $\mathscr{H}$. Предполагается:

I. Если функция φ изменяется в области $\mathscr{D}$, то поля $A(\varphi)$ и $A(\varphi)^*$ обладают общей линейной плотной областью D такой, что

$$\left.\begin{array}{ll} A(\varphi) D \subset D, & A(\varphi)^* D \subset D, \\ \Psi_0 \in D. & U(a, \Lambda) D \subset D. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

A — это операторнозначная обобщенная функция в том смысле, что для каждых векторов Φ, $\Psi \in D$ величина $(\Phi, A(\varphi)\Psi)$ представляет собой обобщенную функцию в $\mathscr{D}$, т. е. непрерывный линейный функционал на $\mathscr{D}$.

---

*) Первая часть этих лекций не переводится, поскольку она содержит элементарное изложение некоторых результатов, содержащихся в основном тексте этой книги или в книге Р. Ф. Стритера и А. С. Вайтмана «*PCT*, спин и статистика и все такое», «Наука», 1966. Второй части лекций предшествуют слова А. С. Вайтмана: «Изложение этой части будет совершенно строгим математически. Поэтому мы начнем с аксиом теории скалярных полей». (*Прим. перев.*)

**) Более подробно аксиомы квантовой теории поля изложены в упомянутой книге Стритера и Вайтмана, гл. 3. (*Прим. перев.*)

II. На D

$$U(a, \Lambda) A(\varphi) U(a, \Lambda)^{-1} = A(\{a, \Lambda\}\varphi). \tag{2}$$

III. На D

$$[A(\varphi), A(\psi)] = 0 = [A(\varphi), A(\psi)^*] \tag{3}$$

для функций $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ таких, что

$$\varphi(x)\,\psi(y) = 0 \text{ при } (x-y)^2 \geqslant 0. \tag{4}$$

Если

$$A(\varphi)^* = A(\bar{\varphi}) \text{ на } D, \tag{5}$$

то поле A называется нейтральным или эрмитовым.

Из аксиомы I непосредственно следует, что вакуумные средние

$$(\Psi_0, A_{j_1}(\varphi_1) \ldots A_{j_n}(\varphi_n)\Psi_0)$$

представляют собой полилинейные функционалы по $\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_n$, непрерывные по каждому из своих аргументов. Из теоремы Шварца о ядре следует, что эти функционалы можно единственным образом продолжить по непрерывности до обобщенных функций n переменных (Гельфанд, 1961)

$$\int dx_1 \ldots dx_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)(\Psi_0, A_{j_1}(x_1) \ldots A_{j_n}(x_n)\Psi_0).$$

Наоборот, как было показано некоторое время назад, можно исходить из набора обобщенных функций, удовлетворяющих некоторым условиям, и сконструировать теорию, в которой эти обобщенные функции окажутся как раз вакуумными средними (Wightman, 1956). Единственным поводом для нового разговора об этом могут служить последние важные улучшения по части утонченности подобной теоремы реконструкции.

Резюмируем кратко указанные условия для одного нейтрального скалярного поля. Тогда все вакуумные средние можно перечислить, обозначив

$$F^{(n)}(x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n) = (\Psi_0, A(x_1) \ldots A(x_n)\Psi_0),$$

где $n = 0, 1, \ldots$ Из условия (5) и эрмитовости следует, что

$$(\Psi_0, A(\varphi_1) \ldots A(\varphi_n)\Psi_0) = [(\Psi_0, A(\varphi_n)^* \ldots A(\varphi_1)^*\Psi_0)]^*$$

и

$$F^{(n)}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) = [F^{(n)}(\xi_{n-1}, \ldots, \xi_1)]^*. \tag{6}$$

Условия эрмитовости. Из неравенства Шварца

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\Psi_0, \int \varphi_1(x_1, \ldots, x_j)\, dx_1 \ldots dx_j\, A(x_1) \ldots A(x_j)\, U(a, 1) \times \right.\right.\\
&\qquad \left.\left. \times \int \varphi_2(x_{j+1}, \ldots, x_n)\, A(x_{j+1}) \ldots A(x_n)\, \Psi_0\right)\right| \leqslant \\
&\leqslant \left\| \int [\varphi_1(x_1, \ldots, x_j)]^*\, dx_1 \ldots dx_j\, A(x_j)^* \ldots A(x_1)\, \Psi_0^* \right\| \times \\
&\times \left\| \int \varphi_2(x_{j+1}, \ldots, x_n)\, dx_{j+1} \ldots dx_n A(x_{j+1}) \ldots A(x_n)\, \Psi_0 \right\|
\end{aligned} \tag{7}$$

следует, что величина

$$\begin{aligned}
&\left(\Psi_0, \int \varphi_1(x_1, \ldots, x_j)\, dx_1 \ldots dx_j\, A(x_1) \ldots A(x_j)\, U(a, 1) \times \right.\\
&\qquad \left. \times \int \varphi_2(x_{j+1}, \ldots, x_n)\, dx_{j+1} \ldots dx_n\, A(x_{j+1}) \ldots A(x_n)\, \Psi_0\right)
\end{aligned} \tag{8}$$

ограничена по a. Поскольку она также бесконечно дифференцируема по a (переместив $U(a, 1)$ направо, эту процедуру можно представить как сдвиг функции φ_2, которая бесконечно дифференцируема), то ее можно подвергнуть преобразованию Фурье и найти, что ее фурье-образ обращается в нуль, если только p не принадлежит физическому спектру (Jost, Hepp, 1962). (Последние утверждения называют *спектральными условиями*.) Из ограниченности выражения (8) по a также следует, что величину $F^{(n)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ можно расширить до непрерывного линейного функционала на $\mathfrak{S}$, т. е. на пространстве бесконечно дифференцируемых функций, которые вместе со своими производными обращаются на бесконечности в нуль быстрее произвольной степени расстояния. (В этом случае непрерывность определяется стандартным образом по Шварцу (Schwartz, 1957).) Окончательно

$$\begin{aligned}
\lim_{a \to \infty} (8) = &\left(\Psi_0, \int \varphi_1(x_1, \ldots, x_j)\, dx_1 \ldots dx_j A(x_1) \ldots \right.\\
&\left. \ldots A(x_j)\, \Psi_0\right) \left(\Psi_0, \int \varphi_2(x_{j+1}, \ldots, x_n)\, dx_{j+1} \ldots \right.\\
&\left. \ldots dx_n A(x_{j+1}) \ldots A(x_n)\, \Psi_0\right),
\end{aligned}$$

что можно переписать в виде свойства функции $F^{(n)}$ как

$$\lim_{a\to\infty} F^{(n)}(\varphi_1, \ldots \{a, 1\}\varphi_j, \ldots, \varphi_{n-1}) = $$
$$= F^{(j)}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1})\, F^{(n-j)}(\varphi_j, \ldots, \varphi_{n-1}) \qquad (9)$$

при $a \to \infty$ по пространственноподобному направлению. Это соотношение представляет собой *свойство распадения на пучки* (Araki, 1960; Jost, Hepp, 1962; Araki, Hepp, 1962) *).

Наконец, поскольку для любой конечной совокупности комплексных чисел α_k

$$\left\| \sum \alpha_k A(\varphi_{k1}) \ldots A(\varphi_{kk}) \Psi_0 \right\|^2 \geqslant 0,$$

то

$$\sum_{k,l} \bar{\alpha}_k \alpha_l \int \ldots \int [\varphi_{kk}(x_k) \ldots \varphi_{k1}(x_1)]^* [\varphi_{l1}(y_1) \ldots \varphi_{ll}(y_l)] \times$$
$$\times F^{(k+l)}(x_k - x_{k+1}, \ldots, x_2 - x_1, x_1 - y_1, y_1 - y_2, \ldots$$
$$\ldots, y_{l-1} - y_l)\, dx_k \ldots dx_1 dy_1 \ldots dy_l \geqslant 0. \qquad (10)$$

Эти неравенства обычно называют *условиями положительной определенности*.

Теперь у нас есть возможность точно сформулировать теорему реконструкции.

Теорема 1

Допустим, что для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ величина $F^{(n)}$ представляет собой обобщенную функцию в $\mathscr{D}'$, зависящую от $n - 1$ четыре-векторов и инвариантную относительно преобразований

$$\xi_1, \ldots, \xi_{n-1} \to \Lambda\xi_1, \ldots, \Lambda\xi_{n-1}.$$

Предположим, что $F^{(n)}$ может быть расширена на $\mathscr{S}$ по каждому из своих аргументов, если другие аргументы при этом считать фиксированными. Если величина $F^{(n)}$ удовлетворяет условиям эрмитовости, спектральности, положительной определенности и свойству разложения на пучки, то существуют гильбертово пространство $\mathscr{H}$, непрерывное унитар-

*) См. Р. Ф. Стритер, А. С. Вайтман, *PCT*, спин и статистика и все такое, «Наука», 1966, гл. 3. (*Прим. перев.*)

ное представление группы Лоренца $\{a, \Lambda\} \rightarrow U(a, \Lambda)$ со спектром оператора энергии-импульса, принадлежащим внутренней части или поверхности будущего светового конуса, единственный вакуум Ψ_0 и эрмитово скалярное поле $A(\varphi)$, удовлетворяющее аксиомам I и II с $D = D_0$ и такое, что

$$(\Psi_0, A(x_1) \ldots A(x_n) \Psi_0) = F^{(n)}(x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n).$$

Эта реализация единственна с точностью до унитарно эквивалентных.

Аксиоме III можно удовлетворить и тогда, когда функции $F^{(n)}$ удовлетворяют еще и условиям локальной коммутативности.

Доказательство теоремы здесь приведено не будет; оно аналогично доказательствам, приведенным в работах (Wightman, 1956) или (Borchers, 1961), за исключением доказательства единственности вакуума, которое получено в работе (Borchers, 1961).

2. Сравнение пространств $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ в качестве областей определения поля $A(\varphi)$; обсуждение пространства D; самосопряженность эрмитовых полей

В первой части лекций мы не очень тщательно различали те положения, которые можно доказать, предположив, что основные функции принадлежат пространству $\mathcal{D}$, и те положения, для доказательства которых необходимо предположить, что поля определены на основных функциях из пространства $\mathcal{S}$. Очевидно, что для некоторых построений необходимо было использовать последнее предположение, в частности для доказательства теоремы 12 из части I *). С физической точки зрения было бы весьма естественным принять поля, определенные на основных функциях из $\mathcal{D}$, — тогда оператор $A(\varphi)$, где φ — вещественная функция, описывал бы результат измерения поля в ограниченной области пространства-времени. Если можно было бы доказать, что отсюда следует

---

*) Теорема 12, часть I (Wightman, 1962) гласит: «В теории нейтрального скалярного поля с циклическим вакуумом физический спектр должен быть аддитивным». (*Прим. перев.*)

возможность расширения A (φ) на функции из пространства $\mathcal{S}$, то это было бы весьма отрадно. Действительно, поля, определенные для основных функций из пространства $\mathcal{S}$, предпочтительнее в силу совершенно практических соображений: в этом случае можно было бы свободно пользоваться преобразованиями Фурье и получать дисперсионные соотношения для амплитуд рассеяния. Надо иметь в виду, что гипотеза, которая была бы исключена подобным доказательством возможности расширить поля на функции из $\mathcal{S}$, — это предположение, в силу которого рост функций на бесконечности в x-пространстве хуже полиномиального. Но аргументация, приведенная в связи со спектральными условиями (как раз перед теоремой 1), показывает, что вакуумные средние ограничены по любой разности переменных, если другие остаются фиксированными. Поэтому для этих функций рост хуже экспоненциального, который следует исключить, появляется только тогда, когда две или более разности четыре-векторов стремятся к бесконечности одновременно. Однако такой рост — это чрезвычайно неправдоподобное поведение для величины, которая характеризует корреляции между измерениями полей в вакууме.

С другой стороны, полевые величины ведут себя таким образом, что следовало бы скорее использовать основные функции с компактным носителем в p-, а не в x-пространстве.

