« EUCLIDE »
INTRODUCTION AUX ÉTUDES SCIENTIFIQUES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIE MATHÉMATIQUE
SECTION DIRIGÉE PAR JEAN CHAZY

FONCTIONS ANALYTIQUES

par

Georges VALIRON
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS

1954

Ж. ВАЛИРОН

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Перевод с французского

В. С. ВИДЕНСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1957

АННОТАЦИЯ

Предлагаемая вниманию читателей книга известного французского математика Ж. Валирона «Аналитические функции», не являясь систематическим курсом теории функций комплексного перемеиного, содержит рассмотрение широкого круга проблем в этой теории. В книге содержится весьма разнообразный и нетрадиционный материал, касающийся итерации аналитических функций, граничных свойств, тонких методов исследования целых функций и некоторых других вопросов. Книга рассчитана на студентов старших курсов и аспирантов математических отделений университетов, а также на научных работников — математиков, специализирующихся в области теории функций комплексного переменного.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Книга Ж. Валирона, как на это указывает сам автор, не является систематическим учебником по теории функций комплексного переменного. В этой книге рассмотрен широкий круг вопросов, многие из которых до сих пор излагались лишь в журнальной литературе. Но разумеется, в ней представлены не все направления, в которых развивается современная теория аналитических функций. Выбор материала в значительной мере определился личными интересами и вкусами автора, впрочем, весьма разносторонними.

Ж. Валирон искусно вводит читателя в различные области теории аналитических функций, сообщая ему не только то, что уже сделано, но и обращая его внимание на вопросы, которые еще подлежат исследованию. Чтобы представить существо дела достаточно выпукло, в книге приводятся с доказательствами лишь те факты, которые в том или ином смысле являются наиболее характерными и которые устанавливаются сравнительно просто. Более тонкие или сложно доказываемые предложения лишь упоминаются.

Изложение, вначале достаточно подробное, к концу становится все более и более сжатым (особенно в двух последних главах) и рассчитано на то, что читатель, желающий проникнуть глубже в суть трактуемых вопросов, обратится к оригинальным работам, на которые имеются ссылки в конце каждой главы.

Список литературы содержит лишь те работы, результаты которых непосредственно излагаются в настоящей

монографии. Вследствие этого многие труды, относящиеся к рассматриваемым темам, не нашли своего отражения в библиографии; в частности, из многочисленных работ советских математиков был процитирован только ставший уже классическим мемуар Н. Н. Лузина и И. И. Привалова о граничных свойствах функций. В ряде мест перевода в подстрочных примечаниях редактора указаны дополнительные источники. Кроме того, к ссылкам на французские учебники присоединены ссылки на русские учебники.

Книга представляет значительный интерес для математиков, работающих в области теории функций, а также будет полезной для студентов-математиков старших курсов университетов и аспирантов, которые смогут почерпнуть в этой книге указания относительно выбора тем для исследования.

Москва, март 1957 г. *В. Виденский*

ВВЕДЕНИЕ

Основы теории аналитических функций одного комплексного переменного излагаются во всех курсах математического анализа на «Facultés des Sciences» и в высших технических школах. Поэтому в настоящей книге мы не возвращаемся к этим основам, а ограничиваемся лишь напоминанием в первой главе в уточненной форме и без доказательств нескольких классических предложений; мы останавливаемся преимущественно на понятии аналитического продолжения функции, следуя концепциям Римана, Вейерштрасса и Пуанкаре, считая вместе с последним, что понятие поверхности Римана, которую называют также поверхностью Римана — Пуанкаре, не является существенно отличным от понятия продолжения в смысле Вейерштрасса. Теорема Вейерштрасса о разложении целой функции на множители сопоставляется по методу Пуанкаре с построением в заданной однолистной области такой голоморфной функции, для которой эта область была бы естественной областью существования. Теорема Римана о конформном отображении однолистной односвязной области на круг, доказательство которой приводится во многих учебниках, здесь предполагается известной, так же как и формула Шварца, дающая отображение полуплоскости на многоугольник. Напротив, формула Шварца относительно конформного отображения внутренности эллипса на круг дана с доказательством.

После того как приведены эти предварительные сведения, мы ставим перед собой задачу изложить некоторые части теории, стараясь не повторять трудов из коллекции монографий Бореля, «Cahiers scientifiques» Жюлиа и книг Фату об автоморфных функциях. При изложении мы ограничиваемся в основном приведением самых элементарных предложений и кратким указанием литературы относительно более глубоких результатов, чтобы указать пути в различных направлениях. В главе II даются простейшие свойства однолистных

функций. В главе III приведены две классические теоремы Фату, одна из которых затем применяется к доказательству теоремы Пуанкаре о распределении особенностей функции на плоскости с разрезом и вторая, относящаяся к радиальным граничным значениям функций, ограниченных в круге, находит себе применение в дальнейшем изложении. В главе IV используется обобщение леммы Шварца для первоначального исследования конформного отображения на границе. Это обобщение леммы Шварца имеет своим источником одно предложение Жюлиа, которое он применял в своих работах по итерации рациональных дробей. Так как простейшие общие свойства этой итерации даны в одной из монографий Монтеля, то мы ограничиваемся здесь лишь изложением замечательных свойств функций Кёнигса, полученных Фату в случае рациональных дробей, принадлежащих кругу (глава V). Это привело к рассмотрению общего случая итерации голоморфных функций, принадлежащих кругу, исследованного впервые Вольфом и Данжуа (глава VI). Поскольку функция Кёнигса удовлетворяет функциональному уравнению типа Шрёдера, то вслед за этим рассматриваются функции с множителями Пуанкаре (глава VII) и простейшие функциональные дифференциальные уравнения с этими множителями. Проблема, которая здесь встает, заключается в том, чтобы определить свойства решений уравнений, и в первую очередь установить характер их возрастания, что позволяет выяснить, будут ли эти функции нового рода.

В главе VIII рассматривается задача построения в данном круге голоморфных функций, имеющих этот круг естественной областью своего существования, причем значения этой функции описывают поверхность Римана — Пуанкаре, имеющую одну-единственную неалгебраическую особенность Наконец, главы IX и X посвящены исследованию свойств решений алгебраических дифференциальных уравнений в случае, когда эти решения являются целыми функциями или близкими к ним по характеру функциями.

В конце каждой главы даются литературные ссылки на библиографию, расположенную в конце книги.

Мой ученик и друг М. Эрве любезно согласился закончить чтение корректур, которое я должен был прервать вследствие болезни. Я выражаю ему здесь мою живейшую признательность.

ГЛАВА I

ПОНЯТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ОДНОГО КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. Функция, голоморфная в однолистной области. Примеры. Наиболее простыми аналитическими функциями являются функции голоморфные в однолистной области.

Мы предполагаем хорошо известными понятие комплексного числа, арифметические операции над этими числами и геометрическое представление комплексного числа точкой плоскости, отнесенной к прямоугольной системе координат с осями Ox и Oy, на которых выбран одинаковый масштаб. Число $z = x + iy$, где i — мнимая единица, изображается на плоскости точкой M с координатами x, y. Модуль числа z, обозначаемый $|z|$, представляет собой расстояние OM, так что $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Углы (выраженные в радианах), образуемые вектором OM с положительным направлением оси Ox, отсчитываемые в положительном направлении от Ox к Oy, являются аргументами числа z. Разность между двумя такими аргументами представляет собой число, кратное 2π. Точка M — это образ числа z. Имеет место взаимно однозначное соответствие между M и z, т. е. если дана точка M, то существует единственное комплексное число z, образом которого является M. Будем называть это число аффиксом точки M.

Утверждение, что комплексная величина z является переменной, равносильно утверждению, что его образ M является переменным. Если каждому значению $z = x + iy$, т. е. каждому положению точки M, поставлено в соответствие определенное число $Z = X + iY$, что сводится к тому, что точке M поставлена в соответствие точка μ, являющаяся образом числа Z, с координатами X, Y

в плоскости, отнесенной к прямоугольной системе координат с осями OX, OY, то этим определена функция от z, что записываем в виде $Z=f(z)$. Этим определяется точечное преобразование, при котором точкам M ставятся в соответствие точки μ. Действительная часть X и мнимая часть Y числа Z представляют собой функции от координат x, y точки M:

$$X=P(x, y), \quad Y=Q(x, y).$$

Мы называем *однолистной областью* связное множество точек плоскости, каждая из которых является внутренней. Это значит, что если точка M_0 является произвольной точкой области D, то существует круг с центром M_0, все точки которого принадлежат D, а если M_0 и M_1 — две какие-нибудь точки D, то существует ломаная линия с концами M_0 и M_1, все точки которой принадлежат D. Граница области D состоит из предельных точек множества D, которые не принадлежат к D.

Функция $Z=f(z)$, определенная в области D, называется голоморфной в D, если она имеет производную в каждой точке D. Если z — данная произвольная точка[1]) из D, то отношение

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

стремится к конечному пределу, когда $|h|$ стремится к нулю. Это — производная в точке z; ее обозначают через $f'(z)$. Чтобы она существовала, необходимо и достаточно, чтобы $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ были дифференцируемы в точке $M(x, y)$ и чтобы можно было написать

$$f'(z)=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}-i\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Вычисление производных осуществляется так же, как для действительных функций одной действительной переменной. Многочлен

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$$

---

[1]) Так как имеется взаимно однозначное соответствие между числами z и их образами, то безразлично, говорить ли «число» или «точка».

имеет производную в каждой точке z, следовательно, является голоморфной функцией во всякой области; его производная будет:

$$na_0z^{n-1}+(n-1)a_1z^{n-2}+\ldots+a_{n-1}.$$

Рациональная функция, представляющая собой отношение двух многочленов, является голоморфной во всякой области, не содержащей нулей знаменателя.

Степенной ряд

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$$

сходится в круге $|z|<R$ конечного или бесконечного радиуса при условии, что $\sqrt[n]{|c_n|}$ ограничен. Если L является верхним пределом $\sqrt[n]{|c_n|}$ при $n\to\infty$, т. е.

$$L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|},$$

то имеем $R=\frac{1}{L}$. В круге сходимости сумма $f(z)$ ряда является голоморфной функцией, ее производная $f'(z)$ представляет собой сумму ряда

$$f'(z)=c_1+2c_2z+\ldots+nc_nz^{n-1}+\ldots,$$

радиусом сходимости которого будет также R.

Если R бесконечно, то сумма $f(z)$ является функцией, голоморфной при любом конечном z; такая функция называется целой. Примерами таких функций являются

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$$

и тригонометрические функции

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{6}+\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

§ 2. Теорема Коши и ее следствия. Если рассмотрим на плоскости Oxy, в которой изображаются комплексные числа $z=x+iy$, дугу простой спрямляемой кривой AB

и на этой дуге непрерывную функцию $f(z)$ точки M с аффиксом z, то под интегралом

$$I=\int_{AB} f(z)\,dz$$

будем понимать предел суммы

$$\sum_{p=0}^{n}(z_{p+1}-z_p)f(\zeta_p), \quad z_{n+1}=Z_0,$$

к которому эта сумма стремится при делении AB на более мелкие дуги точками z_p, идя от точки A с аффиксом z_0 к точке B с аффиксом Z_0 и выбирая ζ_p произвольно на дуге $z_p\,z_{p+1}$, в предположении, что наибольшая из хорд $|z_{p+1}-z_p|$ стремится к нулю. Если, выписывая явно действительные и мнимые части, положим:

$$z=x+iy, \quad f(z)=P(x, y)+iQ(x, y),$$

то будем иметь:

$$I=\int_{AB}(P+iQ)(dx+i\,dy)=$$

$$=\int_{AB}P\,dx-Q\,dy+i\int_{AB}P\,dy+Q\,dx,$$

где интегралы в правой части — обычные криволинейные интегралы.

Если дуга AB замкнута и образует замкнутую кривую Γ, то нужно установить направление обхода на AB. Мы будем считать положительным такое направление обхода, при котором область, ограниченная кривой Γ, остается слева. Интеграл не зависит от выбора начальной точки A на Γ и записывается:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz.$$

Теорема, о которой сейчас будет идти речь, была сперва доказана Коши и Риманом при некоторых дополнительных предположениях, от которых затем избавился Гурса, установивший, что: *если Γ — простая замкнутая спрямляемая кривая, $f(z)$ — непрерывная функция в замкнутой области,*

представляющей собой объединение Γ *и области* D, *ограниченной кривой* Γ, *и если* $f(z)$ *голоморфна в области* D, *то*

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0. \tag{1}$$

Результат остается справедливым и в том случае, когда $f(z)$ голоморфна в области D, ограниченной конечным числом простых замкнутых спрямляемых кривых, и непрерывна на множестве $D+\Gamma$, получающемся присоединением к области D ее границы Γ. В этом случае на каждой граничной кривой должно быть установлено такое направление обхода, при котором область D остается слева, иными словами, положительное направление на внешней граничной кривой и противоположное направление на внутренних граничных кривых.

Из основной теоремы, выраженной равенством (1), вытекает основная формула Коши. *Если* $f(z)$ *голоморфна в области* D, *ограниченной конечным числом спрямляемых кривых, образующих ее границу* Γ, *и если эта функция непрерывна на* $D+\Gamma$, *то ее значение* $f(\zeta)$ *в произвольной точке* ζ *области* D *определяется формулой*

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-\zeta}\,dz. \tag{2}$$

Из этой формулы выводятся такие следствия:

В области D функция $f(z)$ имеет производные всех порядков; производная порядка p определяется формулой

$$f^{(p)}(\zeta) = \frac{p!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{p+1}}\,dz;$$

последовательные производные также являются голоморфными функциями в D.

Функция $f(z)$ разлагается в ряд Тэйлора в окрестности каждой точки ζ области D, так что

$$f(z) = f(\zeta) + \sum_{p=1}^{\infty} (z-\zeta)^p \frac{f^{(p)}(\zeta)}{p!},$$

причем ряд в правой части сходится к $f(z)$ во всех точках z, лежащих внутри круга с центром в точке ζ и радиусом, представляющим кратчайшее расстояние от точки ζ до границы Γ области D.

Разложение в ряд Тэйлора дает новые также весьма важные следствия. Если z_0 является нулем функции $f(z)$, т. е. $f(z_0)=0$, и если только $f(z)$ не равна нулю тождественно в области D, то по крайней мере одна из производных не обращается в нуль в этой точке:

$$f(z)=(z-z_0)^p\left[\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}+(z-z_0)\frac{f^{(p+1)}(z_0)}{(p+1)!}+\cdots\right],$$
$$f^{(p)}(z_0)\neq 0;$$

число z_0 называется нулем кратности p. Тогда $f(z)$ не обращается более в нуль в других точках некоторого кружка с центром в точке z_0, следовательно, нули функции $f(z)$, не равной нулю тождественно, являются изолированными в области D точками, которые могут иметь предельные точки лишь на границе области D. Из этого вытекает, что *функция, голоморфная в области D, полностью определена, если известны ее значения и значения ее производных в одной-единственной точке z_0 из D.*

На фундаментальной формуле (1) основано развитие интегрального исчисления. Если D — однолистная односвязная область, $f(z)$ — голоморфная в D функция, z_0 — фиксированная в D точка, то интеграл

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(u)\,du,$$

вычисляемый по произвольной спрямляемой кривой, расположенной в D и соединяющей z_0 с z, не зависит от этой кривой и представляет собой голоморфную функцию от z, производной которой будет $f(z)$. Всякая другая функция, голоморфная в D и имеющая своей производной $f(z)$, имеет вид $F(z)+C$, где C — произвольная постоянная.

§ 3. Голоморфная функция и конформное отображение. Однолистная функция. Пусть $Z=f(z)$ — функция, голоморфная в области D. Она определяет точечное отображение, при котором точке $M(z=x+iy)$ области D ставится в соответствие точка $\mu(Z=X+iY)$. Если допустим, что

$f'(z)$ не обращается в нуль в области D, то это отображение будет локально взаимно однозначным, иными словами, каждой достаточно малой области d из D соответствует область δ и, обратно, области δ соответствует d посредством обратного отображения $z=\varphi(Z)$, причем $\varphi(Z)$ голоморфна в δ, а ее производная $\varphi'(Z)$ равна $\frac{1}{f'(z)}$. Но если $f(z)$ — произвольная голоморфная функция, то двум различным точкам z и z' из D может соответствовать одно и то же значение $Z=f(z)=f(z')$, так что области D не соответствует однолистная область в плоскости Z. Это имеет место, например, если $Z=z^2$, причем z берется в секторе кольца

$$0<r<|z|<R, \quad |\arg z|<\alpha, \quad \alpha>\frac{\pi}{2}.$$

Если в D при $z\neq z'$ всегда

$$f(z)\neq f(z'),$$

то функция называется *однолистной* в D. Она принимает один-единственный раз всякое значение, которое вообще способна принять. При этом отображение $Z=f(z)$ ставит во взаимно однозначное соответствие области D плоскости z область Δ плоскости Z.

В общем случае, когда $f'(z)$ не обращается в нуль в D, отображение, как это было сказано выше, будет локально взаимно однозначным, а функция $f(z)$ — локально однолистной. Если d, например, представляет собой окружность $|z-\zeta|<r$ с центром ζ, произвольно взятым в D, и достаточно малым радиусом $r=r(\zeta)$, то этой области соответствует область δ. *Это соответствие конформно, т. е. сохраняет углы*, причем оно сохраняет их как по величине, так и по направлению отсчета. Угол между двумя кривыми в области d равен по величине и по направлению отсчета углу между двумя кривыми, которые являются образами этих кривых. В окрестности точки ζ и в окрестности ее образа отображение эквивалентно отображению посредством

$$Z-f(\zeta)=f'(\zeta)(z-\zeta),$$

т. е., если допустим, что система координат OXY параллельна и одинаково направлена с системой Oxy, то отображение эквивалентно гомотетии и повороту. Угол поворота равен $\arg f'(\zeta)$, а отношение подобия равно $|f'(\zeta)|$.

Отметим, что конформное отображение посредством функций

$$X = P(x, y), \quad Y = Q(x, y),$$

функциональный определитель которых

$$\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}$$

не обращается в нуль, эквивалентно голоморфному отображению $Z = P + iQ$, если только сохраняется направление отсчета углов и первые частные производные непрерывны. Таким образом, голоморфные преобразования непременно связаны с вопросами о конформном отображении, сохраняющем направление отсчета углов.

Среди этих отображений наиболее простыми являются дробно-линейные отображения

$$Z = \frac{az + b}{cz + d},$$

где a, b, c, d — такие постоянные, что $ad - bc \neq 0$. Такие отображения переводят окружность или прямую в окружность или прямую, причем окружность может переходить в прямую и наоборот. Таким образом, можно отобразить внутренность круга на полуплоскость. Отображения, переводящие внутренность круга $|z| < R$ на себя, будут иметь вид

$$Z = \omega R^2 \frac{z - z_0}{R^2 - \bar{z}_0 z}, \quad |\omega| = 1, \quad |z_0| < R, \tag{3}$$

где $\bar{z}_0$ означает число, сопряженное с z_0. Это единственные конформные отображения внутренности круга в себя.

§ 4. Гармонические функции. Если $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ голоморфна в области D, то голоморфными будут также $f'(z)$ и $f''(z)$, откуда следует, что $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют непрерывные частные производные второго порядка. Дифференцируя равенства

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{4}$$

соответственно по x и по y, получаем:

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Функция $P(x, y)$ является решением уравнения Лапласа $\Delta P = 0$. Это — *гармоническая функция*. Гармонической является также функция $Q(x, y)$. Две гармонические функции, удовлетворяющие тождествам (4), называются *сопряженными*. Если задана гармоническая функция $P(x, y)$ с непрерывными частными производными первого и второго порядка, то тождества (4) позволяют вычислить функцию $Q(x, y)$, определенную с точностью до аддитивной постоянной, посредством интегрирования полного дифференциала, причем эта функция будет однозначной, если только область определения P односвязна. Тогда $P + iQ$ голоморфна в этой области. Таким образом, если в некоторой области известна действительная часть голоморфной функции, то эта функция определена с точностью до $+iC$, где C — действительная постоянная. Точно так же функция определена с точностью до действительной аддитивной постоянной, если известна ее мнимая часть $Q(x, y)$. Теория голоморфных функций может быть выведена из теории гармонических функций и обратно.

§ 5. Ряд Лорана. Мероморфные функции. Существенно особые точки. Рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную в круговом кольце, центр которого без ограничения общности можем считать совпадающим с началом координат. Применение основной формулы (2) показывает, что в этом кольце будет иметь место разложение $f(z)$ в ряд

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n, \tag{5}$$

причем этот ряд абсолютно сходится в кольце. Это разложение называется рядом Лорана. В частности, если функция $f(z)$ голоморфна в области, образованной кругом $|z| < R$, из которого удален центр, то разложение в ряд Лорана справедливо, каково бы ни было z, такое, что $0 < |z| < R$.

При этом возможны три следующих случая:

1°. В ряде (5) все a_n при $n < 0$ равны нулю, так что при стремлении z к нулю правая часть, представляющая собой степенной ряд, стремится к a_0. Говорят тогда, что $f(z)$ *голоморфна* при $z = 0$, причем ее значением в этой точке будет a_0.

2°. В ряде (5) существуют не равные нулю коэффициенты a_n с отрицательными индексами, но их имеется конечное число. Если a_{-m} является коэффициентом при z^n с наименьшим отрицательным показателем, то мы видим, что произведение $z^m f(z)$ будет голоморфным при $z=0$, причем это произведение стремится к a_{-m}, когда z стремится к нулю. В этом случае говорят, что $z=0$ является *полюсом порядка* m функции $f(z)$.

3°. В ряде (5) содержится бесконечное множество не равных нулю коэффициентов a_n с отрицательными индексами. Точка $z=0$ называется *существенно особой точкой* функции $f(z)$. В этом случае, как показал Вейерштрасс *), функция может стремиться к любому наперед заданному значению при z, стремящемся к нулю, а Пикар доказал, что $f(z)$ принимает фактически все конечные значения за исключением, быть может, одного, в сколь угодно малой окрестности точки $z=0$.

Из этих предложений, в частности, вытекает, что если $|f(z)|$ ограничен определенным числом при $0<|z|<R'<R$, то непременно имеет место первый случай, т. е. $f(z)$ голоморфна при $z=0$. Это утверждение часто называют *теоремой Римана*.

Мероморфной функцией в области D называют функцию, которая голоморфна в области D, за исключением изолированных точек этой области, которые являются полюсами. Полюсы могут иметь предельные точки, которые расположены на границе области. Арифметические операции над функциями, мероморфными в D, приводят к мероморфным функциям с той оговоркой, что при делении делитель не должен быть тождественно равным нулю. Голоморфная функция является мероморфной функцией, которая не имеет полюсов и, следовательно, остается конечной в каждой точке области D.

§ 6. Распространение определений на бесконечно удаленную точку. Сферическое изображение комплексных чисел. Области D, до сих пор рассмотренные, могли иметь бесконечно удаленную точку в качестве граничной, но не в

---

*) Впервые эта теорема была доказана Ю. В. Сохоцким в 1868 г. (*Прим. перев.*)

качестве внутренней точки. Определение производной в точке z также требует, чтобы z было конечным. Если область D' содержит бесконечно удаленную точку, иными словами, содержит все точки, внешние по отношению к некоторому кругу $|z| < R$, то мы распространяем определения голоморфности, полюса и существенно особой точки, переводя бесконечно удаленную точку в начало координат посредством преобразования

$$z = \frac{1}{\zeta},$$

так что, когда $|z|$ стремится к бесконечности, ζ стремится к нулю. Функция, голоморфная при z (конечных), таких, что $|z| > R$, переходит в голоморфную функцию при

$$0 < |\zeta| < \frac{1}{R}.$$

Пусть $F(\zeta)$ — эта функция. Если $F(\zeta)$ голоморфна и при $\zeta = 0$, то про $f(z)$ говорят, что она голоморфна в бесконечности; если $\zeta = 0$ является полюсом порядка p или существенно особой точкой функции $F(\zeta)$, то мы говорим, что бесконечно удаленная точка является полюсом порядка p или существенно особой точкой $f(z)$. Кроме того, функция $f(z)$ может быть разложена в ряд Лорана при $|z| > R$, как бы велик ни был $|z|$; имеем:

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{0}^{\infty} a_n z^n,$$

причем при $|z| > R$ ряд, рассматриваемый в целом, является сходящимся; первый из этих рядов сходится при $|z| > R$, второй — при любом z. Бесконечно удаленная точка будет точкой голоморфности, если $a_n = 0$ при $n > 0$; нулем функции, если $a_n = 0$ при $n \geqslant 0$; полюсом порядка q, если $a_q \neq 0$, $a_n = 0$ при $n > q > 0$; существенно особой точкой, если существует бесконечная последовательность коэффициентов a_n с положительными индексами, не обращающихся в нуль. Например, многочлен от z представляет собой в каждой конечной точке голоморфную функцию, которая имеет на бесконечности полюс, порядок которого равен степени

многочлена. Функции

$$e^z, \quad \cos z, \quad \sin z$$

имеют на бесконечности существенно особую точку.

Рассмотрения, связанные с бесконечно удаленной точкой и ее окрестностью, упрощаются, если вместо того, чтобы представлять комплексные числа точками на плоскости, мы будем их представлять точками на сфере. Рассмотрим сферу S с диаметром, равным единице, касательную к плоскости Oxy в точке O, и пусть Ω означает точку сферы S, диаметрально противоположную точке O. Точке M плоскости Oxy поставим в соответствие точку пересечения m сферы S с прямой ΩM. Соответствие будет взаимно однозначным, а бесконечно удаленной точке плоскости будет соответствовать точка Ω. Можно считать, что комплексное число z, которое имело своим образом точку M на плоскости, имеет в качестве сферического образа точку m. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между z и m. Точечное преобразование (M, m) представляет собой стереографическую проекцию. Если $[z, z']$ обозначает длину хорды (m, m'), соединяющей сферические образы точек z, z', то при конечных z, z' находим:

$$\frac{[z, z']^2}{|z-z'|^2} = \frac{1}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}$$

и что, каковы бы ни были z и z',

$$[z, z'] = \left[\frac{1}{z}, \frac{1}{z'}\right].$$

Области D плоскости соответствует область d сферы, а утверждение, что D содержит бесконечно удаленную точку, приводится к тому, что область d содержит точку Ω. Если теперь изображать одновременно переменную z и функцию $Z = f(z)$, мероморфную в D, не на плоскости, а на сфере S, то функция будет непрерывной даже в полюсах и даже на бесконечности, если непрерывность определена в метрике на сфере, а именно: будем иметь:

$$[f(z), f(z')] < \varepsilon$$

при условии, что

$$[z, z'] < \eta.$$

Можно ввести сферическую модулярную производную, которая является обобщением понятия модуля обычной производной и имеет смысл даже для полюсов *). Если $f(z)$ голоморфна в точке z, лежащей на конечном расстоянии, то эта сферическая модулярная производная равна

$$|f'(z)|\frac{1+|z|^2}{1+|f(z)|^2}.$$

Эти рассмотрения относительно производных были применены Марти.

§ 7. Аналитическое продолжение. Если данная функция голоморфна или мероморфна в области D', то эта функция также голоморфна или мероморфна в области D, составляющей часть D. Напротив, если дана функция, мероморфная в области D, то можно попытаться определить ее в более широкой области. Можно всегда исключить из D полюсы и рассматривать только случай функции, голоморфной в области, которую по-прежнему будем обозначать через D. Это продолжение, если только оно возможно, будет единственным, так как, если $f(z)$ — функция, голоморфная в D, а $F(z)$ — ее продолжение в область D', содержащую D, то $F(z)$ полностью определена заданием $F(z_0)$, $F'(z_0)$, ..., $F^{(p)}(z_0)$, ... в некоторой точке z_0 из D (§ 2), и эти значения совпадают со значениями $f(z_0)$, $f'(z_0)$, ..., $f^{(p)}(z_0)$, ... Эта возможность продолжения функции была рассмотрена Риманом в его докторской диссертации. Классическим примером является продолжение эйлеровой функции $\Gamma(z)$, определенной первоначально посредством интеграла

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt,$$

взятого по действительной оси t. Эта функция определена и дифференцируема, следовательно, голоморфна, при $\Re z>0$ [1]).

---

*) Сферической модулярной производной в точке z называют предел

$$\lim_{z'\to z}\frac{[f(z'),f(z)]}{[z',z]}.$$

(*Прим. ред.*)

[1]) $\Re z$ — обозначает действительную часть z, $\Im z$ — его мнимую часть.

При этих условиях имеем $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, так что, если n — натуральное число, то

$$\Gamma(z+n)=z(z+1)\ldots(z+n-1)\Gamma(z).$$

Разрешая это равенство относительно $\Gamma(z)$, видим, что функция

$$\frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}$$

голоморфна при $\Re z>-n$ и $z\neq 0, -1, \ldots, -(n-1)$ и совпадает с $\Gamma(z)$ в полуплоскости $\Re(z)>0$; она дает продолжение функции $\Gamma(z)$ в полуплоскость $\Re z>-n$, причем полученная функция имеет полюсы в точках $0, -1, \ldots$ $\ldots, (n-1)$. Так как n может быть взято произвольно, то $\Gamma(z)$, таким образом, определена для всех z и представляет собой функцию, мероморфную во всей плоскости, полюсами которой являются точки с целыми отрицательными абсциссами и нуль.

В этом примере продолжение функции $\Gamma(z)$ было осуществлено с помощью функционального уравнения, которому она удовлетворяет. Но можно также преобразовать интеграл, который послужил для определения функции $\Gamma(z)$. Именно это и сделал Риман для функций, определенных аналогичными интегралами, например в своем труде «О числе простых чисел, не превышающих данной величины». В случае функции $\Gamma(z)$ можно воспользоваться формулой Ганкеля

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a)} e^t t^{-z}\,dt,$$

где $C(a)$ — контур, образованный осью u в плоскости $t=u+iv$, проходимой от $-\infty$ до $-a$ снизу Ou, затем окружностью $|t|=a>0$, из которой удалена точка $t=-a$, и затем осью u, проходимой от $-a$ до $-\infty$ сверху Ou.

Метод аналитического продолжения, предложенный Вейерштрассом, покоится на систематическом применении рядов Тэйлора. Если функция $Z=f(z)$ голоморфна в области D, то она может быть разложена в ряд Тэйлора в окрестности каждой точки z_0 из D (§ 2), причем радиус сходимости этого ряда не менее, чем кратчайшее расстояние δ_0 от точки z_0 до границы области D. Если радиус сходимости R_0 больше этого кратчайшего расстояния, то указан-

ный ряд определяет функцию, которая голоморфна в части круга сходимости, внешней относительно D, и совпадает с $f(z)$ в круге $|z-z_0|<\delta_0$. Этот ряд, следовательно, дает продолжение функции в круг $|z-z_0|<R_0$. Таким образом, достаточно в дальнейшем рассматривать только разложения в ряд Тэйлора, т. е. ряды по целым неотрицательным степеням $z=z_0$. Заданный a priori степенной ряд с конечным радиусом сходимости R

$$\sum_0^\infty c_n z^n \tag{6}$$

определяет в круге $|z|<R$ голоморфную функцию $f(z)$. Если задано z_0 с модулем, меньшим, чем R, то значения $f(z_0), \ldots, f^{(p)}(z_0)$ известны (теоретически) как суммы рядов

$$f^{(p)}(z_0)=\sum_{n=p}^\infty n(n-1)\ldots(n-p+1)c_n z_0^{n-p}.$$

Можно, следовательно, рассмотреть ряд Тэйлора

$$\sum_{p=0}^\infty \frac{(z-z_0)^p}{p!} f^{(p)}(z_0); \quad (0!=1). \tag{7}$$

Если радиус сходимости этого ряда $R(z_0)$ больше, чем $R-|z_0|$, то функция $f(z)$ оказывается продолженной в часть круга $|z-z_0|<R(z_0)$, которая является внешней по отношению к кругу $|z|<R$. Допустим, что это имеет место и что точки A и B представляют собой точки пересечения окружностей $|z|=R$ и $|z-z_0|=R(z_0)$. Тогда $f(z)$ голоморфна в области, ограниченной дугами окружностей ACB и ADB (рис. 1). Из этого вытекает, что если z' — точка сектора OAB круга $|z|<R$, то радиус сходимости ряда Тэйлора функции $f(z)$ в точке z' не менее, чем расстояние от точки z' до границы области $ACBDA$, и более, чем $R-|z'|$. Каждая точка сектора OAB позволяет продолжить $f(z)$ за пределы окружности $|z|=R$. Следовательно,

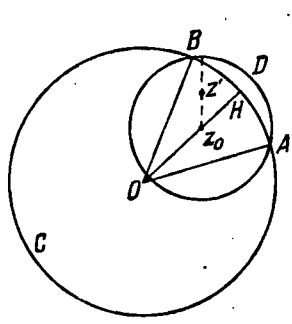

Рис. 1.

если для некоторой точки z_0, $R(z_0) = R - |z_0|$, то невозможно осуществить продолжение, исходя из точек, лежащих на радиусе OH окружности $|z| = R$, проходящем через точку z_0; мы говорим в этом случае, что точка H, являющаяся концом этого радиуса, представляет собой особую точку функции $f(z)$, определенной рядом (6).

Может случиться, что функция $f(z)$ не может быть продолжена, какова бы ни была точка z_0, взятая внутри $|z| < R$; тогда все точки окружности $|z| = R$ являются особыми точками в только что упомянутом смысле, и мы говорим, что окружность C является *естественной границей* (купюрой) для $f(z)$ и что внешность C является *лакунарным пространством*. Были построены многочисленные примеры, когда этот случай осуществляется, после того, как Вейерштрассом был указан следующий пример:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2^n},$$

где c_n удовлетворяют соотношению

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[2^n]{|c_n|} = 1,$$

которое означает, что радиус сходимости равен единице. Среди этих функций те из них, для которых при любом q сходятся степенные ряды с коэффициентами

$$2^{nq} |c_n|,$$

будут непрерывными, вместе со всеми их производными на окружности $|z| = 1$. Если положим $z = e^{i\theta}$, где θ — действительно, то $f_1(z)$ будет функцией $F(\theta)$, бесконечно дифференцируемой, но не аналитической ни в каком интервале. Если возьмем $c_n = 1$ при всех n, то функция $f_1(z)$ будет удовлетворять функциональному уравнению

$$f_1(z) = z + f_1(z^2).$$

Рассмотрим случай, когда $f(z)$ продолжаема при некотором z_0 за круг C, $|z| < R$, так что ряд (7) имеет круг

сходимости $C(z_0)$, $|z-z_0|<R(z_0)$, который пересекает круг C, и функция $f(z)$ оказывается продолженной в область $ACBDA$ (см. рис. 1). Как на окружности C, так и на окружности $C(z_0)$ имеется по крайней мере одна особая точка функции $f(z)$; этими особыми точками могут, в частности, быть A или B. Может случиться, что все точки контура $ACBDA$ являются особыми, так что $f(z)$ не будет более продолжаема, а контур $ACBDA$ будет естественной границей для $f(z)$. В противном случае в области $ACBDA$ найдется точка z_0', для которой круг сходимости ряда (7), в котором z_0 заменено через z_0', — пересекает границу $ACBDA$. В части этого круга $C(z_0')$, внешней по отношению к $ACBDA$, мы получаем новое продолжение функции $f(z)$, причем безразлично, принадлежит ли точка z_0' кругу C, или кругу $C(z_0)$. Можно повторять эту операцию продолжения до тех пор, пока она удается. Всякая точка z', которая при этом может быть достигнута, принадлежит кругу сходимости некоторого ряда (7), уже полученному, и в свою очередь является центром круга сходимости ряда

$$\sum_0^\infty \frac{(z-z')^p}{p!} f^{(p)}(z'), \tag{8}$$

где $f^{(p)}(z')$ определяются с помощью рассматриваемого ряда (7). Ряд (8) называется *элементом* продолжения функции $f(z)$, первоначально определенной рядом (6); этот элемент характеризуется точкой z' и последовательностью коэффициентов $f^{(p)}(z')$ $(p=0, 1, \ldots)$, которые зависят от предыдущего элемента (7). Обозначим элемент (8) через $E[z', f^{(p)}(z')]$ и назовем его *смежным* с предшествующим элементом $E[z_0, f^{(p)}(z_0)]$.

Может случиться, что при переходе от первоначального элемента (6) к элементу (8) можно применить бесконечную последовательность смежных элементов. Этого избегают, реализуя продолжение вдоль лучей. Осуществляя продолжение вдоль радиусов окружности C, $|z|<R$, мы получаем звезду голоморфизма функции $f(z)$ [см. Valiron, 1, $n°$ 199] *). В этой звезде продолженная функция голоморфна, всякая

*) См. также Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950 г., п. 5.3, гл. VIII, стр. 649. (*Прим. ред.*)

точка ζ этой звезды может быть достигнута конечным числом элементов с центрами на отрезке $[0, \zeta]$; первым из этих элементов является первоначальный элемент (6), а последним — элемент (8), причем каждый элемент является смежным с предыдущим. Исходя из некоторой точки ζ этой звезды, можно вновь продолжить функцию в новую звезду и т. д. Таким образом, если z' является достижимой при продолжении точкой, то мы перейдем от первоначального элемента (6) к элементу $E[z', f^{(p)}(z')]$ с помощью конечного числа элементов, каждый из которых является смежным с предыдущим. Каждая достижимая точка будет центром одного или нескольких элементов или даже бесконечного множества элементов, причем два элемента считаются различными, если соответствующие ряды (8) не тождественны; в противном случае элементы считаются совпадающими.

§ 8. Теорема Пуанкаре—Вольтерра. Множество элементов $E[z', f^{(p)}(z')]$, определенное при продолжении функции $f(z)$, имеет мощность континуума, но Пуанкаре доказал, что можно ограничиться рассмотрением *счетного множества элементов, а именно тех, декартовы координаты центров которых суть рациональные числа.* Не всякая достижимая точка будет теперь центром элемента из упомянутой частной последовательности, но центр z' всякого элемента $E[z', f^{(p)}(z')]$ будет лежать в круге сходимости одного из элементов $E[\zeta, f^{(p)}(\zeta)]$ этой счетной последовательности. В частности,

в каждой точке z, достижимой при продолжении, множество значений продолженной функции счетно.

§ 9. Аналитические функции. Многозначные функции и поверхности Римана—Пуанкаре. Аналитическое продолжение ряда (6) позволяет определить в каждой достижимой при продолжении точке z одну или несколько ветвей продолженной функции, каждая из которых будет голоморфной в окрестности точки z. Если в каждой достижимой точке z найденное значение единственно, то полученная функция $f(z)$ голоморфна в области D, образованной точками z (это — область, так как каждая точка является внутренней, а множество их связно). Функция, полученная таким образом, более непродолжаема, область D *является*

ее естественной областью существования. Точки, принадлежащие границе области D, которые достижимы изнутри D, являются особыми точками области D.

Если функция $f(z)$ многозначна, иными словами, принимает несколько различных значений в некоторых точках, то можно вместо того, чтобы рассматривать точку z как расположенную в обычной плоскости, рассматривать ее как лежащую на плоской поверхности, состоящей из нескольких листов, как это делал Риман в случае, когда число различных значений функции в каждой точке z конечно (случай алгебраических функций). Можно вместе с Пуанкаре считать, что эта поверхность S определена, когда определены элементы функции посредством операции аналитического продолжения. Каждому элементу $E[z, f^{(p)}(z)]$ соответствует свой круг сходимости $C[z, f^{(p)}(z)]$, следовательно, круговой диск, внутренность которого образует часть поверхности. Если z' принадлежит $C[z, f^{(p)}(z)]$, то диск $C[z', f^{(p)}(z')]$, соответствующий $f^{(p)}(z')$ $(p=0, 1, \ldots)$, взятым в $C[z, f^{(p)}(z)]$, должен быть рассматриваем как образующий вместе с $C[z, f^{(p)}(z)]$ одну и ту же, но более обширную, область, принадлежащую к тому же самому *листу* поверхности. Диски, срастаясь друг с другом, образуют поверхность.

Звезда голоморфизма с центром в ζ может быть рассматриваема как лежащая на одном-единственном листе поверхности. Если два диска $C[z', f^{(p)}(z')]$ и $C[z', f^{(p)}(z'')]$, рассматриваемые в обычной плоскости, имеют общую часть, то они принадлежат к одному и тому же листу, тогда и только тогда, когда значения элементов $E[z', f^{(p)}(z')]$ и $E[z', f^{(p)}(z'')]$ совпадают в этой общей части. В противном случае, эти диски не имеют общих точек на поверхности S. Функция $f(z)$, следовательно, однозначна на S.

По теореме Пуанкаре — Вольтерра можно определить поверхность S с помощью счетного множества дисков, а именно тех, обе координаты центра которых рациональные числа. Можно упорядочить эти диски в последовательность: D_0, $D'_1, \ldots, D'_n, \ldots$, где D_0 — первоначальный диск $|z| < R$; затем заново перенумеровать их следующим образом: выберем среди дисков, смежных с D_0, диск D'_n с наименьшим номером, обозначим его через D_1 и вычеркнем его из последователь-

ности D'_m, через D_2 обозначим диск D'_n с наименьшим номером из числа смежных с D_0 или D_1 дисков оставшейся последовательности, затем вычеркнем его из последовательности дисков D'_m и т. д. Рассмотрим на поверхности S последовательность связных областей: $\Delta_0 = D_0$, Δ_1, состоящую из точек, принадлежащих к D_0 или к D_1, Δ_2 — из точек, принадлежащих к Δ_1 или к D_2 и т. д.; область Δ_n будет содержать все точки Δ_{n-1}, что записывается так: $\Delta_n \supset \Delta_{n-1}$, и всякая точка S будет принадлежать к Δ_n, начиная с некоторого n. Последовательность областей $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$ *исчерпывает изнутри поверхность* S, которую мы назовем поверхностью Римана — Пуанкаре функции $f(z)$. Если на S функция $f(z)$ однозначна и голоморфна в окрестности каждой точки на S, то мы будем говорить, что она голоморфна на S.

Когда функция $f(z)$ рассматривается как многозначная функция, определенная на обыкновенной плоскости z, которую мы назовем *однолистной плоскостью*, то мы будем говорить, что это *аналитическая функция*. От одного из значений Z функции $f(z)$ в точке z можно перейти к другому ее значению посредством цепочки из конечного числа смежных элементов.

§ 10. Естественная область существования аналитической функции. Обратная функция. Выше было сказано, что если функция $f(z)$, определенная своим аналитическим продолжением, остается однозначной, то область D однолистной плоскости, куда эта функция продолжена, называется *естественной областью ее существования*. Для аналитической многозначной функции понятие *естественной области существования относится к поверхности Римана — Пуанкаре S, на которой $f(z)$ однозначна и голоморфна*. В первом случае поверхность S совпадает с областью D однолистной плоскости; если существуют точки этой плоскости, которые являются внешними относительно области D (т. е. если область D вместе со своей границей F не охватывает всей плоскости), то S *может быть продолжена*. Во втором случае поверхность также может быть продолжена, удовлетворяя некоторым определенным условиям, так что S будет частью более обширной поверхности S'; это-то обстоятельство и позволяет говорить, что S является естест-

венной областью существования функции $f(z)$, которая послужила для определения *) S.

Если $Z = f(z)$ — аналитическая функция, $E[z_0, f^{(p)}(z_0)]$ — один из ее элементов и если $f'(z_0) \neq 0$, то этот элемент будет однолистным в некотором круге, концентрическом с кругом сходимости $C[z_0, f^{(p)}(z_0)]$; это позволяет определить при достаточно малых $|z - z_0|$ и $|Z - Z_0|$, где $Z_0 = f(z_0)$, обратную функцию $z = \varphi(Z)$, принимающую при $Z = Z_0$ значение z_0. Эта обратная функция голоморфна при достаточно малых $|Z - Z_0|$, ее производная равна $\frac{1}{f'(z)}$. Можно далее определить элементы функции $z = \varphi(Z)$, обратной к $Z = f(z)$, которые также могут быть получены как аналитическое продолжение одного из них. Из этого следует, что $z = \varphi(Z)$ *также является аналитической функцией; ее поверхность Римана — Пуанкаре* Σ *может быть рассматриваема как поверхность, описываемая значениями* Z, *когда* z *описывает* S. Точки поверхности S, в которых $f'(z_0)$ обращается в нуль, т. е. такие, в которых

$$Z - Z_0 = c_p(z - z_0)^p + \ldots, \quad p > 1$$

образуют критические алгебраические точки $\varphi(Z)$. Для простоты удобно присоединить к поверхности S, равно как и к поверхности Σ, критические алгебраические точки, точки, образующие полюсы, и вообще точки, в которых возможно разложение по целым положительным или отрицательным степеням $(z - z_0)^{\frac{1}{q}}$. Посредством этого обобщения между точками поверхности Римана — Пуанкаре функции $Z = f(z)$ и точками поверхности Римана — Пуанкаре ее обратной функции $z = \varphi(Z)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Заметим, впрочем, что можно было бы воспользоваться сферическим представлением комплексных чисел для рассмотрения поверхности Римана — Пуанкаре на сфере, а не на плоскости.

---

*) Речь идет о «продолжении» поверхности S как геометрического объекта, непосредственно не связанном с аналитическим продолжением $f(z)$. (*Прим. ред.*)

§ 11. Голоморфная функция, имеющая в качестве своей естественной области существования данную однолистную область. Чтобы получить такую функцию $f(z)$, построим в рассматриваемой области D такую голоморфную функцию, множество нулей которой будет иметь своими предельными точками каждую точку границы F области D. Эта функция не тожет быть голоморфна в каком-либо круге с центром, лежащим на F, так что ее естественной областью существования будет D.

Предположим сперва, что D ограничена, тогда $D+F$ будет заключена в некотором квадрате Δ. Подразделим этот квадрат на m^2 равных квадратов; обозначим через $\Delta'(m)$ те из этих квадратов, которые целиком лежат внутри D (т. е. лежат внутри D вместе со своими границами), остальные обозначим через $\Delta''(m)$. Подразделим теперь каждый квадрат $\Delta''(m)$ на m^2 равных квадратов и обозначим через $\Delta'(m^2)$ те из этих квадратов, которые целиком лежат внутри D, а через $\Delta''(m^2)$ — остальные. Подразделим каждый квадрат $\Delta''(m^2)$ на m^2 равных квадратов и обозначим через $\Delta'(m^3)$ те из этих квадратов, которые целиком лежат в D, а через $\Delta''(m^3)$ — остальные. Далее продолжаем тот же процесс. Квадраты $\Delta'(m^q)$, очевидно, существуют, и каждая точка из D принадлежит по крайней мере одному $\Delta'(m^q)$, но не более чем четырем. Всякая точка любого $\Delta'(m^q)$ принадлежит D и, следовательно, никакая точка F не принадлежит никакому $\Delta'(m^q)$, но каждая из них, будучи предельной точкой множества точек D, будет также предельной точкой для точек $\Delta'(m^q)$ при q, стремящемся к бесконечности. Эта точка будет предельной для множества вершин некоторой последовательности $\Delta'(m^q)$. Выберем в качестве нулей функции $f(z)$, которую мы хотим построить, вершины $\Delta'(m^q)$, каждая из которых взята лишь один раз, и поставим каждому из рассматриваемых таким образом нулей в соответствие ту точку границы F, которая является ближайшей к этому нулю: если a' — нуль, d' — кратчайшее расстояние от a' до границы, то окружность $|z-a'|=d'$ содержит по крайней мере одну точку b', принадлежащую F. Это и есть такая точка b', которую мы ставим в соответствие точке a'. Если D' — данная произвольная область, лежащая полностью в D, то она содержит конечное число нулей a', причем для этих нулей $|a'-b'|$ не менее, чем кратчайшее расстоя-

ние δ' от точек множества D', взятого вместе с его границей, до точек F. Из этого вытекает, что если рассматривать a' как элементы бесконечной последовательности, то расстояние $|a'-b'|$ стремится к нулю; следовательно, можно так упорядочить точки a' в бесконечную последовательность

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

чтобы соответствующая последовательность

$$|a_1-b_1|,\quad |a_2-b_2|,\quad \ldots,\quad |a_n-b_n|,\ldots$$

была *не возрастающей* и стремилась к нулю, когда n возрастает до бесконечности. Далее, следуя методу Вейерштрасса и Пикара и предполагая p целым и неотрицательным числом, положим:

$$E(u,0)=1-u,$$

$$E(u,p)=(1-u)\exp\left(u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}\right),\quad \text{если}\quad p>0,$$

и рассмотрим бесконечное произведение

$$f(z)=\prod_1^\infty E\left(\frac{a_n-b_n}{z-b_n},\lambda_n\right). \tag{9}$$

Можно выбрать последовательность λ_n так, чтобы произведение (9) сходилось равномерно во всякой области D', лежащей целиком в D. Это произведение определит, таким образом, функцию $f(z)$, которая будет голоморфной в D благодаря тому, что все ее множители голоморфны в D. И так как ее множители обращаются в нуль при

$$\frac{a_n-b_n}{z-b_n}=1,$$

т. е. при

$$z=a_n$$

то $f(z)$ будет искомой голоморфной функцией, обращающейся в нуль в точках a_n, следовательно, не продолжаемой за пределы границы F. Так как $|b_n-a_n|$ стремится к нулю, а $|z-b_n|$ остается в D' не менее чем δ', то, начиная с некоторого значения n, будем иметь:

$$|u_n|=\left|\frac{b_n-a_n}{z-b_n}\right|<\frac{1}{2}$$

и

$$E(u_n, \lambda_n) = \exp\left[u + \ldots + \frac{u^p}{p} + \ln(1-u)\right],$$
$$= \exp\left[-\frac{u^{p+1}}{p+1} - \frac{u^{p+2}}{p+2} - \ldots\right],$$

где $u = u_n$, $p = \lambda_n$. Но поскольку $|u_n| < \frac{1}{2}$, то

$$\left|-\frac{u^{p+1}}{p+1}\left(1 + \frac{u(p+1)}{p+2} + \ldots\right)\right| < \frac{|u|^{p+1}}{1-|u|} < 2|u|^{p+1}$$

и равномерная сходимость показателя будет иметь место, если ряд

$$\sum |u_n|^{\lambda_n+1}$$

сходится равномерно в D'. Далее,

$$|u_n| \leqslant \frac{|b_n - a_n|}{\delta'} = \frac{d_n}{\delta'}$$

так что достаточно, чтобы был сходящимся ряд

$$\sum \left|\frac{d_n}{\delta'}\right|^{\lambda_n+1},$$

где d_n не возрастает и стремится к нулю. Но это имеет место, если положить $\lambda_n = n$, так как при n достаточно больших

$$d_n < \frac{\delta'}{2},$$

а геометрическая прогрессия

$$\sum 2^{-n}$$

сходится.

Функция $f(z)$, полученная таким образом при $\lambda_n = n$, будет голоморфной в D и отвечает поставленным условиям.

Доказательство непосредственно распространяется на случай, когда данная область D содержит бесконечно удаленную точку. Граница F области D будет в этом случае лежать внутри некоторого квадрата Δ, который мы подвергнем разбиению на квадратики, для того чтобы определить нули a_n и ассоциированные с ними точки b_n. Функция $f(z)$, определенная посредством (9), будет голоморфной во всякой конечной части области D; когда z стремится

к бесконечности, u_n равномерно стремится к нулю, так что $f(z)$ при этом будет стремиться к единице и, следовательно, будет голоморфной также и в бесконечности (см. §§ 5 и 6).

Какова бы ни была область D, можно, беря z_0 из D, положить

$$z - z_0 = \frac{1}{\zeta},$$

что преобразует область D в такую область, которая будет содержать бесконечно удаленную точку и к которой можно применить только что сказанное выше.

Приведенная конструкция позволяет, в частности, построить функцию, голоморфную во всей плоскости ζ, за исключением точки $\zeta = 0$, и обращающуюся в нуль в заданной последовательности точек a_n, сходящейся к нулю. Будем иметь в этом случае $b_n = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$ и

$$F(\zeta) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{a_n}{\zeta}, \lambda_n\right).$$

Полагая

$$\frac{1}{\zeta} = z, \quad \frac{1}{a_n} = A_n, \quad F(\zeta) = f(z),$$

получим целую функцию $f(z)$ с нулями A_n, стремящимися к бесконечности. Вполне законно предположить, что эти нули могут быть кратными (что было бесполезно в предыдущем исследовании), и мы получаем теорему Вейерштрасса о целых функциях: функция

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{A_n}, \lambda_n\right)$$

является целой функцией, обращающейся в нуль в точках A_n, $A_n \neq 0$; из нее выводятся все другие функции с этими же нулями.