В теории возмущений для неперенормируемых теорий поля можно найти указания на то, что следовало бы ожидать вакуумных средних в импульсном пространстве, растущих быстрее любой степени импульса. Чтобы придать им смысл, нужны основные функции с компактным носителем в p-пространстве и тем самым целые функции экспоненциального роста в x-пространстве. Мысль о необходимости приспособить аксиомы к таким возможностям особенно отстаивал Геттингер (Güttinger, 1958); эта идея приводит к естественному способу отличать перенормируемые теории от неперенормируемых независимо от какой-либо детальной классификации лагранжианов.

Обсудим теперь область D, т. е. снова объект, который мы обсуждали в части I, не вдаваясь в детали. Первый естественный вопрос: почему бы не упростить проблему, предположив, что операторы поля определены всюду, т. е. положить $D = \mathscr{H}$? Ответ состоит в том, что при вещественных функциях φ (и, следовательно, эрмитовом поле $A(\varphi)$) это означало бы, что $A(\varphi)$ — ограниченный и тем самым непрерывный оператор, т. е. $\operatorname*{snp}_{\|\Phi\|=1} \|A\Phi\| < \infty$. Это неверно даже для свободного поля, а существуют веские основания полагать, что содержательные теории окажутся хуже, а не лучше теории свободного поля. Иначе говоря, область D не должна совпадать со всем пространством $\mathscr{H}$. Лучшее, на что можно надеяться, это то, что эрмитовы неограниченные операторы $A(\varphi)$ самосопряжены, $A(\varphi)^* = A(\varphi)$. Однако известно, что такие операторы всюду разрывны в своей области определения, так что мы должны быть готовыми к встрече с неограниченными разрывными операторами.

Вспомним, что оператор, *сопряженный* оператору T с плотной *областью определения* $D(T) \subset \mathscr{H}_1$, с *областью значений* $R(T) \subset \mathscr{H}_2$ и с *графом* Γ_{T^*}, состоящим из всех пар $\{\Phi, T\Phi\}$ с $\Phi \in \mathscr{D}(T)$, — это единственно определяемый линейный оператор T^*, переводящий $\mathscr{H}_2$ в $\mathscr{H}_1$, граф которого Γ_T^* есть $\{-\Psi^*, \Psi\}$, где $\{\Psi^*, \Psi\}$ пробегает по ортогональному дополнению Γ_T в $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$. Это означает, что если для всех $\Phi \in D(T)$ имеет место равенство

$$(\Psi^*, \Phi) = (\Psi', T\Phi),$$

то вектор Ψ лежит в области $D(T^*)$ и $T^*\Psi = \Psi^*$. Оператор T *эрмитов*, если $T \in T^*$, т. е. если $D(T) \in D(T^*)$ и $T = T^*$ на $D(T)$. Оператор T *самосопряжен*, если $T = T^*$. Оператор T *существенно самосопряжен*, если $T^{**} = T^*$. Самосопряженный оператор нельзя расширить на любой другой вектор без того, чтобы не утратить свойство $T = T^*$. Полезный критерий существенной самосопряженности эрмитова оператора состоит в том, что не существует решений уравнений

$$T^*\Phi = \pm i\Phi.$$

В общем случае, когда оператор T эрмитов, числа линейно независимых решений этих двух уравнений представляют собой, соответственно, *индексы дефекта* оператора T. Если оба индекса дефекта оператора T равны, то оператор T обладает по крайней мере одним самосопряженным расширением. В первой части этих лекций на точные различия, произведенные в этом разделе, конечно, не обращалось внимания, теперь же мы будем за этим следить (Stone, 1964).

Самое лучшее, что можно предположить относительно операторов $A(\varphi)$ при вещественных функциях φ,— это считать, что они являются существенно самосопряженными в такой области D_0, векторы которой имеют вид $\mathcal{P}(A(\psi)\ldots)\Psi_0$, где $\mathcal{P}$ — полином по сглаженным операторам с функциями $\psi \in \mathcal{D}$. Очевидно, что $D_0 \in D$, поэтому сужение $A(\varphi)$ на D_0 я обозначаю как $A(\varphi)|_{D_0}$. Выписанное полностью требование существенной самосопряженности имеет вид

$$[A(\varphi)|_{D_0}]^{**} = [A(\varphi)|_{D_0}]^{*}.$$

Для свободного поля это соотношение может быть доказано.

Теорема 2

Если A — свободное поле и φ — вещественные функции, которые $\in \mathcal{D}$, то оператор $A(\varphi)|_{D_0}$ существенно самосопряжен.

Доказательство теоремы не длинно, но основано на явном использовании реализации оператора свободного поля в конфигурационном пространстве *).

Что касается поля общего типа, удовлетворяющего аксиомам I, II или I, II и III, то к настоящему времени для него не доказано ни одного подобного утверждения. Однако можно доказать, что индексы дефекта оператора $A(\varphi)|_{D_0}$ равны. В общих чертах доказательство таково: из дискуссии непосредственно перед теоремой 1 следует, что $F^{(n)}$ — это граничное значение некой аналитической функции по каждой из ее переменных, когда другие переменные фиксированы и сглажены с основными функциями из $\mathcal{D}$. Указанная аналитичность имеет место в трубе $\mathcal{T}$. Тогда, как это следует из теоремы Цернера (Zerner, 1961) **),

*) Wightman, не опубликовано.

**) В простейшем случае двух комплексных переменных результат Цернера сводится к следующему: если функция $f(x_1, z_2)$ аналитична при $z_2 > 0$ для каждого вещественного значения x_1, функция $f(z_1, x_2)$ аналитична при $z_1 > 0$ для каждого вещественного значения существует единственная функция, аналитичная в трубе $\mathcal{T}_{n-1}$, которая превращается на границе в $F^{(n)}$. Эта функция инвариантна относительно однородной группы Лоренца, так что можно воспользоваться теоремой Холла (Hall, Wightman, 1957) и доказать теорему *PCT* (Jost, 1957), как это было сделано в начале части I*). Тем самым теорема *PCT* справедлива для неприводимого поля, удовлетворяющего аксиомам I, II и III. Оператор Θ преобразования *PCT* не меняет области D_0.

Предположим теперь, что функции φ не только вещественны, но и четны относительно преобразования $x \to -x$. Тогда оператор Θ удовлетворяет соотношению

$$\Theta A(\varphi)\,|_{D_0}\Theta^{-1} = A(\varphi)\,|_{D_0}.$$

Но тогда, если вектор Φ удовлетворяет уравнению

$$(A(\varphi)\,|_{D_0})^*\,\Phi = \pm i\Phi,$$

то вектор $\Theta\,\Phi$ будет удовлетворять уравнению

$$(A(\varphi)\,|_{D_0})^*\Theta\Phi = \mp i\Theta\Phi.$$

(Если оператор Θ коммутирует с $A(\varphi)$ и оставляет область D_0 неизменной, то он одно-однозначно отображает D_0 на себя и коммутирует с $A(\varphi)^*_{D_0}$, как легко можно установить непосредственно из определений.) Тем самым число решений уравнения со знаком плюс совпадает с числом его решений со знаком минус, и индексы дефекта оператора $A(\varphi)$ равны, если функции φ вещественны и четны. Общий случай вещественных функций φ без труда сводится к этому.

Казалось бы, ничто не говорит против вывода, что оператор $A(\varphi)\,|_{D_0}$ существенно самосопряжен и в общем случае. Сейчас, однако, лучшее, что мы можем утверждать,— это

---

x_2, а функция $f(x_1, x_2)$ непрерывна, то существует единственная функция f, аналитичная при $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$, которая удовлетворяет заданным граничным условиям при $z_1 = 0$, $z_2 \geqslant 0$ и $z_2 = 0$, $z_1 \geqslant 0$.

*) См. Р. Ф. Стритер, А. С. Вайтман, *PCT*, спин и статистика и все такое, «Наука», 1966. (*Прим. перев.*)

Теорема 3

Если функции φ вещественны и $\varphi \in \mathscr{D}$, а оператор A — неприводимое поле, удовлетворяющее аксиомам I, II и III, то оператор $A(\varphi)|_{D_0}$ имеет равные индексы дефекта и тем самым обладает по крайней мере одним самосопряженным расширением.

Значение требования самосопряженности обусловлено тем, что оно делает доступным одно из наиболее мощных средств изучения операторов в гильбертовом пространстве — спектральную теорему. Если $\hat{A}(\varphi)$ — самосопряженное расширение $A(\varphi)|_{D_0}$, то

$$\hat{A}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda, \varphi),$$

где $E(\lambda, \varphi)$ — спектральная функция оператора.

Возможно, существуют физические требования, которые выделяют некоторые самосопряженные расширения (например, требование локальной коммутативности (LC) для расширенных операторов). Если же окажется, что даже с учетом этих дополнительных требований операторы $A(\varphi)|_{D_0}$ не обладают единственными самосопряженными расширениями, то придется признать, что такая теория не фиксируется полностью своими вакуумными средними. Это не должно восприниматься как катастрофа.

Существует одно дополнительное простое замечание относительно областей: расширение вакуумных средних от полилинейных функционалов $(\Psi_0, A(\varphi_1) \ldots A(\varphi_n)\Psi_0)$ до обобщенных функций по всем переменным

$$\int dx_1 \ldots dx_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)(\Psi_0, A(x_1) \ldots A(x_n)\Psi_0)$$

позволяет произвести аналогичное расширение для векторов

$$A(\varphi_1) \ldots A(\varphi_n)\Psi_0 \to \int dx_1 \ldots dx_n \varphi(x_1, \ldots, x_n) \times \\ \times A(x_1) \ldots A(x_n)\Psi_0. \quad (11)$$

Тогда это последнее выражение есть *векторнозначная* обобщенная функция, причем непрерывность для векторов понимается по норме топологии в гильбертовом пространстве (Ruelle, 1962; Jost, Hepp, 1962). Это позволяет расширить операторы $A(\varphi)$ на область D всех векторов, подобных (11).

3. Алгебры фон Неймана, ассоциированные с областью в пространстве-времени, и поле

Естественно попытаться ассоциировать с полем алгебру ограниченных операторов. (Эта постановка задачи противоположна обычной в математике, когда алгебра ограниченных операторов задана и с ней ассоциируют неограниченные операторы). В частности, Хааг подчеркнул важность ассоциирования алгебры ограниченных операторов $\mathcal{R}(\theta)$ с совокупностью операторов поля $A(\varphi)$, когда носители функций φ лежат в фиксированной области θ пространства-времени (Haag, 1959).

Если бы было известно, что оператор $A(\varphi)|_{D_0}$ существенно самосопряжен, то алгебру $\mathcal{R}(\theta)$ можно было бы определить непосредственно: выбрать в качестве нее алгебру фон Неймана, порожденную спектральными проекциями самосопряженных операторов $(A(\varphi)|_{{}_0D})^*$. (Напомним, что алгебра фон Неймана — это совокупность $\mathcal{R}$ ограниченных операторов со свойствами: $1 \in \mathcal{R}$; если $A \in \mathcal{R}$, то $A^* \in \mathcal{R}$; если A и $B \in \mathcal{R}$, то AB и $aA + bB \in \mathcal{R}$; если A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — сходящаяся в слабом смысле последовательность операторов $\in \mathcal{R}$, то $\lim A_n \in \mathcal{R}$.) Это определение было бы еще действенно и при существующем сейчас уровне знаний, но могло бы в зависимости от того, какое именно самосопряженное расширение оператора $A(\varphi)|_{D_0}$ используется, приводить к различным алгебрам $\mathcal{R}(\theta)$. С другой стороны, можно поступать следующим образом (Ruelle, 1962). Определим, что ограниченный оператор C коммутирует с $A(\varphi)$, если

$$(A(\varphi)^* \Phi, C\Psi) = (\Phi, CA(\varphi)\Psi) \tag{12}$$

для всех Φ, Ψ в области D. После этого положим, по определению, что $X \in \mathcal{R}(\theta)$, если X коммутирует со всеми операторами C, удовлетворяющими условию (12) для каждых двух операторов $A(\varphi)^*$ и $A(\varphi)$, у которых носители функций φ принадлежат θ. Соотношения между разными возможными определениями заслуживают тщательного исследования. Первые шаги в этом направлении были сделаны в работе (Reeh, 1961). Один частный результат столь прост и важен, что его следует привести здесь (Ruelle, 1962).

Теорема 4

Допустим, что A — нейтральное поле, удовлетворяющее аксиомам I и II, но с основными функциями из $\mathscr{D}$ (включая, как обычно, требование единственности вакуума). Предположим, что Ψ_0 — циклический вектор. Тогда оператор A неприводим в том смысле, что любой оператор C, удовлетворяющий соотношению

$$(A(\varphi)^* \Phi, C\Psi) = (\Phi, CA(\varphi)\Psi) \tag{13}$$

для всех $\varphi \in \mathscr{D}$ и всех $\Phi, \Psi \in D_0$, кратен единичному оператору.

Доказательство

Если соотношение (13) справедливо для оператора $A(\varphi)$, то оно также будет выполняться, если $A(\varphi)$ заменить на

$$\sum_n \int \ldots \int dx_1 \ldots dx_n \varphi_n(x_1, \ldots, x_n) A(x_1) \ldots A(x_n),$$

— факт, который мы тот час же используем.

Далее можно принять, что $C\Psi_0 \neq 0$, поскольку если $C\Psi_0 = 0$, то $C\Psi = 0$ для любого вектора $\Psi \in \mathscr{D}_0$ и тем самым $C = 0$.

Запишем, что $\| C\Psi_0 \| = \rho > 0$, $(\Psi_0, C\Psi_0) = \alpha$. Тогда из неравенства Шварца следует, что $|\alpha| \leqslant \rho$. Чтобы доказать требуемый результат, достаточно показать, что $|\alpha| = \rho$, поскольку тогда $C\Psi_0 = \alpha\Psi_0$, а это означает, что $C\Phi = \alpha\Phi$ для всех $\Phi \in D_0$, ибо согласно (13) оператор C коммутирует с $A(\varphi)$.

Поскольку вектор Ψ_0 цикличен, то существует полином по сглаженным полям, скажем $\mathscr{P}$, такой, что $\| (C - \mathscr{P})\Psi_0 \| < \varepsilon$. Тогда

$$|(\Psi_0, C^* C\Psi_0) - (\Psi_0, \mathscr{P}^* C\Psi_0)| = |((C - \mathscr{P})\Psi_0, C\Psi_0)| < \rho\varepsilon. \tag{14}$$

Заметим, что перестановочное соотношение (13) до сих пор пока не использовалось.

Проанализируем теперь вид вектора $\mathscr{P}\Psi_0$ в импульсном пространстве. Полином $\mathscr{P}$ может иметь носитель в p-пространстве, который охватывает все p-пространство. Однако если им подействовать на Ψ_0, то все вклады, кроме тех, что возникают от физического спектра, обращаются в нуль. Если умножить фурье-образ основной функции, используемой в $\mathscr{P}$, на функцию, которая равна единице в физическом спектре и равна нулю для точек, расположенных в отрицательной части непрерывного спектра, то можно получить новый оператор $\hat{\mathscr{P}}$ такого же вида, что и оператор $\mathscr{P}$, удовлетворяющий условиям

$$\hat{\mathscr{P}}\Psi_0 = \mathscr{P}\Psi_0, \quad \hat{\mathscr{P}}^*\Psi_0 = (\mathscr{P}\Psi_0, \Psi_0)\,\Psi_0. \tag{15}$$

[Грубо говоря, то, что здесь сделано, сводится к следующему. Заменим

$$\langle p|\mathscr{P}|q\rangle \text{ на } \langle p|\hat{\mathscr{P}}|q\rangle = \theta(p^0-q^0)\,\theta((p-q)^2) < p|\,\mathscr{P}\,|q\rangle.$$

Тогда

$$\langle p|\hat{\mathscr{P}}^*|q\rangle = \theta(q^0-p^0)\,\theta((q-p)^2)\,\overline{\langle q'|\mathscr{P}|p\rangle},$$

так что

$$\langle p|\mathscr{P}|0\rangle = \langle p|\hat{\mathscr{P}}|0\rangle, \text{ но } \langle p|\hat{\mathscr{P}}^*|0\rangle = \theta(-p^0)\,\theta(p^2)\,\overline{\langle 0|\mathscr{P}|p\rangle}.$$

Это выражение может быть отлично от нуля только тогда, когда $p=0$, поскольку $< 0\,|\mathscr{P}|\,p> = 0$, если только вектор p не принадлежит физическому спектру. В действительности θ-функцию следует заменить бесконечно дифференцируемой функцией; поэтому нам необходима гипотеза, что $p=0$ — изолированная точка спектра, чтобы сглаженная θ-функция имела бы где измениться до нуля от значения 1, которое она имела при $p=0$.] Тогда, используя (13), получим

$$\begin{aligned}\rho\varepsilon > |\rho^2 - (\mathscr{P}\Psi_0, C\Psi_0)| &= |\rho^2 - (\hat{\mathscr{P}}\Psi_0, C\Psi_0)| = \\ &= |\rho^2 - (\Psi_0, C\hat{\mathscr{P}}^*\Psi_0)| = |\rho^2 - \alpha(\mathscr{P}\Psi_0, \Psi_0)|. \end{aligned} \tag{16}$$

Однако ε может быть выбрано произвольно малым. Если это так, то величина $(\mathscr{P}\Psi_0, \Psi_0)$ произвольно близка к α. Следовательно, $|\alpha| = \rho$.

Второй замечательный результат подобного типа был получен Рее и Шлидером (Reeh, Schlieder, 1961, 1962 *)).

Т е о р е м а 5

Предположим, что A — поле, удовлетворяющее аксиомам I и II с областью D_0, плотной в $\mathcal{H}$ (основные функции берутся из пространства $\mathcal{D}$). Область D_0 (θ) также плотна для любого открытого множества θ в пространстве-времени. Тогда D_0 (θ) — это совокупность всех векторов вида $\mathcal{P}$ (A (φ)...) Ψ_0, где $\mathcal{P}$ — полином по полям, сглаженным с основными функциями, носители которых лежат в области θ.

Доказательство

Матричный элемент вида

$$(\chi, A(x_1) \ . \ . \ . \ A(x_n)\Psi_0)$$

— это (обобщенная функция!) граничное значение аналитической функции G переменных $-x_1 - i\eta_0$, $x_1 - x_2 - i\eta_1, \ldots,$ $x_{n-1} - x_n - i\eta_{n-1}$, определенных в $\mathcal{T}_n$. Это утверждение немедленно следует из аргументации, используемой в связи с доказательством теоремы *PCT* с учетом ослабленной гипотезы, в силу которой основные функции берутся из $\mathcal{D}$*). Но тогда из гипотезы данной теоремы следует, что граничное значение функции G равно нулю в открытом множестве реального пространства. Тем самым в силу аргументации, приведенной при доказательстве теоремы 6 из части I**), функция G обращается в нуль всюду в $\mathcal{T}_n$, и, следовательно, так же ведут себя ее граничные значения (χ, A (x_1)...A (x_n) Ψ_0). Поскольку область D_0, по предположению, плотна, то очевидно, что ортогональность вектора χ к D_0 (θ) означает $\chi = 0$, так что теорема доказана.

---

*) См. Р. Ф. Стритер, А. С. Вайтман, *PCT*, спин и статистика и все такое, «Наука», 1966. (*Прим. перев.*)

**) Теорема 6, часть I (Borchers, 1960) гласит: «Если оператор A локален (*LC*) и неприводим и каждый из операторов B и C локален (*LC*) относительно A, то оператор B локален (*LC*) относительно C, т. е.

$$[B\ (x),\ C\ (y)] = 0,$$

если x пространственноподобен y». (*Прим. перев.*)

Можно было бы думать, что, комбинируя аргументацию предыдущей и данной теорем, удастся доказать неприводимость набора операторов $\mathcal{P}$ $(A\ (\varphi)\ldots)$, сглаженных с функциями φ, носители которых лежат в любом фиксированном открытом множестве пространства-времени. Однако это не так и не может быть так, поскольку данное утверждение ложно. Как впервые показали Хааг и Шроер (Haag, Schroer, 1962), существуют обобщенные свободные поля такие, что набор операторов $\mathcal{P}$ $(A\ (\varphi)\ldots)$ неприводим, если функции φ могут меняться во всей области $\mathcal{D}$. Однако тот же набор $\mathcal{P}$ $(A\ (\varphi)\ldots)$ не будет неприводим, если носители функций φ принадлежат любому временному слою $-\infty < a < x^0 < b < \infty$. Причина, по которой здесь не проходит приведенное выше доказательство, состоит в том, что конструкция оператора $\hat{\mathcal{P}}$, использованная в (16), предполагает, что основные функции φ не могут иметь компактного носителя в x-пространстве.

4. Теория рассеяния Хаага—Рюэля. Общий обзор

Первым шагом в теории Хаага является построение того, что он называет почти локальными полями. Эти величины имеют вид

$$B(x) = \sum_n \int \ldots \int f_n(x - x_1, \ldots, x - x_n) \times \\ \times A(x_1) \ldots A(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \qquad (17)$$

и удовлетворяют условиям

$$U(a, \Lambda)\, B(x)\, U(a, \Lambda)^{-1} = B(\Lambda x + a), \qquad (\Psi_0, B(x)\Psi_0) = 0,$$

где функции $f_n \in \mathcal{S}$. Мы предположим, что сумма в (17) конечна. Раз или два Хааг пытался прибегнуть в своем рассмотрении к своего рода пределу конечных сумм, но это не кажется необходимым и, главное, по-видимому, пока невозможно. Кроме того, желательно, чтобы для каждого неприводимого представления, содержащегося в U, скажем с массой m_i, существовало почти локальное поле такое, чтобы вектор $B_i\ (x)\ \Psi_0$ принадлежал подпространству этого неприводимого представления. (В действительности это означает, что $(\Psi_0,\ B\ (x)\ \Psi_0) = 0$.)

Хааг назвал процедуру конструирования почти локальных операторов, удовлетворяющих этим требованиям, «решением одночастичной проблемы». По-видимому, ни Хааг, ни Рюэль до сих пор не разъяснили в печати, как «решить эту одночастичную проблему». Ясно, что при некоторых условиях это всегда можно сделать. Предположим, например, что рассматриваемое состояние с дискретной массой является изолированной точкой в спектре масс. Тогда к требуемому оператору B_i приведет построение, использованное при доказательстве теоремы 12 из части I *). То же самое будет справедливо, даже если указанное состояние с дискретной массой не будет изолированным и если допустить, что существуют сохраняющиеся квантовые числа, которыми можно отметить поля, а указанная масса оказывается изолированной точкой в подпространстве состояний с определенными значениями квантовых чисел. Примером подразумеваемого здесь положения вещей может служить, скажем, дейтрон, лежащий, если рассматривать все состояния, в самой середине непрерывного спектра, но обладающий изолированной массой, если ограничиться состояниями с барионным числом 2. Должно быть «решение одночастичной проблемы» можно провести всегда с достаточной аккуратностью, так что последующие вычисления будут иметь смысл; однако автор не осуществил этого во всех деталях. Идея состоит в том, что, хотя состояние $B_i(x)\Psi_0$ и не является чистым одночастичным состоянием, оставшаяся часть его может быть сделана достаточно малой, чтобы в дальнейшем не играть роли. Для целей данного изложения предположим, что точное «решение одночастичной проблемы» возможно**).

Итак, определим

$$B_i^f(x_i^0) = i\int dx_i \left[f_i(x_i)^* \frac{\partial}{\partial x_i^0} B_i(x_i) - \frac{\partial}{\partial x_i^0} f_i(x_i)^* B_i(x_i)\right], \quad (18)$$

где фурье-образ функции f_i имеет вид

$$\theta(p^0)\,\delta(p^2 - m_i^2)\,\hat{f}(\bar{\mathrm{p}}) \quad \text{с} \quad \hat{f} \in \mathscr{D}.$$

Тогда утверждение Хаага состоит в следующем:

---

*) См. сноску на стр. 149. (*Прим. перев.*)

**) См. в этой связи работу: Н е р р К., J. Math. Phys. 6, 1762 (1965). (*Прим. перев.*)

Теорема 6

Пусть B_i — почти локальное поле такое, что $B_i(x_i)$ лежит в подпространстве гильбертова пространства $\mathcal{H}$, принадлежащем неприводимому представлению $[m_i, s_i]$ с массой m_i и спином s_i. Образуем состояния вида

$$\Phi(t)=\prod_i B_i^t(t)\Psi_0.$$

Тогда существует $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\Phi(t)$ в смысле сильной сходимости.