§ 12. Однолистное конформное отображение и принцип симметрии. Функция $Z = f(z)$, голоморфная и однолистная в однолистной области D, конформно отображает D на некоторую однолистную область Δ, так как производная $f'(z)$ не может обращаться в нуль в области D. Обратная функция $z = \varphi(Z)$ голоморфна в Δ и отображает Δ на D. Односвязной

части области D соответствует односвязная часть области Δ и обратно, так что порядок связности Δ равен порядку связности D. Если область D ограничена p различными контурами, без общих точек, то то же имеет место и для Δ. Следовательно, взаимно однозначное конформное отображение одной области на другую, которое мы назовем простым конформным отображением, можно осуществить только в том случае, когда эти области имеют одинаковую связность. В частности, область D может быть отображена конформно и просто на круг только в том случае, если она односвязна; кроме того, необходимо, чтобы граница D содержала по крайней мере две точки. Риман доказал (не совсем полно), что *всякая однолистная односвязная область D, обладающая по крайней мере двумя граничными точками* (а, следовательно, бесконечным множеством таковых) *может быть конформно отображена на круг.* Доказательство было восполнено и упрощено различными методами, и его можно найти во многих трудах. Это конформное отображение может быть осуществлено бесконечным множеством способов. Если мы хотим отобразить область D на круг $|Z| < 1$, то можем в D выбрать произвольно, во-первых, точку Ω, которая будет соответствовать точке $Z = 0$ — центру круга, и, во-вторых, направление $\Omega\sigma$, которое будет соответствовать направлению действительной оси в плоскости Z, после чего отображение становится однозначно определенным. В некоторых простых случаях изучение конформного отображения на границе может быть упрощено благодаря применению принципа симметрии Шварца, который формулируется следующим образом.

Допустим, что функция $f(z)$ голоморфна в полукруге $|z| < R$, $y = \Im z > 0$ и допустим, что мнимая часть $i\Im f(z)$ равномерно стремится к нулю, когда y стремится к нулю. Тогда функция $f(z)$ продолжаема в полукруг $y < 0$, $|z| < R$, причем она действительна при $y = 0$, и в круге $|z| < R$ выполняется соотношение

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}.$$

При отображении $Z = f(z)$ на плоскость OXY двум симметричным относительно оси Ox точкам z и $\bar{z}$ соответствуют две точки, симметричные относительно OX.

§ 13. Геометрическая теория однолистных функций. Теоремы Шварца. Теорема Римана о конформном отображении приводит к введению некоторых однолистных функций в геометрической форме. Рассмотрим односвязную область D плоскости z. Пусть точка z_0 принадлежит D. Осуществим конформное отображение области D на круг $|Z|<1$ так, чтобы точка z_0 соответствовала точке $Z=0$. Это отображение, определенное с точностью до поворота вокруг точки $Z=0$, будет задаваться формулой

$$Z=kf(z),$$

где $f(z)$ голоморфна и однолистна в D, а $|k|=1$. Задание области D и z_0 определяет функцию $f(z)$. Если мы заменим точку z_0 другой точкой z_1, то это приведет к замене функции Z дробно-линейной функцией от $kf(z)$. Всякой области D, следовательно, соответствует однолистная голоморфная функция, определенная с точностью до дробно-линейного преобразования.

Таким путем может быть получена любая функция, голоморфная и однолистная в окрестности точки z_0, которую можем, в частности, предполагать началом координат. Действительно, если задана некоторая функция

$$Z=c_1z+c_2z^2+\ldots, \quad |z|<R,$$

то кривая Γ в плоскости z, определяемая как образ окружности $|Z|=K$, где K взято достаточно малым, принадлежит к кругу сходимости, и функция

$$Z=\frac{1}{K}(c_1z+c_2z^2+\ldots)$$

отображает внутренность Γ на круг $|Z|<1$.

Если бы точка z_0 была бесконечно удаленной, т. е. рассматриваемая функция была бы голоморфной и однолистной в окрестности бесконечно удаленной точки, то нужно было бы положить

$$Z=\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}\ldots=f(z)$$

и отобразить внешность кривой Γ, соответствующей постоянному модулю $|Z|=K$ на $|Z|<1$ с помощью функции

$$Z=\frac{f(z)}{K}.$$

В обоих этих случаях область D, отображаемая на $|Z|<1$, ограничена аналитической кривой Γ. Функция, осуществляющая отображение, будет голоморфной и однолистной на $D+\Gamma$, а обратная функция, отображающая $|Z|<1$ на D, будет мероморфной и однолистной в $|Z|\leqslant 1$.

С этой точки зрения простейшими однолистными функциями будут те, для которых кривая, соответствующая постоянному модулю $|Z|=K$, будет элементарной кривой, в частности, алгебраической кривой. Если положим

$$Z=P(x, y)+iQ(x, y),$$

то

$$|Z|^2=P(x, y)^2+Q(x, y)^2$$

и уравнение кривой Γ будет:

$$P(x, y)^2+Q(x, y)^2=K^2,$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — рациональные дроби, представляющие собой гармонические функции, которые должны оставаться конечными с одной стороны от Γ. Можно упростить вопросы этого рода, отображая сперва D на полуплоскость, затем эту полуплоскость на круг посредством дробно-линейного преобразования. Если функция

$$Z=F(z)=P(x, y)+iQ(x, y),$$

голоморфная в области D и на ее границе Γ, отображает D на полуплоскость $Y>0$, то уравнением кривой Γ будет $Q(x, y)=0$; если это отображение осуществляется на полуплоскость $Y>c$, то уравнением кривой Γ будет $Q(x, y)=c$. Например, с помощью функции $Z=z^2$ получаем простое конформное отображение внутренности одной ветви равнобочной гиперболы

$$xy=c>0, \quad x>0$$

на полуплоскость

$$Y>2c.$$

То же самое преобразование второй степени дает конформное отображение полуплоскости $x>c>0$ на внешность параболы

$$X=c^2-\frac{Y^2}{4c^2}, \quad X^2+Y^2=(X-2c^2)^2,$$

с фокусом в точке $X=Y=0$ и директриссой $X=2c^2$. Из этих преобразований легко вывести преобразования, дающие отображение внешности параболы или внутренности одной ветви гиперболы на круг $|Z|<1$.

Рациональное преобразование

$$Z=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

ведет столь же непосредственно к простым результатам относительно эллипса. Если z описывает окружность $|z|=r$, $r>1$, то можно положить $z=re^{i\varphi}$, и если $X=\Re Z$, $Z=X+iY$, то будем иметь:

$$X=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\quad Y=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi$$

и точка Z описывает эллипс E с фокусами $Z=\pm 1$. Когда r возрастает от значения $R>1$ до $+\infty$, большая ось эллипса E возрастает от

$$R+\frac{1}{R}$$

до бесконечности, и эллипс E «выметает» внешность эллипса E', соответствующего $r=R$, проходя один раз через каждую точку. Это преобразование отображает конформно внешность круга $|z|<R$ на внешность E'.

Среди конформных отображений областей, ограниченных замкнутыми алгебраическими кривыми, на круг укажем те, которые связаны с кривыми, названными Дарбу *кассиниями*. Пусть на плоскости Oxy даны две группы точек A_1, $A_2, \ldots, A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Кассиния определяется уравнением

$$\overline{MA_1}\cdot\overline{MA_2}\ldots\overline{MA_n}=k\overline{MB_1}\ldots\overline{MB_m},$$

где $\overline{MA_j}$, $\overline{MB_j}$ означают соответственно расстояние от M до A_j и до B_j. Если a_j, b_j являются аффиксами точек A_j, B_j, а z — аффиксом точки M, то кассиния представляет собой кривую, на которой модуль рациональной дроби

$$R(z)=\frac{(z-a_1)\ldots(z-a_n)}{(z-b_1)\ldots(z-b_m)}$$

принимает некоторое постоянное значение k.

При очень малых k кассиния распадается на простые замкнутые кривые, которые окружают точки a_j и внутри которых $R(z)$ однолистна. Каждая из областей, ограниченных этими кривыми, конформно отображается на круг $|Z| < k$ посредством функции $Z = R(z)$. При некотором K кассиния имеет по крайней мере одну кратную точку, тогда как при $k < K$ имеют место предыдущие обстоятельства; при $k = K$ две из замкнутых кривых приходят в соприкосновение. Например, овал Кассини, определяемый уравнением

$$|z^2 - a^2| = k,$$

состоит из двух замкнутых кривых при $k < a^2$, а при $k = a^2$ представляет лемнискату с двойной точкой в начале координат. Функция

$$Z = z^2 - a^2$$

отображает один из завитков овала или лемнискаты на круг $|Z| < k$, если $k \leqslant a^2$, но эта функция уже не будет более однолистной внутри овала, если $k > a^2$.

Если односвязная область D ограничена замкнутой кривой, состоящей из конечного числа аналитических дуг без особых точек, то функция $Z = f(z)$, которая осуществляет конформное отображение области D на круг $|Z| < 1$, будет также голоморфной на внутренних точках этих аналитических дуг, так что $f(z)$ продолжаема за эти дуги благодаря принципу симметрии Шварца. Каждой регулярной аналитической дуге границы области D соответствует взаимно однозначно дуга окружности $|Z| = 1$, причем совокупность этих последних образует всю окружность. Функция $z = \varphi(Z)$, обратная к $Z = f(z)$, продолжаема за эти дуги окружности.

Шварц полностью определил вид функции $Z = F(z)$, дающей конформное отображение полуплоскости $y = \Im z > 0$ на данный многоугольник P плоскости Z. Пусть a, b, $c, \ldots, k$, l — точки Ox, которые соответствуют вершинам A, B, $C, \ldots, K$, L многоугольника P с положительным направлением обхода, и пусть $\alpha\pi$, $\beta\pi, \ldots, \lambda\pi$ — внутренние углы многоугольника P при вершинах $A, B, \ldots, L$. Имеем:

$$Z = H \int_0^z (z-a)^{\alpha-1}(z-b)^{\beta-1} \ldots (z-l)^{\lambda-1}\, dz + H',$$

где H и H' — постоянные. Определение точек $a, b, \ldots, l$ и постоянных H и H' было исследовано в особенности Кристоффелем и Шлефли.

Принцип симметрии позволяет исследовать продолжение функции $Z = F(z)$ и ее обратной $z = \Phi(Z)$. Функция $\Phi(Z)$ голоморфна в P и принимает действительные значения на его сторонах, следовательно, ее можно продолжить по симметрии в многоугольники, симметричные с многоугольником P относительно его сторон AB, $BC \ldots$, KL, LA. В этих многоугольниках функция $\Phi(Z)$ будет принимать значения из полуплоскости $y < 0$; $\Phi(Z)$ опять будет продолжаема по симметрии за пределы вновь полученного многоугольника P и т. д. Для того чтобы функция $\Phi(Z)$ была однозначной, необходимо, чтобы многоугольники, симметричные с P, взаимно не перекрывались. Отсюда следует, что необходимо, чтобы P был треугольником или прямоугольником. В случае треугольника необходимо и достаточно, чтобы этот треугольник был или равносторонним, или прямоугольным равнобедренным, или прямоугольным с острым углом, равным $\frac{\pi}{3}$. Тогда функция $\Phi(Z)$ будет эллиптической. Наконец, треугольник может вырождаться в полуполосу: вершина A в бесконечно удаленной точке, а два других угла равны $\frac{\pi}{2}$.

В случае прямоугольника функция $F(z)$ представляет собой эллиптический интеграл. Применяя дробно-линейное преобразование, при котором действительная ось плоскости z переходит в себя, можно представить этот интеграл в приведенной форме Лежандра, и с точностью до смещения прямоугольника в плоскости Z будем иметь:

$$Z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad k < 1. \tag{10}$$

Обратной функцией будет функция $z = \operatorname{sn} Z$. Это эллиптическая функция, имеющая два периода, один из которых будет действительным и равным $4K$, а другой — чисто мнимым

и равным $2iK'$, где

$$K=\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$
$$K'=\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}. \tag{11}$$

Обратно, интеграл (10) отображает полуплоскость $y>0$ на прямоугольник R с вершинами K, $K+iK'$, $-K+iK'$, $-K$. В этом можно убедиться, проверяя, что если точка z пробегает действительную ось плоскости Oxy от $z=0$ до $+\infty$, а затем от $-\infty$ до 0, оставаясь в полуплоскости $y>0$, то точка Z описывает стороны прямоугольника R в направлении положительного обхода (рис. 2). Вследствие прямого свойства этому прямоугольнику, который предполагается заданным посредством чисел K и K', соответствует такое число k, что интеграл (10) дает рассматриваемое конформное отображение. Число k, которое называется *модулем*, должно определяться отношением $\frac{K'}{K}$ (так как если мы заменим Z на λZ, то прямоугольник преобразуется в подобный прямоугольник). Явное выражение числа k, как функции от этого отношения, получается с помощью функции $\operatorname{sn} Z$. Имеем (см. Va iron, 1, §§ 235 и 238):

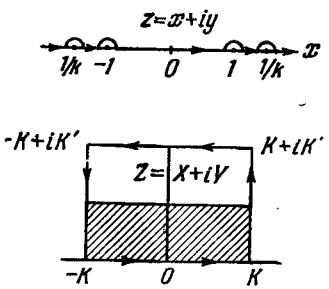

Рис. 2.

$$\sqrt{k}\operatorname{sn}\omega = i\sqrt[4]{q}\,\frac{S(z')}{\sqrt{z'}\,S(qz')}, \qquad z'=-1,$$

$$S(z')=\prod_0^\infty\left(1-\frac{z'}{s^n}\right)\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{z's^n}\right), \quad s=\frac{1}{q^2},$$

$$q=\exp\left(-\pi\frac{K'}{K}\right), \quad \operatorname{sn}\omega=1,$$

что дает:

$$k = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots(1+q^{2n})\ldots}{(1+q)(1+q^3)\ldots(1+q^{2n+1})\ldots}\right]^4,$$

и позволяет вычислить k, если отношение $\frac{K'}{K}$ задано.

В преобразовании (10) полуокружность

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad y > 0, \tag{12}$$

или

$$z = \frac{1}{\sqrt{k}} e^{i\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

имеет своим образом кривую

$$Z = K + iK'' - \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{|1 - ke^{2i\varphi}|},$$

где

$$K'' = \int_1^{1/\sqrt{k}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}.$$

Легко проверить $\left(\text{заменяя } x \text{ через } \frac{1}{kt}\right)$, что K'' равно $\frac{1}{2}K'$. Следовательно, образом полуокружности (12) будет отрезок с ординатой $\frac{1}{2}K'$, параллельный оси OX и делящий прямоугольник R на два равных прямоугольника.

Эти рассмотрения в соединении с известными свойствами элементарного преобразования $u = \sin Z$ привели Шварца к полному определению функций, осуществляющей конформное отображение внутренности эллипса на круг. Действительно, если положим $\Re u = v$, $u = v + iw$, то функция $u = \sin Z$ дает простое конформное отображение внутренности прямоугольника

$$|X| < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < Y < Y_0$$

на часть плоскости u, ограниченной полуэллипсом

$$\frac{v^2}{\operatorname{ch}^2 Y_0} + \frac{w^2}{\operatorname{sh}^2 Y_0} = 1, \quad w > 0$$

и действительной осью $w=0$. При этом преобразовании прямолинейные отрезки с концами

$$\left(-\frac{\pi}{2}+iY_0, -\frac{\pi}{2}\right), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+iY_0\right)$$

имеют соответственно своими образами отрезки оси $w=0$, заключенные между точками: $-\operatorname{ch} Y_0$, -1; -1, $+1$; $+1$, $\operatorname{ch} Y_0$, а отрезок с концами $-\frac{\pi}{2}+iY_0$, $\frac{\pi}{2}+iY_0$ имеет своим образом полуэллипс (рис. 3).

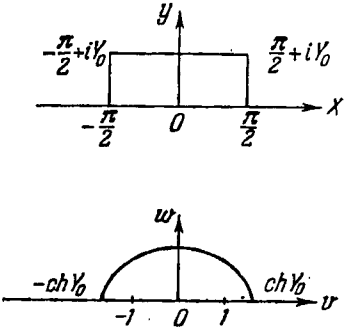

Рис. 3.

Из этого следует, что если $Z=\arcsin u$ представляет собой функцию, обратную к $u=\sin Z$ и обращающуюся в нуль при $u=0$, то функция

$$\frac{2K}{\pi}\arcsin u$$

дает конформное отображение полуэллипса

$$\frac{v^2}{\alpha^2}+\frac{w^2}{\alpha^2-1}-1<0,$$
$$w>0, \quad \alpha=\operatorname{ch} Y_0 \qquad (13)$$

на прямоугольник R', заштрихованный на рис. 2, если положить

$$Y_0=\frac{\pi}{4}\frac{K'}{K}.$$

Функция

$$Z=\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi}\arcsin u\right) \qquad (14)$$

конформно отображает внутренность полуэллипса (13) на внутренность полукруга

$$|Z|<\frac{1}{\sqrt{k}}, \quad Y>0,$$

причем действительная ось $Y=0$ соответствует действительной оси $w=0$, полуокружность соответствует полуэллипсу, а отрезки $\left(-\frac{1}{\sqrt{k}}, -1\right)$, $(-1, +1)$, $\left(+1, \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ соответствуют отрезкам $(-\alpha, -1)$, $(-1, +1)$, $(+1, \alpha)$. По принципу симметрии функция Z, определенная формулой (14),

голоморфна во всем эллипсе

$$\frac{v^2}{\alpha^2}+\frac{w^2}{\alpha^2-1}-1<0$$

за исключением, быть может, точек -1 и $+1$; но так как она ограничена в окрестности этих точек, то она голоморфна и в них. Функция (14) осуществляет простое конформное отображение внутренности эллипса на внутренность круга.

Внутренность эллипса

$$\frac{v^2}{a^2}+\frac{w^2}{b^2}-1=0, \quad c^2=a^2-b^2>0$$

будет отображаться на внутренность круга $|Z|<1$ так, что центр эллипса перейдет в центр круга, действительная ось OX будет соответствовать оси $w=0$, если возьмем

$$Z=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2K}{\pi}\arcsin\frac{u}{c}\right), \quad u=v+iw.$$

Из предыдущего имеем:

$$\alpha=\frac{a}{c}, \quad \mathrm{ch}\frac{\pi K'}{4K}=\frac{a}{c},$$

так что

$$q=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2,$$

k вычисляется, исходя из q, посредством формулы, указанной выше, а K дается интегралом (11).

Мы видим, что в этом случае конформное отображение осуществляется посредством трансцендентной функции.

Кроме того, Шварц исследовал конформное отображение полуплоскости на односвязную область, контур которой состоит из конечного числа прямолинейных отрезков или дуг окружностей.

Литературные ссылки

§§ 1, 2, 3, 4, 5. Goursat, 1; Picard, 1; Valiron, 1.
§ 6. Valiron, 1; Marty, 1.
§ 7. Goursat, 1; Picard, 1; Valiron, 1,
§§ 8, 9, 10. Poincaré, 1; Valiron, 1.
§ 11. Picard, 1.
§ 12. Riemann, 1; Picard, 1; Schwarz, 1; Valiron, 1.
§ 13. Valiron, 1; Darboux, 1; Schwarz, 1; Picard, 1; Valiron, 1.

ГЛАВА II

ОДНОЛИСТНЫЕ ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 14. Однолистная функция, имеющая заданную область естественной областью существования. Пусть $Z=f(z)$ — голоморфная однолистная функция в области D, ограниченной одним или несколькими замкнутыми контурами, каждый из которых состоит из конечного числа аналитических дуг без особых точек. Если $f(z)$ продолжаема за пределы некоторой части Γ одной из этих дуг, то она остается голоморфной в некотором круге с центром в точке z_0 из Γ, которая, если это нужно, может быть заменена некоторой соседней точкой, так что можно предположить, что $f'(z_0)$ не равна нулю, следовательно, $f(z)$ однолистна в некотором круге $|z-z_0|<\alpha$. В таком случае, отображение $Z=f(z)$ ставит в соответствие связной части дуги Γ, содержащей z_0 и содержащейся в $|z-z_0|<\alpha$, дугу γ, которая является аналитической дугой, составляющей часть границы области Δ — области значений $Z=f(z)$, когда z принадлежит D. Граница области Δ содержит аналитическую дугу. Следовательно:

Если граница области Δ, являющейся образом области D при отображении $Z=f(z)$, не содержит никакой аналитической дуги, то область D будет естественной областью существования $f(z)$.

В частности, легко построить примеры функций $Z=f(z)$, голоморфных и однолистных в круге $|z|<1$, беря функции, дающие конформное отображение этого круга Γ на область Δ плоскости Z, ограниченную простой кривой γ, не содержащей никаких аналитических дуг. Чтобы определить γ, обозначим через θ аргумент Z и положим:

$$Z=R(\theta)e^{i\theta}, \tag{1}$$

где $R(\theta)$ — действительная непрерывная периодическая функция от θ с периодом 2π, ограниченная сверху и снизу двумя положительными числами и не имеющая производной (конечной) ни при каком θ. В качестве $R(\theta)$ можно, например, взять функцию Вейерштрасса

$$R(\theta) = A + \varepsilon \sum_1^\infty a^n \cos(b^n \theta), \varepsilon > 0, \quad 0 < a < 1, A > \varepsilon \frac{a}{1-a},$$

где b — целое число, кратное 4, а $ab > 1 + 2\pi$ (Valiron, 1, § 77 *)).

Заметим, что если ε мало в сравнении с A, то кривая γ будет очень сходна с окружностью и что если $R(\theta)$ заменить суммой m первых членов ряда, то γ заменится кривой γ_m, которая стремится равномерно к γ, когда m стремится к бесконечности, причем функция, отображающая круг $|z| < 1$ на внутренность γ_m, голоморфна и однолистна в круге $|z| < \beta_m$, $\beta_m > 1$.

§ 15. Голоморфные функции, отображающие круг $|z| < R$ на область ограниченной площади. Пусть $Z = f(z)$ — функция, голоморфная в круге $|z| < R$, и

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$$

ее разложение в степенной ряд. Если r — число меньшее, чем R, и если допустим, что $|z| < r$, то этой окружности, взятой в плоскости z, на поверхности Римана — Пуанкаре, определенной посредством Z и дополненной, как это было указано в § 10, соответствует область Δ_r. Элементарной площади в плоскости z, скажем, dw, соответствует в Δ_r площадь, равная $|f'(z)|^2 dw$, с точностью до множителя, стремящегося к единице, когда dw стремится к нулю.

Переходя к полярным координатам r, θ в плоскости z, видим, что

$$A_r = \text{площ. } \Delta_r = \iint |f'(re^{i\theta})|^2 dw = \iint |f'(re^{i\theta})|^2 r\, dr\, d\theta.$$

Но так как

$$f'(re^{i\theta}) = \sum_1^\infty n c_n r^{n-1} e^{i(n-1)\theta},$$

*) См. также Г. М. Фихтенгольц, Курс математического анализа, т. II, Гостехиздат, 1948, п. 416, стр. 502. (*Прим. ред.*)

то, полагая

$$c_n = |c_n| e^{i\alpha_n},$$

имеем:

$$|f'(re^{i\theta})|^2 = \left[\sum_1^\infty n|c_n| r^{n-1}\cos[(n-1)\theta+\alpha_n]\right]^2 + \\ + \left[\sum_1^\infty n|c_n| r^{n-1}\sin[(n-1)\theta+\alpha_n]\right]^2,$$

причем написанные ряды сходятся равномерно. Почленно интегрируя это выражение по θ в пределах от 0 до 2π и замечая, что только члены

$$\cos^2[(n-1)\theta+\alpha_n], \quad \sin^2[(n-1)\theta+\alpha_n]$$

дадут интегралы, отличные от нуля, получим:

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_1^\infty n^2 |c_n|^2 r^{2n-2}. \tag{2}$$

Далее, умножая на $r\,dr$ и интегрируя от 0 до r, будем иметь:

$$A_r = \pi \sum_1^\infty n|c_n|^2 r^{2n}.$$

Если риманова площадь, описываемая Z, когда z пробегает круг $|z|<R$, остается ограниченной некоторым числом K, то, каково бы ни было $r<R$, имеем:

$$\pi \sum_1^\infty n|c_n|^2 r^{2n} \leqslant K, \quad r<R,$$

следовательно,

$$\pi \sum_1^\infty n|c_n|^2 R^{2n} \leqslant K. \tag{3}$$

Заметим, что равенство (2) следует из формулы Гутцмера*)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_0^\infty |c_n|^2 r^{2n},$$

примененной к $f'(z)$.

---

*) Чаще эту формулу называют равенством Парсеваля. (*Прим. ред.*)

Переписывая $|c_n|r^n$ в виде

$$|c_n|r^n = |c_n|\sqrt{n}R^n\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{r}{R}\right)^n$$

и учитывая (3), по неравенству Коши — Буняковского, имеем:

$$\left(\sum_1^\infty |c_n|r^n\right)^2 \leqslant \frac{K}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n}.$$

Следовательно, если обозначим через $M(r, f)$ максимум $|f(re^{i\varphi})|$ при $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, то получим:

$$M(r, f) \leqslant |c_0| + \sqrt{\frac{K}{\pi}\ln\frac{R^2}{R^2 - r^2}}. \tag{4}$$

Граница, полученная нами, для $M(r, f)$, имеет вид

$$K'\left(\ln\frac{R}{R-r}\right)^\alpha, \tag{5}$$

где K' — некоторая постоянная, а $\alpha = \frac{1}{2}$. Невозможно получить границу вида (5), в которой α было бы меньше, чем $^1/_2$. Чтобы убедиться в этом, можно, не ограничивая общности, положить $R = 1$. Рассмотрим функцию

$$u = v + iw = \ln\frac{1}{1+z} = -z + \ldots,$$

которая голоморфна и однолистна в круге Γ, $|z| < 1$, и отображает этот круг на область, ограниченную кривой

$$v = -\ln\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right), \quad w = \frac{\theta}{2}, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

Эта область принадлежит полуполосе Δ': $v > -\ln 2$, $|w| < \frac{\pi}{2}$. Функция $1 + u$ не обращается в нуль в Γ и, следовательно, преобразование

$$Z = (1 + u)^\beta, \tag{6}$$

где β положительно и где Z берется действительным при действительных положительных u, отображает круг Γ на область Δ, ограниченную кривой, симметричной относительно действительной оси OX и асимптотически к ней приближающейся. Уравнение этой кривой выводится из указанного

выше уравнения кривой в плоскости u, выраженного с помощью θ. Но достаточно заметить, что площадь области Δ менее площади области Δ'', представляющей собой образ полуполосы Δ' при преобразовании (6). Для больших значений v имеем:

$$Z = v^{\beta}\left(1 + \frac{1+iw}{v}\right)^{\beta} = v^{\beta} + \beta(1+iw)v^{\beta-1} + \ldots$$

и, следовательно, для больших значений X граница Δ'' имеет уравнение вида

$$Y = \frac{\pi}{2}\beta X^{1-\frac{1}{\beta}} + \ldots$$

Площадь области Δ'', и подавно области Δ, будет ограничена, если $1 - \frac{1}{\beta} < -1$, т. е. если $\beta < \frac{1}{2}$. Так как при $z = -r$, $0 < r < 1$ будем иметь:

$$Z = \left(1 + \ln\frac{1}{1-r}\right)^{\beta},$$

то видим, что в выражении (5) для $M(r, f)$ показатель α не может быть взят меньше $^1/_2$.

§ 16. Формула Гронуолла. Если $Z = f(z)$ однолистна и голоморфна при $|z| < 1$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, т. е.

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

и если положим

$$z = \frac{1}{u}, \quad Z = \frac{1}{U},$$

где U — однолистная функция от u, голоморфная и конечная при $|u| > 1$, то ее разложение в ряд Лорана будет:

$$U = u + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{u} + \ldots,$$

причем значения коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ выражаются как функции от $c_2, c_3, \ldots$. Если $|u| \geqslant \rho > 1$, то точка U будет внешней относительно кривой C_ρ, описываемой U, когда u пробегает окружность $|u| = \rho$. Кривая C_ρ представляет

собой простую замкнутую аналитическую кривую; площадь, заключенная внутри C_ρ, положительна. Если положим $U = V + iW$, то эта площадь будет выражена интегралом

$$A_\rho = \frac{1}{2}\int V\,dW - W\,dV,$$

вычисляемым вдоль кривой C_ρ в положительном направлении. Обозначая через

$$\overline{U} = V - iW$$

число, сопряженное с U, имеем:

$$V = \frac{1}{2}(U + \overline{U}), \qquad W = \frac{1}{2i}(U - \overline{U})$$

и, следовательно,

$$A_\rho = \frac{1}{4i}\int \overline{U}\,dU - U\,d\overline{U}.$$

Этот интеграл можно вычислить вдоль окружности $|u| = \rho$. Полагая

$$u = \rho e^{i\omega}, \quad du = iu\,d\omega,$$
$$\overline{u} = \rho e^{-i\omega}, \quad d\overline{u} = -i\overline{u}\,d\omega,$$

имеем:

$$U = u + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{u} + \ldots, \qquad \overline{U} = \overline{u} + \overline{\alpha}_0 + \frac{\overline{\alpha}_1}{\overline{u}} + \ldots$$

$$dU = i\left(u - \frac{\alpha_1}{u} - \ldots\right)d\omega, \quad d\overline{U} = -i\left(\overline{u} - \frac{\overline{\alpha}_1}{\overline{u}} - \ldots\right)d\omega.$$

Эти ряды являются абсолютно сходящимися тригонометрическими рядами по целым степеням $\rho e^{i\omega}$. Таким образом, выражение

$$\overline{U}\,dU - U\,d\overline{U} \tag{7}$$

разлагается в абсолютно сходящийся ряд с общим членом $e^{i\omega p}$, где p — целое число, который нужно интегрировать от 0 до 2π. Лишь член с $p = 0$ дает интеграл, отличный от нуля. Выражение (7) в явном виде представляет собой

произведение $i\,d\omega$ на

$$\left(u-\frac{\alpha_1}{u}-\ldots-\frac{n\alpha_n}{u^n}-\ldots\right)\times$$
$$\times\left(\bar{u}+\bar{\alpha}_0+\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{u}}+\ldots+\frac{\bar{\alpha}_n}{\bar{u}^n}+\ldots\right)+$$
$$+\left(\bar{u}-\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{u}}-\ldots-\frac{n\bar{\alpha}_n}{\bar{u}^n}-\ldots\right)\times$$
$$\times\left(u+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{u}+\ldots+\frac{\alpha_n}{u^n}+\ldots\right).$$

Следовательно, имеем:

$$A_\rho=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\rho^2-\sum_1^\infty n\,|\alpha_n|^2\rho^{-2n}\right)d\omega=$$
$$=\pi\rho^2\left(1-\sum_1^\infty n\,|\alpha_n|^2\rho^{-2n-2}\right).$$

Так как эта величина должна быть положительной, каково бы ни было $\rho>1$, то

$$\sum_1^\infty n\,|a_n|^2\rho^{-2n-2}<1 \text{ при } \rho>1.$$

Устремляя ρ к единице, видим, что

$$\sum_{n=1}^\infty n\,|a_n|^2\leqslant 1. \tag{8}$$

Это и есть *формула Гронуолла* *).

§ 17. Теоремы Бибербаха и Фабера. Рассмотрим функцию, *голоморфную и однолистную в круге* $|z|<1$. *Ее можно нормировать так, чтобы она обращалась в нуль в начале координат и чтобы в этой точке ее производная была равна единице.* Пусть

$$Z=f(z)=z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots$$

*) Часто эту формулу называют теоремой площадей. (*Прим. ред.*)

будет эта функция. Имеем:

$$f(z^2)=z^2(1+c_2z^2+\ldots+c_nz^{2n-2}+\ldots)$$

и функция

$$\sqrt{f(z^2)}=z(1+c_2z^2+\ldots+c_nz^{2n-2}+\ldots)^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

где берется та ветвь радикала правой части, которая равна единице в начале координат, представляет собой голоморфную и однолистную функцию в круге $|z|<1$. Голоморфную, поскольку радикал в правой части никогда не обращается в нуль, и однолистную, так как равенство $f(z^2)=f(z'^2)$ может иметь место только тогда, когда $z'=z$ или $z'=-z$, но в этом втором случае правая часть равенства (9) умножается на -1.

Пусть

$$\varphi(z)=z(1+\beta_2z^2+\ldots)$$

означает правую часть равенства (9). Сделаем преобразование, указанное в § 16:

$$z=\frac{1}{u}, \quad \varphi(z)=\frac{1}{U};$$

тогда

$$U=\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{u}\right)}=\frac{u}{1+\frac{\beta_2}{u^2}+\ldots}=u-\frac{\beta_2}{u}+\ldots$$

и в силу неравенства Гронуолла $|\beta_2|^2\leqslant 1$. Так как

$$1+c_2z^2+\ldots=(1+\beta_2z^2+\ldots)^2=1+2\beta_2z^2+\ldots,$$

то имеем:

$$|c_2|\leqslant 2.$$

Это и есть *неравенство Бибербаха*. Граница, установленная для $|c_2|$, достижима, когда все последующие коэффициенты функции U равны нулю, т. е. когда

$$U=u+\frac{\lambda}{u}=\frac{1}{z}+\lambda z, \quad |\lambda|=1,$$

так что

$$\varphi(z)=\frac{z}{1+\lambda z^2}, \quad f(z^2)=\frac{z^2}{(1+\lambda z^2)^2},$$

$$Z=\frac{z}{(1+\lambda z)^2}, \quad |\lambda|=1. \tag{10}$$

Можно нормировать функцию (10), полагая в частности $\lambda = -1$; тогда имеем:

$$Z = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \ldots + nz^n + \ldots, \quad |z| < 1. \qquad (11)$$

Далее, легко проверить, что функция (10) однолистна в круге с радиусом единица. Полагая в (11) $z = e^{i\theta}$, где θ — действительное число, видим, что эта функция отображает круг на плоскость z с разрезом вдоль действительной оси, соединяющим точку $-\infty$ с точкой $-\frac{1}{4}$.

Если функция $Z = f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots$ голоморфна, однолистна и нормирована в круге $|z| < 1$, и если она не принимает в этом круге некоторого конечного значения a, то дробно-линейное преобразование

$$F(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{f(z)}{a}}$$

определяет функцию, также голоморфную и однолистную в этом круге, причем

$$F(z) = (z + c_2 z^2 + \ldots)\left(1 + \frac{z}{a} + \ldots\right) =$$
$$= z\left(c_2 + \frac{1}{a}\right)z^2 + \ldots,$$

так что $F(z)$ будет, как и $f(z)$, нормированной. К этим функциям можно применить неравенство Бибербаха, которое дает

$$|c_2| \leqslant 2, \quad \left|c_2 + \frac{1}{a}\right| \leqslant 2,$$

откуда имеем:

$$\left|\frac{1}{a}\right| \leqslant \left|\frac{1}{a} + c_2\right| + |c_2| \leqslant 4.$$

Из этого вытекает следующая теорема Фабера:

Если $f(z)$ голоморфна и однолистна в круге $|z| < 1$ и нормирована (т. е. $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$), то область, покрываемая значениями этой функции, содержит круг $|Z| < \frac{1}{4}$.

Вследствие сказанного выше о функции (11) эта нижняя граница длины радиуса круга с центром в начале координат, покрываемого областью значений функции $f(z)$, достигается для функции (11).

§ 18. Теоремы Кёбе об искажении при конформном отображении. Теорема о покрываемой области, указанная в конце предыдущего параграфа в окончательной форме, которую ей придал Фабер, была ранее в менее точной форме получена Кёбе в его исследованиях по вопросу об искажении при конформном отображении. С помощью теоремы Бибербаха можно придать точную форму и другим теоремам Кёбе.

Пусть по-прежнему функция предполагается голоморфной, однолистной и нормированной в круге $|z|<1$. Чтобы изучить производную в некоторой точке ζ, $|\zeta|<1$, можно перевести эту точку в начало координат посредством дробно-линейного преобразования, переводящего окружность в себя, Если положим

$$g(z)=\frac{f(u)-f(\zeta)}{(1-\zeta\bar{\zeta})f'(\zeta)}, \quad u=\frac{z+\zeta}{1+z\bar{\zeta}},$$

то $u=\zeta$ при $z=0$, функция $g(z)$ — однолистна в круге $|z|<1$, причем $g(0)=0$, а ее производная

$$g'(z)=\frac{f'(u)}{(1+z\bar{\zeta})^2 f'(\zeta)}$$

равна единице при $z=0$. Следовательно, $|g''(0)|\leqslant 4$. Но так как

$$g''(z)f'(\zeta)(1+z\bar{\zeta})^4=f''(u)(1-\zeta\bar{\zeta})-2\bar{\zeta}(1+z\bar{\zeta})f'(u),$$

то

$$|g''(0)|=\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}(1-|\zeta|^2)-2\bar{\zeta}\right|\leqslant 4.$$

Умножая на ζ и деля на $1-|\zeta|^2$, получаем:

$$\left|\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)}-\frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}\right|\leqslant\frac{4|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \tag{12}$$

откуда и подавно имеем:

$$\left|\frac{2|\zeta|^2-4|\zeta|}{1-|\zeta|^2}\leqslant\Re\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\leqslant\frac{4|\zeta|+2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}\right..$$

Но, поскольку справедливы равенства

$$\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{d \ln f'(\zeta)}{d \ln \zeta}$$

и

$$\Re \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \frac{\partial \ln |f'(\zeta)|}{\partial \ln |\zeta|} = |\zeta| \frac{\partial \ln |f'(\zeta)|}{\partial |\zeta|},$$

то имеем:

$$\frac{2-4|\zeta|}{1-|\zeta|^2} \leqslant \frac{\partial}{\partial |\zeta|} \ln |f'(\zeta)| \leqslant \frac{4+2|\zeta|}{1-|\zeta|^2}.$$

Интегрируя от 0 до z вдоль некоторого луча с постоянным аргументом и учитывая, что $f'(0)=1$, получаем:

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \tag{13}$$

Полученные здесь границы являются наилучшими, они достигаются для функции (11). Известно (см. § 3), что $|f'(z)|$ дает при конформном отображении $Z=f(z)$ отношение подобия в окрестности точки z. Это отношение ограниченно крайними членами в неравенстве (13). Таким образом, мы получили общий результат относительно величины искажения. Из (13) вытекает, что если z и z' — две различные точки некоторой окружности радиуса $r<1$, то

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^4 \leqslant \frac{|f'(z)|}{|f'(z')|} \leqslant \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^4,$$

$$|z| \leqslant r, \quad |z'| \leqslant r.$$

Чтобы осуществить конформное отображение одной односвязной области D на другую односвязную область D', можно сначала отобразить область D на круг единичного радиуса, а затем отобразить этот круг на область D'. Если Δ — область, лежащая целиком внутри D (т. е. Δ вместе со своей границей принадлежит D), то из неравенства (13) следует, что существует такое число $M(\Delta)$, зависящее только от Δ, что при конформном отображении D на D' отношение подобия в произвольной точке области Δ будет заключено между $M(\Delta)$ и $\frac{1}{M(\Delta)}$ *).

*) Более подробно см. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952, стр. 59, теорема 4. (*Прим. ред.*)

Интегрирование $f'(z)$ от 0 до z вдоль некоторого луча в силу (13) дает:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \text{ *)}, \tag{14}$$

так как $f(0)=0$. Эти границы не могут быть улучшены, они достигаются для функции (11).

Неравенство (12) дает также

$$\frac{-4|\zeta|}{1-|\zeta|^2} \leqslant \Im \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \leqslant \frac{4|\zeta|}{1-|\zeta|^2},$$

и так как

$$\Im \frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = \Im \frac{d \ln f'(\zeta)}{d \ln \zeta} = \frac{\partial \arg f'(\zeta)}{\partial \ln |\zeta|} = |\zeta| \frac{\partial \arg f'(\zeta)}{\partial |\zeta|},$$

то

$$-\frac{4}{1-|\zeta|^2} \leqslant \frac{\partial \arg f'(\zeta)}{\partial |\zeta|} \leqslant \frac{4}{1-|\zeta|^2}.$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем:

$$2 \ln \frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant \arg f'(z) \leqslant 2 \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

Это — границы величины *поворота вокруг точки* z в окрестности точки z при конформном отображении. Найденные границы уже не являются точными **), в отличие от того как это имело место для $|f'(z)|$.

§ 19. Теорема Литтльвуда о коэффициентах однолистной функции. Рассматриваем, как и ранее, функцию, голоморфную, однолистную и нормированную:

$$f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

Теорема Коши о производных дает неравенство

$$|c_n| r^n \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

---

*) В действительности непосредственное интегрирование вдоль луча дает лишь правую часть неравенства (14). Для того чтобы получить левую часть, нужно несколько видоизменить рассуждение. См. цитированную книгу Г. М. Голузина, стр. 59. (*Прим. ред.*)

**) Точные границы для $\arg f'(z)$ были найдены Г. М. Голузиным. См. цитированную на стр. 58 монографию, глава IV, § 1. (*Прим. ред.*)

которое, полагая $r=\rho^2$, $\theta=2\omega$, можем переписать в виде

$$|c_n|\,r^n \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho^2 e^{2i\omega})|\,d\omega. \tag{15}$$

Введем в рассмотрение, как в § 17, голоморфную однолистную функцию

$$\sqrt{f(z^2)}=\varphi(z)=z+\beta_3 z^3+\beta_5 z^5+\ldots$$

Применяя к правой части (15) формулу Гутцмера *), имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(z)|^2\,d\omega=\sum_1^\infty |\beta_n|^2\rho^{2n}=$$

$$=2\int_0^\rho \sum_1^\infty n\,|\beta_n|^2\rho^{2n-1}d\rho=2\int_0^\rho \left(\sum_1^\infty n\,|\beta_n|^2\rho^{2n}\right)\frac{d\rho}{\rho}, \tag{16}$$

где $z=\rho e^{i\omega}$.

Выражение, стоящее в скобках под знаком последнего интеграла, равно величине площади, описываемой однолистной функцией $\varphi(z)$, когда $|z|<\rho$, поделенной на π (см. § 15). Эта площадь не превосходит $\pi M^2(\rho,\varphi)=\pi M(\rho^2,f)=$ $=\pi M(r,f)$. Из правой части неравенства (14) следует, что

$$M(r,f)\leqslant\frac{r}{(1-r)^2},$$

а правая часть равенства (16), равная правой части (15), не превосходит

$$\int_0^r \frac{r}{(1-r)^2}\frac{dr}{r}=\frac{r}{1-r}.$$

Следовательно,

$$|c_n|\,r^n\leqslant\frac{r}{1-r},$$

$$|c_n|\leqslant\min\frac{r^{1-n}}{1-r}, \tag{17}$$

каково бы ни было r, $0<r<1$.

---

*) См. сноску на стр. 50. (*Прим. ред.*)

Минимум достигается при $r = 1 - \frac{1}{n}$, и, так как

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e = 2{,}718\ldots,$$

то при любом положительном n имеем:

$$|c_n| < en. \tag{18}$$

При $n = 1$ неравенство (17) дало бы $|c_1| \leqslant 1$, при $n = 2$ мы имели бы $|c_2| \leqslant 4$, но, как мы знаем, $|c_2| \leqslant 2$. Неравенства Литтльвуда (18) не являются, таким образом, наилучшими. Рассмотрение функции (11) наводит на мысль, что справедливы неравенства $|c_n| \leqslant n$. При $n = 3$ это было установлено Лёвнером. Ландау показал, что неравенство Литтльвуда (18) может быть заменено следующим:

$$|c_n| < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) en \text{ *)}.$$

По всем этим вопросам отсылаем читателя к книге Монтеля об однолистных функциях **).

Литературные ссылки

§ 15. Valiron, 8.
§ 16. Gronwall, 1.
§§ 17, 18. Kœbe, 1, 2; Faber, 1; Bieberbach, 1, 2.
§ 19. Littlwood, 1; Montel, 2.

---

*) Более точное неравенство: $|c_n| < \frac{l}{2} + 1{,}6$ получено И. Е. Базилевичем (Матем. сб., т. 28 (1951), стр. 147—164). Гарабедян и Шиффер доказали, что $|c_4| \leqslant 4$ (Garabedian and Schiffer, Y. Rational Mech. Annal., т. 4 (1955), стр. 427—465). Хейман (Hayman, C.r. Acad. Sci., 237 (1953), № 25, стр. 1624—1625) доказал, что для всех однолистных функций, за исключением $f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$, $\overline{\lim} \frac{|c_n|}{n} < 1$. (*Прим. ред.*)

**) На русском языке теория однолистных функций весьма подробно изложена в трудах Г. М. Голузина, Внутренние задачи теории однолистных функций, УМН (1939), т. 6, 26—89; Некоторые вопросы теории однолистных функций, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова (1949), т. XXVII, а также в монографии, цитированной на стр. 58. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА III

ТЕОРЕМЫ ФАТУ

§ 20. Теорема сходимости Фату и Рисса. Пусть дан степенной ряд

$$c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots \tag{1}$$

с конечным положительным радиусом сходимости R, сумма этого ряда $f(z)$ представляет собой функцию, голоморфную при $|z| < R$. Функция $f(z)$ может быть также голоморфной на некоторой дуге окружности Γ, $|z| = R$, т. е. функция $f(z)$ может быть продолжена за пределы этой дуги, причем на этой дуге ряд (1) может быть расходящимся; этот случай имеет место для ряда

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + \ldots + z^n + \ldots,$$

сумма которого голоморфна, каково бы ни было z, отличное от единицы, и который расходится при любом z на окружности $|z| = 1$. Впрочем, для того чтобы ряд (1) сходился при каком-нибудь z, таком, что $|z| = 1$, необходимо, чтобы его общий член стремился к нулю, т. е. чтобы c_n стремилось к нулю, когда n стремится к бесконечности. Фату показал, что если это условие выполнено, то ряд (1) сходится во всех внутренних точках той дуги окружности Γ, на которой $f(z)$ голоморфна. Марсель Рисс дополнил этот результат, показав, что эта сходимость, кроме того, равномерна, и упростил доказательство. Мы докажем здесь это предложение.

Если

$$\lim_{n \to \infty} c_n = 0$$

и если сумма $f(z)$ *ряда* (1) *голоморфна на дуге* (a, b)

окружности Г, $|z|=1$, *то ряд* (1) *сходится равномерно к* $f(z)$ *во всех точках дуги* (α, β) *окружности* Г, *содержащейся внутри* (a, b).

Пусть (α_1, β_1) дуга окружности Г, содержащаяся в (a, b) и содержащая (α, β). Функция $f(z)$ голоморфна внутри и на границе сектора S, ограниченного дугой (A_1, B_1) окружности радиуса R, большего, чем 1, и отрезками $O\alpha_1A_1$ и $O\beta_1B_1$ (рис. 4). Внутри S и на его границе $|f(z)|$ меньше некоторого фиксированного числа M. Дуга (α, β) окружности Г лежит целиком внутри S. Если положим:

$$\sum\nolimits_n(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_nz^n,$$

то функция

$$g_n(z)=\frac{f(z)-\sum_n(z)}{z^{n+1}}(z-\alpha_1)(z-\beta_1)$$

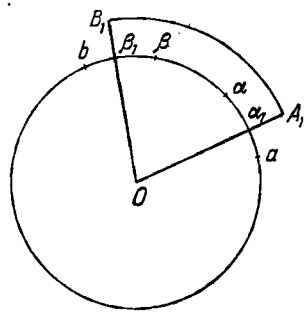

Рис. 4.

будет голоморфной в S и на его границе, так как при $|z|<1$ разность

$$f(z)-\sum\nolimits_n(z)=c_{n+1}z^{n+1}+c_{n+2}z^{n+2}+\ldots$$

содержит z^{n+1} в качестве множителя. Покажем, что каково бы ни было данное произвольно малое положительное число ε, на границе S имеет место неравенство $|g_n(z)|<\varepsilon$, при всех n больших, чем некоторое определенное число N. Тогда то же неравенство справедливо и внутри S, следовательно, и на дуге (α, β) окружности Г; но так как на этой дуге $|z-\alpha_1|$ и $|z-\beta_1|$ не меньше, чем длина меньшего из двух отрезков (α, α_1) и (β, β_1), то на (α, β) будем иметь:

$$\left|f(z)-\sum\nolimits_n(z)\right|<\frac{|g_n(z)|}{d^2}<\frac{\varepsilon}{d^2}$$

при $n>N$, чем и будет доказана теорема. Итак, все сводится к тому, чтобы доказать, что

$$|g_n(z)|<\varepsilon$$

на отрезках $O\alpha_1A_1$, $O\beta_1B_1$ и на дуге (A_1, B_1) окружности $|z|=R$ при $n>N$. Так как c_n стремится к нулю при n,

стремящемся к бесконечности, то произвольно малому положительному числу η соответствует такое число P, что

$$|c_n| < \eta \text{ при } n \geqslant P.$$

1°. На $O\alpha_1$ функция $g_n(z)$ обращается в нуль в точке α_1; если $r = |z| < 1$, то имеем $|z - \alpha_1| = 1 - r$, $|z - \beta_1| < 2$ и

$$\left|f(z) - \sum\nolimits_n(z)\right| = r^{n+1}\left|\sum c_{n+p+1} z^p\right| < \eta r^{n+1} \sum r^p = \eta \frac{r^{n+1}}{1-r}$$

при $n > P$. Следовательно, на $O\alpha_1$ имеем:

$$|g_n(z)| < \frac{2\eta}{1-r}(1-r) = 2\eta.$$

2°. На отрезке $\alpha_1 A_1$ при $n > P$, полагая $|z| = r > 1$, имеем:

$$\left|f(z) - \sum\nolimits_n(z)\right| < M + |c_0| + \ldots + |c_P| R^P + \\ + \eta\left(r^{P+1} + \ldots + r^n\right) < K_P + \eta \frac{r^{n+1}}{r-1},$$

где K_P определено, если задано η. Следовательно,

$$|g_n(z)| < \left(K_P + \eta \frac{r^{n+1}}{r-1}\right) \frac{2R(r-1)}{r^{n+1}},$$

и так как

$$\frac{r-1}{r^{n+1}} < \frac{r-1}{r^{n+1}-1} = \frac{1}{1 + r + \ldots + r^n} < \frac{1}{n},$$

то имеем:

$$|g_n(z)| < \frac{2K_P R}{n} + 2R\eta, \quad n > P. \tag{2}$$

Учитывая результат для отрезка $O\alpha_1$, видим, что неравенство (2) выполняется на всем отрезке $O\alpha_1 A_1$, а также на $O\beta_1 B_1$, что устанавливается аналогично.

3°. На дуге (A_1, B_1) имеем по-прежнему:

$$\left|f(z) - \sum\nolimits_n(z)\right| < K_P + \eta \frac{R^{n+1}}{R-1},$$

так что

$$|g_n(z)| < \left(K_P + \eta \frac{R^{n+1}}{R-1}\right) \frac{4R^2}{R^{n+1}} = \frac{4K_P}{R^{n-1}} + \frac{4R^2}{R-1}\eta. \tag{3}$$

Эти неравенства показывают, что на границе сектора S справедливо неравенство $|g_n(z)| < \varepsilon$ при $n > N$. Так как после того, как задано ε, η выбирается по условиям

$$2R\eta < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{4R^2}{R-1}\eta < \frac{\varepsilon}{2},$$

то затем P, а следовательно, и K_P будут определены, и можно, наконец, выбрать $N > P$ так, чтобы

$$\frac{2K_P R}{N} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{4K_P}{R^{N-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ясно, что для ряда (1), радиус сходимости которого равен R, теорема видоизменяется следующим образом: если $|c_n|R^n$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности, то ряд (1) сходится равномерно на всякой дуге, лежащей внутри той дуги окружности сходимости Γ, по которой сумма $f(z)$ ряда (1) (определенная сначала внутри круга) продолжаема, причем этот ряд в каждой точке рассматриваемой дуги сходится к значению продолженной функции.

§ 21. Применение к теореме Пуанкаре о распределении особенностей. Мы применим теперь теорему Фату — Рисса для доказательства следующей теоремы Пуанкаре.

Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная при $y = \Im z > 0$, причем эта полуплоскость является естественной областью ее существования, пусть, далее, $g(z)$ — функция, голоморфная при $y < 0$, причем эта полуплоскость является естественной областью ее существования. Можно найти две функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, обладающие следующими свойствами:

естественной областью существования функции $\varphi(z)$ является плоскость z с разрезом вдоль отрезка $-1 \leqslant x \leqslant 1$, лежащего на действительной оси; в этой области $\varphi(z)$ голоморфна;

естественной областью существования функции $\psi(z)$ является плоскость z с разрезом вдоль полупрямых $-\infty \leqslant x \leqslant -1$ и $1 \leqslant x \leqslant \infty$, лежащих на действительной оси; в этой области $\psi(z)$ голоморфна.

В верхней полуплоскости имеем:

$$f(z) = \varphi(z) + \psi(z),$$

а в нижней полуплоскости

$$g(z)=\varphi(z)+\psi(z).$$

Мы видим, что функция $f(z)$, например, разбита на сумму двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, каждая из которых обладает лишь частью особенностей $f(z)$, причем другая из этих функций голоморфна в этих особенностях.

Пуанкаре доказывает сначала следующую лемму.

Если $\Phi(x)$ — функция действительного переменного x, определенная при всех конечных x и ограниченная в каждом конечном интервале, то можно найти целую функцию $\Psi(x)$ от переменной x (т. е. определенную при всех комплексных и голоморфную при всех конечных z) такую, что

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)}=0.$$

Можно даже предполагать, что $\Psi(z)$ не обращается в нуль ни при каком конечном z.