Доказательство

Сначала заметим, что существует

$$\frac{d\Phi}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)],$$

где предел следует понимать в смысле сильной сходимости. Это утверждение непосредственно следует из свойств непрерывности, обсуждавшихся выше в связи с областью D. Далее, чтобы убедиться в сильной сходимости $\Phi(t)$, достаточно доказать, что $|t|^{3/2}\left\|\frac{d\Phi}{dt}\right\|\to 0$ при $t\to\pm\infty$, поскольку тогда

$$\|\Phi(t')-\Phi(t'')\|=\left\|\int_{t'}^{t''}d\tau\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}\right\|\leqslant\left|\int_{t'}^{t''}d\tau\left\|\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau}\right\|\right|\leqslant C\left|\int_{t'}^{t''}\frac{d\tau}{\tau^{3/2}}\right|,$$

а эту величину можно сделать произвольно малой для достаточно больших t' и t''. Тем самым для доказательства данной теоремы достаточно доказать, что

$$|t|^{3/2}\left\|\frac{d\Phi}{dt}\right\|\to 0.$$

Но величину $\left\|\frac{d\Phi}{dt}\right\|$ можно выписать в виде суммы членов вида

$$\begin{aligned}&d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2\ldots d\mathbf{x}_k f_1(\mathbf{x}_1,t)f_2(\mathbf{x}_2,t)\ldots\\&\quad\ldots f_k(\mathbf{x}_k,t)F(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_{k-1}-\mathbf{x}_k),\end{aligned}\qquad(19)$$

где две из функций f_j в действительности представляют собой производные по времени функций f, встречающихся в формулировке теоремы, а F — вакуумное среднее полей B_i. Отметим, что функция F от времени не зависит, поскольку $x_i^0 = x_j^0 = t$. Теперь функцию F можно разложить по усеченным вакуумным средним*). Тогда выражение (19) примет вид суммы произведений интегралов, также имеющих вид (19). Однако теперь функция F символизирует усеченное вакуумное среднее.

Доказательство далее проводится в два этапа. Прежде всего следует установить, что $\sup_{\mathbf{x}} |f_j(\mathbf{x}, t)| < C / |t|^{3/2}$ при больших $|t|$ и что

$$\int d\mathbf{x}\, |f(\mathbf{x}, t)| < C_1 |t|^{3/2}.$$

После этого нужно показать, что (усеченные) функции F убывают быстрее любой степени

$$\sum_{j=1}^{k-1} |x_j - x_{j+1}|^2 \quad \text{для} \quad k > 2.$$

---

*) Понятие об *усеченных* вакуумных средних вводится так (Araki, 1960). Их определяют по индукции соотношениями

$$\langle A(x)\rangle_0 = \langle A(x)\rangle_{0T},$$

$$\langle A(x_1)\, A(x_2)\rangle_0 = \langle A(x_1)\, A(x_2)\rangle_{0T} + \langle A(x_1)\rangle_{0T}\, \langle A(x_2)\rangle_{0T},$$

$$\langle A(x_1)\, A(x_2)\, A(x_3)\rangle_0 = \langle A(x_1)\, A(x_2)\, A(x_3)\rangle_{0T} +$$
$$+ \langle A(x_1)\, A(x_2)\rangle_{0T}\, \langle A(x_3)\rangle_{0T} + \langle A(x_1)\, A(x_3)\rangle_{0T}\, \langle A(x_2)\rangle_{0T} +$$
$$+ \langle A(x_2)\, A(x_3)\rangle_{0T}\, \langle A(x_1)\rangle_{0T} + \langle A(x_1)\rangle_{0T}\, \langle A(x_2)\rangle_{0T}\, \langle A(x_3)\rangle_{0T}$$

или в общем случае

$$\langle A(x_1) \ldots A(x_n)\rangle_0 = \Sigma\Pi\, \langle A(x_j)\rangle_{0T},$$

где суммирование производится по всем разбиениям чисел $1, \ldots, n$ на непустые поднаборы, а умножение идет по усеченным вакуумным средним поднаборов, причем x_j входят в указанные поднаборы в том же порядке, в каком расставлены числа $1, \ldots, n$. Такое определение справедливо как для почти локальных полей, так и для самого поля A. Усеченное вакуумное среднее, рассчитанное по теории возмущений, совпадает в точности с суммой всех связных диаграмм. (*Прим. перев.*)

Если оба эти результата будут установлены, то выражение (19) будет убывать как $|t|^{(-3/2)(k-2)}$. Остается показать, что ни один член с $k=2$ вклада в него не дает. Это утверждение следует из гипотезы о том, что поля B «решают одночастичную проблему». К этим двум этапам доказательства мы возвратимся в двух последующих разделах.

Здесь необходимо сделать несколько замечаний относительно релятивистской инвариантности указанной процедуры. На этот раз нужно показать, что то же предельное состояние получится и тогда, когда тот же самый переход осуществляется вдоль другого времениподобного направления. Для этого достаточно показать, что состояние $(1 + i\varepsilon\mathbf{n}\mathbf{N})\,\Phi(t)$ приводит к тому же результату, что и состояние $\Phi(t)$, где $\mathbf{n}\,\mathbf{N}\varepsilon$ — инфинитезимальный оператор чистого преобразования Лоренца вдоль направления $\mathbf{n}$. Но член $\mathbf{n}\mathbf{N}\Phi(t)$ не будет давать никакого вклада в пределе, поскольку он будет содержать дополнительную производную от члена, который в предыдущем расчете стремился к константе.

Следующим шагом является определение *in*- и *out*-операторов, действующих на только что определенные *in*- и *out*-состояния. Запишем, что

$$\left.\begin{aligned} B^f_{\substack{in\\ out}}\,\Phi_{\substack{in\\ out}} &= \lim_{t\to\pm\infty} B^f(t)\,\Phi(t),\\ \left(B^f_{\substack{in\\ out}}\right)^*\Phi_{\substack{in\\ out}} &= \lim_{t\to\pm\infty} \left(B^f(t)\right)^*\Phi(t). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Чтобы убедиться в том, что эти соотношения действительно определяют линейные операторы, необходимо только проверить их однозначность. Иначе говоря, предположим, что $\Psi(t)=\sum\limits_{j=0}^{l}\Phi_j(t)$ и $\Psi_{in}=0$ или $\Psi_{out}=0$. Тогда в соответствующем случае должно быть $\lim\limits_{t\to\pm\infty} B^f(t)\,\Psi(t)=0$. Однако оба семейства векторов $\Psi(t)$ и $(B^f(t))^*B^f(t)\,\Psi(t)$ имеют сильный предел, который для первого семейства равен нулю. Тем самым $\lim\limits_{t\to\pm\infty}(\Psi(t), (B^f(t))^*B^f(t)\,\Psi(t)) = 0$, так что $B^f_{in}\,\Phi_{in}=0$ или $B^f_{out}\,\Phi_{out}=0$ в соответствии с тем, какой из этих операторов рассматривается.

Операторы B^{f}_{in} и B^{f}_{out} и сопряженные им определены соответственно на *in* - и *out*-состояниях, которые растягивают два подпространства гильбертова пространства $\mathcal{H}_{in}$и $\mathcal{H}_{out}$ соответственно.

В данный момент у нас нет никакой уверенности ни в том, что $\mathcal{H}_{in} = \mathcal{H}_{out}$, ни в том, что $\mathcal{H}_{in} = \mathcal{H} = \mathcal{H}_{out}$, а примеры на самом деле показывают, что асимптотические состояния не обязательно образуют полную систему. (Существуют обобщенные свободные поля, для которых $\mathcal{H}_{in} \neq \mathcal{H}$ и $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}_{out}$.) Это требование — аксиома IV (принадлежит Рюэлю):

$$\text{IV.} \qquad \mathcal{H}_{in} = \mathcal{H} = \mathcal{H}_{out}.$$

Отметим, что $\Theta\Phi_{in}$ — это «*out*»-состояние *). Тем самым если вектор χ ортогонален $\mathcal{H}_{in}$, то вектор $\Theta\chi$ ортогонален $\mathcal{H}_{out}$. Поэтому достаточно предположить, что $\mathcal{H}_{in} = \mathcal{H}$, чтобы получить $\mathcal{H}_{out} = \mathcal{H}$.

Операторы B_{in} и B_{out}, определенные здесь, ассоциированы с правильными дискретными значениями масс m, но не обладают сколько-нибудь простыми трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца. Следующий шаг в изложении Рюэля был связан с выделением из оператора B операторов свободных спинорных полей с должными трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца с тем, чтобы описать частицы спина s_i. Мы не будем описывать здесь это построение, хотя автор и полагает, что работа Рюэля — первая работа, в которой была систематически рассмотрена теория рассеяния частиц произвольного спина в рамках так называемой аксиоматической теории поля.

Существует одна тема, не исследованная в работе Рюэля, дальнейшая разработка которой была бы весьма ценной. Это вопрос о соотношении между областями определения операторов B_{in}, B_{out} и областью определения первоначальных операторов A. Типичная проблема, которая здесь возникает, такова: можно ли показать, что все эти операторы могут быть расширены на подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}$, включающее в себя все состояния, энергия которых меньше чем $E < \infty$?

*) Θ — это оператор преобразования *PCT*. (*Прим. перев.*)

5. Асимптотическое поведение решений уравнения Клейна — Гордона *)

В оригинальной аргументации Хаага относительно асимптотического условия важная роль отводилась оценке асимптотического поведения решений уравнения Клейна — Гордона при больших временах:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{-ikx}\tilde{f}(k)\,d\Omega(k)\sim$$
$$\sim\sqrt{m}\,i^{-3/2}(1-\mathbf{v}^2)^{-3/4}\exp[-imt(1-\mathbf{v}^2)^{1/2}]|t|^{-3/2}\tilde{f}(m\mathbf{v}(1-\mathbf{v}^2)^{-1/2}), \tag{21}$$

где $\mathbf{v}=\mathbf{x}/t$. Это был один из слабых пунктов в аргументации Хаага, поскольку класс функций, для которых последнее соотношение справедливо, не был им определен. Рюэль заменил его следующей леммой:

Лемма

Пусть f — решение уравнения Клейна — Гордона $(\Box+m^2)f(x)=0$, имеющее вид

$$f(x)=(2\pi)^{-2}\int dp\,\theta(p^0)\,\delta(p^2-m^2)\tilde{f}(p)\,e^{-ipx}, \tag{22}$$

где $\tilde{f}(p)$ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем. Тогда f — бесконечно дифференцируемая функция, а $f(\lambda u)$ стремится к нулю, если $\lambda\to+\infty$ двумя различными способами в зависимости от того, пересекают ли векторы λu (где $0<\lambda<\infty$) носитель функции $\delta(p^2-m^2)\tilde{f}(p)$ или нет; такие векторы определяют конус C.

(а) Если $u\in C$, то

$$|f(\lambda u)|<A(u)\lambda^{-3/2},\qquad 0<\lambda<\infty, \tag{23}$$

где $A(u)$ — непрерывная функция.

(б) Если $u\notin C$, то

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^n|f(\lambda u)|=0\quad\text{для всех}\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{24}$$

и сходимость равномерна, если u принадлежит компактным подмножествам решений уравнения $(u^0)^2+\mathbf{u}^2=1$.

*) См. работу (Ruelle, 1962).

Замечание. Чтобы увидеть, почему появляется конус C, полезно вспомнить лемму Римана — Лебега и одно из ее доказательств. Рассмотрим функцию

$$f(x)=\int e^{ikx}dk\tilde{f}(k)$$

и предположим, что $\tilde{f}$ — интегрируемая функция с интегрируемой производной. Тогда

$$f(x)=\int \tilde{f}(k)\,dk\frac{1}{ix}\frac{d}{dk}(e^{ikx})=\frac{i}{x}\int\frac{d\tilde{f}(k)}{dk}dke^{ikx},$$

поэтому $|f(x)|\leqslant\dfrac{\int|d\tilde{f}(k)/dk|\,dk}{|x|}$.

Эту процедуру можно повторить вновь, если функция $\tilde{f}$ обладает несколькими интегрируемыми производными; каждая из них приводит к появлению дополнительной степени $|x|$ в знаменателе.

Для интеграла вида

$$\int e^{i\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}x}\tilde{f}(k)\,dk$$

положение будет совершенно иным, поскольку

$$\frac{1}{ix}\left[\frac{\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}}{k}\right]\frac{d}{dk}(e^{i\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}x})=e^{i\sqrt{\mathbf{k}^2+m^2}x},$$

а выражение в квадратной скобке сингулярно в точке $k=0$. Тем самым предыдущую аргументацию нельзя будет повторять неограниченно.

Доказательство

Функцию $f(x)$ вида (22) можно записать так:

$$f(x)=[2(2\pi)^2]^{-1}\int d\Omega_m(p)\,e^{-ipx}\tilde{f}(\mathbf{p}), \tag{25}$$

где интегрирование идет по области $p^2=m^2$, $p^0>0$ и $d\Omega_m(p)=d^3p/\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$. Поскольку интегрирование идет по компактной подобласти в $\mathbf{p}$-пространстве, то в (25) можно дифференцировать по x^μ под знаком интеграла, причем всегда будут получаться сходящиеся интегралы. Тем самым функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема.

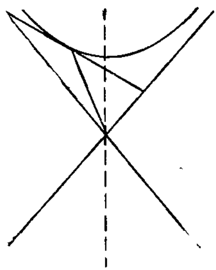
Чтобы исследовать асимптотическое поведение по λ, когда $x = \lambda u$, перепишем формулу (25) в виде

$$f(\lambda u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-is\lambda} \tilde{f}_u(s)\, ds, \tag{26}$$

где

$$\tilde{f}_u(s) = \frac{1}{2\,(2\pi)^{3/2}} \int d\Omega\,(p)\, \delta(s - p \cdot u)\, \tilde{f}\,(\mathbf{p}). \tag{27}$$

Но $s = p \cdot u$ — это трехмерная плоскость с нормалью u. Она пересекает гиперболоид по двумерной поверхности, которая представляет собой лоренцев образ сферы, если u — положительный времениподобный вектор, а s достаточно велико. Они не пересекаются, если s достаточно мало, а в граничном случае указанная плоскость будет касательна гиперболоиду. Для изотропных векторов u указанная плоскость пересекает гиперболоид по двумерной поверхности, которая простирается до бесконечности; то же самое справедливо и для пространственноподобных u.



После освобождения от δ-функции в остающемся криволинейном интеграле появляется якобиан, аналитичный по s, пока s не принимает того значения, при котором рассматриваемая плоскость становится касательной. Если носитель функции $\tilde{f}$ не содержит вектора $\mathbf{p}$, соответствующего точке касания, то функция $\tilde{f}_u\,(s)$ бесконечно дифференцируема. При любом векторе u функция $\tilde{f}_u\,(s)$ имеет компактный носитель, поскольку иначе подынтегральное выражение при $k = 0$ будет слишком сингулярным. Однако если носитель функции $\tilde{f}$ не включает точки нуль, то предшествующая аргументация сохраняет силу. Аналогом точки $k = 0$ в этом интеграле является комбинация $p a \lambda u$, которая наводит на мысль, что для случаев $u \in C$ и $u \notin C$ следует ожидать различного поведения. Из (26) видно, что функция $f\,(\lambda u)$ стремится к нулю быстрее любой степени расстояния. Кроме того, она равномерно непрерывна по u, пока u остается вдали от C. Этим устанавливается утверждение (б).

Чтобы доказать утверждение (а), заметим, что в предположении $u \in C$ вектор u положителен и времениподобен, так что преобразованием Лоренца его можно перенести на временную ось. Тогда, выбирая для удобства $u = (1, 0, 0, 0)$, получим (27):

$$\begin{aligned}\tilde{f}_u(s) &= \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} \delta\left(s - \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}\right) \tilde{f}(\mathbf{p}) = \\ &= \frac{1}{4(2\pi)^{3/2}} \sqrt{s^2-m^2}\,\theta(s-m) \int\limits_{|\mathbf{p}|=\sqrt{s^2-m^2}} d\omega(p)\,\tilde{f}(p) = \\ &= \sqrt{s-m}\;\tilde{g}(s-m),\end{aligned} \tag{28}$$

где $\tilde{g}(s-m)$ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем на замкнутой полуоси $0 \leqslant s < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned}f(\lambda u) &= (2\pi)^{-1/2} \int\limits_m^\infty ds\, e^{-is\lambda} \sqrt{s-m}\;\tilde{g}(s-m) = \\ &= (2\pi)^{-1/2} e^{-im\lambda} \int\limits_0^\infty ds\, e^{-is\lambda} \sqrt{s}\,\tilde{g}(s).\end{aligned}$$

Запишем:

$$\sqrt{s}\,\tilde{g}(s) = \sqrt{s}\,\tilde{g}(0)\,e^{-s} + \sqrt{s}\left(\tilde{g}(s) - \tilde{g}(0)\,e^{-s}\right).$$

Вклад первого слагаемого вычисляется точно, поскольку

$$\int\limits_0^\infty e^{-ist} e^{-s} \sqrt{s}\,ds = \sqrt{\pi}\, i\,[1+it]^{-3/2}, \tag{29}$$

в то время как второе слагаемое имеет две интегрируемые производные, так что его фурье-образ ограничен по абсолютной величине значением $a(u)\,|\lambda|^{-2}$. Тем самым

$$|f(\lambda u)| < A(u)\,|\lambda|^{-3/2}. \tag{30}$$

Функцию $A(u)$ можно принять здесь непрерывной, поскольку рассматриваемый интеграл меняется непрерывно при преобразованиях Лоренца.

Из этой леммы немедленно следует

Лемма

Если функция f удовлетворяет гипотезе, высказанной в предыдущей лемме, то $\sup_{\mathbf{x}} |f(x^0, \mathbf{x})|$ при $x^0 \to +\infty$ убывает как $|x^0|^{-3/2}$, а $\int d\mathbf{x}\, |f(x^0, \mathbf{x})|$ при $x^0 \to +\infty$ растет не быстрее чем $|x^0|^{3/2}$.

Доказательство

В силу равномерности оценок по u имеем, что $\sup_{\mathbf{x}\in C} |f(x^0, \mathbf{x})|$ убывает как $|x^0|^{-3/2}$.

Пересечение плоскости $x^0 = \mathrm{const}$ с конусом C — это компактное множество C_1 точек трехмерного пространства, которое лежит внутри сферы радиуса $< x^0$. Интеграл $\int d\mathbf{x}\, |f(x^0, \mathbf{x})|$ можно расщепить на интеграл по C_1 и на интеграл по остальному пространству. Вклад от остального пространства убывает быстрее любой степени x^0, в то время как $\left|\int_{C_1}\right| \leqslant \mathrm{const}\, |x_0|^{-3/2}\, |x_0|^3$.

6. Усовершенствованная теорема о распадении на пучки *)

Прежде всего следует ввести обозначение для описания $n+1$ пучков **):

$$\underline{A}_i(\underline{x}_i) = A(x_{i0})\, A(x_{i1}) \ldots A(x_{ir(i)}). \tag{31}$$

(Второй индекс отмечает точки внутри пучка; x_i обозна-

*) См. работу (Ruelle, 1962).

**) Простейшим примером *свойства распадения на пучки* может служить утверждение:

$$\langle A(x_1) \ldots A(x_j)\, A(x_{j+1} + a) \ldots A(x_n + a)\rangle_0 \to$$
$$\to \langle A(x_1) \ldots A(x_j)\rangle_0 \langle A(x_{j+1}) \ldots A(x_n)\rangle_0$$

при $a \to \infty$ по пространственноподобному направлению. При разделении точек $x_1, \ldots, x_n$ на k пучков, которые затем удаляются друг от друга, получаются еще более изысканные результаты. [См. Р. Ф. Стритер, А. С. Вайтман, *PCT*, спин и статистика и все такое, «Наука», 1966. (*Прим. перев.*)]

чает совокупность векторных переменных $x_{i0}, \ldots, x_{ir(i)}$, $i = 0, \ldots, n$.) Определим также

$$\underline{A}_i(\underline{x}_i + a_i) = U(a_i, 1)\,\underline{A}_i(\underline{x}_i)\,U(a_i, 1)^{-1}. \qquad (32)$$

(Если нам пришлось бы иметь дело с набором полей A, то аналогичное определение можно было бы дать, снабдив $\underline{A}_i$ дополнительным индексом, чтобы указать, какие именно поля относятся к i-му пучку. Мы назвали бы тогда $\underline{A}_i$ *бозе-* или соответственно *ферми*-полем, если бы рассматриваемое произведение содержало четное или нечетное число антикоммутирующих полей.) Выражение (31) будем называть *произведением пучка* или, короче, π-произведением, а выражение (32) — *сдвинутым π-произведением.*

Сдвинутые π-призведения войдут в вакуумные средние в различном порядке. Разовьем поэтому подходящие обозначения для этих вакуумных средних. Пусть π — элемент (перестановка) симметричной группы из $n + 1$ объектов такой, что $\pi(0, 1, \ldots, n) = (i_0, \ldots, i_n)$ (и $\sigma_\pi = \pm 1$ в соответствии с тем, является ли при действии на $\underline{A}_1 \ldots \underline{A}_n$ перестановка ферми-полей четной или нечетной). Тогда определим

$$T^\pi(\underline{x} + a) = T^\pi(\underline{x}_0 + a_0, \underline{x}_1 + a_1, \ldots, \underline{x}_n + a_n) =$$
$$= \sigma_\pi \langle \underline{A}_{i_0}(\underline{x}_{i_0} + a_{i_0})\, \underline{A}_{i_1}(\underline{x}_{i_1} + a_{i_1}) \cdots \underline{A}_{i_n}(\underline{x}_{i_n} + a_{i_n})\rangle_0, \qquad (33)$$

$$F^\pi_\varphi(a) = \int d\underline{x}\,\underline{\varphi}(\underline{x})\, T^\pi(\underline{x} + a), \qquad (34)$$

где $\underline{\varphi} \in \mathcal{S}$, т. е. пространству Шварца $\sum\limits_{k=0}^{n} [r(i_k) + 1]$ векторных переменных

$$x_{00}, x_{01}, \ldots, x_{0r(0)}, \ldots, x_{n0}, \ldots, x_{nr(n)}.$$

Заметим, что в формулах (33) и (34) $\underline{x}$ обозначает набор $\underline{x}_i$, $i = 0, \ldots, n$, в то время как a — набор a_i, $i = 0, \ldots, n$.