В самом деле, обозначим через A_n верхнюю грань $|\Phi(x)|$ при $n\leqslant|x|\leqslant n+1$ $(n=1, 2, \ldots)$, а через A_0 верхнюю грань $|\Phi(x)|+1$ при $|x|\leqslant 1$. Тогда при $n\leqslant|x|\leqslant n+1$ имеем:

$$|\Phi(x)|\leqslant A_n\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_n},$$

каково бы ни было положительное, целое, четное число λ_n. Можно выбрать λ_n достаточно большим, чтобы

$$A_n<\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\lambda_n}\qquad(n=2, 3, \ldots).$$

При этих условиях степенной ряд

$$A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{x}{n}\right)^{\lambda_n}\tag{4}$$

сходится, каково бы ни было x, *если только предположим дополнительно, что* $\lambda_n\geqslant n$, так как общий член этого ряда по абсолютной величине меньше, чем

$$\left(\frac{|x|}{n-1}\right)^{\lambda_n},$$

а корень n-й степени из этой величины стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности. Обозначая через $\Psi_1(x)$ целую функцию, являющуюся суммой ряда (4), имеем:

$$|\Phi(x)| \leqslant \Psi_1(x),$$

каково бы ни было конечное и действительное x. Если положим

$$\Psi(x) = x^2\Psi_1(x),$$

то отношение $\Phi(x)$ к $\Psi(x)$ будет стремиться к нулю при x, стремящемся к бесконечности. Между прочим (при действительных x), будем иметь:

$$\Psi(x) > A_0x^2 \geqslant x^2,$$

следовательно,

$$\lim_{|x| \to \infty} \Psi(x)e^{-\Psi(x)} = 0,$$

$$\lim_{|x| \to \infty} \Phi(x)e^{-\Psi(x)} = 0.$$

Если заменим действительное x комплексным z, то функция

$$P(z) = e^{-\Psi(z)}$$

будет целой функцией, нигде не обращающейся в нуль. Мы назовем эту функцию вспомогательной функцией Пуанкаре, для $\Phi(x)$. При действительном x, стремящемся к $+\infty$ или к $-\infty$, произведение $P(x)\Phi(x)$ стремится к нулю. Итак, лемма доказана.

Обозначим через $F(z)$ функцию, равную $f(z)$ в верхней полуплоскости $y = \Im z > 0$, равную $g(z)$ в нижней полуплоскости $y < 0$ и равную нулю на действительной оси. Дробно-линейное преобразование

$$Z = i\frac{z+1}{z-1}$$

ставит в соответствие окружности Γ, $|z| = 1$, действительную ось $Y = 0$ плоскости Z, причем точке $z = 1$ соответствует бесконечно удаленная точка, а точке $z = -1$ соответствует точка $Z = 0$. Когда z описывает окружность Γ, функция $F(z)$ может быть написана в виде

$$\Phi_1(X) = F\left(\frac{X+i}{X-i}\right),$$

причем эта функция определена и аналитична всюду за исключением точек $X=0$ и $X=\infty$.

Пусть $\Phi(X)$ — функция, равная $\Phi_1(X)$ при X конечных и таких, что $|X|\geqslant 1$, и равная единице при $|X|<1$ и пусть $P(X)$ — ее вспомогательная функция Пуанкаре. Функция

$$P\left(i\frac{z+1}{z-1}\right)$$

будет голоморфной во всей комплексной плоскости, за исключением точки $z=1$, причем она нигде не обращается в нуль, а когда z стремится к точке $z=1$ по окружности Γ, то произведение этой функции на $F(z)$ стремится к нулю. Можно провести такое же рассуждение для точки $z=-1$, делая преобразование

$$Z=i\frac{z-1}{z+1},$$

которое приведет к новой вспомогательной функции Пуанкаре P_1 такой, что ее преобразование

$$P_1\left(i\frac{z-1}{z+1}\right)$$

даст произведение P_1F, стремящееся к нулю, когда z стремится к -1 по окружности Γ. Произведение

$$G(z)=P\left(i\frac{z+1}{z-1}\right)P_1\left(i\frac{z-1}{z+1}\right)$$

является функцией, голоморфной во всей комплексной плоскости, за исключением точек $z=\pm 1$, которые являются существенно особыми точками. Эта функция не обращается в нуль ни в одной точке, а произведение

$$F(z)\,G(z)$$

стремится к нулю, когда z стремится к -1 или к $+1$ по окружности Γ. Мы положим это произведение равным нулю в точках $z=\pm 1$ окружности Γ. Функция $F(z)\,G(z)$ равна $f(z)\,G(z)$ в верхней полуплоскости, равна $g(z)\,G(z)$ в нижней полуплоскости и голоморфна в обеих этих полуплоскостях. На Γ можем положить $z=\zeta=e^{i\omega}$, где ω — действительное число. Тогда произведение $G(\zeta)\,F(\zeta)$ будет периодической с периодом 2π функцией $H(\omega)$, которая непрерывна, каково бы ни было ω, обращается в нуль при $\omega=k\pi$,

и является аналитической на любом отрезке, не содержащем точек $k\pi$, где k — целое число. Она может быть разложена в ряд Фурье на каждом из таких отрезков. Если мы напишем ряд Фурье в виде

$$a_0+\sum_1^\infty a_n e^{in\omega}+\sum_1^\infty b_n e^{-in\omega}, \tag{5}$$

то

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\omega)\, e^{-in\omega}d\omega, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\omega)\, e^{in\omega}d\omega, \quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

и, как известно, вследствие непрерывности $H(\omega)$ *коэффициенты* a_n *и* b_n *стремятся к нулю, когда* n *стремится к бесконечности*. Средние арифметические Фейера ряда (5) сходятся к $H(\omega)$, следовательно, *во всех точках, где ряд* (5) *сходится, он сходится к функции* $H(\omega)$.

Рассмотрим степенные ряды

$$\sum_{n=1}^\infty b_n z^{-n}, \quad \sum_{n=0}^\infty a_n z^n, \tag{6}$$

первый из них сходится при $|z|>1$, а второй при $|z|<1$, так как a_n и b_n стремятся к нулю. Обозначим соответственно их суммы через $\varphi(z)\,G(z)$ и $\psi(z)\,G(z)$ в рассматриваемых областях сходимости (причем функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будут голоморфны в соответствующих областях, так как $G(z)$ не обращается в нуль). Формулы, определяющие a_n и b_n, могут быть написаны в виде

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(\zeta)\,G(\zeta)\,\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}},$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma F(\zeta)\,G(\zeta)\,\zeta^n\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Подставляя эти значения a_n и b_n в ряды (6) и меняя порядок интегрирования и суммирования, что возможно благодаря

равномерной сходимости, получаем:

$$\varphi(z)\,G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F(\zeta)\,G(\zeta)\frac{d\zeta}{z-\zeta},\quad |z|>1, \tag{7}$$

$$\psi(z)\,G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} F(\zeta)\,G(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z},\quad |z|<1, \tag{8}$$

где интегралы берутся вдоль Γ в положительном направлении.

Пусть AB — хорда окружности Γ, параллельная оси Ox, с ординатой ε, где ε положительно и очень мало, а $A'B'$ — хорда, симметричная с AB относительно Ox. В области, расположенной в верхней полуплоскости и ограниченной посредством дуги окружности Γ и хорды AB, и на границе этой области функция $F(u)\,G(u)$ голоморфна так же, как и функция $\frac{1}{z-u}$ при $|z|>1$. Следовательно, при вычислении интеграла (7) часть окружности Γ, лежащую над AB, можно заменить хордой AB. Точно так же часть окружности Γ, лежащую под $A'B'$, можно заменить хордой $A'B'$. Обозначая через Γ_1 контур AB, -1, $B'A'$, 1, A (рис. 5), а через u переменную на этом контуре, будем иметь:

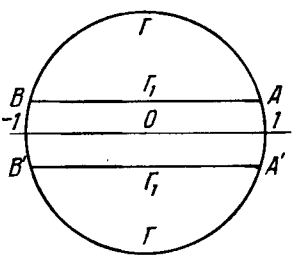

Рис. 5.

$$\varphi(z)\,G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} F(u)\,G(u)\frac{du}{z-u}.$$

Интеграл правой части определяет голоморфную функцию от z в области внешней относительно контура Γ_1, и функция $G(z)\varphi(z)$ оказывается таким образом продолженной во всю область, внешнюю к контуру Γ. Так как ордината ε хорды AB произвольно мала, то функция $\varphi(z)\,G(z)$, определенная посредством первого из рядов (6), будет голоморфной в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-1, +1]$ действительной оси. Так как коэффициенты b_n стремятся к нулю, когда $n\to\infty$, то к первому из рядов (6) (ряду по степеням $\frac{1}{z}$ и продолжаемому через Γ) можно

применить теорему Фату, в силу которой этот ряд сходится всюду на окружности Г, за исключением окрестностей точек -1 и $+1$.

Точно так же для вычисления интеграла (8) можно заменить часть Г, лежащую над AB, контуром $BCMDA$ (рис. 6), где BC и DA параллельны оси Ox, а CMD представляет собой дугу окружности с центром в O; часть Г, лежащую под $A'B'$, можно заменить контуром $B'C'M'D'A'$, симметричным с первым относительно Ox. Это показывает, что функция $\psi(z)G(z)$ продолжаема во всякую часть плоскости, расположенную внутри контура, образованного дугой $A'A$ окружности Г, контуром $ADMCB$, дугой BB' окружности Г и контуром $B'C'M'D'A'$. Так как расстояние от A до Ox произвольно мало, а радиус OC дуг DMC и $D'M'C'$ произвольно велик, то функция $\psi(z)G(z)$ продолжаема и будет голоморфной в комплексной плоскости с разрезами вдоль полупрямых $[1, +\infty)$ и $(-\infty, -1]$ действительной оси. В этой же области будет голоморфной функция $\psi(z)$. Так как a_n стремится к нулю, когда $n \to \infty$, то ко второму из рядов (6) можно применить теорему Фату, в силу которой этот ряд сходится всюду на окружности Г, за исключением окрестности точек -1 и $+1$.

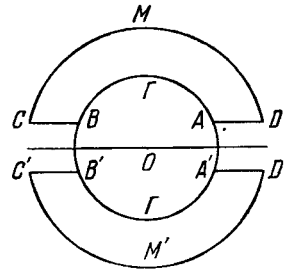

Рис. 6.

Из полученного результата следует, что если мы возьмем ζ на замкнутой дуге, не содержащей точек -1 и $+1$ окружности Г, то ряд (5) будет сходящимся, и сумма его будет $F(\zeta)G(\zeta)$, но эта сумма равна также $\varphi(\zeta)G(\zeta)+\psi(\zeta)G(\zeta)$. Таким образом, на этой дуге имеем:

$$\varphi(\zeta)+\psi(\zeta)=F(\zeta).$$

В верхней полуплоскости функции $f(z)$ и $\varphi(z)+\psi(z)$ голоморфны и совпадают на дуге окружности Г, следовательно,

$$f(z)=\varphi(z)+\psi(z)$$

в верхней полуплоскости; аналогично

$$g(z)=\varphi(z)+\psi(z)$$

в нижней полуплоскости. Кроме того, $\varphi(z)$ имеет естественной областью существования комплексную плоскость с разрезом вдоль отрезка $[-1, +1]$, так как, если бы она могла быть продолжена, например, из верхней полуплоскости через некоторый промежуток этого отрезка, то была бы продолжаема и $f(z)$, поскольку $\psi(z)$ голоморфна на оси Ox в промежутке $(-1, 1)$. Аналогичное рассуждение можно провести и относительно функции $g(z)$. Таким образом, теорема Пуанкаре полностью доказана.

§ 22. Замечания к теореме Пуанкаре. Пуанкаре, представляя произвольную функцию $f(z)$, не продолжаемую в нижнюю полуплоскость, в виде $\varphi(z)+\psi(z)$, где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ продолжаемы, причем их сумма в нижней полуплоскости равна произвольной функции $g(z)$, хотел извлечь из этого аргумент для доказательства того, что нельзя осуществить естественным образом определенное продолжение функции $f(z)$ в нижнюю полуплоскость, отличное от продолжения в смысле Римана и Вейерштрасса, которое в этом случае, по предположению, невозможно.

Борель опроверг возражения, которые Пуанкаре заранее выдвинул против любой попытки расширения понятия естественного продолжения, построив функции, которые могут быть эффективно и совершенно определенным образом продолжены через купюру. С другой стороны, он проанализировал рассуждение Пуанкаре, изложенное только что.

Допустим, что речь идет о том, чтобы продолжить функцию $f(z)$ через разрез между точками -1 и $+1$, и что применяемый способ, обобщающий обычный процесс, обладает свойством аддитивности. Так как в области своего существования $f(z)-\psi(z)=\varphi(z)$, а $\psi(z)$ голоморфна в плоскости с разрезами вдоль $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$, то продолжить функцию $f(z)$ — это все равно, что продолжить функцию $\varphi(z)$. Но поскольку функция $\varphi(z)$ голоморфна всюду, кроме отрезка $[-1, +1]$, то рассуждение Пуанкаре сводится к следующему. Если функция $\varphi(z)$ имеет естественной областью своего существования комплексную плоскость с разрезом вдоль отрезка $[-1, +1]$ действительной оси и если с помощью нового процесса она будет продолжена через разрез $[-1, +1]$, идя, например, от точки z, лежащей над разрезом к точке z' с той же абсциссой, что и z,

и лежащей под разрезом (рис. 7), то значение функции в точке z' будет непременно $\varphi(z')$. Рассмотрим функцию

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) + \sqrt{1 - z^2},$$

где радикал берется равным арифметическому корню квадратному из $1 - x^2$, когда точка z, взятая над разрезом, совпадает с точкой x оси Ox. Функция $\sqrt{1 - z^2}$ продолжаема с помощью обычного процесса, но она умножается на -1 при обходе вокруг точки -1. В точке z', когда движемся к ней, пересекая отрезок $[-1, +1]$, мы получаем не значение $\sqrt{1 - z'^2}$, которое получили бы, обходя точку -1, а значение $-\sqrt{1 - z'^2}$. Таким образом, для функции $\varphi_1(z)$, которая, как и $\varphi(z)$, голоморфна во всей плоскости, кроме отрезка $[-1, +1]$, мы получим не значение $\varphi_1(z')$ в точке z', а значение

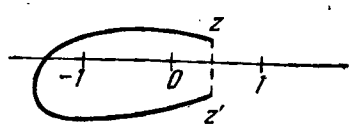

Рис. 7.

$$\varphi_1(z') - 2\sqrt{1 - z'^2}.$$

Число таких примеров, очевидно, можно увеличить; можно было бы вместо $1 - z^2$ взять $a^2 - z^2$, где $0 < a < 1$; тогда, пересекая ось Ox между точками $-a$ и $+a$, мы не получили бы значения $\varphi_1(z')$, в то время как, пересекая ось вне этого отрезка, приходили бы к нему; можно было бы также воспользоваться логарифмами $\ln \frac{z+a}{z-a}$, как это делал Борель, и т. п. Наконец, нет никакого основания утверждать, что продолжение $\varphi(z)$ непременно должно приводить к $\varphi(z')$ с другой стороны разреза. Нужно отдать себе также отчет в том, что, предполагая полуплоскость с разрезом вдоль отрезка $[-1, +1]$ конформно отображенной на окружность, мы приходим к новой плоскости с разрезом, в которой вновь может быть применена теорема Пуанкаре.

Теорема Пуанкаре о распределении особенностей может быть распространена различными образами, причем роль оси Ox может играть простая замкнутая кривая C. Если кривая является замкнутой аналитической кривой без особых точек, то можно сделать конформное отображение внутрен-

ности C на полуплоскость $y > 0$, причем это отображение имеет еще также смысл в окрестности $y = 0$ в нижней полуплоскости. Тогда в конечном счете можно будет осуществить разбиение на сумму двух продолжаемых функций — функции $f(z)$, имеющей внутренность контура C своей естественной областью существования, и функции $g(z)$, естественной областью существования которой является внешность контура C, но ограничиваясь заранее рассмотрением лишь тех точек z, которые лежат во внешней полосе, близкой к C. Благодаря этому ограничению, роль точек -1 и $+1$ должны играть точки A и B контура C, достаточно близкие между собой, чтобы не выводить рассмотрения за пределы упомянутой полосы, внешней к C.

Но можно перенести доказательство § 22 непосредственно для кривой C, выбрав точки A и B на контуре C так, чтобы окружность Γ, проходящая через A и B, разделялась этими точками на две незамкнутые кривые, одна из которых лежит внутри C, а другая вне C. Подходяще выбранное дробно-линейное преобразование переведет Γ в прямую, а точку A или B, по выбору, — в бесконечность, что позволит применить лемму Пуанкаре и построить функцию $G(z)$, не обращающуюся нигде в нуль, голоморфную во всей плоскости, за исключением точек A и B, которые являются существенно особыми, и такую, что, если дана функция $f(z)$ внутри C, и $g(z)$ вне C, то произведения $G(z)f(z)$ и $G(z)g(z)$ стремятся к нулю, когда z, оставаясь на Γ, стремится к A или к B. Затем можно, как в § 22, применить ряд Фурье, выбирая в качестве переменной величины центральный угол ω переменной точки на окружности Γ.

Таким образом, мы видим, что теорему об одновременном разделении существенных особенностей функций $f(z)$ и $g(z)$ можно распространить на многочисленные случаи, когда кривая C является лишь замкнутой жордановой кривой.

По вопросу о распределении особенностей читатель может обратиться к статье Фреше и диссертации Аронсзайна.

§ 23. Теорема Фату о граничных значениях ограниченных функций. В своей диссертации Фату доказал следующее предложение:

Если функция $f(z)$ ограничена в круге $|z| < 1$, т. е. $|f(z)|$ меньше некоторого фиксированного числа M, то

значение $f(re^{i\varphi})$ *функции* $f(z)$ *на радиусе* $\arg z = \varphi = \text{const}$. *имеет предел при* r, *стремящемся к единице, за исключением, быть может, множества значений* φ *меры нуль.*

Напомним, что множеством меры нуль на отрезке $[a, b]$ называется множество точек из $[a, b]$, которое может быть покрыто системой интервалов (если угодно, то без общих точек), сумма длин которых сколь угодно мала. Следуя Лебегу, говорят, что некоторое свойство имеет место почти всюду на отрезке $[a, b]$, если оно имеет место во всех точках этого отрезка за исключением, может быть, точек некоторого множества меры нуль. Следовательно, теорема Фату может быть сформулирована так:

Граничные (радиальные) значения для функции, ограниченной и голоморфной в круге, существуют почти всюду.

В доказательстве, данном автором теоремы, используется формула Пуассона и свойства интеграла Лебега. Фабер, не опираясь на понятие интеграла Лебега, доказал одну из теорем Лебега, которая применяется при доказательстве теоремы Фату. Исходя из этого результата, Каратеодори упростил доказательство Фату. Мы изложим здесь метод Каратеодори, но примем за исходный пункт теорему Лебега, которую можно найти в его «Лекциях об интегрировании»*).

Рассмотрим функцию $H(x)$ действительной переменной x, определенную на отрезке $[a, b]$. Если x и x' — две произвольные различные точки отрезка $[a, b]$, то предположим, что отношение

$$\Delta(x, x') = \frac{H(x') - H(x)}{x' - x}$$

будет ограничено числом M, т. е.

$$|\Delta(x, x')| \leqslant M, \quad x' \neq x. \tag{9}$$

Это условие Липшица, очевидно, влечет за собой непрерывность. Из него следует также, что $H(x)$ будет функцией с ограниченным изменением, так как, если мы подразделим отрезок $[a, b]$ посредством точек

$$a, x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n, b$$

*) Есть русский перевод: А. Лебег, Интегрирование и отыскание примитивных функций, ГТТИ, 1934. См. также по всем затронутым в этой главе вопросам теории функций действительного переменного книгу: И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1950. (*Прим. ред.*)

то получим:

$$\sum |H(x_{p+1}) - H(x_p)| \leqslant M \sum (x_{p+1} - x_p) = M(b-a).$$

Из условия (9) вытекает также, что как правые, так и левые производные числа функции $H(x)$ ограничены (эти числа определены, вообще говоря, для действительной функции, но вполне законно отделить в $H(x)$ действительную часть $K(x)$ и мнимую часть $L(x)$ и применить обычное определение). Общий результат Лебега состоит в том, что *функция $H(x)$, удовлетворяющая условию Липшица* (9), *имеет производную (конечную) для всех x отрезка $[a, b]$ за исключением, может быть, множества меры нуль.*

Приняв это предложение, докажем несколько предварительных формул, которые относятся к теории интеграла Пуассона.

Пусть $0 \leqslant \rho < r$, n — целое положительное; тогда

$$1 + 2\sum_1^\infty \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \cos n\varphi = \Re\left(1 + 2\sum_1^\infty \left(\frac{\rho}{r}\right)^n e^{in\varphi}\right) =$$

$$= \Re \frac{1 + \frac{\rho}{r} e^{i\varphi}}{1 - \frac{\rho}{r} e^{i\varphi}} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos\varphi}$$

и, дифференцируя по φ, получаем:

$$-2\sum_1^\infty n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \sin n\varphi = -\frac{r^2 - \rho^2}{(r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos\varphi)^2} 2\rho r \sin\varphi. \quad (10)$$

Умножая обе части равенства (10) на $e^{in\varphi}$ и интегрируя от $-\pi$ до π, имеем:

$$-2\rho r (r^2 - \rho^2) \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi} \frac{\sin\varphi}{(r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos\varphi)^2} d\varphi = -in \left(\frac{\rho}{r}\right)^n 2\pi$$

или

$$-\frac{i}{\pi} r^{n+1} (r^2 - \rho^2) \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi} \frac{\sin\varphi}{(r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos\varphi)^2} d\varphi = n\rho^{n-1},$$

$$0 \leqslant \rho < r. \quad (11)$$

Равенство (10) дает, в частности, при $0 \leqslant \rho < 1$ после интегрирования и деления на -2 соотношение

$$\rho(1-\rho^2)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\,\frac{\sin\varphi}{(1+\rho^2-2\rho\cos\varphi)^2}\,d\varphi=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{1}^{\infty}n\rho^n\varphi\sin n\varphi\,d\varphi=$$

$$=\sum_{1}^{\infty}n\rho^n\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\sin n\varphi\,d\varphi=-2\pi\sum_{1}^{\infty}(-\rho)^n=\frac{2\pi\rho}{1+\rho},$$

причем все эти операции законны благодаря равномерной сходимости. Следовательно, имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\,\frac{\sin\varphi}{(1+\rho^2-2\rho\cos\varphi)^2}\,d\varphi=\frac{2\pi}{(1-\rho)(1+\rho)^2},\quad 0\leqslant\rho<1;\quad (12)$$

равенство остается верным при $\rho=0$, так как можно разделить обе части равенства на ρ, когда $\rho>0$, а затем устремить ρ к нулю, учитывая непрерывность обеих частей при $\rho=0$.

Получив эту формулу, рассмотрим функцию $f(z)$, голоморфную в круге $|z|<1$, заданную степенным рядом

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

и положим:

$$g(z)=\int_0^z f(t)\,dt=\sum_{0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}z^{n+1},\quad g'(z)=f(z)$$

при $|z|<1$.

В силу равенства (11) при $0\leqslant\rho<r<1$ будем иметь:

$$-ir\,\frac{r^2-\rho^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(re^{i\varphi})\,\frac{\sin\varphi}{(r^2+\rho^2-2\rho r\cos\varphi)^2}\,d\varphi=$$

$$=\sum_{0}^{\infty}-ir\,\frac{r^2-\rho^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{c_n}{n+1}r^{n+1}e^{i(n+1)\varphi}\,\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(r^2+\rho^2-2\rho r\cos\varphi)^2}=$$

$$=\sum_{0}^{\infty}c_n\rho^n=f(\rho).$$

Таким образом,

$$f(\rho) = -ir\frac{r^2-\rho^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(re^{i\varphi})\frac{\sin\varphi}{(r^2+\rho^2-2\rho r\cos\varphi)^2}\,d\varphi, \qquad (13)$$

где

$$g(re^{i\varphi}) = e^{i\varphi}\int_0^r f(ue^{i\varphi})\,du. \qquad (14)$$

Примем предположение, что *для каждого значения* φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ *интеграл*

$$\int_0^r f(ue^{i\varphi})\,du \qquad (15)$$

стремится равномерно к некоторому пределу, когда r *стремится к единице*. Поскольку функция (14) непрерывна по r, то предел этого выражения, который мы обозначим через $G(\varphi)$, будет непрерывным, и можно будет устремить r к единице в правой части равенства (13), так что получим:

$$f(\rho) = -i\frac{1-\rho^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(\varphi)\frac{\sin\varphi}{(1-2\rho\cos\varphi+\rho^2)^2}\,d\varphi. \qquad (16)$$

Кроме предположения, сделанного относительно (15), допустим еще, что функция $f(z) = f(re^{i\varphi})$ ограничена в секторе $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, т. е. $|f(re^{i\varphi})| \leqslant M$, $0 \leqslant r < 1$ в этом секторе.

Из этого следует, что если φ' и φ'' принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$ и если положим:

$$z' = re^{i\varphi'}, \quad z'' = re^{i\varphi''}, \quad 0 < r < 1,$$

то будем иметь:

$$|g(z') - g(z'')| = \left|\int_{z'}^{z''} f(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|r\int_{\varphi'}^{\varphi''} f(re^{i\varphi})\,e^{i\varphi}\,d\varphi\right| \leqslant M\,|\varphi' - \varphi''|$$

и, устремляя r к единице, получим:

$$|G(\varphi') - G(\varphi'')| = \lim_{r\to 1}|g(re^{i\varphi'}) - g(re^{i\varphi''})| \leqslant M\,|\varphi' - \varphi''|.$$

Так как функция $G(\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица (9), то на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция $G(\varphi)$ имеет производную почти всюду. Пусть φ_0 — такое значение, для которого существует $G'(\varphi)$. Можно допустить, заменяя переменную z через $ze^{-i\varphi_0}$, что это значение $\varphi = 0$. Следовательно,

$$\frac{G(\varphi) - G(0)}{\varphi}$$

стремится к $G'(0)$, когда φ стремится к нулю. Можем написать

$$G(\varphi) = G(0) + G'(0)\varphi + h(\varphi)\varphi, \tag{17}$$

где $h(\varphi)$ непрерывна при $\varphi \neq 0$, и когда φ стремится к нулю, то $h(\varphi)$ стремится к нулю, так что функция $h(\varphi)$ будет непрерывна при всех φ, если положим $h(0) = 0$. В формуле (16) можно заменить $G(\varphi)$ правой частью (17), что даст

$$f(\rho) = -i\frac{1-\rho^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(0)\lambda(\varphi, \rho)\,d\varphi -$$

$$-i\frac{1-\rho^2}{\pi}G'(0)\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\lambda(\varphi, \rho)\,d\varphi -$$

$$-i\frac{1-\rho^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\varphi)\varphi\lambda(\varphi, \rho)\,d\varphi,$$

где

$$\lambda(\varphi, \rho) = \frac{\sin\varphi}{(1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2)^2}.$$

Так как $\lambda(\varphi, \rho)$ — нечетная функция, то первый из интегралов в правой части равен нулю. Второй интеграл дается формулой (12), так что второе слагаемое в правой части равно

$$-i\frac{1-\rho^2}{\pi}G'(0)\frac{2\pi}{(1-\rho)(1+\rho)^2},$$

и стремится к

$$-iG'(0),$$

когда ρ стремится к единице.

Последнее слагаемое

$$-i\frac{1-\rho^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\varphi)\varphi\lambda(\varphi,\rho)\,d\varphi \tag{18}$$

стремится к нулю. Действительно, так как $h(\varphi)$ непрерывна и равна нулю при $\varphi=0$, то данному положительному ε соответствует такое $\eta>0$, что

$$|h(\varphi)|<\varepsilon$$

при $|\varphi|<\eta$, и в силу (12)

$$\int_{-\eta}^{\eta}\varphi\lambda(\varphi,\rho)\,d\varphi<\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\lambda(\varphi,\rho)\,d\varphi=\frac{2\pi}{(1-\rho)(1+\rho)^2},$$

следовательно,

$$\frac{1-\rho^2}{\pi}\int_{-\eta}^{\eta}|h(\varphi)|\,\varphi\lambda(\varphi,\rho)\,d\varphi<\frac{2\varepsilon}{1+\rho}<2\varepsilon.$$

Вне интервала $(-\eta,\eta)$ имеем:

$$|h(\varphi)|<H,$$

$$1-2\rho\cos\varphi+\rho^2=(\rho-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi>\sin^2\eta,$$

так что остальная часть правой части (18) не превосходит выражения

$$\frac{1-\rho^2}{\pi}\,\frac{2\pi H}{\sin^4\eta},$$

которое меньше, чем ε, когда ρ достаточно близко к единице.

Итак,

$$\lim_{\rho\to 1} f(\rho)=-iG'(0).$$

Обозначим через $M(r,f)$ максимум $|f(re^{i\varphi})|$ при $|\varphi|\leqslant\pi$. Условие относительно интеграла (15) будет выполнено, если

$$\int_0^1 M(r,f)\,dr \tag{19}$$

имеет смысл. Таким образом, теорема Фату доказана в несколько более общей форме:

Если $f(z)$ голоморфна в круге $|z|<1$, если интеграл (19) *имеет смысл и если функция $f(z)$ ограничена в секторе $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $0 \leqslant r < 1$, то $f(re^{i\varphi})$ имеет предел при r, стремящемся к единице, почти для всех φ из отрезка* $[\alpha, \beta]$.

Ясно, что интеграл (19) существует, если $|f(z)|$ ограничен во всем круге $|z|<1$, но он может существовать и в том случае, когда $f(z)$ не ограничена. Например, можно взять

$$f(z) = g(z) + \frac{1}{(1-z)^{\alpha}},$$

где $g(z)$ ограничена в $|z|<1$, а α заключено между 0 и 1; тогда

$$M(r, f) < K + \frac{1}{(1-z)^{\alpha}},$$

интеграл (19) имеет смысл, и теорема Фату может быть применена, так как функция $f(z)$ ограничена во всяком секторе, не содержащем действительной положительной полуоси.

§ 24. Теорема о граничных значениях функций, ограниченных внутри угла. *Если существует предел функции $f(z)$, когда z приближается вдоль радиуса $\arg z = \varphi$ к точке A с аффиксом $z = e^{i\varphi}$, то функция $f(z)$ стремится к тому же самому пределу, когда точка z стремится к A вдоль пути, находящегося в угле с вершиной A, внутреннем к некоторому углу с вершиной A, если только $f(z)$ ограничена в этом последнем угле.*

Ясно, что предел, о котором идет речь, конечен. Предложения этого рода могут быть доказаны с помощью семейств нормальных функций Монтеля. Но Линделёф дал очень простой метод, основанный исключительно на принципе максимума, в силу которого максимум модуля голоморфной функции в ограниченной области и на ее границе достигается на границе.

Рассмотрим теперь функцию $F(z)$, ограниченную и голоморфную в угловом секторе S с вершиной A и радиусом R, и допустим, что функция $F(z)$ стремится к конечному пределу L, когда точка z стремится к A вдоль пути γ, лежащего внутри S; заменив $F(z)$ на $F(z) - L$, можно предположить, что этот предел равен нулю. Можно также по

желанию изменить раствор угла при вершине A, не меняя остальных предположений: если a — аффикс точки A, то нужно сделать преобразование $z-a=(Z-a)^k$. *Покажем, что $F(z)$ стремится к нулю, когда z стремится к A вдоль биссектрисы δ угла A* (биссектрисы, лежащей внутри сектора S). Допустим, что раствор угла равен $\frac{\pi}{3}$. Обозначим через M верхнюю грань $|F(z)|$ в секторе S и на его границе за исключением точки A этой границы; путь γ может частично или полностью совпадать с одной из сторон угла A. Предположим, что радиус R окружности, ограничивающей сектор, был взят достаточно малым, чтобы при заданном очень малом ε на кривой γ в секторе S выполнялось неравенство $|F(z)|<\varepsilon$. Возьмем на биссектрисе δ точку z_0 такую, что $\left|z_0-a\right|<\frac{1}{2}R$, где a — аффикс точки A (рис. 8). Если z_0 лежит на γ, то $F(z_0)|<\varepsilon$. В противном случае точка z_0 принадлежит одной из двух областей, обозначим ее через Δ_0, на которые кривая γ разбивает сектор S. Поворот на угол $p\frac{\pi}{3}$ вокруг точки z_0 ($p=1, 2, 3, 4, 5$) преобразует область Δ_0 в область Δ_p, в которой функция

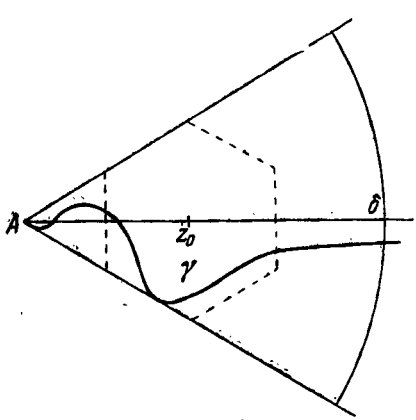

Рис. 8.

$$F_p(z)=F\left(z_0+\frac{1}{\omega}(z-z_0)\right),\quad \omega=\exp\left(ip\frac{\pi}{3}\right)$$

будет голоморфной. Область Δ, являющаяся пересечением областей $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_5$ лежит в правильном шестиугольнике с центром в точке z_0, две стороны которого совпадают со сторонами угла A. Граница Δ образована точками кривой γ и образами этих точек при рассматриваемых поворотах. В такой точке каждая из функций $F_p(z)$ не превосходит по модулю числа M, и по крайней мере одна из

них не превосходит по модулю числа ε. Следовательно, на границе области Δ имеем:

$$|F(z)F_1(z)\ldots F_5(z)| < \varepsilon M^5$$

и то же самое неравенство справедливо внутри Δ, в частности в точке z_0. Таким образом, имеем:

$$|F(z_0)|^6 < \varepsilon M^5,$$

что влечет за собой желаемый результат: *функция $F(z)$ стремится к нулю, когда z стремится к A вдоль биссектрисы δ угла A.*

Установив этот факт, обозначим через α раствор сектора T, через S' — сектор, представляющий собой половину сектора S, с биссектрисой δ и раствором $\frac{\alpha}{2}$, и пусть z_0 точка области S', не лежащая на биссектрисе, и такая, что $\left|z_0 - a\right| < \frac{1}{2}R$; эта точка лежит в S_1 — одной из двух половин сектора S', разделенного биссектрисой δ. Функции $F(z)$, $F(z_0 - i(z - z_0))$, $F(z_0 - (z - z_0))$, $F(z_0 + i(z - z_0))$ соответственно голоморфны в секторе S_1 и в секторах, которые из него получаются поворотом на $\frac{\pi}{2}$, π, $3\frac{\pi}{2}$ вокруг точки z_0. Область, являющаяся пересечением этих четырех секторов, лежит внутри квадрата, ограниченного прямой δ и ее образами. Из этого выводим, подобно тому как это делалось выше, что если $|F(z)| < \varepsilon$ на δ, то справедливо неравенство

$$|F(z_0)|^4 < \varepsilon M^3.$$

Возобновляя это деление сектора S, видим, что *во всяком секторе с вершиной A, лежащем вместе с его сторонами внутри S, функция $F(z)$ равномерно стремится к нулю, когда z стремится к A.*

Итак, теорема, сформулированная в начале этого параграфа, доказана, сходимость равномерна, и достаточно, чтобы сходимость имела место вдоль произвольного пути, заканчивающегося в A.

Это позволяет распространить теорему Фату, например, на случай односвязной области D, которая ограничена кривой C, состоящей из конечного числа аналитических дуг,

не имеющих внутри особых точек. Если $F(z)$ голоморфна и ограничена внутри этой области, то с помощью конформного отображения этот случай приводится к случаю функции голоморфной и ограниченной в круге $|Z|<1$. Множеству точек меры нуль на окружности $|Z|=1$ соответствует множество точек меры нуль на C *). Таким образом, когда точка z области D стремится к точке A на кривой C, оставаясь внутри угла с вершиной A, лежащего целиком внутри D в окрестности точки A, то функция $F(z)$ имеет конечный предел $L(A)$, который не зависит от формы пути, для почти всех точек A на C.

Среди следствий теоремы о граничных значениях, принадлежащей Монтелю и Линделёфу, отметим следующее:

Пусть γ и γ' будут две простые жордановы кривые, заканчивающиеся в точке A и не имеющие других общих точек, пусть D — одна из областей, содержащаяся между γ и γ' (рис. 9), *а $F(z)$ — функция, голоморфная и ограниченная в D, на γ и на γ', за исключением точки A. Если $F(z)$ стремится к конечным пределам, когда z стремится к A вдоль кривых γ и γ', то эти пределы равны.*

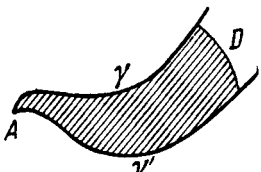

Рис. 9.

Действительно, в силу теоремы Каратеодори можно область D, ограниченную кривыми γ, γ' и дугой, соединяющей γ и γ', конформно отобразить на круг так, чтобы кривым γ и γ' соответствовали две дуги окружности, примыкающие друг к другу в точке, являющейся образом точки A; можно, следовательно, осуществить отображение на угловую область с вершиной A', стороны которой соответствуют γ и γ' и вследствие доказательства, проведенного выше, на биссектрисе этого угла функция, в которую преобра-

*) Имеет место следующая общая теорема братьев Рисс и Н. Н. Лузина и И. И. Привалова: *при конформном отображении области со спрямляемой границей на круг множество меры нуль на границе области переходит в множество меры нуль на окружности.* См. по этому вопросу, а также по другим вопросам, рассматриваемым в этой главе, монографию: И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, 1950. *(Прим. ред.)*

зуется $F(z)$, будет иметь предел, который будет равен пределу вдоль γ и пределу вдоль γ', эти пределы, следовательно, равны.

Теорема о максимуме модуля показывает, таким образом, что сходимость к этому пределу будет равномерной во всей области $D+\gamma+\gamma'$, когда z стремится к A.

§ 25. Теорема братьев Рисс. Допустим, что $f(z)$ ограничена и отлична от постоянной в круге $|z|<1$. Предел $f(re^{i\varphi})$ при r, стремящемся к единице, существует почти для всех φ. Что можно сказать о множестве тех значений φ, при которых это граничное значение имеет одно и то же заданное значение. Ф. и М. Рисс доказали, *что это множество имеет меру нуль*. Для доказательства можно предположить, что предел, о котором идет речь, будет нулем, так как если бы он был равен числу L (непременно конечному), то разность $f(re^{i\varphi})-L$ стремилась бы к нулю при рассматриваемых φ, когда r стремится к единице. Фату дал очень простое доказательство этой теоремы, основанное на применении классической теоремы Иенсена. Можно предположить, что $f(0)\neq 0$, так как, если $f(0)=0$, то

$$f(z)=c_p z^p+\ldots,\quad c_p\neq 0$$

и функция $\frac{f(z)}{c_p z^p}$ будет стремиться к нулю вдоль радиуса, вдоль которого $f(z)$ стремится к нулю, и обратно; новая функция в начале координат равна единице. Итак, пусть $f(0)=1$. Тогда по формуле Иенсена

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi=\ln\frac{r}{r_1}\frac{r}{r_2}\ldots\frac{r}{r_n},\quad 0<r<1,$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — модули тех нулей функции $f(z)$, которые по модулю не превосходят r, причем каждый из нулей берется столько раз, какова его кратность.

Логарифм, фигурирующий в интеграле в левой части равенства, положителен, когда $|f(re^{i\varphi})|>1$, и отрицателен, когда $|f(re^{i\varphi})|<1$; можно, следуя Фату, отделить в интеграле положительную часть от отрицательной. Используя

обозначение Р. Неванлинна, положим:

$$\ln^+|a| = \ln|a|, \quad \text{если } |a| \geqslant 1,$$

$$\ln^+|a| = 0, \qquad \text{если } |a| \leqslant 1.$$

Тогда левая часть в формуле Иенсена будет:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\,d\varphi.$$

Так как в правой части формулы Иенсена берется логарифм от величины большей или равной, чем единица, то, отделяя положительные и отрицательные слагаемые, можем переписать формулу следующим образом [1]):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\,d\varphi + \ln\frac{r^n}{r_1 r_2 \ldots r_n}.$$

Допустим теперь, что $f(z)$ ограничена в круге $|z| < 1$, или даже только, что в этом круге ограничен интеграл в левой части последнего равенства. Так как слагаемые в правой части не отрицательны, то будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})|}\,d\varphi \leqslant M, \tag{20}$$

где M — постоянная. Пусть дано положительное число P и пусть $0 < r < 1$. Если значения φ, при которых

$$|f(re^{i\varphi})| \leqslant e^{-P}$$

составляют отрезки общей длины μ, на которых левая часть (20) не меньше чем $\frac{\mu P}{2\pi}$, то длина μ этих отрезков не превосходит $\frac{2\pi M}{P}$. Пусть E_r' — множество таких точек φ окружности $|z| = r$. Множество $E(r)$ точек φ, при которых

$$|f(r'e^{i\varphi}) \leqslant e^{-P} \quad \text{при} \quad r \leqslant r' < 1$$

---

[1]) Это отделение положительных и отрицательных частей в формуле Иенсена, которое является основой теории мероморфных функций, построенной Неванлинна, впервые, кажется, было осуществлено Фату.

является пересечением множеств E'_r; его внешняя мера не больше чем $\frac{2\pi M}{P}$.

Если $r < r' < 1$, то $E(r')$ содержит в себе все точки $E(r)$, но его внешняя мера остается не больше чем $\frac{2\pi M}{P}$. Множество $\mathscr{E}$, являющееся суммой $E(r)$ по всем $r \leqslant 1$, имеет, следовательно, внешнюю меру, которая не превосходит $\frac{2\pi M}{P}$.

Множество E точек φ, при которых $f(re^{i\varphi})$ имеет пределом нуль, когда r стремится к единице, принадлежит к $\mathscr{E}$, как бы велико ни было P, поскольку всякая точка φ из E принадлежит к $E(r)$, начиная с некоторого значения $r = r(\varphi)$. Так как внешняя мера E не превосходит $\frac{2\pi M}{P}$, как бы велико ни было P, то мера множества E равна нулю.

В качестве первого следствия из теоремы братьев Рисс получаем, что *если голоморфная в круге $|z| < 1$ функция $f(z)$ ограничена, или даже ограничено только ее среднее значение*

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi$$

и если множество тех значений φ, при которых $f(re^{i\varphi})$ стремится к конечному пределу L, не будет меры нуль, то $f(z)$ является постоянной и равна L.

Если $f(re^{i\varphi})$ стремится к L, то можно сказать, что точка $e^{i\varphi}$ является нулем функции $f(z) - L$. Следовательно, достаточно, чтобы нули $f(z) - L$ на окружности $|z| = 1$ составляли множество положительной меры, чтобы можно было заключить, что $f(z) = L$ тождественно. Этот результат переносится с помощью конформного отображения на те случаи, в которых множеству меры нуль соответствует множество меры нуль. А именно получается следующий результат, который был распространен братьями Рисс на более общие случаи.

Если $f(z)$ голоморфна и ограничена в области, ограниченной простой жордановой кривой, часть которой представляет собой простую аналитическую дугу, и если $f(z)$ стремится к нулю, когда точка z стремится к точке z_0 аналитической дуги, причем эти точки z_0

образуют на дуге множество положительной меры, то $f(z)$ тождественно равна нулю.

Первая теорема этого рода была доказана Пенлеве.

Укажем еще другое следствие из теоремы братьев Рисс.

Если $f(z)$, не равная тождественно постоянной, голоморфна и ограничена в круге $|z| < 1$, то множество различных граничных радиальных значений имеет мощность континуума.

Развитие теорем типа Фату читатель найдет в монографии Р. Неванлинна «Однозначные аналитические функции» и в более поздних работах Ноширо (Noshiro), Отсука (Ohtsuka), Картрайт (Cartwright) и Коллинвуда (Collingwood) *).

Литературные ссылки

§ 20. Fatou, 1; M. Riesz, 1, 2.
§ 21. Poincaré, 1; Valiron, 21.
§ 22. Borel, 1; Fréchet, 1; Aronszajn, 1.
§ 23. Fatou, 1; Carathéodory, 1.
§ 24. Montel, 3, 1; Lindelöf, 1.
§ 25. F. et M. Riesz, 1; Fatou, 3; Painlevé, 1; Nevanlinna, 1.

*) См. также цитированную на стр. 84 книгу И. И. Привалова. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА IV

ПОВЕДЕНИЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ

§ 26. Обобщения леммы Шварца. Обобщения леммы Шварца, о которых здесь будет идти речь, имеют своим источником одну теорему Г. Жюлиа, которую он использовал при исследовании итераций рациональных дробей. Теорема была дополнена Р. Неванлинна, а затем Вольфом, результат которого был следствием его исследований об итерации некоторых голоморфных функций. Основная теорема Вольфа была вновь доказана и применена различными авторами для изучения конформного отображения в различных точках границы отображаемой области. Мы воспользуемся здесь методом Ландау — Валирона и приведем также результаты Каратеодори.

Напомним прежде всего, что лемма Шварца может быть формулирована в следующей канонической форме: *Если функция $F(\zeta)$ голоморфна в круге $|\zeta|<1$, если $F(0)=0$ и если $|F(\zeta)|\leqslant 1$, то внутри круга $|\zeta|<1$ справедливо неравенство*

$$|F(\zeta)|\leqslant|\zeta|,$$

причем равенство в точке, отличной от начала координат, может иметь место только в том случае, когда $F(\zeta)=\omega\zeta$, $|\omega|=1$.

Можно с помощью конформного отображения перенести этот результат на полуплоскость. Пусть $f(z)$ голоморфна в полуплоскости $x=\Re z>0$. Допустим, что *значения $f(z)$ принадлежат той же полуплоскости, т. е. $\Re f(z)>0$.*

Если точка z_0 принадлежит этой полуплоскости, $x_0=\Re z_0>0$, то дробно-линейное преобразование

$$\zeta=\frac{z-z_0}{z+\bar{z}_0}$$

ставит нашей полуплоскости во взаимно однозначное соответствие круг $|\zeta|<1$. То же самое преобразование, примененное к значениям $f(z)$, $f(z_0)$, $\overline{f(z_0)}$, дает функцию

$$F(\zeta)=\frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)+\overline{f(z_0)}},$$

которая принадлежит окружности $|\zeta|<1$; очевидно, $|F(\zeta)|<1$ и $F(0)=0$. Можно применить лемму Шварца, что приводит к *фундаментальному неравенству Жюлиа*

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)+\overline{f(z_0)}}\right|\leqslant\left|\frac{z-z_0}{z+\bar{z}_0}\right|. \tag{1}$$

Из этого неравенства выводится следующая теорема, в принципе принадлежащая Вольфу.

Теорема. *Если $f(z)$ голоморфна при $x>0$ и если $\Re f(z)>0$, то существует такое число $c\geqslant 0$, что если положим*

$$f(z)=cz+\Phi(z),$$

то при $x>0$ имеем:

$$\Re\Phi(z)\geqslant 0,$$

и если задано $k>0$, то при $|y|\leqslant kx\,(y=\Im z)$ равномерно выполняется соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z}=0.$$

Обозначим через c нижнюю грань $\frac{\Re f(z)}{x}$ при $x>0$; это неотрицательное число. Если положим $f(z)=cz+\Phi(z)$, то в силу определения числа c справедливо неравенство

$$cx+\Re\Phi(z)\geqslant cx,$$

следовательно,

$$\Re\Phi(z)\geqslant 0,$$

что и доказывает первую часть теоремы. Если существует точка z_1, в которой $\Re\Phi(z_1)=0$, то $\Phi(z)$ будет постоянной в силу теоремы о максимуме модуля, так как, если положим $\Psi(z)=e^{-\Phi(z)}$, то

$$|\Psi(z)|\leqslant 1 \quad\text{и}\quad |\Psi(z_1)|=1,$$

В этом случае, когда $\Phi(z) = \text{const}$, вторая часть теоремы очевидна. Итак, предположим, что $\Re\Phi(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке. Формула (1) может быть применена к $\Phi(z)$, где z_0 и z — произвольные точки полуплоскости $x > 0$. Имеем:

$$\left|\frac{\Phi(z) - \Phi(z_0)}{\Phi(z) + \overline{\Phi(z_0)}}\right| \leqslant \left|\frac{z - z_0}{z + \overline{z_0}}\right|. \tag{2}$$

Обозначим через λ правую часть этого неравенства, которая, очевидно, меньше чем единица. Положим:

$$\Phi(z) = u\Re\Phi(z_0) + i\Im\Phi(z_0), \tag{3}$$

откуда можно определить u, так как коэффициент при нем отличен от нуля. Подставляя выражение $\Phi(z)$ из (3) в неравенство (2), получаем:

$$\left|\frac{u-1}{u+1}\right| \leqslant \lambda$$

и тем более

$$\frac{|u|-1}{|u|+1} \leqslant \left|\frac{u-1}{u+1}\right| \leqslant \lambda,$$

следовательно,

$$|u| \leqslant \frac{1+\lambda}{1-\lambda} = \frac{(1+\lambda)^2}{1-\lambda^2} = \frac{(|z+\overline{z_0}| + |z-z_0|)^2}{|z+\overline{z_0}|^2 - |z-z_0|^2} =$$

$$= \frac{(|z+\overline{z_0}| + |z-z_0|)^2}{4xx_0} < \frac{(|z| + |z_0|)^2}{xx_0}.$$

Применяя это неравенство к выражению (3), видим, что

$$\left|\frac{\Phi(z)}{z}\right| \leqslant \left|\frac{\Im\Phi(z_0)}{z}\right| + \frac{\Re\Phi(z_0)}{x_0}\,\frac{(|z| + |z_0|)^2}{x|z|}.$$

Если x стремится к бесконечности, то первое слагаемое в правой части стремится к нулю, а если $|y| \leqslant kx$, то при фиксированном z_0 имеем:

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\frac{\Phi(z)}{z}\right| \leqslant \frac{\Re\Phi(z_0)}{x_0}\sqrt{1+k^2} \leqslant \frac{\Re\Phi(z_0)}{x_0}(1+k).$$

Так как вследствие определения $\Phi(z)$ множитель при $1+k$ может быть сделан сколь угодно малым, если выбрать надлежащим образом z_0, то выражение, стоящее в левой части неравенства, равно нулю. Теорема доказана.

Следствие. *Если задано $k>0$, то при $|y|\leqslant kx$ имеем равномерно*

$$\lim_{x\to\infty} f'(z)=c.$$

В самом деле, по теореме Коши, если h положительно и таково, что $\operatorname{Arctg} k+\operatorname{Arcsin} h<\frac{\pi}{2}$, то

$$|\Phi'(z)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|Z-z|=|z|h}\frac{\Phi(Z)\,dZ}{(z-Z)^2}\right|\leqslant\frac{1}{h|z|}\max|\Phi(Z)|$$

$$\text{при } |Z-z|=|z|h,$$

и последний член этого неравенства стремится к нулю вследствие второй части нашей теоремы. Каратеодори назвал число *с угловой производной функции $f(z)$ на бесконечности.*

Случай, когда $c>0$, представляет особый интерес. Мы покажем, что в этом случае, *функция $Z=f(z)$ однолистна во всяком секторе $|y|\leqslant kx$, $|z|>R$, где k — данное положительное число, а R взято достаточно большим.* Это вытекает из предыдущего следствия и из теоремы Коши.

Рассмотрим конечную область $|y|\leqslant kx$, $R\leqslant|z|\leqslant R'$. Когда точка z пробегает контур Γ этой области в положительном направлении, число решений уравнения

$$f(z)=Z_0$$

дается интегралом

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)-Z_0}\,dz.$$

Сделаем замену переменной $f(z)=Z$; тогда интеграл примет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{dZ}{Z-Z_0},$$

где Γ' — образ контура Γ. Этот контур Γ' состоит из четырех дуг кривых, соответствующих прямолинейным отрезкам и дугам окружностей, составляющим Γ. Это простые аналитические дуги, проходимые в направлении, соответ-

ствующем направлению обхода Γ, причем эти дуги не имеют общих внутренних точек. Действительно, так как

$$Z - Z' = f(z) - f(z') = c(z - z') + \int_{z}^{z'} \Phi'(u)\,du,$$

то при $c > 0$ и достаточно большом R имеем:

$$|\Phi'(u)| < \frac{c}{2},$$

следовательно,

$$|Z - Z'| = \left(c + \theta\frac{c}{2}\right)|z - z'|, \quad |\theta| < 1,$$

так что $Z \neq Z'$ при $z \neq z'$. Контур Γ' представляет собой замкнутую спрямляемую кривую; интеграл, взятый вдоль нее, равен 1, если Z_0 лежит внутри контура Γ' (который проходится в положительном направлении), и интеграл равен нулю, если Z_0 лежит вне контура Γ'. Таким образом, $f(z)$ будет однолистной, как бы велико ни было R'.

§ 27. Об обратных функциях. Теорема Коши об обратных функциях может быть формулирована в следующей канонической форме:

Пусть $Z = F(z)$ — функция, голоморфная при $|z| \leqslant 1$, и такая, что $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$ и $|F(z)| \leqslant M$ при $|z| \leqslant 1$. Существует такое число $\Omega(M)$, что обратная функция $z = \varphi(Z)$, обращающаяся в нуль при $Z = 0$, голоморфна при $|Z| < \Omega(M)$ и $|\varphi(Z)| < 1$.

Чтобы получить число решений уравнения

$$F(z) = Z \tag{4}$$

относительно z, можно воспользоваться теоремой Руше, записывая (4) в виде

$$F(z) - z - (Z - z) = 0.$$

Уравнение $Z - z = 0$ имеет единственный корень $z = Z$, каково бы ни было Z. Положим:

$$\Phi(z) = F(z) - z = c_2 z^2 + \ldots,$$

где $c_2, \ldots$, являясь коэффициентами $F(z)$, не превосходят по модулю M. Будем всегда обозначать через $M(r, \Phi)$

максимум $|\Phi(z)|$ при $|z|=r$. Допустим, что $M(r, \Phi)<r$ и возьмем:

$$|Z|<r-M(r, \Phi).$$

На окружности $|z|=r$ будем иметь:

$$|Z-z|>r-|Z|>M(r, \Phi),$$

так что

$$\left|\frac{F(z)-z}{Z-z}\right|<1,$$

что и доказывает, что уравнение (4) имеет корень и притом только один, не превосходящий по модулю числа r, если $|Z|<r-M(r, \Phi)$. Если $z=\varphi(Z)$ является этим корнем, то $F'(z)\neq 0$, так как в противном случае уравнение (4) имело бы по крайней мере двойной корень; следовательно, $\varphi(Z)$ является функцией, обратной к $F(z)$, причем она голоморфна при

$$|Z|<r-M(r, \Phi).$$

Так как

$$|\Phi(z)|\leqslant M(r^2+\ldots)=\frac{Mr^2}{1-r},$$

то радиус круга голоморфизма функции $\varphi(Z)$ с центром в начале координат не менее чем максимум

$$r-\frac{Mr^2}{1-r}.$$

Полагая $r=\frac{1}{4M}$, получаем:

$$\Omega(M)\geqslant\frac{1}{6M}.$$

Точное значение постоянной $\Omega(M)$ указал Ландау.

Теорема Ландау. *Имеет место равенство*

$$\Omega(M)=M(M-\sqrt{M^2-1})^2.$$

Если $M=1$, то, как известно, в силу свойства коэффициентов, будем иметь $F(z)\equiv z$, следовательно, $\varphi(Z)=Z$ и радиус голоморфизма функции $\varphi(Z)$ как раз равен единице (при $|z|<1$).

Можно, следовательно, предполагать, что $M>1$. Рассмотрим функцию

$$G(z)=\frac{M}{z}\frac{F(z)-z}{M^2z-F(z)}, \quad |z|\leqslant 1. \tag{5}$$

Если положим $u = \frac{F(z)}{z}$, то $|u| \leqslant M$ и

$$\left|\frac{u-1}{M^2-u}\right| \leqslant \frac{1}{M},$$

откуда вытекает, что

$$|G(z)| \leqslant 1,$$

причем $G(z)$ голоморфна. Из (5) имеем:

$$F(z) - z = \frac{(M^2-1)z^2G(z)}{M+zG(z)},$$

следовательно,

$$|\Phi(z)| = |F(z) - z| = (M^2-1)\left|\frac{z^2G(z)}{M+zG(z)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant (M^2-1)\frac{r^2}{M-r},$$

и с помощью рассуждений, которые были приведены при доказательстве предыдущего предложения, получаем:

$$\Omega(M) \geqslant r - (M^2-1)\frac{r^2}{M-r}, \quad r \leqslant 1.$$

Максимум правой части достигается при

$$r = M - \sqrt{M^2-1}$$

и равен

$$M\left(M - \sqrt{M^2-1}\right)^2.$$

Следовательно, имеем:

$$\Omega(M) \geqslant M\left(M - \sqrt{M^2-1}\right)^2.$$

Если рассмотрим функцию

$$Z = F(z) \equiv Mz\frac{1-Mz}{M-z} = z + \ldots,$$

голоморфную при $|z| \leqslant 1$ и не превосходящую по модулю M производная которой $F'(z)$ обращается в нуль при $z = M - \sqrt{M^2-1}$, то соответствующее значение Z является критической алгебраической точкой обеих ветвей обратной функции; радиус голоморфизма той ветви, которая обращается в нуль при $Z = 0$, равен этому значению Z, которое, очевидно, равно

$$M\left(M - \sqrt{M^2-1}\right)^2.$$

Теорема Ландау доказана.

Отметим, что из этого примера следует, что наибольший круг $|z|=\rho$, в котором функция $F(z)$ однолистна, не может превосходить $M-\sqrt{M^2-1}$.

§ 28. Радиус однолистности. Рассмотрим функцию

$$Z=f(z)=z+c_2z^2+\ldots,$$

голоморфную и непревосходящую по модулю числа M при $|z|\leqslant 1$. Известно, что она непременно однолистна в некотором круге $|z|<\rho(M)\leqslant 1$. Если $M=1$, то Z тождественно равно z и $\rho(M)=1$. Допустим, что $M>1$, тогда $\rho(M)$ определяется следующим свойством: это наименьшее число ρ, для которого при $|z|=\rho=\rho(M)$ существуют такие два различных числа a, b, что $|a|\leqslant|b|=\rho<1$ и

$$f(a)=f(b)=\alpha.$$

Функция

$$g(z)=\frac{M^2(f(z)-\alpha)}{M^2-\bar{\alpha}f(z)}$$

голоморфна в круге $|z|\leqslant 1$, так как $|\alpha|<M$. Очевидно, имеем:

$$|g(z)|\leqslant M,\quad g(0)=-\alpha,\quad g(a)=g(b)=0.$$

Функция $h(z)$, определенная равенством

$$g(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\,\frac{z-b}{1-\bar{b}z}\,h(z),$$

также будет голоморфной при $|z|\leqslant 1$, причем, так как два первых множителя при $|z|=1$ равны по модулю единице, то

$$|h(z)|\leqslant M$$

и, в частности, $|h(0)|\leqslant M$, следовательно, справедливо неравенство

$$|\alpha|=|g(0)|\leqslant M|ab|\leqslant M\rho^2. \tag{6}$$

Если положим:

$$k(z)=\frac{f(z)}{z},$$

то $k(0)=1$ и по лемме Шварца будем иметь $|k(z)|\leqslant M$. Функция

$$K(z)=\frac{M(k(z)-1)}{M^2-k(z)}$$

голоморфна при $|z|<1$ и не превосходит по модулю единицы, следовательно, по лемме Шварца не превосходит $|z|$, так как $K(0)=0$. Но поскольку

$$k(z)=\frac{M(MK(z)+1)}{M+K(z)},$$

то точка $k(z)$ лежит в круге, описываемом дробно-линейной функцией, стоящей в правой части равенства, когда $|K(z)|=|z|=r$, т. е в круге, центр которого лежит на действительной оси, и которую он пересекает в точках

$$M\frac{Mr+1}{M+r}, \quad M\frac{1-Mr}{M-r}.$$

Если допустим, что $Mr<1$, то получим:

$$|k(z)|\geqslant M\frac{1-Mr}{M-r}, \qquad |z|\leqslant r,$$

$$|f(z)|\geqslant M|z|\frac{1-Mr}{M-r}, \quad |z|\leqslant r,$$

и при $z=a$ или b, если $M\rho<1$, будем иметь:

$$|\alpha|\geqslant M\rho\frac{1-M\rho}{M-\rho}.$$

В силу (6) должно быть

$$M\rho^2\geqslant M\rho\frac{1-M\rho}{M-\rho}$$

или

$$\rho^2-2M\rho+1\leqslant 0,$$

$$\rho\geqslant M-\sqrt{M^2-1}.$$

Наименьшее из этих ρ будет $\rho=M-\sqrt{M^2-1}$. Это равенство влечет за собой неравенство $\rho M<1$. Итак, доказана следующая теорема:

Если $f(z)=z+\ldots$ голоморфна при $|z|\leqslant 1$ и $|f(z)|\leqslant M$ в этом круге, то $f(z)$ однолистна в круге с центром в начале координат и радиусом, равным

$\rho(M) = M - \sqrt{M^2 - 1}$, *причем эта граница достигается для функции, указанной Ландау.*

Следствие. *Если $f(z)$ голоморфна и не превосходит по модулю числа M в круге $|z| \leqslant R$ и $f'(0) = c \neq 0$, то $f(z)$ однолистна в круге*

$$|z| < R\rho\left(\frac{M}{|c|R}\right).$$

Это следует из того, что функция

$$\frac{f(zR)}{cR}$$

голоморфна при $|z| \leqslant 1$ и не превосходит по модулю числа $\frac{M}{|c|R}$, а производная ее в точке $z = 0$ равна единице.

Это следствие количественно характеризует локальную однолистность аналитического отображения с отличной от нуля производной.

§ 29. Критерий Каратеодори. *Для того чтобы угловая производная c была не менее чем c_0, достаточно, чтобы существовала последовательность чисел z_m такая, что*

$$\lim_{m \to \infty} |z_m| = \infty, \quad \lim_{m \to \infty} |f(z_m)| = \infty,$$

$$\frac{\Re z_m}{|z_m|^2} \frac{|f(z_m)|^2}{\Re f(z_m)} \geqslant c_0.$$

Применяя неравенство Жюлиа (1) к точкам z и z_m, видим, что окружность относительно Z, определенная соотношением

$$\left|\frac{Z - f(z_m)}{Z + \overline{f(z_m)}}\right| = \left|\frac{f(z) - f(z_m)}{f(z) + \overline{f(z_m)}}\right|, \tag{7}$$

является внутренней в широком смысле слова по отношению к окружности

$$\left|\frac{Z - f(z_m)}{Z + \overline{f(z_m)}}\right| = \left|\frac{z - z_m}{z + \overline{z_m}}\right|. \tag{8}$$

Кратчайшее расстояние ρ_m от окружности (7) до оси $x = 0$ мы получим, если возьмем $Z = \rho_m + i\Im f(z_m)$, $\rho_m <$

$< \Re f(z_m)$. Таким образом, имеем:

$$\rho_m = \Re f(z_m) \frac{|f(z)+\overline{f(z_m)}|-|f(z)-f(z_m)|}{|f(z)+\overline{f(z_m)}|+|f(z)-f(z_m)|} =$$
$$= \Re f(z_m) \frac{4\Re f(z)\,\Re f(z_m)}{(|f(z)+\overline{f(z_m)}|+|f(z)-f(z_m)|)^2}.$$

Точно так же кратчайшее расстояние ρ'_m от окружности (8) до оси $x=0$ дается формулой

$$\rho'_m = \Re f(z_m) \frac{4xx_m}{(|z+\overline{z_m}|+|z-z_m|)^2},$$

так как должно быть $\rho'_m \leqslant \rho_m$, то имеем:

$$\frac{x_m}{(|z+\overline{z_m}|+|z-z_m|)^2} \frac{(|f(z)+\overline{f(z_m)}|+|f(z)-f(z_m)|)^2}{\Re f(z_m)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\Re f(z)}{x}.$$

В силу предположений теоремы, если m стремится к бесконечности при фиксированном z, то нижний предел левой части не менее чем c_0, так что

$$\frac{\Re f(z)}{x} \geqslant c_0,$$

следовательно, $c \geqslant c_0$.

§ 30 Сравнение областей. Пусть $Z = X + iY = g(z)$ — функция от $z = x + iy$, голоморфная в полуплоскости $x > 0$ и такая, что $X > 0$, причем угловая производная этой функции на бесконечности положительна, т. е.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = c_0 > 0.$$

Множество значений Z покрывает область Δ', которая, как мы видели в § 26, содержит сектор ($|z| > R$) раствора, сколь угодно близкого к π.

Пусть Δ представляет собой односвязную область в полуплоскости $X > 0$, которая содержит внутри себя область Δ' (когда мы находимся на конечном расстоянии) и которая имеет простую точку в бесконечности, последнее означает, что если Γ и Γ' представляют собой две простые кривые,

лежащие в области Δ, выходящие из одной и той же точки Δ и идущие в бесконечность, то часть полуплоскости $X > 0$, заключенная между Γ и Γ', принадлежит Δ. Мы докажем, что *при этих условиях, если $Z = f(z)$ представляет собой функцию, дающую конформное отображение полуплоскости $x > 0$ на область Δ, причем бесконечно удаленной точке в полуплоскости соответствует в Δ бесконечно удаленная точка, то угловая производная в бесконечности функции $f(z)$ будет положительной.*

Обозначим через $z = \varphi(Z)$ функцию, обратную к $Z = f(z)$. Функция $\varphi(Z)$ голоморфна в Δ, ее действительная часть положительна, она отображает Δ на $x > 0$, бесконечная точка в Δ соответствует бесконечной точке в полуплоскости $x > 0$; она не обращается в нуль в Δ.

Функция

$$\omega(z) = \varphi(g(z))$$

голоморфна при $x > 0$, так как точка $g(z)$ принадлежит к Δ', следовательно, и к Δ; действительная часть $\omega(z)$ положительна, так что отношение

$$\frac{\omega(x)}{x}$$

имеет конечный неотрицательный предел, когда положительное x стремится к бесконечности. Поскольку

$$\frac{\omega(x)}{x} = \frac{\varphi(g(x))}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{x}$$

и $\frac{g(x)}{x}$ имеет положительный предел c_0, то видим, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(g(x))}{g(x)} = \gamma \geqslant 0.$$

Существует, таким образом, в Δ', следовательно, и подавно в Δ, путь Γ, вдоль которого $Z = g(x)$ стремится к бесконечности и

$$\lim_{Z \to \infty} \frac{\varphi(Z)}{Z} = \gamma \geqslant 0.$$

Допустим, что при $x > 0$ отношение $\frac{f(x)}{x}$ стремится к нулю, когда $x \to \infty$; $Z = f(x)$ стремится к бесконечности;

тогда в Δ существует путь Γ', идущий в бесконечность, вдоль которого отношение $Z/\varphi(Z)$ стремится к нулю.

Так как $\Re\varphi(Z) > 0$, то функции

$$\frac{\varphi(Z)}{Z}, \quad \frac{Z}{\varphi(Z)},$$

голоморфные в Δ, не принимают в Δ действительных отрицательных значений δ, потому что равенство $\varphi(Z) = \delta Z$ влекло бы за собой $\Re\varphi(Z) = \delta X$, $X > 0$, $\delta < 0$.

Пусть α — произвольное положительное число; тогда

$$\frac{Z + \alpha\varphi(Z)}{\varphi(Z)}$$

стремится к α, когда Z стремится к бесконечности вдоль Γ'. Функция

$$\Theta(Z) = \frac{\varphi(Z)}{Z + \alpha\varphi(Z)}$$

голоморфна в Δ и не принимает в этой области действительных отрицательных значений. Она имеет конечные различные пределы, когда Z стремится к бесконечности вдоль Γ' или вдоль Γ, а именно: $\frac{1}{\alpha}$ на Γ' и $\frac{\gamma}{1+\alpha\gamma}$ на Γ.

Если Z описывает область Δ, значения функции $\Theta(Z)$ описывают область, которая не пересекает действительной отрицательной полуоси. Область, описываемая надлежаще выбранной ветвью

$$H(Z) = \sqrt{\Theta(Z)},$$

не проникает в полуплоскость $x < 0$, а на кривых Γ и Γ', которые можем предположить выходящими из одной точки области Δ, функция $H(Z)$ имеет различные пределы

$$a = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad b = \sqrt{\frac{\gamma}{1+\alpha\gamma}}.$$

Функция

$$e^{-H(Z)}$$

ограничена в Δ, следовательно, и в части Δ, ограниченной кривыми Γ и Γ'; эта функция имеет различные предельные значения e^{-a} и e^{-b}, когда Z удаляется в бесконечность вдоль Γ и Γ' соответственно. Но это находится

в противоречии с теоремой Линделёфа, данной в конце § 24. Таким образом, предположение, что угловая производная в бесконечности функции $f(z)$ равна нулю, неверно, и формулированное предложение доказано.

§ 31. Классы функций $Z=g(z)$ с положительными угловыми производными. Рассмотрим сначала функцию

$$Z=g(z)=z\left[1+\frac{1}{\ln_\alpha(z+A)}\right],$$

где A — положительное число, а $\ln_\alpha$ означает итерированный α раз логарифм, α — целое положительное, то есть полагаем:

$$\ln_1 u=\ln u,\quad \ln_2 u=\ln[\ln_1 u],\ \ldots,\quad \ln_\alpha u=\ln[\ln_{\alpha-1} u].$$

Берем ту ветвь итерированного логарифма, которая действительна при действительных положительных z; число A взято достаточно большим. Непосредственно видим, что для действительных положительных z отношение $g(z)/z$ стремится к единице, когда z стремится к бесконечности.

При $x=\Re z>0$ имеем:

$$\ln(z+A)=\frac{1}{2}\ln[(A+x)^2+y^2]+i\operatorname{arctg}\frac{y}{x+A},$$

причем действительная часть положительна и не меньше чем $\ln A$, если $A>1$; мнимая часть имеет тот же знак, что y, и заключена между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Далее видим, что $\ln_2(z+A)$ имеет положительную действительную часть, если $A>e$, а мнимая часть имеет тот же знак, что y, и заключена между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, и т. д. Если A взято достаточно большим, то

$$\ln_\alpha(z+A)=u_\alpha(z)+iv_\alpha(z),$$

где $u_\alpha(z)$ больше, чем сколь угодно большое положительное число $k(A)$; что касается $v_\alpha(z)$, то оно имеет тот же знак, что y и заключено между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\frac{1}{\ln_\alpha(z+A)}=\frac{1}{u_\alpha(z)}-i\frac{v_\alpha(z)}{u_\alpha^2(z)}[1+w_\alpha(z)],$$

где

$$|w_\alpha(z)|<\frac{1}{2},$$

если A достаточно велико. Так что

$$g(z)=(x+iy)\left(1+\frac{1}{u_\alpha(z)}-i\frac{v_\sigma(z)}{u_\alpha^2(z)}[1+w_\alpha(z)]\right),$$

$$\Re g(z)=x\left(1+\frac{1+w'_\alpha(z)}{u_\alpha(z)}\right)+\frac{yv_\sigma(z)}{u_\alpha^2(z)}(1+w''_\alpha(z))>0,$$

потому что $w'_\alpha(z)$ и $w''_\alpha(z)$ не превосходят по абсолютной величине $\frac{1}{2}$, если A достаточно велико, в то время как $u_\alpha(z)>1$. Точка $g(z)$, таким образом, остается в полуплоскости $X>0$. Граница области, описываемой точкой $Z=g(z)$, когда $x>0$, представляет собой кривую, описываемую Z, когда $x=0$. При этих условиях и при $|y|$, достаточно большом, справедливы соотношения

$$\ln(z+A)=\ln|y|+O\left(\frac{1}{y}\right)+i\operatorname{arctg}\frac{y}{A},$$

$$\ln_2(z+A)=\ln_2|y|+O\left(\frac{1}{y}\right)+i\frac{\operatorname{arctg}y}{\ln|y|}(1+o(1)),$$

$$\ln_3(z+A)=\ln_3|y|+O\left(\frac{1}{y}\right)+i\frac{\operatorname{arctg}y}{\ln|y|\ln_2|y|}(1+o(1)),$$

. . . . . .

$$\ln_\alpha(z+A)=\ln_\alpha|y|+O\left(\frac{1}{y}\right)+i\frac{\operatorname{arctg}y\,(1+o(1))}{\ln|y|\ln_2|y|\ldots\ln_{\alpha-1}|y|},$$

где $o(1)$ означает функцию, которая стремится к нулю, а $O(u)$ — функцию, отношение которой к u ограничено, когда переменная (здесь y) стремится к своему пределу.

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{\ln_\alpha(z+A)}=\frac{1}{\ln_\alpha|y|}+O\left(\frac{1}{y}\right)-i\frac{(1+o)(1))\operatorname{arctg}y}{\ln|y|\ldots(\ln_\alpha|y|)^2}$$

и, следовательно, положив $Z=X+iY$, получим:

$$X=\frac{(1+o(1))\,y\operatorname{arctg}y}{\ln|y|\ldots(\ln_\alpha|y|)^2},$$

$$Y=y\left[1+\frac{1}{\ln_\alpha|y|}+O\left(\frac{1}{y}\right)\right]\sim y.$$

Если $|y|$ достаточно велик, то $\operatorname{arctg} y$ близок к $\frac{\pi}{2} > 1$. Часть области Δ', описываемой посредством $Z = g(z)$, лежащая в полуплоскости $X > B$ (при достаточно большом B), содержится в области Δ'', которая ограничена прямой $X = B > 0$ при малых Y, а затем двумя дугами кривой

$$X = \frac{|Y|}{\ln|Y| \ldots (\ln_\alpha |Y|)^2},$$

там, где правая часть более чем B. Заменяя α через $\alpha + 1$, видим, что имеет место следующее утверждение:

Если односвязная область Δ, лежащая в полуплоскости $X > 0$, содержит в качестве простой точки бесконечно удаленную точку и содержит область Δ', расположенную справа *от линий $X = B > 0$ и*

$$X = \frac{|Y|}{\ln|Y| \ldots \ln_{\alpha-1}|Y| (\ln_\alpha |Y|)^{1+\eta}}, \quad \eta > 0, \quad X > B, \tag{9}$$

то угловая производная в бесконечности функции, отображающей полуплоскость $x > 0$ на Δ так, что бесконечно удаленной точке соответствует бесконечно удаленная точка, будет положительной.

Правую часть в (9) обозначим через

$$Yh(Y),$$

где

$$h(Y) = \frac{1}{\ln|Y| \ldots (\ln_\alpha |Y|)^{1+\eta}} \frac{Y}{|Y|};$$

функция $h(Y)$ нечетная и такая, что

$$\int_1^\infty \frac{h(Y)}{Y} dY < \infty,$$

причем $h(Y)$ убывает, когда $Y > 0$ возрастает. Мы покажем, что *всегда можно заменить одласть Δ', фигурирующую в предыдущей формулировке, областью, расположенной справа от $X = B > 0$ и справа от*

$$X = |Yh(Y)|$$

с момента, как $X > B$, где $h(t)$ — непрерывная нечетная функция от t, положительная и убывающая при $t > 0$ и такая, что

$$\int_1^\infty \frac{h(t)}{t}\,dt < \infty. \tag{10}$$

Из сходимости интеграла (10) и из монотонного убывания функции $h(t)$ следует, что $h(t)$ стремится к нулю, когда $t \to \infty$. Точнее, если $a \to \infty$, то интеграл в правой части неравенства

$$\int_{\sqrt{a}}^{a} \frac{h(t)\,dt}{t} > \frac{1}{2}\,h(a)\ln a$$

должен стремиться к нулю и, следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} h(t)\ln t = 0. \tag{11}$$

Рассмотрим функцию

$$Z = g(z) = z - i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+z}{1+z-it}\,h(t)\,dt.$$

Функция $g(z)$ голоморфна при $x > 0$, так как интеграл сходится равномерно, каково бы ни было конечное z с положительной действительной частью. Действительная часть этого интеграла

$$x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{(1+x)^2+(y-t)^2}\,th(t)\,dt$$

положительна. При $z = x$, действительном и положительном, имеем:

$$g(x) = x - i(1+x)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(t)\,dt}{1+x-it}$$

и

$$\frac{g(x)}{x} = 1 - i\frac{1+x}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x+it}{(1+x)^2+t^2}\,h(t)\,dt.$$

Когда $x \to \infty$, коэффициент $\frac{1+x}{x}$ стремится к единице, а интеграл в правой части последнего равенства стремится к нулю, так как часть интеграла, соответствующая $|t| > A$, менее чем

$$2\int_A^\infty \frac{h(t)}{t}\,dt,$$

следовательно, сколь угодно мала, если A достаточно велико. После того как A зафиксировано, часть интеграла, соответствующая промежутку $(-A, +A)$, стремится к нулю, когда $x \to \infty$. Угловая производная в бесконечности функции $g(z)$ равна, следовательно, единице.

Кривая, описываемая функцией $g(z)$, когда $x = 0$ определяется равенствами

$$X = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{th(t)\,dt}{1+(y-t)^2},$$

$$Y = y\left[1 - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(y - t + \frac{1}{y}\right)\frac{h(t)}{1+(y-t)^2}\,dt\right].$$

Допустим для определенности, что y положительно и очень велико. Интеграл, посредством которого определяется X, больше, чем интеграл от той же функции по промежутку $|t-y| < \frac{1}{2}y$, то есть

$$X > \frac{y}{2}h(2y)\int_0^{\frac{1}{2}y} \frac{2\,du}{1+u^2} = yh(2y)\operatorname{arctg}\frac{y}{2}.$$

В интеграле, который фигурирует в формуле, определяющей Y, часть, относящаяся к интервалу $(-\infty, 0)$, если положить $t = -u$, может быть записана в виде

$$-\int_0^\infty \left(y + u + \frac{1}{y}\right)\frac{h(u)}{1+(y+u)^2}\,du,$$

модуль его не превосходит интеграла

$$\int_0^\infty \frac{h(u)}{y+u}\,du,$$

который стремится к нулю, когда $y \to \infty$ в силу соображений, аналогичных тем, которые были изложены выше.

Остается рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{y}\int_0^\infty \frac{h(t)}{1+(y-t)^2}\,dt,$$

не превосходящий

$$\frac{\pi h(0)}{y}$$

и стремящийся к нулю, когда $y \to \infty$, и, наконец, интеграл

$$\int_0^\infty |y-t|\,\frac{h(t)}{1+(y-t)^2}\,dt.$$

Мы разобьем этот последний интеграл на четыре части, соответствующие промежуткам $(0, \varepsilon y)$, $(\varepsilon y, y)$, $(y, 2y)$, $(2y, \infty)$, где ε — произвольно мало. Первый из этих интегралов меньше

$$\frac{\varepsilon y h(0)}{(1-\varepsilon)\,y},$$

так что он сколь угодно мал вместе с ε. Второй не превосходит

$$h(\varepsilon y)\int_{\varepsilon y}^{y} \frac{y-t}{1+(y-t)^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\,h(\varepsilon y)\ln\left(1+(1-\varepsilon)^2 y^2\right) < h(\varepsilon y)\left[\ln(\varepsilon y) - \ln\varepsilon\right]$$

и вследствие (11) стремится к нулю, когда $y \to \infty$. Третий интеграл не превосходит

$$\frac{1}{2}\,h(y)\left\{\ln\left[1+(t-y)^2\right]\right\}_y^{2y} = \frac{1}{2}\,h(y)\ln\left(1+y^2\right)$$

и стремится к нулю, когда $y \to \infty$ в силу (11). Наконец, в четвертом интеграле $t - y > \frac{t}{2}$, и интеграл не больше чем

$$\int_{2y}^{\infty} \frac{th(t)}{1+\frac{t^2}{4}} dt.$$

Он стремится к нулю при $y \to \infty$, так как интеграл (10) сходится. Итак, мы видим, что Y асимптотически равно y. Граничная линия, описываемая точкой (X, Y), начиная с некоторого значения $|Y|$, расположена справа от кривой

$$X = Yh(Y);$$

это доказывает утверждение, формулированное выше. Таким образом, полученный результат содержит в себе утверждение, соответствующее равенству (9).

§ 32. Применение к конформному отображению. Результаты, полученные относительно угловой производной на бесконечности, очевидным образом переносятся на пределы производных на конечном расстоянии, если перевести точки $z = \infty$ и $Z = \infty$ в начало координат с помощью замены

$$z = \frac{1}{u}, \quad Z = \frac{1}{U}.$$

Функция $Z = g(z)$ перейдет в функцию $U = G(u)$ и если

$$\lim \frac{Z}{z} = c, \quad c > 0,$$

то

$$\lim \frac{U}{u} = \frac{1}{c}$$

в угле раствора меньшего, чем π, биссектрисой которого является действительная ось. В этом же угле производная

$$\frac{dU}{du} = g'(z) \frac{z^2}{Z^2}$$

имеет предел, равный $\frac{1}{c}$. Так как производная $G'(u)$ имеет пределом число $\frac{1}{c}$, то преобразование $U = G(u)$ остается конформным в рассматриваемом угле, включая его вершину.

Теорема о сравнении областей может быть перенесена с помощью конформного отображения полуплоскости на внутренность круга с единичным радиусом и ведет к следующему предложению.

Пусть Δ — односвязная область, а точка O — простая точка границы области Δ, имеющей в O касательную, которую мы выберем в качестве оси Ox, за Oy примем прямую, перпендикулярную к Ox. Предположим, что

1⁰. *Существует касательный к прямой Ox в точке O круг C, расположенный со стороны отрицательных y и такой, что его внутренность лежит вне области Δ.*

2⁰. *В окрестности точки O область Δ содержит внутри себя дуги кривой*

$$y = xk(x),$$

где $k(x)$ — нечетная функция от x, определенная, непрерывная, положительная, возрастающая при положительных и возрастающих x и такая, что существует интеграл

$$\int_0^1 \frac{k(t)}{t}\,dt.$$

Если при этих условиях отобразить конформно круг $|z| < 1$ на Δ так, чтобы, например, точка $z = 1$ переходила в точку O, то соответствие будет оставаться еще конформным в окрестности точки O во всяком внутреннем к Δ угле раствора меньше π и имеющем биссектрисой прямую Oy, причем отношение подобия имеет пределом конечное положительное число при приближении к O.

Это предложение включает в себя тот частный случай, когда Δ содержит внутренность круга, касательного к Ox в точке O, что соответствует случаю, когда область Δ', фигурирующая в утверждении § 31, представляет собой полуплоскость $X > B > 0$.

Как показал Каратеодори, допущение, что O является простой точкой границы, не существенно. Весьма далеко идущие исследования конформного отображения на границе

были проведены Альфорсом и Ферран-Лелонг. Относительно более поздних работ по этому вопросу читатель может обратиться к книге Островского и Гаттеньё из серии «Mémorial des sciences mathématiques».

Литературные ссылки

§ 26. Julia, 1; Nevanlinna, 2; Wolff, 2; Carathéodory, 2; Landau — Valiron, 1 Valiron, 9.
§ 27. Landau, 2.
§ 28. Montel, 2; Landau, 2.
§ 29. Carathéodory, 2.
§ 30. Valiron, 9.
§ 31. Valiron, 9, 11.
§ 32. Valiron, 9; Carathéodory, 2; Ahlfors, 1; Ferrand-Lelong 1, 2; Ostrowski et Gattegno, 1.

ГЛАВА V

ФУНКЦИИ ФАТУ

§ 33. Рациональные функции с основным инвариантным кругом. В своих исследованиях об итерации рациональных дробей Фату детально изучил частный случай рациональных дробей с основным инвариантным кругом, что приводит к замечательным результатам. В заданном круге, например $|z| \leqslant 1$, Фату рассматривает рациональную дробь

$$Z = R(z)$$

такую, что установленное таким образом соответствие между z и Z ставит в соответствие каждой внутренней точке круга внутреннюю точку, а каждой точке z окружности $|z| = 1$ точку этой же окружности. Следовательно, должны выполняться соотношения $|Z| < 1$, если $|z| < 1$, и $|Z| = 1$, если $|z| = 1$. Из этого вытекает, что $R(z)$ не имеет полюсов внутри круга и на окружности $|z| = 1$, значит, $R(z)$—голоморфна при $|z| \leqslant 1$. Если бы $R(z)$ не обращалась в нуль в круге $|z| < 1$, то $\frac{1}{R(z)}$ была бы голоморфной в круге $|z| < 1$ и равной по модулю единице на окружности $|z| = 1$, и мы имели бы одновременно

$$|R(z)| \leqslant 1, \quad \left|\frac{1}{R(z)}\right| \leqslant 1$$

при $|z| \leqslant 1$, следовательно,

$$|R(z)| = 1, \quad |z| \leqslant 1,$$

и $R(z)$ представляла бы собой постоянную, по модулю равную единице. Итак, $R(z)$ должна иметь нули в круге $z| < 1$; она может иметь в начале координат нуль кратности q

и $m-q$ нулей, отличных от нуля, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-q}$ в этом круге. Тогда функция

$$R_1(z)=\mu z^q \prod_{p=1}^{m-q} \frac{z-\alpha_p}{1-\bar{\alpha}_p z}, \quad \mu=\text{const} \tag{1}$$

имеет те же нули, что и $R(z)$. (Разумеется, некоторые из чисел α_p могут совпадать между собой.) Так как при $|z|=1$ каждый множитель, фигурирующий в произведении (1), по модулю равен единице, то мы видим, что если $|\mu|=1$, то $|R_1(z)|=1$ при $|z|=1$. Следовательно, отношение $R(z)/R_1(z)$, которое голоморфно при $|z|<1$, не имеет уже нулей в круге $|z|<1$, а модуль этого отношения равен единице на окружности $|z|=1$, так что оно представляет собой постоянную, модуль которой равен единице. Отсюда вытекает, что $R(z)$ должно иметь вид (1), то есть

$$R(z)=\mu z^q \prod_{p=1}^{m-q} \frac{z-\alpha_p}{1-\bar{\alpha}_p z}, \quad |\mu|=1. \tag{2}$$

Это и есть общий вид функций Фату.

§ 34. Двойные или неподвижные точки. Если дано в общем виде аналитическое отображение $Z=f(z)$, то такие точки z, которые совпадают со своими образами, то есть такие, для которых $Z=z$, называют *двойными точками или неподвижными точками, или инвариантными точками*; они определяются уравнением

$$f(z)=z.$$

Если z_0 является корнем этого уравнения, если z_0 — конечная точка и если $f(z)$ голоморфна в z_0, то можно эту точку перевести в начало координат, положив $z=z_0+\zeta$. Двойной точкой тогда будет $\zeta=0$, а образом z будет точка $Z=z_0+\zeta_1$. Для ζ, близких к нулю, имеем:

$$\zeta_1=f(z_0+\zeta)-z_0=\zeta s+\frac{1}{2}\zeta^2 f''(z_0)+\ldots,$$

где

$$s=f'(z_0).$$

В окрестности точки $\zeta = 0$ отображение эквивалентно линейному преобразованию

$$\zeta_1 = s\zeta,$$

если $s \neq 0$. Если мы будем итерировать преобразование, рассматривая точку z_2 — образ точки z_1, затем точку z_3 — образ точки z_2 и т. д., что эквивалентно тому, чтобы сначала взять точку ζ_2 — образ точки ζ_1, затем точку ζ_3 — образ точки ζ_2 и т. д., то для малых значений ζ будем иметь:

$$\zeta_1 = s\zeta + \ldots, \quad \zeta_2 = s^2\zeta + \ldots, \quad \zeta_p = s^p\zeta + \ldots$$

Мы видим, что при $|s| < 1$ последовательные преобразования ζ, которые будем называть *последующими членами итерации* ζ, приближаются к двойной точке $\zeta = 0$; в этом случае говорят, что эта точка является *притягивающей*. Если $|s| > 1$, то последующие члены итерации ζ стремятся удалиться от двойной точки; тогда эта двойная точка называется *отталкивающей*. Если $|s| = 1$, то говорят, что двойная точка является *безразличной*. Например, если имеем точно $\zeta_1 = s\zeta$ при $|s| = 1$, то последующий член итерации ζ остается на окружности, центр которой лежит в нуле и которая проходит через точку ζ; последующий член итерации вращается по этой окружности. Итак, двойная точка z_0 преобразования $Z = f(z)$ характеризуется значением $s = f'(z_0)$, которое будем называть множителем двойной точки.

Могут представиться три различных случая:

$|s| < 1$ — *притягивающая* двойная точка,

$|s| > 1$ — *отталкивающая* двойная точка,

$|s| = 1$ — *безразличная* двойная точка.

Допустим, что в плоскостях z и Z осуществляется одно и то же взаимно однозначное конформное отображение вокруг двойной точки z_0; пусть $z = \Phi(u)$, $Z = \Phi(U)$, причем z_0 получается при $u = u_0$, т. е. $z_0 = \Phi(u_0)$. Обозначим через $\Phi_{-1}(v)$ функцию, обратную к $v = \Phi(u)$, которая при $u = u_0$ принимает значение $v = \Phi(u_0) = z_0$. В окрестности точки u_0 функция $Z = f(z)$ принимает вид

$$\Phi(U) = f(\Phi(u))$$

или

$$U = \Phi_{-1}[f(\Phi(u))].$$

Двойной точке z_0 соответствует двойная точка u_0 [так как

$$\Phi_{-1}[f(\Phi(u_0))] = u_0,$$

поскольку $f(z_0) = z_0$, $z_0 = \Phi(u_0)$]. Множитель в точке u_0 равен

$$\Phi'_{-1}(f(z_0)) \cdot f'(z_0) \cdot \Phi'(u_0) = f'(z_0).$$

Двойные точки преобразовались в двойные точки с тем же множителем.

§ 35. Два рода рациональных подстановок с основным инвариантным кругом. Двойные точки преобразования или подстановки $Z = R(z)$, где $R(z)$ — рациональная дробь Фату вида (2), определяются равенством

$$R(z) = z.$$

Следует различать два случая: когда существуют двойные точки, расположенные внутри основного круга Γ, $|z| = 1$, и когда таких точек внутри Γ нет. В первом случае Фату называет подстановку подстановкой *первого рода*, во втором — подстановкой *второго рода*.

Если имеет место первый случай и если z_0 является двойной точкой, лежащей внутри Γ, то можно с помощью конформного отображения

$$\zeta = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

переводящего внутренность круга Γ в себя и примененного к z и Z, перевести эту двойную точку в начало координат, не изменив ее множителя. Сохраняя за переменной обозначение z, будем иметь рациональную подстановку

$$Z = R(z),$$

где $R(z)$ вида (2) с $q \geqslant 1$. Начало координат — двойная точка с множителем $R'(0)$, который при $q > 1$ равен нулю, а при $q = 1$ равен

$$\mu \prod_{p=1}^{m-1} (-\alpha_p)$$

и по модулю меньше чем единица. Бесконечно удаленная точка является также двойной точкой, так как $|R(z)|$

стремится к бесконечности вместе с $|z|$. К тому же, так как преобразование $(z, \frac{1}{z})$, равно как и $(Z, \frac{1}{Z})$, переводят внешность Γ во внутренность, не меняя вида подстановки, то это показывает, что бесконечно удаленная точка является притягивающей, как и точка $z=0$.

Остальные двойные точки определяются равенством $R(z)=z$. Но так как по лемме Шварца $|R(z)|<|z|$ при $|z|<1$, $z\neq 0$ (предполагая, что $m>1$), то внутри Γ, кроме $z=0$, нет иных двойных точек и в силу вышеприведенных рассуждений двойных точек нет также на конечном расстоянии вне окружности Γ. Итак, мы пришли к следующему результату.

Подстановки первого рода приводятся к подстановкам, имеющим двойные притягивающие точки в нуле и в бесконечности. Остальные двойные точки лежат на основной окружности Γ. *Функция* $R(z)$ *имеет вид* (2), *причем* $q\geqslant 1$.

Из предыдущего следует, что *у подстановок второго рода все двойные точки лежат на окружности* Γ. *Функция* $R(z)$ *имеет вид* (2), *причем* $q=0$.

§ 36. Подстановки первого рода. Мы предположим, что $m>1$, так как случай подстановки $R(z)=\mu z$, $|\mu|=1$ рассматривается без труда и не представляет интереса. Если $m=q$, то $R(z)=\mu z^q$, $q>1$, $|\mu|=1$, а двойные точки, расположенные на Γ, определяются из равенства $\mu z^{q-1}=1$, их множители равны $q\mu z^{q-1}$ и, следовательно, равны q, т. е. действительному числу, большему, чем единица. Значит, все двойные точки, лежащие на Γ, являются отталкивающими.

В общем случае, когда $m>1$, а $q<m$, имеем:

$$\frac{R'(z)}{R(z)}=\frac{1}{z}\left[q+\sum_{p=1}^{m-q}\frac{z}{z-\alpha_p}+\frac{\bar{\alpha}_p z}{1-\bar{\alpha}_p z}\right].$$

Если $z=e^{i\varphi}$, $\alpha_p=r_p e^{i\varphi}$, то

$$\frac{z}{z-\alpha_p}+\frac{\bar{\alpha}_p z}{1-\bar{\alpha}_p z}=\frac{z(1-r_p^2)}{-\alpha_p+z(1+r_p^2)-\bar{\alpha}_p z^2},$$

и, деля числитель и знаменатель на z, получаем:

$$\frac{1-r_p^2}{1+r_p^2-2r_p\cos(\varphi-\varphi_p)} \geqslant \frac{1-r_p}{1+r_p}.$$

Следовательно, при $|z|=1$ имеем:

$$|R'(z)| > q+\sum_1^{m-q}\frac{1-r_p}{1+r_p} > q.$$

Двойные точки, расположенные на Г, все являются простыми (все корни уравнения $R(z)-z=0$ будут простыми, так как $R'(z)$ не может равняться единице) и отталкивающими. Итак, *при любых подстановках первого рода двойные точки, расположенные на* Г, *являются отталкивающими* (и непременно простыми).

Рассмотрим последовательные члены итерации точки z, внутренней относительно Г. Положим:

$$R_1(z)\equiv R(z),$$
$$R_2(z)\equiv R(R_1(z)),\ \ldots,\quad R_n(z)\equiv R(R_{n-1}(z)),\ \ldots;$$

последующий член порядка n будет:

$$z_n=R_n(z).$$

Допустим, что $m>q$ и что $|z|\leqslant k<1$. При $|z|=k$ будем иметь:

$$|R(z)|\leqslant|z|^qA,$$

где

$$A=\max_{|z|=k}\left|\prod_1^{m-q}\right|,$$

под знаком модуля в правой части стоит произведение, фигурирующее в определении $R(z)$; очевидно, $A<1$. Стало быть, тем более

$$|R(z)|\leqslant|z|A,\quad A<1,$$

и, следовательно,

$$|R_n(z)|\leqslant A|R_{n-1}(z)|\leqslant\ldots\leqslant A^nk,\quad A<1.$$

Итак, имеем:

Если $|z|\leqslant k<1$, *то итерации* $R_n(z)$ *сходятся равномерно к нулю, когда* n *стремится к бесконечности.*

Непосредственно заключаем, что то же обстоятельство имеет место при $q = m$.

Аналогичный результат получаем относительно сходимости $R_n(z)$ к бесконечности, если предположим, что $|z| \geqslant k' > 1$.

§ 37. Подстановки первого рода первого типа. Функция Кёнигса. Подстановками первого типа первого рода называют те подстановки, для которых $q = 1$, а множитель s двойной точки в начале координат отличен от нуля.

При этих условиях функция

$$\frac{R(z)}{sz} = 1 + c_2 z + c_3 z^2 + \ldots$$

голоморфна при $|z| \leqslant 1$ и в этом круге

$$|c_2 + c_3 z + \ldots| \leqslant M,$$

так что

$$\left| \frac{R(z)}{sz} - 1 \right| \leqslant M|z|.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\frac{R_n(z)}{s^n z} = \frac{R_n(z)}{sR_{n-1}(z)} \frac{R_{n-1}(z)}{sR_{n-2}(z)} \cdots \frac{R_2(z)}{sR(z)} \frac{R(z)}{sz}$$

и допустим, что $|z| \leqslant k < 1$. Тогда в силу результатов § 36 имеем:

$$|R_p(z)| \leqslant A^p k$$

и, следовательно,

$$\left| \frac{R_p(z)}{sR_{p-1}(z)} - 1 \right| < kMA^{p-1}, \quad A < 1.$$

Правая часть в последнем неравенстве представляет собой общий член сходящегося числового ряда. Из этого вытекает, что равномерно сходится бесконечное произведение

$$\prod_{p=1}^{\infty} \frac{R_p(z)}{sR_{p-1}(z)},$$

предел которого представляет собой функцию, голоморфную при $|z| \leqslant k$, каково бы ни было $k < 1$. Так как при $z = 0$ каждый член произведения равен единице, то этот предел равен единице, когда $z = 0$.

Следовательно, когда n стремится к бесконечности, отношение

$$\frac{R_n(z)}{s^n}$$

при $|z|<1$ равномерно стремится к пределу, являющемуся голоморфной функцией, производная которой равна единице в точке $z=0$. Эта предельная функция *называется функцией Кёнигса*:

$$K(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{R_n(z)}{s^n},\quad K'(0)=1.$$

Так как

$$\frac{R_{n+1}(z)}{s^{n+1}}=\frac{R_n(R(z))}{ss^n}\to\frac{1}{s}K(R(z)),$$

то видно, что *функция Кёнигса является решением функционального уравнения Шрёдера*:

$$K(R(z))\equiv sK(z),\quad |z|<1. \tag{3}$$

Из этого следует, что

$$K(R_n(z))\equiv s^nK(z).$$

Поскольку $K'(0)=1$, то функция, обратная к функции $Z=K(z)$, равная нулю при $Z=0$, голоморфна в некотором круге $|Z|<\rho$. Если $z=K_{-1}(Z)$ и есть эта обратная функция, то имеем:

$$R_n(z)=K_{-1}[s^nK(z)].$$

Исходя из этого равенства, можно определить дробные и даже иррациональные итерации. Итерация порядка α будет определяться соотношением

$$K_{-1}[s^\alpha K(z)].$$

В общем случае это будет многозначная функция. Можно было бы предположить даже, что α комплексное.

Если положим одновременно

$$Z=K(z),\quad Z_1=K(R(z)),$$

то подстановка $(z, R(z))$ преобразуется в гомотетию и вращение

$$Z_1=sZ.$$

В этой приведенной форме мероморфные функции, остающиеся инвариантными при подстановке, представляют собой

локсодромические функции *), которые связаны с теорией эллиптических функций (см. Valiron 1, глава XVI), и могут там образовывать базис. Если $\Phi(Z)$ является произвольной локсодромической функцией, инвариантной относительно замены Z на sZ, то $\Phi[R(z)]$ инвариантна относительно подстановки $(z, R(z))$. Для этих инвариантных функций начало координат является особой точкой — пределом полюсов.

§ 38. О функциях, обратных к рациональным дробям. Пусть в общем виде

$$Z = R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

означает рациональную дробь, а P и Q — многочлены, не имеющие общих нулей; степени этих многочленов примем соответственно равными p и q. Степенью m этой дроби называют большее из чисел p и q.

Уравнение

$$P(z) - ZQ(z) = 0 \tag{4}$$

относительно z имеет m различных корней, если только для z, являющегося корнем (4), не выполняется равенство $P'(z) - ZQ'(z) = 0$, т. е. $P'Q - PQ' = 0$. Если $p \neq q$, то это последнее уравнение будет степени $p + q - 1$, а бесконечно удаленная точка является кратной точкой (нулем или полюсом) порядка $|p - q|$ рассматриваемой дроби $R(z)$, так что она засчитывается $|p - q| - 1$ раз. Следовательно, есть всего $p + q - 1 + |p - q| - 1 = 2m - 2$ значений Z конечных или бесконечных, для которых уравнение (4) относительно z имеет совпадающие корни. Легко видеть, что то же самое обстоятельство имеет место и в том случае, когда $p = q = m$.

Если $z', z'', \ldots, z^{(2m-2)}$ и есть эти значения z, а

$$Z', Z'', \ldots, Z^{(2m-2)}$$

соответствующие значения Z, определяемые из (4), то эти точки $Z^{(j)}$ являются алгебраическими критическими точками функции $z = R_{-1}(Z)$, обратной к $Z = R(z)$. Имеем следующий результат:

---

*) По определению функция $f(z)$, мероморфная на конечных z, $z \neq 0$, называется локсодромической, если она инвариантна относительно подстановки (z, sz), $|s| \neq 1$. (*Прим. ред.*)

Если Δ — односвязная ограниченная область плоскости Z, не содержащая внутри себя точек $Z^{(j)}$, равно как и точки $R(\infty)$, то m решений уравнения (4) *голоморфны в Δ, и разность любых двух из этих решений не обращается в нуль в Δ.*

Это очевидно, если Δ является кругом, так как в центре этого круга и в каждой из его точек m значений $R_{-1}(Z)$ все различны, и эти различные функции не имеют никаких особенностей в Δ, радиус голоморфности в центре этого круга и есть радиус Δ. Если область Δ не есть круг, то можно ее отобразить конформно на круг, а затем применить то, что было только что сказано.

Следует добавить, что все m ветвей обратной функции в Δ, которые голоморфны в этой области, являются в ней также однолистными, так как они представляют собой ветви функции, обратной к однозначной функции.

§ 39. Функция Кёнигса в окрестности окружности Г. Вернемся к случаю функции $R(z)$ с инвариантным основным кругом, причем допустим, что эта функция первого рода и первого типа. Если z лежит внутри Г, то точки z_{-1} такие, что $R(z_{-1})=z$ являются *прообразами* точки z. Таких точек есть m, причем все они расположены внутри Г, так как неравенство $|R(z_{-1})|<1$ может иметь место только в Г. Каждый прообраз z_{-1} в свою очередь имеет m прообразов, которые обозначим через z_{-2} — это прообразы порядка 2 точки z, число их равно m^2. Точно так же точка z имеет m^3 прообразов порядка 3, причем все они лежат в Г; будем их обозначать z_{-3}. Последующим членом итерации третьего порядка какого-либо из этих m^3 прообразов порядка 3 будет точка z. Аналогично приходим к m^n прообразам точки z порядка n, которые обозначаем z_{-n}. Если $R_{-1}(z)$ означает функцию, обратную к $R(z)$, то $z_{-1}=R_{-1}(z)$, далее, $z_{-2}=R_{-1}[R_{-1}(z)]$, которую обозначим через $R_{-2}(z)$, — это функция, обратная к $R_2(z)$, и т. д. Так как $|z_1|<|z|$, если $z\neq 0$, то $|z_{-1}|>|z|$ при условии, что $z\neq 0$. Прообраз z_{-n} приближается, следовательно, к Г и стремится к окружности Г, когда n стремится к бесконечности, так как если бы $|z_{-n}|\leqslant k<1$, то последующие члены итерации порядка n точки z_{-n}, если только n достаточно велико, были бы сколь угодно близки к нулю,

И лишь единственная точка $z=0$ имеет своим прообразом, каково бы ни было n, точку z_{-n}, которая совпадает с началом координат.

Исследуем сейчас сходимость точек z_{-n} к Г. Мы видели, что на Г выполняется неравенство $|R'(z)|>1$. Следовательно, можно определить такое кольцо $1-\beta\leqslant|z|\leqslant 1+\beta$, $\beta>0$, в котором $R(z)$ голоморфна и $|R'(z)|>\delta>1$. Когда точка z описывает окружность C, $|z|=1-\beta$, в положительном направлении, точка z_{-1} принадлежит кольцу (C, Γ), ограниченному окружностями C и Г, и описывает замкнутую алгебраическую кривую C_{-1}. Имеем $z=R(z_{-1})$, причем все корни этого уравнения относительно z_{-1} будут простыми, поскольку $R'(z_{-1})\neq 0$; следовательно, кривая C_{-1} не имеет особенностей и является простой кривой, которая разделена на m дуг посредством m решений уравнения $R(z_{-1})=z$, соответствующих одному и тому же заданному z на C, причем каждая из этих частичных дуг имеет своим образом при отображении $R(z_{-1})=z$ всю окружность C. Если сделать кольцо (C, Γ) односвязным, рассекая его вдоль кривой H, соединяющей некоторую точку окружности C с некоторой точкой окружности Г и разрезающей кривую C_{-1} в одной-единственной точке, то все m ветвей функции $R_{-1}(z)$ будут голоморфными в области Δ', таким образом полученной в части (C, Γ), заключенной между C_{-1} и Г. Каждая из m ветвей функции $R_{-1}(z)$ отображает конформно и просто область Δ' на область, ограниченную дугой окружности Г, дугой кривой C_{-2}, являющейся прообразом C_{-1}, и двумя дугами, представляющими собой прообраз H. Кривая C_{-2} принадлежит к области, ограниченной посредством C_{-1} и Г, потому что последующим членом итерации кривой C_{-2} будет кривая C_{-1}, которая принадлежит кольцу (C, Γ). Эти m областей Δ'_{-1}, являющиеся прообразами области Δ', попарно не пересекаются и примыкают друг к другу, следуя вдоль Г. Каждая из этих m областей имеет в качестве последующего члена итерации область Δ'. Обозначим через Δ_{-1} те части области Δ'_{-1}, которые заключены между кривой C_{-2} и ее прообразом C_{-3}; это m областей, примыкающих друг к другу между C_{-2} и C_{-3}, и образующих в совокупности область, ограниченную линиями C_{-2} и C_{-3}. Каждая из этих областей Δ_{-1} имеет последующим членом итерации область Δ, представляющую собой ту часть области Δ', которая

содержится между C_{-1} и C_{-2}; это прообразы самого кольца (C_{-1}, C_{-2}). Точно так же, прообразами Δ_{-1} будут m^2 областей Δ_{-2}, примыкающих друг к другу внутри кривой C_{-3} и ее прообраза C_{-4}, причем C_{-3} принадлежит к области, ограниченной посредством кривой C_{-2}, и окружности Γ. Всякая область Δ_{-2} имеет первым членом итерации Δ_{-1}, а вторым членом итерации Δ. Также рассуждаем и далее. Область Δ имеет m^p прообразов порядка p, которые представляют собой попарно непересекающиеся области, заключенные в своего рода кольце (C_{-p-1}, C_{-p-2}), ограниченном прообразами порядка p кривых C_{-1} и C_{-2}.