Векторы a_i, которые будут здесь использоваться, чисто пространственноподобны, так что $a = (0, \mathbf{a}_i)$. *Диаметр* λ совокупности векторов $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_n$ определяется условием $\lambda^2 = \sup\limits_{i,\, i'} (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i'})$. Допустим, что этот максимум достигается при $i = j$ и $i' = j'$. Тогда $\lambda^2 = (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_{j'})^2$. Далее рассмотрим семейство всех разбиений чисел $\{0, 1, \ldots, n\}$, на две подсовокупности X и X' таких, что $j \in X$ и $j' \in X'$. Максимум расстояния между совокупностями $\{\mathrm{a}_i,\ i \in X\}$ и $\{\mathrm{a}_{i'},\ i' \in X'\}$ в случае, когда X меняется в пределах указанного семейства, определяется выражением

$$\mu^2 = \sup_X \left[\inf_{i \in X,\, i' \in X'} (\mathrm{a}_i - \mathrm{a}_{i'})^2 \right].$$

В последующем обсуждении мы будем считать, что этот максимум получится в случае разбиения $X = Y$ и $X' = Y'$ и что

$$\mu^2 = (\mathrm{a}_l - \mathrm{a}_{l'})^2, \quad l \in Y \text{ и } l' \in Y'.$$

Существует хотя и элементарное, но фундаментальное неравенство, связывающее величину μ с диаметром λ:

$$n\mu \geqslant \lambda. \tag{35}$$

Доказательство

Разделим все точки a_i на два класса: те точки, которые могут быть соединены с a_j цепочкой точек так, что (1) ни одна точка не повторяется, (2) расстояния между последовательными точками $\leqslant \mu$, и те точки, которые нельзя так соединить. Потребуем, чтобы a_j принадлежала первому классу, поскольку каждая точка последнего класса лежит на расстоянии $> \mu$ от каждой точки первого класса, и если бы точка a принадлежала ему, то мы имели бы дело с разбиением, нарушающим определение μ. Тем самым существует цепочка таких точек $\mathrm{a}_j, \mathrm{a}_p, \ldots, \mathrm{a}_j$, что

$$\lambda = |\mathrm{a}_j - \mathrm{a}_{j'}| \leqslant |\mathrm{a}_j - \mathrm{a}_p| + |\mathrm{a}_p - \ldots| + \ldots + |\ldots - \mathrm{a}_{j'}| \leqslant n\mu.$$

Отметим, что $n\mu = \lambda$, если точки a_i расположены вдоль линии на одинаковых расстояниях.

Последнее усовершенствование обозначений: усеченные вакуумные средние, соответствующие (23), будут обозначаться через T_T^π и

$$F_{T\underline{\varphi}}^\pi(a) = \int d\underline{x}\,\underline{\varphi}(x)\, T_T^\pi(\underline{x} + a).$$

Если

$$Y = \{i_0, i_1, \ldots, i_k\},$$

то $Y' = \{i_0', i_1', \ldots, i_{k'}'\}$ с $k + k' = n - 1$, где элементы i_r внутри каждой подсовокупности выписаны в порядке возрастания их номера. Определим перестановки I и J с помощью равенств

$$I(0, 1, \ldots, n) = (0, 1, \ldots, n),$$
$$J(0, 1, \ldots, n) = (i_0, i_1, \ldots, i_k, i'_0, i'_1, \ldots, i'_{k'}).$$

Здесь I — тождественная перестановка.

Теперь мы подготовлены ко второму этапу доказательства. Пусть A — поле, удовлетворяющее аксиомам I, II и III, но с основными функциями из $\mathscr{S}$, а не из $\mathscr{D}$.

Теорема

Пусть λ — диаметр совокупности $(\mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_n)$. Тогда для любого положительного целого числа N имеет место равенство

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^N [F^I_{T\underline{\varphi}}(\mathrm{a}) - F^J_{T\underline{\varphi}}(\mathrm{a})] = 0 \tag{35a}$$

при условии, что конфигурация точек a_i остается такой, что определенные выше величины j, j', Y, Y' и l' остаются теми же самыми.

Замечания. (1) Эта теорема была сформулирована Хаагом (Haag, 1958). Он привел правдоподобное, но использующее некоторые рассуждения «на пальцах» доказательство.

(2) Именно эта теорема дает возможность доказать перестановочные соотношения для *in*- и *out*-полей.

Доказательство

Заметим, прежде всего, что в силу аксиомы III (LC) разность $T^I_T(\underline{x}) - T^J_T(\underline{x})$ обращается в нуль, когда все точки $x_{i\alpha}$ $(i \in Y)$ пространственноподобны всем точкам $x_{i'\alpha'}$ $(i' \in Y')$. Тем самым функция $\varphi(\underline{x})$ не дает вклада в интеграл

$$\left.\begin{aligned} F^I_{T\underline{\varphi}}(\mathrm{a}) - F^J_{T\varphi}(\mathrm{a}) &= \int d\underline{x}\, \underline{\varphi}(\underline{x})\, [T^I_T(\underline{x}+\mathrm{a}) - T^J_T(\underline{x}+\mathrm{a})], \\ (x^0_{i\alpha} - x^0_{i'\alpha'})^2 &< [(\mathrm{x}_{i\alpha} - \mathrm{x}_{i'\alpha'}) + (\mathrm{a}_i - \mathrm{a}_{i'})]^2, \\ \| x_{i\alpha} - x_{i'\alpha'} \|^2 &< (\mathrm{x}_{i\alpha} - \mathrm{x}_{i'\alpha'})^2 + [(\mathrm{x}_{i\alpha} - \mathrm{x}_{i'\alpha'}) + (\mathrm{a}_i - \mathrm{a}_{i'})]. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Далее, квадратная скобка здесь всегда больше, чем $\|\mathrm{x}_{i\alpha} - \mathrm{x}_{i'\alpha'}| - |\mathrm{a}_i - \mathrm{a}_{i'}\|$, и если $[(x_{i\alpha} - x_{i'\alpha'}) + (a_i - a_{i'})]^2 < 0$

для всех $\alpha = 0, \ldots, r(i)$, то $\alpha' = 0, \ldots, r(i')$ и все $i \in Y$, $i' \in Y'$.

Вводя евклидово расстояние

$$\| x_{i\alpha} - x_{i'\alpha'} \|^2 = (x^0_{i\alpha} - x^0_{i'\alpha'})^2 + (\mathbf{x}_{i\alpha} - \mathbf{x}_{i'\alpha'})^2, \qquad (37)$$

можно получить достаточное условие, при котором имеет место (37), в следующем виде.

Заметим, что формулу (37) можно переписать как

$$x_{i\alpha} - x_{i'\alpha'} \|^2 < (\mathbf{x}_{i\alpha} - \mathbf{x}_{i'\alpha'})^2 + [(\mathbf{x}_{i\alpha} - \mathbf{x}_{i'\alpha'}) + (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i'})]^2. \quad (38)$$

Здесь второй член в правой части всегда больше, чем

$$[|\mathbf{x}^i{}_\alpha - \mathbf{x}_{i'\alpha'}| - |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i'}|]^2,$$

так что вся правая часть формулы больше, чем

$$2|\mathbf{x}_{i\alpha} - \mathbf{x}_{i'\alpha'}|^2 + |\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i'}|^2 - 2|\mathbf{x}_{i\alpha} - \mathbf{x}_{i'\alpha'}||\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i'}|.$$

Эта величина достигает минимума при изменении $|\mathbf{x}_{i\alpha} - \mathbf{x}_{i'\alpha'}|$, когда

$$|\mathbf{x}_{i\alpha} - \mathbf{x}_{i'\alpha'}| = (1/2)|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i'}|.$$

В этом случае указанный минимум равен $(1/2)|\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_{i'}|^2$. Тем самым равенство (37) гарантировано, если

$$\| x_{i\alpha} - x_{i'\alpha'} \|^2 < \mu^2/2$$

или, используя (35), если

$$\| x_{i\alpha} - x_{i'\alpha'} \|^2 < \lambda^2/2n^2.$$

Поскольку $\| x_{i\alpha} - x_{i'\alpha'} \|^2 \leqslant (\| x_{i\alpha} \| + \| x_{i'\alpha'} \|)^2$, то, если имеет место

$$\| x \|^2 \equiv \sum_{i=0}^{r(i)} \| x_{i\alpha} \|^2 < \lambda^2/8n^2,$$

отсюда следует, что каждая норма $\| x_{i\alpha} \| < \lambda/2\sqrt{2}n$, так что $\| x_{i\alpha} - x_{i'\alpha'} \|^2 < (\lambda/\sqrt{2}n)^2 = \lambda^2/2n^2$. Тем самым в пространстве $\underline{x}$ существует сфера, радиус которой равен $\lambda\sqrt{2}n$, такая, что функция $\underline{\varphi}(\underline{x})$ не дает вклада в интеграл (36), если $\underline{x}$ находится внутри этой сферы.

Далее заметим, что преобразование $\underline{x} \to \underline{x} + a$, где все a одинаковы, оставляет функцию T^π_T инвариантной, так что без потери общности можно предположить, что в пучке, помеченном индексом нуль, первая точка $\underline{a}$ совпадает с началом координат. Тогда

$$\|\underline{a}\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\alpha=0}^{r(i)} \|a_i\|^2 < \sum_{i=1}^{n} (r(i)+1)\lambda^2 = L\lambda^2,$$

где

$$L = n + \sum_{i=1}^{n} r(i),$$

т. е.

$$\|\underline{a}\| \leqslant \lambda \sqrt{L}. \tag{39}$$

Чтобы завершить рассматриваемое доказательство, Рюэль ввел в употребление важный технический прием — разбиение единицы, приспособленное к данной проблеме. Разбиение единицы — это стандартный прием в теории обобщенных функций, (Schwartz, 1957), но тот его вариант, который был использован здесь, имел некоторые специфические особенности.

Что хотелось бы иметь — это семейство неотрицательных функций $f_\nu(\underline{x}) \in \mathcal{S}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, таких, что

1) $\sup\limits_{\underline{x}} f_\nu(\underline{x})$ ограничен по ν и то же самое справедливо для каждой производной функции f_ν;

2) $f_\nu(\underline{x}) \equiv f_\nu(\|x\|) = 0$ как для $\|x\| > \nu + 1$, так и для $\|x\| < \nu - 1$;

3) $\sum\limits_{\nu} f_\nu(\underline{x}) = 1$.

Вспомним, что для произвольного открытого покрытия пространства-времени $\{O_i;\ i \in I\}$ (где, согласно определению открытого покрытия, I представляет собой некоторую совокупность индексов, O_i — открытое множество при всех i и каждый вектор x принадлежит некоторому O_i) разбиение единицы представляет собой семейство φ_i, $i \in I$, бесконечно дифференцируемых неотрицательных функций с носителем $\varphi_1 \subset O_i$ и таких, что если C — произвольное компактное множество в пространстве-времени, то C пересекает носитель едва не конечного числа функций φ_i. В данном случае в качестве O_i можно выбрать множества, представляющие собой внутренние части сферических слоев толщины $(2+\varepsilon)$, радиусы которых — целые числа. Далее, чтобы убедиться в том, что свойство (1), которое обычно для разбиения единицы не требуется, может быть гарантировано, необходимо обратиться к деталям доказательства, содержащимся, например, у Шварца (Schwartz, 1957). Это утверждение истинно, но здесь доказываться не будет.

Если принять функции f_ν на веру, то получим

$$F^I_{T\underline{\varphi}}(\mathrm{a}) - F^J_{T\underline{\varphi}}(\mathrm{a}) = \sum_{\nu > \lambda/2n\sqrt{2}-1} [F^I_{T\underline{\varphi}_\nu}(\mathrm{a}) - F^J_{T\underline{\varphi}_\nu}(\mathrm{a})],$$

где $\underline{\varphi}_\nu = f_\nu(\underline{x})\varphi(\underline{x})$. (Ряд $\sum\limits_{r=1}^{\infty}\varphi_\nu$ сходится к функции φ из $\mathcal{S}$. Члены с $\nu+1 < \dfrac{\lambda}{2n\sqrt{2}}$ никакого вклада не дают, поскольку в этом случае носитель функции φ_2 полностью содержится в сфере $\|x\| < \dfrac{\lambda}{2n\sqrt{2}}$.)