При конформном отображении области Δ на область Δ_{-1} отношение подобия не превосходит числа $\frac{1}{\delta}$, максимума $\frac{1}{|R'(z)|}$, причем

$$d = \frac{1}{\delta} < 1.$$

Если L означает бо́льшую из длин двух кривых C_{-1} и C_{-2}, то линейные размеры каждой из областей Δ_{-1} не более чем Ld, размеры областей Δ_{-2} не более чем Ld^2, соответственно размеры областей Δ_{-p} не более чем Ld^p. Так как область Δ' имеет в качестве прообраза порядка p область, ограниченную кривой C_{-p-1} и окружностью Γ, то расстояние от некоторой точки кривой C_{-p} до окружности Γ не превосходит Ld^p. Прообразы Δ_{-p} области Δ являются, следовательно, областями, расположенными от Γ на расстоянии, не превосходящем Ld^p, и каждая из этих m^p областей содержится в круге радиуса, не превосходящего ωd^p, где ω — фиксированное число. Каждая точка окружности Γ является предельной точкой областей Δ_{-p}, когда p стремится к бесконечности.

В области Δ, взятой вместе с ее границей, функция Кёнигса $K(z)$ имеет нули, которые при подходящем выборе окружности C и кривой H, превращающей область Δ' в односвязную, можно предполагать лежащими внутри Δ. Действительно, в силу тождества (3) функция $K(z)$, равная нулю при $z=0$, обращается в нуль в нулях функции $R(z)$, следовательно, также в ненулевых прообразах нулей $R(z)$; эти прообразы стремятся к Γ и, значит, $K(z)$ имеет нули в кольце (C, Γ), следовательно, в Δ, а также в ее прообра-

зах Δ_{-p} порядка $p\,(p=1, 2, \ldots)$, так как

$$K(R_{-p}(z)) = \frac{1}{s^p} K(z). \tag{5}$$

Из этого прежде всего следует, что каждая точка окружности Γ является предельной точкой нулей функции $K(z)$. Таким образом, основная окружность Γ является естественной границей функции $K(z)$. Более того, если мы окружим нули $K(z)$, расположенные в Δ, маленькими кружками радиусом ε, с центрами в этих нулях, причем эти кружки будут попарно не пересекающимися и лежащими в Δ, то вне их в Δ и на ее границе справедливо неравенство $|K(z)| > \Omega > 0$. Учитывая равенство (5), в каждой области Δ_{-p} вне областей, являющихся прообразами порядка этих маленьких кругов, имеем:

$$|K(z)| > \frac{\Omega}{|s|^p}, \quad |s| < 1.$$

Итак, если точка z стремится к окружности Γ, оставаясь вне маленьких областей, размеры которых в каждом Δ_{-p} не превосходят $\varepsilon\omega d^p$, то $|K(z)|$ стремится к бесконечности.

Фату уточнил размеры областей, подлежащих исключению, вне которых $K(z)$ стремится к бесконечности при приближении к Γ. Рассмотрим снова всю область Δ', образованную кольцом (C_{-1}, Γ), разрезанным вдоль H. Преобразование $z_{-1} = R_{-1}(z)$ отображает область Δ' на m попарно непересекающихся областей Δ'_{-1}, примыкающих друг к другу и примыкающих к Γ; эти m областей и их границы покрывают область, ограниченную посредством C_{-2} и Γ. Различные ветви $R_{-1}(z)$ голоморфны и однолистны в области Δ'_{-1}, и если разделить каждую из этих областей на две с помощью прообраза линии, аналогичной H, то $R_{-1}(z)$ будут еще голоморфны и однолистны в областях, заключающих внутри себя эти подразделенные области (так как $R_{-1}(z)$ голоморфна на Γ). Следовательно, можно применить теорему Кёбе из § 18 к двум кривым каждой области Δ'_{-1}: отношение длин этих кривых будет равно отношению длин их последующих членов, умноженному на некоторое положительное число, заключенное между двумя конечными положительными постоянными $\frac{1}{\lambda}$ и λ. В частности, если нули

функции $K(z)$, принадлежащие Δ, заключены в круги радиусом ε с центрами в этих нулях, то отношение общей длины этих окружностей к длине окружности Γ не более чем

$$\frac{2\pi m\varepsilon}{2\pi} = m\varepsilon;$$

общая длина линий, являющихся прообразами порядка 1 этих окружностей, будет не более чем $2\pi m\varepsilon\lambda$, так как области Δ_{-1} содержатся в областях Δ'_{-1}, совокупность которых примыкает к Γ. Аналогично, прообразы порядка p этих окружностей, заключенные в областях Δ_{-p}, будут иметь общую длину, которая не превосходит $2\pi m\varepsilon_p\lambda$, если радиусы окружностей с центрами в нулях $K(z)$ в области Δ равны ε_p. Можно выбрать эти числа ε_p так, чтобы ряд

$$\sum \varepsilon_p \tag{6}$$

сходился, так что общая сумма длин кривых, окружающих нули функции $K(z)$, которые лежат между C_{-q} и Γ, будет сколь угодно мала, если q взято достаточно большим.

Каждый нуль функции $K(z)$, принадлежащий области Δ, имеет кратность, которая не превосходит некоторого определенного числа μ, стало быть, вне кругов радиусом ε с центрами в этих нулях в области Δ выполняется неравенство

$$|K(z)| > \varepsilon^{\mu}\Omega_1,$$

где Ω_1 — фиксированное число, не зависящее от ε. Следовательно, в областях Δ_{-p} вне прообразов порядка p окружностей радиусом ε_p имеем:

$$|K(z)| > \Omega_1 \frac{\varepsilon_p^{\mu}}{|s|^p}.$$

Достаточно положить, например,

$$\varepsilon_p^{\mu} = |s|^{\frac{p}{2}},$$

чтобы $|K(z)|$ стремился к бесконечности, когда z стремится к Γ, оставаясь вне кривых, окружающих нули, причем ряд (6) будет сходящимся. Мы доказали, таким образом, следующую теорему Фату:

Функция Кёнигса $K(z)$, связанная с функцией $R(z)$ с инвариантным основным кругом, имеющей вид

$$R(z)=\mu z\prod_{p=1}^{m-1}\frac{z-\alpha_p}{1-\bar{\alpha}_p z},\quad |\mu|=1,\quad |\alpha_p|<1,$$

возрастает по модулю до бесконечности, когда точка z стремится к основному кругу Г, оставаясь вне кривых, окружающих нули $K(z)$, причем общая длина этих кривых в кольце

$$1-\gamma<|z|<1$$

сколь угодно мала, если только γ выбрано достаточно малым. Это стремление к бесконечности равномерно.

Из этого следует, что существуют радиусы $\varphi=\arg z=$ $=\text{const}$, на которых функция $|K(z)|$ стремится к бесконечности; радиусы φ, на которых это обстоятельство не имеет места, образуют множество меры нуль, плотное, однако, в любом интервале*). Но нельзя утверждать, что существуют окружности с центром в начале координат, радиусы которых стремились бы к единице, и на которых $|K(z)|$ стремился бы к бесконечности.

Производная $K'(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$K'(R(z))\,R'(z)\equiv sK'(z),$$

которое выводится из (3). И поскольку $|R'(z)|$ остается заключенным между двумя определенными положительными числами в кольце, содержащем Г, то мы видим, что $K'(z)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам $K(z)$, а именно: $|K'(z)|$ стремится к бесконечности, когда $|z|$ стремится к единице, оставаясь вне маленьких областей, окружающих нули. В некоторых случаях области, подлежащие исключению для функции $K(z)$ и для функции $K'(z)$, не имеют общих точек, что доказывает существование функции $K(z)$, голоморфной при $|z|<1$ и такой, что

$$|K(z)|+|K'(z)|$$

стремится к бесконечности равномерно, когда $|z|$ стремится к единице.

---

*) См. также цитированную на стр. 84 монографию И. И. Привалова, гл. IV, §§ 5—7. (*Прим. ред.*)

§ 40. Подстановки первого рода второго типа. Функция Бётчера. Подстановки первого рода второго типа соответствуют случаю $q > 1$ и определяются соотношением

$$R(z) = \mu z^q \prod_{p=1}^{m-q} \frac{z - \alpha_p}{1 - z\bar{\alpha}_p}, \quad |\mu| = 1, \quad q > 1.$$

Множитель неподвижной точки в начале координат равен нулю. Простейший случай — это, когда $q = m$; тогда

$$R(z) = \mu z^m, \quad m \geqslant 2, \quad |\mu| = 1.$$

В общем случае, когда $q > m$, то, как мы уже видели в § 36, при n, стремящемся к бесконечности, итерация $R_n(z)$ стремится равномерно к нулю, если $|z| \leqslant k$, где k — произвольное положительное число, меньшее чем единица. Мы имеем:

$$|z_n| = |R_n(z)| \leqslant A|R_{n-1}(z)| \leqslant A^n|z|, \quad A < 1. \tag{7}$$

Можем написать

$$z_1 = R(z) = \mu z^q \prod_{p=1}^{m-q} = sz^q(1 + c_1 z + \ldots),$$

$$s = \mu \prod_{p=1}^{m-q} (-\alpha_p), \quad |s| < 1.$$

Функция $R(z)$ не обращается в нуль нигде, кроме как в начале координат, если $|z| < \Lambda_1$, где Λ_1 есть наименьшее из чисел $|\alpha_p|$. При этих условиях можем написать:

$$z_1 = \left[\sigma z\left(1 + \frac{c_1}{q} z + \ldots\right)\right]^q, \quad \sigma = s^{\frac{1}{q}},$$

где функция

$$1 + \frac{c_1}{q} z + \ldots$$

голоморфна и имеет вид

$$1 + z\,\theta(z),$$

причем $|\theta(z)|$ ограничен определенным числом M. Если $|z| \leqslant k$, то неравенство (7) показывает, что $|z_n| < \Lambda_1$, начиная

с достаточно больших n. Тогда при $n > p$ и p достаточно большом имеем:

$$z_n = [\sigma z_{n-1}(1 + z_{n-1}\theta(z_{n-1}))]^q,$$
$$z_{n-1} = [\sigma z_{n-2}(1 + z_{n-2}\theta(z_{n-2}))]^q,$$

и, следовательно,

$$z_n = [\sigma z_{n-2}(1 + z_{n-2}\theta(z_{n-2}))]^{q^2}[1 + z_{n-1}\theta(z_{n-1})]^q \sigma^q,$$
$$z_n = [\sigma z_p(1 + z_p\theta(z_p))]^{q^{n-p}}[1 + z_{p+1}\theta(z_{p+1})]^{q^{n-p-1}} \ldots$$
$$\ldots (1 + z_{n-1}\theta(z_{n-1}))^q \sigma^{q^{n-p-1}+\ldots+q}.$$

Ряд с общим членом

$$\frac{1}{q^m} \ln [1 + z_m \theta(z_m)]$$

сходится равномерно благодаря неравенствам (7). В окрестности начала координат имеем:

$$R_n(z) = s^{1+q+\ldots+q^{n-1}} z^{q^n}(1 + \ldots)$$

или

$$R_n(z) s^{\frac{1}{q-1}} = \left(z s^{\frac{1}{q-1}}\right)^{q^n}(1 + \ldots).$$

Следовательно, беря определенное значение $s^{\frac{1}{q-1}}$, видим, что ветвь функции

$$\sqrt[q^n]{R_n(z) s^{\frac{1}{q-1}}},$$

разложение которой в окрестности начала координат начинается с члена

$$z s^{\frac{1}{q-1}},$$

сходится равномерно при $|z| \leqslant k < 1$ и n, стремящемся к бесконечности, к предельной функции, которая голоморфна в круге $|z| < 1$. Эта сходимость была впервые установлена Бётчером. Мы назовем *функцией Бётчера* функцию

$$B(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[q^n]{R_n(z)}}{s^{\frac{1}{q-1}}} = z(1 + \ldots). \tag{8}$$

Очевидно, имеем:

$$B(R(z)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[q^n]{R_{n+1}(z)}}{s^{\frac{1}{q-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[q^{n+1}]{R_{n+1}}\right)^q}{s^{\frac{1}{q-1}}} = s(B(z))^q. \quad (9)$$

Следовательно, определенная таким образом функция Бётчера является решением функционального уравнения

$$\varphi(R(z)) \equiv s[\varphi(z)]^q, \quad (10)$$

где $R(z)$ имеет указанный выше вид и

$$s = \lim_{z=0} \frac{R(z)}{z^q}, \quad |s| < 1.$$

Уравнение (10) будем называть *уравнением Бётчера*. Уравнение

$$\varphi(R(z) \equiv \lambda[\varphi(z)]^q,$$

где λ — постоянная, отличная от s, приводится к уравнению (10) заменой φ через $\mu\varphi$, где μ определяется из равенства $\lambda\mu^{q-1} = s$.

Функция Бётчера играет в случае, когда множитель неподвижной точки равен нулю, ту же роль, что функция Кёнигса в случае ненулевого множителя меньшего по модулю чем единица. Она однолистна в некотором круге с центром в начале координат, и если положим одновременно

$$Z = B(z), \quad Z_1 = B(R(z)),$$

то подстановка $(z, R(z))$ принимает в начале координат каноническую форму

$$Z_1 = sZ^q.$$

Но изучить поведение функции $B(z)$ в окрестности основной окружности Γ не так легко, как поведение функции $K(z)$. Исследование прообразов z_{-n} точки z, а также прообразов кривых и областей, которое вытекает из неравенства $|R'(z)| > q$, справедливого на окружности $|z| = 1$ и, следовательно, также в ее окрестности, остается прежним. Из этого же неравенства выводим еще, что прообразы нулей функции $R(z)$, отличных от $z = 0$, сходятся к Γ и что каждая точка окружности Γ является пределом этих

нулей; эти прообразы являются нулями функции $B(z)$, так как в силу (9) имеем:

$$B(z_{-1}) = \left(\frac{B(z)}{s}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{11}$$

Таким образом, все точки окружности Г являются предельными точками нулей $B(z)$, следовательно, Г является естественной границей для функции $B(z)$, но из (11) уже нельзя заключить, что $B(z)$ стремится к бесконечности, когда z стремится к Г, оставаясь вне некоторых малых областей.

Литературные ссылки

§ 33. Fatou, 2.
§ 34. Koenigs, 1.
§§ 35, 36, 37, 38, 39, 40. Fatou, 2.

ГЛАВА VI

ИТЕРАЦИЯ ФУНКЦИЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ПОЛУПЛОСКОСТИ

§ 41. Семейство голоморфных функций, нормальное в данной области. В дальнейшем нам нужно будет использовать некоторые свойства нормальных семейств функций, введенных Монтелем. Мы напомним здесь лишь те предложения, которые будут нам необходимы, ограничиваясь случаем семейств голоморфных функций.

Если дано семейство $\mathfrak{F}$ функций $f(z)$, голоморфных в некоторой области D, то говорят, что это семейство нормально в D, если из всякой бесконечной последовательности функций $f_n(z)$ из $\mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность, которая равномерно стремится к пределу во всякой области D', целиком лежащей внутри D (т. е. D' вместе с ее границей F' принадлежит к D). Эта предельная функция может быть бесконечностью. Утверждение, что некоторая последовательность голоморфных в D' функций $f_m(z)$ сходится равномерно к бесконечности, эквивалентно утверждению, что последовательность $\frac{1}{f_m(z)}$ равномерно сходится к нулю.

Если предельная функция отлична от постоянной, конечной или бесконечной, то она является функцией $F(z)$, голоморфной в D (по теореме Вейерштрасса).

Среди различных критериев нормальности семейства простейшим является следующий, данный Монтелем и еще ранее Арцелá в несколько иной форме:

Функции $f(z)$, голоморфные в области D, которые ограничены в совокупности внутри D, образуют семейство, нормальное в D.

Утверждение, что функции $f(z)$ ограничены в совокупности внутри D, означает, что всякой области D', целиком

лежащей внутри D (т. е. D' вместе с ее границей F' принадлежит к D), соответствует такое число $M(D')$, что в D' выполняются неравенства $|f(z)| < M(D')$. В этом случае предельные функции являются или конечными постоянными, или функциями, голоморфными в D.

Из этого следует, что если функции $f(z)$ голоморфны в D, их значения принадлежат области Δ, дополнение которой содержит внутренние точки, то семейство нормально в D. Действительно, если точка ζ является внутренней к дополнению области Δ, то произвольная функция $f(z)$ из рассматриваемого семейства не принимает значения Z такого, что $|Z-\zeta| < \rho$ $(\rho > 0)$ и функции $\frac{1}{f(z)-\zeta}$ ограничены в их совокупности в D, следовательно, образуют нормальное семейство, стало быть, и $f(z)$ образуют нормальное семейство. (Мы допустили, что ζ конечна; если бы ζ была бесконечно удаленной точкой, то $f(z)$ были бы ограничены.)

Если последовательность $f_n(z)$ нормальна в D и если существует только одна-единственная предельная функция $F(z)$ для любой подпоследовательности, выделенной из этой последовательности, то последовательность $f_n(z)$ сходится равномерно к $F(z)$ во всякой области, целиком лежащей в D. Кроме того, пусть D односвязна (случай, к которому можно придти, если связность области D конечна), а $u(z)$ означает действительную часть функции $f(z)$, голоморфной в D и определенной с точностью до чисто мнимой аддитивной постоянной. Если $u(z)$ ограничены в совокупности внутри D, т. е. $|u(z)| < M(D')$ во всякой области D', целиком лежащей внутри D, то семейство нормально; из всякой последовательности функций $u(z)$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно в любой области D'. К тому же, если D односвязна и если $\Re f(z) = u(z)$, то модуль $e^{f(z)}$ ограничен.

§ 42. Функции, принадлежащие полуплоскости или кругу. Итерация. Мы будем говорить, что функция $Z = f(z)$, $z = x + iy$ принадлежит полуплоскости $x > 0$, если эта функция определена и голоморфна в этой полуплоскости и если значения Z этой функции имеют положительную действительную часть. Если мы отобразим полуплоскость $x > 0$ на круг $|\zeta| < 1$ так, чтобы некоторая произвольно выбранная

в полуплоскости точка z_0 отображалась в центр круга $\zeta=0$, то функция $f(z)$ преобразуется в $\Phi(\zeta)$, голоморфную при $|\zeta|<1$ и такую, что ее значения не превосходят по модулю единицы; мы будем говорить, что это функция, принадлежащая кругу. Исследование этого рода функций может быть проведено как в полуплоскости, так и в круге. Рациональные функции Фату с основным инвариантным кругом, изученные в главе V, представляют собой функции, принадлежащие кругу. Эти функции Фату входят в категорию функций, определяемых произведением

$$\mu z^q \prod_{p=1}^{\infty} \frac{z-\alpha_p}{1-z\bar{\alpha}_p}\mu_p, \quad |\mu|=1, \tag{1}$$

где μ_p — число, равное по модулю единице и такое, что

$$\mu_p\alpha_p=-|\alpha_p|.$$

Мы видим, что

$$\frac{z-\alpha_p}{1-z\bar{\alpha}_p}\mu_p=1-\frac{1-|\alpha_p|}{1-z\bar{\alpha}_p}\left(1+z\frac{|\alpha_p|}{\alpha_p}\right),$$

откуда следует, что бесконечное произведение в выражении (1) сходится при $|z|\leqslant k<1$, если сходится ряд

$$\sum(1-|\alpha_p|). \tag{2}$$

Выражение (1) является, следовательно, функцией голоморфной при $|z|<1$, и так как каждый член в произведении (1) равен по модулю единице при $|z|=1$, то это произведение принадлежит кругу $|z|<1$. Бесконечное произведение, фигурирующее в (1), было сначала использовано Пуанкаре в теории униформизации, затем Бляшке при исследовании ограниченных функций. Принято это произведение называть *произведением Бляшке*.

В случае, когда функция определена произведением Бляшке (1), она сохраняет круг $|z|<1$, но в других случаях может оказаться, что значения, принимаемые функцией, принадлежащей кругу, покрывают лишь часть этого круга.

Если $f(z)$ принадлежит полуплоскости $x>0$, то тем же свойством обладает последовательность ее итераций $f_n(z)$:

$$f_1(z)\equiv f(z),\ f_2(z)=f[f(z)],\ \ldots,\ f_n(z)=f[f_{n-1}(z)],\ldots$$

Совокупность этих функций, принимая значения, принадлежащие полуплоскости $x > 0$, образует нормальное семейство, и предельные функции сходящихся последовательностей принадлежат полуплоскости $x > 0$ или являются постоянными с положительной действительной частью, или, наконец, постоянной, равной бесконечности.

§ 43. Теорема Вольфа и Данжуа. Покажем прежде всего, что *если функция $f(z)$ не является дробно-линейной, то не может существовать предельной функции, которая не равнялась бы тождественно постоянной.*

Допустим, что некоторая последовательность, которую мы также будем обозначать через

$$f_n(z),\ n = n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_p,\ \ldots,$$

сходится равномерно к функции $F(z)$, отличной от постоянной. Тогда некоторая другая подпоследовательность будет сходиться к z. Действительно,

$$f_{n_{p+1}-n_p}(f_{n_p}(z)) \to F(z) \tag{3}$$

и можно извлечь из последовательности функций с индексами $n_{p+1} - n_p$ такую подпоследовательность, которая будет сходиться равномерно к некоторой функции $G(z)$, тождественно неравной постоянной, так как в противном случае левая часть (3) сходилась бы к постоянной. Стало быть, имеем:

$$G(F(z)) \equiv F(z)$$

и, следовательно, $G(z) \equiv z$.

Итак, допустим, что некоторая подпоследовательность $f_n(z)$, $n = n_q$, сходится равномерно к z; тогда

$$f_{n-1}(f(z)) = f(f_{n-1}(z)) \to z,$$

и последовательность $f_{n-1}(z)$ сходится равномерно к функции, обратной к $f(z)$. Эта обратная функция будет однозначной, определенной при $x > 0$, и принимаемые ею значения будут иметь положительную действительную часть. Таким образом, функция $Z = f(z)$ однолистна при $x > 0$ и отображает эту полуплоскость на себя, следовательно, она будет дробно-линейной:

$$\frac{Z-\beta}{Z+\bar{\beta}} = \lambda\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}},\quad |\lambda| = 1,\quad \Re\alpha > 0,\quad \Re\beta > 0.$$

Но в этом случае полная последовательность итераций $f_n(z)$ сходится равномерно к постоянной, за исключением того случая, когда двойная точка преобразования $Z=f(z)$ является безразличной и лежит внутри полуплоскости.

Оставим в стороне этот случай дробно-линейного преобразования. Тогда могут представиться два случая:

1°. Существует предел, равный некоторой постоянной a, причем $\Re a>0$. Тогда

$$a=\lim f_{n_p}(z)=\lim f_{n_p}(f(z))=f(a);$$

следовательно, для всех n имеем:

$$f_n(a)=a,$$

и a есть единственная предельная постоянная; последовательность $f_n(z)$ сходится равномерно к a во всякой области, целиком лежащей внутри полуплоскости.

2°. Все предельные постоянные принадлежат границе полуплоскости. Возвращаясь к случаю функции $\Phi(\zeta)$, принадлежащей кругу $|\zeta|<1$, видим, что предельные функции итераций $\Phi_n(\zeta)$ суть постоянные с модулем единица. *Из этого следует, что если дано произвольное* k, $0<k<1$, то

$$\lim_{n\to\infty}|\Phi_n(\zeta)|=1 \tag{4}$$

равномерно при $|\zeta|\leqslant k$.

В самом деле, в противном случае существовали бы последовательность индексов n_p и соответствующая последовательность точек ζ_p такие, что

$$|\zeta_p|\leqslant k,\quad |\Phi_{n_p}(\zeta_p)|\leqslant\alpha<1$$

и последовательность $\Phi_{n_p}(\zeta)$ не могла бы иметь пределом постоянную, равную по модулю единице.

Можно предположить, что k выбрано достаточно большим для того, чтобы выполнялось неравенство $|\Phi(0)|<k$. Обозначим через Δ_n область, описываемую $\Phi_n(\zeta)$, когда $|\zeta|<k$. Области Δ_n сходятся равномерно к окружности $|\zeta|=1$. Точка $\zeta_1=\Phi(0)$ принадлежит к Δ_1 так же, как и $\zeta_2=\Phi(\zeta_1)$, следовательно, области Δ_1 и Δ_2 пересекаются, и вообще точка $\zeta_{n+1}=\Phi(\zeta_n)$ принадлежит Δ_n, так что Δ_{n+1} и Δ_n пересекаются.

Допустим, что существуют две различные предельные постоянные для последовательности $\Phi_n(z)$, обозначим их через a и b, — равные по модулю единице. Тогда будет существовать последовательность областей Δ_{n_p}, которые будут сходиться к точке a, и последовательность областей Δ_{m_p}, которые будут сходиться к точке b. Можно предположить, что $n_p < m_p$. Тогда последовательность областей

$$\Delta_{n_p},\ \Delta_{n_p+1},\ \ldots,\ \Delta_{m_p}$$

образует непрерывную цепочку, причем каждая из областей имеет общую часть со следующей; эта цепочка ранга p имеет, когда p стремится к бесконечности, по крайней мере предельную дугу, которая является одной из двух дуг окружности $|\zeta| = 1$ с концами в точках a и b. Можно, следовательно, извлечь цепочку, которая стремится к одной из этих двух дуг. Пусть d — произвольная точка этой дуги сходимости. Радиус $(0, d)$ пересекает некоторую область Δ_{q_p} из этой выделенной цепочки, тогда имеем равномерно в $\Delta_0(|\zeta| < k)$:

$$\lim_{p\to\infty} \Phi_{q_p}(\zeta) = d\ ^{*)},$$

стало быть, будем иметь также такую подпоследовательность, что

$$\lim_{p\to\infty} \Phi\left(\Phi_{q_p}(\zeta)\right) = \lim_{q\to\infty} \Phi_{q_p}(\Phi(\zeta)) = d.$$

Но для некоторой определенной точки ζ' из Δ_0 точка $\Phi_{q_p}(\zeta')$ принадлежит радиусу $(0, d)$, и два предыдущих равенства показывают, что на радиусе $(0, d)$ существует последовательность точек ζ, стремящаяся к d и такая, что

$$\Phi(\zeta) \to d,$$

следовательно, такая, что разность

$$\Phi(\zeta) - \zeta$$

---

*) В самом деле, мы можем считать, что подпоследовательность $\left\{\Phi_{q_p}(\zeta)\right\}$ равномерно сходится при $|\zeta| < 1$ к некоторой константе A. При этом найдутся точки ζ_{q_p}, $|\zeta_{q_p}| < k$ такие, что $\Phi_{q_p}(\zeta_{q_p})$ лежит на радиусе Od и $\Phi_{q_p}(\zeta_{q_p}) \to d$. Отсюда без труда заключаем, что $A = d$ и, значит, $\left\{\Phi_{q_p}(\zeta)\right\} \to d$, $|\zeta| < 1$. (*Прим. ред.*)

стремится к нулю. Это будет иметь место для всех точек d рассматриваемой дуги (a, b). Единственным возможным граничным радиальным значением для ограниченной функции $\Phi(\zeta)-\zeta$ является нуль, что противоречит теореме братьев Рисс, доказанной в § 25. Таким образом, предположение, что $\Phi_n(z)$ будет иметь два предельных значения, приводит к абсурду. Тем самым доказана следующая теорема Вольфа и Данжуа.

Если функция $f(z)$ принадлежит полуплоскости $x>0$ и если эта функция не является дробно-линейной, обладающей двойной точкой, безразличной по отношению к подстановке $Z=f(z)$, то итерации функции $f(z)$ сходятся внутри полуплоскости либо к бесконечности, либо к конечной постоянной a, $\Re a \geqslant 0$.

§ 44. Случай сходимости к конечному числу a с $\Re a>0$. При этом условии точка a является *притягивающей*. Действительно, если допустим, что $|z-a|<\Re a$, то

$$f(z)-a=s(z-a)+\ldots, \quad s=f'(a),$$

откуда

$$f_n(z)-a=s^n(z-a)+\ldots, \quad s^n=f_n'(a).$$

Но так как $f_n(z)$ стремится к a, то $f_n'(a)$ стремится к нулю в силу неравенства Коши, так что s^n стремится к нулю, когда n бесконечно возрастает, следовательно, $|s|<1$ и точка a будет притягивающей. Сделав отображение полуплоскости на круг $|\zeta|<1$, такое, чтобы точка $z=a$ переходила в центр круга $\zeta=0$, будем иметь:

$$\Phi(\zeta)=s\zeta+\ldots, \quad |s|<1. \tag{5}$$

Поскольку $|\Phi(\zeta)|<1$ при $|\zeta|<1$, то можно применить лемму Шварца, что дает:

$$|\Phi(\zeta)|<|\zeta|$$

(если только не имеет места равенство $\Phi(\zeta)=\mu\zeta$, $|\mu|=1$, но оно невозможно, так как производная $\Phi(\zeta)$ в начале координат равна s, причем $|s|<1$), следовательно, если k заключено между нулем и единицей, а K равно максимуму отношения $|\Phi(\zeta)|/|\zeta|$ при $|\zeta|=k$, то при $|\zeta|<k$ имеем:

$$|\Phi(\zeta)|<K|\zeta|, \quad K<1.$$

Значит, если положим $\zeta_n = \Phi_n(\zeta)$, то получим:

$$|\zeta_n| < K^n |\zeta|, \tag{6}$$

откуда следует равномерная сходимость ζ_n к нулю.

Если множитель s не равен нулю, то можно определить функцию Кёнигса, как это было сделано в § 37. В самом деле, имеем:

$$\Phi(\zeta) = s\zeta(1 + c_1\zeta + \ldots),$$

и функция

$$c_1 + c_2\zeta + \ldots$$

голоморфна при $|\zeta| < 1$, следовательно, она ограничена по модулю некоторым числом M, если $|\zeta| \leqslant k < 1$. Из этого следует, что при указанных условиях выполняется неравенство

$$\left|\frac{\Phi(\zeta)}{s\zeta} - 1\right| \leqslant M|\zeta|,$$

и из неравенства (6) вытекает, что

$$\frac{\Phi_n(\zeta)}{s^n\zeta} = \frac{\zeta_n}{s\zeta_{n-1}} \cdot \frac{\zeta_{n-1}}{s\zeta_{n-2}} \cdots \frac{\zeta_1}{s\zeta} \tag{7}$$

сходится равномерно, так как

$$\frac{\zeta_{p+1}}{s\zeta_p} = 1 + \theta(\zeta_p), \quad |\theta(\zeta_p)| < M|\zeta_p|.$$

Функция

$$K(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_n(\zeta)}{s^n}$$

голоморфна при $|\zeta| < 1$, так как она голоморфна при $|\zeta| < k$, где k — произвольное число, меньшее чем единица. Эта функция обращается в нуль в начале координат, а производная ее равна единице в этой точке. Это и есть функция Кёнигса. Имеем:

$$K(\Phi(\zeta)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi_{n+1}(\zeta)}{s^n} = sK(\zeta). \tag{8}$$

Таким образом, функция Кёнигса является решением уравнения Шрёдера

$$\varphi(\Phi(\zeta)) \equiv s\varphi(\zeta), \quad |\zeta| < 1.$$

Каждой функции $\Phi(\zeta)$, принадлежащей кругу $|\zeta|<1$ и такой, что $\Phi(0)=0$, $\Phi'(0)=s\neq 0$ (что, как мы видели, влечет за собой неравенство $|s|<1$), соответствует функция Кёнигса, обращающаяся в нуль в начале координат, и производная которой равна единице в этой точке. Эта функция $K(\zeta)$ может быть использована, как в § 37. Функция $K(\zeta)$ однолистна в некотором круге с центром в начале координат. Если обозначим через $K_{-1}(\zeta)$ обратную функцию, обращающуюся в нуль в начале координат, то вследствие (8) будем иметь:

$$\Phi(\zeta)\equiv K_{-1}(sK(\zeta)). \tag{9}$$

Таким образом, имеет место своего рода взаимность между функциями $\Phi(\zeta)$ и $K(\zeta)$. Если, например, задана функция $K(\zeta)$, голоморфная и однолистная при $|\zeta|<1$, такая, что $K(0)=0$, $K'(0)=1$ и число s, меньшее по модулю, чем единица, то функция $\Phi(\zeta)$, определенная равенством (9), обращается в нуль в начале координат, имеет в этой точке производную, равную s, и принадлежит кругу $|\zeta|<1$. Функция Кёнигса $k(z)$, соответствующая этой функции, определяется соотношением

$$k(\zeta)=\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi_n(\zeta)}{s^n}.$$

Но в силу (9), $K(\Phi(\zeta))\equiv sK(\zeta)$, следовательно,

$$K[\Phi_n(\zeta)]\equiv s^nK(\zeta)$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi_n(\zeta)}{s^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{K_{-1}(s^nK(\zeta))}{s^n}=\lim_{u\to 0}\frac{K_{-1}(u)}{u}K(\zeta),$$

и так как $K_{-1}(u)/u$ стремится к 1, когда u стремится к нулю, то имеем $k(\zeta)=K(\zeta)$. *Функция $K(\zeta)$ является функцией Кёнигса для функции $\Phi(\zeta)$, определенной равенством* (9). В частности, воспользовавшись результатом § 14, мы видим, что можно взять в качестве функции $K(\zeta)$ ограниченную функцию, непродолжаемую за единичную окружность $|\zeta|=1$ и удовлетворяющую остальным ранее высказанным условиям. Тогда соответствующая функция $\Phi(\zeta)$ будет иметь в качестве функции Кёнигса однолистную, ограниченную и непродолжаемую функцию.

Таким образом, столь замечательные свойства функций Фату являются специальными. Можно, впрочем, отметить, что если функция $\Phi(\zeta)$ принадлежит к кругу $|\zeta| < 1$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi'(0) = s \neq 0$, то может случиться, что $|\Phi(\zeta)| < M < 1$; тогда точка ζ, модуль которой более чем M, не имеет прообраза первого порядка, а всякая точка ζ, отличная от начала координат, имеет не более чем конечное число прообразов.

§ 45. Случай сходимости к бесконечности при условии, что угловая производная на бесконечности больше единицы. Вернемся к случаю, когда функция $f(z)$ принадлежит полуплоскости $x > 0$. Если предел $f_n(z)$ принадлежит к границе полуплоскости, то можно с помощью дробно-линейного преобразования, примененного к z и $f(z)$, перейти к случаю, когда $f_n(z)$ сходится к бесконечности. *Таким образом, это единственный случай, который нам остается исследовать, после того, как был рассмотрен случай конечного предела внутри полуплоскости.*

Неравенство

$$\frac{\Re f_n(z)}{|f_n(z)|^2} \frac{|f_{n+1}(z)|^2}{\Re f_{n+1}(z)} \leqslant 1$$

не может иметь места для всех n, начиная с некоторого n_0: так как это означало бы, что

$$\frac{|f_n(z)|^2}{\Re f_n(z)} \leqslant \frac{|f_{n_0}(z)|^2}{\Re f_{n_0}(z)}.$$

Но это невозможно, так как левая часть стремится к бесконечности. Существует, стало быть, последовательность итераций z_n таких, что

$$|z_n| \to \infty, \quad |f(z_n)| \to \infty$$

и

$$\frac{\Re z_n}{|z_n|^2} \frac{|f(z_n)|^2}{\Re f(z_n)} > 1$$

и, значит, в силу критерия Каратеодори (§ 29), угловая производная на бесконечности c функции $f(z)$ не меньше единицы.

Мы будем предполагать далее, что $c > 1$. Так как производная в неподвижной точке на бесконечности (точке,

к которой сходится $f_n(z)$) больше единицы, то бесконечно удаленная точка должна играть роль притягивающей точки с множителем, отличным от нуля (случай Кёнигса).

Положим:

$$z = x + iy = re^{i\varphi}, \quad z_n = f_n(z) = x_n + iy_n = r_n e^{i\varphi_n},$$

$$r_n = r_n(z) = |z_n|, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi_n = \varphi_n(z) < \frac{\pi}{2}$$

и рассмотрим последовательность функций

$$\Psi_n(z) = \exp[\varphi_n(z) - i \ln r_n(z)].$$

Эти функции ограничены в совокупности, и подчинены неравенствам

$$e^{-\frac{\pi}{2}} < |\Psi_n(z)| < e^{\frac{\pi}{2}},$$

так что предельными функциями этого ограниченного семейства будут a priori функции или постоянные, модули которых заключены между $e^{-\frac{\pi}{2}}$ и $e^{\frac{\pi}{2}}$, или сами эти числа $e^{-\frac{\pi}{2}}$, $e^{\frac{\pi}{2}}$. Последовательность гармонических функций $\varphi_n(z)$ является также нормальным семейством в полуплоскости $x > 0$, его возможными предельными функциями являются гармонические функции, отличные от постоянных или постоянные, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Пусть Δ — область, принадлежащая полуплоскости $x > 0$ и содержащая точки 1 и $f(1)$. Неравенство Жюлиа (1) (§ 26), примененное к точкам z_n и z_{n+1}, показывает, что выражение

$$\frac{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2}{(x_{n+1} + x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} \tag{10}$$

не возрастает вместе с n, следовательно, имеет предел, меньший чем единица, зависящий лишь от z, когда n стремится к бесконечности; обозначим этот предел через $\delta(z)$.

Допустим, что для точки z и некоторой последовательности ее итераций z_n $(n = n_1, n_2, \ldots)$ $\varphi_n(z)$ стремится к пределу μ, по абсолютной величине меньшему чем $\frac{\pi}{2}$. Для этих n имеем:

$$\lim \frac{y_n}{x_n} = \operatorname{tg} \mu$$

и в силу теоремы 1 из § 26 при этих n

$$\lim \frac{z_{n+1}}{z_n} = c,$$

следовательно, так же

$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = c, \quad \lim \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \operatorname{tg} \mu.$$

Принимая во внимание эти равенства с помощью выражения (10), получаем:

$$\frac{(c-1)^2(1+\operatorname{tg}^2\mu)}{(c+1)^2+(c-1)^2(1+\operatorname{tg}^2\mu)} = \delta(z).$$

Следовательно, для последовательности $\varphi_n(z)$ существует, кроме $\pm\frac{\pi}{2}$, только два возможных предельных значения, которые обозначим через $\lambda(z)$ и $-\lambda(z)$.

Итак, все возможные значения суть

$$-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \lambda(z), \quad -\lambda(z) \quad \left(|\lambda(z)| < \frac{\pi}{2}\right),$$

где $\lambda(z)$ — гармоническая функция или постоянная, причем

$$|\lambda(z)| \leqslant \alpha(\Delta) < \frac{\pi}{2}.$$

Если $\frac{\pi}{2}$ является одним из предельных значений $\varphi_n(z)$, то вся последовательность $\varphi_n(z)$ сходится равномерно к $\frac{\pi}{2}$ в Δ при n, стремящемся к бесконечности. В противном случае мы имели бы две последовательности, такие, что

$$\varphi_{n_p}(z) \to \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_{m_p}(z) \to \lambda(z), \text{ или к } -\lambda(z), \text{ или к } -\frac{\pi}{2},$$

причем можем принять, например, что $n_p < m_p$. Если p достаточно велико, и α' заключено между $\alpha(\Delta)$ и $\frac{\pi}{2}$, то имеем:

$$\varphi_{n_p}(z) > \alpha', \quad \varphi_{m_p}(z) < \alpha'.$$

Но Δ содержит точки 1 и $f(1)$ и если через d_n обозначим интервал, покрываемый значениями $\varphi_n(z)$, когда z

принадлежит к Δ, то d_n и d_{n+1} перекрываются; так как каждый интервал из цепочки

$$d_{n_p},\quad d_{n_p+1},\ \ldots,\ d_{m_p}$$

пересекается с предыдущим, то существует число q_p и точка z_p такие, что

$$\varphi_{q_p}(z_p)=\alpha',$$

что невозможно, поскольку α' не является пределом $\varphi_n(z)$.

Точно так же можно убедиться, что *если* $-\frac{\pi}{2}$ *является предельным значением, то полная последовательность* $\varphi_n(z)$ *сходится к* $-\frac{\pi}{2}$ *в* Δ.

Если оставим в стороне эти два случая, то при n достаточно большом одно из двух чисел

$$|\lambda(z)-\varphi_n(z)|,\quad |\lambda(z)+\varphi_n(z)|$$

меньше, чем заданное произвольно малое число. Если функция $\lambda(z)$ не равна нулю тождественно и z_0 таково, что $\lambda(z_0)\neq 0$, то $\varphi_{n+1}(z)-\varphi_n(z)$ стремится к нулю, когда z близко к z_0 и $n\to\infty$, так что пределом будет еще $\lambda(z)$ или $-\lambda(z)$. Итак, *в* Δ *аргументы* $\varphi_n(z)$ *сходятся равномерно к гармонической функции, которая отлична от постоянной и которую мы будем обозначать через* $\lambda(z)$, $|\lambda(z)|<\frac{\pi}{2}$, *или к постоянной* a, $|a|\leqslant\frac{\pi}{2}$. *Но этот последний случай не может представиться.*

Действительно, рассмотрим последовательность функций

$$\frac{f_n(z)}{|f_n(z_0)|},\quad x_0=\Re z_0>0. \tag{11}$$

Функции (11) принадлежат к полуплоскости $x>0$ и образуют нормальную последовательность. Аргументы $\varphi_n(z)$ этих функций стремятся к пределу, когда n бесконечно возрастает. Допустим, что этим пределом является некоторая постоянная a. Предельные функции последовательности (11) будут постоянными, и так как эти функции имеют в точке z_0 модуль, равный единице, то все предельные функции будут равны одной и той же постоянной A, $|A|=1$. В Δ последо-

вательность (11) будет сходиться равномерно к A. Будем иметь также

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f_n(f(z))|}{|f_n(z)|} = 1,$$

следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 1, \quad \lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty. \tag{12}$$

Но если $|a| < \frac{\pi}{2}$, то отношение z_{n+1}/z_n должно стремиться к угловой производной $c > 1$, откуда и вытекает невозможность нашего предположения. Если $|a| = \frac{\pi}{2}$, то для z из Δ и некоторой последовательности n должно быть

$$|\varphi_{n+1}(z)| > |\varphi_n(z)|,$$

следовательно, благодаря соотношениям

$$z_{n+1} = cz_n + \Phi(z_n), \quad \Re\Phi(z_n) > 0,$$
$$|z_{n+1}| \geqslant c|z_n|,$$
$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geqslant c > 1$$

приходим к противоречию с (12). Итак, имеем следующую теорему:

Если угловая производная в бесконечности функции $f(z)$ представляет собой число $c > 1$, то аргумент итерации $f_n(z)$ сходится равномерно к предельной функции $\lambda(z)$, отличной от постоянной, когда n бесконечно возрастает, а z принадлежит к области Δ, целиком лежащей внутри полуплоскости $x > 0$; кроме того, $\lambda(z)$ подчинена неравенству

$$|\lambda(z)| \leqslant \alpha(\Delta) < \frac{\pi}{2}.$$

§ 46. Функция Кёнигса. Так как аргументы $\varphi_n(z)$ функций из нормальной последовательности (11) сходятся к пределу, не являющемуся постоянной, а модули функций равны единице в точке z_0, то все предельные функции этой последовательности равны между собой. Последовательность сходится равномерно при n, стремящемся к бесконечности, во всякой области Δ, целиком лежащей внутри полуплоскости

$x > 0$. Предельная функция $K(z)$ принадлежит, как и $f_n(z)$, полуплоскости $x > 0$. Поскольку точка z_0 выбрана в полуплоскости произвольно, то функция $K(z)$ определена с точностью до постоянного множителя. Мы будем также называть ее *функцией Кёнигса*. Имеем:

$$K(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(z)}{|f_n(z_0)|} \tag{13}$$

и, следовательно,

$$K(z) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_n(z_0)}{f_{n+1}(z_0)} \right| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(z)}{|f_n(z_0)|} = \frac{1}{c} K[f(z)].$$

Функция Кёнигса является решением уравнения Шрёдера:

$$K[f(z)] = cK(z). \tag{14}$$

Эта функция Кёнигса принадлежит полуплоскости, и имеет угловую производную на бесконечности, которую мы обозначим через γ; это число γ конечно и неотрицательно.

В силу равенства (14) имеем:

$$K[f_n(z)] = c^n K(z), \tag{15}$$

кроме того, точки $z_n = f_n(z)$ остаются в угле $|\arg z_n| \leqslant \alpha(\Delta) < \frac{\pi}{2}$, стало быть,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{K(z_n)}{z_n}. \tag{16}$$

Допустим, что $\gamma > 0$. Тогда из (16) и (15) получаем:

$$\frac{1}{\gamma} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{K(z_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{c^n K(z)},$$

значит, последовательность

$$\frac{f_n(z)}{c^n} = \frac{z_n}{c^n} \tag{17}$$

имеет предел, равный

$$\frac{1}{\gamma} K(z),$$

причем сходимость равномерна в Δ. Так как $K(z)$ определена лишь с точностью до постоянного множителя, то в слу-

чае $\gamma > 0$, можно положить

$$K(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(z)}{c^n}, \tag{18}$$

так что $\gamma = 1$.

Последовательность

$$\frac{x_n}{c^n}$$

сходится, таким образом, к $\Re K(z)$. Так как можно написать

$$\frac{x_n}{c^n} = x \prod_1^n \frac{x_p}{c x_{p-1}} = x \prod_0^{n-1} \left(1 + \frac{\Re \Phi(z_p)}{c x_p}\right) \tag{19}$$

и так как левая часть в (19) сходится равномерно, то ряд с положительными членами

$$\sum \frac{\Re \Phi(z_p)}{x_p} \tag{20}$$

сходится равномерно, каково бы ни было z из Δ.

Обратно, если ряд (20) сходится в некоторой точке z_0, то из равенства (19) следует, что последовательность

$$\frac{\Re f_n(z_0)}{c^n}$$

сходится к конечному пределу, отличному от нуля, и благодаря свойству z_n последовательность $|f_n(z_0)|\, c^{-n}$ имеет также конечный предел, не равный нулю. Мы можем определить функцию Кёнигса посредством равенства (18) и, учитывая (15), будем иметь:

$$\gamma = \lim_{p \to \infty} \frac{K(z_p)}{z_p} = \lim_{p \to \infty} \frac{c^p}{z_p} K(z) = 1.$$

Итак, *для того чтобы было* $\gamma > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы ряд* (20) *сходился в некоторой точке* z_0. *В таком случае он сходится равномерно.*

Сходимость ряда

$$\sum \left| \frac{\Phi(z_p)}{z_p} \right| \tag{21}$$

влечет за собой сходимость ряда

$$\sum \frac{\Re \Phi(z_p)}{|z_p|},$$

и благодаря тому, что отношение $|z_p|/x_p$ ограничено, ряд (20) сходится. Обратно, сходимость ряда (20) влечет за собой сходимость ряда (21). В самом деле, прежде всего, неравенство (2) из § 26, примененное к $\Phi[f_n(z)]$ и к $f_n(z)$, которые принадлежат полуплоскости $x > 0$, дает:

$$\left|\frac{\Phi[f_n(z')]-\Phi[f_n(z)]}{\Phi[f_n(z')]+\overline{\Phi[f_n(z)]}}\right| \leqslant \left|\frac{f_n(z')-f_n(z)}{f_n(z')+\overline{f_n(z)}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{f_{n-1}(z')-f_{n-1}(z)}{f_{n-1}(z')+\overline{f_{n-1}(z)}}\right| \leqslant \left|\frac{z'-z}{z'+\bar{z}}\right|,$$

и, устремляя z' к z, после деления на $|z'-z|$ получаем:

$$\left|\frac{d\Phi[f_n(z)]}{dz}\right| \leqslant \frac{\Re\Phi[f_n(z)]}{x}, \quad x=\Re z. \tag{22}$$

Выберем z_0 и положим $z_1=f(z_0)$, $z=z_0+t(z_1-z_0)$ $(0<t<1)$; тогда точка $f_n(z)$ описывает дугу простой кривой (если x_0 было взято достаточно большим). Интегрируя (22), получим неравенство

$$\Phi(z_{n+1})-\Phi(z_n)| \leqslant \frac{|z_1-z_0|}{x_0}\int_0^1 \Re\Phi[f_n(z_0+t(z_1-z_0))]\,dt,$$

следовательно,

$$|\Phi(z_{n+1})| \leqslant |\Phi(z_n)| + M\int_0^1 \Re\Phi(f_n(z))\,dt,$$

где M — число, не зависящее от n. Стало быть,

$$\frac{|(\Phi(z_{n+1})|}{c^{n+1}} \leqslant \frac{|\Phi(z_n)|}{c^{n+1}} + \frac{M}{c}\int_0^1 \frac{\Re\Phi(z_n)}{c^n}\,dt.$$

Складывая эти неравенства от p до $n-1$, будем иметь:

$$\left(1-\frac{1}{c}\right)\sum_{p+1}^{n}\frac{|\Phi(z_q)|}{c^q} \leqslant \frac{|\Phi(z_p)|}{c^{p+1}} + \frac{M}{c}\int_0^1 \sum_{p}^{n-1}\frac{\Re\Phi(z_q)}{c^q}\,dt. \tag{23}$$

Но из равномерной сходимости ряда (20) благодаря (19) следует, что x_n/c^n стремится равномерно к конечному положительному пределу, так что в правой части под знаком интеграла можно заменить c^q на x_q. Сумма, стоящая под

интегралом, дает сходящийся ряд, значит, выражение, стоящее в левой части (23), имеет предел при бесконечно возрастающем n, и, так как $x_q \geqslant c^q x_0$, то наше утверждение доказано: из сходимости ряда (20) вытекает сходимость ряда (21).

Следовательно:

Для того чтобы было $\gamma > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд* (21).

Ряд (21) может быть и расходящимся. Например, если положим

$$\Phi(z) = z\Theta(z), \quad \Theta(z) = \frac{1}{\ln(z+3)},$$

где взята та ветвь логарифма, которая действительна при действительных положительных z; функция $\Theta(z)$ принадлежит полуплоскости $x > 0$, аргумент ее имеет тот же знак, что и $-y$, следовательно, $\Phi(z)$ также принадлежит полуплоскости. Для действительных и достаточно больших z имеем:

$$z_n < (2c)^n z,$$

так что

$$\Theta(z_n) > \frac{1}{2n \ln(2c)}$$

и ряд (21) расходится.

При $\gamma > 0$ аналогии с итерацией в окрестности притягивающей точки на конечном расстоянии (§ 44) еще более возрастают. Функция $K(z)$ однолистна в секторе $|\arg z| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, $|z| > m(\alpha)$; преобразование

$$Z = K(z), \quad Z_1 = K(z_1)$$

приводит к подстановке

$$Z_1 = cZ$$

и образует функции, голоморфные или мероморфные при $x > 0$, инвариантные относительно подстановки $[z, f(z)]$.

Функцией Кёнигса не может быть произвольная функция, принадлежащая полуплоскости $x > 0$, с $\gamma > 0$. Если $K_{-1}(u)$ является ветвью функции, обратной к функции $u = K(z)$, которая обращается в бесконечность, когда u бесконечно возрастает, причем аргумент ее остается по абсолютной

величине меньшим чем $\frac{\pi}{2}$, то нужно, чтобы функция

$$f(z) = K_{-1}[cK(z)]$$

была однозначной и принадлежала полуплоскости $x > 0$. Можно проверить, что эти условия достаточны для того, чтобы $K(z)$ была функцией Кёнигса, соответствующей данной функции $f(z)$ при $c > 1$. Всякая функция $k(z)$, принадлежащая полуплоскости $x > 0$ и удовлетворяющая уравнению Шрёдера (14), равняется произведению $K(z)$ на некоторую положительную постоянную.

Можно рассмотреть так же, как в § 44, случай, когда $K(z)$ однолистна в полуплоскости.

В случае подстановки Фату второго рода с основным инвариантным кругом, одна из двойных точек, расположенная на окружности Г, является притягивающей. Отображая внутренность Г на полуплоскость так, чтобы двойная точка ушла в бесконечность, мы приходим к тому специальному случаю, когда функция принадлежит полуплоскости, причем бесконечно удаленная точка является притягивающей.

§ 47. Случай, когда угловая производная c функции $f(z)$ равна единице. Мы ограничимся здесь некоторыми предварительными указаниями, относящимися к этому случаю, отсылая читателя к уже цитированным работам. Итак, мы предполагаем, что

$$f(z) = z + \Phi(z).$$

Итерированные функции $f_n(z)$ принадлежат полуплоскости, аргумент $\varphi_n(z)$ функции $f_n(z)$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Функции

$$\frac{f_n(z)}{f_n(z_0)}, \tag{24}$$

где $\Re z_0 = x_0 > 0$, образуют нормальную последовательность, так как из любой подпоследовательности, извлеченной из (24), можно выделить другую, такую, что $\varphi_n(z_0)$ имеет предел, а функции из этой подпоследовательности не принимают значений из некоторого сектора. Так как все функции (24) равны единице в точке $z = z_0$, то все те предельные функции, которые являются постоянными, равны единице.