Поскольку разность $T^I_T - T^J_T$ — это обобщенная функция умеренного роста, то ее можно записать как $T^I_T - T^J_T = D^\alpha g$, где g — непрерывная функция $\underline{x}$ самое большее полиномиального роста, а D^α — дифференциальный оператор вида

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial(x^0)^{\alpha_0}\,\partial(x^1)^{\alpha_1}\,\partial(x^2)^{\alpha_2}\,\partial(x^3)^{\alpha_3}},$$

где $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Тем самым

$$F^I_{T\underline{\varphi}_\nu}(\mathrm{a}) - F^J_{T\underline{\varphi}_\nu}(\mathrm{a}) = \int d\underline{x}\,\underline{\varphi}_\nu(\underline{x})\,D^\alpha g(\underline{x}+a) = \\ = \int d\underline{x}\,[D^\alpha\underline{\varphi}_\nu(\underline{x})]\,g(\underline{x}+a). \quad (40)$$

Далее, числа $\sup\limits_{\underline{x}}|D^\alpha\underline{\varphi}_\nu(x)|$ убывают с ростом ν быстрее любой степени ν^{-1}. (Причина этого в том, что $\varphi \in \mathcal{S}$, так что $\sup\limits_{\underline{x}}|x^\beta D^\gamma\varphi(x)| < \infty$. Но производные φ_ν равномерно ограничены по ν. Последнее приводит к тому, что $\sup|x^\beta\varphi_\nu(x)| < C$ независимо от ν, так что

$$\sup_{\underline{x}}|D^\alpha\varphi_\nu(x)| < \frac{C(\alpha,\beta)}{\nu^\beta}$$

для всех целых ν и каждого значения β.) Тем самым, поскольку

$$|g(x)| \leqslant C(1+\|x\|^2)^{k/2},$$

то

$$|F^I_{T\underline{\varphi}_\nu}(a) - F^J_{T\underline{\varphi}_\nu}(a)| \leqslant S(\nu+1)\sup_x |D^\alpha \underline{\varphi}_\nu(x)|\, C,$$

$$\sup_{\|x\|=\nu+1} (1+\|x^2\|)^{k/2} \leqslant$$

$$\leqslant S(\nu+1)\sup_x |D^\alpha \underline{\varphi}_\nu(x)|\, C\,(1+2(\nu+1)^2)^{k/2}\,(1+2\lambda^2 L)^{k/2},$$

где $S(\nu+1)$ — объем шара в $\underline{x}$-пространстве с радиусом $\nu+1$ и было использовано неравенство $1+\|x+a\|^2 < (1+2\|x\|^2)\times(1+2\|a\|^2)$.

Далее, числа $C_\nu = \max\limits_{\underline{x}} |D^\alpha \underline{\varphi}_\nu(\underline{x})|\ [CS(\nu+1)\times \times(1+2(\nu+1)^2)^{k/2}]$ убывают быстрее любой степени ν^{-1}; следовательно, в неравенстве

$$|F^I_{T\underline{\varphi}}(\mathrm{a}) - F^J_{T\underline{\varphi}}(\mathrm{a})| < \Bigg(\sum_{\nu > \lambda/2\sqrt{2}n-1} C_\nu\Bigg)(1+2L\lambda^2)^{k/2}$$

первый множитель убывает быстрее любой степени λ^{-1}. (ΣC_ν убывает как $N^{-(l-1)}$ при $l \geqslant 2$; чтобы убедиться в этом, надо сравнить эту сумму с интегралом, который можно вычислить явно.) Поэтому

$$\lim_{l\to\infty} \lambda^N [F^I_{T\underline{\varphi}}(\mathrm{a}) - F^J_{T\underline{\varphi}}(\mathrm{a})] = 0$$

для всех N, что и требовалось доказать.

Полезно просмотреть все доказательство, чтобы понять, почему оно проходит. Оно, конечно, существенно использует сферу в x-пространстве, внутренность которой не дает вкладов в интеграл. Далее, оно использует то допущение, что T^π_T — это обобщенные функции умеренного роста, чтобы заключить, что их можно выразить через производную от непрерывной полиномиально ограниченной функции g.

Следующая теорема — это та теорема, которая дала заглавие всему этому разделу.

Теорема

При тех же предположениях, что и в предыдущей теореме, но с дополнительным требованием, чтобы точка $p = 0$ была изолированной точкой физического спектра импульсов, $F^{\pi}_{\underline{T}\varphi}$ (a), равно как и $D_0 F^{\pi}_{T\underline{\varphi}}$, где D_0 — производная любого порядка относительно $\overset{0}{a_i}$, являются функциями в пространстве $\mathcal{S}$.

Доказательство

Введем теперь в x-пространстве новые переменные:

$$x = x_{i_0 0};\qquad \xi = x_{i'_0 0} - x_{i_0 0};\qquad \xi_i = x_{i0} - x_{i_0 0}\quad (i \neq i_0);$$

$$\xi_{i'} = x_{i'0} - x_{i'_0 0}\quad (i' \neq i'_0);\qquad \xi_{i\alpha} = x_{i\alpha} - x_{i0}\quad (\alpha \neq 0);$$

$$\xi_{i'\alpha'} = x_{i'\alpha'} - x_{i'0}\quad (\alpha' \neq 0).$$

Иными словами, выделяем одну точку $x_{i_0 0}$ с индексом из Y и одну точку $x_{i'_0 0}$ с индексом из Y'. Обозначим первую из них через x, а их разность через ξ. Затем введем разности между первыми точками пучков из Y и $x_{i_0 0}$ и обозначим их ξ_i; введем разности между первыми точками пучков из Y' и $x_{i'_0 0}$ и обозначим их $\xi_{i'}$. Наконец, введем разности между $x_{i\alpha}$ и первой точкой их пучков $\xi_{i\alpha} = x_{i\alpha} - x_{i0}$ и разности между $x_{i'\alpha'}$ и первой точкой их пучков $\xi_{i'\alpha'} = x_{i'\alpha'} - x_{i'0'}$.

Обозначим через $\underline{\xi}$ семейство всех $\xi_i, \xi_{i'}, \xi_{i\alpha}, \xi_{i'\alpha'}$. В этом случае T^{π}_{T} является функцией ξ и ξ', а φ — функцией x, ξ, $\underline{\xi}$. Определим их фурье-образы формулами

$$(\mathcal{F}T^{\pi}_{T})(P, \underline{P}) = (2\pi)^{-2L} \int \cdots \int d\xi\, d\underline{\xi} e^{-i(\underline{p}\xi + \underline{P}\underline{\xi})}\, T^{\pi}_{T}(\xi, \underline{\xi}),$$

$$(\mathcal{F}\underline{\varphi})(p, P, \underline{P}) =$$

$$= (2\pi)^{-2(L+1)} \int \cdots \int dx\, d\xi\, d\underline{\xi} e^{i(px + P\xi + \underline{P}\underline{\xi})}\, \underline{\varphi}(x, \xi, \underline{\xi}).$$

Здесь переменные P помечены тем же способом, что и переменные $\underline{\xi}$. Между прочим, эта формула демонстрирует то, что было уже ясно из первых принципов: $F^{\pi}_{T\varphi}$ — бесконечно дифференцируемая функция самое большее полиномиального роста. Тогда

$$F^{\pi}_{T\underline{\varphi}}(\underline{a}) = (2\pi)^2 \int dP\, d\underline{P}\, (\mathcal{F}\underline{\varphi})(0, P, \underline{P})(\mathcal{F}T^{\pi}_{T})(\mathcal{F}T^{\pi}_{\overline{T}})(P, \underline{P}) \times$$
$$\times \exp i \Big[P(a_{i'_0} - a_{i_0}) + \sum_{i=i_1}^{i_k} P_i(a_i - a_{i_0}) +$$
$$+ \sum_{i'=i'_1}^{i'k'} P_{i'}(a_{i'} - a_{i'_0}) \Big].$$

До этого момента в ходе доказательства не было сделано ничего существенного, кроме введения обозначений для фурье-образов. Теперь выскажем идею доказательства. Заметим, что $(\mathcal{F}T^{J}_{T})(P, \underline{P}) = 0$, если только не имеет места $P \in \overline{V}^{M}_{+}$ (где $\overline{V}^{M}_{+}$ символизирует все векторы P с $Q^2 > M^2$, $\varphi^0 > 0$, а черта обозначает замыкание). Это утверждение истинно, поскольку P — переменная, канонически сопряженная разности $\xi = x_{i'_0 0} - x_{i_0 0}$. (Поместим $U(a, 1)$ в вакуумное среднее как раз вслед за $A(x_{i_0 0})$, умножим его на e^{-iQa} и проинтегрируем. В результате должен получиться нуль, исключая случай, когда Q принадлежит физическому спектру. Однако имеет место эффект $\xi \to \xi + a$, так что P должен принадлежать физическому спектру.) M — это предполагаемый нижний предел для массы системы. В число промежуточных состояний вакуум не входит, поскольку рассматриваются усеченные вакуумные средние. Полное формальное доказательство этого последнего интуитивно очевидного утверждения содержится в работе (Araki, 1960). Кроме того, если K — перестановка $K(0, 1, \ldots, n) \to (i'_0, \ldots, i'_k, i_0, \ldots, i_k)$, то K меняет ξ на $\underline{\xi}$, не меняя при этом $\underline{\xi}$, так что $(\mathcal{F}T^{K}_{T})(P, \underline{P}) = 0$, если только не имеет места $\underline{P} \in V^{M}_{-}$. Определим теперь $(\mathcal{F}\Psi')(p, P, \underline{P}) = h(P)\, \tilde{\underline{\varphi}}(p, P, \underline{P}) \in \mathcal{S}$, где h — бесконечно дифференцируемая функция на $\overline{V}^{M}_{+}$, которая обращается в нуль вне V_{+}. Тогда, очевидно,

$$F^{J}_{T\underline{\Psi}}(a) = F^{J}_{T\underline{\varphi}}(a), \quad F^{J}_{T\underline{\Psi}}(a) = 0. \qquad (41)$$

Далее, аргументация предыдущей теоремы была сформулирована для двух перестановок I и J, однако, будь она справедлива для J и K, отличие было бы только в обозначениях. Тем самым

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^N F^J_{T\underline{\varphi}}(\mathrm{a}) = 0 \tag{42}$$

при тех же условиях, что были сформулированы в предыдущей теореме. Упомянутые условия затрагивают точки j, j', l, l' и совокупности Y и Y'. Однако если а имеет такую конфигурацию, что точки j, j' и т. д. различны, то выводы будут те же самые, а для точек j, j', ... существует только конечное число возможных вариантов выбора. Тем самым для любой конфигурации а формула (42) имеет место. Действие D_0 на F эквивалентно изменению $\underline{\varphi}$, так что теорема доказана.

Чтобы можно было применять теорию рассеяния Хаага, необходимо иметь доказанное выше утверждение, но сформулированное для почти локальных полей. В действительности этот случай охватывается данной выше аргументацией, если только произвести изменения в обозначениях. Напишем

$$B_i(x_i) = U(x_i, 1)\,\underline{A}_i(\underline{\varphi}_i)\,U(x_i, 1)^{-1},$$

где ранее введенные переменные a_i обозначаем через x_i, заменив a на x. Тогда

$$F(x) = (\Psi_0, B_0(x_0)B_1(x_1)\ldots B_n(x_n)\Psi_0)$$

— особый случай (неусеченной) функции F, рассматривавшейся выше с $\underline{\varphi} = \underline{\varphi_0} \otimes \underline{\varphi_1} \otimes \ldots \otimes \underline{\varphi_n}$. Усеченные вакуумные средние определяются для полей B, как в первой части, а не как это было сделано выше для полей A. Однако из проведенного выше доказательства немедленно следует, что вакуум с помощью этой процедуры будет с тем же успехом исключен из числа промежуточных состояний.

Следствие

Предыдущая теорема справедлива также для усеченных вакуумных средних почти локальных полей, построенных из локальных полей (основные функции вновь берутся из $\mathfrak{S}$), при условии, что вакуум — изолированная точка в спектре масс.

7. Заключительные замечания о теории рассеяния Хаага — Рюэля

В предыдущих разделах было разъяснено, как можно сконструировать состояния рассеяния всех элементарных систем, ассоциированных с неприводимыми представлениями группы Пуанкаре, содержащимися в U. Тогда возникает естественный вопрос: такие состояния рассеяния единственны? Отвечаю: да. Предположим, что выбор двух разных наборов полей B_i, скажем B и $\hat{B}$, и выполнение проведенных выше построений привели бы к двум состояниям $\Phi(t)$ и $\hat{\Phi}(t)$. Соображения, которые следуют из формулы (19), показывают, что в действительности они будут сходиться к тем же самым *in*- или *out*-состояниям. Аргументация развивается в точности так же, как и прежде, за исключением того, что вместо членов с двумя операторами, которые не дают вклада, поскольку производные по времени от них равны нулю, здесь то же самое имеет место за счет того, что сокращаются вклады от состояний Φ и $\hat{\Phi}$. Оба случая охватываются утверждением, что никакого вклада нет, ибо одночастичная проблема уже решена, причем предполагается, что одночастичные состояния $B_f\,\Psi_0$ и $\hat{B}_f\,\Psi_0$ нормированы одним и тем же способом. Тем самым теория рассеяния Хаага — Рюэля дает единственный набор *in*- и *out*-полей и, следовательно, единственную матрицу рассеяния.