Если все предельные функции последовательности являются постоянными, то вся последовательность (24) сходится равномерно к единице во всякой области Δ, целиком лежащей внутри полуплоскости $x > 0$, и разность $\varphi_n(z) - \varphi_n(z_0)$ стремится к нулю. Если существует предельная функция $H(z)$, отличная от постоянной, то эта функция является пределом некоторой подпоследовательности, для которой $\varphi_n(z_0)$ имеет предел, следовательно, эта функция принадлежит полуплоскости, и существует такая подпоследовательность индексов n_p, для которой предел

$$H(z) = \lim_{p \to \infty} \frac{f_{n_p}(z)}{|f_{n_p}(z_0)|}$$

является функцией, отличной от постоянной и принадлежащей полуплоскости $x > 0$. Стало быть, $\varphi_{n_p}(z)$ имеют предел, за исключением некоторых значений z, принадлежащий углу $|\varphi| \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, и существует область Δ', в точках которой $f_{n_p}(z)$ стремится к бесконечности, оставаясь в рассматриваемом угле, следовательно, такая, для которой имеет место соотношение

$$\lim_{p \to \infty} \frac{\Phi(f_{n_p}(z))}{f_{n_p}(z)} = 0,$$

а значит, и следующее:

$$\lim_{p \to \infty} \frac{f(f_{n_p}(z))}{f_{n_p}(z)} = 1.$$

Справедливо равенство

$$H(f(z)) = \lim_{p \to \infty} \frac{f_{n_p+1}(z)}{|f_{n_p}(z_0)|} = H(z) \lim_{p \to \infty} \frac{f(f_{n_p}(z))}{f_{n_p}(z)}$$

в предположении, что предел в правой части существует, но это имеет место в Δ', где этот предел равен единице. Так как $H(z)$ и $H(f(z))$ голоморфны, то имеем во всей полуплоскости:

$$H(f(z)) \equiv H(z). \tag{25}$$

Итак:

В случае, когда $c = 1$ (функции $f_n(z)$ сходятся к бесконечности), либо последовательность (24) *сходится*

равномерно к единице во всей области Δ *и, следовательно,* $\varphi_n(z)-\varphi_n(z_0)$ *стремится к нулю, либо существует по крайней мере одна функция* $H(z)$, *принадлежащая к полуплоскости и инвариантная относительно подстановки* $[z, f(z)]$.

Если оставим в стороне тривиальный случай, когда $\Phi(z)$ равна постоянной, то функция $\Phi(z)$ принадлежит полуплоскости $x>0$, к которой также будет принадлежать $\frac{1}{\Phi(z)}$, и функция $z\Phi(z)$ имеет при z, стремящемся к бесконечности, положительный предел δ (который может быть равен и бесконечности), если $|\varphi(z)|$ остается меньше числа, которое меньше чем $\frac{\pi}{2}$. В частном случае, когда δ конечно, справедливо соотношение

$$\Phi(z)=\frac{\delta[1+o(1)]}{z},$$

и $\varphi_n(z)$ стремится к нулю. Но если δ бесконечно, то $\varphi_n(z)$ может не стремиться ни к какому пределу.

§ 48. Итерация функции, принадлежащей многосвязной области. Результаты, относящиеся к функциям, принадлежащим к полуплоскости или к кругу, приведенные в предыдущих параграфах, переносятся с помощью конформного отображения на голоморфные в односвязных областях функции, значения которых принадлежат этим областям. Случай итерации функций $w=f(z)$, голоморфных в многосвязной области D, и таких, что их значения w принадлежат к D, был также исследован. Ритт, а также Каратеодори в совместной работе с Ауманом получили несколько частных результатов. Хейнс исследовал общий случай под влиянием того, что было сделано для односвязной области. А именно, он показал, что могут иметь место лишь три следующих обстоятельства:

1°. $w=f(z)$ определяет взаимно однозначное конформное отображение D на себя и существует такое p, для которого $f_p(z)\equiv z$, или в случае двусвязности существует последовательность функций $f_n(z)$, непрерывно сходящаяся к z *).

*) О понятии непрерывной сходимости см. в § 94 книги К. Каратеодори. Конформное отображение, ГТТИ, 1934, (*Прим. ред.*)

2°. В D существует двойная притягивающая точка ζ и последовательность $f_n(z)$ сходится непрерывно к ζ внутри D.

3°. Последовательность итераций сходится непрерывно к границе D в том смысле, что всякая ее сходящаяся подпоследовательность сходится к некоторой точке этой границы; если существует более чем одна предельная точка, то множество предельных точек, являясь частью границы D, образует континуум.

Относительно других результатов Хейнса можно обратиться к его статье.

Другие результаты и распространение на внутренние отображения областей двух комплексных переменных были получены Эрве.

Литературные ссылки

§ 41. Montel, 1.
§ 42. Poincarè, 1; Blaschke, 1.
§ 43. Wolff, 2; Denjoy, 3; Valiron, 10.
§ 44. Valiron, 10.
§§ 45, 46, 47. Wolff, 3; Valiron, 10.
§ 48. Ritt, 1; Carathèodory (et Aumann), 3; Heins, 1; Herve, 1.

ГЛАВА VII

ФУНКЦИИ ПУАНКАРЕ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ ТЕОРЕМЕ УМНОЖЕНИЯ

§ 49. Теорема Пуанкаре. В своей статье «Sur une classe nouvell de trenscendantes uniformes» Пуанкаре доказал существование функций, мероморфных во всякой конечной части плоскости и удовлетворяющие *теореме умножения*: если $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ — эти функции, а m — данное число, большее по модулю, чем единица, то функции

$$f_1(mz), \quad f_2(mz), \ldots, \quad f_n(mz)$$

могут быть выражены рационально через функции

$$f_1(z), \ldots, f_n(z),$$

то есть

$$f_j(mz) = R_j(f_1(z), \ldots, \quad f_n(z)), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

где R_j — рациональные дроби от $f_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Он доказал следующее предложение:

Пусть даны рациональные дроби $R_j(u_1, \ldots, u_n)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *такие, что* $R_j(0, 0, \ldots, 0) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$; *при* $z = 0$ *положим*:

$$\frac{df_k(z)}{dz} = A_k, \quad \frac{\partial R_j}{\partial u_k} = B_{j,k};$$

допустим далее, что все A_k *не равны нулю и что определитель*

$$F(s) = \begin{vmatrix} B_{1,1} - s & B_{1,2} & \ldots & B_{1,n} \\ B_{2,1} & B_{2,2} - s & \ldots & B_{2,n} \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \ldots & B_{n,n} - s \end{vmatrix} \qquad (2)$$

равен нулю при $s = m$, *в то время как определитель*

$F(m^p)$, $p=2, 3, \ldots$, не равен нулю. При этих условиях существуют функции $f_j(z)$, мероморфные во всякой конечной части плоскости и удовлетворяющие формулам умножения (1).

Пуанкаре доказывает эту теорему, показывая, что формальное вычисление коэффициентов функций $f_j(z)$ возможно при указанных условиях, и доказывает посредством вычисления пределов Коши, что ряды, получаемые таким образом, являются сходящимися в некотором круге с центром в начале координат, затем аналитическое продолжение с помощью уравнений (1) завершает доказательство. Пикар заново рассмотрел этот вопрос с помощью своего метода последовательных приближений и дал широкие обобщения. Отсылая читателя по поводу этих работ к книге Пикара, **2**, мы ограничимся здесь изложением в слегка измененной форме метода Пуанкаре.

§ 50. Функция, определенная только одним уравнением. В теории локсодромических функций основной функцией является

$$S(z)=\prod_0^\infty\left(1-\frac{z}{k^n}\right)\prod_1^\infty\left(1-\frac{1}{zk^n}\right),\quad |k|>1,$$

которая играет ту же роль, что функция $\sigma(u)$ в теории эллиптических функций. В этой функции фигурирует бесконечное произведение

$$P(z)=\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{k^n}\right),$$

которое определяет целую функцию, удовлетворяющую соотношению

$$P(kz)\equiv(1+z)\,P(z).$$

Точно так же, если рассмотрим функцию

$$f(z)\equiv g(z)\,e^{z^\alpha},$$

где $g(z)$ — некоторый многочлен, а α — целое положительное число, то, если m^α равно целому положительному числу λ, будем иметь:

$$f(mz)=\frac{g(mz)}{g(z)^\lambda}[f(z)]^\lambda.$$

Существуют, следовательно, в некоторых случаях очень простые целые функции, удовлетворяющие функциональному уравнению вида

$$f(mz) \equiv R(z, f(z)), \tag{3}$$

где m — число, по модулю большее чем единица, а $R(x, y)$ рациональная дробь от x и y.

Мы рассмотрим теперь в общем виде такое уравнение (3) и исследуем, при каких условиях оно имеет решение, голоморфное в начале координат. Такое решение $f(z)$ будет голоморфным в некотором круге $|z| < \alpha$, в этом круге функция $R(z, f(z))$ будет мероморфной, следовательно, в силу (3) функция $f(z)$ будет мероморфной при $|z| < |m|\alpha$, откуда вытекает, что $R(z, f(z))$ будет еще мероморфной в этом круге, и благодаря (3) $f(z)$ будет мероморфной при $|z| < |m|^2\alpha$ и т. д. Итак, решение уравнения (3), голоморфное в окрестности нуля, будет мероморфным во всякой конечной части плоскости. Если положим $f(0) = 0$, то уравнение (3) дает:

$$c_0 = R(0, c_0). \tag{4}$$

Чтобы решение уравнения (3) было голоморфным в нуле, необходимо, следовательно, чтобы уравнение (4) имело конечное решение. Если c_0 является таким решением, то, полагая

$$f(z) = c_0 + f_1(z), \quad R_1(z, f_1(z)) \equiv R(z, c_0 + f_1(z)) - c_0,$$

приходим к задаче об отыскании голоморфного в нуле решения $f_1(z)$ уравнения

$$f_1(mz) = R_1(z, f_1(z)), \tag{5}$$

где $R_1(x, y)$ — рациональная дробь от x и y, равная нулю при $x = 0$, $y = 0$. Если мы заметим, что единственным голоморфным и обращающимся в нуль в начале координат решением уравнения

$$f_2(mz) = mf_2(z)$$

является μz, где μ — произвольная постоянная, то станет очевидно, что уравнение (5) эквивалентно системе уравнений Пуанкаре:

$$\left.\begin{aligned} f_1(mz) &= R_1(f_2(z), f_1(z)), \\ f_2(mz) &= mf_2(z) \end{aligned}\right\}.$$

с дополнительным условием $f_2'(0)=1$. Это показывает, что при некоторых условиях уравнение (5) имеет решение, голоморфное и равное нулю в начале координат.

Мы сейчас непосредственно докажем существование голоморфного и равного нулю в начале координат решения уравнения (5), рассуждая так, как если бы речь шла о неявно заданной функции, а m было бы равно единице. При $|x|$ и $|y|$ достаточно малых, $|x|\leqslant\alpha$, $|y|\leqslant\beta$, имеем:

$$R_1(x, y)=\sum\sum a_{p,\,q}\,x^p y^q, \quad a_{0,\,0}=0.$$

Напишем уравнение (5) в виде

$$f_1(mz)-a_{0,\,1}f_1(z)=\sum\sum a_{p,\,q}\,z^p f_1(z)^q,$$
$$p>0, \text{ если } q=1 \tag{6}$$

и положим:

$$f_1(z)=\sum_1^\infty c_\mu z^\mu. \tag{7}$$

Коэффициенты c_μ вычисляются один за другим с помощью равенств

$$\left.\begin{aligned} &c_1(m-a_{0,\,1})=a_{1,\,0},\\ &c_2(m^2-a_{0,\,1})=a_{2,\,0}+a_{1,\,1}c_1+a_{0,\,2}c_1^2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &c_\mu(m^\mu-a_{0,\,1})=Q_\mu(c_1, c_2, \dots, c_{\mu-1}, a_{j,\,k}), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $Q_\mu(c_1, \dots, a_{j,\,k})$ — многочлен с положительными коэффициентами относительно тех c, индексы которых меньше, чем μ, и относительно тех a, сумма индексов которых не более чем μ. Вычисление c_μ возможно, таким образом, если выражение

$$m^\mu-a_{0,\,1} \tag{9}$$

не обращается в нуль ни при каких целых и положительных μ. При этом условии модуль выражения (9) имеет положительный минимум H, так как при μ, достаточно большом, модуль (9) больше, чем $|m-a_{0,\,1}|$; следовательно, H является минимумом конечного числа чисел. Можно оценить сверху $|c_\mu|$, заменяя в равенствах (8) выражения (9) через H, а коэффициенты $a_{j,\,k}$ числами, не меньшими, чем

их модули. Ряд (7) мажорируется функцией, определяемой неявно соотношением

$$HY = \frac{M}{\left(1-\frac{X}{\alpha}\right)\left(1-\frac{Y}{\beta}\right)} - M\left(1+\frac{Y}{\beta}\right), \qquad (10)$$

где правая часть является мажорантой правой части (6), если

$$M = \sum\sum |a_{p,\,q}|\,\alpha^p\beta^q.$$

Но, как известно, неявная функция, заданная посредством (10), равна нулю при $X=0$ и голоморфна в круге $|X|<\gamma$, $\gamma>0$. Таким образом, функция, определенная равенством (7), является решением уравнения (6), т. е. — уравнения (5). Возвращаясь к уравнению (3), получаем следующий результат:

В предположении, что уравнение (4) *имеет конечный корень* c_0 *и что выражение* (9), *в котором положено*

$$a_{0,\,1} = \frac{\partial R(0,\,c_0)}{\partial y},$$

не равняется нулю ни при каком целом положительном μ, *функциональное уравнение* (3) *при* $|m|>1$ *имеет единственное решение, мероморфное во всякой конечной части плоскости и принимающее при* $z=0$ *значение* c_0.

Каждому значению c_0 соответствует одно решение.

В частном случае, когда функция $R(x, y)$ является многочленом, получаемые решения будут целыми функциями. Но приведенный выше пример, в котором $f(z)$ было произведением многочлена на показательную функцию, показывает, что $f(z)$ может быть целой функцией и в том случае, когда $R(x, y)$ — рациональная дробь.

Если $a_{1,0}=0$, то значение c_1, определяемое первым из равенств (8), будет произвольным, если, кроме того, еще $m-a_{0,\,1}=0$; в этом случае будет бесконечное множество решений, так как выражение (9) не будет обращаться в нуль при $\mu>1$.

§ 51. Порядок решения при условии, что $R(x, y)$ является многочленом по y. В силу сказанного выше функциональное уравнение

$$f(mz) = P_0(z)\,[f(z)]^p + \ldots + P_p(z), \quad |m| = \sigma > 1, \qquad (11)$$

где $P_j(z)$ — многочлены, имеет, вообще говоря, p решений, которые являются целыми функциями (включая сюда решения, которые будут постоянными или многочленами), равными при $z=0$ одному из решений c_0 уравнения

$$c_0^p P_0(0) + \ldots + c_0 P_{p-1}(0) + P_p(0) = c_0.$$

Такой корень c_0 соответствует решению, если все целые положительные степени числа m отличны от числа

$$P_0(0) p c_0^{p-1} + \ldots + P_{p-1}(0),$$

что, очевидно, представляет собой общий случай.

Рассмотрим решение $f(z)$, которое не является многочленом (или постоянной).

Обозначим через $M(r)$ максимум $|f(z)|$ при $|z|=r$. Известно, что $M(r)$ — возрастающая функция от r, которая возрастает быстрее, чем r^q, каково бы ни было положительное число q, т. е. отношение $M(r)/r^q$ возрастает, начиная с некоторого значения r, и стремится к бесконечности, когда r неограничено возрастает.

Если Ar^q представляет собой модуль старшего члена в многочлене $P_0(z)$ то максимум модуля правой части (11) будет вида

$$Ar^q M(r)^p \left(1 + \frac{O(1)}{r}\right),$$

где $O(1)$ — величина, которая остается ограниченной при r, стремящемся к бесконечности. И так как максимум модуля левой части (11) при том же r будет:

$$M(\sigma r),$$

то

$$M(\sigma r) = Ar^q M(r)^p \left(1 + \frac{O(1)}{r}\right), \quad \sigma > 1, \tag{12}$$

что позволяет вычислить приближенно значение $M(r)$, или, точнее говоря, $\ln M(r)$. Соотношение (12) может быть записано в таком виде:

$$\ln M(\sigma r) = p \ln M(r) + \ln(Ar^q) + \frac{O(1)}{r}.$$

Напишем это равенство для $r = r_0$, затем для $r = r_0\sigma$, ..., $r = r_0\sigma^{k-1}$:

$$\left.\begin{aligned}
\ln M(\sigma r_0) &= p \ln M(r_0) + \ln A + q \ln r_0 + \frac{O(1)}{r_0}, \\
\ln M(\sigma^2 r_0) &= p \ln M(r_0\sigma) + \ln A + q \ln r_0 + \\
&\qquad + q \ln \sigma + \frac{O(1)}{r_0}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\ln M(\sigma^k r_0) &= p \ln M(r_0\sigma^{k-1}) + \ln A + q \ln r_0 + \\
&\qquad + q(k-1) \ln \sigma + \frac{O(1)}{r_0}
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

и исключим промежуточные $\ln M(\sigma^j r_0)$, умножая предпоследнюю строку на p, ей предшествующую на p^2, и т. д., вторую на p^{k-2}, первую на p^{k-1} и складывая почленно.

Допустим на время, что $p > 1$. Мы получим:

$$\begin{aligned}
\ln M(r_0\sigma^k) = p^k \ln M(r_0) &+ \\
+ \left[\ln A r_0^q + \frac{O(1)}{r_0}\right](1 + p + \ldots + p^{k-1}) &+ \\
+ q \ln \sigma (k - 1 + \ldots + 2p^{k-3} + p^{k-2}).&
\end{aligned}$$

Следовательно, выполняется равенство

$$\begin{aligned}
\frac{\ln M(r_0\sigma^k)}{p^k} = \ln M(r_0) &+ \\
+ \left[\ln A r_0^q + \frac{O(1)}{r_0}\right]\left(1 + \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^{k-1}}\right)\frac{1}{p} &+ \\
+ \frac{q \ln \sigma}{p^2}\left(1 + \frac{2}{p} + \frac{3}{p^2} + \ldots + \frac{k-1}{p^{k-2}}\right).&
\end{aligned}$$

При k, стремящемся к бесконечности, правая часть в пределе будет равна

$$K(r_0) = \ln M(r_0) + \frac{1}{p-1}\left[\ln A r_0^q + \frac{O(1)}{r_0}\right] + \frac{q \ln \sigma}{(p-1)^2},$$

откуда имеем:

$$\ln M(r_0\sigma^k) = p^k (1 + o(1)) K(r_0),$$

где $o(1)$ стремится к нулю, когда k неограниченно возрастает. Если опять положим

$$r_0\sigma^k = r,$$

где r_0 заключено между R_0 и $R_0\sigma$, причем R_0 выбрано очень большим, то

$$k = \frac{\ln r - \ln r_0}{\ln \sigma}$$

и, полагая

$$p^k = \left(\frac{r}{r_0}\right)^\rho, \quad \rho = \frac{\ln p}{\ln \sigma},$$

имеем:

$$\ln M(r) = [1 + o(1)] \frac{K(r_0)}{r_0^\rho} r^\rho .$$

Законно предположить, что R_0 также возрастает неограниченно; тогда коэффициент $K(r_0) / r_0^\rho$, который зависит от r, будет иметь один и тот же предел для всех r из геометрической прогрессии со знаменателем σ, и можем написать;

$$\ln M(r) \sim H(\ln r) r^\rho, \quad \rho = \frac{\ln p}{\ln \sigma}, \tag{14}$$

где $H(x)$ — периодическая функция с периодом $\ln \sigma$, которая заключена между двумя положительными числами.

При $p = 1$ итерация равенства (12) упрощается. Полагая $q > 0$, получаем:

$$\ln M(\sigma^k r_0) = \ln M(r_0) + K\left(\ln A r_0^q + \frac{O(1)}{r_0}\right) + q \ln \sigma \frac{k(k-1)}{2}$$

и, принимая, как и ранее,

$$\sigma^k r_0 = r,$$

получаем асимптотическое равенство

$$\ln M(r) \sim \frac{q}{2 \ln \sigma} (\ln r)^2. \tag{15}$$

Если $q = 0$, то не может существовать целых решений, отличных от многочленов. Итак:

Решения уравнения (11), *не являющиеся многочленами, имеют положительный порядок* ρ *и удовлетворяют соотношению* (14), *если* $p > 1$; *если же* $p = 1$, *то* q *должно быть положительным, а решения имеют порядок, равный нулю, и удовлетворяют соотношению* (15).

Функции, вводимые в теории локсодромических функций, соответствуют этому последнему случаю; из того, что отношение $\ln M(r) / (\ln r)^2$ остается ограниченным, вытекает, что

эти функции обладают такими свойствами, которые их сближают со свойствами многочленов, в частности, отношение $\ln|f(r)|$ к $\ln M(r)$ при $|z|=r$ стремится к единице, когда точка z бесконечно удаляется, оставаясь вне областей сравнительно малых размеров, которые окружают нули.

Когда $p>1$, порядок ρ может быть произвольным положительным числом, рациональным или иррациональным. В некоторых простых случаях функция $H(\ln r)$, которая фигурирует в (14), сводится к постоянной. Но это не всегда так. Например, функция

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{\sigma^n}\right)^{2^{n-1}},$$

где σ — действительное число, большее чем 2, что обеспечивает сходимость бесконечного произведения, удовлетворяет уравнению

$$f(z\sigma)\equiv(1+z)\,[f(z)]^2,$$

ее порядок

$$\rho=\frac{\ln 2}{\ln\sigma}$$

заключен между нулем и единицей. Если бы

$$\ln M(r)\sim Ar^{\rho},$$

то так как $M(r)$ есть значение $f(r)$ и так как нули все действительны и отрицательны, то в силу известной теоремы мы имели бы

$$n(r)\sim A\frac{\sin\pi\rho}{\pi}r^{\rho},$$

где $n(r)$ — число нулей, модули которых менее чем r; но это последнее соотношение в действительности не имеет места, так как при переходе r через значение σ^n функция $n(r)$ делает скачок от значений $2^{n-1}-1$ к значению 2^n-1.

Свойства функции $M(r)$ остаются теми же, если в уравнении (11) многочлены $P_j(z)$ заменить такими рациональными дробями, что модуль коэффициентов при $[f(z)]^p$ возрастает неограниченно вместе с $|z|$ и если решение $f(z)$ является целой функцией (кроме того, в этом случае это будет трансцендентная целая функция, а не многочлен).

§ 52. Порядок мероморфной функции $f(z)$ в общем случае. Рассмотрим общий случай уравнения (3) и будем всегда предполагать, что необходимые условия для того, чтобы существовало решение, выполнены. Решения являются мероморфными функциями, которые могут, в частности, быть рациональными дробями. Исключим из рассмотрения случай рационального решения, так как решения этого рода могут быть получены непосредственно. Поведение функции $f(z)$ характеризуется в таком случае посредством характеристической функции Неванлинны $T(r, f)$, которая является возрастающей функцией от r и отношение которой к $\ln r$ не ограничено. Порядком функции $f(z)$ называется число

$$\rho = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln T(r, f)}{\ln r}.$$

Если p означает степень y в рациональной дроби $R(x, y)$, т. е. $R(x, y)$ представляет собой отношение двух многочленов степени p по y с коэффициентами, представляющими собой многочлены по x:

$$R(x, y) \equiv \frac{P_1(x, y)}{P_2(x, y)},$$
$$P_1(x, y) \equiv A_0(x) y^p + \ldots + A_p(x),$$
$$P_2(x, y) \equiv B_0(x) y^p + \ldots + B_p(x),$$

то можно допустить, что многочлен $B_0(x)$ не равен нулю тождественно, так как в противном случае уравнение (3) можно было бы записать в виде

$$\frac{1}{f(mz)} \equiv \frac{1}{R(z, f(z))}. \tag{3'}$$

Можно показать, что

$$T[r, R(z, f(z))] = pT(r, f) + O(\ln r); \tag{16}$$

и уравнение (3) дает:

$$T(\sigma r, f) = pT(r, f) + O(\ln r), \quad \sigma = |m|,$$

благодаря чему функция T играет здесь ту же роль, какую играла функция $\ln M(r)$ в исследованиях § 51, по крайней мере в том случае, когда $p > 1$. Справедливо следующее предложение:

Если $p > 1$, то $f(z)$ — мероморфная функция порядка

$$\rho = \frac{\ln p}{\ln \sigma},$$

такая, что пределами неопределенности выражения

$$\frac{T(r, f)}{r^\rho}$$

при r, стремящемся к бесконечности, будут два положительных конечных числа.

В случае, когда $p = 1$, приходится уточнить значение $O(\ln r)$ в равенстве (16) таким образом, что туда входят степени $A_0(x)$ и $B_0(x)$. Но тогда $T(r, f) = O[(\ln r)^2]$, и порядок равен нулю.

§ 53. Функции, определяемые системой уравнений. Рассмотрим систему уравнений

$$f_j(mz) = R_j(z, f_1(z), \ldots, f_n(z)), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad (17)$$

где m, $|m| = \sigma > 1$ — заданное число, а $R_j(x, y_1, \ldots, y_n)$ — заданные рациональные дроби от $n+1$ указанных переменных. Будем искать решения $f_j(z)$, голоморфные в начале, следовательно, в некотором маленьком кружке с центром в точке $z = 0$. Если мы обозначим через c_0^j значения этих функций в начале координат, то числа c_0^j должны будут удовлетворять алгебраической системе уравнений

$$c_0^j = R_j(0, c_0^1, \ldots, c_0^n), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

которая даст, вообще говоря, конечное число решений. Определив указанным образом числа c_0^j, мы можем заменить уравнения (17) новой системой

$$f_j(mz) - c_0^j = R_j[z, c_0^1 + (f_1(z) - c_0^1), \ldots, c_0^n + (f_n(z) - c_0^n)],$$
$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

что приводит нас к системе, аналогичной (17), но в которой

$$R_j(0, 0, \ldots, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

и в которой нужно найти решения, голоморфные и равные нулю в начале координат. Эти уравнения можно также

написать в виде

$$f_j(mz) - \sum_1^n B_{j,k} f_k(z) = R_j^1(z, f_1(z), \ldots, f_n(z)),$$
$$j = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

где $B_{j,k}$ есть значения производных:

$$\frac{\partial}{\partial y_k} R_j(0, c_0^1, \ldots, c_0^n)$$

и где R_j^1 — рациональные дроби, обращающиеся в нуль в точке $(0, 0, \ldots, 0)$, так же, как и их частные производные первого порядка по y_k. Правые части (18) могут быть разложены в степенные ряды по $z, f_1, \ldots, f_n$, причем эти ряды не будут содержать ни членов, которые бы не зависели от $z, f_1, \ldots, f_n$, ни членов первой степени, кроме как от z. Если положим

$$f_j(z) = c_1^j z + \ldots + c_\mu^j z^\mu + \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

то можно будет последовательно вычислять формальным образом их коэффициенты. Если c_ν^j вычислены уже до индекса $\mu - 1$, то будем иметь:

$$c_\mu^j m^\mu - \sum_1^n B_{j,k} c_\mu^k = P_{j,k}(c_1^s, \ldots, c_{\mu-1}^s), \tag{19}$$

где $P_{j,k}$ — многочлены относительно $c_1^s, \ldots, c_{\mu-1}^s$, $s = 1, 2, \ldots, n$, и относительно коэффициентов разложения R_j в степенные ряды с суммой индексов не большей чем μ; коэффициенты этих многочленов все положительны.

Коэффициенты c_μ^j определяются единственным образом из уравнений (19), если соответствующий определитель не равен нулю. Если положим, как в § 49,

$$F(s) = \begin{vmatrix} B_{1,1} - s & \ldots & B_{1,n} \\ B_{2,1} & \ldots & B_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n,1} & \ldots & B_{n,n} - s \end{vmatrix},$$

то видим, что достаточно, чтобы определитель $F(m^\mu)$ не обращался в нуль ни при каком целом положительном μ

для того, чтобы было возможно последовательное вычисление коэффициентов c. Эти коэффициенты c будут линейными выражениями относительно $P_{j,k}$, причем коэффициентами при $P_{j,k}$ являются миноры определителя $F(s)$, разделенные на $F(s)$, где $s = m^{\mu}$. Определитель $F(m^{\mu})$ не равен нулю и так как $|m| > 1$, то стремится к бесконечности, когда $\mu \to \infty$. Впрочем, очевидно, что он представляет собой многочлен степени n, в то время как его миноры являются многочленами степени $n-1$. Следовательно, коэффициенты при $P_{j,k}$ в формулах Крамера ограничены по модулю некоторым числом K. Из этого вытекает, что если мы заменим правые части уравнений (18) одной и той же мажорантой, а левые части заменим через

$$\frac{1}{K} f_j(z),$$

то решения полученной таким образом неявной системы, которые равны нулю в начале координат, будут мажорантами для $f_j(z)$. Но эта неявная система уравнений

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n = \\ = K\left[\frac{M}{\left(1-\frac{X}{r}\right)\left(1-\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{R}\right)} - \right. \\ \left. - M\left(1+\frac{Y_1+\ldots+Y_n}{R}\right)\right]$$

имеет голоморфное решение в некотором круге с центром в начале, следовательно, система (18) имеет решение при указанных условиях.

Мы будем иметь неопределенность, если правые части уравнений (19) равны нулю при $\mu = 1$ и если в качестве m выбран один из корней уравнения $F(s) = 0$; тогда надо будет допустить, что $F(m^{\mu}) \neq 0$, начиная с $\mu = 2$, за исключением того случая, когда $F(m^2) = 0$, и соответствующие правые части равны нулю.

§ 54. Частный случай линейного уравнения с множителями. Мы можем, в частности, рассмотреть уравнения вида

$$f(m^p z) = R(z, f(z), f(mz), \ldots, f(m^{p-1}z)), \\ |m| = \sigma > 1, \quad p > 1, \tag{20}$$

где $R(x, y_1, \ldots, y_{p-1})$ — рациональная дробь. Это уравнение (20) эквивалентно некоторой системе. Например, при $p=3$, полагая $f(z)\equiv f_1(z)$, имеем систему:

$$\left.\begin{aligned} f_1(mz) &= f_2(z), \\ f_2(mz) &= f_3(z), \\ f_3(mz) &= R(z, f_1(z), f_2(z), f_3(z)) \end{aligned}\right\}$$

с начальным условием $c_0 = f_1(0) = f_2(0) = f_3(0)$, где c_0 определяется из уравнения

$$c_0 = R(0, c_0, c_0, c_0).$$

Условие разрешимости состоит в следующем:

$$m^{3\mu} \neq m^{2\mu}\frac{\partial R}{\partial y_3} + m^{\mu}\frac{\partial R}{\partial y_2} + \frac{\partial R}{\partial y_1}, \quad \mu = 1, 2, \ldots,$$

где частные производные от R взяты в точке $(0, c_0, c_0, c_0)$. Если это условие выполнено, что в общем случае должно иметь место, то имеем единственное решение $f(z)$ уравнения (20), которое при $z=0$ принимает значение c_0 и является функцией мероморфной или целой, которая может, в частности, быть рациональной дробью, многочленом или постоянной.

Но, например, линейное уравнение вида

$$f(m^p z) = P_0(z) f(m^{p-1}z) + \ldots + P_{p-1}(z) f(z) + P_p(z), \quad (21)$$

где $P_j(z)$ — многочлены, имеет в общем случае решение, которое, как правило, является трансцендентной целой функцией, а не многочленом. *Допустим, что степень $P_0(z)$ больше степени остальных многочленов $P_j(z)$.* Это будет главный член правой части (21), и мы получим:

$$M(r\sigma^p) = Ar^q M(r\sigma^{p-1})\left(1 + \frac{O(1)}{r}\right) \quad q > 0, \quad ,$$

где Ar^q — модуль старшего члена в многочлене $P_0(z)$ при $|z| = r$. Так мы придем к результату, который аналогичен полученному в § 51. *Решение $f(z)$, которое непременно будет трансцендентной целой функцией, имеет максимум модуля $M(r)$, удовлетворяющий асимптотическому соотношению*

$$\ln M(r) \sim \frac{q}{2\ln\sigma}(\ln r)^2.$$

В общем случае уравнения (21) можно ввести в рассмотрение наивысшую степень q всех многочленов $P_j(z)$; тогда получим справедливое при достаточно больших r неравенство

$$M(\sigma^p r) < K r^q M(r\sigma^{p-1}),$$

где K — некоторая постоянная. Отсюда с помощью итерации выводится неравенство

$$\ln M(r) < K'(\ln r)^2, \quad K' = \text{const}.$$

Следовательно, решения являются функциями нулевого порядка и того же вида, что функции, встречавшиеся нам в § 51.

Точно так же, в общем случае уравнения (20), но когда R — многочлен от $z, f(z), \ldots, f(m^{p-1}z)$, можно по крайней мере ограничить порядок $f(z)$: решения, являющиеся целыми функциями, будут всегда неотрицательного конечного порядка.

§ 55. Дифференциальное функциональное уравнение с множителем. Функциональное уравнение

$$f'(mz) = R(z, f(z)), \quad |m| = \sigma > 1, \tag{22}$$

где $R(x, y)$ — данная рациональная дробь, $f(z)$ — неизвестная функция, а $f'(z)$ — ее производная, обладает голоморфным в начале координат решением, которое может принимать в этой точке произвольно данное значение c_0, если только $R(0, c_0)$ остается конечным. В самом деле, так как $R(x, c_0+u)$ разлагается в степенной ряд по x и u, то можно применить для доказательства метод Коши.

Если разложение $f(z)$ в степенной ряд в окрестности точки $z=0$ будет

$$f(z) = \sum_0^\infty c_\mu z^\mu, \tag{23}$$

то вычисление коэффициентов c_μ производится так же, как в случае $m=1$, но теперь мы будем иметь выражения относительно $m^{\mu-1}$, а именно:

$$\mu m^{\mu-1} c_\mu = P_\mu(c_1, c_2, \ldots, c_{\mu-1}, a_{i,j}),$$

где $a_{i,j}$ — коэффициенты разложения в ряд функции $R(x, c_0+u)$. Что касается P_μ, то это те же многочлены, что и в случае $m=1$, так что функция (23) имеет ту же мажоранту, которая фигурирует в доказательстве теоремы Коши при $m=1$, так как границы, получаемые для $|c_\mu|$, оказываются умноженными на число, меньшее чем единица. Ряд для функции $f(z)$, определенный посредством формального вычисления коэффициентов, является, следовательно, сходящимся в круге $|z|>\gamma$, получающемся в методе Коши, значит, уравнение (22) имеет решение в круге $\sigma|z|<\gamma$ и, следовательно, благодаря (22) в круге $|z|<\gamma$. Если $f(z)$ мероморфна в круге $|z|<\delta$, то $R[z,f(z)]$ также мероформна при $|z|<\delta$, что влечет за собой только мероморфность $f'(z)$ в круге $|z|<\delta\sigma$, причем $f(z)$ может не быть уже мероморфной в этом круге, если $f'(z)$ имеет полюсы, вычеты которых отличны от нуля. Нельзя быть уверенным в том, что $f(z)$ может быть однозначно продолжена, за исключением того случая, когда $R(z, f(z))$ — многочлен относительно z и $f(z)$. В последнем случае справедливо следующее предложение:

Если $R(x,y)$ — многочлен по x и y и если c_0 — произвольное заданное число, то уравнение (22) *имеет решение, которое является целой функцией, принимающей в точке $z=0$ значение c_0.*

Аналогичный результат имеет место и при более общих условиях. Уравнение вида

$$f''(mz)=Q(z,\ f(z),\ f'(z)),\quad |m|>1,$$

где $Q(x,\ y_1,\ y_2)$ — многочлен от трех переменных, имеет решение, являющееся целой функцией, имеющей произвольные значения $f(0)$ и $f'(0)$. И так далее.

Если, как в § 51, поставить перед собой задачу выяснить, что можно сказать в общем случае относительно порядка функций, вводимых таким образом, то будет важно найти зависимость между $M(r, f)$, максимумом $|f(re^{i\varphi})|$, $0<\varphi\leqslant 2\pi$ и $M(r, f')$, относящимися к производной, Именно этим мы сначала и займемся.

§ 56. Теорема Адамара о возрастании $\ln M(r)$. Рассмотрим вообще функцию $\Phi(z)$, голоморфную в кольце

$$0\leqslant R_1\leqslant|z|\leqslant R_2<\infty$$

и обозначим через $M(r, \Phi)$ максимум $|\Phi(z)|$ на окружности $|z|=r$. Положим

$$X=\ln r, \quad V(X)=\ln M(r, \Phi),$$
$$R_1 \leqslant r \leqslant R_2$$

и возьмем три значения X, X_1, X_2, такие, что

$$\ln R_1 \leqslant X_1 < X \leqslant X_2 \leqslant \ln R_2.$$

Если h — число, определяемое равенством

$$V(X_1)-hX_1=V(X_2)-hX_2,$$

то функция

$$\Phi(z)z^{-h},$$

вообще говоря, многозначна в кольце

$$X_1 \leqslant \ln|z| \leqslant X_2,$$

но ее различные ветви голоморфны во всех точках кольца, а модуль

$$|\Phi(z)|r^{-h}$$

однозначен. В силу принципа максимума максимум модуля достигается лишь на границе, если только функция не равна тождественно постоянной. Мы имеем, следовательно,

$$V(X)-hX<V(X_1)-hX_1=V(X_2)-hX_2,$$

за исключением того случая, когда во всем кольце справедливо равенство

$$V(X)-hX=V(X_1)-hX_1.$$

Следовательно, точка с координатами $(X, V(X))$ лежит под прямой, соединяющей точки с координатами $(X_1, V(X_1))$ и $(X_2, V(X_2))$, за исключением того случая, когда $V(X)$ линейна на отрезке $[X_1, X_2]$. Это свойство, установленное Адамаром, выражают словами, что $V(X)$ выпуклая функция от X. В силу общих свойств этих функций, ставших уже классическими, $V(X)$ имеет производную слева и справа в каждой точке промежутка $(\ln R_1, \ln R_2)$, причем производная слева менее, чем производная справа, в тех точках, образующих счетное множество точек, в которых нет производной. Производная

справа, например, является неубывающей, и если мы обозначим ее через $V'(X)$, то будем иметь:

$$V(X)=V(X_0)+\int_{X_0}^{X} V'(u)\,du,$$

где X_0 — произвольная фиксированная точка из нашего промежутка *).

Возвращаясь к частному случаю целой функции $f(z)$, имеем следующий результат:

Функция $\ln M(r, f)$ *является бесконечно возрастающей функцией от* r, *выпуклой функцией относительно* $\ln r$ *при положительных* r *и, кроме того, имеет место равенство*

$$\ln M(r, f)=\ln M(r_0, f)+\int_{r_0}^{r}\frac{W(u)}{u}\,du, \tag{24}$$

где r_0 — *произвольное положительное число, которое может быть заменено нулем, если* $f(0)\neq 0$, *а* $W(u)$ — *неубывающая функция от* u.

Более тонкие свойства функции $M(r, f)$ были установлены Блюменталем и Данжуа, в частности, эта функция является аналитической по интервалам. Были изучены особенности этой функции.

§ 57. Соотношение между максимумами модулей функции и ее производной. Первые общие результаты в вопросах этого рода были получены Борелем. Допустим, что $f(z)$ — трансцендентная целая функция (не многочлен). Если z' — точка окружности $|z|=r$, в которой $|f(z')|=\max|f(z)|=M(r, f)$, то мы имеем, очевидно:

$$M(r, f)\leqslant|f(0)|+\left|\int_{0}^{z'} f'(z)\,dz\right|<rM(r, f')+|f(0)|. \tag{25}$$

---

*) Свойства выпуклых функций изложены, например, в главах II и III 2-го отдела книги Г. Полиа и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, т. I, издание 2-е, Гостехиздат, 1955. (*Прим. ред*).

С другой стороны, теорема Коши о производных, примененная к точке z'' с модулем r, в которой $|f'(z'')| = M(r, f')$ и к кругу Γ, $|u - z''| \leqslant \alpha$, дает:

$$M(r, f') = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u - z'')^2} du \right| < \frac{M(r + \alpha, f)}{\alpha}. \qquad (26)$$

Из этих неравенств Борель, используя установленные им свойства возрастающих функций, вывел, что $\ln M(r, f)$ и $\ln M(r, f')$ имеют вне некоторых исключительных интервалов одинаковый порядок возрастания при бесконечном возрастании r.

Мы предположим здесь, что порядок функции $f(z)$ конечен и равен ρ. Тогда при достаточно больших r будем иметь:

$$\ln M(r, f) < r^{\rho+\varepsilon},$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$, откуда, учитывая (24), получаем:

$$\int_r^{2r} \frac{W(u)\, du}{u} < (2r)^{\rho+\varepsilon},$$

и, так как $W(u)$ не убывает, то выполняется неравенство

$$W(r) \ln 2 < (2r)^{\rho+\varepsilon},$$

но, поскольку ε произвольно мало, то, начиная с достаточно больших r, можем написать:

$$W(r) < r^{\rho+\varepsilon}.$$

Тогда равенство (24) дает:

$$\ln M(r + \alpha, f) = \ln M(r, f) + \int_r^{r+\alpha} \frac{W(u)}{u} du,$$

где интеграл в правой части менее чем

$$(r + \alpha)^{\rho+\varepsilon} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) < \frac{\alpha}{r} r^{\rho+\varepsilon} \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^{\rho+\varepsilon},$$

и если положим

$$\frac{\alpha}{r} = \frac{1}{r^{\rho+\varepsilon}},$$

так что это выражение стремится к нулю вместе с $\frac{1}{r}$, то при достаточно больших r получим:

$$\ln M(r+\alpha,\ f) < \ln M(r,\ f) + 2.$$

Внося значение α и оценку $M(r+\alpha,\ f)$ в (26), мы видим, что как бы мало ни было ε, начиная с некоторого r, будем иметь:

$$M(r,\ f') < r^{\rho-1+\varepsilon} M(r,\ f). \tag{27}$$

Неравенства (25) *и* (27) *показывают, что для всякой функции конечного порядка*

$$\ln M(r,\ f') \sim \ln M(r,\ f),$$

но они влекут за собой и более точное соотношение

$$\ln M(r,\ f') = \ln M(r,\ f) + O(\ln r),$$

где

$$-\frac{K_0}{r} - \ln r < O(\ln r) < (\rho - 1 + \varepsilon)\ln r. \tag{28}$$

Из результатов главы IX будет следовать, что неравенства (25) и (27) почти не могут быть улучшены; с точностью до множителя r^{ε} они являются окончательными.

§ 58. Применение к дифференциальным уравнениям с множителями. Если мы вернемся к рассмотрению уравнений (22) из § 55, предполагая, что $R(x,\ y)$ является многочленом по x и по y, то решение будет целой функцией конечного порядка. Действительно, если решение не является многочленом, то будет выполняться асимптотическое равенство

$$M(r\sigma,\ f') \sim A r^{q} M(r,\ f)^{p}, \tag{29}$$

следовательно, и подавно в силу неравенства (25) будем иметь

$$M(r\sigma,\ f) < 2\sigma A r^{q+1} M(r,\ f)^{p}$$

или

$$\ln M(r\sigma,\ f) < p \ln M(r,\ f) + O(\ln r). \tag{30}$$

Итерация этого неравенства показывает, как в § 51, что $f(z)$ будет иметь конечный порядок, не превосходящий

числа $\ln p/\ln\sigma$, если $p>1$. При $p=1$ эта итерация даст:

$$\ln M(r, f)=O(\ln^2 r),$$

так что в этом случае порядок равен нулю и функция принадлежит простому классу, для которого отношение $\ln M(r, f)/\ln^2 r$ остается ограниченным.

После того как этот результат получен, мы можем теперь воспользоваться неравенством (27); иными словами, заменить неравенство (30) равенством, в котором известны границы для $O(\ln r)$, указываемые посредством (28). Таким образом, приходим к следующему результату:

Если $p>1$, то решение будет порядка

$$\rho=\frac{\ln p}{\ln\sigma},$$

а пределами неопределенности выражения

$$r^{-\rho}\ln M(r, f)$$

будут два положительных числа.

Что касается случая $p=1$, то можно обратиться к статье Дебея. Если q означает степень многочлена, который является коэффициентом при $f(z)$ в многочлене $R(z, f(z))$, то имеет место асимптотическое равенство

$$\ln M(r, f)\sim\frac{(q+1)\ln^2 r}{2\ln\sigma}.$$

§ 59. Общее замечание относительно функциональных уравнений с аналитическими решениями. Как было уже сказано в § 49, Пикар распространил результаты Пуанкаре; другие обобщения были даны различными авторами. Известно, например, что теорема существования распространяется на случай, когда функции R_j из § 49 будут голоморфными функциями от u_k, при всех конечных u_k. Такое распространение может представлять интерес в некоторых случаях, но если задача, которую мы перед собой ставим, состоит в том, чтобы исследовать новые функции, то, кажется, следовало бы ограничиться случаями, когда функции R_j являются простыми функциями, принадлежащими к уже определенным и изученным классам, чтобы избежать слишком широких обобщений, которые могли бы уже оказаться бесплодными.

Действительно, если даны, например, две функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитические в одной и той же области D, и если

мы предположим, что эти функции голоморфны в некоторой точке z_0 из D и что $f_1'(z_0) \neq 0$, то существует аналитическое соотношение между значениями $Z_1 = f_1(z)$ и $Z_2 = f_2(z)$, справедливое в некоторой области, содержащей точку z_0. В самом деле, пусть $z = f_{-1}(Z_1)$ будет функцией, обратной к функции $Z_1 = f_1(z)$, а именно той ветвью обратной функции, которая принимает значение z_0 в точке $Z_1 = f_1(z_0)$. Тогда в некоторой области, содержащей точку z_0, будем иметь:

$$Z_2 = f_2[f_{-1}(Z_1)],$$

где функция $f_2(f_{-1})$ будет аналитической в окрестности точки $f_1(z_0)$. Следовательно, можно сказать, что всякая аналитическая функция является аналитической функцией от любой другой аналитической функции. Стало быть, факт, что две аналитические функции связаны между собой аналитическим соотношением, имеет некоторое значение только в том случае, если рассматриваемое соотношение носит какой-либо простой характер. Как раз рассмотрения этого рода и входят в определение функций, которые называют «новыми». Некоторая функция может появиться в качестве «новой» благодаря тому, что она определена с помощью процесса, по видимости «нового», но в действительности она будет «новой» функцией лишь в том случае, если она является весьма простой функцией от функций, рассматриваемых в качестве известных.

Известны аналогичные результаты относительно нескольких функций от одной переменной, чем и оправдывается то, что прежде всего мы интересуемся рациональными соотношениями, затем алгебраическими. Но тем не менее, случается, что мы легко выходим за пределы тех рассмотрений, которыми хотели ограничиться. Например, в теореме Пуанкаре, приведенной в § 49, может случиться, что система уравнений распадается, что, естественно, приводит к соотношениям более общего типа. Так, система Пуанкаре

$$f_1(mz) = R_1(f_1(z)),$$
$$f_2(mz) = R_2(f_1(z), f_2(z))$$

распадается и $f_1(z)$ определяется из первого уравнения, что приводит к рассмотрению соотношения

$$f(mz) = R_3[z, f(z)],$$

получающегося, если положить $f_2(z) \equiv f(z)$, и где $R_3(x, y)$ — функция, рациональная относительно y, но отнюдь не являющаяся таковой относительно x.

§ 60. Случай, когда множитель m равен по модулю единице. Доказательство локальной теоремы существования для системы типа Пуанкаре в простом случае, рассмотренном в § 50, требует только, чтобы выражение $|m^\mu - a_{0,1}|$, $\mu = 1, 2, \ldots$ имело положительный минимум, что в случае $|m| = 1$ будет иметь место, если $|a_{0,1}| \neq 1$. Точно так же в общем случае, рассмотренном в § 53, условие, что коэффициенты при $P_{j,k}$ должны иметь ограниченный модуль, будет распространяться и на случай, когда $|m| = 1$. Будет справедлива также при $|m| = 1$ доказанная в § 55 локальная теорема существования решений дифференциальных уравнений с множителем. Но продолжение решения, полученного в окрестности начала координат, не будет уже осуществляться автоматически посредством самого уравнения, так как точки zm^p остаются на окружности $|z| = \text{const}$. Это случай, когда неподвижная точка является безразлиной. Напротив, в этом случае эффект от введения множителя m будет состоять в том, что возрастает число особ точек, главным образом *когда аргумент* θ *числа* m *бу несоизмерим с* π. Мы приходим здесь в простых случаях к функциям, определяемым степенными рядами, уже непродолжаемыми с момента, как появится хоть одна особенность. Так, ряд по рациональным дробям Пуанкаре

$$f(z) = \sum_1^\infty \frac{1}{k^n (z - e^{i\theta n})}, \quad |z| < 1,$$

где θ несоизмеримо с π и $|k| > 1$, определяет функцию, областью существования которой является круг $|z| < 1$; эта функция удовлетворяет уравнению

$$f(z) = \frac{1}{k(z - e^{i\theta})} + \frac{1}{ke^{i\theta}} f(ze^{-i\theta}),$$

из которого вытекает невозможность продолжения.

Степенной ряд

$$F(z) = \sum_0^\infty m^{n^2} z^n, \quad m = e^{i\theta},$$

радиус сходимости которого равен единице, удовлетворяет функциональному уравнению

$$F(m^2 z)\, mz = F(z) - 1,$$

которое показывает, что если отношение θ/π иррационально, то окружность $|z| = 1$ будет естественной границей, так как эта окружность должна содержать некоторую особую точку α функции $F(z)$, и в силу нашего соотношения особой точкой будет также $m^2\alpha$, следовательно, все точки $m^{2q}\alpha$, $q = 1, 2, \ldots$, которые образуют плотное множество на окружности.

Аналогично, дифференциальное функциональное уравнение

$$(1 - z) f'(mz) = f(z), \quad m = e^{i\theta},$$

определяет функцию, голоморфную при $|z| < 1$, равную единице в точке $z = 0$ и непродолжаемую в случае, если отношение θ/π иррационально, так как если α, $|\alpha| = 1$, является особенностью функции $f(z)$, то $\frac{\alpha}{m}$ также будет особой точкой, в противном случае $f(z)$ была бы голоморфна в точке α, и доказательство завершается рассуждением, подобным приведенному в предыдущем примере.

Но в случае линейного уравнения вида

$$f'(mz) = P(z) f(z) + Q(z),$$
$$m = e^{i\theta},$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — многочлены, решение является целой функцией, поскольку оно таково при $m = 1$. Среди этих решений укажем функцию

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty \frac{m^{n2} z^n}{n!} \quad |m| = 1,$$

для которой

$$\varphi'(z) = m\, \varphi(zm^2),$$

следовательно, имеет место равенство

$$M(r, \varphi^{(q)}) = M(r, \varphi).$$

Это свойство приближало бы функцию $\varphi(z)$ к экспоненциальной, но для функции $\varphi(z)$ при условии, что отноше-

ние θ/π иррационально, модуль $\varphi(z)$ остается сравнимым с $M(r, \varphi)$ в точках, аргументы которых могут быть сколь угодно близки к любому заданному аргументу.

Литературные ссылки

§ 49. Poincaré, 1; Picard, 2.
§§ 50, 51, 52, 53, 54, 55. Valiron. 4, 7′.
§ 56. Hadamard, 1; Blumenthal, 1; Denjoy, 2; Valiron, 4.
§ 57. Valiron, 15.
§ 58. Valiron, 7′; Debey, 1.
§ 60. Valiron, 17, 20.

ГЛАВА VIII

О НЕКОТОРЫХ НЕПРОДОЛЖАЕМЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

§ 61. Односвязные поверхности Римана. Три типа поверхностей. В § 9 было уже вкратце сказано, что понимают под поверхностью Римана — Пуанкаре, соответствующей аналитической функции $Z = f(z)$, определенной с помощью аналитического продолжения ее тэйлоровского элемента; это продолжение может быть осуществлено посредством счетного множества ее элементов [теорема Пуанкаре — Вольтерра (§ 8)]. Этому множеству элементов соответствует множество внутренних точек круговых дисков, которые являются кругами сходимости этих тэйлоровских элементов; эти диски и определяют поверхность Римана — Пуанкаре S. К S присоединяют также полюсы и критические алгебраические точки (§ 10), образующие простые или разветвленные круги, на которых $f(z)$ разлагается в ряд по степеням $(z - z_0)$ с дробными показателями, положительными или отрицательными. Можно перейти от одного диска к другому посредством конечного числа дисков, образующих цепочку, каждый элемент которой прилегает к предыдущему.

Точка из S представляет собой некоторую точку P одного из дисков, образующих S. Две точки P и Q из S могут быть соединены между собой с помощью непрерывных кривых, расположенных в S, а именно, с помощью кривых, которые расположены в дисках той цепочки, первый диск которой содержит точку P, а последний — точку Q. Такая кривая Γ из S, соединяющая P и Q, может быть деформирована непрерывным образом, не переставая принадлежать к S, так как можно деформировать Γ на каждом диске цепочки, заменить этот диск другим, который имеет с ним общую часть, и т. д. Можно, в частности, рассмат-

ривать замкнутые кривые, расположенные на S, иными словами, те кривые (по-прежнему непрерывные), которые соединяют точку P из S с той же самой точкой P. *Поверхность S называется односвязной, если всякая замкнутая кривая S может быть путем непрерывной деформации приведена к точке.*

Рассмотрим, например, голоморфную в односвязной однолистной области D плоскости z функцию $Z=f(z)$, для которой D является естественной областью существования (§§ 10, 11). Когда точка z пробегает область D, точка $Z=f(z)$ описывает риманову поверхность Σ функции $z=\varphi(Z)$, обратной к $Z=f(z)$; эта поверхность односвязна, так как замкнутой кривой Γ из Σ соответствует в D кривая γ — кривая, описываемая точкой $z=\varphi(Z)$, когда Z описывает Γ; но поскольку γ может быть путем непрерывной деформации в области D приведена к точке, так как D односвязна, то Γ также может быть приведена к точке путем непрерывной деформации. По тем же соображениям поверхность Римана, описываемая значениями Z функции $Z=f(z)$, мероморфной во всякой конечной части плоскости, будет односвязной; в частности, поверхность Σ, описываемая значениями функции $Z=R(z)$, где $R(z)$ — рациональная функция (которая определена, следовательно, в полной комплексной плоскости), будет односвязной.