Эти утверждения имеют силу, даже если аксиома IV несправедлива. Однако в этом случае оператор S осуществляет унитарное отображение пространства $\mathcal{H}_{out}$ на $\mathcal{H}_{in}$, неопределенное на тех векторах из $\mathcal{H}$, которых нет в $\mathcal{H}_{out}$. Возможно, что имеет некий смысл исследование (в духе теории элементарных частиц Гейзенберга) теорий, для которых аксиома IV несправедлива *).

---

*) Другие изложения теории рассеяния Хаага — Рюэля частично содержатся в книгах: И. Т. Тодоров, Лекции в Международной зимней школе теоретической физики, т. I, Дубна, 1964; R. Jost, General Theory of Quantized Fields, Amer. Math. Soc., 1965. Русский перевод готовится в изд-ве «Мир» (1967). (*Прим. перев.*)

ЛИТЕРАТУРА

Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1966.
Araki H., J. Math. Phys. 1, 492 (1960).
Baym G., Phys. Rev. 117, 88 (1960).
Bialnicki-Birula I., Nuovo cimento 10, 1150 (1958).
Bloch F., Nordsieck A., Phys. Rev. 52, 54 (1937).
Bogoliubov N. N., Nuovo cimento 7, 794 (1958).
Borchers H. J., Nuovo cimento 15, 784 (1960).
Borchers H. J., Nuovo cimento 33, 1600 (1964).
Borchers H. J., Haag R., Schroer B., Nuovo cimento 29, 148 (1963).
Borchers H. J., Zimmermann W., Nuovo cimento 31, 1047 (1964).
Born M., Nagendra Nath N. S., Proc. Ind. Acad. Sci. 3, 318 (1936).
Boulware D. G., Gilbert W., Phys. Rev. 126, 1563 (1962).
Browder F. E., Math. Z. 80, 249 (1962).
Browder F. E., Strauss W. A., Pacif. J. Math. 13, 23 (1963).
Brown L. S., Nuovo cimento 29, 617 (1963).
Carleman T., Arkiv math. fys. 24 B, № 11 (1934).
Cook J. M., J. Math. Phys. 2, 33 (1961).
Epstein H., Nuovo cimento 27, 886 (1963).
Epstein H., Glaser V., Jaffe A., Nuovo cimento 36, 1016 (1965).
Federbush P., Phys. Rev. 121, 1247 (1961a).
Federbush P., Prog. Theoret. Phys. 26, 148 (1961 б).
Fierz M., Proc. of the Fifth Annual Rochester Conference on High-Energy Physics, p. 67 (1956).
Фок В. А., Phys. Z. (USSR) 11, 1 (1937); см. также В. А. Фок, Работы по квантовой теории поля, Изд. ЛГУ, 1957.
Friedrichs K., Comm. Pure and Appl. Math. 5, 349 (1952).
Friedrichs K., Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields, Interscience, 1953.
Galindo A., Proc. Nat. Acad. Sci. USA 48, 1128 (1962).
Gårding L., Lions J. L., Nuovo cimento Suppl. 14, 45 (1959).
Gårding L., Wightman A. S., Proc. Nat. Acad. Sci. 40, 617 (1954).

Gårding L., Wightman A. S., Arkiv fys. 28, 129 (1964).
Glaser V., Nuovo cimento 9, 990 (1958).
Glaser V., Jakšić, B., Nuovo cimento 11, 877 (1959).
Goto T., Imamura T., Progr. Theor. Phys. 14, 396 (1955).
Greenberg O. W., Ann. Phys. 16, 158 (1961).
Greenberg O. W., J. Math. Phys. 3, 859 (1962).
Gross E. P., Ann. Phys. 19, 219, 1962.
Guenin M., Misra B., Nuovo cimento 30, 1272 (1963).
Güttinger W., Nucl. Phys. 9, 429 (1958).
Haag R., Lectures at the CERN Study Group, 1953—1954.
Haag R., Dansk. mat. fys. medd. 29, № 12 (1955).
Hepp K., Jost R., Ruelle D., Steinmann A., Helv. Phys. Acta 34, 542 (1961).
Hörmander L., Linear Partial Differential Operators, 1965, ch. IV. Русс. перев. готовится к печати в изд-ве «Мир».
Jaffe A., Ann. Phys. 32, 127 (1965).
Jauch J. M., Rohrlich F., The Theory of Photons and Electrons, Addison Wesley, 1955, p. 82.
Johnson K., Nucl. Phys. 25, 431 (1961).
Johnson K., Nuovo cimento 20, 773 (1961).
Jordan P., Z. Physik 93, 464 (1935).
Jörgens K., Math. Z. 77, 299 (1961).
Jost R. The General Theory of Quantized Fields, Amer. Math. Soc., 1965. Русс. перев.: Р. Иост, Общая теория квантовых полей, «Мир», 1967.
Kadison R. V., J. Math. Phys. 4, 1511 (1963).
Kato T., Prog. Theor. Phys. 1, 514 (1949 a).
Kato T., Prog. Theor. Phys. 4, 510 (1949 б).
Kato T., Trans. Amer. Math. Soc. 70, 195 (1951).
Kato Y., Prog. Theor. Phys. 26, 99 (1961).
Keller J. B., Comm. Pure and Appl. Math. 10, 523 (1957).
Klaiber B., Helv. Phys. Acta 37, 554 (1964).
Leutwyler H., Helv. Phys. Acta 38, 43 (1965).
Licht A. L., Maryland Thesis, 1963.
Lions J. L., Equations Differentielles Operationnelles et Problemes aux Limites, 1965.
Luttinger J. M., J. Math. Phys. 4, 115 (1963).
Mano K., Prog. Theor. Phys. 14, 435 (1955).
Mattis D. C., Lieb E. H., J. Math. Phys. 6, 304 (1965).
Nelson E., J. Math. Phys. 5, 1190 (1964).
Neumann J. von, Compositio Math. 6, 1 (1938).
Nilsson N., Lunds. Sälsk. 29, 1 (1958).
Pauli W., Seminar on Positron Theory, Institute Advanced Study, Princeton, 1936.
Pradhan T., Nucl. Phys. 9, 124 (1958).
Prosser R. T., Bull. Amer. Math. Soc. 69, 552 (1963).
Riesz F., S Z-Nagy B., Functional Analysis, Ungar, New York, 1955. Русск. перев.: Ф. Рисс и Б. Секельфальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.

R o b i n s o n D. W., Helv. Phys. Acta 35, 403 (1962).
R o b i n s o n D. W., Physics Letters 9, 189 (1964).
R u e l l e D., Rigorous Results in Statistical Mechanics, Boulder Lectures, 1963.
S a l a m A., The Formalism of Lie Groups, p. 173, Theoretical Physics, IAEA, Vienna, 1963.
S c a r f F. L., Nucl. Phys. 11, 475 (1959 a).
S c a r f F. L., Nuovo cimento 14, 899 (1959 б).
S c a r f F. L., Phys. Rev. 115, 463 (1959в).
S c a r f F. L., W e s s J., Nuovo cimento 26, 150 (1962).
S c h r o e r B., Fortschr. Phys. 11, 1 (1963).
S c h r o e r B., J. Math. Phys. 5, 1361 (1964).
S c h w a r t z L., Theorie des Distributions, vol. 1, p. 29 (1957).
S c h w e b e r S. S., Introduction to the Relativistic Quantum Theory of Fields. Row, Peterson and Co., 1961. Русс. перев.: С. Ш в е б е р, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.
S c h w i n g e r J., Phys. Rev. Letters 3, 296 (1959).
S c h w i n g e r J., Lectures, presented at a Seminar, Trieste, 16 July — 25 August, 1962, Theoretical Physics, IAEA, Vienna, 1963.
S e g a l I. E., Lectures at the Institute Advanced Study 1951—52, Lecture Notes from Later Years, Chicago.
S e g a l I. E., Trans. Amer. Math. Soc. 88, 12 (1958).
S e g a l I. E., Ann. Math. 72, 594 (1960).
S e g a l I. E., Ann. Math. 78, 339 (1963).
S h a l e D., J. Math. Phys. 3, 915 (1962).
S o k o l o w A., Phys. Z. (USSR) 12, 148 (1937).
S o m m e r f i e l d C., Ann. Phys. 26, 1 (1963).
S t o n e M. H., Linear Transformation in Hilbert Space, 1964.
S t r e a t e r R. F., W i g h t m a n A. S., PCT, Spin and Statistics and All That, W. A. Benjamin Inc., 1964. Русс. перев.: Р. Ф. С т р и т е р, А. С. В а й т м а н, *PCT*, спин и статистика и все такое, «Наука», 1966.
S t u e c k e l b e r g E. C. G., Phys. Rev. 81, 130 (1951).
S t u m m e l F., Math. Ann. 132, 150 (1956).
S u d a r s h a n E. C. G., B a r d a k c i K., Nuovo cimento 21, 722 (1961).
T h i r r i n g W., Ann. Phys. 3, 91 (1958).
T h i r r i n g W., Phys. Rev. 126, 1209 (1962).
T h i r r i n g W., W e s s J., Ann. Phys. 27, 331 (1964).
T i t c h m a r s h E. C., Eigenfunction Expansions, 1958, vol. I. Русс. перев.: Е. К. Т и т ч м а р ш, Разложение по собственным функциям, ИЛ, 1960, т. I.
T r o t t e r H. F., Pacific J. Math. 8, 887 (1958).
V a l a t i n J., Nuovo cimento 7, 843 (1958).
V a n H o v e L., Acad. Roy. de Belg., Bull. Classe des Sciences 39, 1055 (1951).
V a n H o v e L. Physica 18, 145 (1952).
W a r d J. C., Phys. Rev. 79, 406 (1950).
W i e n h o l t z E., Math. Ann. 435, 50 (1958).

Wightman A. S., Phys. Rev. 101, 806 (1956).
Wightman A. S., Proceedings of the Conference on Functional Integration and Construction Quantum Field Theory, Cambridge, USA, 1966.
Wightman A. S., Schweber S., Phys. Rev. 98, 812 (1955).
Zachariasen F., Phys. Rev. 121, 185 (1961).

Литература к дополнению

Гельфанд И. М., Виленкин Н. Н., Обобщенные функции, т. 4, Физматгиз, 1961, стр. 32.
Araki H., Ann. Phys. 11, 260 (1960).
Araki H., Hepp K., Ruelle D., Helv. Phys. Acta 35, 164 (1962).
Borchers H. J., Nuovo cimento 15, 784 (1960).
Borchers H. J., Nuovo cimento 24, 214 (1961).
Güttinger W., Nuovo cimento 10, 1 (1958).
Haag R., Phys. Rev. 112, 669 (1958).
Haag R., Les Problemes Mathematiques de la Theori Quantique des Champs, CNRS, Paris, 1959, 151. Русс. перев.: сб. «Математика» 6 : 4, 134 (1962).
Haag R., Schroer B., J. Math. Phys. 3, 248 (1962).
Hall D., Wightman A. S., Dansk mat. fys. medd. 31, 5 (1957).
Jost R., Helv. Phys. Acta 30, 409 (1957).
Jost R., Hepp K., Helv. Phys. Acta 35, 34 (1962).
Reeh H., Schlieder S., Nuovo cimento 22, 1051 (1961); 25, 32 (1962).
Ruelle D., Helv. Phys. Acta 35, 1 (1962).
Ruelle D., Helv. Phys. Acta 35, 162 (1962).
Schwartz L., Theorie des Distributions, vol. I, Paris, 1957, p. 22.
Schwartz L., Theorie des Distributions, vol. 2, Paris, 1957, p. 90, 95.
Stone M. H., Linear Transformations in Hilbert Space, 1964.
Wightman A. S., Phys. Rev. 101, 860 (1956).
Wightman A. S., Proc. Int. Congress of Mathematicians, 1962.
Zerner M., Seminaire de Physique Mathematique de Marseille, 1961.