Пуанкаре доказал, что если поверхность Римана — Пуанкаре односвязна, то ее можно конформно и взаимно однозначно отобразить на полную комплексную плоскость, или на плоскость, из которой удалена одна точка (можно предполагать, что эта бесконечная точка), или на круг конечного радиуса. При этом отображении конформность имеет место даже в точках алгебраического ветвления, если допустить, что в окрестности такой точки Z_0 поверхность отображается сначала на однолистный диск с помощью преобразования $Z-Z_0=\zeta^q$.

Если отображение имеет место:

1° *на полную комплексную плоскость, то говорят, что поверхность эллиптического типа,*

2° *на плоскость с удаленной точкой, то говорят, что поверхность параболического типа,*

3° *на окружность конечного радиуса, то говорят, что поверхность гиперболического типа.*

В первом случае функция $Z=f(z)$, отображающая всю комплексную плоскость на поверхность, является рациональной функцией; во втором случае функция $Z=f(z)$, отображающая комплексную плоскость, из которой изъята бесконечно удаленная точка, является функцией, мероморфной во всякой конечной части плоскости; в третьем случае функция $Z=f(z)$, отображающая круг $|z|<1$ на поверхность, является функцией, мероморфной в этом круге, причем этот круг представляет собой естественную область ее существования.

В частности, *поверхность S, описываемая значениями Z функции $Z=f(z)$, голоморфной в круге $|z|<1$ и такой, что окружность $|z|=1$ является ее естественной границей, будет поверхностью гиперболического типа.*

§ 62. Особенности поверхности S. Рассмотрим такую поверхность S, которая принадлежит к гиперболическому типу и не содержит бесконечно удаленной точки. Чтобы избежать трудностей, порождаемых наличием бесконечно удаленной точки, можно предполагать, что S задана на римановой сфере.

Особенностями поверхности S, иными словами, особенностями функции $z=\varphi(Z)$, обратной к $Z=f(z)$, являются прежде всего критические алгебраические точки. Так как в силу принятого соглашения эти точки присоединены к S, то, следовательно, нужно видоизменить определение дисков, образующих S. Критическая алгебраическая точка Z_0 происходит от точки z_0 такой, что $f'(z_0)=0$, $Z_0=f(z_0)$. При достаточно малых $|z-z_0|$ имеем:

$$Z-Z_0=c_q(z-z_0)^q+c_{q+1}(z-z_0)^{q+1}+\ldots=$$
$$=c_q(z-z_0)^q[1+\theta(z)],\quad c_q\neq 0,\ q>1,$$

где выражение в скобках не обращается в нуль в круге с центром в точке z_0; корни степени q из этого выражения голоморфны в этом круге. Можно взять тот из корней степени q, который принимает в нуле значение 1, и продолжить его. Тогда получим:

$$Z-Z_0=c_q\zeta^q, \tag{1}$$

где

$$\zeta=\chi(z-z_0),\quad \chi(0)=0,\quad \chi'(0)=1. \tag{2}$$

Эта функция χ голоморфна и однолистна в некотором круге с центром в точке z_0; ее обратная функция

$$z - z_0 = \Omega(\zeta), \quad \Omega(0) = 0, \quad \Omega'(0) = 1,$$

голоморфна в окрестности точки $\zeta = 0$. Тогда в начале координат имеем некоторый диск $\mathfrak{D}_0$ голоморфности $\Omega(\zeta)$, который взаимно однозначно соответствует некоторой области плоскости z, содержащей точку z_0. Когда ζ описывает $\mathfrak{D}_0$, точка Z, определенная посредством (1), описывает диск, распадающийся на q листков поверхности S, радиус которых определяется по радиусу $\mathfrak{D}_0$. Мы будем рассматривать этот диск как диск поверхности. Пусть ζ_1 точка, принадлежащая области $\mathfrak{D}_0$, и отличная от $\zeta = 0$, а $\mathfrak{D}_1$ — круг голоморфности функции $\Omega(\zeta)$, центр которого расположен в точке ζ_1. Этой области $\mathfrak{D}_1$ соответствует взаимно однозначно некоторая область круга D, $|z| < 1$, содержащая точку $z_1 = z_0 + \Omega(\zeta_1)$, и отображение (1) ставит этой области в соответствие через посредство $\mathfrak{D}_1$ часть поверхности S, содержащую точку Z_1. Если $\mathfrak{D}_1$ не содержит точки $\zeta = 0$, то эта часть поверхности S не содержит точки Z_0 и нам не нужно видоизменять определение диска с центром в Z_1 на S. Но если $\mathfrak{D}_1$ содержит точку $\zeta = 0$, что имеет место в том случае, когда $|z_1 - z_0|$, а следовательно, и $|\zeta|$ достаточно мал, то мы будем рассматривать в качестве диска с центром в точке Z_1 на S часть поверхности S, соответствующую $\mathfrak{D}_1$, а именно ту часть, которая содержит точку Z_0 и ограничена кривой, q раз обходящей точку Z_0. Мы примем в качестве радиуса (фиктивного) этого диска радиус $\mathfrak{D}_1$. Определение прилегающих дисков остается без изменения.

Учитывая это расширение определения диска, мы видим, что всякая точка Z' поверхности S является центром некоторого диска, то ли простого, то ли разветвленного, и что если некоторая точка Z из S стремится к Z', то радиус диска с центром в Z имеет пределом радиус диска с центром в Z'

Граничная точка Z' поверхности S будет, таким образом, пределом последовательности прилегающих дисков, радиусы которых стремятся к нулю: если Z_n, $z_n = \varphi(Z_n)$, являются центрами этих дисков, то значения Z_n и вообще

точек Z из этих дисков имеют своим пределом Z'. Точки z_n не могут иметь предельной точки z' внутри D, так как в противном случае точке z' соответствовал бы диск из S, который содержал бы последовательность точек Z_n, и радиусы дисков с центрами в Z_n не стремились бы к нулю. Из этого мы делаем следующее заключение:

Если Z' является граничной точкой S, то существует непрерывная кривая $z=z(t)$ в D, $0\leqslant t<1$ такая, что $\lim\limits_{t\to 1}|z(t)|=1$, на которой функция $f[z(t)]$ стремится к Z', когда t стремится к единице. Кривая $z(t)$ может кончаться в некоторой точке окружности Γ, $|z|=1$, может к ней асимптотически приближаться, как спираль, и т. п. Говорят, что Z' является асимптотическим значением $f(z)$ и что кривая $z=z(t)$ — путь определения Z'.

Обратно, допустим, что существует некоторое асимптотическое значение функции $f(z)$; обозначим его через Z', соответствующее пути γ, $z=z(t)$, $0\leqslant t<1$. Когда z описывает кривую γ, точка Z описывает кривую γ' из S, $Z=f[z(t)]$ и Z стремится к Z', когда $t\to 1$. Точка Z' является граничной точкой S. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать, что радиусы дисков функции $z=\varphi(Z)$ с центрами на γ' стремятся к нулю. В самом деле, если бы диск с центром в точке Z'' имел радиус, больший, чем $|Z''-Z'|$, то он содержал бы кривую γ', начиная с некоторой ее точки $Z'''=f(z''')$; если точка Z принадлежала бы этому элементу, то z принадлежала бы области D, которая содержала бы кривую γ, начиная с точки z''', что невозможно, потому что на γ имеет место соотношение $\lim\limits_{t\to 1}|z(t)|=1$.

Следовательно,

Особенности поверхности S являются асимптотическими значениями функции $f(z)$.

§ 63. Несколько частных случаев. Если функция $f(z)$ ограничена в D, то к ней применима теорема Фату о радиальных пределах, эти граничные значения дают особенности S.

Рассмотрим функции Кёнигса $K(z)$, соответствующие подстановке с инвариантным основным кругом, первого рода и первого типа, изученные в § 39. Такая функция $K(z)$, голо-

морфная в круге $|z|<1$, имеет окружность Γ своей естественной границей. Мы видели, что модуль $K(z)$ бесконечно возрастает, когда z стремится к Γ, оставаясь вне маленьких областей, содержащих нули $K(z)$; размеры этих областей были исследованы в § 39. Как бы велико ни было число A, имеет место неравенство $|K(z)|>A$ в окрестности контура Γ вне упоминавшихся выше маленьких областей, следовательно, в области бесконечной связности, ограниченной окружностью Γ и кривой, лежащей внутри Γ; эта область содержит простые замкнутые кривые, окружающие начало координат и лежащие в любом кольце $1-\gamma<|z|<1$, как бы мало ни было положительное γ. Мы видим, что в этом случае есть только одно асимптотическое значение, а именно, бесконечность. Рассмотрим два пути определения значения бесконечности, которые, начиная с некоторого $|z|$, уже не пересекаются. Можно соединить эти пути кривыми, сколь угодно близкими к Γ, на которых $|Z|=|K(z)|$ остается сколь угодно большим; кривые, соответствующие на S этим двум путям определения бесконечности, заканчиваются, следовательно, в одной и той же точке границы. *На поверхности Римана, определенной посредством $Z=K(z)$, существует одна-единственная граничная точка, а именно, бесконечно удаленная точка.*

Бесконечно удаленная точка на S является также предельной точкой критических алгебраических точек на S. Действительно, допустим в общем виде, что $Z=F(z)$ голоморфна и не ограничена при $|z|<1$ и что, как бы велико ни было A, точки, где $|Z|>A$, образуют одну область $\Delta(A)$, получаемую из своего рода кольца, ограниченного окружностью Γ и кривой, лежащей внутри Γ, путем удаления бесконечного числа замкнутых областей, расположенных внутри Γ. Тогда $Z=\infty$ является единственной граничной точкой S и она является предельной для критических алгебраических точек. Если заставим A возрастать, то область $\Delta(A)$ будет суживаться, и существует такое A, при котором граничные кривые $\Delta(A)$ будут иметь общую точку; в такой точке имеем $|F(z)|=A$ и $F'(z)=0$, а точка $Z=F(z)$ будет критической алгебраической точкой функции, обратной к $Z=F(z)$, $|Z|=A$.

Такими же свойствами обладают поверхности S функций, определенных Лузиным и Приваловым. Эти свойства сбли-

жают рассматриваемые функции с целыми функциями порядка меньше чем $^1/_2$, модуль которых стремится к бесконечности, когда z удаляется в бесконечности вдоль пути, внешнего по отношению к некоторым областям, дополнение к которым содержит окружности сколь угодно большого радиуса с центром в начале координат. Для такой функции $Z=f(z)$ единственной особенностью поверхности S, описываемой Z, будет бесконечно удаленная точка, и эта точка является пределом алгебраических особенностей S.

Напротив, существуют весьма простые целые функции, для которых асимптотические значения, которые также образуют граничные значения соответствующей поверхности S, не являются предельными точками критических алгебраических точек. А именно, это имеет место для экспоненциальных функций e^z, e^{z^p}, которые обладают лишь конечным числом этих критических точек. Для этих функций $Z=f(z)$, точки, где $|f(z)|>A$, образуют односвязную область. Если мы обратимся к гиперболическому случаю, то задача будет состоять в том, чтобы построить функции $Z=F(z)$, голоморфные при $|z|<1$, и такие, что точки, где $|F(z)|>A$, образуют односвязные области при достаточно больших A, причем эти области имеют все точки окружности Γ, $|z|=1$, своими граничными точками. Простейшими областями этого рода являются как будто спирали, регулярно навивающиеся на Γ.

§ 64. Построение поверхности S указанного выше вида. Чтобы построить такую поверхность S, мы рассмотрим сначала в плоскости $\zeta=\xi+i\eta$ целую функцию, которая стремится к бесконечности на оси $\xi=0$ при $\eta>0$, стремящемся к бесконечности, и которая стремится к нулю вдоль кривых, асимптотически приближающихся к этой оси. Нужно будет, чтобы эта сходимость к нулю была очень быстрой. Для определенности рассмотрим функцию

$$g(\zeta)=e_3(-i\zeta), \quad \zeta=\xi+i\eta, \tag{3}$$

где положено

$$e_1(u)=e^u, \quad e_2(u)=e_1(e_1(u)), \quad e_3(u)=e_1(e_2(u)).$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
e_1(-i\zeta) &= e^{\eta}(\cos\xi - i\sin\xi),\\
e_2(-i\zeta) &= e_1(e^{\eta}\cos\xi - ie^{\eta}\sin\xi) =\\
&= e_1(e^{\eta}\cos\xi)[\cos(e^{\eta}\sin\xi) - i\sin(e^{\eta}\sin\xi)],\\
\Re e_2(-i\zeta) &= e_1(e^{\eta}\cos\xi)\cos(e^{\eta}\sin\xi),\\
|g(\zeta)| &= e_1[e_1(e^{\eta}\cos\xi)\cos(e^{\eta}\sin\xi)].
\end{aligned} \tag{4}$$

Равенство (4) показывает, что модуль $g(\zeta)$ возрастает бесконечно не только при $\xi = 0$, но также и при

$$|e^{\eta}\sin\xi| < \frac{\pi}{2},$$

следовательно, внутри области, ограниченной кривыми

$$e^{\eta}\sin\xi = \pm\frac{\pi}{2} \qquad \left(\eta > 1,\ |\xi| < \frac{\pi}{2}\right).$$

В части этой области, например, той, где

$$|e^{\eta}\sin\xi| < \frac{\pi}{3},$$

$\cos\xi$ более, чем некоторое положительное число, и из (4) вытекает неравенство

$$|g(\zeta)| > e_2(e^{a\eta}), \quad a > 0.$$

Напротив, если

$$\frac{\pi}{2} + \alpha \leqslant |e^{\eta}\sin\xi| \leqslant \frac{3\pi}{2} - \alpha, \qquad |\xi| < \frac{\pi}{2}, \tag{5}$$

где α заключено между 0 и $\frac{\pi}{2}$, то $|g(\zeta)|$ стремится к нулю, когда η бесконечно возрастает, и мы имеем:

$$|g(\zeta)| < e_1(-e_2(b\eta)), \quad b > 0. \tag{6}$$

Отобразим теперь область

$$|e^{\eta}\sin\xi| \leqslant \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad |\xi| < \frac{\pi}{2}, \quad \eta \geqslant \eta_0 > 1, \tag{7}$$

на спиральную область, асимптотическую к окружности Γ, $|z| = 1$, и лежащую внутри круга D, $|z| > 1$. Мы сделаем преобразование

$$z = e_1\left(\zeta - \frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right), \quad \zeta = \xi + i\eta, \tag{8}$$

где радикал определяется условием, что при $\xi=0$, $\eta>0$ выполняется равенство

$$\sqrt{\zeta}=(1+i)\sqrt{\frac{\eta}{2}}.$$

Если предположим сначала, что $\xi=0$, то имеем:

$$z=e_1\left(i\eta-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)=$$
$$=e_1\left(\frac{-1}{\sqrt{2\eta}}\right)e_1\left(i\left(\eta+\frac{1}{\sqrt{2\eta}}\right)\right). \quad (9)$$

Модуль z менее, чем единица, возрастает с ростом η и стремится к единице; переменная

$$\eta+\frac{1}{\sqrt{2\eta}},$$

производная которой

$$1-\frac{1}{2\sqrt{2}\,\eta\sqrt{\eta}}$$

положительна при $\eta\geqslant 1$, стремится к бесконечности, монотонно возрастая. Кривая γ, соответствующая $\xi=0$, представляет собой спираль, которая навивается на окружность Γ, идя в положительном направлении. Если M — точка на кривой γ, соответствующая $\eta>\eta_0$, то луч OM пересекает спираль в бесконечном множестве точек; та из этих точек M', для которой $OM'>OM$ и OM' является наименьшим, имеет аргумент, близкий к $\eta+2\pi$, он соответствует некоторому η', такому, что $\eta'-\eta$ имеет пределом 2π при η, стремящемся к бесконечности. В силу (9) отношение OM' к OM равно

$$e_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2\eta'}}+\frac{1}{\sqrt{2\eta}}\right),$$

и выражение в скобках эквивалентно

$$\frac{\eta'-\eta}{2\sqrt{2}\,\eta\sqrt{\eta}}\sim\frac{\pi}{\sqrt{2}\,\eta\sqrt{\eta}}.$$

Это показывает, что если в (8) положить

$$\xi=\frac{\lambda}{2\eta\sqrt{\eta}},$$

где λ — заданная постоянная, заключенная между -1 и $+1$, и если $\eta > \eta_0$, где η_0 достаточно велико, то получим семейство попарно непересекающихся спиралей, которые заполняют целиком спиральную область Δ, для которой γ является центральной спиралью. Эта область Δ взаимно однозначно и конформно соответствует области Δ' плоскости ζ:

$$2|\xi|\eta\sqrt{\eta} < 1, \quad \eta > \eta_0, \tag{10}$$

которая содержит область (7). При этом отображении отношение подобия гомологических кривых относительно точки ζ, которое равно

$$|z|\left|1+\frac{1}{2\zeta\sqrt{\zeta}}\right|,$$

стремится к единице, когда ζ уходит в бесконечность или $|z|$ стремится к единице. Область Δ', определенная посредством (10), очевидно, содержит область, определенную с помощью (7), в которой

$$|\xi|e^{\eta}$$

ограничено. Если обозначим через $h(z)$ функцию, обратную к (8) и определенную в Δ, которая, следовательно, дается формулами

$$\zeta - \frac{1}{\sqrt{\zeta}} = \ln z, \quad \zeta = h(z),$$

то функция

$$F(z) = g(h(z))$$

голоморфна в части области Δ, соответствующей области (7), и поведение этой функции в рассматриваемой области определяется поведением $g(\zeta)$ в (7). Границе области (7) соответствует кривая в Δ, которая состоит из двух дуг спирали, являющихся образами двух кривых

$$e^{\eta}\sin\xi = \pm\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right), \quad \eta \geqslant \eta_0 \tag{11}$$

и дуги, соединяющей начальные точки этих спиралей и являющейся образом отрезка прямой $\eta = \eta_0$, полученным с помощью (8). Эта граница представляет собой кривую $\gamma(\alpha, \eta_0)$, принадлежащую к Δ, которая асимптотически приближается к окружности Γ, $|z| = 1$; внутренность Δ, содержащую,

начиная с некоторой точки, спираль γ, назовем $\Delta(\alpha, \eta_0)$. На бесконечной части кривой $\gamma(\alpha, \eta_0)$, соответствующей (11), для $F(z)$ имеет место неравенство, получаемое из (6). Из него следует, что интеграл типа Коши

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\alpha, \eta_0)} \frac{F(u)\,du}{u - z} \tag{12}$$

существует, если z не лежит на $\gamma(\alpha, \eta_0)$, так как, если $|u - z| > \varepsilon$, то интеграл от модуля ограничен величиной

$$\frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{\gamma(\alpha, \eta_0)} |F(u)|\,|du| < \frac{K}{\varepsilon} \int\limits_{L(\alpha, \eta_0)} |g(\zeta)|\,|d\zeta|, \tag{13}$$

где последний интеграл взят по контуру $L(\alpha, \eta_0)$ области (7), а K — фиксированное число, равное верхней границе отношения подобия при конформном отображении. Неравенство (6) обеспечивает быструю сходимость.

Интеграл $G(z)$, который мы берем в положительном направлении по отношению к внешности $\Delta(\alpha, \eta_0)$, определяет функцию $G(z)$, голоморфную в круге D, лежащем вне области $\Delta(\alpha, \eta_0)$, и функцию $G_1(z)$, голоморфную в $\Delta(\alpha, \eta_0)$. Неравенство (6), кроме того, показывает, что интеграл

$$\int\limits_{L(\alpha, \eta)} |g(\zeta)|\,e^{\eta}\,|d\zeta|$$

ограничен. Следовательно, интеграл $G(z)$ ограничен равномерно, если для каждого u, взятого на $\gamma(\alpha, \eta_0)$, имеет место неравенство $|u - z| > e_1(-\eta)$, т. е. если точка z лежит вне области $\Delta(\alpha', \eta_0)$, где $\alpha' > \alpha$, или если она лежит внутри области $\Delta(\alpha', \eta)$, где $\alpha' < \alpha$; граница $G(z)$ зависит от α и α'. Но так как $F(z)$ голоморфна между $\gamma(\alpha, \eta_0)$ и $\gamma(\alpha', \eta_0)$, то можно заменить $\gamma(\alpha, \eta_0)$ через $\gamma(\alpha', \eta_0)$, что продолжает или ограничивает в зависимости от выбора α' определение $G(z)$ или $G_1(z)$. Мы видим, таким образом, что если α и η_0 заданы, то функции $G(z)$ и $G_1(z)$ определены и ограничены определенным числом, соответственно, первая вне области $\Delta(\alpha, \eta_0)$ и на ее границе, а вторая внутри области $\Delta(\alpha, \eta_0)$ и на ее границе. С другой стороны, при фиксированном α можно заставить η_0 возрастать, что позволит продолжить $G(z)$ внутрь области $\Delta(\alpha, \eta_0)$. Таким образом,

продолженная функция $G(z)$ голоморфна во всем круге $|z|<1$. Если точка z дана внутри $\Delta(\alpha, \eta_0)$ и если взять η_1 бо́льшим, чем η_0 и таким, чтобы z было внешней точкой по отношению к области $\Delta(\alpha, \eta_1)$, то функция $G(z)$ будет определена с помощью интеграла (12), вычисленного вдоль $\gamma(\alpha, \eta_1)$, в то время как $G_1(z)$ будет определена тем же интегралом, взятым в том же положительном направлении, что и выше, вдоль $\gamma(\alpha, \eta_0)$. Тогда по теореме Коши имеем:

$$G(z)-G_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(u)}{u-z}\,du, \tag{14}$$

где интеграл берется вдоль контура $\gamma(\alpha, \eta_0)-\gamma(\alpha, \eta_1)$; это — замкнутый контур, обходящий точку z в обычном положительном направлении. Следовательно, правая часть (14) равна $F(z)$. Таким образом, в $\Delta(\alpha, \eta_0)$ и на ее границе имеем:

$$G(z)=G_1(z)+F(z). \tag{15}$$

Итак, $G(z)$ голоморфна во всяком круге D. В области $\Delta(\alpha, \eta_0)$ и на ее границе выполняется равенство (15), *в котором функция $G_1(z)$ ограничена, а вне области $\Delta(\alpha, \eta_0)$ функция $G(z)$ ограничена.*

Следовательно, $G(z)$ ограничена вне области $\Delta(0, \eta_0)$ и на ее границе, в то время как, если $|z|$ стремится к единице, оставаясь внутри $\Delta(0, \eta_0)$, то $|G(z)|$ стремится к бесконечности. Точки, в которых $|G(z)|>A$, где A дано, образуют расположенную внутри $\Delta(0, \eta_0)$ односвязную область $\Delta(A)$, ограниченную кривой, которая состоит из двух ветвей спиралей, асимптотических к $\gamma(0, \eta_0)$. Бесконечность, следовательно, является асимптотическим значением $G(z)$. Можно ли получить конечное асимптотическое значение c? Соответствующий путь определения должен оставаться вне $\Delta(A)$, если $A>|c|$, начиная со значений $|z|$, достаточно близких к единице. Его образ в плоскости ζ, полученной с помощью преобразования, обратного к (8), будет принадлежать полосе $|\xi|<\frac{\pi}{\eta\sqrt{\eta}}$, $\eta>\eta_0$. Если бы существовало два таких пути, которые не пересекались бы, начиная с некоторого значения z, то между этими путями $G(z)$ была бы ограничена, и рассматривая в качестве промежуточного этапа образы в плоскости ζ, по теореме Монтеля и Линделёфа о граничных значениях, данной в § 24, мы имели бы

те же самые асимптотические значения. Следовательно, не может существовать более чем одно конечное асимптотическое значение c. Допустим, что одно такое значение существует. Тогда можем заменить $G(z)$ на

$$G_2(z) = G(z) + H(z),$$

где $H(z)$ — голоморфная функция с ограниченной в D, $|z| < 1$ производной, имеющей окружность Γ круга D своей естественной границей. $H(z)$ может быть определена, например, лакунарным рядом

$$H(z) = \sum_0^\infty \frac{z^{2^n}}{4^n}.$$

Функция $G_2(z)$, как и $G(z)$, не может иметь более чем одно конечное асимптотическое значение. Но она не имеет его совсем, если $G(z)$ имеет таковое. Действительно, в противном случае указанные пределы достигались бы соответственно вдоль пути γ для G и пути γ_2 для G_2. Но эти пути принадлежали бы спиральной области, внешней по отношению к $\Delta(A)$, если A достаточно велико. В этой области и на ее границе $|G(z)|$ и $|G_2(z)|$ будут ограничены. На плоскости ζ мы имели бы область, принадлежащую полосе, рассмотренной выше, которую можно было бы отобразить конформно на угол с вершиной в начале координат раствором $\frac{\pi}{3}$, лежащий в плоскости v. Мы имели бы в секторе $|\arg v| < \frac{\pi}{6}$, $|v| < C$ две функции $K(v)$ и $K_2(v)$, ограниченные по модулю постоянной A и являющиеся преобразованиями $G(z)$ и $G_2(z)$, которые будут соответственно стремиться к пределу вдоль путей, лежащих внутри угла и кончающихся в точке $v = 0$. Тогда по теореме Линделёфа, приведенной в начале § 24, вытекало бы, что $K(v)$ и $K_2(v)$ будут стремиться к рассматриваемым пределам, когда v будет стремиться к нулю вдоль биссектрисы угла. На этой биссектрисе разность $K(v) - K_2(v)$ имела бы конечный предел. Возвращаясь к кругу D, мы видим, что должен был бы существовать путь γ', асимптотический к Γ, на котором $G_2(z) - G(z) = H(z)$ имела бы предел, когда $|z|$ стремится к единице. Но это было бы в противоречии с теоремой

братьев Рисс (§ 25), поскольку γ' пересекает все радиусы круга D.

Итак, окончательно, по крайней мере одна из двух функций $G(z)$ и $G_2(z)$ имеет в качестве асимптотического значения лишь бесконечность. Поверхность Римана S, описываемая этой функцией, имеет одну-единственную граничную точку, а именно, бесконечность.

Рассмотрим теперь производную $G'(z)$, которая получается непосредственным дифференцированием выражения (12):

$$G'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{F(u)}{(u-z)^2}\,du,$$

где интеграл берется по контуру $\gamma(\alpha, \eta_0)$ и где z — точка, внешняя к $\Delta(\alpha, \eta_0)$; если же z лежит внутри области $\Delta(\alpha, \eta_0)$, то рассматриваемый интеграл дает $G_1'(z)$. Из этого следует, что в области $\Delta(\alpha, \eta_0)$ имеет место равенство

$$G'(z)=G_1'(z)+F'(z),$$

и если сказанное выше относительно $G(z)$ и $G_1(z)$ применить теперь к производным, то будем иметь, что $G'(z)$ ограничена вне $\Delta(\alpha, \eta_0)$ и на $\gamma(\alpha, \eta_0)$, а $G_1'(z)$ ограничена в $\Delta(\alpha, \eta_0)$ и на $\gamma(\alpha, \eta_0)$. С другой стороны,

$$F(z)=g(h(z)),$$
$$F'(z)=g'(h(z))\cdot h'(z),$$

где $|h'(z)|$ стремится к единице, когда $|z|\to 1$. И далее,

$$g(\zeta)=e_3(-i\zeta),$$
$$g'(\zeta)=-ig(\zeta)\,e_2(-i\zeta)\,e_1(-i\zeta).$$

Так как при достаточно больших A функция $G_1(z)$ ограничена в области $\Delta(A)$, где $|G(z)|>A$, то в этой области

$$|g(\zeta)|>\frac{A}{2},$$

следовательно,

$$\Re e_2(-i\zeta)>\ln\frac{A}{2},$$

$$|e_2(-i\zeta)|>\ln\frac{A}{2},$$

а также

$$|e_1(-i\zeta)| > \ln\left(\ln\frac{A}{2}\right).$$

Мы видим, таким образом, что в $\Delta(A)$ выполняется неравенство

$$|F'(z)| > \frac{A}{2}\ln\frac{A}{2}\ln\left(\ln\frac{A}{2}\right)|h'(z)|,$$

правая часть которого более чем $2A$, когда A взято достаточно большим, и следовательно, $|G'(z)| > A$. Производная $G'(z)$ не обращается в нуль в $\Delta(A)$. Наконец, так как $|H'(z)|$ ограничена, то имеем аналогичный результат относительно $G_2'(z)$, причем точки, где $|G_2(z)| > A$, не являются нулями $G_2'(z)$.

Особая точка в бесконечности поверхности Римана, описанной одной из двух функций $G(z)$ и $G_2(z)$, является единственной и изолирована от критических алгебраических точек.

Таким образом, по крайней мере одна из двух функций $G(z)$ или $G_2(z)$ обладает следующим свойством:

Точка в бесконечности является единственной особенностью (не алгебраической) поверхности Римана, описанной функцией, и изолирована от алгебраических критических точек.

§ 65. Порядок функции $G(z)$. Порядок функции, голоморфной и не ограниченной в круге D, $|z| < 1$, определяется следующим образом. Обозначим через $M(r, \Phi)$ максимум $|\Phi(z)|$ на окружности $|z| = r < 1$. Функция $M(r, \Phi)$ является бесконечно возрастающей функцией от r при r, стремящемся к единице. Возрастание этой функции сравнивается с возрастанием $\frac{1}{1-r}$. Порядком функции $\Phi(z)$ называется число

$$\rho = \overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\ln(\ln M(r, \Phi))}{\ln\frac{1}{1-r}}.$$

Функция $G(z)$, построенная нами выше, имеет бесконечный порядок. Действительно, для точки z спирали, заданной

посредством (8) при $\xi = 0$, имеем:

$$r = |z| = e_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2\eta}}\right),$$

так что при $\eta \to \infty$ имеем:

$$1 - r \sim \frac{1}{\sqrt{2\eta}}$$

и

$$|F(z)| = |g(\zeta)| = e_3(\eta).$$

Кроме того, благодаря (15) при $|z|$, стремящемся к единице вдоль спирали, имеем:

$$G(z) = F(z) + O(1).$$

Из этого вытекает неравенство

$$M(r, G) > e_3\left(\frac{1 - o(1)}{2(1-r)^2}\right),$$

где $o(1)$ стремится к нулю, когда $r \to 1$. Таким образом,

$$\ln_3 M(r, G) > \frac{1 - o(1)}{2(1-r)^2}$$

и

$$\varliminf_{r \to 1} \frac{\ln_4 M(r, G)}{\ln \frac{1}{1-r}} \geqslant 2. \tag{16}$$

Итак, $G(z)$ бесконечного порядка; это же заключение справедливо относительно функции $G_2(z)$, которая отличается от $G(z)$ на ограниченную функцию.

§ 66. Различные обобщения. Очевидно, что можно видоизменить конструкцию, данную в § 64. Можно заменить целую функцию $g(\zeta)$ другой функцией, обладающей аналогичными свойствами; можно заменить преобразование (8), отображающее окрестность точки $\zeta = 0$ на спиральную область другим преобразованием, а именно, можно было бы ограничиться рассмотрением $g(\zeta)$ в окрестности $\zeta = 0$ лишь справа и сделать простое преобразование

$$z = e^{-\zeta}.$$

Таким образом, мы получим большое разнообразие поверхностей Римана — Пуанкаре S гиперболического типа, имею-

щих конечное число особенностей, отличных от алгебраических, которые присоединены к поверхности. Все полученные так поверхности описаны посредством значений голоморфных в круге D, $|z|<1$, функций, которые имеют бесконечный порядок в этом круге. Кроме того, можно доказать следующее предложение.

Если $Z=F(z)$ голоморфна и не ограничена в круге D, $|z|<1$, но ограничена вдоль непрерывного пути γ, асимптотически стремящегося к окружности Γ, $|z|=1$, и если эта функция такова, что вдоль этого пути по крайней мере один из пределов неопределенности аргумента z бесконечен, то имеет место соотношение

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\,\frac{\ln_3 M(r,F)}{-\ln(1-r)}\geqslant 1. \tag{17}$$

В примерах этого рода путям определения бесконечности соответствуют пути, лежащие на поверхности S, идущие в бесконечность и на каждом из которых значение $z=\varphi(Z)$ функции, обратной к $Z=F(z)$, неопределенно, когда $|Z|$ стремится к бесконечности; $|z|$ стремится к единице, но $\arg z$ не имеет конечного предела, один из его пределов бесконечен.

Можно также построить примеры, в которых оба предела неопределенности аргумента являются конечными числами, разность между которыми менее чем 2π.

Неравенства типа (16) или (17) накладывают ограничения на коэффициенты ряда Тэйлора

$$\sum c_n z^n$$

функции $F(z)$; эти ограничения следуют из неравенства Коши

$$|c_n|\,r^n<M(r,F).$$

Суть их состоит в том, что $\ln|c_n|/n$ стремится к нулю очень медленно.

Напротив, Фату показал, что для функции Кёнигса $K(z)$, рассмотренной в § 39, имеют место неравенства

$$\frac{A}{(1-r)^{\mu'}}<M(r,K)<\frac{B}{(1-r)^{\mu}},$$

где A, B, μ и μ' — положительные постоянные. Функция $K(z)$ имеет порядок, равный нулю, и последовательные интегрирования приводят к ограниченной функции.

Литературные ссылки

§ 61. Poincaré, 1.
§ 62. Hurwitz, 1; Denjoy, 1.
§ 63. Valiron, 16; Лузин и Привалов, 1.
§§ 64, 65, 66. Valiron, 14, 16.

ГЛАВА IX

МЕТОД И РЕЗУЛЬТАТЫ ВИМАНА И ВАЛИРОНА

§ 67. Ломаная Адамара*). Пусть сначала

$$f(z)=\sum_0^\infty c_n z^n$$

будет целой функцией, отличной от многочлена. Положим

$$C_n=|c_n|, \quad r=|z|, \quad \ln C_n=-g_n.$$

Для каждого r последовательность

$$C_n r^n, \quad n=0, 1, \ldots,$$

сходится к нулю; следовательно, существует некоторый наибольший член, который мы назовем максимальным членом функции $f(z)$ и будем обозначать через $\mu(r, f)$ или через $\mu(r)$. Этот максимум достигается при одном или нескольких значениях n; мы назовем центральным индексом максимального члена наибольшее из этих значений n и будем обозначать его $\nu(r, f)$ или $\nu(r)$. Непосредственно ясно, что $\mu(r)$ возрастает и стремится к бесконечности вместе с r и что $\nu(r)$ не убывает и стремится к бесконечности.

Рассмотрим прямоугольную систему координат с осями Ox и Oy и отметим в ней точки A_n с координатами (n, g_n). Так как отношение g_n/n стремится к бесконечности, то угловой коэффициент прямой OA_n стремится к бесконечности. Из этого мы заключаем, что можно построить ломаную линию, которую мы обозначим через $\pi(f)$, такую, что вершинами ее будут точки A_n или бесконечная подпоследовательность этих точек, а все остальные точки A_n либо

*) В дальнейшем автор иногда называет эту ломаную также ломаной Ньютона. (*Прим. ред.*)

лежат на прямых, образующих стороны ломаной $\pi(f)$, либо над этими прямыми. (Если $c_0 = c_1 = \ldots = c_{p-1} = 0$, то ломаная содержит сторону, параллельную Oy и ограниченную точкой A_p.) Эта ломаная была введена в рассмотрение Адамаром. Обозначим через G_n ординату ломаной $\pi(f)$ в точке с абсциссой n, где n — целое число. Функция

$$W(r, \pi(f)) = \sum_0^\infty e^{-G_n} r^n$$

мажорирует функцию $f(z)$. (Если $c_0 = c_1 = \ldots = c_{p-1} = 0$, то $W(r)$ начинается с члена r^p.) Имеем $\pi(W) = \pi(f)$. Эта

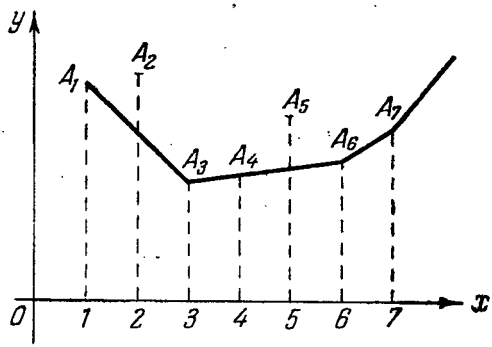

Рис. 10.

ломаная $\pi(f)$ (рис. 10) определяет функции $\mu(r, f)$ и $\nu(r, f)$. Положим, начиная с того n, при котором G_{n-1} конечно,

$$R_n = e^{G_n - G_{n-1}}.$$

Последовательность R_n неубывающая и стремится к бесконечности. Если допустим, что $C_0 = 1$, то будем иметь:

$$e^{G_n} = R_1 R_2 \ldots R_n.$$

Для каждого значения r центральный индекс $\nu(r, f)$ максимального члена $\mu(r, f)$ является абсциссой точки прикосновения $\pi(f)$ к ее касательной с угловым коэффициентом $\ln r$, следовательно, имеют место соотношения

$$R_\nu \leqslant r < R_{\nu+1}, \quad \nu = \nu(r)$$

и

$$\mu(r) = \frac{r^\nu}{R_1 R_2 \ldots R_\nu}.$$

Так как справедливо равенство

$$\int_{R_k}^{R_{k+1}} \frac{\nu(x)}{x}\,dx = k \ln \frac{R_{k+1}}{R_k},$$

то при $C_0 = 1$ видим, что

$$\ln \mu(r, f) = \int_0^r \frac{\nu(x)}{x}\,dx. \tag{1}$$

Точно так же при произвольном C_0 и при $r_0 > 0$ имеем:

$$\ln \mu(r, f) = \ln \mu(r_0, f) + \int_{r_0}^r \frac{\nu(x, f)}{x}\,dx, \tag{2}$$

и можно положить $r_0 = 0$, если $C_0 \neq 0$.

§ 68. Ломаная Адамара в случае степенных рядов. Можно распространить предыдущие рассуждения на случай степенных рядов

$$F(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$$

с конечным радиусом сходимости. Без ограничения общности можно принять этот радиус равным единице.

При всяком $r < 1$ существует максимальный член $C_n r^n$, который будем обозначать через $\mu(r, F)$ или $\mu(r)$. Это неубывающая функция от r. По-прежнему будем обозначать через $\nu(r, F)$ или $\nu(r)$ центральный индекс максимального члена. Если мы оставим в стороне случай, когда все C_n ограничены, т. е. случай, в котором максимум модуля $M(r, F)$ удовлетворяет неравенству

$$M(r, F) < \frac{K}{1-r},$$

то $\mu(r)$ будет бесконечно возрастающей функцией от r, а $\nu(r)$ будет неубывающей функцией от r, стремящейся к бесконечности, когда r стремится к единице. Если опять положим

$$\ln C_n = -g_n,$$

то g_n будет отрицательным при некоторых n, а отношение g_n/n имеет нижним пределом нуль. Можно снова, исходя из точек A_n с координатами (n, g_n), построить ломаную линию $\pi(F)$, вогнутую, с вершинами в точках A_n или в некоторой подпоследовательности этих точек, начинающуюся с первой точки A_p, расположенной на конечном расстоянии, все остальные точки A_n лежат на сторонах $\pi(F)$ или над ними. Ломаная $\pi(F)$ будет под осью Ox, начиная с некоторой точки (рис. 11). Для заданного r, $r < 1$, ломаная $\pi(F)$

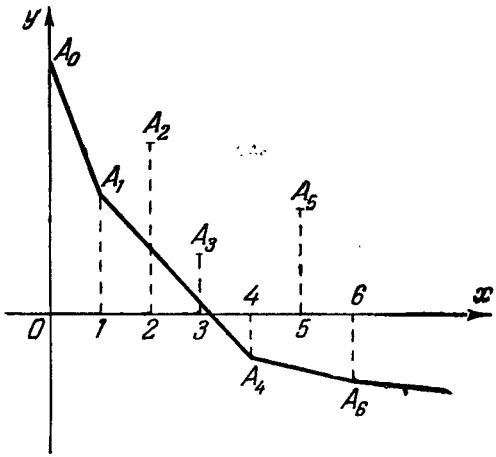

Рис. 11.

будет проходить над своей опорной прямой с угловым коэффициентом $\ln r$ (отрицательным); точка прикосновения (или опоры) этой опорной прямой является одной из вершин, наибольший индекс n этих вершин равен $\nu(r, F)$. Если введем ординаты G_n точек ломаной $\pi(F)$ с целочисленными абсциссами n, то ряд

$$W(r, \pi(F)) = \sum_0^\infty e^{-G_n} r^n$$

будет мажорантой для $F(z)$. Имеют место равенства

$$\pi(W) = \pi(F), \quad \mu(r, W) = \mu(r, F), \quad \nu(r, W) = \nu(r, F)$$

и так же, как для целых функций,

$$\ln \mu(r, F) = \ln \mu(r_0, F) + \int_{r_0}^{r} \frac{\nu(x, F)}{x}\, dx, \quad r_0 < r < 1, \tag{3}$$

где можно принять $r_0 = 0$, если $C_0 \neq 0$.

§ 69. Метод сравнения. Случай целых функций. Обыкновенные значения. Рассмотрим степенной ряд

$$F(r) = \sum_0^\infty e^{H(n)} r^n, \quad H(0) = 0, \quad H(n) = n^\alpha, \tag{4}$$

где α — данное число, заключенное между нулем и единицей. Радиус сходимости этого ряда равен единице. Ломаная Адамара $\pi(F)$ имеет вершинами все точки $(n, -n^\alpha)$; эта ломаная линия, вершины которой имеют абсциссы в целочисленных точках n и нуле, вписана в кривую $y = -H(x)$. Касательная к этой кривой в точке с абсциссой n имеет угловой коэффициент $-H'(n)$ и является опорной прямой к $\pi(F)$ в этой точке.

Если r положительно и $L > r$, то радиус сходимости $F\left(\frac{r}{L}\right)$ равен L, а ломаная Адамара этой функции имеет вершины в точках с координатами $(n, n \ln L - H(n))$ и лежит под прямой $y = x \ln L$.

Пусть дана целая функция $f(z)$, ее ломаная Адамара $\pi(f)$ расположена над $\pi\left[F\left(\frac{r}{L}\right)\right]$, начиная с абсциссы достаточно большой. Разность между ординатой ломаной $\pi(f)$ в точке с абсциссой x и ординатой $\pi\left[F\left(\frac{r}{L}\right)\right]$ в той же точке будет, следовательно, положительной, начиная с некоторого значения x; эта разность имеет минимум $-\ln k$, где $k = k(L)$. Из этого вытекает, что ломаная $\pi\left[kF\left(\frac{r}{L}\right)\right]$ имеет по крайней мере одну вершину, общую с $\pi(f)$, и не имеет точек, лежащих над $\pi(f)$. Обозначим через $n(L, F)$ наибольшую абсциссу вершин, общих $\pi(f)$ и $\pi\left[kF\left(\frac{r}{L}\right)\right]$. Опорная прямая к $\pi\left[kF\left(\frac{r}{L}\right)\right]$ в этой самой правой вершине с абсциссой $n(L, F)$

также будет опорной к $\pi(f)$; это имеет место, в частности, для опорной прямой, угловой коэффициент которой $\ln r$ равен

$$\ln L - H'[n(L, F)];$$

обозначая соответствующее значение r через $r(L)$, можем написать:

$$\ln r(L) = \ln L - H'[n(L, F)]. \tag{5}$$

Обе функции $f(z)$ и $k(L)F\left(\frac{r}{L}\right)$ имеют, следовательно, при $|z| = r = r(L)$ равные максимальные члены с одним и тем же центральным индексом, и вторая функция мажорирует первую.

Пусть теперь L непрерывным образом возрастает; функция $n(L, F)$ не убывает, поскольку угловой коэффициент стороны с фиксированным номером ломаной $\pi\left[kF\left(\frac{r}{L}\right)\right]$ возрастает, причем стремится к бесконечности, что показывает, что $n(L, F)$ не ограничена. Функция $k(L)$ также возрастает и не ограничена. Следовательно, $H'[n(L, F)]$ является убывающей функцией от L, которая стремится к нулю, когда L стремится к бесконечности; эта функция имеет разрывы в тех же точках, что и $n(L, F)$. В силу равенства (5) функция $r(L)$ является возрастающей и неограниченной; она терпит разрывы в тех же точках, что и $n(L, F)$; эти разрывы соответствуют тем значениям L, при которых ломаная $\pi\left[kF\left(\frac{r}{L}\right)\right]$ имеет несколько общих вершин с $\pi(f)$; функция $\ln r(L)$ делает тогда скачок, равный разности между значениями H' в точках, являющихся абсциссами крайней правой и крайней левой общей вершины. Если L_0 и $L_1 > L_0$ являются двумя точками непрерывности $r(L)$, то сумма скачков $\ln r(L)$ между этими точками равна

$$H'[n(L_0, F)] - H'[n(L_1, F)].$$

Так как $H'(x)$ стремится к нулю, когда x стремится к бесконечности, то мы приходим к следующему результату.

Какова бы ни была заданная целая функция $f(z)$, можно в общем случае поставить в соответствие данному положительному r два положительных числа k и L такие, что при $|z| = r$ обе функции $f(z)$ и $kF\left(\frac{r}{L}\right)$ имеют

одинаковый максимальный член с одним и тем же центральным индексом и что первая из этих функций мажорируется второй. Те значения r, для которых это свойство не имеет места, могут быть заключены в интервалы, число которых между 0 и R не более чем $\nu(R)$, и в которых полная вариация $\ln r$, каково бы ни было R, меньше, чем некоторое определенное число.

Значения r, при которых указанное свойство имеет место, также образуют интервалы, в которых при $r > 1$, например, полная вариация $\ln r$ бесконечна; это оправдывает то, что такие значения r называют *обыкновенными значениями*, а соответствующие интервалы — *обыкновенными интервалами*. Эти интервалы могут зависеть от функции F, т. е. от выбора α.

§ 70. Метод сравнения. Случай степенных рядов. Замечательные значения. Если вместо целой функции мы рассмотрим теперь степенный ряд

$$g(z) = \sum_0^\infty c_n z^n,$$

радиус сходимости которого равен единице, причем $g(z)$ не ограничена, то можно сравнить ее ломаную Адамара $\pi(g)$ с ломаной ряда (4), рассуждая, как в случае целой функции. Возьмем число $L > 1$ и введем в рассмотрение $F(rL)$; ломаная, соответствующая этой функции, расположена под прямой $y = -x \ln L$, следовательно, и под ломаной $\pi(g)$, начиная с некоторого значения x. Можно осуществить параллельно оси Oy перенос ломаной $\pi[F(rL)]$ на величину $-\ln k$, $k = k(L)$, чтобы она стала опорной к $\pi(g)$, оставаясь ниже этой ломаной вне точек касания. Тогда функция $kF(Lr)$ будет мажорировать $g(z)$ при $|z| = r = r(L)$, где $r(L)$ определяется из равенства

$$\ln r(L) = -\ln L - H'[n(L, F)],$$

где $n(L, F)$ — наибольшая абсцисса вершин, общих обеим ломаным. Если мы будем придавать L убывающие значения, стремящиеся к единице, то функция $n(L, F)$ не убывает, но не всегда будет правильным утверждение, что она стремится к бесконечности. Однако мы видим, что $n(L, F)$

возрастает и стремится к бесконечности, если выполняется соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,[\ln C_n - n^\alpha] = \infty. \tag{6}$$

Тогда существуют значения $r(L)$, стремящиеся к единице. Справедливо следующее предложение.

Если коэффициенты степенного ряда $g(z)$ удовлетворяют условию (6), *то существуют значения r, сколь угодно близкие к единице, и соответствующие значения L и k такие, что при этих r и $|z| = r$ функции $g(z)$ и $kF(Lr)$ имеют одинаковый максимальный член с одним и тем же центральным индексом и что функция $g(z)$ мажорируется функцией $kF(Lr)$.*

Назовем *замечательными значениями* те значения r, для которых имеет место предыдущее свойство.

Если (6) не имеет места, то должно быть

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(\ln C_n - n^\alpha) = D < \infty,$$

что дает границу для C_n и показывает, что

$$\ln M(r, g) < D' \ln M(r, F) = D' \ln F(r).$$

Для функции $F(r)$, определенной с помощью (4), центральный индекс $\nu = \nu(r)$ максимального члена $\mu = \mu(r)$ асимптотически равен при $r \to 1$ значению n, при котором достигается максимум выражения

$$n \ln r + n^\alpha,$$

производная которого равна

$$\ln r + \alpha n^{\alpha-1},$$

так что

$$\alpha\nu^{\alpha-1} \sim -\ln r \sim 1 - r,$$

$$\nu \sim \left(\frac{\alpha}{1-r}\right)^k, \qquad k = \frac{1}{1-\alpha} \tag{7}$$

и

$$\ln \mu \sim \nu \ln r + \nu^\alpha \sim (1-\alpha)\nu^\alpha \sim (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-r}\right)^\rho, \tag{8}$$

где

$$\rho = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Чтобы вычислить порядок $F(r)$, мы используем общий прием, который может быть применим к целым функциям и к степенным рядам, для которых

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{\ln \frac{1}{1-r}} = \infty .$$

Если положим

$$r_n = e^{-G_n + G_{n-1}},$$

то в силу результатов § 68, если $F(z)$ голоморфна при $|z| < 1$ и имеет неограниченные коэффициенты, число r_n не возрастает и стремится к единице, когда $n \to \infty$.

Сохраняя обозначения § 68, имеем:

$$M(r, F) < \mu(r, F)\left[n + 1 + \sum_{p=1}^{\infty} r_{n+1} r_{n+2} \ldots r_{n+p} r^p\right]$$

в предположении, что $n \geqslant \nu(r)$. Сумма в квадратных скобках менее чем

$$\sum_{p=1}^{\infty} (r r_{n+1})^p = \frac{1}{1 - r r_{n+1}}.$$

Пусть r' — число, заключенное между r и единицей. Положим $n = \nu(r')$; тогда

$$r' r_{n+1} < 1$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{1 - r r_{n+1}} < \frac{1}{1 - \frac{r}{r'}} < \frac{1}{r' - r}$$

и

$$M(r, F) < \mu(r, F)\left[\nu(r') + 1 + \frac{1}{r' - r}\right]. \tag{9}$$

Можно в зависимости от обстоятельств выбрать наилучшее из возможных значений r'. Но всегда можно взять

$$r' = r + \frac{1 - r}{\nu(r)},$$

начиная с тех r, для которых $\nu(r) > 1$. При $r > r_0$ получим:

$$M(r, F) < \mu(r, F)\,[2\nu(r', F) + 1]\,\frac{1}{1 - r}, \quad r' = r + \frac{1 - r}{\nu(r, F)}. \tag{10}$$

В случае функции, определенной посредством (4), можно воспользоваться асимптотическими равенствами (7) и (8); тогда будем иметь $1-r' \sim 1-r$ и окончательно получим:

$$\ln M(r, F) \sim \ln \mu(r, F) \sim (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{1-r}\right)^{\rho}.$$

Итак, наша функция имеет порядок ρ и возрастает исключительно регулярно. Следовательно, если дана a priori функция $g(z)$, голоморфная в круге $|z|<1$ и положительного порядка ρ, то условие (6) *будет выполнено, если в функции сравнения* (4) *выбрать α по условию*

$$\alpha < \frac{\rho}{1+\rho}.$$

Последовательность замечательных значений, стремящаяся к единице, существует для всякой функции положительного порядка.

§ 71. Основные формулы. Рассмотрим функцию $f(z)$, которая является целой или степенным рядом, неограниченным в круге $|z|<1$. Если заданы точки $z_0 \neq 0$ и z, произвольные в первом случае и подчиненные условию $|z_0|+|z-z_0|<1$ во втором, то можем написать

$$f(z) = \sum_0^{\infty} c_n z^n = \sum_{p=-n}^{\infty} c_{n+p} z_0^{n+p} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n+p} =$$

$$= \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \sum_{p=-n}^{\infty} c_{n+p} z_0^{n+p} \left(\frac{z}{z_0}\right)^p.$$

Положим

$$u = \frac{z-z_0}{z_0}$$

и напишем:

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^p = (1+u)^p = 1 + pu + \ldots$$

$$\ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{q!} u^q + u^{q+1} R_p(u),$$

где q — данное целое положительное число, а $R_p(u)$ равно нулю при положительных p, меньших, чем q. Мы получаем:

$$f(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^n [f(z_0) + uf_1(z_0) + \ldots$$
$$\ldots + u^q f_q(z_0) + u^{q+1}\psi(z, z_0)]. \quad (11)$$

Функции $f_j(z_0)$ выражаются линейно через $f(z)$ и ее производные в точке z_0, так как

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = (1+u)^n = 1 + nu + \ldots + u^n,$$

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \ldots = f(z_0) + uz_0 f'(z_0) + \ldots,$$

откуда получаем:

$$f(z_0) + uz_0 f'(z_0) + \ldots + \frac{1}{j!} u^j z_0^j f^{(j)}(z_0) + \ldots =$$
$$= \left(1 + nu + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!} u^p + \ldots + u^n\right) \times$$
$$\times (f(z_0) + uf_1(z_0) + \ldots + u^q f_q(z_0) + u^{q+1}\psi(z, z_0))$$

и, следовательно,

$$z_0^j f^{(j)}(z_0) = n(n-1)\ldots(n-j+1) f(z_0) +$$
$$+ jn(n-1)\ldots(n-j+2) f_1(z_0) + \ldots$$
$$\ldots + nj!\, f_{j-1}(z_0) + j! f_j(z_0), \quad j = 1, 2, \ldots, q. \quad (12)$$

Мы имеем:

$$\psi(z, z_0) = \sum_{p=-n}^{\infty} c_{n+p} z_0^{n+p} R_p(u),$$

где

$$R_p(u) = \frac{p(p-1)\ldots(p-q)}{(q+1)!} + \frac{p(p-1)\ldots(p-q-1)}{(q+2)!} u + \ldots$$

при $|u| < \frac{1}{2}$.

Если $p > 0$, то мы оценим правую часть, заменяя u через $|u|$ и применяя оценку остатка в формуле Тэйлора

к $(1+u)^p$, что дает следующую границу:

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q)}{(q+1)!}(1+|u|)^{p-q-1}<$$
$$<\frac{1}{(q+1)!}p^{q+1}(1+|u|)^{p-q-1}.$$

Если $p<0$, то мы заменяем u через $-|u|$, что дает границу:

$$\left|\frac{p(p-1)\ldots(p-q)}{(q+1)!}\right|(1-|u|)^{p-q-1}<$$
$$<\frac{1}{(q+1)!}(|p|^{q+1}+\ldots+|p|q!)(1-|u|)^{p-q-1}.$$

Таким образом, мы получаем:

$$|\psi(z, z_0)|<A_q(U_1+U_2), \tag{13}$$

где A_q зависит только от q и

$$\left.\begin{aligned} U_1&=\sum_{p=0}^{\infty}C_{n+p}|z_0|^{n+p}p^{q+1}(1+|u|)^p,\\ U_2&=\sum_{p=0}^{n}C_{n-p}|z_0|^{n-p}p^{q+1}(1-|u|)^{-p}.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Если r — обыкновенное значение (для целой функции) или замечательное значение (для степенного ряда), то, полагая $n=\nu(r)$ и

$$r\leqslant|z_0|<r\left(1+\frac{h}{\nu(r)}\right), \tag{15}$$

имеем:

$$|u|<D\nu^k, \quad k=\frac{\alpha}{2}-1, \tag{16}$$

где α — показатель, фигурирующий в функции сравнения (4), а h и D — два определенных положительных числа. Эти значения z_0 и u вполне нам подходят в случае степенного ряда, так как в этом случае ν определяется из соотношения

$$\alpha\nu^{\alpha-1}\sim-\ln(rL)=-\ln L+\ln\frac{1}{r}<-\ln L+1-r,$$

где $L>1$ и, следовательно,

$$\nu^k\sim\left(\frac{1-r}{\alpha}\right)^{k'}, \quad k'=\frac{2-\alpha}{2-2\alpha}>1,$$

откуда вытекает, что $|z_0|+|z-z_0|<1$ при r, достаточно близких к единице.

В случае, когда $f(z)$ — целая функция, она мажорируется функцией $kF\left(\frac{r}{L}\right)$, причем обе функции имеют одинаковый максимальный член с одним и тем же центральным индексом, и мы имеем:

$$C_{\nu+p}r^{\nu+p}<k\exp\left[(\nu+p)^\alpha+(\nu+p)\ln\frac{r}{L}\right]=$$
$$=\mu(r)\exp\left[(\nu+p)^\alpha-\nu^\alpha+p\ln\frac{r}{L}\right],$$

где

$$\ln\frac{r}{L}=-\alpha\nu^{\alpha-1}.$$

Тот же результат справедлив для степенного ряда после того, как $\frac{r}{L}$ заменено всюду на Lr. В обоих случаях из (15) и (16) получаем:

$$C_{\nu+p}|z_0|^{\nu+p}<\mu(r)\,e^h\exp\left[(\nu+p)^\alpha-\nu^\alpha-p\alpha\nu^{\alpha-1}+p\ln\left(1+\frac{h}{\nu}\right)\right],$$

где p положительно или отрицательно. Таким образом, U_1 ограничено выражением

$$e^h\mu(r)\sum_{p=0}^{\infty}w(p), \tag{17}$$

где

$$\ln w(p)=(\nu+p)^\alpha-\nu^\alpha-\alpha\nu^{\alpha-1}p+$$
$$+(q+1)\ln p+p\ln[1+D_1\nu^k],$$

и D_1 — некоторая постоянная, а U_2 менее чем

$$e^h\mu(r)\sum_{p=0}^{\infty}w'(p), \tag{18}$$

где

$$\ln w'(p)=(\nu-p)^\alpha-\nu^\alpha+\alpha\nu^{\alpha-1}p+$$
$$+(q+1)\ln p+p\ln[1+D_2\nu^k],$$

и D_2 — некоторая постоянная, причем r предполагается достаточно близким к своему пределу (∞ или 1).

Можно получить оценку ряда, фигурирующего в (17), группируя члены. Сравним члены, соответствующие $p=m+j$ и $p=2m+j$, $j\geqslant 0$, где m — целая часть числа

$$B\nu^{-k}, \quad -k=1-\frac{\alpha}{2}>0,$$

и B — постоянная, которая будет определена в дальнейшем. Мы имеем:

$$\ln\frac{w(2m+j)}{w(m+j)}=(q+1)\ln\frac{2m+j}{m+j}+m\ln[1+D_1\nu^k]+$$
$$+(\nu+2m+j)^\alpha-(\nu+m+j)^\alpha-m\alpha\nu^{\alpha-1}.$$

В правой части сумма членов, стоящих в первой строке, менее, чем некоторая постоянная D_3, зависящая от q; выражение, стоящее во второй строке, по формуле конечных приращений равно

$$\alpha m[(\nu+m+j+\theta m)^{\alpha-1}-\nu^{\alpha-1}]<\alpha m[(\nu+m)^{\alpha-1}-\nu^{\alpha-1}]=$$
$$=-\alpha(1-\alpha)m^2(\nu+m\theta')^{\alpha-2}<-\alpha(1-\alpha)m^2(\nu+m)^{\alpha-2}$$

и последний член менее чем $-\alpha(1-\alpha)B^2$. Если B^2 взято достаточно большим, более чем $D_3/\alpha(1-\alpha)$, то имеем:

$$w(2m+j)<e^{-1}w(m+j)$$

и если положим

$$S_q^t=\sum_{p=q}^{t}w(p),$$

то видим, что

$$S_0^\infty=S_0^{2m}+S_{2m}^\infty<S_0^{2m}+\frac{1}{e}S_m^\infty<S_0^{2m}+\frac{1}{e}S_0^\infty,$$

следовательно,

$$S_0^\infty<\frac{e}{e-1}S_0^{2m}.$$

Так как, наконец,

$$(\nu+p)^\alpha-\nu^\alpha-\alpha\nu^{\alpha-1}p<0,$$

то при $p<2m$ получим:

$$w(p)<(2m)^{q+1}H,$$

где H — конечная постоянная, так что

$$U_1 < C\mu(r)\nu(r)^{(q+2)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)},$$

где C — постоянная, зависящая от q, α и h.

Аналогичные рассмотрения могут быть проведены относительно U_2 и можно формулировать следующий общий результат.

Если $f(z)$ — целая функция или степенной ряд, определяющий в круге $|z| < 1$ функцию положительного порядка ρ, α — показатель степени в функции сравнения (4) *(который должен быть менее чем $\rho/1+\rho$ в случае степенного ряда) и если*

$$|z_0| < r\left(1+\frac{h}{\nu(r)}\right) \tag{19}$$

и

$$|z-z_0| < D|z_0|\nu(r)^k, \quad k=\frac{\alpha}{2}-1, \tag{20}$$

то остаток $\psi(z, z_0)$ в формуле (11) *удовлетворяет неравенству*

$$|\psi(z, z_0)| < H\mu(r, f)\nu(r, f)^{(q+2)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{21}$$

при условии, что r является обыкновенным значением (в случае целой функции) или замечательным значением (в случае степенного ряда), достаточно близким к своему пределу (∞ *или* 1). *Постоянная H зависит от q, α и h.*

В (19) мы отбросили условие $|z_0| \geqslant r$, так как в U_1 и U_2 степени $|z_0|$ положительны, а потому оценки, полученные для $|z_0| = r$, остаются верными при меньших значениях.

§ 72. Применение к исследованию производных. Допустим, что q взято достаточно большим, чтобы положительное число

$$\beta=\frac{q+2}{q+1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

было менее чем единица. Применим равенство (11), полагая в нем $z = z_\lambda$, где

$$|z_\lambda| = |z_0| < r\left(1+\frac{h}{\nu(r)}\right)$$

и где, кроме того, z_λ подчинены условиям

$$\left|\frac{z_\lambda - z_0}{z_0}\right| = D\nu(r)^{-\beta}\frac{\lambda}{q} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, q)$$

и имеют возрастающие аргументы, начиная с аргумента z_0. Соответствующие u_λ удовлетворяют условию, что для них выполняется неравенство (21), и мы имеем:

$$\sum_{j=0}^{q} f_j(z_0)\, u_\lambda^j = \left(\frac{z_0}{z_\lambda}\right)^\nu f(z_\lambda) - u_\lambda^{q+1}\psi(z_\lambda, z_0)$$

при $\lambda = 1, 2, \ldots, q$.

Так как

$$u_\lambda^j = \left(\frac{D}{q}\right)^j \nu^{-\beta j}\lambda^j,$$

то мы видим, что величины

$$F_j(z_0) = \left(\frac{D}{q}\right)^j \nu^{-\beta j} f_j(z_0)$$

удовлетворяют линейной системе

$$\sum_{j=0}^{q} F_j(z_0)\lambda^j = \left(\frac{z_0}{z_\lambda}\right)^\nu f(z_\lambda) - u_\lambda^{q-1}\psi(z_\lambda, z_0)$$

а это, если принять во внимание неравенство (21), показывает, что при $j = 1, 2, \ldots, q$, имеют место неравенства

$$|F_j(z_0)| < K_1[M(r, f) + M(r_0, f)], \quad r_0 = |z_0|, \qquad (21')$$

где K_1 — постоянная. Если $r_0 \leqslant r$, то $M(r_0, f)$ не превосходит $M(r, f)$. Допустим $r < r_0 < r\left(1 + \frac{h}{\nu}\right)$ и z_0 — точка, в которой $|f(z_0)| = M(r_0, f)$. Применим формулу (11) к $z = z_0\frac{r}{r_0}$, что можно сделать, так как

$$|u| = \left|1 - \frac{z}{z_0}\right| = 1 - \frac{r}{r_0} < \frac{h}{\nu}.$$

Мы получим:

$$\left|f\left(z_0\frac{r}{r_0}\right)\right| > \left(\frac{r}{r_0}\right)^\nu \left| f(z_0) - 2K_1 M(r_0, f)\sum_0^q k_j \nu^{j(\beta-1)} - \right.$$

$$\left. - k_{q+1} M(r_0, f)\, \nu^{(q+2)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)-(q+1)}\right|,$$

где k_j и k_{q+1} — постоянные. Так как все показатели степени при ν отрицательны, то мы видим, что, начиная с некоторого значения ν, следовательно, с некоторого r, выполняется неравенство

$$M(r, f) > \frac{e^{-h}}{2} M(r_0, f).$$

Таким образом, в обоих случаях, возвращаясь к $f_j(z_0)$, неравенство (21) может быть написано в виде

$$|f_j(z_0)| < KM(r, f)\nu(r, f)^{\beta_j}, \tag{22}$$

где K — постоянная, зависящая от α, q и h, z_0 удовлетворяет неравенству (19) и r достаточно близко к своему пределу (∞ или 1). Равенство (12) из § 71, где мы положим $n = \nu(r)$, дает нам:

$$|z_0^j f^{(j)}(z_0) - \nu(\nu-1)\ldots(\nu-j+1)f(z_0)| <$$
$$< (j!)[|f_j(z_0)| + \nu|f_{j-1}(z_0)| + \ldots + \nu^{j-1}|f_1(z_0)|]$$

и если примем во внимание неравенство (22), то получим, что выражение, стоящее в квадратных скобках, менее, чем

$$KM(r, f)[\nu^{\beta_j} + \nu^{1+\beta(j-1)} + \ldots + \nu^{\beta+j-1}] < jKM(r, f)\nu^{j+\beta-1}.$$

Итак, при всех z на окружности $|z| = r$ мы получаем:

$$\left|\left(\frac{z}{\nu}\right)^j f^{(j)}(z) - f(z)\right| < K'\nu^{\beta-1}M(r, f),$$

где K' — некоторая новая постоянная. Так как число $\beta - 1$ отрицательно, то можно найти такое $\gamma > 0$, что $\beta - 1 + \gamma$ будет отрицательным. Имеет место следующий результат:

Если $f(z)$ — целая функция или степенной ряд, определяющий функцию конечного порядка в круге $|z| < 1$ и если r является обыкновенным или замечательным значением, достаточно близким к своему пределу (∞ или 1), то во всех точках окружности $|z| = r$, в которых одно из чисел

$$|f(z)|, \left|\frac{z}{\nu}f'(z)\right|, \ldots, \left|\left(\frac{z}{\nu}\right)^q f^{(q)}(z)\right| \quad [\nu = \nu(r, f)]$$

более чем

$$M(r, f)\nu^{-\gamma},$$

при $j=1, 2, \ldots, q$ *имеем*:

$$f^{(j)}(z)=[1+\varepsilon_j(z)]\left(\frac{\nu}{z}\right)^j f(z), \tag{23}$$

где ε_j *равномерно стремится к нулю, когда* r *стремится к своему пределу*; γ — *положительное число, зависящее от* q *и* α. *Можно предполагать, что оно выбрано (между* 0 *и* 1) *так, что*

$$|\varepsilon_j(z)|<\nu^{-\delta}, \quad \delta>0.$$

Но, впрочем,

$$\ln M(r, f)>\ln \mu(r, f),$$

и так как число $k=k(L)$ бесконечно возрастает вместе с ν (§§ 69,70), то

$$\mu(r, f)>\mu(u, F), \quad u=\frac{r}{L} \text{ или } rL,$$

и, учитывая равенство (8), видим, что

$$\ln M(r, f)>K'\nu^{\alpha}, \quad K'>\frac{1-\alpha}{2}. \tag{24}$$

К этому неравенству можно присоединить в случае степенного ряда еще неравенство

$$\nu>\frac{K''}{(1-r)^{\theta}}, \quad \theta=\frac{1}{1-\alpha}. \tag{25}$$

§ 73. Применения к приближенному определению $M(r, f)$ и $M(r, f^{(j)})$. Соотношение (23) показывает, в частности, что

$$M(r, f^{(j)})\geqslant(1-o(1))\left(\frac{\nu}{r}\right)^j M(r, f)$$

и, следовательно, (23) имеет место в точках, где $|f^{(j)}|$ достигает максимума. Таким образом, если r является обыкновенным или замечательным значением, то будем иметь:

$$M(r, f^{(j)})\sim\left(\frac{\nu(r, f)}{r}\right)^j M(r, f), \quad j=1, 2, \ldots, q. \tag{26}$$

Но не бесполезно отметить, что такое асимптотическое равенство не может иметь места при любых r и произвольной функции $f(z)$, так как все члены этой формулы, кроме $\nu(r, f)$, являются непрерывными функциями от r, в то время

как $\nu(r, f)$ может иметь разрывы с резкими скачками, сколь угодно большими.

Это a fortiori справедливо по отношению к формуле (23), которая верна лишь локально при рассматриваемых значениях r.

Равенство (26) показывает, что оценка (27), полученная в § 57, была очень точна (с точностью до ε), поскольку как следствие равенства (2) § 67 мы имеем:

$$\nu(r, f) < r^{\rho+\varepsilon}, \tag{27}$$

причем при регулярном возрастании это неравенство обращается в точное равенство, если заменить ε через η, $|\eta| < \varepsilon$.

При рассматриваемых r оценка для U_1 и U_2, сделанная в § 71, если положить $u = 0$, $q = -1$, дает:

$$M(r, f) = \sum C_n r^n < C\mu(r)\nu(r)^{1-\frac{\alpha}{2}}, \tag{28}$$

где α может быть взято сколь угодно близким к единице в случае, когда $f(z)$ — целая функция, и сколь угодно близким к $\rho/(1+\rho)$, когда $f(z)$ — степенной ряд положительного порядка ρ. Таким образом, в случае целой функции при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ мы имеем:

$$M(r, f) < \mu(r, f)[\nu(r, f)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tag{29}$$

если r является достаточно большим обыкновенным значением; в случае же степенного ряда порядка ρ имеем:

$$M(r, f) < \mu(r, f)[\nu(r, f)]^{\frac{2+\rho}{2+2\rho}+\varepsilon}, \tag{30}$$

если r является замечательным значением, достаточно близким к единице. Для бесконечного ρ оба неравенства совпадают, но замечательные значения могут быть более редкими, чем обыкновенные.

В частности, для целой функции конечного порядка равенство (2) и вычисления § 57 показывают, что

$$\nu(r, f) < r^{\rho+\varepsilon},$$

следовательно, в силу (29), для обыкновенных значений имеем:

$$M(r, f) < \mu(r, f) r^{\frac{\rho}{2}+\varepsilon}.$$

В этом случае целой функции можно в (29) вместо $\nu(r, f)$ ввести $\ln \mu(r, f)$. Действительно, так как $f(z)$ мажорируется функцией $KF\left(\frac{r}{L}\right)$, где k стремится к бесконечности, причем обе функции имеют одинаковые максимальные члены, то

$$\ln \mu(r, f) > \ln \mu(u, F) > \frac{1}{2} \nu^{\alpha}, \quad u = \frac{r}{L},$$

если r достаточно велико. Следовательно, справедливы неравенства

$$\nu(r)^{1-\frac{\alpha}{2}} < C' (\ln \mu)^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}} < (\ln \mu)^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

и неравенство

$$M(r, f) < \mu(r, f) [\ln \mu(r, f)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \tag{31}$$

имеет место для достаточно больших обыкновенных значений $r > r(\varepsilon)$ при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$.

Асимптотическое определение $M(r, f)$ может быть осуществлено, если ограничиться лишь членами $f(z)$, близкими к максимальному. Действительно, достаточно увеличить число членов, использованных при оценке U_1 и U_2, чтобы получить следующий результат:

Для всех замечательных или обыкновенных r значение $M(r, f)$ асимптотически равно (когда r стремится к 1 или к ∞) максимуму

$$\left| \sum_{\nu-P}^{\nu+P} c_n z^n \right|, \quad P = \nu^{1-\frac{\alpha}{2}+\varepsilon}, \quad \nu = \nu(r, f)$$

при $|z| = r$, где ε — сколь угодно малое положительное число.

Для целой функции можно взять α близким к единице, тогда получим приблизительно значение $P = \sqrt{\nu}$, связанное с теоремой Бернулли из теории вероятностей.

§ 74. Область, покрываемая значениями $Z = f(z)$. Пусть r — обыкновенное или замечательное значение. Предположим опять, что выполняются условия (19) и (20), которые влекут за собой неравенства (21) и (22).

Если мы заменим (20) более сильным неравенством,

$$|z-z_0|<\frac{D|z_0|}{\nu(r)},$$

то равенство (11) нам даст:

$$f(z)=\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\nu}[f(z_0)+\lambda M(r, f)],$$

где

$$|\lambda|<K'\nu^{\beta-1}.$$

Если, в частности, $|f(z_0)|=M(r, f)$, $|z_0|=r$, то мы получим:

$$f(z)=\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\nu}f(z_0)[1+\theta(z, z_0)], \tag{32}$$

где

$$|\theta(z, z_0)|<\nu^{-\delta} \tag{33}$$

и δ — положительное число, заключенное между β и единицей. Это равенство (32) имеет место для обыкновенных или замечательных значений r, достаточно близких к своему пределу. При этих условиях оно справедливо именно, если

$$\left|\ln\left|\frac{z}{z_0}\right|\right|<\frac{1}{\nu}, \quad \left|\arg\frac{z}{z_0}\right|<\frac{1}{\nu}. \tag{34}$$

Когда z описывает сектор кольца (34), то точка

$$Z_1=\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\nu}f(z_0)$$

соответствует ей взаимно однозначно в секторе кольца

$$|\ln|Z_1|-\ln M(r, f)|<1, \quad |\arg Z_1-\arg f(z_0)|<1.$$

Следовательно, функция Z_1 однозначна в (34), и в силу соотношений (32) и (33) мы имеем:

$$Z=f(z)=Z_1+Z_2,$$

причем на контуре (34) имеем:

$$\left|\frac{Z_2}{Z_1}\right|<\nu^{-\delta}<1,$$

начиная с r, достаточно близких к своему пределу. По теореме Руше функция Z также однолистна в (34). Поверх-

ность Римана — Пуанкаре, описываемая Z, содержит следовательно, части, соответствующие сектору

$$|\ln|Z| - \ln M(r, f)| < \frac{1}{2}, \quad |\arg Z - \arg f(z_0)| < \frac{1}{2}.$$

В частности, мы видим, что

Поверхность Римана — Пуанкаре, описываемая значениями целой функции, содержит диск произвольно большого радиуса. Это же имеет место по отношению к поверхности, описываемой степенным рядом, сходящимся при $|z| < 1$ и имеющим положительный порядок в этом круге.

Блох, стараясь распространить результаты этого последнего характера на произвольные степенные ряды, пришел к следующей теореме, ставшей ныне уже классической.

Если $Z = f(z)$ голоморфна при $|z| < 1$ и если $f'(0) = 1$, то поверхность, описываемая Z при $|z| < 1$, содержит круговой диск радиусом не менее, чем некоторая положительная константа B.

Эта теорема в настоящее время находит себе применение в общей теории покрытий Альфорса.

Макинтайр представил в более простой, более краткой и иногда более точной форме некоторые результаты метода Вимана — Валирона. В работе Валирона **18** можно найти также другие ссылки, относящиеся к этому методу.

Литературные ссылки

§ 67. Hadamard, 1; Valiron, 2, 3, 4, 5.
§§ 68, 69, 70. Valiron, 2, 3, 4, 5.
§ 71. Wiman, 1; Valiron, 2, 3, 4, 18.
§§ 72, 73. Valiron, 2, 3, 4, 18.
§ 74. Valiron, 3, 4; Bloch, 1; Ahlfors, 2; Macintyre, 1, 2.

ГЛАВА X

ПОРЯДОК И ВОЗРАСТАНИЕ РЕШЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 75. Решения в целых функциях линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Q_p(z)\,y^p + Q_{p-1}(z)\,y^{(p-1)} + \ldots + Q_0(z)\,y + Q_{-1}(z) = 0, \quad (1)$$

где $Q_k(z)$ — многочлены, а y — неизвестная функция. Допустим, что целая трансцендентная функция $y = f(z)$ удовлетворяет этому уравнению. Допустим, что r принимает обыкновенное значение и положим $z = re^{i\varphi}$, где φ выбрано так, что $|f(z)| = M(r, f)$. Обозначим через $A_k z^{m_k}$ старший член в многочлене $Q_k(z)$. Разделим правую и левую часть (1) на y; отношение $Q_{-1}(z)$ к y стремится к нулю вместе с r^{-1} быстрее любой степени r^{-1}. Принимая во внимание равенство (23) из § 72, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{p} A_k \nu^k z^{m_k - k}\,(1 + \varepsilon_k(z)) = 0, \quad (2)$$

где

$$|\varepsilon_k(z)| < D(\nu^{-\delta} + r^{-1}), \quad k = 0, 1, \ldots, p, \quad (3)$$

и где D — постоянная, не зависящая от r, $\delta > 0$ и $\nu = \nu(r, f)$.

Рассмотрим алгебраическое уравнение, соответствующее уравнению (2),

$$\sum_{0}^{p} A_k (1 + t_k)\,\nu^k z^{m_k - k} = 0, \quad (4)$$

где ν — неизвестная функция от z, а t_k — параметры, не превосходящие по модулю числа, меньшего чем единица. Допустим, что $|\nu|$ и $|z|$ очень велики и допустим, что t_k

стремятся к нулю. Тогда решения уравнения (4) асимптотически равны решениям уравнения, получающегося при обращении в нуль всех t_k:

$$\sum_0^p A_k \nu^k z^{m_k - k} = 0. \tag{5}$$

Главные части этих решений определяются по методу Пюиэ: строится ломаная Ньютона *) посредством точек B_k с координатами $(k, m_k - k)$; эта ломаная имеет своими вершинами некотрые из точек B_k, причем остальные точки лежат на этих сторонах или под ними. Эта ломаная должна иметь по крайней мере одну сторону с отрицательным угловым коэффициентом. Если ρ есть угловой коэффициент одной из сторон $P(\rho)$ с отрицательным угловым коэффициентом, то уравнение (5) имеет решение

$$\nu \sim a(\rho) z^{\rho}, \tag{6}$$

причем число $a(\rho)$ определяется из уравнения

$$\sum A_k a(\rho)^k = 0, \tag{7}$$

где сумма распространена по всем целым k, при которых точки B_k лежат на стороне $P(\rho)$. Такому решению уравнения (5) соответствует решение уравнения (4), которое удовлетворяет (6) и (7). Значение ρ равно одному из чисел

$$\frac{m_k - k - m_{k'} + k'}{k' - k}, \quad k' \neq k,$$

следовательно, оно не менее чем $\frac{1}{p}$ и оно может принимать p различных рациональных значений, которые не зависят от частных значений A_k. Также числа $a(\rho)$ могут принимать p различных значений, которые, однако, зависят от A_k. Кроме того, поскольку ν — действительные числа, то равенство (6) накладывает на аргумент φ числа z требование быть близким к некоторым определенным числам. Итак, каждому достаточно большому обыкновенному значению r соответствуют числа $\rho(r)$, $\alpha(r)$, $\varphi(r)$ такие, что

$$\nu(r) \sim \alpha(r) r^{\rho(r)},$$
$$|f(z)| = M(r, f), \quad |z| = r, \quad \arg z = \varphi(r),$$

*) См. примечание на стр. 195. (*Прим. ред.*)

где $\rho(r)$ — рационально, причем $\rho(r)$ и $\alpha(r)$ могут быть одной из p пар определенных чисел, $\varphi(r)$ — асимптотически равно одному из конечного числа определенных чисел.

Так как $\nu(\rho)$ не убывает, то $\rho(r)$ и $\alpha(r)$ могут только возрастать, когда r остается в обыкновенном интервале. С другой стороны, если R и R', $R < R'$, являются двумя обыкновенными значениями, концами исключительного интервала, то мы видели, что

$$R' = R(1 + o(1)). \tag{8}$$

Тогда будем иметь:

$$\nu(R') \sim \alpha(R') R'^{\rho(R')} \sim \alpha(R') R^{\rho(R')},$$

$$\nu(R) \sim \alpha(R) R^{\rho(R)},$$

следовательно,

$$\rho(R') \geqslant \rho(R),$$

причем в случае равенства будет справедливо неравенство $\alpha(R') \geqslant \alpha(R)$. Из этого следует, что $\rho(r)$ и $\alpha(r)$ постоянны, начиная с некоторого значения r. Если ρ и α означают эти постоянные значения, то равенство (8) показывает, наконец, что для всех значений r, обыкновенных или нет, мы имеем:

$$\nu(r) \sim \alpha r^{\rho}$$

и

$$\ln M(r, f) \sim \int_{r_0}^{r} \alpha x^{\rho-1} dx \sim \frac{\alpha}{\rho} r^{\rho}.$$

Функция $f(z)$ имеет конечный рациональный порядок ρ и принадлежит конечному типу. $M(r, f)$ сравнима с некоторой экспоненциальной функцией.

Более того, для обыкновенных значений, т. е. за исключением множества интервалов, где полная вариация $\ln r$ конечна, аргумент точки z, в которой $|f(z)|$ достигает своего максимума $M(r, f)$, близок к некоторым определенным числам. Мы выскажем это свойство следующим образом.

Всякая целая функция, удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению с рациональными коэффициентами, имеет конечный рациональный порядок и принадлежит к экспоненциальному звездному типу.

§ 76. Обобщение. Более общим образом, если коэффициенты $Q_j(z)$ линейного однородного дифференциального уравнения порядка p

$$Q_p(z)\,y^{(p)}+\ \ldots\ +Q_0(z)\,y=0$$

все голоморфны в окрестности бесконечно удаленной точки, которая не более чем полюс для этих коэффициентов, то известно, что существует по крайней мере одно решение вида

$$y=z^{\lambda}F(z), \tag{9}$$

где λ — действительное или комплексное число, а $F(z)$ — функция, голоморфная вне некоторого круга, $|z|\leqslant R$. Функция $F(z)$ может не иметь в бесконечности особенности, отличной от полюса; тогда, меняя λ, мы придем к случаю, когда $F(z)$ голоморфна в бесконечности; можно, следовательно, вычислить один за другим ее коэффициенты Лорана; этот случай называется регулярным. Перейдем к случаю, именуемому иррегулярным, который и является общим, когда $F(z)$ имеет в бесконечности существенно особую точку. Тогда можем написать:

$$F(z)=f(z)+G(z), \tag{10}$$

где $G(z)$ — голоморфна в бесконечности и равна нулю в этой точке, а $f(z)$ — трансцендентная целая функция (не многочлен). Тогда мы непосредственно видим, что если r — обыкновенное значение для $f(z)$ и z таково, что $|f(r)|=M(r, f)$, $|z|=r$, то имеет место равенство

$$\frac{y^{(j)}}{y}=\left(\frac{\nu(r)}{z}\right)^{j}(1+o(1)),\quad \nu(r)=\nu(r, f)$$

и все сказанное в § 75 остается справедливым:

Иррегулярные решения (9) *имеют вид* (10), *где* $f(z)$ *имеет рациональный порядок и принадлежит к экспоненциальному звездному типу, а* $G(z)$ *голоморфна и равна нулю в бесконечно удаленной точке,*

§ 77. Решения алгебраических дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение первого порядка, алгебраическое относительно z, y, y', где z — независимая переменная, y — неиз-

вестная функция, а y' — производная по z. Можно записать это уравнение в виде

$$\Phi\left(y,\ \frac{zy'}{y},\ z\right)=0, \tag{11}$$

где Φ—многочлен от трех переменных, степени m по y. Пусть

$$\psi\left(\frac{zy'}{y},\ z\right)=\sum a_{p,\,q}\left(\frac{zy'}{y}\right)^p z^q,$$

где $0\leqslant p\leqslant P$ и $0\leqslant q\leqslant Q$ будет коэффициентом при y^m в Φ. Допустим на время, что $m>0$.

Если уравнение (11) имеет решение вида (9), где $F(z)$ — функция, определяемая (10), причем $f(z)$ — трансцендентная целая функция, и если z равно по модулю обыкновенному значению r и таково, что $|f(z)|=M(r, f)$, то уравнение (11) после деления на y^m напишется в виде

$$\psi\left(\frac{zy'}{y}, z\right)+\chi\left(\frac{1}{y}, \frac{zy'}{y}, z\right)=0, \tag{12}$$

где χ — многочлен от трех переменных.

Так как выражение

$$\left|\frac{1}{y^s}\left(\frac{zy'}{y}\right)^p z^q\right|<2\frac{\nu^p r^q}{M(r)^s}\quad (s>0)$$

менее чем r^{-K}, как бы велико ни было $K>0$, если только r достаточно велико, то модуль χ менее чем Hr^{-K}, где H — определенное число, и уравнение (12) может быть написано в виде

$$\sum a_{p,\,q}(1+\varepsilon_{p,\,q}(z))\nu^p z^q=0, \tag{13}$$

где

$$|\varepsilon_{p,\,q}(z)|<\frac{H'}{\nu\delta}+\frac{H''}{r},$$

и где ν определена как функция от z посредством алгебраического уравнения, коэффициенты которого известны асимптотически. Ничто не требует изменений в рассуждениях и заключениях § 75. Имеем по-прежнему:

$$\nu(r)\sim\alpha r^{\beta},$$

и направления, соответствующие максимуму $|f(z)|$, известны приближенным образом.

В случае, когда $m=0$, уравнение (11) будет непосредственно иметь вид

$$\Phi_1\left(\frac{zy'}{y}, z\right)=0,$$

где Φ_1 — многочлен от двух переменных. Получаемое из него уравнение будет вида (13).

Всякое решение вида (9) *алгебраического дифференциального уравнения первого порядка, где $F(z)$ имеет существенную особую точку в бесконечности, будет вида* (10), *где $f(z)$ имеет рациональный порядок и принадлежит экспоненциальному звездному типу.*

Результат остается справедливым и в том случае, если уравнение будет алгебраическим относительно y и y' и если коэффициенты являются функциями, голоморфными в окрестности бесконечно удаленной точки, которая является для них не более чем полюсом.

§ 78. Общий случай алгебраических уравнений порядка выше первого. Рассмотрим алгебраическое дифференциальное уравнение порядка выше первого:

$$\Omega(y^{(p)}, y^{(p-1)}, \ldots, y', y, z)=0, \tag{14}$$

где Ω — многочлен от $p+2$ переменных, y — неизвестная функция от z. Допустим, что уравнение удовлетворяется некоторой целой функцией или в более общей форме функцией вида (9), где $F(z)$ имеет существенную особенность в бесконечности и, следовательно, представима в виде (10), где $f(z)$ — целая функция, а $G(z)$ голоморфна в бесконечности и равна нулю в этой точке. В (14) заменим каждое $y^{(j)}$ через

$$y\nu^j z^{-j}(1+t_j),$$

где t_j являются параметрами. Умножая на подходящую степень z, мы получим многочлен от y определенной степени $m>0$. Отношение y^q к y^m при $q<m$ должно стремиться к нулю, если r, являющееся обыкновенным значением для $f(z)$, стремится к бесконечности. Следовательно, коэффициент при y^m, который является многочленом относительно ν, z, t_j (обозначим его через $\Theta(\nu, z, t_j)$), должен стремиться к нулю.

Параметры t_j стремятся к нулю, когда r стремится к бесконечности. Если ломаная Ньютона *), которая доставляет криволинейные асимптотические направления алгебраической кривой $\Theta(\nu, z, t_j) = 0$ (когда $|\nu|$ и $|z|$ стремятся к бесконечности), при достаточно малых $|t_j|$ будет та же самая, что и для предельной кривой $\Theta(\nu, z, 0)$, то асимптотические значения ν как функции от z будут определяться так же, как в § 75; будем иметь:

$$\nu(r) \sim \alpha r^{\rho},$$

и рассматриваемые решения будут того же типа: *$f(z)$ будет иметь конечный положительный рациональный порядок и конечный тип возрастания и будет принадлежать к экспоненциальному звездному типу.*

Можно было бы улучшить этот результат, используя более полным образом свойства отношения $y^{(j)}/y$ в окрестности тех значений z, при которых $|f(z)|$ достигает своего максимума. Можно также получить предложения отрицательного характера, иными словами, показать, что некоторые алгебраические дифференциальные уравнения не могут иметь решений рассматриваемого вида (9) (независимо от всех рассмотрений порядка): достаточно, чтобы многочлен $\Theta(\nu, z, t_p)$ сводился к одночлену от ν и z, и более общим образом, чтобы не существовал ломаной Ньютона, доставляющей криволинейные асимптотические направления.

Среди случаев, когда метод не дает положительных результатов вследствие стремления t_p к нулю, очевидно, фигурируют те, в которых уравнение содержит такие комбинации, как

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2,$$

которая может себя вести весьма различным образом в окрестности точек, где y достигает своего максимума (при $|z| = r$); так, эта комбинация равна нулю тождественно, если $y = e^{az}$, $a = \text{const}$, она равна $-1/y^2$, если $y = \sin z$, она асимптотически равна $-\frac{\nu(r)}{2z^2}$, если $y = \operatorname{ch}\sqrt{z}$.

---

*) См. примечание на стр. 195. (*Прим. ред.*)

Другой пример: если y — целая функция конечного положительного порядка, удовлетворяющая алгебраическому дифференциальному уравнению порядка p, то функция

$$Y = \exp \int y\,dz$$

будет бесконечного порядка и удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению порядка $p+1$.

79. Целые функции нулевого порядка, удовлетворяющие алгебраическому дифференциальному уравнению третьего порядка. В силу результатов § 77 целая функция нулевого порядка не может быть решением алгебраического дифференциального уравнения первого порядка, и можно было поставить вопрос, может ли такая функция быть решением алгебраического дифференциального уравнения более высокого порядка. Мы сейчас увидим, что теория локсодромических функций (или эллиптических функций) доставляет примеры такого рода. Будем исходить из функции

$$S(z) = \prod_0^\infty \left(1 - \frac{z}{k^n}\right) \prod_1^\infty \left(1 - \frac{1}{zk^n}\right), \quad |k| > 1,$$

которая удовлетворяет функциональному уравнению

$$S(kz) = -kzS(z).$$

Функция

$$\chi(z) \equiv z\frac{S'(z)}{S(z)}$$

удовлетворяет уравнению Абеля

$$\varphi(kz) \equiv \varphi(z) + 1,$$

и следовательно, функция

$$\rho(z) \equiv z\chi'(z)$$

является локсодромической функцией, инвариантной относительно подстановки (z, kz). Эта функция $\rho(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$z^2\rho'(z)^2 = 4(\rho(z) + c)^3 - G_2(\rho(z) + c) - G_3,$$

где G_2, G_3 и c — постоянные, зависящие от k. Из этого вытекает, что $S(z)$ является решением алгебраического дифференциального уравнения третьего порядка, которое легко построить. Если положим

$$S(z) = (1 - z) N(z),$$

то $N(z)$ также будет решением алгебраического дифференциального уравнения

$$\Omega(N''', N'', N', N, z) = 0. \tag{15}$$

Но имеем:

$$N(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{k^n}\right)\left(1 - \frac{1}{k^n z}\right) =$$

$$= \prod_1^\infty \left[1 + \frac{1}{k^{2n}} - \frac{1}{k^n}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right] = \beta F(u),$$

где

$$\beta = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{1}{k^{2n}}\right), \quad u = z + \frac{1}{z}$$

и

$$F(u) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{u}{k^n + k^{-n}}\right). \tag{16}$$

Следовательно, целая функция $F(u)$ является решением дифференциального уравнения третьего порядка, получаемого из (15) с помощью исключения z из (15) и

$$z + \frac{1}{z} = u, \quad N(z) = \beta F(u),$$

$$N'(z) = \beta F'(u)\left(1 - \frac{1}{z^2}\right),$$

$$N''(z) = \ldots, \quad N'''(z) = \ldots,$$

что дает:

$$\Omega_1(F''', F'', F', F, u) = 0, \tag{17}$$

где Ω_1 — многочлен.

Функция $F(u)$, определяемая соотношением (16), имеет порядок, равный нулю. В этом можно убедиться, замечая, что $k^n + k^{-n}$ асимптотически равно k^n, при достаточно больших n и что при достаточно больших r имеет место неравенство

$$M(r, F) < AG(2r),$$

где A — постоянная, а

$$G(r) = \prod_1^\infty \left(1 + \frac{r}{K^n}\right),$$

$$K = |k|.$$

Но $G(r)$ удовлетворяет уравнению типа Пуанкаре:

$$G(Kr) = (1 + r)\, G(r)$$

и применим результат § 51. Здесь имеем $\sigma = K$, $\rho = 1$, $q = 1$, следовательно,

$$\ln M(r, G) \sim \frac{1}{2 \ln K} (\ln r)^2,$$

откуда получаем границу для $M(r, F)$. Можно проверить, впрочем, что

$$\ln M(r, F) \sim \frac{1}{2 \ln K} (\ln r)^2.$$

Итак, функция $F(u)$, являющаяся решением уравнения (17), имеет тот же характер возрастания, который был введен в теории локсодромических функций (см § 51). Но путем итерации можно получить другой характер возрастания: функция $G(u) = F[F(u)]$ удовлетворяет алгебраическому дифференциальному уравнению шестого порядка, причем

$$\ln M(r, G) \sim K_1 (\ln r)^4,$$

где K_1 — постоянная. Все итерации $F(u)$ имеют нулевой порядок и являются решениями алгебраических дифференциальных уравнений.

Но до сих пор не известно, может ли целая функция нулевого порядка быть решением алгебраического дифференциального уравнения второго порядка.

§ 80. Функции бесконечного порядка, голоморфные при $|z|<1$, и алгебраические дифференциальные уравнения. Рассмотрим в круге $|z|<1$ функцию $y=F(z)$, голоморфную и имеющую в этом круге бесконечный порядок. Может ли такая функция удовлетворять дифференциальному уравнению первого порядка, которое можем написать в виде (11) как в § 77:

$$\Phi\left(y, \frac{zy'}{y}, z\right)=0,$$

где Φ — многочлен. Можно рассуждать здесь, как в § 77, используя замечательные значения r. Будем иметь:

$$\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{M(r, F)}, \quad |z|<1, \quad \left|\frac{y'}{y}z\right|<2\nu(r, F),$$

если только r достаточно близко к единице. Из этого вытекает, что если m — степень многочлена (11) по y, положительна, то, деля на y^m, будем еще иметь:

$$\left|\psi\left(\frac{zy'}{y}, z\right)\right|<\frac{\nu(r, F)^c}{M(r, F)}, \tag{18}$$

где c — постоянная, не зависящая от r, а ψ — многочлен:

$$\psi\equiv\left(\frac{zy'}{y}\right)^s Q_s(z)+\ldots+Q_0(z), \quad s\geqslant 0, \tag{19}$$

где $Q_j(z)$ — многочлены. Если r достаточно близко к единице, то имеем:

$$\left|\frac{zy'}{y}\right|>\frac{1}{2}\nu(r, F)>\frac{K''}{2(1-r)^\theta},$$

где θ сколь угодно велико. Стало быть, именно член степени s дает порядок ψ, так как даже в случае, когда $Q_s(z)$ обращается в нуль в некоторых точках $|z|=1$, мы имеем:

$$|Q_s(z)|>A(1-r)^t,$$

где A и t — определенные постоянные. Следовательно, если даже $s=0$, то $|\psi|$ остается более чем некоторая конечная положительная степень $1-r$, тогда как правая часть неравенства (18) стремится к нулю как экспоненциальная функция $\exp[-(1-r)^{-\beta}]$, $\beta>0$. Это доказывает невозможность. Если

$m=0$, то уравнение (11) будет вида $\psi=0$, где ψ — многочлен вида (19) с $s>0$, и то, что было сказано выше, влечет за собой невозможность.

Итак, *функция $F(z)$, голоморфная и бесконечного порядка в круге $|z|<1$, не может быть решением алгебраического дифференциального уравнения первого порядка.*

Предположим теперь, что речь идет об алгебраическом дифференциальном уравнении порядка выше первого; обозначим его

$$\Delta(z, y, y', \ldots, y^{(q)})=0,$$

где Δ — многочлен. Заменим каждое $y^{(j)}$ $(j=1, 2, \ldots, q)$ через $y^{\nu j}z^{-j}$ и, не делая никаких преобразований, упорядочим его по y. Существует член наибольшей степени λ по y; после умножения на надлежащую степень z коэффициент при этом члене будет многочленом по ν и z, обозначим его через $G(\nu, z)$. Деля обе части уравнения на y^{λ} (λ положительно), видим, что для того, чтобы некоторое решение $F(z)$, голоморфное и бесконечного порядка в круге $|z|<1$, могло существовать, необходимо, чтобы $G(\nu, z)$ было порядка $[M(r, f)]^{-1+\varepsilon}$, где $1-\varepsilon>0$. Но в $G(\nu, z)$ значение ν очень велико, когда $|z|$ близок к единице. Упорядочим $G(\nu, z)$ по степеням ν и осуществим приведение подобных членов, если эта операция не ведет к исчезновению членов. Если, таким образом, останется только один член высшей степени, обозначим его через $\nu^{q}Q(z)$, то убеждаемся, как и выше, что $F(z)$ не может удовлетворять рассматриваемому уравнению.

Если многочлен Δ имеет заданную форму с заданными произвольными числовыми коэффициентами, то рассмотренные обстоятельства будут всегда иметь место, за исключением некоторых специальных случаев выбора числовых коэффициентов. Можно, следовательно, сказать, что общее алгебраическое дифференциальное уравнение не имеет решений рассматриваемого типа.

В частности, функции, построенные в главе VIII, имеют бесконечный порядок, они не могут быть решениями алгебраических дифференциальных уравнений первого порядка, а также и решениями уравнений высших порядков, за исключением некоторых частных типов этих уравнений.

§ 81. О некоторых других результатах. Теорема Гёльдера. Среди результатов, указанных в этой главе, некоторые, относящиеся к целым функциям и другим аналогичным функциям, являются положительными; они утверждают, что функции типа целых функций, которые являются решениями алгебраических дифференциальных уравнений, удовлетворяющих определенным условиям, будут иметь положительный рациональный порядок и будут принадлежать к экспоненциальному звездному типу; нельзя получить возрастания, аналогичного по характеру возрастанию известных решений функциональных уравнений Пуанкаре (§ 51). Но если задано некоторое уравнение, например линейное, все решения которого являются целыми функциями, то остается еще определить порядок возрастания и свойства этих функций. По вопросам этого рода следует обратиться к работам Виттиха.

Все остальные полученные результаты носят исключительно отрицательный характер; они утверждают, что те или иные данные функции не могут быть решениями алгебраических дифференциальных уравнений такой-то категории; например, целая функция нулевого порядка или бесконечного порядка не может быть решением алгебраического дифференциального уравнения первого порядка (что вытекает из положительного результата в случае, когда существует решение, являющееся целой функцией), а также многочисленных уравнений более высокого порядка.

Среди результатов отрицательного характера следует отметить знаменитую теорему Гёльдера, более простое доказательство которой можно найти в работе Островского: *функция Эйлера* $\Gamma(z)$ *не может быть решением никакого алгебраического дифференциального уравнения*. Эта функция мероморфна, $1/\Gamma(z)$ является целой функцией первого порядка, но такой, что

$$\ln M\left(r, \frac{1}{\Gamma}\right) \sim r \ln r;$$

она не принадлежит экспоненциальному звездному типу, следовательно, не может быть решением тех уравнений, для которых нами были получены положительные результаты. Теорема Гёльдера показывает, что это имеет место и для других уравнений; эта теорема основана на том, что

$\Gamma(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению, которое хорошо известно. Сходным методом Виттих показал, что решение функционального уравнения Пуанкаре, рассмотренного в § 51, в случае $p=1$, в котором это решение удовлетворяет соотношению (15) из § 51, не может быть решением алгебраического дифференциального уравнения какого бы то ни было порядка.

Литературные ссылки

§§ 75, 76, 77, 78. Wiman, 1; Valiron, 3, 4, 6.
§ 79. Valiron, 13, 19.
§ 80. Valiron, 18.
§ 81. Wittich, 1, 2, 3; Ostrowski, 1.

ЛИТЕРАТУРА

Ahlfors. — 1. Acta Soc. sc. fennicae, 1, 9, 1930; 2. Acta math., 65, 1935.

Aronszajn. — 1. Acta math., 65, 1935.

Bieberbach. — 1. Preussischen Acad. der W., 1916, p. 940—955; 2. Math. Zeitsc., 4, 1919.

Blaschke. — 1. Leipzig. Ber., 67, 1915.

Bloch. — 1. Annales Fac. sc. Toulouse. 17, 1925.

Blumenthal. — 1. Bull. société math., 35, 1907.

Borel. — 1. Thèse 1894: Annales École norm, 12, 1895; 2. Leçons sur les fonctions entières, 1900.

Carathéodory. — 1. Math. Annalen, 73, 1913; 2. Sitzungb. Preuss. Acad., 1929, p. 39; 3. (avec Aumann), Math. Annalen. 109, 1934.

Darboux. — 1. Leçons sur la théorie générale des surfaces, Première Partie.

Debey. — 1. Bull. sciences math., 52, 1928.

Denjoy. — 1. Comptes Rendus, 145, 1907; 2. Ibid., 148, 1909; 3. Ibid., 182, 1926.

Faber. — 1. Bayerischen Akad. der W., 1926, p. 39—42.

Fatou. — 1. Thèse: Acta Math., 30, 1906; 2. Bull. société math., 47, 1919 et 48, 1920; 3. Bull. sciences math., 45, 1920.

Fréchet. — 1. Acta math., 54, 1930.

Goursat. — 1. Cours d'analyse. Есть русский перевод, — см. Гурса, Курс математического анализа, т. II, ОНТИ, 1936.

Gronwall. — 1. Annals of math. 2, 16, 1914.

Hadamard. — 1. Bull. société math., 24, 1896.

Heins. — 1. Amer. J. Math., 63, 1941.

Hervé. — 1. Thése: Annales École norm. (3), 68, 1951.

Hurwitz. — 1. Comptes Rendus, 143, 1906 et 144, 1907.

Julia. — 1. Acta math., 42, 1918, p. 349.

Koebe. — 1. Göttinger Nachr., 1907, p. 191—210; 2. Ibid., 1909, p. 68—76.

Kœnigs. — 1. Annales École norm. (3), 1, 1884 et (3), 2, 1885.

Landau. — 1. Darstellung u. Begründung einiger n. Ergebnisse der Funktionentheorie, 1929; 2. Preuss. Acad. der W., 1926, p. 472.

Landau et Valiron. — 1. J. London math. soc., 4, 1929.

Mme Ferrand-Lelong. — 1. Annales École norm. (3), 59, 1942; 2. Bull. société math., 70, 1943.

Lindelöf. — 1. Acta soc. sc. fennicae, 46, 1915.

Littlewood. — 1. Proc. London math. soc., 23, 1924.

Лузин и Привалов. — 1. Annales École norm., 42, 1925.

Macintyre. — 1. Quart. J. of math., 9, 1938; 2. Math. Zeitsc., 44, 1938.
Marty. — 1. Thèse 1931: Annales Fac. sc. Toulouse (3), 23, 1931.
Montel. — 1. Leçons sur les familles normales. 1927. Есть русский перевод, — см. Монтель, Нормальные семейства аналитических функций, ОНТИ, 1937. 2. Leçons sur les fonctions univalentes, 1933; 3. Annales École norm., 29, 1912.
Nevanlinna. — 1. Eindeutige analytische Functionen, 1936. Есть русский перевод, — см. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, 1941. 2. Acta soc. sc. fennicae, 18, 1922.
Ostrowski. — 1. Math. Ann., 94, 1925.
Ostrowski et Gattegno. — 1. Memorial sc. math., fasc. 109—110, 1949.
Painlevé. — 1. Thése 1887, Annales Fac. sc. Toulouse, 2, 1888.
Picard. — 1. Traité d'Analyse; 2. Leçons sur qq. équations fonctionnelles, 1928.
Poincaré. — 1. Œuvres, t. IV.
Riemann. — 1. Œuvres. Есть русский перевод, — см. Риман, Сочинения, Гостехиздат, 1948.
Riesz (M.) — 1. J. für math., 140, 1911; 2. Göttinger Nachr., 1916, p. 62—65.
Riesz (M. et F.). — 1. IVe Congrès math. scand., 1916.
Ritt. — 1. Annals of math., 22, 1921.
Schwarz. — 1. Œuvres.
Valiron. — 1. Cours d'Analyse; 2, 3. Annales École norm. (3), 37, 1920 et 38, 1921; 4. Lectures on the general theory of integral functions, 1923 et 1949; 5. Bull. société math., 44, 1916, p. 45—64; 6. Ibid., 51, 1923; 7. Ibid., 53, 1925; 7'. Ibid., 59, 1931; 8. Bull. sciences math., 50, 1926, p. 200; 9. Ibid., 53, 1929; 10. Ibid., 55, 1931; 11. Ibid., 56, 1932; 12. Ibid., 76, 1952; 13. Comptes Rendus, 180, 1925, p. 571; 14. Ibid., 198, 1934; 15. Enseigt math., 1929; 16. J. de math., 15, 1936; 17. Ibid., 17, 1938; 18. Ibid., 31, 1952; 19. Revista Un. mat. Argentine, 12, 1947, p. 158; 20. Instituto mat., Montevideo, 1947; 21. IVe Congrés mat. Italien, Taormina, 1951.
Wiman. — 1. Acta math., 37, 1914 et 41, 1916.
Wittich. — 1. Archiv Math., 2, 1950; 2. Math. Ann., 122, 1950; 3. Math. Ann., 124, 1952.
Wolff. — 1. Comptes Rendus, 182, 1926; 2. Ibid., 183, 1926; 3. Bulletin société math., 57, 1929.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Ж. Валирон. Аналитические функции.

Редакторы *С. Я. Хавинсон* и *А. Т. Цветков.*

Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.*

Корректор *Е. А. Белицкая.*

Сдано в набор 20/V 1957 г. Подписано к печати 5/VIII 1957 г. Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 7,38. Условн. печ. л. 12,09. Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 6000. Т-06589. Цена книги 7 р. 75 к. Заказ № 2134.

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва, В-71, Б. Калужская ул., 15

Министерство культуры СССР.
Главное управление полиграфической промышлениости.
4-я тип. им. Евг. Соколовой
Ленинград, Измайловский пр., 29.